UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FABRÍCIO OLIVEIRA AZEVEDO

A PROGRAMAÇÃO LINEAR COMO INSTRUMENTO INTERDISCIPLINAR NO ENSINO DA MATEMÁTICA

MANAUS, AGOSTO
2025

FABRÍCIO OLIVEIRA AZEVEDO

A PROGRAMAÇÃO LINEAR COMO INSTRUMENTO INTERDISCIPLINAR NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade do Estado do Amazonas como parte dos requesitos necessários para obtenção do título de mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UEA.

Orientador(a): M.e Helisângela Ramos da Costa

MANAUS, AGOSTO

2025

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

A994p Azevedo, Fabrício Oliveira
A Programação Linear como instrumento interdisciplinar no ensino da Matemática / Fabrício Oliveira Azevedo . Manaus : [s.n], 2025.
87 f.: color.; 21,0 cm.

Dissertação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2025.
Inclui Bibliografia.
Inclui Apêndice.
Orientador: Helisângela Ramos da Costa.

1. Programação Linear. 2. Modelagem Matemática. 3. Interdisciplinaridade. 4. Educação Matemática. I. Helisângela Ramos da Costa (Orient.) II. Universidade do Estado do Amazonas. III. Título

CDU(1997)51(043.3)

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROPESP
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Ata de defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade do Estado do Amazonas, no município de Manaus-AM, do discente **Fabrício Oliveira Azevedo,** matrícula nº **2391940003.**

Em 21 de agosto de 2025, às 19h, na sala 06 - Rosa Branca Alencar, localizada na Escola Normal Superior, no município de Manaus-AM, na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Profa. Ma. Helisangela Ramos da Costa, Prof. Dr. Almir Cunha da Graça Neto e Profa. Dra. Jeanne Moreira de Sousa, realizou-se a sessão pública de defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Amazonas - UEA, do discente **Fabrício Oliveira Azevedo**, o discente apresentou sua dissertação intitulada: **"A Programação Linear como Instrumento Interdisciplinar no Ensino da Matemática".**

A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do trabalho apresentado, divulgando o resultado ao discente e aos demais presentes.

Manaus, 21 de agosto de 2025

Helisangela Ramos da Costa
Orientador

Almir Neto
Membro Interno da Banca Avaliadora

Jeanne Moreira de Sousa
Membro Externo da Banca Avaliadora

Fabrício Oliveira Azevedo
Mestrando

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
PROFMAT
UEA

AGRADECIMENTOS

Sou grato a Deus, fonte de todo o conhecimento e perfeito em sabedoria, que durante todo esse percurso me fortaleceu, capacitou, sustentou e não me deixou sem direção quando precisei de ajuda. Toda a glória, a honra e o louvor ao Senhor que é sobre todos, por meio de todos e em todos.

Agradeço à minha esposa Neide Gomes e às minhas filhas Alice Rebecca e Alana Manuella. Sempre tão próximas, pacientes e motivadoras. Os desafios são mais fáceis e as vitórias mais prazerosas quando estamos unidos no mesmo propósito.

Agradeço à minha mãe Maria Ceres que sempre sonhou comigo os meus sonhos, acreditando que seria possível, me incentivou e forneceu toda a base, princípios e valores que regem o homem que sou.

Agradeço ao meu pai Clóvis Costa que mesmo diante da distância física, sempre demonstrou seu cuidado, amor e preocupação comigo. São poucas as nossas conversas mais cada palavra fica registrada com muito carinho em meu coração.

Agradeço à FAPEAM pelo incentivo que foi essencial para a realização do curso e o desenvolvimento da dissertação, dando-me segurança financeira para adquirir as ferramentas necessárias para concluir o mestrado.

Agradeço ao corpo docente do PROFMAT/UEA. Cada mestre que dedicou seu tempo e com tamanha competência ministrou o conhecimento necessário para meu amadurecimento acadêmico e profissional. O retorno aos conteúdos da Matemática superior, o incentivo à pesquisa matemática, a aprovação no ENQ e a satisfação de poder oferecer um ensino de excelência nas escolas são alguns dos inúmeros benefícios que recebi de cada professor.

Em especial quero agradecer dois professores: 1. A minha orientadora Profa. M.e Helisângela Ramos por aceitar o convite de me conduzir na dissertação, pela paciência, disponibilidade e pela excelente orientação que recebi. 2. Ao professor Dr. Almir Neto que na disciplina de Aritmética me ensinou não apenas o que constava na ementa mas me ajudou a ser um estudante/professor melhor com sua forma diferenciada de construir conhecimento, sendo um dos principais responsáveis pela "virada de chave" que tive no mestrado.

Sou grato também aos meus amigos da turma de 2023 do PROFMAT. Assistir cada aula com vocês, "sofrer" em cada prova e compartilhar experiências e saberes proporcionaram momentos agradáveis e únicos que vou levar comigo para sempre.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a Programação Linear como instrumento interdisciplinar de ensino e aprendizagem no Ensino Médio. Essa ferramenta permite a abordagem de problemas cotidianos e está voltada para a resolução de problemas de otimização, oferecendo um campo fértil para a integração das áreas de conhecimento. Fundamentada em referenciais teóricos da Modelagem Matemática, da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e nas orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a pesquisa propõe uma metodologia didática que articula a Matemática com outras áreas do conhecimento por meio da resolução de problemas reais de otimização. Buscando conduzir os estudantes no processo de aprendizagem na prática dos objetos matemáticos, a pesquisa culmina em uma proposta pedagógica com atividades que submetem professores e alunos à investigação científica, promovendo o raciocínio lógico, a argumentação e a tomada de decisões, além de oferecer ao docente uma atrativa metodologia de ensino. A utilização da Programação Linear em uma perspectiva interdisciplinar evidenciou como é possível tornar o ensino mais relevante e dinâmico, aproximando as representações matemáticas à realidade dos estudantes, favorecendo o desenvolvimento de habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de suas vidas.

Palavras-Chave: Programação Linear; Modelagem Matemática; Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

This work aims to present Linear Programming as an interdisciplinary tool for teaching and learning in high school. This approach allows for the exploration of everyday problems and focuses on solving optimization problems, providing a fertile ground for the integration of different areas of knowledge. Grounded in theoretical frameworks of Mathematical Modeling, Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers, and the guidelines of the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC), the research proposes a didactic methodology that connects Mathematics with other areas of knowledge through the resolution of real-world optimization problems. Aiming to guide students in the learning process and the practical application of mathematical concepts, the research culminates in a pedagogical proposal with activities that engage both teachers and students in scientific investigation, promoting logical reasoning, argumentation, and decision-making, while also offering teachers an engaging teaching methodology. The use of Linear Programming from an interdisciplinary perspective demonstrated how it is possible to make teaching more meaningful and dynamic by bringing mathematical representations closer to students' realities, thus fostering the development of skills that will help them solve problems throughout their lives.

Keywords: Linear Programming; Mathematical Modeling; Interdisciplinarity.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No âmbito da educação básica, a Matemática é muitas vezes percebida como uma disciplina isolada e abstrata, intensificando o pensamento dos estudantes em considerá-la difícil e desinteressante. Ela pode ser considerada “estática” ou “sem vida” em um ambiente com pouca interdisciplinaridade e nenhuma motivação contextualizada.

Muitos alunos não conseguem perceber a utilidade da Matemática em seu cotidiano devido a abstração excessiva que muitos conceitos são ensinados. Somando ainda a dificuldade de interpretar símbolos e a linguagem formal da disciplina, temos um grande obstáculo na aprendizagem matemática.

Sob a ótica docente, os problemas iniciam ao se deparar com a dificuldade de planejar e executar atividades interdisciplinares seja por currículos formadores em que tais atividades não foram estimuladas em disciplinas e/ou projetos institucionais dos professores causando falta de preparo dos professores, seja por falta de estimulo e organização escolar que propiciem a realização dessas atividades que demandam tempo e planejamento continuo mediante um trabalho colaborativo entre uma ou mais disciplinas.

Tais situações são discutidas dentro dos princípios da Educação Matemática defendidos por D'ambrósio (1996), que vê a Matemática como uma estratégia desenvolvida para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, dentro de um contexto natural e cultural. O autor também entende a educação como estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo, com a finalidade de satisfazer as necessidades de sobrevivência.

A Educação Matemática visa uma formação para a cidadania em que o estudante é preparado para interpretar dados, compreender fenômenos sociais, econômicos e ambientais, e tomar decisões conscientes para o bem da sociedade.

Como, então, despertar o discente para o conhecimento que interpreta o ambiente ao seu redor? Quais estratégias e recursos o professor pode utilizar para que o aluno possa ter acesso ao conhecimento matemático?

Aproximar o estudante da Matemática perpassa pela concepção de desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida, por isso, as atividades matemáticas propostas devem ter significado real para eles.

Nesse sentido, esta dissertação tem como objetivo propor uma metodologia de ensino da Programação Linear (PL) como instrumento interdisciplinar de aprendizagem, aplicando os conteúdos matemáticos estudados no Ensino Médio. Essa ferramenta permite a abordagem de problemas cotidianos e está voltada para a resolução de problemas de otimização, oferecendo um campo fértil para a integração das áreas de conhecimento.

Dante (2016) aborda a Programação Linear como um tema interessante e influenciou na elaboração da presente pesquisa por articular, no ensino básico, a Matemática com outras disciplinas através da PL, levando a percepção que a otimização mostra como a Matemática pode ser usada para tomar decisões mais inteligentes, especialmente quando pensamos na formação de cidadãos críticos.

