



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL**

KEFFERSON DE SOUSA CARTAXO

TEORIA DOS TETRAEDROS

**FORTALEZA, CE
2025**

KEFFERSON DE SOUSA CARTAXO

TEORIA DOS TETRAEDROS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro

FORTALEZA, CE
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Cartaxo, Kefferson de Sousa
Teoria dos tetraedros [recurso eletrônico] / Kefferson de
Sousa Cartaxo. - 2025.
74 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado
Profissional Em Matemática Rede Nacional, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Tiago Caula Ribeiro.
1. Tetraedros. 2. esferas. 3. generalização de teoremas..
I. Título.

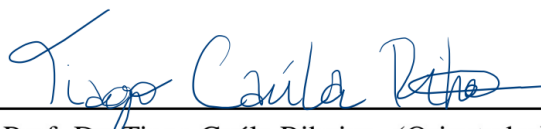
KEFFERSON DE SOUSA CARTAXO

TEORIA DOS TETRAEDROS

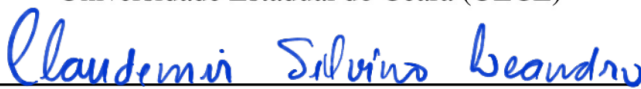
Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional.

Aprovado em: 27 de junho de 2025.

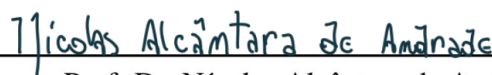
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro (Coorientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Prof. Dr. Nicolas Alcântara de Andrade
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho à minha esposa,
Mayara, e à minha filha, Maria Flor, a todo
apoio e compreensão que me prestaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha esposa, Mayara, por todo o carinho, tudo que fez por mim e por me estimular e ajudar nesta conquista. Aos professores do PROFMAT pelos ensinamentos fornecidos. E agradeço ao Professor Tiago Caúla Ribeiro por aceitar ser meu orientador e ter me dado tanto conhecimento durante o curso.

RESUMO

Este trabalho apresenta os principais fatos da teoria dos tetraedros, assim como se é feito para triângulos na geometria plana. O assunto é desenvolvido de forma mais elementar possível com o objetivo de ser usado para elaboração de aulas de professores da educação básica e superior. O primeiro capítulo expõe os conceitos gerais para a construção da teoria. Nos segundo e terceiro capítulos são apresentados alguns tetraedros notáveis e relações entre tetraedros e esferas. Por fim, no quarto capítulo são expostas generalizações de alguns teoremas clássicos da geometria plana para os tetraedros.

Palavras-chave: tetraedros; esferas; generalização de teoremas.

ABSTRACT

This work presents the main facts of tetrahedron theory, in a similar way to how it is done for triangles in plane geometry. The subject is developed in the most elementary way possible, with the aim of being used in lesson planning by teachers in both basic and higher education. The first chapter introduces the general concepts for building the theory. The second and third chapters present some notable tetrahedra and relationships between tetrahedra and spheres. Finally, the fourth chapter presents generalizations of some classical theorems from plane geometry to tetrahedra.

Keywords: tetrahedra; spheres; theorem generalization.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PROPRIEDADES DOS TETRAEDROS	10
2.1	Bimediana	10
2.2	Bialtura	13
2.3	Bariana	13
2.4	Altura	16
2.5	Empacotamento de tetraedros	18
2.6	Volume de um tetraedro	20
2.7	Esferas inscrita e circunscrita de um tetraedro	23
3	TETRAEDROS ESPECIAIS	27
3.1	Tetraedro de Crelle	27
3.2	Tetraedro ortocêntrico	31
3.3	Tetraedro trirretângulo	34
3.4	Tetraedro isofacial	38
3.5	Tetraedro isósceles	40
3.6	Tetraedro regular	47
4	ESFERAS RELACIONADAS A UM TETRAEDRO	50
4.1	Esferas escritas	50
4.2	Esfera de 12 pontos	55
4.3	Volume de uma esfera por tetraedros	60
5	GENERALIZAÇÃO DE TEOREMAS PARA TETRAEDROS	63
5.1	Desigualdade tetraédrica	63
5.2	Teorema de Viviani	64
5.3	Fórmula de Herão	65
5.4	Lei dos cossenos	67
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
	REFERÊNCIAS	71
	ANEXO A - UM POUCO MAIS SOBRE TETRAEDROS	73

1 INTRODUÇÃO

Existem muitas semelhanças entre triângulos e tetraedros, inclusive podemos generalizar várias definições e teoremas clássicos de geometria plana sobre triângulos para os tetraedros. O presente trabalho tem como objetivo agrupar as principais ideias da teoria dos tetraedros e expô-las de forma simples e elementar. Para isso, foi feita uma pesquisa bibliográfica nas principais revistas científicas do mundo, num intervalo de um século atrás até o ano presente.

É preciso, por parte do leitor, ter certos conhecimentos sobre geometria plana, diedros, triedros e poliedros para o entendimento de algumas sessões do texto. Os teoremas e proposições foram provados com a finalidade de tornar o texto o mais simples possível, ainda que cálculos muito elementares tenham sido deixados de lado no intuito de evitar que a leitura ficasse cansativa.

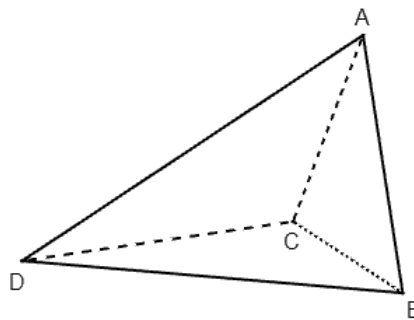
No primeiro capítulo serão apresentadas propriedades gerais dos tetraedros. Também veremos o conceito de empacotamento de tetraedros, formas de se calcular o volume de um tetraedro e a prova de que todo tetraedro sempre admite uma esfera inscrita e uma esfera circunscrita. No segundo capítulo veremos os principais tipos de tetraedros juntamente com suas principais propriedades, como, por exemplo, o tetraedro ortocêntrico, em que as alturas são concorrentes, e o tetraedro isósceles, que é o equivalente ao triângulo equilátero na teoria dos tetraedros. No terceiro capítulo mostraremos algumas esferas relacionadas aos tetraedros, tal como a esfera de 12 pontos que é uma generalização do círculo de 9 pontos da geometria plana. Encerraremos com o quarto capítulo provando que para tetraedros valem teoremas análogos à desigualdade triangular, teorema de Viviani, fórmula de Herão e lei dos cossenos.

2 PROPRIEDADES DOS TETRAEDROS

Neste capítulo abordaremos aspectos gerais dos tetraedros tais como os conceitos de bariana e altura e novos conceitos como bimediana e bialtura. Também veremos o empacotamento de tetraedros e formas de se calcular o volume de um tetraedro. Encerramos o capítulo com a prova de que sempre é possível se obter uma esfera inscrita e uma esfera circunscrita a um tetraedro.

Definição 01 (Tetraedros): **Tetraedro** é o poliedro formado por quatro faces triangulares.

Figura 1 - Tetraedro $ABCD$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação 1: Em um tetraedro $ABCD$, temos que:

- Os pontos A , B , C e D são chamados de **vértices**;
- Os segmentos AB , AC , BC , AD , BD e CD são chamados de **arestas**. Se duas arestas não têm vértices comuns, dizemos que são **arestas opostas**;
- Os triângulos ABC , ACD , ABD e BCD são chamados de **faces**.

Observação 2: Iremos denotar o tetraedro $ABCD$ por $A-BCD$ quando quisermos evidenciar que estamos considerando a face BCD como base.

2.1 Bimediana

Definição 02 (Bimediana): Chamamos de **bimediana** o segmento que une os pontos médios de duas arestas opostas de um tetraedro.

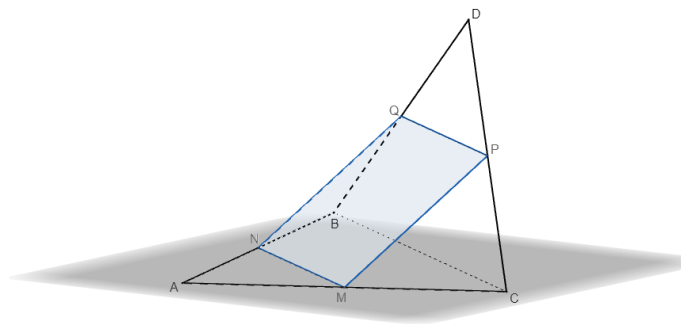
Dizemos que um quadrilátero é **reverso** quando um de seus vértices não pertence ao plano que contém os outros três. O próximo lema sobre quadriláteros reversos será usado

para auxiliar na demonstração da Proposição 01. Precisaremos usar dois resultados de geometria plana para provar o lema abaixo: um é o teorema da base média, o outro é a transitividade de retas paralelas.

Lema 01: Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso são vértices de um paralelogramo.

Demonstração: Sejam respectivamente M, N, P, Q os pontos médios dos lados AC, AB, CD, BD de um quadrilátero reverso como mostra a Figura 2.

Figura 2 - Pontos médios de um quadrilátero reverso



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelo teorema da base média, temos que MN é paralelo a BC e, da mesma forma, PQ é paralelo a BC , o que implica, pela transitividade de retas paralelas, que MN paralelo a PQ . Além disso, $\overline{MN} = \overline{PQ} = \frac{\overline{BC}}{2}$. Portanto, MN e PQ são segmentos paralelos e de mesma medida, logo, são lados opostos de um paralelogramo. $\square$

Proposição 01: Os pontos médios de dois pares de arestas opostas de um tetraedro são vértices de um paralelogramo.

Demonstração: De fato, os dois pares de arestas opostas formam um quadrilátero reverso, agora basta usar o lema acima. $\square$

Teorema 01: As três bimedianas de um tetraedro são duas a duas concorrentes e se interceptam em um único ponto.

Demonstração: De fato, note que as bimedianas formadas pelos pares de arestas opostas são as diagonais de um paralelogramo pela Proposição 01, logo elas concorrem duas a duas nos seus pontos médios. Portanto, os pontos médios das três bimedianas coincidem. Daí o resultado. $\square$

Definição 03 (Centróide): O ponto comum das três bimedianas de um tetraedro é chamado de **centróide** ou **baricentro** do tetraedro.

Note que o centróide de um tetraedro é o ponto médio das suas bimedianas.

Um plano paralelo a duas arestas opostas de um tetraedro é chamado de **plano diretor** do tetraedro. Iremos usar esse conceito nas proposições abaixo.

Proposição 02: O plano determinado pelas bimedianas relativas a dois pares de arestas opostas de um tetraedro é um plano diretor do terceiro par de arestas.

Demonstração: Sejam respectivamente M, N, P, Q os pontos médios das arestas AC, AB, CD, BD de um tetraedro (ver Figura 2). As bimedianas MQ e NP são diagonais do paralelogramo $MNPQ$ em que MN é paralelo a BC e MP é paralelo a AD . Assim, o plano determinado pelas bimedianas MQ e NP é paralelo as arestas BC e AD . Os casos restantes para os outros dois pares de arestas opostas são análogos. $\square$

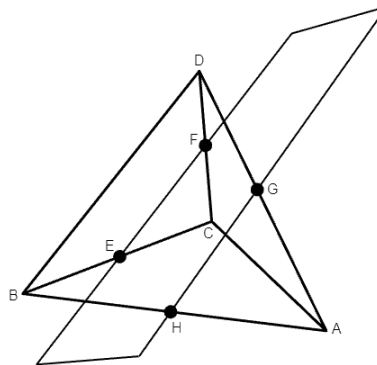
Proposição 03: Em um tetraedro, uma bimediana é paralela à linha de intersecção de dois planos diretores em relação aos outros dois pares de arestas opostas.

Demonstração: Sejam respectivamente M, N, P, Q, R e S os pontos médios das arestas AC, AB, CD, BD, AD e BC de um tetraedro. Pela proposição anterior, o plano formado pelas bimedianas RS e MQ é paralelo a qualquer outro plano diretor das arestas AB e DC . Analogamente, o plano formado pelas bimedianas RS e NP é paralelo a qualquer outro plano diretor das arestas AC e BD . Assim, a bimediana RS é paralela aos planos diretores de AB e DC (chame um desses planos de α) e aos planos diretores de AC e BD (chame um desses planos de β), logo é paralela a intersecção de α e β . $\square$

Proposição 04: A intersecção de um tetraedro e um dos seus planos diretores é um paralelogramo.

Demonstração: Um plano diretor a BD do tetraedro $ABCD$ cortará os planos ABD e CBD , digamos nas retas HG e EF , respectivamente (como mostra a Figura 3).

Figura 3 - Tetraedro $ABCD$ e um dos seus planos diretores



Fonte: Elaborado pelo autor.

As retas HG e EF são paralelas a BD e, assim, paralelas entre si. Este mesmo plano também é paralelo a AC e cortará os planos BAC e DAC , nas retas HE e GF . Daí, estas retas são paralelas a AC , logo, paralelas entre si. Portanto, o quadrilátero formado é um paralelogramo. $\square$

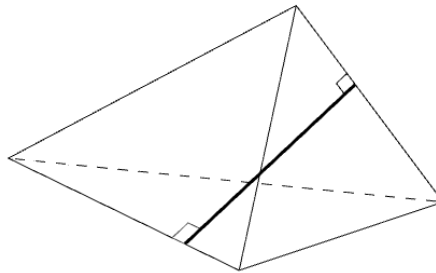
Note que os paralelogramos formados pelas três bimedias são casos especiais da proposição acima. Os três paralelogramos são chamados de **seções medianas** do tetraedro.

2.2 Bialtura

Usando o fato de que duas retas reversas tem sempre uma perpendicular comum, podemos definir o conceito de bialtura.

Definição 04 (Bialtura): A perpendicular comum a duas arestas opostas de um tetraedro é chamada de **bialtura**.

Figura 4 - Bialtura de um tetraedro



Fonte: Elaborado pelo autor.

Proposição 05: A bialtura relativa a um par de arestas opostas de um tetraedro é ortogonal às duas bimedias em relação aos outros dois pares de arestas opostas.

Demonstração: As duas bimedias definem um plano diretor paralelo as arestas que são perpendiculares a bialtura. Logo, a bialtura também é perpendicular a este plano e, em particular, é ortogonal as duas bimedias. $\square$

Corolário 01: A bimediana relativa a um par de arestas opostas de um tetraedro é perpendicular as duas bialturas relativas aos outros dois pares de arestas opostas.

Demonstração: Basta usar a proposição anterior para as duas bialturas. $\square$

2.3 Bariana

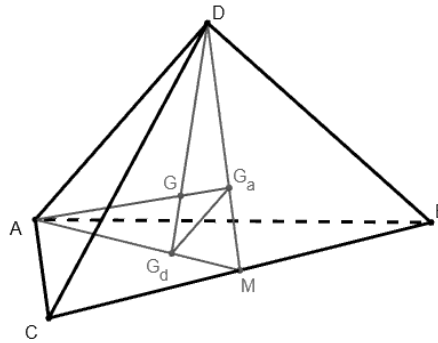
Definição 05 (Bariana): Uma **bariana** (ou **mediana**) de um tetraedro é o segmento que une um vértice do tetraedro ao baricentro da face oposta a esse vértice.

Teorema 02 (Commandino): As quatro barianas de um tetraedro concorrem em um ponto que divide cada bariana na razão 1 : 3.

Demonstração: Sejam M o ponto médio da aresta BC do tetraedro $ABCD$ e G_a e G_d os baricentros das faces BCD e ABC , respectivamente. G_a e G_d pertencem as medianas DM e AM das faces e temos que

$$\overline{MG_d} : \overline{MA} = \overline{MG_a} : \overline{MD} = 1 : 3.$$

Figura 5 - Barianas AG_a e DG_d do tetraedro $ABCD$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo, os triângulos ADM e G_dG_aM são semelhantes e, assim, G_aG_d é paralelo a AD e $\overline{G_aG_d} : \overline{AD} = 1 : 3$. Como as barianas AG_a e DG_d são coplanares, então elas se encontram em um ponto G tal que

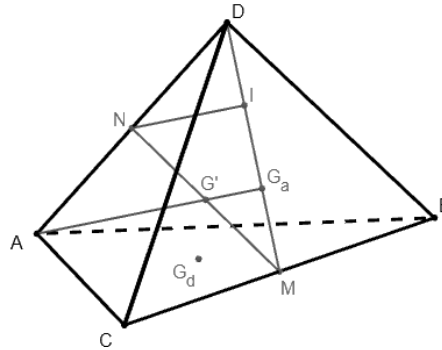
$$\frac{\overline{GG_d}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{GG_a}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{G_aG_d}}{\overline{AD}} = \frac{1}{3}.$$

Mas de modo análogo, podemos encontrar que qualquer bariana do tetraedro $ABCD$ está dividida por outra bariana na razão 1 : 3, ou seja, todas concorrem no ponto G . $\square$

Corolário 02: O ponto de encontro G das quatro barianas é o centróide do tetraedro.

Demonstração: Sejam N o ponto médio de AD e M o ponto médio de BC (ver Figura 6). Note que a bimediana MN é coplanar com as barianas AG_a e DG_d . Seja G' o ponto de encontro da bimediana com AG_a . Seja I o ponto médio de DG_a , temos que, pelo teorema da base média, IN é paralelo a AG_a e $\overline{IN} = \frac{\overline{AG_a}}{2}$. Perceba também que G_a é o ponto médio de MI e o segmento $G'G_a$ é paralelo a IN , logo $G'G_a$ é base média de IN no triângulo MNI , ou seja, $\overline{G'G_a} = \frac{\overline{IN}}{2} = \frac{\overline{AG_a}}{4}$. Logo, a bimediana MN corta as barianas no ponto $G' = G$. De modo similar, encontramos que as outras bimedias também concorrem no ponto G com as barianas, portanto este ponto é o centróide do tetraedro.

Figura 6 - Ponto de encontro G'



Fonte: Elaborado pelo autor.

□

Abaixo definiremos o conceito de tetraedro medial.

Proposição 06: O plano determinado pelos baricentros de três faces de um tetraedro é paralelo a quarta face.

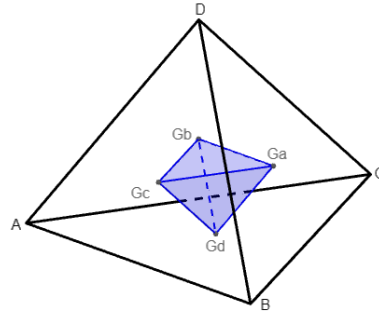
Demonstração: Sejam G_a, G_b, G_c e G_d respectivamente os baricentros das faces BCD, CDA, DAB e ABC de um tetraedro $ABCD$. Chame de M o ponto médio de BC (ver Figura 5). Como as retas DM e AM são concorrentes e $G_a \in DM$ e $G_d \in AM$, então os pontos A, D, G_a e G_d são coplanares, além disso, como G_a e G_d são baricentros, pela recíproca do teorema de Tales, G_aG_d é paralelo a AD . Analogamente, G_aG_b é paralelo a AB e G_bG_d é paralelo a BD . Daí, concluímos o resultado. □

Corolário 03: Seja $ABCD$ um tetraedro dado. As faces e as arestas de um tetraedro tal que os seus vértices são os pés das barianas de $ABCD$ são paralelas às respectivas faces e arestas de $ABCD$.

Demonstração: Os pés das barianas são os baricentros das faces de $ABCD$. Agora, basta usar a proposição acima. □

Definição 06 (Tetraedro medial): O tetraedro formado pelos baricentros das faces de um tetraedro $ABCD$ dado é chamado de **tetraedro medial** de $ABCD$. Por outro lado, $ABCD$ é chamado de **tetraedro anticomplementar** de $G_aG_bG_cG_d$.

Figura 7 - Tetraedro medial $G_a G_b G_c G_d$



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.4 Altura

Definição 07 (Altura de um tetraedro): Em um tetraedro, o segmento cujas extremidades são um vértice e um ponto da face oposta a esse vértice e é perpendicular ao plano desta face é chamado de **altura** do tetraedro.

No geral, quaisquer duas alturas de um tetraedro não se interceptam. Veremos abaixo que uma condição necessária e suficiente para que isso ocorra é que o tetraedro tenha duas arestas opostas ortogonais.

Proposição 07: Seja o tetraedro $ABCD$. As alturas que incidem de B e C se interceptam, se e somente se, as arestas BC e AD são ortogonais.

Demonstração: ($\Rightarrow$) De fato, se em um tetraedro $ABCD$, as alturas que incidem de B e C se encontram em um ponto, digamos H , o plano BHC é perpendicular aos planos ADC e ADB , logo, também é perpendicular a interseção desses planos, AD . Portanto, BC é ortogonal a AD .

($\Leftarrow$) Se as duas arestas opostas, BC e AD , do tetraedro $ABCD$ forem ortogonais, é possível traçar através de BC um plano BMC perpendicular a AD em M . Este plano é perpendicular aos planos ADB e ADC passando por AD , portanto a altura de C para ADB e a altura de B para ADC ambas estão no plano BCM . $\square$

Note que se duas alturas de um tetraedro se interceptam, então as outras duas alturas restantes também se interceptam, pois estas vão partir dos outros dos vértices que são os extremos das arestas opostas ortogonais.

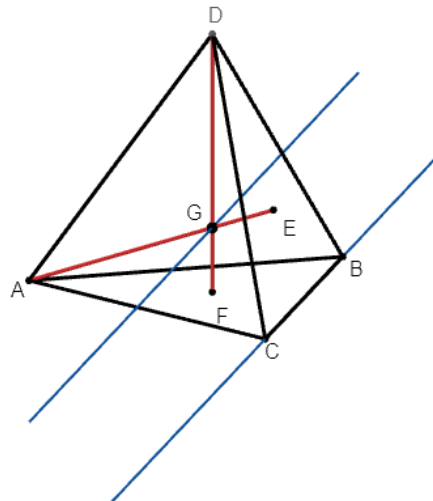
Corolário 04: Se duas alturas de um tetraedro se interceptam, então o ponto de interseção dessas alturas pertence a bialtura definida pelas arestas opostas relativamente as quais essas alturas concorrem.

Demonstração: Sejam AD e BC duas arestas opostas ortogonais e H o ponto de encontro das duas alturas que partem dos vértices B e C do tetraedro $ABCD$. Chame de M a interseção da aresta AD com o plano BCH , temos que BH é perpendicular a CM , e CH é perpendicular a BM . Logo H é o ortocentro do triângulo BCM e, assim, MH é perpendicular a BC . Mas, MH também é perpendicular a AD , portanto H pertence a bialtura relativa a BC e AD . $\square$

Proposição 08: A perpendicular comum de duas alturas que incidem de dois vértices de um tetraedro é paralela a aresta formada pelos dois vértices restantes.

Demonstração: Em um tetraedro $ABCD$, seja s_{AD} a perpendicular comum das alturas $h_A = AE$ e $h_D = DF$ que incidem dos vértices A e D , respectivamente (Figura 8).

Figura 8 - Perpendicular comum das alturas AE e DF



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como s_{AD} é perpendicular a h_A (respectivamente, a h_D), que por sua vez é perpendicular ao plano BCD (respectivamente, ao plano ABC), temos que s_{AD} é paralela ao plano BCD (respectivamente, ao plano ABC). Logo, s_{AD} é paralela a reta CB de interseção desses planos. $\square$

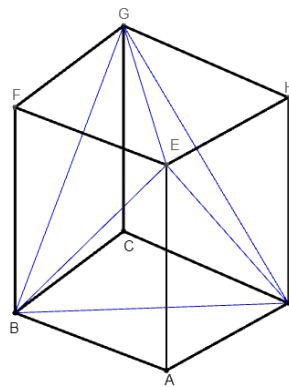
Proposição 09: A distância do centróide a uma face de um tetraedro é um quarto da altura relativa a essa face.

Demonstração: No tetraedro $ABCD$, sejam G o centróide do tetraedro, H_D o pé da altura que incide de D , G_D o pé da bariana que incide de D e E o pé da distância de G a face ABC . Note que, os triângulos DH_DG_D e GEG_D são semelhantes e, pelo Teorema de Commandino, GG_D é um quarto da bariana DG_D . Portanto, GE é um quarto de DH_D . $\square$

2.5 Empacotamento de Tetraedros

Seja $ABCD-EFGH$ um paralelepípedo. É possível sempre construir pelos vértices E, B, G, D um tetraedro em que suas arestas são diagonais de faces do paralelepípedo. Inversamente, dado o tetraedro $EBGD$, é possível construir de modo único um paralelepípedo $ABCD-EFGH$ em que as diagonais EB, EG, ED, BG, GD e DB são as arestas de $EBGD$. Neste caso, dizemos que o tetraedro está inscrito no paralelepípedo e dizemos que este é o **paralelepípedo circunscrito** ao tetraedro.

Figura 9 - Tetraedro inscrito no paralelepípedo circunscrito



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que escolhendo qualquer um dos vértices E, B, G ou D o tetraedro está unicamente determinado. Se escolhermos os vértices A, F, C ou H determinaremos outro tetraedro inscrito ao paralelepípedo, tendo somente estas duas possibilidades de tetraedros inscritos em um dado paralelepípedo. Dizemos que $EBGD$ e $AFCH$ são **tetraedros gêmeos**.

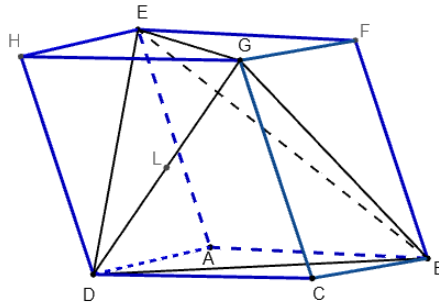
É imediato percebermos que uma bimediana de um tetraedro é obtida por juntar os centros de duas faces opostas do seu paralelepípedo circunscrito, logo a bimediana é igual a uma aresta do paralelepípedo. Já a bialtura relativa a duas arestas opostas de um tetraedro é a perpendicular comum de duas faces do seu paralelepípedo circunscrito que contém as arestas consideradas.

Proposição 10: Cada bariana de um tetraedro está contida em uma das diagonais do paralelepípedo circunscrito. Além disso, são iguais a dois terços das suas respectivas diagonais.

Demonstração: Sejam o tetraedro $EBGD$ e seu paralelepípedo circunscrito $ABCD-EFGH$. Chame de O o ponto de interseção das diagonais EC e BH do paralelepípedo e chame de L o ponto médio de CH . O segmento BL está no plano do paralelogramo $EHCB$ e, além disso, é mediana do triângulo BHC . Como O é ponto médio de BH ,

temos que OC também é uma mediana de BHC , então BL encontra EC no baricentro M do triângulo BHC e assim obtemos $\overline{BM} : \overline{ML} = 2 : 1$.

Figura 10 - Tetraedro e seu paralelepípedo circunscrito



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, L também é ponto médio de GD , logo BL é a mediana da face BGD do tetraedro e M é o baricentro desta face, portanto EM é uma bariana do tetraedro. Como os pontos E, O, M e C estão alinhados, EM está contida na diagonal EC do paralelepípedo. Por fim, $\overline{OM}$ é um terço de $\overline{OC}$, que por sua vez é um meio de $\overline{EC}$ logo $\overline{OM}$ vale um sexto de $\overline{EC}$. Portanto, $\overline{EM} = \overline{EO} + \overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{EC} + \frac{1}{6}\overline{EC} = \frac{2}{3}\overline{EC}$. A prova para as outras barianas é análoga. $\square$

Corolário 05: O centróide de um tetraedro coincide com o ponto de interseção das diagonais do seu paralelepípedo circunscrito.

Demonstração: As barianas se encontram no centróide do tetraedro, logo, como as barianas estão contidas nas diagonais do paralelepípedo circunscrito, este ponto também é o ponto de encontro dessas diagonais. $\square$

Proposição 11: Dois tetraedros gêmeos têm o mesmo centróide e este é o centro de simetria dos dois tetraedros.

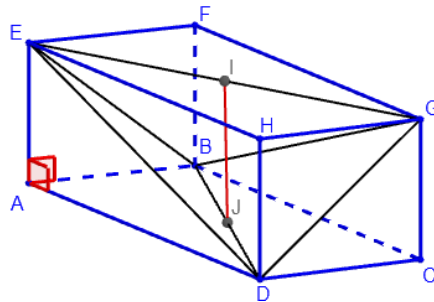
Demonstração: Dois tetraedros gêmeos tem o mesmo paralelepípedo circunscrito. Pelo corolário anterior, os centróides dos tetraedros são o ponto de encontro das diagonais desse paralelepípedo, ou seja, os dois tetraedros tem o mesmo centróide. Agora, para provar a simetria, basta notar que o centróide divide ao meio os segmentos que unem os pares de vértices correspondentes dos dois tetraedros. $\square$

Proposição 12: Duas arestas de um tetraedro são iguais às suas respectivas arestas opostas se, e somente se, a bimediana relativa ao terceiro par de arestas opostas coincide com a bialtura relativa a este mesmo par de arestas.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sejam o tetraedro $EBGD$ tal que $\overline{ED} = \overline{BG}$ e $\overline{GD} = \overline{EB}$ e seu paralelepípedo circunscrito $ABCD-EFGH$. Pela hipótese, temos que no paralelepípedo

circunscrito, as faces $ADHE$, $BCGF$, $ABFE$ e $DCGH$ são retângulos e as faces $ABCD$ e $EFGH$ são paralelogramos. A bimediana IJ relativa as arestas EG e BD é paralela a AE , mas AE é perpendicular as faces $ABCD$ e $EFGH$, ou seja, a bimediana é igual a bialtura relativa ao mesmo par de arestas.

Figura 11 - Paralelepípedo circunscrito a $EBGD$



Fonte: Elaborado pelo autor.

($\Leftarrow$) Por hipótese, temos que a bimediana IJ é perpendicular as faces $ABCD$ e $EFGH$ do paralelepípedo circunscrito. Como as arestas do paralelepípedo AE , BF , CG e DH são paralelas a IJ , temos que as faces $ADHE$, $BCGF$, $ABFE$ e $DCGH$ são retângulos. Daí, segue o resultado. $\square$

Definição 08 (Empacotamento de tetraedros): Dizemos que um tetraedro está **empacotado** se ele está inscrito em seu paralelepípedo circunscrito. Chamaremos o paralelepípedo circunscrito de **empacotamento** do tetraedro.

2.6 Volume de um Tetraedro

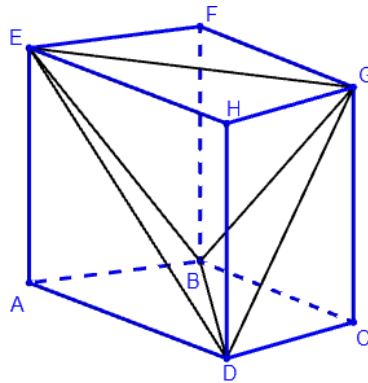
Nesta seção demonstraremos a fórmula do volume de um tetraedro. Para isso, iremos usar um resultado de geometria que diz que duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume e, além disso, se tiverem mesma base e alturas diferentes, a razão entre os volumes é igual a razão entre suas alturas. Este resultado é visto normalmente em um curso inicial de geometria e sua prova usa semelhança de figuras e o princípio de Cavalieri.

Abaixo denotaremos o volume de um tetraedro $A-BCD$ por $vol(ABCD)$ e a área de um polígono $A_1A_2...A_n$ por $[A_1A_2...A_n]$.

Teorema 03 (Volume de um tetraedro): O volume de um tetraedro é igual a um terço do produto da área da base pela altura relativa a esta base.

Demonstração: Sejam o tetraedro $GBCD$ e $(P) = ABCD-EFGH$ o paralelepípedo gerado pelas arestas CG , CB e CD deste tetraedro. Note que (P) é o empacotamento do tetraedro $(T) = EBGD$.

Figura 12 - Tetraedro $GBCD$ e seu paralelepípedo gerado (P)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Veja que o volume de (P) é igual ao volume de (T) mais os volumes dos quatro tetraedros $C-BGD$, $A-BDE$, $H-DEG$ e $F-BEG$. Note que (T) e $C-BGD$ têm a mesma base, então a razão dos seus volumes é igual a razão das suas alturas. Pela Proposição 10, temos que essa razão vale $2 : 1$. Logo, $vol(CBGD) = \frac{1}{2}vol(T)$. Analogamente, $vol(ABDE) = vol(HDEG) = vol(FBEG) = \frac{1}{2}vol(T)$. Logo, temos que

$$vol(P) = vol(T) + vol(ABDE) + vol(HDEG) + vol(FBEG) + vol(GBCD) = 6 \cdot vol(GBCD)$$

Chame de h a altura de (P) relativa a base $ABCD$, portanto,

$$vol(GBCD) = \frac{1}{6}vol(P) = \frac{1}{6} \cdot [ABCD] \cdot h = \frac{1}{6} \cdot 2[BCD] \cdot h = \frac{1}{3}[BCD] \cdot h.$$

□

Corolário 06: O volume de um tetraedro é igual a um terço do volume do seu paralelepípedo circunscrito.

Demonstração: Usando as mesmas notações do teorema acima, temos que

$$vol(P) = vol(T) + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot vol(T) = 3vol(T).$$

□

Corolário 07: Dado o tetraedro $ABCD$, sejam X um ponto entre A e B , Y um ponto entre A e C , Z um ponto entre A e D . Temos que

$$\frac{vol(AXYZ)}{vol(ABCD)} = \frac{\overline{AX} \cdot \overline{AY} \cdot \overline{AZ}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}}.$$

Demonstração: Primeiramente, note que $\text{vol}(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot [ABC] \cdot h$, onde $[ABC]$ é a área da base ABC e h é a altura do tetraedro $ABCD$ relativa a esta base. Mas $[ABC] = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \text{sen}(\alpha)$ e $h = \overline{AD} \cdot \text{sen}(\theta)$, onde α é a medida do ângulo $\widehat{BAC}$ e θ é a medida do ângulo que a reta AD faz com o plano ABC . Ou seja,

$$\text{vol}(ABCD) = \frac{1}{6} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\theta).$$

De mesma forma, encontramos

$$\text{vol}(AXYZ) = \frac{1}{6} \cdot \overline{AX} \cdot \overline{AY} \cdot \overline{AZ} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\theta).$$

Portanto,

$$\frac{\text{vol}(AXYZ)}{\text{vol}(ABCD)} = \frac{\overline{AX} \cdot \overline{AY} \cdot \overline{AZ}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}}.$$

□

Abaixo veremos outra forma de se calcular o volume de um tetraedro. Para isso, precisaremos definir os conceitos de reta suporte de uma aresta e ângulo entre duas arestas. A **reta suporte de uma aresta** AB de um tetraedro é a reta que passa pelos vértices A e B . O **ângulo entre duas arestas** de um tetraedro é o ângulo entre suas retas suportes.

Proposição 13: O volume de um tetraedro é igual a um sexto do produto de duas arestas opostas vezes o seno do ângulo entre essas arestas e vezes a distância entre as retas suportes dessas arestas.

Demonstração: O ângulo α entre dois lados opostos do tetraedro $BDEG$, digamos BD e EG , é igual ao ângulo entre as duas diagonais BD e AC , da face correspondentes do seu paralelepípedo circunscrito $ABCD-EFGH$. Da geometria plana, a área desta face é dada por $\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC} \cdot \text{sen}(\alpha)$. Agora, pelo teorema anterior, o volume V do tetraedro é $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC} \cdot \text{sen}(\alpha) \right) \cdot h$, onde h é a altura de $ABCD-EFGH$ e, logo, h é a distância entre as retas suportes dessas arestas. Portanto,

$$V = \frac{1}{6} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{EG} \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot h.$$

□

Corolário 08 (Teorema de Steiner): Se duas arestas opostas de um tetraedro se moverem sobre suas retas suportes, mas permanecerem com comprimento fixo, o volume permanecerá o mesmo.

Demonstração: Basta notar que o ângulo entre as duas arestas e a distância entre

suas retas suportes também estarão fixados. Daí, pela proposição anterior, o volume permanecerá o mesmo. $\square$

2.7 Esferas Inscrita e Circunscrita de um Tetraedro

Dizemos que uma esfera está inscrita a um tetraedro (T) com respeito às faces se ela for tangente internamente às faces de (T) . Chamamos o seu centro de **incentro** do tetraedro e o seu raio de **inraio**. Dizemos que uma esfera está circunscrita a um tetraedro (T) se os vértices de (T) pertencem a esta esfera. Chamamos o seu centro de **circuncentro** do tetraedro e o seu raio de **circunraio**. Nesta seção iremos mostrar a existência da esfera inscrita com respeito às faces e da esfera circunscrita de um dado tetraedro.

Esfera inscrita a um tetraedro com respeito às faces

Chamaremos os ângulos diédricos e triédricos de um tetraedro simplesmente de diedros e triedros, respectivamente. Um **semiplano bissetor** de um diedro d é o lugar geométrico dos pontos da região diedral (definida por d) equidistantes das faces de d . Um semiplano bissetor de um diedro passa pela origem do diedro e o divide em dois diedros de mesma medida.

Para o próximo lema, usaremos o fato de que n retas distintas no espaço que concorrem duas a duas são coplanares ou se interceptam em um único ponto do espaço.

Lema 02: Os planos bissetores internos dos diedros de um tetraedro têm um ponto em comum.

Demonstração: Seja o tetraedro $ABCD$. Os semiplanos bissetores dos diedros de origem em DA , DB e DC têm o ponto D em comum, logo existe uma semirreta que é comum a esses planos e, por sua vez, os pontos dessa semirreta são equidistantes das faces do triedro de vértice D e arestas DA , DB e DC . Analogamente, para os outros três triedros de $ABCD$, encontramos que existe para cada um deles uma semirreta tal que seus pontos são equidistantes das respectivas faces desses triedros. Mas, note que, as quatro semirretas são duas a duas concorrentes, pois qualquer duas delas pertencem a um mesmo plano bissetor, logo temos que essas retas tem um ponto comum. $\square$

Proposição 14 (Existência da esfera inscrita às faces): Todo tetraedro admite uma única esfera inscrita às suas faces.

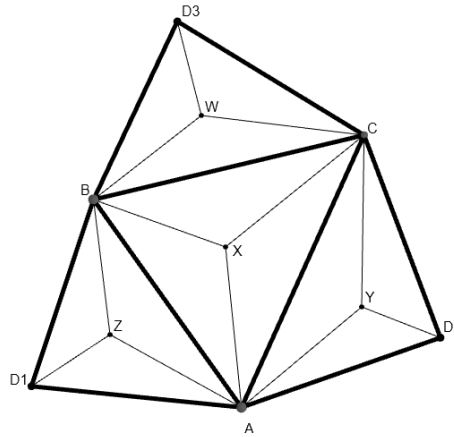
Demonstração: Seja (T) um tetraedro. Chame de I o ponto de interseção dos semiplanos bissetores internos dos diedros de (T) . Logo, I é interno a (T) e equidista das faces de (T) , ou seja, a distância de I à cada face do tetraedro é o mesmo número positivo, r , digamos. Daí, a esfera de centro I e raio r está inscrita às faces de (T) . Agora, se

existisse outro ponto I' equidistante internamente das faces de (T) , então I' pertenceria aos semiplanos bissetores internos dos diedros de (T) e, pelo lema anterior, $I' = I$. $\square$

Proposição 15 (Teorema de Bang): Considere os pontos de interseção da esfera inscrita com as faces de um tetraedro. Considere, também, em cada face, os segmentos que unem esses pontos aos vértices das respectivas faces. Então, esses segmentos formam nas suas faces três ângulos de origem no ponto de interseção que são os mesmos em cada face.

Demonstração: Seja a planificação do tetraedro $ABCD$ como mostra a Figura 13.