Utilizada amplamente na economia, logística, engenharia e administração, ela permite trabalhar conceitos matemáticos de forma contextualizada, promovendo a articulação com disciplinas como Geografia, Física, Química e Sociologia. O uso de tecnologias também é incentivado, possibilitando aos estudantes experiências variadas de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

É rara a exposição da PL em livros didáticos. Quando citada, aparece como material complementar ao estudo de sistemas lineares e não existe um aprofundamento no tema, desperdiçando uma ótima oportunidade de dar significado aos objetos matemáticos estudados. Esse tema, tendo o devido tratamento nos livros didáticos e Propostas Curriculares, fortaleceria as competências específicas[1] propostas pela BNCC para a área da Matemática e suas Tecnologias (Ensino Médio), desenvolvendo habilidades relacionadas a resolução e formulação de problemas.

A relevância deste estudo está relacionada à necessidade de se repensar práticas pedagógicas tradicionais e propor alternativas que articulem teoria e prática, promovam a autonomia dos estudantes e dialoguem com os desafios do mundo contemporâneo. Além disso, destaca-se a importância de valorizar a Matemática como ferramenta para a compreensão e transformação da realidade.

[1] Em particular, a competência específica 3: “Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.” (Brasil, 2018, p. 531)

O capítulo 1 desta dissertação dedica-se aos aspectos históricos da Modelagem Matemática e da Programação Linear para entendimento do seu desenvolvimento e princípios que podem ser utilizados para orientar o atual contexto de aprendizagem. Ainda nesse capítulo, temos as contribuições da Teoria de Registros de Representação Semióticas de Duval que nos auxiliam a compreender as dificuldades encontradas pelos alunos na linguagem formal da disciplina em que um objeto matemático pode assumir mais de uma representação. O capítulo encerra com uma análise da BNCC sobre as competências e habilidades que podem ser exercitadas com a aplicação da Programação Linear.

No capítulo 2 temos a análise dos fundamentos matemáticos da PL presentes em um livro didático. Sistemas lineares e alguns tópicos de geometria analítica são descritos para receberem um significado através de resolução de problemas do cotidiano.

Os métodos para solucionar problemas de Programação Linear são apresentados no capítulo 3, integrando e reforçando os conteúdos matemáticos estudados para dar sentido ao que foi aprendido e promover a busca pela solução ótima em contextos variados.

Por fim, no capítulo 4 é apresentada uma proposta didática de ensino e aprendizagem de Programação Linear no Ensino Médio com utilização de planilha eletrônica. A metodologia de ensino dessa proposta visa a autonomia e protagonismo do aluno para que seja capaz de investigar, questionar e construir significados matemáticos.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Aspectos históricos e princípios da Modelagem Matemática

A ideia de usar a Matemática para descrever fenômenos ocorre desde os tempos de civilizações como os babilônios, egípcios e gregos que aplicavam princípios matemáticos para resolver problemas práticos, como medição de terras, construção de pirâmides e previsão de eclipses. Apesar da dedicação dessas antigas sociedades em aplicar a Matemática para solucionar problemas e atender suas necessidades, o rigor dos modelos matemáticos não era seu objetivo.

Uma grande contribuição para a formalização e desenvolvimento da modelagem matemática ocorreu através de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz com o Cálculo. Ao comentar que o século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da Matemática, graças, em grande parte, às novas e vastas áreas de pesquisa que nela se abriram, Eves (2011, p. 417) afirma:

> Indubitavelmente, porém, a realização matemática mais notável do período foi a invenção do cálculo, perto do final do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou.

No século seguinte, matemáticos como Daniel Bernoulli e Leonhard Euler aplicaram métodos matemáticos para resolver problemas em mecânica dos fluidos, astronomia e teoria das probabilidades. Mas foi no século XIX que a Modelagem Matemática viu uma expansão significativa com a introdução da Análise Matemática e as Equações Diferenciais Parciais que permitiram modelar fenômenos em termodinâmica, eletricidade e magnetismo. Sobre as séries de Fourier, por exemplo, Eves (2011, p. 528) destaca:

> As séries de Fourier provaram ser da mais alta utilidade em campos de estudo como a acústica, a óptica, a eletrodinâmica, a termodinâmica e vários outros, e têm um papel fundamental na análise harmônica, problemas sobre vigas e pontes e na solução de equações diferenciais. De fato, foram as séries de Fourier que motivaram os métodos modernos de física-matemática que envolvem a integração de equações diferenciais parciais sujeitas a condições de contorno.

Com o advento dos computadores no século XX, foi possível resolver numericamente modelos complexos que antes eram trabalhosos. Isso permitiu a aplicação da Modelagem Matemática em biologia, ciências sociais, economia, entre outras áreas. No século XXI, ela está intimamente ligada ao crescimento da inteligência artificial.

No âmbito escolar, frequentemente a matemática é apresentada e desenvolvida sem relacionamento com fatos reais, mesmo quando são ilustradas com exemplos, o que torna desinteressante para muitos estudantes a aprendizagem eficiente pois não conseguem associar conceitos e abstrações a uma aplicação para a realidade concreta.

Motivada por essa problemática, por volta de 1908 em Roma, uma comissão chamada *Comission Internazionale de L' enseignement dês mathematiques* (CIEM), passando mais tarde a se chamar *Internacional Comission on Mathematical Instrucion* (ICMI), a qual Félix Klein era o presidente, avançou na busca por uma metodologia que possibilitasse a compreensão de algo abstrato por meio do concreto, através de um levantamento de diferentes métodos de ensino da Matemática.

As ideias de Klein permearam as reflexões matemáticas no século XIX, e por volta do ano de 1968 foram defendidas e ajustadas pelo pesquisador holandês, Hans Freudenthal, como também por Henry Pollak, sendo assim, estas ideias foram motivadoras para uma organização, e por parte de Freudenthal, motivadoras de uma conferência, com o objetivo de incluir as aplicações e a modelagem no ensino da Matemática.

Segundo Aragão (2016), Hans Freudenthal, como também Henry Pollak, foram dois pensadores identificados com a Modelagem Matemática, e trouxeram para o centro das atenções o olhar e a importância no processo de reconhecimento da Modelagem Matemática como um recurso metodológico para o ensino de ciência dos números.

No século XX, mais precisamente nos anos 60, aconteceram movimentos internacionais de grande importância para o uso de Modelagem Matemática, debatendo sobre suas aplicações na educação matemática, influenciando fortemente o Brasil, fato que impulsionou a vários pesquisadores se alinharem com os movimentos a nível nacional e internacional. Ainda nesse período, um movimento chamado "utilitarista", definido como aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade, impulsionou a formação de grupos de pesquisadores sobre o tema.

No Brasil, a Modelagem Matemática teve início com nomes como Ubiratan D'Ambrósio, Aristides Barreto, Rodney Bassanezi, entre outros, nas décadas de 1970 e 1980. Mas foi ao final da década de 1990 e início dos anos 2000 que se firmou como área de interesse da Educação Matemática.

D'ambrósio (1993) cita como exemplos históricos de modelagem em Matemática a Geometria Euclidiana, a Mecânica Newtoniana, a Ótica Geométrica e praticamente todas as teorizações matemáticas e entende que a modelagem é um processo de passagem do global-local-global a partir de representações.

> Refletir sobre a representação passa a ser uma alternativa usual de ação, reduzindo o grau de complexidade da realidade através do isolamento de alguns parâmetros. Essencialmente partindo do global da realidade para o local sobre o qual concentraremos nossa reflexão. Isso nos permite chegar as representações, sobre as quais procuramos construir as estratégias de ação, naturalmente, procurando assim, a partir do local restringir o global (D'ambrósio, 1993, p. 12).

Rodney C. Bassanezi, um dos maiores disseminadores, em especial por meio dos cursos de formação continuada que ministrou e de pós-graduação de modelagem que coordenou em diversas instituições de quase todos estados brasileiros, afirma que a modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade e como este método pode ser aplicado em várias situações de ensino-aprendizagem, com a intenção de estimular alunos e professores de matemática a desenvolverem suas próprias habilidades como modeladores.

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (Bassanezi, 2002, p. 24).

Conforme Biembengut e Hein (2003) as principais etapas da modelagem são: **a interação, a matematização** e **o modelo matemático.** Essas etapas não obedecem a uma sequência rígida e nem se findam ao passar para uma etapa seguinte.

Na **interação**, ocorre o envolvimento com o tema (a realidade) a ser estudado/problematizado.

Na **matematização**, ocorre a “tradução” da situação-problema[2] para a linguagem matemática através da formulação do problema e de hipóteses, da dedução do modelo matemático e da resolução do problema. É necessário classificar

[2] A situação-problema é concebida pelos PCNEM como “uma situação geradora de um problema cujo conceito, necessário à sua resolução, é aquele que queremos que o aluno construa.” (Brasil, 2006, p. 84).

as informações (em relevantes e não relevantes), levantar as hipóteses, selecionar variáveis relevantes e constantes envolvidas, selecionar símbolos apropriados para essas variáveis e descrever essas relações em termos matemáticos. A utilização do computador pode ser imprescindível especialmente no tratamento de processos discretos (Biembengut e Hein, 2003).

No **modelo matemático**, ocorre a interpretação e a validação. No primeiro momento, analisam-se as implicações da solução do modelo obtido. No segundo momento, verifica-se a adequação à situação-problema investigada (validação). Quando o modelo é válido, é utilizado para compreender, explicar, analisar, prever ou decidir sobre a realidade em estudo. Caso contrário, o processo deve ser retomado na segunda etapa mudando ou ajustando as hipóteses, variáveis ou próprio modelo considerado (Biembengut e Hein, 2003).

A elaboração do modelo depende do conhecimento matemático que se tem, do conhecimento da situação analisada, das variáveis selecionadas e dos recursos disponíveis. Quanto mais aspectos forem contemplados, melhor será o modelo obtido, o que implica dizer, que mais próximo da realidade o será (Biembengut e Hein, 2003).

No processo de modelagem de fenômenos de alguma realidade, algumas disciplinas matemáticas auxiliam no processo de analisar e interpretar dados, resolver situações de conflitos e tomar decisões. Dentre essas ferramentas auxiliares, destacaremos nessa dissertação a Programação Linear.

1.2 Aspectos históricos da Programação Linear

A Programação Linear (PL) ou Otimizacão Linear faz parte das disciplinas que compõem a Programação Matemática (Otimização) e é um elemento importantíssimo na Pesquisa Operacional. As aplicações da PL são comuns em quase todos os setores do cotidiano, por exemplo, nas indústrias, nos transportes, na saúde, na educação, na agricultura, nas finanças, na economia, entre outros.

Embora o nome Pesquisa Operacional possa dar a impressão de que se trata de pesquisas (no sentido de questionários), não é essa a conotação correta da palavra. Também, em muitos casos, estudantes acabam confundindo a Programação Linear, que é uma das técnicas de Pesquisa Operacional mais usada e o foco dessa dissertação, com a própria Pesquisa Operacional. No entanto, a Programação Linear está contida na Pesquisa Operacional como uma de suas diversas técnicas, porém não são sinônimos.

É importante esclarecer que a palavra *programação* tem aqui o significado de *planejamento* para evitar a confusão com o termo *programação de computadores*. Certamente a PL utiliza computadores para resolver seus problemas, mas é importante entender que a palavra *programação* tem significados diferentes nas duas ciências.

> A Programação Linear é uma técnica que permite estabelecer a “mistura” ótima de diversas variáveis segundo uma função linear de efetividade (ou função-objetivo) e satisfazendo a um conjunto de restrições lineares para essas variáveis (Prado, 2016, p. 38).

A origem da Pesquisa Operacional remonta à época da Segunda Grande Guerra Mundial. Os militares necessitavam gerenciar seus recursos de forma eficiente até os campos de batalha. Alimentos, munição, medicamentos, eram alguns dos itens que eram demandados nos acampamentos e que precisavam ser levados na quantidade correta e gastando-se o mínimo possível para garantir a continuidade das operações militares.

Nesse período, Prado (2016) afirma que foi levantado nos EUA um problema que desafiou os estudiosos de ciências exatas. Esse problema ficou conhecido pelo nome de "problema da dieta" e se resumia em descobrir qual a alimentação mais econômica, levando-se em conta que o organismo humano necessita de uma quantidade mínima diária de certos nutrientes (proteínas, vitaminas, etc.), que devem ser obtidos de alimentos que possuem preços diferentes e composição de nutrientes diferentes.

O desafio foi publicado no conhecido jornal *The New York Times* e ganhou repercussão nacional. A melhor solução ao problema foi apresentada por George Stigler, em 1945. Partindo de 77 alimentos e levando em consideração a composição de 9 nutrientes em cada um, ele chegou à conclusão de que a dieta ideal implicaria um custo anual de US$ 59,88 e seria composta de farinha de trigo, repolho e fígado de porco. A solução apresentada era inusitada, pois Stigler não levou em consideração nenhum fator de diversidade, gosto, aspecto, etc., apenas considerou aspectos matemáticos e econômicos (Prado, 2016).

O valor do custo de sua composição ficava muito abaixo das outras propostas, mas certamente ninguém iria manter aquela única alimentação por qualquer período. Assim, o concurso foi alvo de muitas chacotas, mas em pouco tempo se constatou que aquela técnica poderia ser utilizada sem rejeição em áreas semelhantes, tais como alimentação de animais ou carga de um alto-forno de uma siderurgia.

Imediatamente se iniciaram tais estudos, mas a técnica utilizada por Stigler (tentativas) se mostrou sujeita a erros, extremamente tediosa e cansativa, além de nem sempre encontrar a solução ótima (Prado, 2016).

Prado (2016) informa que essa abordagem de planejamento somente se consolidou com George Dantzig, em 1947, que elaborou o *Método Simplex*, capaz de resolver qualquer problema de PL. Dantzig criou essa técnica quando trabalhava na *Rand Corporation* no projeto SCOOP (*Scientific Computation of Optimum Programs*) para a Força Aérea Americana, desenvolvendo técnicas de otimização para problemas militares. O algoritmo *Simplex* implica uma quantidade muito grande de cálculos e, nos primeiros anos de uso, ele se apoiou exclusivamente na resolução manual.

Com o surgimento do computador em 1951, a PL encontrou seu aliado natural e foi se expandindo de uma maneira extraordinária (Prado, 2016). Na década de 1960 a PL tinha a mesma divulgação e fascínio também obtidos por outras técnicas em diversas épocas, tal como ocorreu com a gestão pela Qualidade Total nas décadas de 1980 e 1990 ou *Six Sigma* na década de 1990.

Do ponto de vista histórico, é importante saber que o assunto foi inicialmente analisado em 1936 por Wassily Leontieff, que criou um modelo constituído por um conjunto de equações lineares, considerado como o primeiro passo para o estabelecimento das técnicas de Programação Linear. O matemático russo L. V. Kantorovick publicou em 1939 um trabalho sobre planejamento da produção, o qual apresentava, dentre diversas abordagens, o uso de equações lineares. Esse trabalho somente veio a ser conhecido no Ocidente em 1960. É importante ainda citar que em 1940, Frank L. Hitchcock apresentou uma abordagem ao problema de transportes (Prado, 2016).

Desse modo, a PL consiste na representação das características de um problema em forma de um conjunto de equações lineares. O nível dessas equações costuma ser bem básico, sem maiores complicações. Usa-se apenas a matemática básica na etapa de elaboração destas equações. A esta etapa chamamos de modelagem do problema, isto é, a modelagem é a construção de um modelo que represente a situação que se quer estudar ou resolver. Podemos dizer que o modelo nesse caso da Programação Linear nada mais é do que a tradução das características do problema para uma linguagem matemática.

1.3 Contribuições da Teoria de Registros de Representação Semióticas de Raymond Duval para o desenvolvimento da proposta didática

A relação entre o ensino da Programação Linear e a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval pode ser estabelecida por meio de vários aspectos que envolvem a representação e a compreensão matemática. Isso porque a referida teoria tem-se mostrado importante instrumento de pesquisa no estudo da complexidade da aprendizagem, enfatizando a importância da diversidade de registros e a articulação entre eles nas atividades matemáticas.

Duval (2003) afirma que "o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas". Isso acontece pois os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente. Sendo assim, os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, só podem sê-lo por sua representação.

Duval (2003) entende que "não se deve jamais confundir um objeto e sua representação" e então formula o paradoxo da compreensão em Matemática da seguinte maneira: "*Como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?*"

As respostas para questões que envolvem a natureza das dificuldades na compreensão da Matemática, segundo Duval (2003), não estão restritas ao campo matemático ou à sua história, mas que é necessária uma abordagem cognitiva, afinal, não é objetivo do ensino da Matemática, em formação inicial, formar futuros professores e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

> A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino (Duval, 2003).

Para analisar as condições e os problemas da aprendizagem em matemática, Duval (2003) coloca duas questões preliminares e fundamentais:

1. Quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar para aceder aos objetos matemáticos e para efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos?
2. Esses sistemas cognitivos são os únicos a serem mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos (geologia, astronomia, física, biologia...) e práticos, ou, ao contrário, trata-se de sistemas

específicos, cujo desenvolvimento e cuja aquisição são próprios da atividade matemática?

É na investigação da importância e da grande variedade das representações semióticas utilizadas na Matemática que se encontra a diferença entre a atividade cognitiva requerida pela Matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento, afirma Duval (2003).

Para Flores (2006, p. 3) “o interesse de Duval está, principalmente, no funcionamento cognitivo do aluno”. Segundo a autora, a contribuição de Duval para o processo de ensino/aprendizagem em Matemática está em apontar a restrição de se usar um único registro semiótico para representar um mesmo objeto matemático.

Duval (2003) fala de “registro de representação” para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizados em Matemática e entende que a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Dessa forma, Flores (2006) entende que é preciso que o estudante seja capaz de converter, de transitar entre uma e outra representação pois uma única via não garante a aprendizagem em Matemática.

> Certamente, segundo os domínios ou as fases da pesquisa, em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro ao outro. Podemos então antecipar a hipótese, ou, em linguagem matemática, "conjecturar" o seguinte: a compreensão em Matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas (Duval, 2003).

Tratando-se da Programação Linear podemos citar alguns registros de representação, como:

a) Registro algébrico: formulação de equações e desigualdades algébricas, que podem ser apresentadas em formas simbólicas;

b) Registro gráfico: soluções de problemas que dependem da visualização gráfica de regiões e interpretação geométrica de funções;

c) Registro Verbal: descrição verbal de situações práticas, como a maximização de lucro ou a minimização de custos;

d) Registro Tabular: utilizar tabelas para organizar dados e relacionar variáveis com restrições.