Figura 13 - Planificação do tetraedro $ABCD$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se X e Y são respectivamente as interseções das faces ABC e ACD_2 com a esfera inscrita ao tetraedro, então temos que $\overline{AX} = \overline{AY}$ e $\overline{CX} = \overline{CY}$. Como AC é lado comum aos triângulos AXC e AYC , pelo caso de congruência de triângulos $L.L.L.$, temos que $AXC \equiv AYC$, o que implica $\widehat{AXC} \equiv \widehat{AYC}$, pois são ângulos opostos à AC . Analogamente, encontramos $\widehat{BZA} \equiv \widehat{BXA}$, $\widehat{BWC} \equiv \widehat{BXC}$, $\widehat{BZD_1} \equiv \widehat{BWD_3}$, $\widehat{AZD_1} \equiv \widehat{AYD_2}$ e $\widehat{CYD_2} \equiv \widehat{CWD_3}$, onde Z e W são respectivamente as interseções das faces ABD_1 e BCD_3 com a esfera inscrita ao tetraedro. Chame $\alpha = \text{med}(\widehat{BWC}) = \text{med}(\widehat{BXC})$, $\beta = \text{med}(\widehat{BZA}) = \text{med}(\widehat{BXA})$, $\gamma = \text{med}(\widehat{AXC}) = \text{med}(\widehat{AYC})$, $\alpha' = \text{med}(\widehat{AZD_1}) = \text{med}(\widehat{AYD_2})$, $\beta' = \text{med}(\widehat{CYD_2}) = \text{med}(\widehat{CWD_3})$ e $\gamma' = \text{med}(\widehat{BZD_1}) = \text{med}(\widehat{BWD_3})$. Note que,

$$360^\circ = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta' + \gamma' = \alpha' + \beta + \gamma' = \alpha' + \beta' + \gamma$$

que tem como solução $\gamma = \gamma'$, $\beta = \beta'$ e $\alpha = \alpha'$. $\square$

Esfera circunscrita a um tetraedro

Uma **reta medial** de um triângulo é a reta perpendicular ao plano do triângulo e que passa pelo circuncentro deste. A reta medial é o lugar geométrico dos pontos do espaço que

equidistam dos vértices do triângulo. De fato, sejam O o circuncentro do triângulo ABC e s a reta perpendicular ao plano de ABC que passa por O . Se $P \in s$ é diferente de O , então os triângulos POA , POB e POC são congruentes, logo $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ e, portanto, todo ponto de s é equidistante dos vértices de ABC . Reciprocamente, se P for um ponto do espaço distinto de O e equidistante de A , B e C , então seja r a reta perpendicular ao plano de ABC que passa por P . Chame de O' o pé da perpendicular r , então temos que os triângulos $PO'A$, $PO'B$ e $PO'C$ são congruentes. Daí, O' é equidistante de A , B e C e, assim, $O' = O$. Ou seja, $r = s$ e, portanto, $P \in s$.

Um **plano mediador** de um segmento é o plano perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio. O plano mediador de um segmento é o lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam dos extremos do segmento. De fato, sejam o segmento AB e M seu ponto médio e seja o plano α que passa por M e é perpendicular a AB . Se $P \in \alpha$ é diferente de M , então os triângulos PAM e PBM são congruentes, logo $\overline{PA} = \overline{PB}$ e, portanto, todos os pontos de α são equidistantes de A e B . Reciprocamente, se P for um ponto do espaço distinto de M e equidistante de A e B , então seja β o plano perpendicular ao segmento AB que passa por P . Chame de M' a interseção de β com AB , temos que os triângulos $PM'A$ e $PM'B$ são congruentes. Daí, M' é equidistante de A e B e, assim, $M' = M$. Ou seja, $\beta = \alpha$ e, portanto, $P \in \alpha$.

Lema 03: Seja $ABCD$ um tetraedro. Se r é a reta medial de ABC e α é o plano mediador de CD , então r e α são concorrentes.

Demonstração: Por contradição, primeiramente suponha que a interseção de r e α seja vazia, ou seja, r e α são paralelos. Assim, α é perpendicular ao plano de ABC . Tome o ponto Q que é a interseção do plano ABC com a reta r' , projeção de r sobre α . Daí, como α também é perpendicular a CD , o triângulo CMQ é tal que $\widehat{CQM}$ e $\widehat{QMC}$ são retos, o que é absurdo. logo, r e α não são paralelos. Agora, suponha que r está contido em α . Assim, novamente α é perpendicular ao plano de ABC e a CD . Daí, o triângulo CMO é tal que $\widehat{COM}$ e $\widehat{OMC}$ são retos, o que é absurdo. logo, r não está contido em α . Portanto, r e α são concorrentes. $\square$

Proposição 16 (Existência da esfera circunscrita a um tetraedro): Todo tetraedro admite uma única esfera circunscrita.

Demonstração: Basta mostrarmos que existe um ponto equidistante dos quatro vértices de (T) . Usando as mesmas notações do lema anterior, seja P a interseção de r e α . Assim, por r ser a reta medial de ABC , temos que P é equidistante de A , B e C , mas por α ser o plano mediador de CD , temos que P é equidistante de C e D . Portanto, $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PD}$, ou seja, P é o centro da esfera circunscrita a (T) de raio $\overline{PA}$. Agora, para a unicidade, suponha que exista um ponto P' diferente de P no espaço tal que seja equidistante dos vértices de $ABCD$. Então, P' pertenceria a α , pois $\overline{P'C} = \overline{P'D}$, e

pertenceria a r , pois $\overline{P'A} = \overline{P'B} = \overline{P'C}$. Assim, $r \subset \alpha$, o que seria absurdo.

□

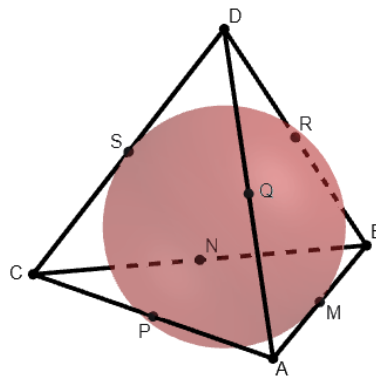
3 TETRAEDROS ESPECIAIS

Neste capítulo estudaremos os principais tipos de tetraedros juntamente com suas principais propriedades.

3.1 Tetraedro de Crelle

Definição 09 (Tetraedro de Crelle): Um tetraedro cujas seis arestas são tangentes à uma esfera será chamado de **tetraedro de Crelle** (ou **tetraedro circunscritível**). Dizemos que a esfera é inscrita ao tetraedro com respeito às arestas.

Figura 14 - Tetraedro de Crelle e seus pontos de tangência com a esfera



Fonte: Elaborado pelo autor.

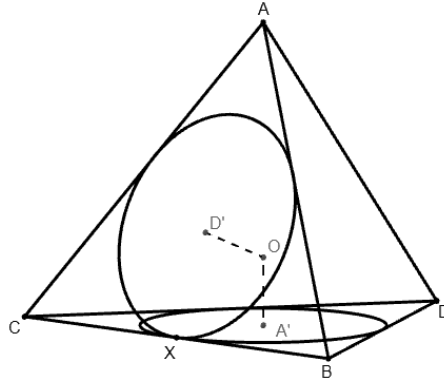
Seja (T) um tetraedro de Crelle e Γ a esfera inscrita com respeito às arestas de (T) . Note que a interseção dos planos das faces com Γ são círculos inscritos às faces e, além disso, cada círculo é tangente aos outros três. A recíproca também vale.

Proposição 17: Se cada um dos círculos inscritos às faces de um tetraedro toca os outros três círculos inscritos das faces restantes em um ponto, então o tetraedro é de Crelle.

Demonstração: Temos que o círculo inscrito a face ABC do tetraedro $ABCD$ é tangente às outras três faces. Seja X a interseção desse círculo com o círculo inscrito a BCD . Assim, o ponto X é também o ponto de contato de BC com os dois círculos. Se D' for o incentro de ABC e A' for o incentro de BCD , note que BC é perpendicular a $A'X$ e a $D'X$. Daí, o plano $A'D'X$ é perpendicular a BC e, por consequência, aos planos ABC e BCD . Sejam r a reta perpendicular a ABC que passa por D' e s a reta perpendicular a DBC que passa por A' . Logo, temos que r e s estão no mesmo plano $A'D'X$. Agora, se t é a reta perpendicular ao plano de CAD que passa pelo seu incentro B' e v é a reta perpendicular ao plano de BAD que passa pelo seu incentro C' , então podemos mostrar, de forma análoga, que r é coplanar com t e coplanar com v , e também

que s é coplanar com t e coplanar com v . Mas, veja que t não está contida em $A'D'X$, pois, caso contrário, t seria ortogonal a BC . E como t é perpendicular a DAC , então BC e DAC seriam paralelos ou BC estaria contido em DAC , o que nos dois casos seria absurdo. Portanto, t passa pelo ponto de interseção de r e s .

Figura 15 - Círculos inscritos as faces ABC e BCD



Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma semelhante, v passa pela interseção de r e s . Chame de O o ponto de interseção das retas r , s , t e v . Por congruência de triângulos, é fácil ver que os segmentos que partem de O às interseções dos círculos são congruentes. Logo, O é o centro da esfera inscrita com respeito as arestas e, portanto, $ABCD$ é um tetraedro de Crelle. $\square$

Da geometria plana, temos que se de um ponto P , externo a um círculo λ , traçarmos os segmentos PA e PB tangentes a λ nos pontos A e B , respectivamente, então $\overline{PA} = \overline{PB}$. É fácil ver que o mesmo vale se no lugar de um círculo for uma esfera. Outro fato que temos é que em um círculo inscrito a um triângulo ABC onde X , Y e Z são respectivamente os pontos de contato do círculo com os lados BC , AC e AB , de medidas a , b e c , nesta ordem, e se $p = \overline{BX}$, $q = \overline{CY}$ e $r = \overline{AZ}$, resolvendo um sistema linear, encontramos $p = (a - b + c)/2$, $q = (a + b - c)/2$ e $r = (-a + b + c)/2$. Usaremos esses resultados na proposição abaixo.

Proposição 18: Um tetraedro $ABCD$ é de Crelle se, e somente se,

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sejam respectivamente M , N , P , Q , R , S , os pontos de tangência das arestas AB , BC , AC , DA , DB , DC com a esfera (Figura 14). Temos que $\overline{AM} = \overline{AP} = \overline{AQ} = x$, $\overline{BM} = \overline{BN} = \overline{BR} = y$, $\overline{CN} = \overline{CP} = \overline{CS} = z$ e $\overline{DQ} = \overline{DR} = \overline{DS} = w$. Daí, $\overline{AB} + \overline{CD} = (\overline{AM} + \overline{BM}) + (\overline{CS} + \overline{DS}) = x + y + z + w$, $\overline{AC} + \overline{BD} = (\overline{AP} + \overline{CP}) + (\overline{BR} + \overline{DR}) = x + z + y + w$ e $\overline{AD} + \overline{BC} = (\overline{AQ} + \overline{DQ}) + (\overline{BN} + \overline{CN}) = x + w + y + z$. Portanto, $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$.

($\Leftarrow$) Suponha que

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

Se X é a interseção da aresta BC com o círculo inscrito de ABC , temos que $\overline{BX} = \frac{\overline{BC} + \overline{AB} - \overline{AC}}{2}$. Mas, como, por hipótese, $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{BD} - \overline{CD}$, então substituindo na expressão de $\overline{BX}$, encontramos que $\overline{BX} = \frac{\overline{BC} + \overline{BD} - \overline{CD}}{2}$. Logo, X também é o ponto de contato com o círculo inscrito de BCD . Analogamente, mostramos que os dois pontos de contato de qualquer outra aresta de $ABCD$ com os dois círculos inscritos que tocam essa aresta coincidem. Portanto, $ABCD$ é um tetraedro de Crelle pela Proposição 17. $\square$

Lema 04: Em um tetraedro de Crelle $ABCD$, sejam X, Y, Z, U, V e W respectivamente as interseções da esfera com as arestas AB, AC, AD, BC, CD e DB tais que $\overline{AX} = p, \overline{BU} = q, \overline{CV} = r$ e $\overline{DW} = s$. Sejam também a, b, c e d os raios dos círculos inscritos as faces BCD, ACD, ABD e ABC , respectivamente. Então

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{qr} + \frac{1}{qs} + \frac{1}{rs}, \quad \frac{1}{b^2} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{ps} + \frac{1}{rs}, \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{pq} + \frac{1}{ps} + \frac{1}{qs}, \quad \frac{1}{d^2} = \frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}.$$

Demonstração: Temos que $\overline{AB} = p + q, \overline{BC} = q + r$ e $\overline{CA} = r + p$. Da geometria plana podemos expressar a área de ABC por $[ABC] = \sqrt{(p + q + r)pqr}$ e também por $[ABC] = d(p + q + r)$, igualando essas duas equações temos que

$$d^2 = \frac{pqr}{(p + q + r)} \Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}.$$

De forma análoga, encontramos

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{qr} + \frac{1}{qs} + \frac{1}{rs}, \quad \frac{1}{b^2} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{ps} + \frac{1}{rs}, \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{pq} + \frac{1}{ps} + \frac{1}{qs}.$$

$\square$

Com as mesmas notações do lema anterior, note que

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 2 \left(\frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{ps} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{qs} + \frac{1}{rs} \right).$$

Proposição 19: Sejam V o volume do tetraedro de Crelle $ABCD$ e ρ o raio da esfera Γ inscrita com respeito as arestas de $ABCD$. Se X, U, V e W são respectivamente às interseções da esfera com as arestas AB, BC, CD e DB tais que $\overline{AX} = p, \overline{BU} = q,$

$\overline{CV} = r$ e $\overline{DW} = s$, então

$$V = \frac{2pqrs}{3\rho}.$$

Demonstração: Sejam X, Y e Z os pontos de contato da esfera Γ com as arestas AB, AC, AD de $ABCD$. Temos que $\overline{AX} = \overline{AY} = \overline{AZ} = p$. Se I é o incentro de ABC , os triângulos retângulos AXI e AYI são congruentes e, assim, a corda XY é o dobro da altura de AXI . Mas, da geometria plana, temos que a soma dos quadrados dos inversos dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado do inverso da altura relativa a hipotenusa, ou seja,

$$\left(\frac{1}{\frac{\overline{XY}}{2}} \right)^2 = \left(\frac{1}{\overline{AX}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\overline{XI}} \right)^2.$$

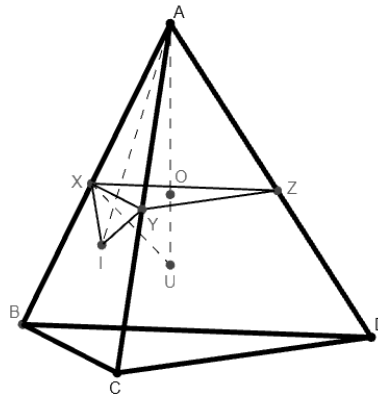
E, pelo lema anterior,

$$\frac{4}{\overline{XY}^2} = \frac{1}{p^2} + \left(\frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{rq} \right) = \frac{(p+q)(p+r)}{p^2qr} \Rightarrow \overline{XY}^2 = \frac{4p^2qr}{(p+q)(p+r)}.$$

De forma análoga, achamos $\overline{XZ}^2 = \frac{4p^2rs}{(p+r)(p+s)}$ e $\overline{YZ}^2 = \frac{4p^2qs}{(p+q)(p+s)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \overline{XY} \cdot \overline{XZ} \cdot \overline{YZ} &= \sqrt{\frac{4p^2qr}{(p+q)(p+r)} \cdot \frac{4p^2rs}{(p+r)(p+s)} \cdot \frac{4p^2qs}{(p+q)(p+s)}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{XY} \cdot \overline{XZ} \cdot \overline{YZ} &= \frac{(2p)^3 qrs}{(p+q)(p+r)(p+s)}. \end{aligned} \quad (I)$$

Figura 16 - Tetraedro de Crelle $ABCD$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, seja O o pé da altura do tetraedro $AXYZ$ relativa à face XYZ . Como $\overline{AX} = \overline{AY} = \overline{AZ} = p$, então pelo caso de congruência de triângulos cateto-hipotenusa, os triângulos retângulos AOX, AOY e AOZ são congruentes, logo $\overline{OX} = \overline{OY} = \overline{OZ}$,

ou seja, O é o circuncentro do triângulo XYZ . Da geometria plana temos que a área de XYZ é dada por $[XYZ] = \frac{\overline{XY} \cdot \overline{YZ} \cdot \overline{ZX}}{4\overline{XO}}$, daí o volume do tetraedro A - XYZ é dado por

$$\text{vol}(AXYZ) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{XY} \cdot \overline{YZ} \cdot \overline{ZX}}{4\overline{XO}} \cdot \overline{AO}. \quad (\text{II})$$

Seja U o centro de Γ . Note que os pontos A , O e U pertencem a reta medial do triângulo XYZ . Como A , O e U estão alinhados, temos que o triângulo AXU retângulo em X é semelhante ao triângulo AOX retângulo em O , assim,

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{XO}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{UX}} = \frac{p}{\rho}. \quad (\text{III})$$

E substituindo (I) e (III) em (II), temos:

$$\text{vol}(AXYZ) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2p)^3 qrs}{(p+q)(p+r)(p+s)} \cdot \frac{p}{4\rho} = \frac{(2p)^3 p qrs}{12\rho(p+q)(p+r)(p+s)}.$$

Agora, pelo Corolário 07, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\text{vol}(AXYZ)}{V} &= \frac{\overline{AX} \cdot \overline{AY} \cdot \overline{AZ}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\text{vol}(AXYZ)}{V} &= \frac{p^3}{(p+q)(p+r)(p+s)} \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \frac{(p+q)(p+r)(p+s)}{p^3} \cdot \text{vol}(AXYZ) \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \frac{(p+q)(p+r)(p+s)}{p^3} \cdot \frac{(2p)^3 p qrs}{12\rho(p+q)(p+r)(p+s)} \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \frac{2p qrs}{3\rho}. \end{aligned} \quad \square$$

3.2 Tetraedro Ortocêntrico

É natural nos perguntarmos se existe algum tetraedro em que as quatro alturas concorrem em um único ponto. A resposta a essa pergunta é positiva e esse tetraedro, como veremos a seguir, é chamado de ortocêntrico.

Definição 10 (Tetraedro ortocêntrico): Um tetraedro é dito **ortocêntrico** se suas arestas opostas são ortogonais.

Um **rombóide** é um paralelepípedo cujas faces são losangos. Veremos abaixo que o paralelepípedo circunscrito de um tetraedro ortocêntrico é um rombóide.

Proposição 20: Um tetraedro é ortocêntrico se, e somente se, seu empacotamento for um romboíde.

Demonstração: De fato, as diagonais de um losango são perpendiculares, isso implica que as arestas opostas do tetraedro inscrito no romboíde são ortogonais. Logo, o tetraedro é ortocêntrico. Reciprocamente, como as arestas do tetraedro ortocêntrico são ortogonais, as duas diagonais de cada face do paralelepípedo circunscrito são perpendiculares, logo as suas faces são losangos. $\square$

Corolário 09: Um tetraedro é ortocêntrico se, e somente se, suas bimediana são iguais.

Demonstração: Uma bimediana do tetraedro ortocêntrico é igual a uma aresta do romboíde, que por sua vez são todas iguais. Portanto, as bimediana também são iguais. Reciprocamente, se as bimediana de um tetraedro são iguais, então as arestas do seu empacotamento também o são, ou seja, as faces do empacotamento são losangos. Logo, o empacotamento é um romboíde e, pela proposição anterior, o tetraedro é ortocêntrico. $\square$

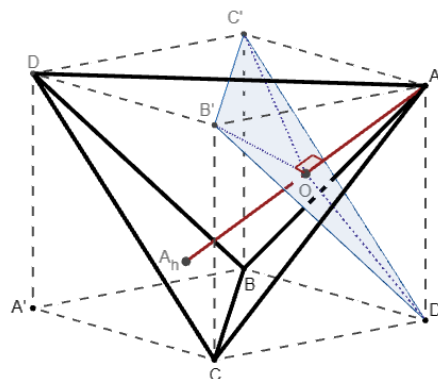
Proposição 21: Se um tetraedro tem dois pares de arestas opostas ortogonais, então o terceiro par de arestas também é ortogonal e este tetraedro é ortocêntrico.

Demonstração: O empacotamento desse tetraedro tem dois pares de faces opostas que são losangos, logo o terceiro par de faces também é formado por dois losangos. Assim, o empacotamento é um romboíde e, portanto, o tetraedro é ortocêntrico. $\square$

Teorema 04: As quatro alturas de um tetraedro ortocêntrico são concorrentes.

Demonstração: Sejam $(T) = ABCD$ e $(T') = A'B'C'D'$ os tetraedros gêmeos inscritos no paralelepípedo (R) . Seja AA_h a altura de (T) que incide de A e é perpendicular à face BCD .