Desse modo, a Programação Linear com base nos diferentes registros de representação permite que os alunos formem significados mais profundos e enriquecedores entre diferentes formas de representar um problema matemático.

Em uma análise de atividade matemática sob a perspectiva de aprendizagem, Duval (2003) entende que existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são totalmente diferentes: os **tratamentos** e as **conversões**.

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria. As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica (Duval, 2003).

Em problemas envolvendo PL, considerando um tratamento dentro de um registro gráfico, os alunos devem ser capazes de construir gráficos de função, traçar regiões e determinar o ponto ótimo. Sob a ótica de um registro algébrico, os alunos precisam realizar tratamentos como simplificação de expressões ou a resolução de sistemas de equações.

Muitos dos problemas que os alunos enfrentam na Matemática surgem justamente da dificuldade de realizar conversões entre registros de forma eficaz. Isso é importante na matemática, visto que os conceitos são frequentemente representados de várias formas (simbolicamente, graficamente, numericamente, etc.). Dessa forma, para entender completamente um conceito, não basta dominá-lo dentro de um único registro.

É muito importante saber converter informações de um registro para outro, como por exemplo, resolver graficamente um sistema de desigualdades e interpretar os resultados no registro algébrico. Essa passagem entre registros ajuda a consolidar o entendimento das soluções otimizadas na PL.

Duval (2003) observa que a conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento. Além disso, o autor destaca que a natureza cognitiva, própria da atividade de conversão, aparece nos dois tipos de fenômenos que se podem observar a respeito de qualquer operação de conversão:

1. As variações de congruência e de não congruência;
2. A heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

Na primeira natureza, a informação ou o conceito pode permanecer basicamente o mesmo após ser representado em outro registro. Nesse caso, a conversão entre registros é considerada congruente e essas variações tendem a ser cognitivamente mais simples, pois os estudantes conseguem manter a mesma estrutura do conceito em ambos os registros. Caso a estrutura ou a aparência do conceito mude entre os registros, considera-se a conversão não congruente e isso pode gerar uma maior complexidade cognitiva, pois a conversão não mantém uma correspondência direta.

> Para analisar a atividade de conversão, é suficiente comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada. Esquematicamente, duas situações podem ocorrer. Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação - diz-se então que há congruência -, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não congruência (Duval, 2003).

No ensino da Programação Linear, alunos podem ter dificuldade em perceber que a solução de um problema no gráfico corresponde à solução algébrica do mesmo problema.

Na segunda natureza, o nível de dificuldade e as operações cognitivas envolvidas podem variar significativamente dependendo da direção da conversão entre os registros. Converter, por exemplo, uma figura geométrica (registro gráfico) para uma descrição verbal (registro da linguagem natural) pode ser relativamente simples para muitos estudantes. No entanto, a conversão inversa (da linguagem natural para uma figura geométrica) pode ser mais difícil, exigindo que o estudante interprete corretamente as palavras e visualize mentalmente a forma geométrica correspondente.

Duval (2023) afirma que “nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada”. Isso significa que o nível de dificuldade e as operações cognitivas envolvidas podem variar significativamente dependendo da direção da conversão entre os registros.

Em suma, a Teoria de Registros de Representação Semióticas de Raymond Duval contribui para o ensino interdisciplinar da Programação Linear, visto que a PL pode ser contextualizada em problemas do mundo real, onde os alunos precisam interpretar, converter e manipular registros de maneira significativa para tomar decisões ótimas e informadas.

O uso de contextualização de problemas cada vez mais vem sendo um dos pilares de orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) uma vez que propiciam o desenvolvimento de competências e habilidades não só matemáticas, mas de outras áreas do conhecimento.

1.4 Orientações da Base Nacional Comum Curricular para o ensino e aprendizagem de Programação Linear

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental não trata diretamente da Programação Linear. As várias competências e habilidades desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental formam a base para o entendimento futuro dessa ferramenta.

As orientações para o Ensino Médio incluem o desenvolvimento de habilidades relacionadas à PL dentro da área de Matemática e suas Tecnologias, propondo a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental.

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (Brasil, 2018, p. 471).

Diante disso, para promover ações que ampliem o letramento matemático[3] iniciado na etapa anterior, novos conhecimentos específicos e habilidades relativas ao processo de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas devem ser desenvolvidos para que o aluno lide com problemas reais e otimização de recursos, produzindo competências essenciais para o pensamento crítico e matemático.

Para tanto, a BNCC entende que os estudantes devem mobilizar seu modo próprio de **raciocinar, representar, comunicar, argumentar** e, com base em

---

[3] Segundo a Matriz do Pisa 2012, o letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (Brasil, 2018, p. 529).

Para o desenvolvimento de competências que envolvem **raciocinar**, a PL estimula os alunos a refletirem criticamente sobre os resultados obtidos e as possíveis limitações ou falhas dos modelos matemáticos aplicados.

Representar pressupõe a elaboração de registros para evocar um objeto matemático. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. É nesse momento que a competência de **comunicar** ganha importância pois o aluno deve ter a capacidade de transmitir de forma clara e precisa os resultados de suas análises e soluções, seja oralmente, por escrito ou por meio de apresentações com apoio de gráficos e tabelas.

Com relação à competência de **argumentar**, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar (Brasil, 2018, p. 530).

Embora “o estudo da Matemática no Ensino Médio brasileiro não contempla em sua Base Nacional Comum Curricular o estudo da Programação Linear” (Junior e Assim, 2022, p. 151), ela é capaz de proporcionar a interdisciplinaridade entre diferentes áreas do conhecimento, já que lida com a modelagem e a resolução de problemas do cotidiano, podendo perpassar temas contemporâneos transversais como: Meio ambiente, Economia, Saúde e Ciência e Tecnologia.

A competência específica 3 da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio enfatiza essa “conversa” com outras áreas do conhecimento.

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p. 531).

Considerando esses pressupostos, a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas e apreender habilidades que estão relacionadas a objetos matemáticos presentes na Programação Linear. Dentre essas habilidades, destaca-se:

> Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando

> técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2018, p. 536)

Sob essa ótica, percebemos a importância do sistema de equações lineares, ferramenta necessária para resolver múltiplas equações simultaneamente e encontrar pontos de intersecção das retas que representam as restrições de problemas envolvendo PL. Além disso, trabalhar com a representação matricial de sistemas lineares é uma abordagem comum em métodos algébricos como o *Método Simplex*[4].

Assim, representar graficamente equações e inequações lineares no plano cartesiano é uma ferramenta importante para visualizar a solução de problemas de otimização. Através delas é possível trabalhar com a função objetivo, que expressa a quantidade que se deseja otimizar (maximizar ou minimizar), como lucro, custo, tempo, etc.

A habilidade indicada também faz referência ao uso (ou não) de tecnologias digitais, o que incentiva o uso de softwares de matemática como Geogebra, Excel e programas específicos de otimização para resolver problemas de Programação Linear e visualizar soluções.

O trabalho com esses conceitos no Ensino Médio pode ser feito de maneira interativa, com apoio de tecnologias e atividades que integrem a PL para que os alunos possam aplicá-la em situações práticas e mais avançadas no futuro. O livro didático também tem um impacto significativo, especialmente na forma como os conceitos matemáticos são apresentados. Por isso, uma análise desse recurso pedagógico é fundamental, afinal, um livro bem estruturado condiciona o aluno na formulação dos modelos matemáticos utilizados na Programação Linear.

[4] O *Método Simplex*, desenvolvido por George Dantzig em 1947, é um algoritmo utilizado na programação linear para encontrar a solução ótima (máximo ou mínimo) de um problema de otimização, sujeito a certas restrições. Ele funciona explorando iterativamente um conjunto de soluções básicas viáveis, movendo-se de uma solução para outra até que a solução ótima seja encontrada ou que se determine que o problema não tem solução.

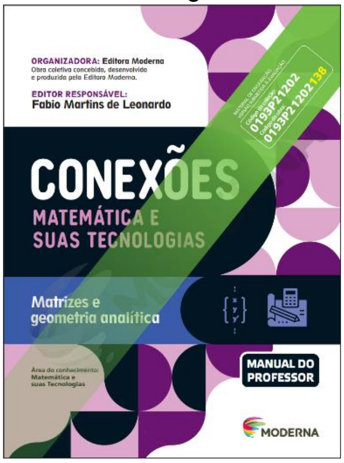
2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR PRESENTES EM UM LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO MÉDIO

Para compreender os métodos de resolução de problemas de PL detalhados no capítulo 3, vamos fazer a análise dos principais conceitos matemáticos empregados nessas técnicas em um livro didático utilizado no Ensino Médio.

A obra escolhida é da coleção "Conexões – Matemática e suas Tecnologias[5]" da Editora Moderna. O livro foi escolhido por apresentar um embasamento claro, preciso e acessível ao aluno dos conceitos fundamentais presentes na Programação Linear, além de ser uma obra contemplada pelo PNLD 2021. Outro aspecto considerado para a seleção dessa coleção é o incentivo à aplicação dos conteúdos matemáticos estudados através de textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão.

Dentre os 6 volumes que compõem a coleção, examinaremos o volume que versa sobre os principais objetos matemáticos presentes na Programação Linear, a saber: Matrizes e Geometria Analítica – Vol. 6.