Figura 17 - Tetraedro (T) inscrito em (R)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Temos que AA_h também é perpendicular à face $B'C'D'$ de (T') , pois BCD e $B'C'D'$ são paralelas. Mas como (R) é um romboide, temos que as arestas AB' , AC' e AD' são iguais, além disso, se O é o pé da perpendicular na face $B'C'D'$ que incide de A , então AO é lado comum dos triângulos AOB' , AOC' e AOD' . Logo, pelo caso de congruência de triângulos Cateto-Hipotenusa, $\overline{OB'} = \overline{OC'} = \overline{OD'}$, ou seja, O é o circuncentro de $B'C'D'$. Daí, como O pertence a AA_h , então AA_h passa pelo circuncentro do triângulo $B'C'D'$ e, assim, também passa pelo circuncentro de (T') . Analogamente, provamos que as outras alturas de (T) passam pelo circuncentro de (T') . Portanto, as alturas de (T) são concorrentes. $\square$

Definição 11 (Ortocentro): O ponto comum as quatro alturas de um tetraedro ortocêntrico é chamado de **ortocentro** do tetraedro.

Corolário 10: O ortocentro de um tetraedro ortocêntrico é o simétrico do seu circuncentro com respeito ao centróide.

Demonstração: Pela Proposição 11, um tetraedro (T) é simétrico ao seu tetraedro gêmeo (T') com respeito ao centróide (comum aos tetraedros). Logo, o circuncentro de (T) é simétrico ao circuncentro de (T') com respeito ao centróide, mas pelo teorema acima o circuncentro de (T') é o ortocentro de (T) . Daí o resultado. $\square$

Proposição 22: Em um tetraedro ortocêntrico as bialturas passam pelo ortocentro do tetraedro e, além disso, os pés das bialturas determinam os triângulos órticos das faces.

Demonstração: Segue imediatamente do Teorema 04 e do Corolário 04. $\square$

Da geometria plana sabemos que o baricentro, o circuncentro e o ortocentro de um triângulo são colineares (pertencem a reta de Euler) e, além disso, a distância entre o baricentro e o circuncentro é igual à metade da distância entre o baricentro e o ortocentro. Utilizaremos esse fato para provar a proposição abaixo.

Proposição 23: Os pés das alturas de um tetraedro ortocêntrico são os ortocentros das faces do tetraedro.

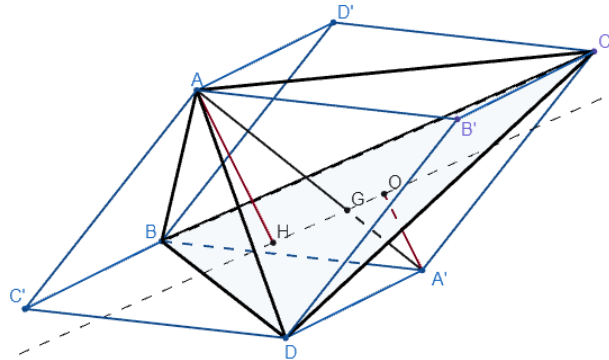
Demonstração: A diagonal AA' do romboide circunscrito (R) encontra a face BCD do tetraedro $ABCD$ em seu baricentro G , pela Proposição 10 (Figura 18). Pela prova do Teorema 04, a perpendicular sobre BCD que passa por A' , intersecta BCD no seu circuncentro O .

Agora, seja H o pé da altura AH sobre BCD . Temos, por semelhança de triângulos, que

$$HG : GO = AG : GA' = 2 : 1.$$

Portanto, H é o ortocentro de BCD .

Figura 18 - Rombóide (R) e sua diagonal AA'



Fonte: Elaborado pelo autor.

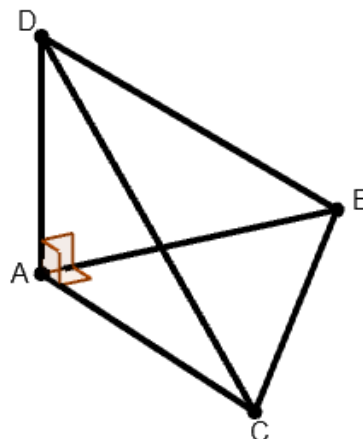
□

3.3 Tetraedro Trirretângulo

O tetraedro trirretângulo é o equivalente ao triângulo retângulo na teoria dos tetraedros. Existe também uma generalização do teorema de Pitágoras que vale para esses tetraedros.

Definição 12 (Tetraedro trirretângulo): O tetraedro que tem um ângulo triédrico reto é chamado de **tetraedro trirretângulo**. Este ângulo triédrico será chamado de **ângulo reto do tetraedro**. A face oposta ao vértice do ângulo reto será referida como a **base** do tetraedro e as arestas que incidem do ângulo reto serão chamadas de **catetos** ou **pernas** do tetraedro. O segmento que incide do vértice do ângulo reto e é perpendicular a base é chamado de **altura** do tetraedro trirretângulo.

Figura 19 - Tetraedro trirretângulo reto em A



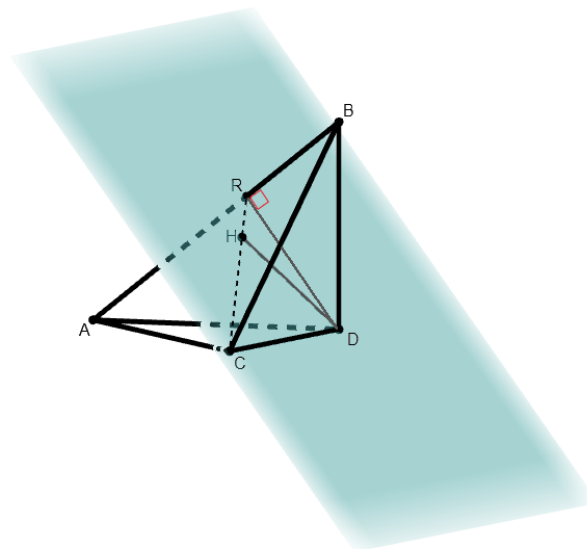
Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que, em particular, um tetraedro trirretângulo é ortocêntrico, pois se A for o vértice do ângulo reto, então AD é perpendicular ao plano ABC , assim, é ortogonal a BC . De forma semelhante, temos que AB é ortogonal a CD e AC é ortogonal a BD . Assim, pela Proposição 23, temos que o pé da altura de um tetraedro trirretângulo é o ortocentro da base. Abaixo, mostraremos uma prova alternativa desse resultado sem o uso da seção anterior.

Proposição 24: Em um tetraedro trirretângulo o pé da altura é o ortocentro da base.

Demonstração: Seja H o pé da altura DH do tetraedro trirretangular $D-ABC$. A aresta DC é perpendicular ao plano DAB , e assim, a AB . Um plano CDR pode ser construído através de CD perpendicular a AB em R , logo os planos CDR e ABC são perpendiculares.

Figura 20 - Tetraedro trirretângulo e plano CDR



Fonte: Elaborado pelo autor.

O plano CDR contém a altura DH e corta ABC ao longo da altura CR do triângulo ABC , daí, H está em CR . De forma análoga provamos que H pertence as outras duas alturas de ABC , e portanto, H é o ortocentro de ABC . $\square$

Proposição 25: Se $D-ABC$ for um tetraedro trirretângulo reto em D , seu volume é dado por

$$vol(DABC) = \frac{\overline{DA} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{DC}}{6}.$$

Demonstração: De fato, seja (P) o paralelepípedo gerado pelos catetos DA , DB e DC . Como (P) é um paralelepípedo retângulo, temos que $vol(P) = \overline{DA} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{DC}$. Portanto,

pelo Teorema 03, temos

$$\text{vol}(DABC) = \frac{\text{vol}(P)}{6} = \frac{\overline{DA} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{DC}}{6}.$$

□

Proposição 26: A soma dos quadrados dos inversos dos catetos de um tetraedro trirretângulo é igual ao quadrado do inverso da altura do tetraedro.

Demonstração: Sejam $DA = a$, $DB = b$ e $DC = c$ os catetos e $DH = h$ a altura do tetraedro trirretângulo $D-ABC$ (Figura 20). Se DR é a perpendicular de AB sobre D , temos no triângulo retângulo DAB que

$$\frac{1}{DR^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Agora, CD é perpendicular ao plano DAB e CR é perpendicular a AB e, portanto, DH é a altura do triângulo retângulo DCR . Assim,

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{DR^2} + \frac{1}{c^2}$$

e portanto,

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

□

O teorema abaixo é uma generalização do teorema de Pitágoras que vale quando o tetraedro é trirretângulo.

Teorema 05 (De Gua): O quadrado da área da base de um tetraedro trirretângulo é igual a soma dos quadrados das áreas das outras três faces.

Demonstração: Seja $D-ABC$ um tetraedro trirretângulo reto em D . Chame $\overline{DA} = a$, $\overline{DB} = b$, $\overline{DC} = c$ e h a altura do tetraedro. Daí,

$$a \cdot b \cdot c = 6 \cdot \text{vol}(DABC) = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot [ABC] \cdot h = 2 \cdot [ABC] \cdot h. \quad (\text{I})$$

Por outro lado, pela Proposição 26, temos que

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \quad (\text{II})$$

E multiplicando ambos os lados da igualdade (II) por $\left(\frac{abc}{2}\right)^2$, ficamos com

$$\frac{(abc)^2}{4h^2} = \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2. \quad (\text{III})$$

Substituindo (I) em (III), chegamos a

$$\frac{4[ABC]^2 \cdot h^2}{4h^2} = [BCD]^2 + [ABD]^2 + [ACD]^2.$$

Portanto,

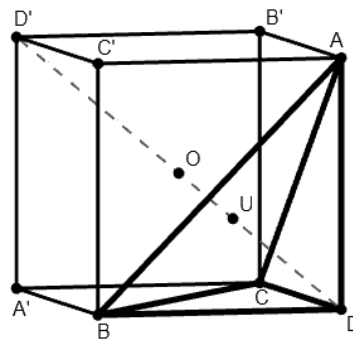
$$[ABC]^2 = [BCD]^2 + [ABD]^2 + [ACD]^2.$$

□

Proposição 27: O prolongamento da bariana de um tetraedro trirretângulo que incide do vértice do ângulo reto passa pelo circuncentro do tetraedro e esta bariana é igual a dois terços do circunraio do tetraedro.

Demonstração: Seja o tetraedro trirretângulo $D-ABC$. Construa o paralelepípedo (P) retangular $DCA'B-AB'C'D'$ gerado pelas arestas DA , DB e DC , como mostra a Figura 21.

Figura 21 - Paralelepípedo (P) gerado pelo tetraedro



Fonte: Elaborado pelo autor.

O circuncentro O de $D-ABC$ também é o circuncentro de (P) , assim O é o ponto médio da diagonal DD' de (P) . Agora, (P) é o paralelepípedo circunscrito do tetraedro $D'-ABC$, logo $D'D$ passa pelo baricentro U de ABC e, pela Proposição 10, DU é igual a um terço de $D'D$. Portanto, DU é igual a dois terços do circunraio DO . □

Corolário 11: O circuncentro de um tetraedro trirretângulo é simétrico ao vértice do ângulo reto com respeito ao centróide do tetraedro.

Demonstração: Seja G o centróide do tetraedro. Com as mesmas notações da proposição anterior, temos que

$$DG = \frac{3}{4}DU = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}DD' \right) = \frac{1}{4}DD' = \frac{1}{4} \cdot 2DO = \frac{1}{2}DO.$$

Portanto, G é o ponto médio de DO , daí segue o resultado. $\square$

3.4 Tetraedro Isofacial

O tetraedro isofacial é o equivalente ao triângulo isósceles na teoria dos tetraedros.

Definição 13 (Tetraedro Isofacial): Um tetraedro é dito **isofacial** se uma de suas faces é um triângulo equilátero e as faces restantes são triângulos isósceles congruentes. A face equilátera será chamada de **base** do tetraedro isofacial.

Proposição 28: Os ângulos triédricos da base de um tetraedro isofacial são congruentes.

Demonstração: Seja $A-BCD$ um tetraedro isofacial de base BCD . Os ângulos da base são iguais a 60° , já as faces laterais são triângulos isósceles congruentes, logo os ângulos das bases desses triângulos são congruentes a, digamos, α . Agora basta observar que cada ângulo triédrico da base do tetraedro têm dois lados iguais a α e um lado igual a 60° e, portanto, são congruentes. $\square$

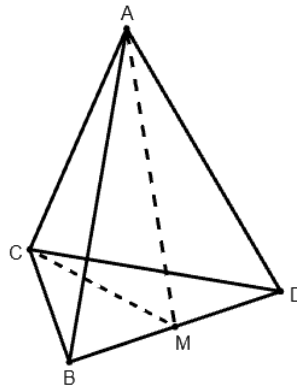
Proposição 29: Todo tetraedro isofacial é um tetraedro de Crelle.

Demonstração: Seja $A-BCD$ um tetraedro isofacial de base BCD . Temos que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$ e $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{BD}$. Logo, $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$. Portanto, pela Proposição 18, $A-BCD$ é um tetraedro de Crelle. $\square$

Proposição 30: Todo tetraedro isofacial é ortocêntrico.

Demonstração: Seja o tetraedro isofacial $A-BCD$ de base BCD . Se M é o ponto médio de DB , então CM é perpendicular a DB , pois CM é altura do triângulo equilátero BCD . De forma semelhante, AM é perpendicular a DB , pois AM é a altura do triângulo isósceles ABD . Assim, o plano ACM é perpendicular a DB , logo AC é ortogonal a DB . Analogamente, provamos que AD é ortogonal a CB e AB é ortogonal a CD . Portanto, $A-BCD$ é ortocêntrico.

Figura 22 - Ponto médio M de DB do tetraedro isofacial $A-BCD$



Fonte: Elaborado pelo autor.

□

Um rombóide em que todas as faces são losangos congruentes é chamado de **romboedro**.

Proposição 31: Um tetraedro é isofacial se, e somente se, seu empacotamento for um romboedro.

Demonstração: De fato, seja $A-BCD$ um tetraedro isofacial de base BCD , por ser ortocêntrico o seu empacotamento é um rombóide, mas note que a diagonal maior e a diagonal menor das faces do rombóide são iguais a aresta AB e BC , respectivamente. Portanto, os losangos são todos congruentes, ou seja, o empacotamento de $A-BCD$ é um romboedro. Reciprocamente, se o empacotamento de $A-BCD$ for um romboedro, temos que as diagonais menores das suas faces são iguais. Logo, a base de $A-BCD$ é equilátera. Além disso, as diagonais maiores das faces do empacotamento também são iguais, ou seja, as faces laterais de $A-BCD$ são triângulos isósceles. Portanto, $A-BCD$ é isofacial. □

Proposição 32: Em um tetraedro isofacial $A-BCD$, a altura e a bariana relativas a base BCD são coincidentes.

Demonstração: Basta observar que pelo fato do tetraedro também ser ortocêntrico, o pé da altura que incide de A é o ortocentro da base BCD , mas devido a BCD ser um triângulo equilátero, seu ortocentro é igual ao baricentro. Portanto, a altura e a bariana que partem de A coincidem. □

Proposição 33: Se $D-ABC$ for um tetraedro isofacial de base ABC tal que $\overline{AB} = a$ e $\overline{AD} = b$, seu volume é dado por

$$\text{vol}(DABC) = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Demonstração: Seja H o baricentro de ABC . Temos que DH é a altura do tetraedro e, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{DH} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{2}{3}\overline{AH}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

Portanto,

$$\text{vol}(DABC) = \frac{1}{3}\overline{DH} \cdot [ABC] = \frac{1}{3} \left(\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} \right) \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

□

3.5 Tetraedro Isósceles

O tetraedro isósceles, apesar do nome, é o equivalente ao triângulo equilátero na teoria dos tetraedros.

Definição 14 (Tetraedro isósceles): Um tetraedro é dito **isósceles** (ou **equifacial**) se suas arestas opostas são congruentes.

Proposição 34: O empacotamento de um tetraedro isósceles é um paralelepípedo retângulo.

Demonstração: Como quaisquer duas arestas opostas são iguais, cada uma das faces do paralelepípedo circunscrito tem diagonais iguais, logo todas as faces desse paralelepípedo são retângulos. Inversamente, se todas as faces de um paralelepípedo são retangulares, as diagonais em cada uma dessas faces são iguais e, portanto, o tetraedro inscrito tem os pares de arestas opostas iguais. □

Proposição 35: Seja (T) um tetraedro isósceles e (T') seu tetraedro gêmeo. O pé da perpendicular traçada de um vértice de (T') à face correspondente de (T) é o ortocentro dessa face.

Demonstração: Seja $(T') = A'B'C'D'$ o tetraedro gêmeo de $(T) = ABCD$. O vértice A' de (T') corresponde a face BCD de (T) e A' e A são vértices diagonalmente opostos do paralelepípedo circunscrito (P) dos tetraedros (T) e (T') . Como (P) é retângulo, o tetraedro $A'BCD$ é trirretângulo de base BCD e, pela Proposição 24, o pé da perpendicular à BCD que passa por A' é o ortocentro da face BCD . □

Proposição 36: Um tetraedro é isósceles se, e somente se, as barianas são iguais.

Demonstração: O paralelepípedo circunscrito (P) do tetraedro (T) é retangular, por-

tanto as suas diagonais são iguais. Como as bariantas são iguais a dois terços das respectivas diagonais, concluímos que elas são iguais. Inversamente, se as bariantas de (T) são iguais, então as diagonais de (P) também o são, logo (P) é retangular e, portanto, (T) é isósceles. $\square$

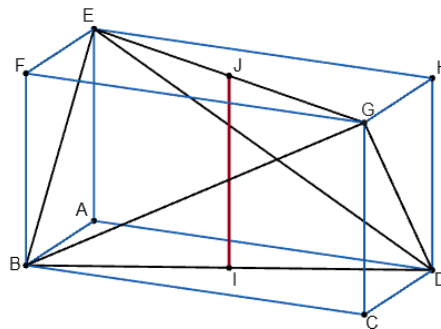
Proposição 37: As bimedias de um tetraedro isósceles coincidem com as bialturas e formam um ângulo triédrico trirretangular.

Demonstração: Como (T) é isósceles, então (P) é retangular e, daí, cada bimediana é perpendicular às faces correspondentes em (P) , ou seja, as bimedias coincidem com as respectivas bialturas. Pelo Corolário 01, as bimedias são perpendiculares, formando assim um ângulo triédrico trirretangular com origem no centróide. $\square$

Proposição 38: Se duas das bimedias de um tetraedro coincidem com as respectivas bialturas, então o tetraedro é isósceles.

Demonstração: Dado o tetraedro $EBGD$ e seu paralelepípedo circunscrito $ABCD-EFGH$, seja IJ uma bimediana perpendicular às arestas BD e EG (Figura 23). Assim, ela também é perpendicular às faces $ABCD$ e $EFGH$, logo, o paralelepípedo circunscrito é reto e as suas faces laterais são retângulos, daí, $GB = ED$ e $GD = BE$.

Figura 23 - Tetraedro $EBGD$ e seu paralelepípedo circunscrito



Fonte: Elaborado pelo autor.

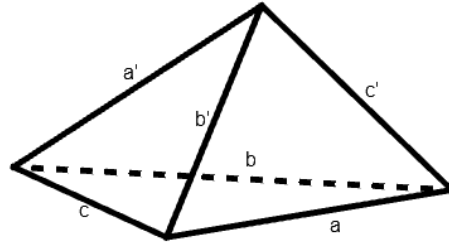
Analogamente, se KL for uma bimediana perpendicular às arestas GD e BE , provamos que $EG = BD$. Portanto, $ABCD$ é isósceles. $\square$

Pela definição, concluímos facilmente que as faces de um tetraedro isósceles têm mesmo perímetro e mesma área. No entanto, a recíproca é bem mais difícil de provar. Para o caso do perímetro é mais imediato e para o caso das áreas precisaremos do Teorema de Bang.

Proposição 39: Se todas as faces de um tetraedro têm o mesmo perímetro, então o tetraedro é isósceles.

Demonstração: Sejam os pares de arestas opostas com comprimentos a e a' , b e b' , c e c' (como mostra a figura abaixo).