Figura 1. Livro "Conexões - Matemática e suas Tecnologias" - Vol. 6



Fonte: Editora Moderna, 2020; capa

2.1 Sistemas Lineares

O tema "Sistemas Lineares" está presente no capítulo 2 e está organizado conforme mostra a figura 2. Entre os objetivos do capítulo, estão:

1. Representar e resolver situações-problemas usando sistemas lineares.

---
[5] Disponível em: https://pnld.moderna.com.br/ensino-medio/obras-didaticas/area-de-conhecimento/matematica/conexoes. Acesso em: 14 Jan. 2025.

2. Reconhecer e classificar sistemas lineares.
3. Apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa.
4. Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.

Figura 2. Organização do capítulo 2

Fonte: Editora Moderna, 2020; p. 13

O capítulo inicia com um problema envolvendo correntes que fluem em um circuito elétrico, um exemplo possível de ser resolvido utilizando sistemas lineares para introduzir o assunto, podendo ser trabalhada interdisciplinarmente com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Na segunda parte do capítulo, temos:

Definição 1 (Equação linear): Equação linear é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, com $n \in \mathbb{N}^*$, em que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as incógnitas; os números reais $a_1, a_2, \dots, a_n$ são os coeficientes das incógnitas; b, real, é o termo independente.

Para resolver problemas de programação linear, a equação linear desempenha um papel fundamental pois forma a base matemática para modelar e solucionar problemas que envolvem a otimização de recursos. No processo de Modelagem Matemática, as equações lineares permitem, por exemplo, representar o objetivo a ser otimizado, seja para maximizar lucros ou minimizar custos (Função objetivo).

A terceira parte do capítulo define o sistema de equações lineares, ferramenta necessária para caracterizar a forma padrão de problemas de PL e encontrar os pontos de interseção entre restrições no método gráfico. A solução geométrica de sistemas lineares permite determinar as coordenadas do ponto de máximo ou mínimo de uma função objetivo em uma região de soluções viáveis, oferecendo maiores noções de otimização.

Definição 2 (Sistema linear): Um sistema S de equações lineares, ou sistema linear, de m equações com n incógnitas é um conjunto de equações lineares do tipo:

$$S=\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+\cdots+a_{3n}x_n=b_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Em seguida, o livro classifica um sistema linear em:

- Sistema possível e determinado (SPD) – uma só solução;
- Sistema possível e indeterminado (SPI) – infinitas soluções;
- Sistema impossível (SI) – nenhuma solução.

A classificação de um sistema linear é o alicerce dos tipos de soluções que encontramos em problemas de Programação Linear aplicando o método gráfico. Temos os seguintes casos:

1. Dizemos que o problema admite uma solução única quando a solução ótima é representada por um vértice.
2. Dizemos que o problema apresenta infinitas soluções quando a solução coincide com um dos segmentos de reta de alguma restrição.
3. Dizemos que o conjunto de soluções viáveis é vazio quando uma restrição elimina toda a região de soluções viáveis.

A terceira parte do capítulo é finalizada ao associar sistema linear com as matrizes, cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema. A forma tabular do método simplex vale-se desse princípio para destacar os números envolvidos em cálculos matemáticos e registrar os cálculos de forma compacta.

Na última parte de conteúdo do capítulo, temos:

Definição 3 (Sistemas lineares equivalentes): Dois sistemas lineares são equivalentes quando têm o mesmo conjunto solução.

Definição 4 (Sistema escalonado): Um sistema em que todas as equações apresentam as incógnitas na mesma ordem é dito escalonado quando, de cada equação para a seguinte, aumenta a quantidade de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo.

Para resolver sistemas lineares, o livro recorre ao processo do escalonamento, ou método da eliminação de Gauss-Jordan, que consiste em escrever sistemas equivalentes, adotando, quantas vezes for necessário, total ou parcialmente, o seguinte procedimento:

1. Invertemos a ordem das equações;
2. Multiplicamos ambos os membros de uma equação por um mesmo número, real e não nulo;
3. Substituímos uma equação pela adição dela com outra multiplicada por um número real não nulo.

Tais operações algébricas elementares são conhecidas no método simplex como uma maneira de converter o sistema de equações em uma forma mais conveniente para conduzir o teste de otimalidade e (se necessário) a próxima iteração.

2.2 Geometria Analítica

O tema "Geometria Analítica" está presente no capítulo 3 e está organizado conforme mostra a figura 3. Note que alguns assuntos são inoportunos para o nosso objetivo. Portanto, restringiremos nossa análise aos objetos matemáticos pertinentes.

Figura 3. Organização do capítulo 3

Fonte: Editora Moderna, 2020; p. 13

Entre os objetivos do capítulo relacionados a Programação Linear, estão:

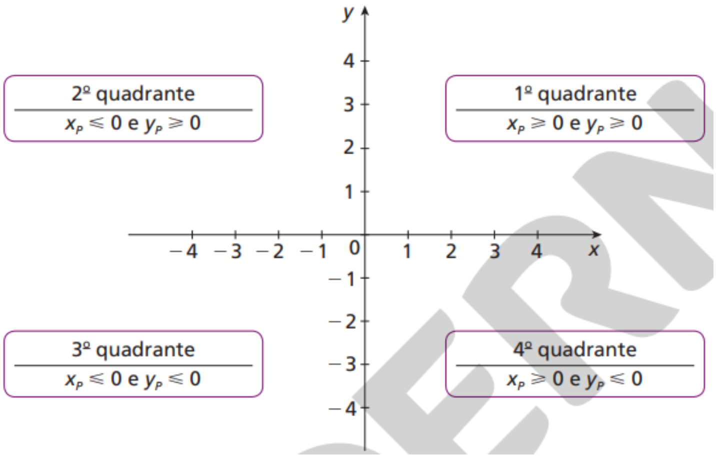
1. Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.
2. Escrever a equação de uma reta.
3. Discutir posições relativas entre duas retas.
4. Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.

O livro enfatiza que a Geometria Analítica estuda curvas e figuras por meio de equações, bem como analisa essas equações por meio de gráficos, estabelecendo relações com a Álgebra e a Geometria, plana e espacial.

Para iniciar o estudo do ponto com base no enfoque da Geometria Analítica, o capítulo 3 revisa que o plano formado por dois eixos perpendiculares entre si é chamado de sistema cartesiano ortogonal ou **plano cartesiano**. O procedimento gráfico de resolução para problemas de PL envolve a construção desse plano, tendo x e y como eixos para a representação de pontos com o objetivo de interpretar a região resultante de valores viáveis (x, y), chamada de região de soluções viáveis.

Os eixos do plano cartesiano dividem esse plano em quatro regiões, denominadas quadrantes, que são numeradas no sentido anti-horário conforme indicado na figura 4. Observe as condições para que um ponto $P(x_p, y_p)$ pertença a cada quadrante.

Figura 4. Plano cartesiano



Fonte: Editora Moderna, 2020; p. 62

Na segunda parte do capítulo, a equação geral da reta é obtida através da demonstração do teorema abaixo.

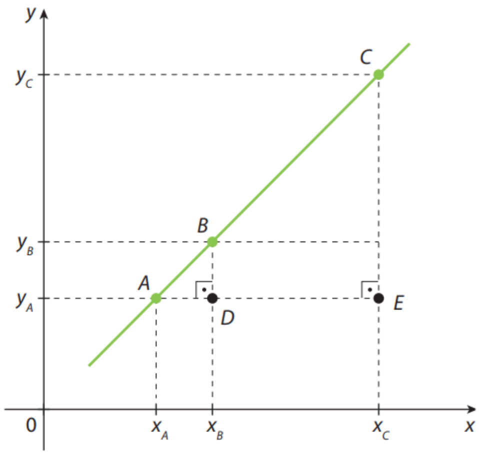
Teorema 1. Três pontos, $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são colineares se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstração:

Considere três pontos distintos do plano cartesiano, $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. Vamos considerar o caso em que os pontos pertencem a uma reta não paralela a um dos eixos.

Figura 5. Pontos A, B e C colineares



Fonte: Editora Moderna, 2020; p. 68

Os triângulos ACE e ABD são semelhantes. Logo:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} \Rightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}\text{ , com } x_B - x_A \neq 0 \text{ e } y_B - y_A \neq 0$$

Assim:

$$(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C - x_A y_A = 0$$
$$\Leftrightarrow x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C = 0$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por -1 e reordenando os termos, obtemos:

$$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0$$

Comparando com o desenvolvimento, pela regra de Sarrus, do determinante de uma matriz, temos:

$$0 = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Logo, se três pontos, $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A recíproca também é verdadeira:

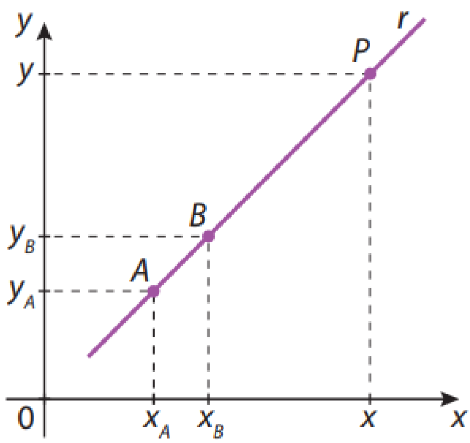
Se $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$, então os pontos $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados.

Essas condições também são válidas quando dois dos pontos coincidem ou quando os pontos pertencem a uma reta paralela a algum dos eixos.

Com base no Teorema 1, obteremos a equação geral da reta.

Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes à reta r, vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico, $P(x, y)$, também pertencente à reta r.