Figura 24 - Tetraedro em que as faces tem mesmo perímetro



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para faces com mesmo perímetro temos

$$a + b + c = a + b' + c' = a' + b + c' = a' + b' + c.$$

Daí,

$$a + b + c = a + b' + c' \Rightarrow b + c = b' + c' \quad (I)$$

$$a' + b + c' = a' + b' + c \Rightarrow b + c' = b' + c \quad (II)$$

De (I) e (II) concluímos que $c = c'$. Logo, $b + c' = b' + c \Rightarrow b = b'$ e $a + b + c = a' + b + c' \Rightarrow a = a'$. Portanto, o tetraedro é isósceles. $\square$

Proposição 40: Se as faces de um tetraedro têm áreas iguais, então o tetraedro é isósceles.

Demonstração: Sejam X, Y, Z e W , respectivamente, as interseções das faces ABC, ACD, ABD e BCD com a esfera inscrita ao tetraedro $ABCD$. Note que $BXC \equiv BWC$, $AZB \equiv AXB$, $AXC \equiv AYC$, $AYD \equiv AZD$, $CYD \equiv CWD$ e $BWD \equiv BZD$ pelo caso de congruência de triângulos L.L.L. Assim, podemos chamar $a = [BXC] = [BWC]$, $b = [AZB] = [AXB]$, $c = [AXC] = [AYC]$, $a' = [AYD] = [AZD]$, $b' = [CYD] = [CWD]$ e $c' = [BWD] = [BZD]$. Daí, como as faces têm mesma área, então:

$$a + b + c = a + b' + c' = a' + b + c' = a' + b' + c$$

que tem como solução $c = c'$, $b = b'$ e $a = a'$.

Agora, chame $P = \overline{AZ} = \overline{AY} = \overline{AX}$, $Q = \overline{BX} = \overline{BZ} = \overline{BW}$, $R = \overline{CY} = \overline{CX} = \overline{CW}$ e $S = \overline{DZ} = \overline{DY} = \overline{DW}$. Note que,

$$[BXC] = [AYD] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot Q \cdot R \cdot \text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot P \cdot S \cdot \text{sen}(\alpha')$$

onde $\alpha = \text{med}(\widehat{BXC})$, $\alpha' = \text{med}(\widehat{AYD})$. Mas pelo Teorema de Bang, $\alpha = \alpha'$, o que implica $Q \cdot R = P \cdot S$. De forma semelhante, encontramos $P \cdot Q = R \cdot S$ e $P \cdot R = Q \cdot S$. Daí,

$$\frac{P \cdot Q}{Q \cdot R} = \frac{R \cdot S}{P \cdot S} \Rightarrow \frac{P}{R} = \frac{R}{P} \Rightarrow P^2 = R^2 \Rightarrow P = R.$$

Assim, temos também que $Q = S$. E

$$P \cdot R = Q \cdot S \Rightarrow P^2 = Q^2 \Rightarrow P = Q.$$

Logo, $P = Q = R = S$. Finalmente, pelo caso de congruência de triângulos L.A.L., temos

$$AZD \equiv AYD \equiv BXC \equiv BWC \quad (\text{I})$$

$$BZD \equiv BWD \equiv AYC \equiv AXC \quad (\text{II})$$

$$AZB \equiv AXB \equiv CYD \equiv CWD \quad (\text{III})$$

De (I) concluímos que $BC \equiv AD$, de (II) concluímos que $BD \equiv AC$ e de (III) concluímos que $AB \equiv CD$. Portanto, o tetraedro $ABCD$ é isósceles. $\square$

Proposição 41: Um tetraedro é isósceles se, e somente se, as faces são congruentes.

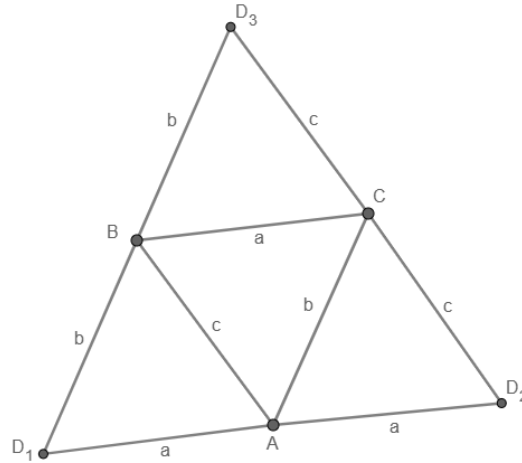
Demonstração: Se um tetraedro $ABCD$ é isósceles, por definição, temos que $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AC} = \overline{BD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$. Assim, pelo caso de congruência L.L.L. as faces são triângulos congruentes. Agora, se as faces são congruentes, em particular as áreas são iguais e, pela Proposição 40, o tetraedro é isósceles. $\square$

Proposição 42: Um tetraedro é isósceles se, e somente se, a soma dos ângulos das faces com origem em um mesmo vértice é 180° .

Demonstração: Suponha que o tetraedro $ABCD$ seja isósceles. Considere a sua planificação como mostra a Figura 25. Temos que $\overline{AB} = \overline{CD_3} = \overline{CD_2} = c$, $\overline{AC} = \overline{BD_1} = \overline{BD_3} = b$ e $\overline{BC} = \overline{AD_1} = \overline{AD_2} = a$. Assim, o quadrilátero AD_1BC é um paralelogramo, pois tem os lados opostos iguais. Daí, $D_1\widehat{BC} + A\widehat{D_1}B = 180^\circ$. Como as faces de um tetraedro isósceles são congruentes, então $A\widehat{D_1}B \equiv C\widehat{B}D_3$, pois os dois ângulos estão opostos ao lado de tamanho c . Logo, $180^\circ = D_1\widehat{BC} + A\widehat{D_1}B = D_1\widehat{B}A + A\widehat{B}C + C\widehat{B}D_3$. Analogamente, provamos para os outros vértices. Agora, suponha que a soma dos ângulos das faces com origem em um mesmo vértice de um tetraedro vale 180° . Assim, B é colinear com D_1 e D_3 . Similarmente, temos que C é colinear com D_2 e D_3 , e A é colinear com D_1 e D_2 . Daí, D_1, D_2 e D_3 formam um triângulo onde A, B e C são os pontos médios de D_1D_2 , D_1D_3 e D_2D_3 , respectivamente. Pelo Teorema da base média, $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{D_1D_2} = \overline{AD}$, $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{D_1D_3} = \overline{BD}$ e $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{D_2D_3} = \overline{CD}$. Portanto, o tetraedro

é isósceles.

Figura 25 - Planificação do tetraedro $ABCD$



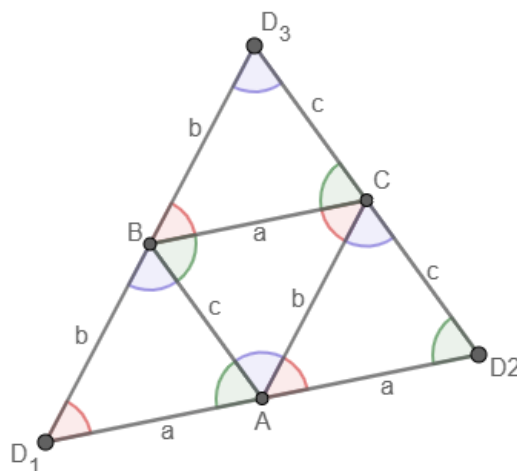
Fonte: Elaborado pelo autor.

□

Proposição 43: Um tetraedro é isósceles se, e somente se, seus quatro ângulos triédricos são congruentes.

Demonstração: Considere a planificação do tetraedro isósceles $ABCD$ como mostra a Figura 26.

Figura 26 - Planificação do tetraedro isósceles

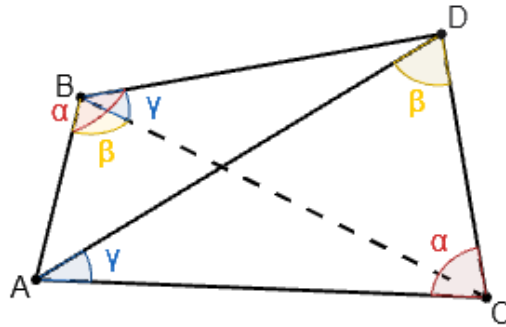


Fonte: Elaborado pelo autor.

Sejam $\overline{AB} = \overline{CD_3} = \overline{CD_2} = c$, $\overline{AC} = \overline{BD_1} = \overline{BD_3} = b$ e $\overline{BC} = \overline{AD_1} = \overline{AD_2} = a$. Pela proposição anterior, temos que D_1 , D_2 e D_3 formam um triângulo onde A , B e C são os pontos médios de D_1D_2 , D_1D_3 e D_2D_3 , respectivamente. Pelo Teorema da base média,

BC é paralelo a D_1D_2 , AC é paralelo a D_1D_3 e AB é paralelo a D_2D_3 , assim, $D_1\hat{B}A \equiv B\hat{D}_3C \equiv A\hat{C}D_2 \equiv C\hat{A}B$, $B\hat{A}D_1 \equiv D_3\hat{C}B \equiv C\hat{D}_2A \equiv A\hat{B}C$ e $A\hat{D}_1B \equiv C\hat{B}D_3 \equiv D_2\hat{A}C \equiv B\hat{C}A$. Logo, as faces de um ângulo triédrico são duas a duas congruentes com as faces de outro ângulo triédrico do tetraedro. Portanto, os quatro ângulos triédricos são congruentes. Reciprocamente, suponha que os ângulos triédricos do tetraedro $ABCD$ são congruentes. Sejam $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ os ângulos triédricos com origem em A , B , C e D , respectivamente. Chame $A\hat{B}D = \alpha$, $A\hat{B}C = \beta$ e $C\hat{B}D = \gamma$ (Figura 27). Assim, como $\hat{B} \equiv \hat{D}$ e o diedro de origem BD é comum aos dois, temos duas opções: $B\hat{D}A = \alpha$, $B\hat{D}C = \gamma$ e $A\hat{D}C = \beta$ ou $B\hat{D}A = \gamma$, $B\hat{D}C = \alpha$ e $A\hat{D}C = \beta$. Em qualquer caso temos $A\hat{D}C = \beta$. Analogamente, como $\hat{B} \equiv \hat{A}$ e o diedro de origem BA é comum aos dois, concluímos que $C\hat{A}D = \gamma$. De mesma forma, de $\hat{B} \equiv \hat{C}$, encontramos $D\hat{C}A = \alpha$.

Figura 27 - Tetraedro com ângulos triédricos congruentes



Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo, olhando para o triângulo ACD , temos que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Portanto, pela Proposição 42, o tetraedro $ABCD$ é isósceles. $\square$

Proposição 44: Em um tetraedro isósceles, o centróide é equidistante dos vértices e equidistante das faces.

Demonstração: Sejam A, B, C, D os vértices do tetraedro isósceles (T) com centróide G . Provaremos primeiramente que G é equidistante dos vértices. De fato, como as bariânicas de um tetraedro isósceles são iguais, o Teorema de Commandino garante que o centróide G é equidistante dos vértices de (T) . Agora, provaremos que G é equidistante das faces. Como G é equidistante dos vértices de (T) , temos que $\overline{AG} = \overline{BG} = \overline{CG} = \overline{DG}$, daí os tetraedros $G-CBA$, $G-DAB$, $G-ADC$ e $G-BCD$ são congruentes. Isso implica que suas alturas de G até as respectivas bases são iguais. Logo, G é equidistante das faces de (T) . $\square$

O que provamos na proposição anterior é que o centróide de um tetraedro isósceles é o circuncentro e também o incentro do tetraedro.

Corolário 12: O inraio de um tetraedro isósceles é um quarto da altura do tetraedro.

Demonstração: De fato, em um tetraedro isósceles o centróide coincide com o centro da esfera inscrita às suas faces pela Proposição 44. Logo, pela Proposição 09, segue o resultado.

Proposição 45: A interseção das faces de um tetraedro isósceles com a esfera inscrita às faces são os circuncentros dessas faces.

Demonstração: Seja o tetraedro isósceles $ABCD$ de centróide G . Tome os triângulos AGO , BGO e CGO , onde O é a interseção da esfera com a face ABC . Note que, por G também ser o incentro do tetraedro, os triângulos AGO , BGO e CGO são retângulos em O . Além disso, por G ser o circuncentro do tetraedro, temos que $\overline{AG} = \overline{BG} = \overline{CG}$. Logo, pelo caso de congruência de triângulos Cateto-hipotenusa, os triângulos AGO , BGO e CGO são congruentes e, assim, $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$. Daí, O é um ponto equidistante dos vértices de ABC , ou seja, O é o circuncentro da face ABC . Analogamente, provamos o mesmo para as outras faces de $ABCD$. $\square$

Corolário 13: As faces de um tetraedro isósceles são triângulos acutângulos.

Demonstração: Pela proposição anterior, a esfera inscrita toca internamente as faces do tetraedro nos seus circuncentros. Por outro lado, um triângulo é acutângulo se, e somente se, seu circuncentro está contido em seu interior. Portanto, as faces de um tetraedro isósceles são triângulos acutângulos. $\square$

Proposição 46: Um tetraedro é isósceles se, e somente se, as alturas são iguais.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja G o centróide do tetraedro isósceles. Pela Proposição 44, temos que G é equidistante das faces. Mas a distância do centróide as faces é um quarto das respectivas alturas, o que implica que as alturas do tetraedro são iguais.

$(\Leftarrow)$ Temos que as quatro alturas do tetraedro $ABCD$ são iguais. Por outro lado, o volume $V(ABCD)$ do tetraedro pode ser dado por

$$V(ABCD) = \frac{[ABC] \cdot h_D}{3} = \frac{[BCD] \cdot h_A}{3} = \frac{[ACD] \cdot h_B}{3} = \frac{[ABD] \cdot h_C}{3}$$

onde h_A , h_B , h_C e h_D são as alturas que incidem dos vértices A , B , C e D , respectivamente. Daí, $[ABC] = [BCD] = [ACD] = [ABD]$. Portanto, pela Proposição 40, o tetraedro é isósceles. $\square$

Proposição 47: Seja (T) um tetraedro com circuncentro M , incentro I e centróide G . Se $M = G$ ou $I = G$ ou $M = I$, então (T) é isósceles.

Demonstração: $(M = G)$: Temos que a distância de G aos vértices são iguais por hipótese e, pelo Teorema de Commandino, a distância de G ao baricentro das faces também

serão iguais. Logo, as barianas são iguais e, portanto, (T) é isósceles.

$(I = G)$: Se o incentro coincide com o centróide do tetraedro (T) de vértices A, B, C e D , então a distância de G as faces são iguais. Como, pela Proposição 09, essas distâncias são um quarto das respectivas alturas, temos que as alturas do tetraedro são iguais e, logo, o tetraedro é isósceles.

$(M = I)$: Seja o tetraedro (T) de vértices A, B, C e D . Com os vértices A, B e C , podemos formar os triângulos AIO, BIO e CIO retângulos em O , onde O é a interseção da esfera inscrita a (T) com a face ABC . Mas, se o incentro coincide com o circuncentro de (T) , então os vértices A, B e C são equidistantes do circuncentro de (T) e os triângulos AIO, BIO e CIO são congruentes. Logo, a esfera inscrita intersecta a face ABC no seu circuncentro. Analogamente, mostramos que a esfera inscrita intercepta as outras faces do tetraedro nos seus circuncentros. Note que os círculos circunscritos das quatro faces tem raios iguais. Agora, usando o fato de que cordas iguais subtendem ângulos iguais em círculos iguais, temos que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = u, \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = v, \widehat{BCA} = \widehat{BDA} = w, \widehat{ACD} = \widehat{ABD} = u', \widehat{DAB} = \widehat{DCB} = v', \widehat{DAC} = \widehat{DBC} = w'$. Mas, $u+v+w = u'+v'+w = u'+v+w' = u+v'+w' = 180^\circ$. Daí, $v+w = v'+w'$ e $w = w'$ e, assim, $u = u'$. Portanto, as faces são semelhantes. Mas como quaisquer duas dessas faces têm um lado comum, concluímos que elas são congruentes e, conseqüentemente, as arestas opostas de (T) são iguais, ou seja, (T) é isósceles. $\square$

3.6 Tetraedro Regular

Definição 15 (Tetraedro regular): Um tetraedro é dito **regular** se suas faces são triângulos equiláteros.

Note que, em particular, um tetraedro regular é isofacial e isósceles. Por consequência também é ortocêntrico e de Crelle.

Proposição 48: O empacotamento de um tetraedro regular é um cubo.

Demonstração: Seja (T) um tetraedro regular. Por ser também isósceles, seu empacotamento (P) é reto retângulo. Mas como (T) é ortocêntrico, as diagonais de (P) são perpendiculares, assim, as faces de (P) são quadrados. Portanto, (P) é um cubo. $\square$

Proposição 49: O volume V de um tetraedro regular de aresta a é dado por

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Demonstração: Como o tetraedro tem aresta a , então as faces do cubo circunscrito

são quadrados de lado $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Daí, o volume V_C do cubo é dado por $V_C = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Mas, $V = \frac{V_C}{3}$, portanto, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. $\square$

Proposição 50: Em um tetraedro regular (T) de aresta a , temos que:

(I) as bialturas coincidem com as bimedianas relativas ao mesmo par de arestas opostas e medem $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

(II) as alturas coincidem com as barianas relativas a mesma face e medem $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Demonstração: Por (T) ser isósceles, pela Proposição 37, provamos a primeira parte de (I). Agora, note que a diagonal da face do cubo circunscrito a (T) é igual a a , logo as faces do cubo são quadrados de lado $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Mas como as bimedianas de (T) são iguais as arestas do cubo circunscrito, então as bimedianas medem $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, ou seja, as bialturas de um tetraedro regular medem $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Para provar (II), basta observar que por ser ortocêntrico, os pés das alturas de (T) são os ortocentros das bases, mas devido a qualquer face de (T) ser equilátera, seu ortocentro é igual ao baricentro. Daí, a bariana relativa a essa face coincide com a respectiva altura. Além disso, por (T) ser isósceles, temos que suas alturas são iguais e suas faces têm áreas iguais. Daí, se h for a altura de (T) de vértices A , B , C e D , temos que

$$h = \frac{3\text{vol}(T)}{[ABC]} = \frac{3 \cdot \left(\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\right)}{\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$\square$

Pela Proposição 44, temos que o centróide de um tetraedro regular é equidistante das faces e equidistante dos vértices. Na próxima proposição, demonstraremos que o centróide de um tetraedro regular é equidistante das arestas.

Proposição 51: Em um tetraedro regular, a esfera inscrita às arestas intercepta esse tetraedro nos seus pontos médios e o seu centro coincide com o centróide do tetraedro.

Demonstração: Seja G o centróide do tetraedro. Como as bialturas coincidem com as bimedianas, temos que os pés das bialturas são os pontos médios das arestas. Como G é o ponto médio das bimedianas, então as distâncias de G aos pontos médios de cada aresta são iguais, pois as bimedianas têm o mesmo comprimento. Portanto, G é o centro da esfera inscrita às arestas, onde os pontos médios são os pontos de contato da esfera com

as arestas do tetraedro. □

Proposição 52: Em um tetraedro regular de aresta a , temos que:

- (i) o raio R da esfera circunscrita vale $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$;
- (ii) o raio r da esfera inscrita com respeito as faces vale $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$;
- (iii) o raio ρ da esfera inscrita com respeito as arestas vale $\rho = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Demonstração: O tetraedro é em particular isósceles, assim, temos que seu centróide O também é o incentro e o circuncentro do tetraedro pela Proposição 44. Seja H o pé da altura que incide de D relativa a base ABC .

(i) Temos que

$$R = \overline{DO} = \frac{3}{4} \cdot \overline{DH} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

(ii) Temos que

$$r = \overline{OH} = \frac{1}{4} \cdot \overline{DH} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

(iii) Temos que a esfera tangente às arestas as toca nos mesmos pontos em que os círculos inscritos das faces tangenciam os lados. Daí, pelo fato do tetraedro ser regular, temos que esses pontos são os pontos médios das arestas. Usando as mesmas notações da Proposição 19, temos que $p = q = r = s = \frac{a}{2}$, assim, o volume V do tetraedro é dado por

$$V = \frac{2pqrs}{3\rho} = \frac{2}{3\rho} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^4 = \frac{a^4}{24\rho}.$$

Por outro lado, sabemos que o volume de um tetraedro regular vale

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Assim temos

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^4}{24\rho} \Rightarrow \rho = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

□

Corolário 14: O raio ρ da esfera inscrita com respeito as arestas de um tetraedro regular é igual a média geométrica entre o raio R da esfera circunscrita e o raio r da esfera inscrita com respeito as faces do tetraedro.