Figura 6. Determinação da equação geral da reta



Fonte: Editora Moderna, 2020; p. 70

Pelo Teorema 1, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

Nesse determinante as únicas variáveis são x e y, os outros elementos são números reais conhecidos. Assim, podemos fazer:

- $(y_A - y_B) = a$
- $(x_B - x_A) = b$
- $x_A y_B - x_B y_A = c$

Não sendo a e b simultaneamente nulos, obtemos a **equação geral da reta**:

$$ax + by + c = 0$$

A equação da reta é fundamental em problemas de Programação Linear. As retas ajudam a delimitar os limites da região de soluções viáveis, determinando quais pontos no plano atendem a todas as condições impostas. Além disso, cada inequação que representa uma restrição no problema pode ser transformada em uma equação da reta.

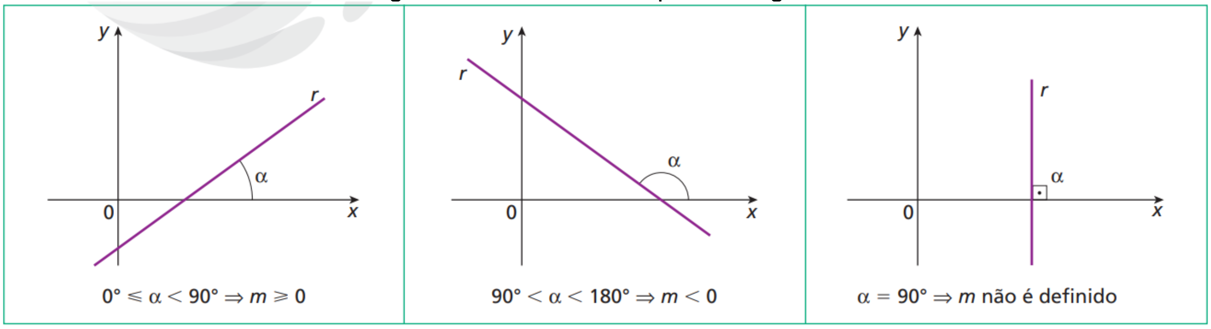
A visualização gráfica das relações entre variáveis é outra vantagem que essa equação fornece para compreender o problema, especialmente para estudantes iniciantes em PL, tornando mais claro como as restrições afetam a solução.

A segunda parte do capítulo observa as possibilidades para o ângulo α ($0° \leq \alpha < 180°$ ou $0 \leq \alpha < \pi$), denominada **inclinação da reta**, indicadas na figura 7.

Definição 5 (Coeficiente angular): Chamamos de coeficiente angular ou declividade de uma reta, não perpendicular ao eixo x, o número real m expresso pela tangente trigonométrica de sua inclinação, ou seja:

$$m = tg\alpha$$

Figura 7. Possibilidades para o ângulo α



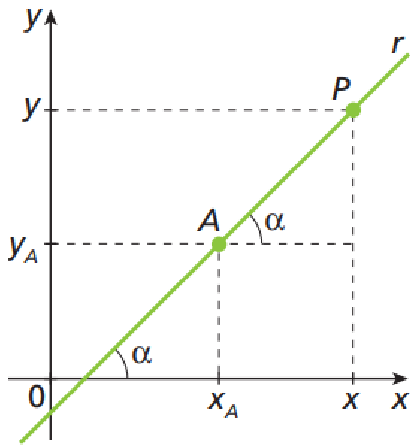
Fonte: Editora Moderna, 2020; p. 72

Quando a reta é paralela ao eixo x, admitimos que sua inclinação é $0°$. Logo, seu coeficiente angular é $m = 0$.

Determinaremos agora a equação reduzida da reta.

Considere os pontos $P(x, y)$ e $A(x_A, y_A)$ na reta r, sendo $P \neq A$ e $m = tg\alpha$.

Figura 8. Equação da reta de coeficiente angular m que passa por um ponto A



Fonte: Editora Moderna, 2020; p. 75

Como $m = tg\alpha$, então $m = \dfrac{y - y_A}{x - x_A}$

Portanto, a equação de uma reta que passa por um ponto conhecido $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

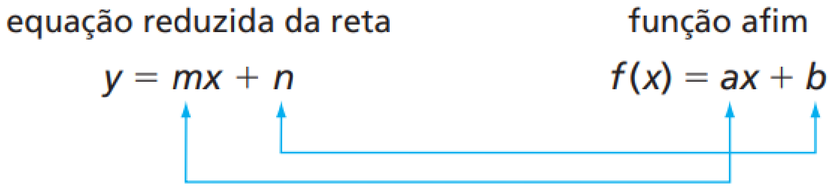
Tomando $N(0, n)$ como um ponto conhecido (intersecção da reta r com o eixo y), temos:

$$y - n = m(x - 0) \Leftrightarrow y = mx + n$$

A forma $y = mx + n$ é denominada **equação reduzida da reta**, em que m é o coeficiente angular da reta e n é a ordenada do ponto no qual a reta cruza o eixo y.

Vale destacar a associação da equação reduzida da reta com a lei de formação da função afim $f(x) = ax + b$ (Figura 9). Observe também que $n = b$ é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y, chamado de coeficiente linear da reta.

Figura 9. Analogia entre a equação reduzida da reta e a lei de uma função afim



Fonte: Editora Moderna, 2020; p. 77

Essa conexão é importante pois visa a identificação dos coeficientes linear e angular que serão revisitados no método gráfico. Principalmente o coeficiente angular pois está diretamente relacionado à inclinação das retas que representam as restrições e a função objetivo. Isso influencia a posição relativa das restrições no gráfico e, consequentemente, a forma da região de soluções viáveis. A solução ótima em Programação Linear ocorre, na maioria dos casos, em um vértice dessa região em que a inclinação da função objetivo (determinada pelo coeficiente angular) é fundamental para identificar o ponto ótimo.

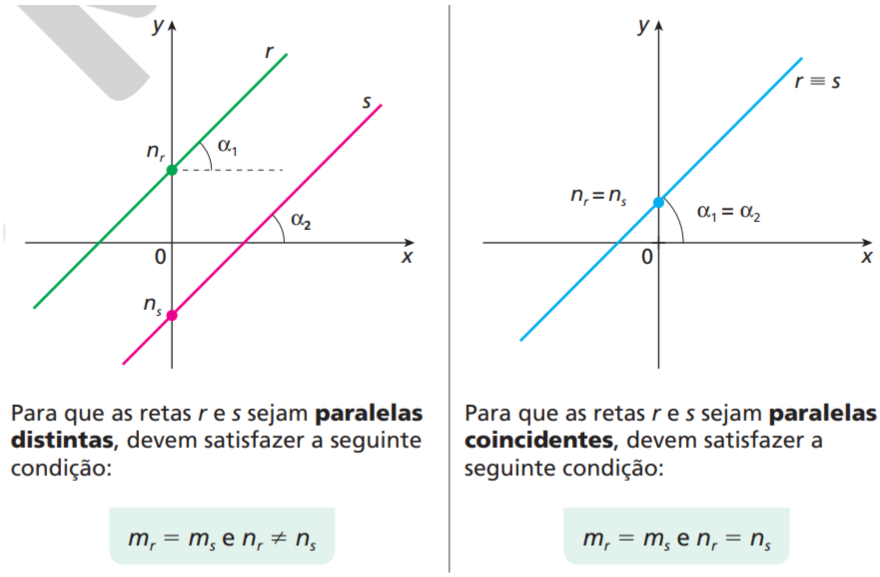
Essa seção do capitulo também verifica a condição de paralelismo e perpendicularismo de duas retas.

Definição 6 (Retas paralelas): Duas retas r e s são paralelas quando têm a mesma direção.

Na figura 10 temos as condições para que as retas r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s e coeficientes lineares n_r e n_s, sejam paralelas.

Temos ainda que se m_r e m_s não estão definidos, então r e s são retas verticais, isto é, paralelas ao eixo y; portanto, são paralelas entre si.

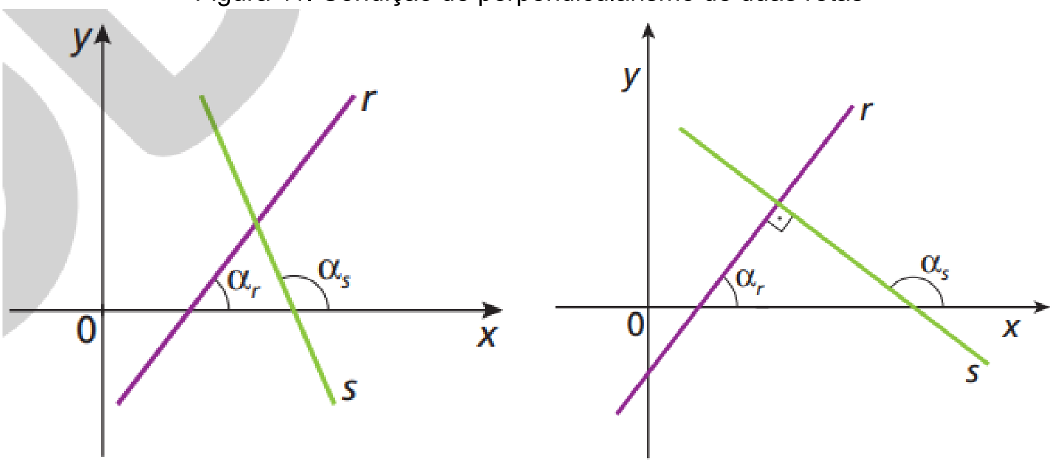
Figura 10. Condição de paralelismo de duas retas



Fonte: Editora Moderna, 2020; p. 78

Para a condição de perpendicularismo de duas retas vamos verificar, inicialmente, quais condições devem ocorrer para que as retas r e s, não verticais, de inclinações α_r e α_s e de coeficientes angulares $m_r = tg\alpha_r$ e $m_s = tg\alpha_s$, sejam concorrentes (Lado esquerdo da figura 11).

Figura 11. Condição de perpendicularismo de duas retas



Fonte: Editora Moderna, 2020; p. 79

Para que as retas r e s sejam concorrentes, isto é, não paralelas, devemos ter:

$$\alpha_r \neq \alpha_s \Rightarrow tg\alpha_r \neq tg\alpha_s \Rightarrow m_r \neq m_s$$

Portanto, para que duas retas não verticais sejam concorrentes, elas devem ter coeficientes angulares diferentes.

Agora vamos considerar as retas r e s, não verticais, concorrentes perpendiculares (Lado direito da figura 11). Assim:

$$\alpha_s = \alpha_r + 90° \Rightarrow tg\alpha_s = tg(\alpha_r + 90°)$$

Como:

$$tg(\alpha_r + 90°) = \frac{sen(\alpha_r + 90°)}{cos(\alpha_r + 90°)} = \frac{sen\alpha_r \cdot cos90° + sen90° \cdot cos\alpha_r}{cos\alpha_r \cdot cos90° - sen\alpha_r \cdot sen90°} = -\frac{cos\alpha_r}{sen\alpha_r} = -\frac{1}{tg\alpha_r}$$

Obtemos:

$$tg\alpha_s = -\frac{1}{tg\alpha_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Portanto, as retas r e s, não verticais, são perpendiculares quando:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

Essa análise da posição relativa entre duas retas nos oferece algumas implicações no processo de modelagem de problemas de Programação Linear. Quando as retas que representam duas restrições possuem, por exemplo, coeficientes angulares iguais, elas são paralelas, o que pode indicar redundância ou a necessidade de uma análise mais cuidadosa para identificar o impacto na região de soluções viáveis. A perpendicularidade entre as retas também pode ser útil em problemas geométricos e de otimização específicos.

A Geometria Analítica descrita no capítulo 3 do livro ainda destaca as infinitas soluções, que podem ser representadas graficamente, de uma inequação do 1º grau com duas incógnitas.

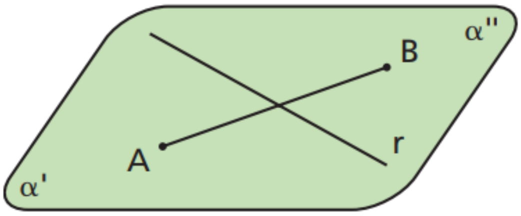
Postulado 1 (Separação dos pontos de um plano): Uma reta r de um plano α separa esse plano em dois subconjuntos α' e α'' tais que:

a) $\alpha' \cap \alpha'' = \emptyset$

b) α' e α'' são convexos

c) $(A \in \alpha', B \in \alpha'') \Rightarrow \overline{AB} \cap r \neq \emptyset$

Figura 12. Postulado da separação dos pontos de um plano



Fonte: DOLCE e POMPEO, 2013; p. 31

Definição 7 (Semiplanos): Os subconjuntos α' e α'' são chamados semiplanos abertos e os conjuntos $r \cup \alpha'$ e $r \cup \alpha''$ são chamados semiplanos. A reta r é a origem de cada um desses semiplanos.

Agora podemos tecer algumas observações sobre inequações.

Se uma reta r qualquer (não paralela a qualquer um dos eixos), de equação $ax + by + c = 0$, divide o plano cartesiano em dois semiplanos de mesma origem r, temos:

- Todo ponto (x, y) pertencente a um dos semiplanos satisfaz a inequação $ax + by + c \geq 0$.
- Todo ponto (x, y) pertencente ao outro semiplano satisfaz a inequação $ax + by + c \leq 0$.

Nos dois casos, a igualdade ocorre somente se o ponto pertence à reta.

A representação gráfica de inequações lineares que delimitam as regiões no plano, identificam a região de soluções viáveis formada pelas interseções das áreas que atendem a todas as restrições.

Dessa forma, os objetos matemáticos aprendidos no Ensino Médio formam a base teórica e prática que auxiliam na matematização de problemas, na identificação de soluções e na interpretação dos resultados. Essas etapas são essenciais nos métodos para solução de problemas de PL que serão estudados a seguir, ligando diretamente a matemática básica a contextos mais avançados e aplicados.

3. MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Para aplicar as técnicas de modelagem e resolução de problemas de Programação Linear devemos conhecer a escala e a natureza do problema. Neste capítulo apresentaremos o *Método Gráfico* e o *Método Simplex*, técnicas usadas para determinar a solução ótima de problemas de PL.

3.1 O Método Gráfico

Conforme Prado (2016), a estratégia da PL para resolução de problemas de otimização é transformar as características do problema em um modelo abstrato matemático constituído de:

- Uma função objetivo;
- Um conjunto de restrições.

Tanto a função objetivo como o conjunto de restrições fazem referência às variáveis do sistema. Assim, a otimização na matemática é a busca pela melhor solução possível (um máximo ou um mínimo) para a função objetivo, dentro de um conjunto de restrições.

O método gráfico consiste em representar graficamente as restrições e a função objetivo de um problema de PL em um plano cartesiano. A solução é obtida ao analisar a interseção das restrições e localizar o ponto que maximiza ou minimiza a função objetivo.

Ilustraremos esses procedimentos considerando o problema proposto a seguir:

Problema 1. Uma fábrica produz dois tipos de produtos: *standard* e luxo. Cada modelo *standard* requer 4 horas de corte e 2 horas de polimento; cada modelo luxo requer 2 horas de corte e 5 horas de polimento. A fábrica possui 2 cortadoras e 3 polidoras. Sabendo-se que a semana de trabalho da fábrica é de 40 horas e que cada modelo *standard* dá um lucro de R$ 3,00 e cada modelo luxo R$ 4,00 e que não há restrições de demanda, pede-se qual deve ser a produção da fábrica que maximiza o lucro.

Nesse problema, as suas variáveis são as quantidades a serem produzidas dos produtos *standard* e luxo. A função objetivo mostra como o lucro se relaciona com as variáveis do problema e o conjunto de restrições mostra os limites para as mesmas variáveis.

Definiremos um modelo para o problema em que L significa o lucro, x a quantidade do modelo *standard* a produzir e y a quantidade do modelo luxo a produzir. A equação que será otimizada (no caso, lucro) será a função-objetivo.

A representação de um sistema (modelo) para essa empresa seria:

- Função-objetivo

Desejamos maximizar o lucro, que tem relação direta com as variáveis básicas. Como o modelo *standard* dá um lucro de R$ 3,00 e cada modelo luxo R$ 4,00, a função-objetivo é:

$$L = 3x + 4y$$

- Conjunto de restrições

a) Máquina de corte disponível

O modelo *standard* requer 4 horas de corte, enquanto o modelo luxo requer 2 horas de corte. Como a fábrica possui 2 máquinas de corte e a semana de trabalho é de 40 horas, podemos escrever:

$$4x + 2y \leq 80 \iff 2x + y \leq 40$$

b) Máquina de polimento disponível

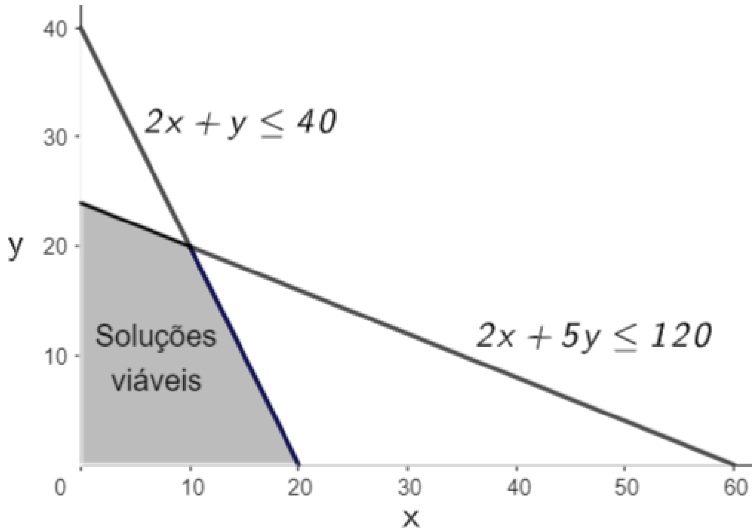
O modelo *standard* requer 2 horas de polimento, enquanto o modelo luxo requer 5 horas de polimento. Como a fábrica possui 3 máquinas de polimento e a semana de trabalho é de 40 horas, podemos escrever:

$$2x + 5y \leq 120$$

Além disso, temos que x e y são variáveis inteiras e não negativas.

Colocando as restrições em um único gráfico, ele toma o formato da figura 13, na qual a intersecção entre todas as restrições produziu a região destacada.