Demonstração: De fato, $\sqrt{R \cdot r} = \sqrt{\frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{12}} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4} = \rho$. □

4 ESFERAS RELACIONADAS A UM TETRAEDRO

No capítulo 2 vimos que sempre existe a esfera inscrita com respeito as faces e a esfera circunscrita de um tetraedro. Agora veremos outras esferas que podemos construir em um dado tetraedro.

4.1 Esferas Escritas

Sejam ABC , ABD , ACD e CBD os quatro planos formados pelos vértices de um tetraedro $ABCD$. Chamaremos esses planos de **faces expandidas** do tetraedro. Esses planos dividem o espaço em quinze regiões, a saber: (a) a região interna do tetraedro; (b) quatro regiões formadas por uma face do tetraedro e os outros três planos que não contém aquela face, em outras palavras, as regiões formadas quando de um ângulo triédrico do tetraedro removemos o próprio tetraedro (chamaremos essas regiões de **troncos** do tetraedro); (c) seis regiões que tem por extremos um aresta do tetraedro e as quatro semirretas que pertencem as interseções dos planos com origem em um dos extremos da aresta considerada (chamaremos cada uma dessas regiões de **telhado** do tetraedro e a aresta pertencente a esse telhado de **crista**); (d) quatro regiões triédricas com origem em um vértice do tetraedro e formados pelos três planos que contém aquele vértice.

Lema 05: (i) Os planos bissetores internos dos três ângulos diédricos de um triedro se interceptam ao longo de uma reta equidistante das faces do triedro.

(ii) O plano bissetor interno de um ângulo diédrico de um triedro e os planos bissetores externos dos dois ângulos diédricos restantes se interceptam ao longo de uma reta equidistante das faces do triedro.

Demonstração: (i) Seja o triedro $S-abc$ de origem S e arestas a , b e c . Os planos bissetores dos diedros de origem em a , b e c têm o ponto S em comum, logo existe uma reta que é comum a esses planos e, por definição de plano bissetor, a reta é equidistante das faces do triedro.

(ii) Análogo a (i). □

As retas do lema anterior são chamadas de **eixos** do triedro. Ainda pelo lema anterior temos que um triedro tem quatro eixos, um interno e três externos ao triedro.

Proposição 53: Existem no máximo oito pontos equidistantes das faces (expandidas) de um tetraedro.

Demonstração: Seja o tetraedro $ABCD$. Note que um ponto equidistante das quatro faces de $ABCD$ deve estar em um dos quatro eixos do ângulo triédrico de origem em D e em um dos planos bissetores (interno e externo) do diedro BC . Agora, os quatro eixos

e os dois planos bissetores poderão se intersectar em no máximo oito pontos. Daí segue a proposição. $\square$

Note que um dos pontos encontrados na proposição anterior é o incentro do tetraedro que é a interseção do eixo interno ao triedro de origem em D com o plano bissetor interno do diedro BC .

Definição 16 (Esfera escrita): Cada um dos pontos equidistantes das faces expandidas de um tetraedro podem ser tomados como o centro de uma esfera tangente às quatro faces do tetraedro. Essas esferas são chamadas de **esferas escritas** ao tetraedro.

Na geometria plana, se tivermos três pontos A , B e C tais que C está entre A e B e não é ponto médio de AB , dizemos que o único ponto D que pertence a reta dos pontos A , B e C e que satisfaz $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ é o **conjugado harmônico** de C em relação ao segmento AB . O ponto médio de um segmento não possui conjugado harmônico. Utilizaremos esse conceito nas proposições a seguir.

Lema 06 (Gergonne): O plano bissetor interno de um ângulo diédrico de um tetraedro divide a aresta oposta na razão das áreas das faces adjacentes.

Demonstração: Seja E a interseção da aresta CD com o plano bissetor interno do ângulo diédrico AB do tetraedro $ABCD$. Como o ponto E é equidistante das faces ABC e ABD , os tetraedros $E-ABC$ e $E-ABD$ têm alturas iguais. Logo,

$$\frac{\text{vol}(EABC)}{\text{vol}(EABD)} = \frac{[ABC]}{[ABD]}.$$

Agora, esses tetraedros têm uma base comum ABE , assim, seus volumes estão entre si como as distâncias dos pontos C e D ao plano ABE , e essas distâncias, por sua vez, estão entre si como os segmentos CE e DE . Portanto,

$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}.$$

As outras relações são feitas de modo análogo. $\square$

Lema 07: Em um tetraedro, a soma das áreas de três faces é maior que a área da quarta face.

Demonstração: Seja D' a projeção de D no plano de ABC do tetraedro $ABCD$. Note que os triângulos ADB e $AD'B$ têm a base AB comum, mas a altura de ADB relativa a base AB é maior que a altura de $AD'B$ relativa a mesma base. Logo, $[ADB] > [AD'B]$. Analogamente, $[ADC] > [AD'C]$ e $[BDC] > [BD'C]$. Por outro lado, $[AD'B] + [AD'C] + [BD'C] \geq [ABC]$. Portanto, $[ADB] + [ADC] + [BDC] > [ABC]$. $\square$

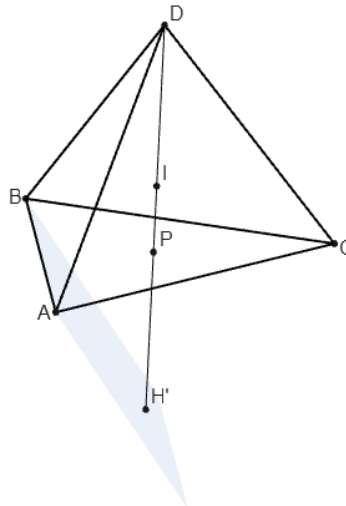
Proposição 54: Cada um dos quatro troncos de um tetraedro contém uma esfera escrita.

Demonstração: Seja $DABC$ um tetraedro. Sejam I o incentro e P a interseção da reta DI com o plano ABC . Considere os tetraedros $DPAB$, $DPBC$ e $DPCA$ e os planos bissetores internos ABI , BCI e CAI dos ângulos diédricos AB , BC e CA , respectivamente. Pelo Lema 06,

$$\frac{DI}{IP} = \frac{[ABD]}{[PAB]} = \frac{[BCD]}{[PBC]} = \frac{[ACD]}{[PCA]} = \frac{[ABD] + [BCD] + [ACD]}{[ABC]}.$$

Agora, como $[BCD] + [ACD] + [ABD]$ é sempre maior que $[ABC]$ pelo Lema 07, então DI é maior que IP , ou seja, o ponto médio de DP está em DI e é diferente de I . Daí, seja I_d o conjugado harmônico de I com relação a DP . Note que I_d está no tronco de $DABC$ em relação a D . Afirmamos que I_d é a interseção do eixo DI com os planos bissetores externos dos ângulos diédricos AB , BC e CA . De fato, dado um diedro, digamos AB , suponha que uma reta r , ortogonal à origem do diedro, corte uma face em E , o bissetor interno em F , a outra face em G e o bissetor externo em H . Então, H é o conjugado harmônico de G em relação ao segmento EF , ou seja, a quádrupla $(E, F; G, H)$ é harmônica.

Figura 28 - Interseção do eixo DI com o plano bissetor do diedro AB



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, note que a reta $\overleftrightarrow{DI}$ intersecta uma face em D , o bissetor interno em I , a outra face em P e digamos que corte o plano bissetor externo em H' . Afirmamos que $(D, I; P, H')$ ainda é uma quádrupla harmônica. Basta considerar o caso em que r e $\overleftrightarrow{DI}$ são concorrentes. Nesses termos, se o plano determinado por r e $\overleftrightarrow{DI}$ corta a origem dos diedros em O , então as retas $a = \overleftrightarrow{ED}$, $b = \overleftrightarrow{FI}$, $c = \overleftrightarrow{GP}$ e $d = \overleftrightarrow{HH'}$ (concorrem em O e)

formam uma quádrupla harmônica (devido à existência de $(E, F; G, H)$). Logo, $H' = I_d$. De forma semelhante, provamos que I_d é a interseção do eixo DI com os planos bissetores externos dos ângulos diédricos BC e CA . Portanto, I_d é o centro de uma esfera que tangencia as quatro faces do tetraedro $DABC$ localizada no tronco relativo a D . Analogamente, provamos que os conjugados harmônicos I_a , I_b e I_c de I com relação aos outros vértices são os centros das outras três esferas escritas às faces do tetraedro. $\square$

Note que todo tetraedro tem pelo menos cinco esferas tangentes, que são a esfera inscrita às faces e as quatro esferas escritas aos troncos do tetraedro.

Proposição 55: Dos dois telhados de um tetraedro tendo por cristas duas arestas opostas do tetraedro, apenas um pode conter uma esfera escrita ao tetraedro.

Demonstração: Dado o tetraedro $ABCD$, sejam E e F as interseções das arestas BC e AD com os planos bissetores internos dos ângulos diédricos AD e BC , respectivamente. Agora, considere os tetraedros $ABEF$, $CDEF$, $ACEF$, $BDEF$ e os planos bissetores internos ABI , CDI , ACI , BDI dos ângulos diédricos AB , CD , AC , BD , onde I é o incentro de $ABCD$. Pelo Lema 06, temos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{EI}}{\overline{IF}} &= \frac{[ABE]}{[ABF]} = \frac{[CDE]}{[CDF]} = \frac{[ACE]}{[ACF]} = \frac{[BDE]}{[BDF]} = \frac{[ABE] + [ACE] + [CDE] + [BDE]}{[ABF] + [BDF] + [CDF] + [ACF]} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\overline{EI}}{\overline{IF}} = \frac{[ABC] + [BCD]}{[ACD] + [ABD]}. \end{aligned}$$

Suponha que I' seja o conjugado harmônico de I com relação a EF . Daí, I' necessariamente está no telhado de crista AD ou no telhado de crista BC . Pela relação acima, I' estará no primeiro telhado se $[ABC] + [BCD] > [ACD] + [ABD]$ e estará no segundo telhado se $[ABC] + [BCD] < [ACD] + [ABD]$. De forma semelhante à demonstração da Proposição 54, provamos que I' é a interseção de EF com o plano bissetor externo de qualquer um dos ângulos diédricos AB , CD , AC , BD . Portanto, I' é o centro de uma esfera que tangencia as quatro faces do tetraedro $ABCD$ e pertence ou ao telhado de crista AD ou ao telhado de crista BC . Analogamente, provamos que existem um segunda esfera escrita (cujo centro pertence ou ao telhado de crista AB ou ao telhado de crista CD), se $[BCD] + [ACD] \neq [ABC] + [ABD]$, e uma terceira esfera escrita (cujo centro pertence ou ao telhado de crista AC ou ao telhado de crista BD), se $[BCD] + [ABD] \neq [ACD] + [ABC]$. $\square$

Observação: Na proposição acima consideramos que o conjugado harmônico de I com relação a EF existe. Mas pode acontecer de não existir, este é o caso quando $[ABC] + [BCD] = [ACD] + [ABD]$ e, assim, não existe a esfera escrita no telhado cor-

respondente. As esferas escritas nos telhados relativos a AC ou BD não existirão se $[BCD] + [ABD] = [ACD] + [ABC]$ e as esferas escritas nos telhados de arestas AB ou CD não existirão se $[BCD] + [ACD] = [ABC] + [ABD]$. Note que para nenhuma das três esferas existirem é necessário e suficiente que $[BCD] = [ACD] = [ABD] = [ABC]$, o que ocorre se, e somente se o tetraedro for isósceles.

Proposição 56: Um tetraedro isósceles tem exatamente cinco esferas tangentes à ele.

Demonstração: Basta mostrarmos que não existem as esferas escritas aos telhados do tetraedro. De fato, em um tetraedro isósceles as áreas das faces são iguais. Logo, pela observação anterior, não existem as esferas escritas aos telhados. $\square$

Proposição 57: Os centros das esferas escritas externamente a um tetraedro isósceles pertencem à esfera circunscrita de tal modo que cada um dos centros é diametralmente oposto a um dos vértices do tetraedro. Além disso, as quatro esferas são congruentes e seus raios são o dobro do raio da esfera inscrita às faces.

Demonstração: Seja D' o ponto diametralmente oposto de D com respeito a esfera circunscrita do tetraedro $ABCD$. Se G for o centróide de $ABCD$, pela Proposição 44, temos que G também é o circuncentro do tetraedro, ou seja, $\overline{GD'} = \frac{1}{2}\overline{DD'}$. Por outro lado, se P é a interseção da reta DG com o plano ABC , então $\overline{DG} = \frac{3}{4}\overline{DP}$. Daí,

$$\frac{3}{4}\overline{DP} = \overline{DG} = \overline{GD'} = \frac{1}{2}\overline{DD'} \Rightarrow \overline{DD'} = \frac{3}{2}\overline{DP}.$$

Logo,

$$\overline{PD'} = \overline{DD'} - \overline{DP} = \frac{3}{2}\overline{DP} - \overline{DP} = \frac{1}{2}\overline{DP}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{PG}}{\overline{PD'}} = \frac{\frac{1}{4}\overline{DP}}{\frac{1}{2}\overline{DP}} \Rightarrow \overline{PG} = \frac{1}{2}\overline{PD'}.$$

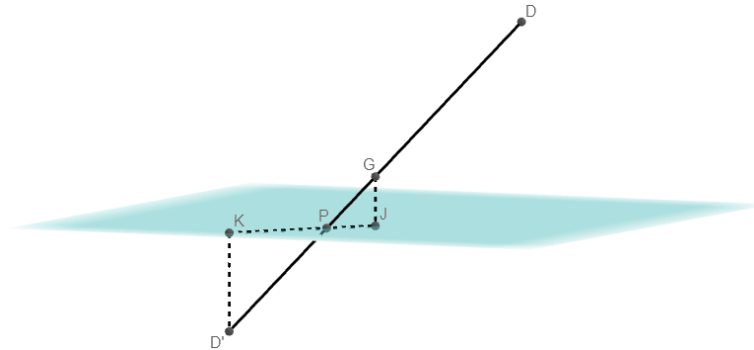
Portanto,

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{PG}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{DD'}}{\frac{1}{2}\overline{PD'}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{PD'}}.$$

Ou seja, D' é o conjugado harmônico de G com relação a DP , o que implica que D' é o centro da esfera escrita ao tronco relativo ao vértice D de $ABCD$. Para os outros vértices a prova é análoga. Além disso, sejam J o pé da perpendicular de G e K o pé da perpendicular de D' ambos a face ABC . Os triângulos $PD'K$ e PGJ são semelhantes,

assim,

Figura 29 - Pontos D e D' da esfera circunscrita a $ABCD$



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\frac{\overline{D'K}}{\overline{GJ}} = \frac{D'P}{GP} = \frac{\overline{D'P}}{\frac{1}{2}\overline{D'P}} \Rightarrow \overline{D'K} = 2\overline{GJ}.$$

Logo, o raio $\overline{D'K}$ da esfera escrita externamente ao tronco relativo ao vértice D é o dobro do raio $\overline{GJ}$ da esfera inscrita às faces do tetraedro. Podemos mostrar o mesmo para as outras três esferas escritas externamente. Daí, segue a proposição. $\square$

Na Proposição 45 provamos que a esfera inscrita a um tetraedro isósceles toca as faces do tetraedro nos seus circuncentros. Na proposição seguinte, provaremos que as esferas escritas externamente tocam as faces nos seus ortocentros.

Proposição 58: O ponto de contato de uma face de um tetraedro isósceles com a esfera escrita em relação a essa face é o ortocentro da face.

Demonstração: Com as mesmas notações da proposição anterior, pelo Corolário 05, temos que G é a interseção das diagonais do paralelepípedo (P) circunscrito de $ABCD$. Como (P) é retângulo, então o ponto D' é vértice do tetraedro gêmeo de $ABCD$. Note que K é o ponto de contato da face ABC com a esfera escrita de centro D' e, pela Proposição 35, K é o ortocentro da face ABC . $\square$

4.2 Esfera de 12 pontos

Abordaremos agora um análogo do círculo de 9 pontos para um tetraedro. O círculo de 9 pontos de um triângulo é o círculo que passa pelos pés das três alturas, os três pontos médios dos lados e os pontos médios dos três segmentos cujos extremos são um vértice e o ortocentro do triângulo. No geral as alturas de um tetraedro não concorrem em um ponto. Por outro lado, qualquer tetraedro admite um ponto notável chamado ponto de Monge, que é o equivalente ao ortocentro de um tetraedro ortocêntrico.

Um plano que passa pelo ponto médio de uma aresta e é perpendicular a aresta oposta de um tetraedro é chamado **plano de Monge**. Note que em um tetraedro existem seis planos de Monge.

Proposição 59: Os seis planos de Monge de um tetraedro têm um ponto comum.

Demonstração: Sejam E o ponto médio da aresta AB e F o ponto médio da aresta CD do tetraedro $ABCD$. O plano π_{AB} medidor de AB e o plano μ_{AB} de Monge que passa por F e é perpendicular a AB são paralelos, pois os dois são perpendiculares a AB . Pela Proposição 16, π_{AB} contém o circuncentro O de $ABCD$. Agora, sejam G o centróide do tetraedro e M um ponto de μ_{AB} tal que o segmento OM passa por G . Temos que OM é bisetado por G . De fato, EF por ser uma bimediana do tetraedro, é bisetado por G e os triângulos GEO e GFM são congruentes, assim, OM também será bisetado por G . Note que qualquer segmento que passa por G e tem um extremo em π_{AB} e outro extremo em μ_{AB} é bisetado por G pelos mesmos argumentos. Mas os pontos O e G são independentes da aresta escolhida e como O pertence a todos os planos mediadores de $ABCD$, concluímos que M pertencerá a todos os planos de Monge de $ABCD$. Portanto, os planos de Monge do tetraedro $ABCD$ se interceptam em M . $\square$

Definição 17 (Ponto de Monge): O ponto comum aos seis planos de Monge de um tetraedro é chamado de **ponto de Monge** do tetraedro.

Note, pela prova da proposição acima, que o ponto de Monge é o simétrico do circuncentro com respeito ao centróide. A reta que une o centróide, o circuncentro e o ponto de Monge de um tetraedro será, por analogia com o caso plano, chamada de **reta de Euler** do tetraedro.

Corolário 15: (i) O ponto de Monge de um tetraedro ortocêntrico coincide com seu ortocentro.

(ii) O ponto de Monge de um tetraedro trirretângulo coincide com o vértice do ângulo reto.

(iii) O ponto de Monge de um tetraedro isósceles coincide com o centróide.

Demonstração: (i) O ponto de Monge é o simétrico do circuncentro com respeito ao centróide, mas pelo Corolário 10 esse é o ortocentro do tetraedro. Logo, o ponto de Monge e o ortocentro de um tetraedro ortocêntrico coincidem.

(ii) Segue de (i).

(iii) Em um tetraedro isósceles, o circuncentro coincide com o centróide. Logo, também o ponto de Monge e o centróide coincidem. $\square$

Seja Ω um conjunto de pontos $A, B, C, \dots$ do espaço. Dado um ponto S , podemos

construir o lugar geométrico Σ dos pontos $A', B', C', \dots$ que

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}} = \dots = k$$

onde k é uma razão dada. O conjunto Σ é dito **homotético** ao conjunto Ω , o ponto S é chamado de **centro homotético** dos conjuntos, k sua **razão homotética** e os pontos $A', B', C', \dots$ de **homotético** de $A, B, C, \dots$, respectivamente.

Lema 08: O homotético de uma esfera é uma esfera.

Demonstração: Dada uma esfera Σ de centro O , sejam S o centro homotético, O' o ponto homotético de O , A' o ponto homotético de um ponto qualquer A de Σ e k a razão homotética. Temos que

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k.$$

Portanto, o ponto A' está a uma distância fixa de O' , ou seja, o homotético da esfera é uma esfera de centro O' e raio $\overline{O'A'}$. $\square$

Proposição 60: O homotético da esfera circunscrita de um tetraedro (T) na razão $\frac{1}{3}$ com respeito ao centróide é a esfera circunscrita do tetraedro medial de (T) .

Demonstração: Sejam respectivamente G_a, G_b, G_c e G_d os baricentros das faces BCD, ACD, ABD e ABC de um tetraedro $(T) = ABCD$ e G seu centróide. Basta notar que

$$\frac{\overline{GG_a}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GG_b}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{GG_c}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{GG_d}}{\overline{GD}} = \frac{1}{3}.$$

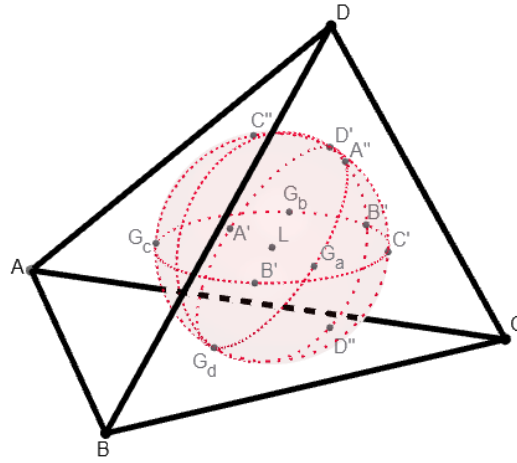
E como o homotético de uma esfera é outra esfera, então o homotético da esfera circunscrita a (T) na razão $\frac{1}{3}$ de centro homotético G é uma esfera que passa pelos pontos G_a, G_b, G_c e G_d , ou seja, é a esfera circunscrita ao tetraedro medial de (T) . $\square$

Teorema 06 (Esfera de 12 pontos): Dados um tetraedro $ABCD$ e seu ponto de Monge M , sejam:

- G_a, G_b, G_c e G_d os baricentros das faces BCD, ACD, ABD e ABC , respectivamente.
- A' o ponto tal que $\frac{\overline{MA'}}{\overline{MA}} = \frac{1}{3}$, B' o ponto tal que $\frac{\overline{MB'}}{\overline{MB}} = \frac{1}{3}$, C' o ponto tal que $\frac{\overline{MC'}}{\overline{MC}} = \frac{1}{3}$ e D' o ponto tal que $\frac{\overline{MD'}}{\overline{MD}} = \frac{1}{3}$
- A'' a projeção de A' em BCD , B'' a projeção de B' em ACD , C'' a projeção de C' em ABD e D'' a projeção de D' em ABC .

Então existe uma esfera que passa pelos pontos $G_a, G_b, G_c, G_d, A', B', C', D', A'', B'', C''$ e D'' .

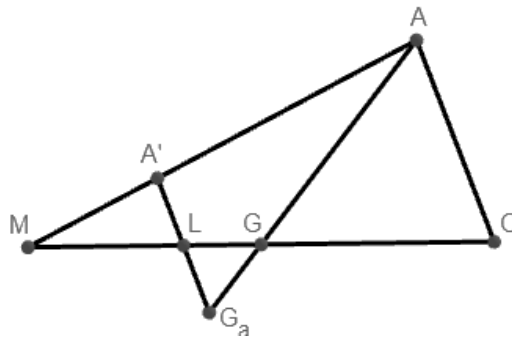
Figura 30 - Tetraedro e sua esfera de 12 pontos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Demonstração: Seja Λ a esfera de centro L que contém os pontos G_a, G_b, G_c e G_d . Pela proposição acima, Λ é o homotético, com centro em G e razão $-\frac{1}{3}$, da esfera circunscrita de $ABCD$. Assim, temos que L pertence a reta de Euler OG e $\frac{LG}{GO} = \frac{1}{3}$, onde O é o centro da esfera circunscrita e G é o baricentro de $ABCD$. Temos também que $\frac{GG_a}{GA} = \frac{1}{3}$, daí, os triângulos AGO e G_aGL são semelhantes, logo, o raio r de Λ é dado por $r = LG_a = \frac{1}{3}OA$. Por outro lado, como M é o simétrico de O com relação a G , então $\frac{ML}{MO} = \frac{1}{3}$, ou seja, $\frac{ML}{MO} = \frac{MA'}{MA}$ e, além disso, os ângulos $\widehat{AMO}$ e $\widehat{A'ML}$ são congruentes. Logo, os triângulos AMO e $A'ML$ são semelhantes com razão de semelhança $\frac{1}{3}$. Portanto, $A'L = \frac{1}{3}OA = LG_a = r$, o que implica que $A' \in \Lambda$. Analogamente, provamos que B', C' e D' pertencem a Λ .

Figura 31 - Triângulo AMO



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, provaremos que as projeções A'', B'', C'' e D'' pertencem a Λ . Primeiramente, note que A' e G_a são diametralmente opostos em Λ . De fato, temos que

$$\frac{A'M}{A'A} \cdot \frac{G_aA}{G_aG} \cdot \frac{LG}{LM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Logo, pelo Teorema de Menelaus, A' , L e G_a são colineares, e como as distâncias de A' e de G_a a L são iguais a r , então A' e G_a são diametralmente opostos em Λ . Daí, o triângulo $A'A''G_a$ é retângulo em A'' com mediana $A''L$, assim, $\overline{A''L} = \frac{1}{2}\overline{A'G_a} = r$. Portanto, $A'' \in \Lambda$. De forma semelhante, provamos que B'' , C'' e D'' pertencem a Λ . $\square$

Observe que resulta da demonstração do teorema anterior que o centro L da esfera divide o segmento OM na razão $2 : 1$.

Definição 18 (Esfera de 12 pontos): A esfera do teorema acima é conhecida como **esfera de 12 pontos** de um tetraedro.

Note que o centro da esfera de 12 pontos de um tetraedro isósceles coincide com o seu centróide. De fato, com as mesmas notações do Teorema 06, em um tetraedro isósceles vale que $M = G = O$. Portanto, $L = G$.

Veremos abaixo que existem duas esferas de 12 pontos relacionadas a um tetraedro ortocêntrico.

Proposição 61: Em um tetraedro ortocêntrico os pontos médios das arestas e os pés das bialturas são doze pontos de uma mesma esfera cujo centro é o centróide do tetraedro.

Demonstração: Seja o tetraedro ortocêntrico $ABCD$. Já vimos que as três bimediana de um tetraedro ortocêntrico são iguais e se interceptam no centróide do tetraedro. Sendo G o centróide, temos que G é o ponto médio dessas bimediana, assim, G é o centro de uma esfera Σ que passa pelos pés dessas bimediana. Agora, note que a interseção de Σ com o plano da face ABC é um círculo que passa pelos pés de três bimediana, ou seja, pelos três pontos médios dos lados do triângulo ABC . Mas o único círculo com essa propriedade é o círculo de 9 pontos de ABC , logo, a esfera Σ também passa pelos pés das alturas de ABC . Pela Proposição 22, os pés das alturas de ABC são pés das bialturas de $ABCD$. Analogamente, provamos o mesmo para as outras faces de $ABCD$. Portanto, a esfera Σ de centro G passa pelos seis pontos médios das arestas e os seis pés das três bialturas de um tetraedro ortocêntrico. $\square$

Definição 19 (1ª esfera de 12 pontos): A esfera que passa pelos pontos médios das arestas e os pés das bialturas de um tetraedro ortocêntrico é chamado de **1ª esfera de 12 pontos** do tetraedro ortocêntrico.

Note que, pelo fato da 1ª esfera de 12 pontos passar pelos círculos de 9 pontos das quatro faces, ela passa por 24 pontos significativos do tetraedro (no total seriam $9 \cdot 4 = 36$ pontos, mas cada ponto médio e cada pé das alturas das faces é comum a dois círculos, ou seja, estão sendo contados duas vezes).

Corolário 16: Em um tetraedro regular, a sua 1ª esfera de 12 pontos coincide com a sua esfera inscrita às arestas.

Demonstração: De fato, em um tetraedro regular os pontos médios das arestas e os pés das bialturas coincidem e, pelas proposições 51 e 61, a esfera de 12 pontos e a esfera inscrita às arestas coincidem. $\square$

Proposição 62: Os baricentros e os ortocentros das faces de um tetraedro ortocêntrico pertencem a uma mesma esfera. Além disso, essa esfera corta as alturas do tetraedro nos pontos a um terço da distância do ortocentro aos vértices.

Demonstração: Esta esfera é a esfera do Teorema 06 para o caso particular do tetraedro ortocêntrico, onde o ponto de Monge coincide com o ortocentro. Assim, os pontos A'' , B'' , C'' e D'' coincidem com os pés das alturas do tetraedro. Mas os pés dessas alturas são os ortocentros das faces do tetraedro. $\square$

Definição 20 (2ª esfera de 12 pontos): A esfera que passa pelos baricentros e ortocentros das faces e os pontos das alturas que estão a um terço da distância do ortocentro aos vértices de um tetraedro ortocêntrico é chamada de 2ª esfera de 12 pontos do tetraedro ortocêntrico.

Corolário 17: Em um tetraedro regular, a sua 2ª esfera de 12 pontos coincide com a sua esfera inscrita às faces.

Demonstração: De fato, como as faces são triângulos equiláteros, os baricentros coincidem com os respectivos ortocentros. Por outro lado, pelo fato de um tetraedro regular ser isósceles temos que o centro da esfera de 12 pontos coincide com o centróide que, por sua vez, coincide com o incentro. Daí, o resultado. $\square$

4.3 Volume de uma Esfera por Tetraedros

Nesta seção iremos demonstrar a fórmula do volume de uma esfera a partir do volume de um tetraedro. No final da seção veremos uma relação entre os raios das esferas circunscrita e inscrita às faces de um tetraedro.

O Princípio de Cavalieri afirma que se dois sólidos estão na região limitada por dois planos paralelos, e se as áreas das duas seções desses sólidos determinadas por qualquer plano paralelo aos planos dados são sempre iguais, então os volumes dos dois sólidos também são iguais.

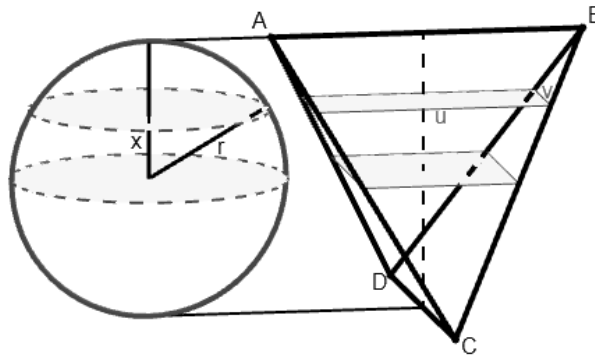
Teorema 07 (Volume de uma esfera): O volume $vol(\Sigma)$ de uma esfera Σ de raio

r é dado por

$$\text{vol}(\Sigma) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Demonstração: Considere uma esfera de raio r tangente a dois planos paralelos α e α' , onde a distância entre os planos é $2r$. Em α faça o segmento AB e em α' faça o segmento CD de tal modo que estes segmentos sejam ortogonais, cada um de comprimento $2r\sqrt{\pi}$ e tendo o segmento de reta que une seus pontos médios como uma perpendicular comum. Temos assim o tetraedro $ABCD$ (como mostra a Figura 32).

Figura 32 - Esfera e tetraedro $ABCD$



Fonte: Elaborado pelo autor.

O plano equatorial da esfera, ou seja, o plano paralelo a α e α' e que passa pelo centro da esfera, corta o tetraedro $ABCD$ em um quadrado de lado $r\sqrt{\pi}$. De fato, esse plano é um plano diretor de AB e CD , daí, a sua interseção com o tetraedro $ABCD$ é um paralelogramo de lados, digamos, p e q . Mas, pelo Teorema da base média, p vale metade de $\overline{AB}$ e q vale metade de $\overline{CD}$, ou seja, $p = r\sqrt{\pi} = q$. Agora, faça um plano paralelo ao plano equatorial e a uma distância $x < r$ dele. Esse plano corta a esfera em um círculo e o tetraedro em um retângulo de lados u e v , onde u é paralelo a AB e v é paralelo a CD . Note que, usando Teorema de Pitágoras, encontramos que o círculo tem área $\pi(r^2 - x^2)$. Por outro lado, usando semelhança de triângulos, achamos que

$$\frac{u}{r\sqrt{\pi}} = \frac{r+x}{r} \quad \text{e} \quad \frac{v}{r\sqrt{\pi}} = \frac{r-x}{r}.$$

Logo, o quadrado tem área $u \cdot v = \pi(r+x)(r-x) = \pi(r^2 - x^2)$. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, a esfera e o tetraedro $ABCD$ têm volumes iguais. Por fim, pela Proposição 13, temos que o volume do tetraedro $ABCD$ é dado por

$$\text{vol}(ABCD) = \frac{1}{6} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \text{sen}(90^\circ) \cdot 2r = \frac{1}{6} \cdot (2r\sqrt{\pi}) \cdot (2r\sqrt{\pi}) \cdot 2r = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Portanto,

$$\text{vol}(\Sigma) = \text{vol}(ABCD) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

□

Proposição 63: Sejam R o raio da esfera circunscrita e r o raio da esfera inscrita às faces de um tetraedro $ABCD$. Temos que $R \geq 3r$ e a igualdade ocorre quando $ABCD$ for regular.

Demonstração: Sejam $ABCD$ um tetraedro e E um ponto interno ou não ao tetraedro. É fácil ver que $ABCD \subset ABDE \cup ACDE \cup BCDE \cup ABCE$. O que implica que

$$\text{vol}(ABCD) \leq \text{vol}(ABDE) + \text{vol}(ACDE) + \text{vol}(BCDE) + \text{vol}(ABCE).$$

Considere r o raio da esfera inscrita às faces de $ABCD$ e uma esfera Σ' secante aos planos das faces de $ABCD$ de raio r' e centro E . Temos que

$$\text{vol}(ABCD) = \frac{1}{3}([ABC] + [ACD] + [ABD] + [BCD])r$$

$$\text{vol}(ABDE) \leq \frac{1}{3}[ABD]r'$$

$$\text{vol}(ACDE) \leq \frac{1}{3}[ACD]r'$$

$$\text{vol}(BCDE) \leq \frac{1}{3}[BCD]r'$$

$$\text{vol}(ABCE) \leq \frac{1}{3}[ABC]r'$$

Daí,

$$\text{vol}(ABCD) \leq \text{vol}(ABDE) + \text{vol}(ACDE) + \text{vol}(BCDE) + \text{vol}(ABCE) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}([ABC] + [ACD] + [ABD] + [BCD])r \leq \left(\frac{1}{3}[ABD]r'\right) + \left(\frac{1}{3}[ACD]r'\right) + \left(\frac{1}{3}[BCD]r'\right) + \left(\frac{1}{3}[ABC]r'\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}([ABC] + [ACD] + [ABD] + [BCD])r \leq \frac{1}{3}([ABC] + [ACD] + [ABD] + [BCD])r' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \leq r'.$$

Agora, tome Σ' sendo a esfera de 12 pontos do tetraedro. Assim, temos que $r \leq r'$. Mas, na demonstração do Teorema 06, vimos que $r' = \frac{1}{3}R$. Portanto, $R \geq 3r$. Pelo Corolário 17, a igualdade ocorre quando o tetraedro é regular. □

5 GENERALIZAÇÃO DE TEOREMAS PARA TETRAEDROS

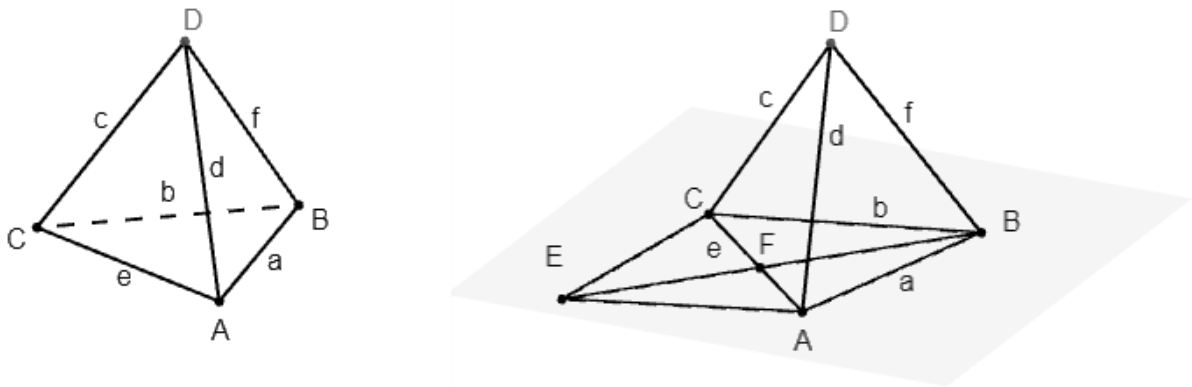
5.1 Desigualdade Tetraédrica

A desigualdade tetraédrica é equivalente da desigualdade triangular para tetraedros. Para prová-la, precisamos de dois resultados de geometria plana: um é a própria desigualdade triangular que diz que em um triângulo, qualquer lado é menor que a soma dos outros dois; o outro é a desigualdade de Ptolomeu que diz que em um quadrilátero, o produto das diagonais é menor ou igual que a soma dos produtos dos lados opostos.

Teorema 08 (Desigualdade tetraédrica): O produto de qualquer par de arestas opostas de um tetraedro é menor que a soma dos produtos dos outros dois pares.

Demonstração: Seja $ABCD$ um tetraedro de base ABC tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, $\overline{AC} = e$ e $\overline{BD} = f$ (ver Figura 33). Queremos provar que $ef < ca + db$.

Figura 33 - Tetraedro $D-ABC$ e plano ABC



Fonte: Elaborado pelo autor.

De fato, no plano de ABC , seja E o ponto tal que o triângulo ACE seja congruente ao triângulo ACD . Chame de F a interseção de AC com BE . Então, pela desigualdade triangular, temos que:

$$f < \overline{DF} + \overline{FB} = \overline{EF} + \overline{FB} = \overline{EB}$$

Agora, Pela desigualdade de Ptolomeu,

$$e \cdot f < e \cdot \overline{EB} \leq \overline{EC} \cdot a + \overline{EA} \cdot b = \overline{CD} \cdot a + \overline{AD} \cdot b = c \cdot a + d \cdot b.$$

□

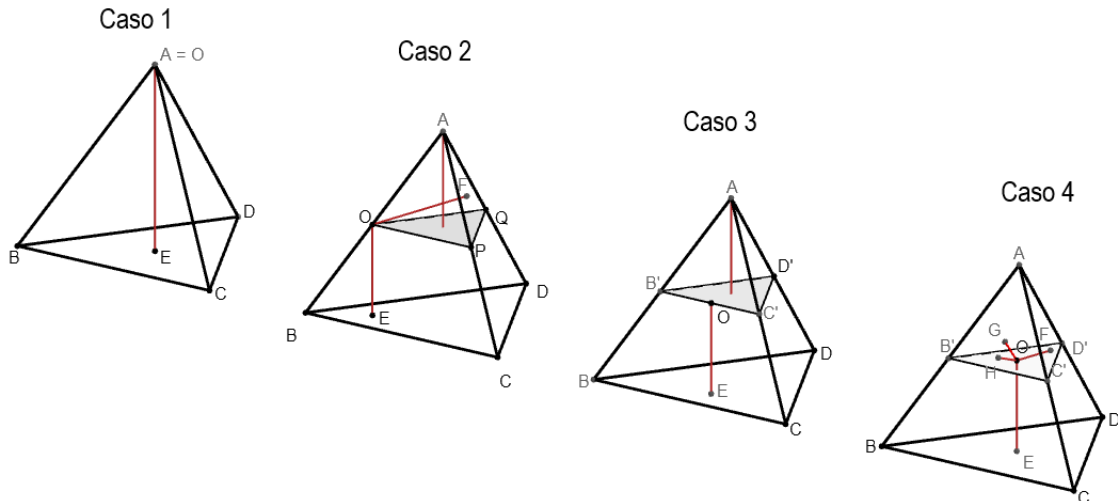
5.2 Teorema de Viviani

Na geometria euclidiana plana, o Teorema de Viviani afirma que a soma das distâncias de um ponto interno a um triângulo equilátero aos lados desse triângulo é igual a altura do triângulo. Nesta seção generalizaremos o Teorema de Viviani para tetraedros e veremos que o resultado vale quando se, e somente se, o tetraedro for isósceles.

Teorema 09: Seja O um ponto interno ou um ponto pertencente ao tetraedro isósceles $ABCD$ de altura h . A soma das distâncias de O as faces de $ABCD$ é constante e, além disso, é igual a altura do tetraedro.

Demonstração: Sejam E, F, G e H respectivamente os pés das perpendiculares de O as faces BCD, ACD, ABD e ABC do tetraedro.

Figura 34 - Casos das posições do ponto O



Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso 1: O coincide com algum dos vértices. Suponha que $O = A$, assim, $\overline{OF} = \overline{OG} = \overline{OH} = 0$ e $\overline{OE} = h$. Logo, $\overline{OE} + \overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH} = h$.

Caso 2: O pertence a uma aresta do tetraedro. Suponha que O pertence a aresta AB , assim, seja α o plano paralelo a BCD que passa por O . Sejam respectivamente P e Q as interseções de α com as arestas AC e AD . Note que o tetraedro $A-OPQ$ é isósceles, logo tem as alturas iguais, de forma que $\overline{OF}$ é igual a altura de $A-OPQ$ relativa a base OPQ . Temos também que $\overline{OG} = \overline{OH} = 0$ e $\overline{OE}$ é a distância de α a base BCD . Portanto, $\overline{OE} + \overline{OF} = h$ e $\overline{OE} + \overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH} = h + 0 + 0 = h$.

Caso 3: O pertence a uma face do tetraedro. Suponha que O pertence a face ABC . Seja β o plano que passa por O e é paralelo a face BCD . Sejam B', C' e D' as interseções de β com AB, AC e AD , respectivamente. Podemos usar o caso 2 para o tetraedro $A-B'C'D'$, daí temos que $\overline{OH} = 0$ e, assim, $\overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH}$ é igual a distância de A ao plano β . Por outro lado, $\overline{OE}$ é a distância de β a face BCD . Portanto, $\overline{OE} + \overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH} = h$.

Caso 4: O é um ponto interno ao tetraedro. Seja γ o plano paralelo a BCD que passa por O . Sejam B' , C' e D' as interseções de γ com AB , AC e AD , respectivamente. Aplicando o caso 3 no tetraedro $A-B'C'D'$, $\overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH}$ é igual a distância de A ao plano γ . Por outro lado, $\overline{OE}$ é a distância de γ a face BCD . Portanto, $\overline{OE} + \overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH} = h$. $\square$

Observe que para o Caso 4 poderíamos ter usado o volume para resolver o problema, pois a soma dos volumes dos tetraedros $O-BCD$, $O-ACD$, $O-ABD$ e $O-ABC$ é igual ao volume V de $ABCD$, ou seja,

$$V = \text{vol}(OBCD) + \text{vol}(OACD) + \text{vol}(OABD) + \text{vol}(OABC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot [BCD] \cdot \overline{OE} + \frac{1}{3} \cdot [ACD] \cdot \overline{OF} + \frac{1}{3} \cdot [ABD] \cdot \overline{OG} + \frac{1}{3} \cdot [ABC] \cdot \overline{OH}$$

Mas como $ABCD$ é isósceles, temos que $[BCD] = [ACD] = [ABD] = [ABC] = S$. Logo,

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \overline{OE} + \frac{1}{3} \cdot S \cdot \overline{OF} + \frac{1}{3} \cdot S \cdot \overline{OG} + \frac{1}{3} \cdot S \cdot \overline{OH} \Rightarrow \frac{3V}{S} = \overline{OE} + \overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH}.$$

Como V e S são constantes temos que a soma $\overline{OE} + \overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH}$ é constante. Além disso,

$$\overline{OE} + \overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH} = \frac{3V}{S} = h$$

onde h é a altura do tetraedro $ABCD$.

Proposição 64: Seja O um ponto interno ou um ponto pertencente ao tetraedro $ABCD$. Se a soma das distâncias de O as faces de $ABCD$ é constante, então o tetraedro é isósceles.

Demonstração: Sejam E , F , G e H respectivamente os pés das perpendiculares de O as faces BCD , ACD , ABD e ABC . Como a soma $\overline{OE} + \overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH}$ é constante temos que, em particular, quando O coincide com os vértices a soma será igual a altura relativa aquele vértice, ou seja, as quatro alturas do tetraedro são iguais. Portanto, $ABCD$ é isósceles. $\square$

5.3 Fórmula de Herão

A Fórmula de Herão diz que em um triângulo de lados a , b e c a área é dada por $[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, com $s = \frac{a+b+c}{2}$, ou seja, a área depende apenas dos lados do triângulo e independem de como eles são organizados. É natural pensarmos

se existe uma fórmula simétrica para o volume de um tetraedro em termos somente das seis arestas. No geral, não existe tal fórmula. Como contra-exemplo considere os tetraedros isofaciais $ABCD$ (tal que BCD tenha lado 1 e AB tenha comprimento $\sqrt{2}$) e $EFGH$ (tal que FGH tenha lado $\sqrt{2}$ e EF tenha comprimento 1), pela Proposição 33, $vol(ABCD) = \frac{\sqrt{5}}{12}$ e $vol(EFGH) = \frac{1}{6}$, ou seja, não pode existir uma fórmula geral para o volume de um tetraedro que dependa apenas das seis arestas independente de como elas são organizadas. Por outro lado, um n -simplex é a generalização de um triângulo no $\mathbb{R}^n$, por exemplo, um 3-simplex é um tetraedro. É possível provar, usando ferramentas de álgebra linear, que a Fórmula de Herão pode ser generalizada se o n -simplex satisfaz certas condições de simetria, onde para o caso do $\mathbb{R}^3$ a Fórmula de Herão só é possível se o tetraedro for isósceles. Nesta seção iremos calcular o volume de um tetraedro isósceles em termos das suas arestas.

Teorema 10: O volume de um tetraedro isósceles $ABCD$ tal que $\overline{BC} = \overline{AD} = a$, $\overline{AC} = \overline{BD} = b$ e $\overline{AB} = \overline{CD} = c$ é dado por

$$vol(ABCD) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

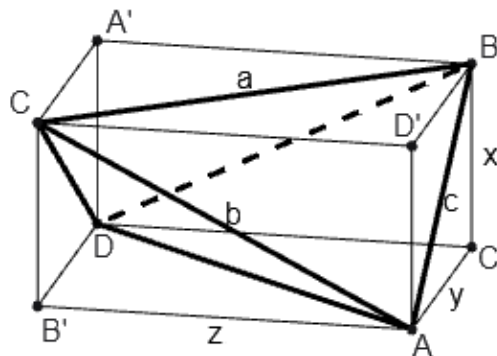
Demonstração: Seja $AB'DC'-D'CA'B$ o empacotamento de $ABCD$. Como $AB'DC'-D'CA'B$ é um paralelepípedo retângulo, podemos escrever:

$$x = \overline{AD'} = \overline{C'B} = \overline{DA'} = \overline{B'C'}$$

$$y = \overline{AC'} = \overline{D'B} = \overline{CA'} = \overline{B'D'}$$

$$z = \overline{AB'} = \overline{D'C} = \overline{BA'} = \overline{C'D'}$$

Figura 35 - Tetraedro isósceles $ABCD$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Daí, temos que $y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = b^2$ e $x^2 + y^2 = c^2$.

Resolvendo o sistema com essa três equações nas incógnitas x , y e z , encontramos:

$$x = \frac{\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{\sqrt{2}}$$

Logo, o volume V de $AB'DC'-D'CA'B$ é dado por

$$V = x \cdot y \cdot z = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Portanto,

$$\text{vol}(ABCD) = \frac{V}{3} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

□

5.4 Lei dos Cossenos

Na geometria plana, a Lei dos cossenos é uma generalização do Teorema de Pitágoras que vale para qualquer triângulo. Ela afirma que em um triângulo ABC tal que $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{CBA}$ e $\gamma = \widehat{ACB}$ valem

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos(\gamma)$$

O próximo lema é uma generalização da Lei dos cossenos usando os ângulos planos das faces de um tetraedro. Para prová-lo, precisaremos de uma outra versão da fórmula de Herão: temos que a área de um triângulo XYZ pode ser dada por

$$\begin{aligned} [XYZ] &= \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - (x^4 + y^4 + z^4)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4)} \end{aligned}$$

onde x , y e z são os lados de XYZ e $s = \frac{x+y+z}{2}$.

Em toda essa seção, dado o tetraedro $ABCD$, considere:

- $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{DB}$, $d_1 = \overline{DC}$, $d_2 = \overline{DA}$ e $d_3 = \overline{AC}$;
- $\alpha = \widehat{DBA}$, $\beta = \widehat{DBC}$ e $\gamma = \widehat{ABC}$;
- $A_1 = [DAB]$, $A_2 = [DBC]$, $A_3 = [ABC]$ e $A = [ADC]$;
- θ_{12} o ângulo diédrico formado pelas faces DAB e DBC , θ_{13} o ângulo diédrico formado pelas faces DAB e ABC , θ_{23} o ângulo diédrico formado pelas faces DBC e ABC .

Lema 09: Em um tetraedro $ABCD$, temos

$$\begin{aligned} A^2 = & A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2(A_1A_2 \cot(\alpha)\cot(\beta) + A_1A_3 \cot(\alpha)\cot(\gamma) + A_2A_3 \cot(\beta)\cot(\gamma)) \\ & - 2(A_1A_2 \cos(\gamma)\operatorname{cosec}(\alpha)\operatorname{cosec}(\beta) + A_2A_3 \cos(\alpha)\operatorname{cosec}(\beta)\operatorname{cosec}(\gamma) \\ & + A_1A_3 \cos(\beta)\operatorname{cosec}(\alpha)\operatorname{cosec}(\gamma)). \end{aligned}$$

Demonstração: A área da face DAC é dada por

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)^2 - 2(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4)}. \quad (\text{I})$$

Mas pela Lei dos cossenos temos que $d_1 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\beta)$, $d_2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\alpha)$ e $d_3 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$. Substituindo em (I), encontramos

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{4(a^2 + b^2 + c^2 - ab \cos(\gamma) - bc \cos(\beta) - ac \cos(\alpha))^2 - q}$$

onde $q = 2[(a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma))^2 + (a^2 + c^2 - 2ac \cos(\alpha))^2 + (b^2 + c^2 - 2bc \cos(\beta))^2]$.

Elevando A ao quadrado e fazendo algumas simplificações chegamos a:

$$\begin{aligned} A^2 = & \frac{1}{4}(a^2b^2\sin^2(\gamma) + a^2c^2\sin^2(\alpha) + b^2c^2\sin^2(\beta)) \\ & + \frac{1}{2}abc(b \cos(\gamma)\cos(\beta) + a \cos(\gamma)\cos(\alpha) + c \cos(\alpha)\cos(\beta)) \\ & - \frac{1}{2}abc(c \cos(\gamma) + a \cos(\beta) + b \cos(\alpha)). \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Mas temos que $A_1 = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen}(\alpha)$, $A_2 = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen}(\beta)$ e $A_3 = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}(\gamma)$, que substituindo em (II) chegamos ao resultado. $\square$

Observação: Temos que os cossenos dos ângulos diédricos θ_{12} , θ_{13} e θ_{23} são dados por

$$\cos\theta_{12} = \frac{\cos(\gamma) - \cos(\alpha)\cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)} \quad (\text{III})$$

$$\cos\theta_{13} = \frac{\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\gamma)} \quad (\text{IV})$$

$$\cos\theta_{23} = \frac{\cos(\alpha) - \cos(\beta)\cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\gamma)} \quad (\text{V})$$

O próximo teorema é uma generalização da Lei dos cossenos usando os ângulos diédricos de um tetraedro.

Teorema 11: Em um tetraedro $ABCD$ temos que

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - 2(A_1A_2 \cos\theta_{12} + A_1A_3 \cos\theta_{13} + A_2A_3 \cos\theta_{23}).$$

Demonstração: Substituindo (III), (IV) e (V) na relação do Lema 09 chegamos ao resultado. $\square$

Note que o Teorema acima é uma generalização do Teorema de De Gua. De fato, quando $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, então

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2.$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho tem por finalidade agrupar descobertas a nível elementar sobre os tetraedros. Devido as semelhanças vistas entre a teoria dos triângulos e a teoria dos tetraedros, temos que este assunto pode ser estudado como uma continuação natural das aulas de geometria. A explanação do conteúdo foi feito de modo a usar somente geometria elementar vista no ensino básico ou no início do ensino superior para os conceitos serem bem compreendidos. Os tópicos foram feitos com o intuito de serem usados para elaboração de aulas de professores da educação básica, preparação de alunos olímpicos, formação de alunos da graduação e formação para professores que já estão na rede de ensino. O conteúdo deve ser adaptado para o devido nível de ensino, onde algumas das seções podem ser apenas comentadas e outras retiradas se o professor achar necessário.

REFERÊNCIAS

- [1] BROWN, B. H. **Theorem of Bang; Isosceles Tetrahedra.** The American Mathematical Monthly, Vol. 33, No. 4, p. 224-228, Apr. 1926.
- [2] COURT, N. A. **Modern pure solid geometry.** New York: The Macmillan Company, 1935.
- [3] COURT, N. A. **Notes on the Orthocentric Tetrahedron.** The American Mathematical Monthly, Vol. 41, No. 8, p. 499-502, Out. 1934.
- [4] COURT, N. A. **The Semi-Orthocentric Tetrahedron.** The American Mathematical Monthly, Vol. 60, No. 5, p. 306-310, Mai. 1953.
- [5] COURT, N. A. **The Tetrahedron and Its Circumscribed Parallelepiped.** The Mathematics Teacher, Vol. 26, No. 1, p. 46-52, Jan. 1933.
- [6] EVES, H. **Two Surprising Theorems on Cavalieri Congruence.** The College Mathematics Journal, Vol. 22, No. 2, p. 118-124, Mar., 1991.
- [7] HAJJA, M. e WALKER, P. **Equifacial tetrahedra.** International Journal of Mathematical Education In Science & Technology, vol. 32, p. 501-508, Dez. 2010.
- [8] HERSH, R. **Heron's Area Formula: What about a Tetrahedron?.** The College Mathematics Journal, vol. 35, No. 2, p. 112-114. Mar., 2004.
- [9] HONSBERGER, R. A. **Mathematical Gems II.** Washington: The Mathematical Association of America, 1976.
- [10] KEN-ICHIROH, K.; YOSHIHIRO, Y. e KATSUYA, Y. **On Viviani's Theorem in Three Dimensions.** The Mathematical Gazette, Vol. 89, No. 515, p. 283-287, Jul. 2005.
- [11] KHAN, R. A. **The cosine rule in three dimensions and de Gua's theorem.** The Mathematical Gazette, Vol. 97, No. 539, p. 281-284, Jul. 2013.
- [12] LEECH, J. **Some Properties of the Isosceles Tetrahedron.** The Mathematical Gazette, Vol. 34, No. 310, p. 269-271, Dez. 1950.
- [13] O'HARA, F. **A 24-Point Sphere for the Orthocentric Tetrahedron.** The

Mathematical Gazette, Vol. 56, No. 398, p. 295-298, Dez., 1972.

[14] STEINHAUS, H. **One Hundred Problems in Elementary Mathematics**. New York, 1979.

[15] VILLIERS, M. **3D Generalisations of Viviani's theorem**. The Mathematical Gazette, Vol. 97, No. 540, p. 441-445, Nov. 2013.

[16] ZHU, H. **A Tetrahedron Inequality**. The Mathematical Gazette, Vol. 68, No. 445, p. 200-202, Out. 1984.

ANEXO A - UM POUCO MAIS SOBRE TETRAEDROS

As demonstrações de todas as afirmações feitas abaixo podem ser encontradas nas referências [2] e [4].

Tetraedro isodinâmico e ponto de Lemoine

Uma simediana de um triângulo é a reflexão da mediana com relação à bissetriz que incide do mesmo vértice do triângulo. As simedianas de um triângulo se encontram em um ponto chamado de ponto de Lemoine. **Simediana** de um tetraedro é o segmento que liga um vértice ao ponto de Lemoine da face oposta. Uma condição necessária e suficiente para que as simedianas de um tetraedro $ABCD$ se interceptem é que $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$, ou seja, os produtos dos três pares de arestas opostas devem ser iguais. Um tetraedro com tal propriedade é chamado de **isodinâmico**. Assim, um tetraedro é isodinâmico se, e somente se, suas simedianas são concorrentes. A interseção das simedianas de um tetraedro é chamada de **ponto de Lemoine** do tetraedro. A reta que passa pelo circuncentro e pelo ponto de Lemoine de um tetraedro isodinâmico é chamada de **diâmetro de Brocard**. Esta reta é concorrente com as quatro alturas do tetraedro. Temos também que a reta que passa pelo circuncentro de uma face e o ponto de Lemoine de um tetraedro isodinâmico é concorrente com a altura relativa a essa face e a divide na razão 2:1.

Tetraedro isogonal e ponto de Fermat

Considere a esfera inscrita a um tetraedro com respeito às faces. Se os segmentos que ligam os vértices do tetraedro ao ponto de contato da esfera com a face oposta são concorrentes, o tetraedro é dito **isogonal** e o ponto de interseção desses segmentos é chamado de **ponto de Fermat**. Um tetraedro isósceles é isogonal e seu ponto de Fermat coincide com o centróide. O tetraedro formado pelos pontos de contato da esfera inscrita com as faces do tetraedro isogonal será denominado **tetraedro de Fermat**. O tetraedro de Fermat de um tetraedro isogonal é isodinâmico, além disso, o ponto de Fermat do tetraedro isogonal é o ponto de Lemoine do tetraedro de Fermat.

Tetraedro semi-ortocêntrico

Um tetraedro com um par de arestas ortogonais é chamado de **semi-ortocêntrico**. Suas arestas ortogonais são ditas **arestas especiais** e a perpendicular comum a elas é dita **bialtura principal**. O tetraedro ortocêntrico é um caso particular de semi-ortocêntrico. Em um tetraedro semi-ortocêntrico (T), os pontos médios das quatro arestas não especiais pertencem ao plano mediador da bialtura principal e são os vértices de um retângulo

cujo circuncentro é o centróide de (T) . Os círculos de 9 pontos das faces que têm uma aresta especial comum pertencem a uma mesma esfera, assim, associamos a um tetraedro semi-ortocêntrico duas esferas. Essas esferas passam pelos pontos médios das arestas não especiais. Uma condição necessária e suficiente para que um tetraedro seja semi-ortocêntrico é que as duas perpendiculares que passam pelos respectivos ortocentros de duas faces com uma aresta especial comum se cruzam. Esse ponto de encontro das duas perpendiculares é chamado de **semi-ortocentro** do tetraedro relativo àquela aresta especial. Por fim, o ponto de Monge de um tetraedro semi-ortocêntrico pertence a bialtura principal e divide ao meio o segmento determinado pelos semi-ortocentros.

Esfera de 16 pontos

Um segundo análogo do círculo de 9 pontos é a esfera de 16 pontos. Considere a esfera (O'') de centro O'' que passa pelas projeções O_a, O_b, O_c e O_d do circuncentro O sobre as faces BCD, ACD, ABD e ABC do tetraedro $ABCD$. Esses quatro pontos são os centros dos circuncírculos das faces do tetraedro. Considere as quatro esferas que têm como seções diametraais esses quatro círculos. O centro radical O' dessas quatro esferas é o ponto isogonal¹ de O com relação a $ABCD$. As projeções de O' sobre as faces do tetraedro também estão na esfera (O'') . Os simétricos, com relação ao ponto O'' , das oito projeções de O e O' sobre as faces de $ABCD$ também estão em (O'') . A esfera (O'') é chamada de **esfera de 16 pontos** do tetraedro.

¹Dois planos que passam pela aresta de um diedro e são simétricos em relação ao plano bissetor desse ângulo são ditos **planos isogonais** em relação ao diedro. Sejam $ABCD$ um tetraedro e M um ponto. Os planos isogonais dos planos ABM, ACM, ADM, BCM, BDM e CDM têm um ponto comum, M' . Os pontos M' é dito **isogonal** de M com respeito ao tetraedro $ABCD$.