Figura 13. Região de soluções viáveis



Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

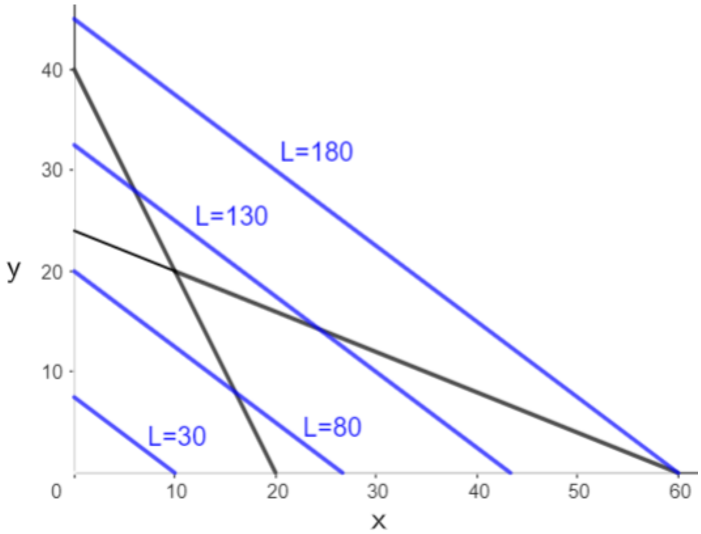
Os pontos das soluções viáveis representam pares de produção (*standard*, luxo) que atendem a todas as restrições. Qualquer ponto fora dessa região não atende todas as restrições. Portanto, nosso problema pode ser compreendido como procurar qual ponto dessa região fornece o maior valor para o lucro.

A função-objetivo $L = 3x + 4y$ pode ser escrita como:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{L}{4}$$

Essa equação representa uma família de retas de parâmetro $\frac{L}{4}$, ou seja, para cada valor de L temos uma reta diferente. Ademais, todas as retas são paralelas entre si, pois possuem o mesmo coeficiente angular $-\frac{3}{4}$. Na figura 14 mostramos algumas retas dessa família, em que cada uma foi obtida dando-se um valor para o lucro. Um ponto de uma reta representa um par (*standard*, luxo) de produção e qualquer ponto dessa reta fornece o mesmo lucro.

Figura 14. Família de retas de parâmetro $\frac{L}{4}$



Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Podemos observar que quanto mais afastada da origem está uma dessas retas, maior o valor do lucro correspondente. Isso pode ser demonstrado facilmente comparando a equação $y = -\frac{3}{4}x + \frac{L}{4}$ com a equação reduzida da reta, dada por $y = ax + b$, onde:

- $a = -\frac{3}{4}$ (coeficiente angular)
- $b = \frac{L}{4}$ (coeficiente linear)

Na equação da reta, o termo b representa o ponto de intersecção da reta com o eixo y. No caso de nosso problema, considerando uma família de retas paralelas entre si, quanto mais distante da origem está uma reta, maior o valor de b. Assim, quanto maior o lucro (L), maior será b, e mais distante estará a reta da origem.

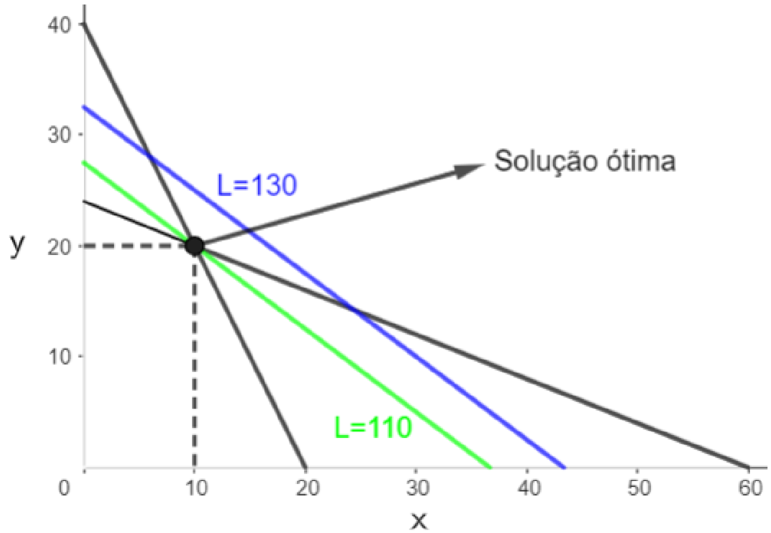
Logo, o problema se resume em encontrar a reta da família que produz o maior lucro, respeitadas as restrições, isto é, encontrar a reta mais distante da origem e que tenha pelo menos um ponto dentro da região de soluções possíveis. A execução dessa tarefa é simples:

1. Traçamos uma reta qualquer da família de retas ($L = 130$, por exemplo);

2. Traçamos uma paralela a ela (deslocamos a régua com inclinação fixa) o mais distante da origem e com pelo menos um ponto dentro da região de soluções viáveis.

Utilizando as diretrizes acima, encontramos a solução ótima.

Figura 15. Solução ótima



Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Logo, a produção da fábrica que maximiza o lucro é de 10 modelos *standard* e 20 modelos luxo, cujo lucro é de $R\$\ 110{,}00$. Note que o ponto $(10{,}20)$ pode também ser calculado algebricamente resolvendo o sistema $\begin{cases} 2x + y = 40 \\ 2x + 5y = 120 \end{cases}$ visto que é o ponto de intersecção das retas que representam essas equações.

Como consequência dos procedimentos acima, Prado (2016) afirma:

1. A solução provavelmente estará em um vértice (nesses casos dizemos que o problema admite uma solução única).

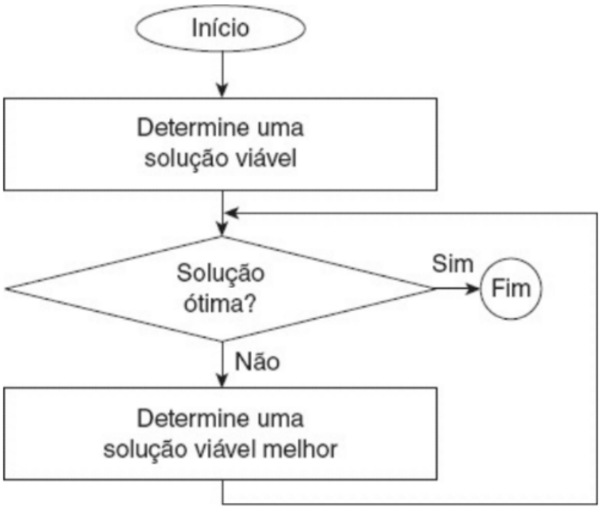
2. Eventualmente a solução poderá coincidir com um dos segmentos de reta de alguma restrição, em que qualquer ponto do segmento é uma solução ótima (nesses casos dizemos que o problema apresenta infinitas soluções).

3. A inclinação da família de retas paralelas da função-objetivo é fundamental para determinar qual será o ponto ótimo. Esse coeficiente angular foi obtido efetuando-se a divisão $\frac{3}{4}$, ou seja, o coeficiente angular representa a relação entre os lucros dos dois produtos. É de esperar que, caso se altere algum dos valores do lucro unitário, a solução possa ser alterada.

3.2 O Método Simplex

O método simplex é um algoritmo iterativo, um procedimento sistemático para solução que fica repetindo uma série de passos, chamados iteração, até que se chegue a um resultado desejado (Hillier e Lieberman, 2006). O algoritmo conta com a seguinte estrutura:

Figura 16. Algoritmo do método simplex



Fonte: Lachtermacher, 2016

Definição 8 (Forma-padrão): Um problema de programação linear está em sua forma-padrão se tivermos uma maximização da função-objetivo e se todas as restrições forem do tipo menor ou igual, bem como se os termos constantes (b_i) e as variáveis de decisão assumirem valores não negativos. Matematicamente, podemos representar um problema na forma-padrão por:

Maximizar:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeita às restrições:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \end{aligned}$$

e

$$x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0,\, \cdots ,\, x_n \geq 0$$

A função que está sendo maximizada, $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ é chamada função objetivo. c_j $(j = 1,2, \dots, n)$ é o coeficiente da variável x_j.

As limitações são normalmente denominadas restrições. As primeiras m restrições (função do lado esquerdo da desigualdade) são algumas vezes ditas restrições funcionais (ou restrições estruturais). $x_j \geq 0$ são conhecidas como restrições de não-negatividade (ou condições não-negativas). b_i $(i = 1,2, \dots, m)$ é a constante da i-ésima restrição. a_{ij} é o coeficiente na i-ésima restrição e da variável x_j.

Destacaremos o procedimento para solucionar qualquer modelo de programação linear que se encontra em nossa forma-padrão (maximização, todas restrições funcionais na forma $\leq$ e restrições de não-negatividade em todas as variáveis) e possui apenas lados direitos não-negativos em suas restrições funcionais

Agora vamos aplicar o método simplex para resolver o problema a seguir:

Problema 2. Uma fábrica de computadores produz 2 modelos de computador: A e B. O modelo A fornece lucro de $R\$\ 180{,}00$ e B um lucro de $R\$\ 300{,}00$. O modelo A requer, na sua produção, um gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo B requer 1 gabinete grande e 2 unidades de disco. Existem no estoque: 60 unidades do gabinete pequeno, 50 do gabinete grande e 120 unidades de disco. Pergunta-se: qual deve ser o esquema de produção que maximiza o lucro?

Definiremos um modelo para o problema em que L significa o lucro, x a quantidade do modelo A a produzir e y a quantidade do modelo B a produzir. Assim, temos que:

Maximizar:

$$L = 180x + 300y$$

Sujeito as restrições:

$$x + 2y \leq 120$$

$$x \leq 60$$

$$y \leq 50$$

$x \geq 0$ e $y \geq 0$ (Restrições de não-negatividade)

Note que ele está na forma-padrão, por se tratar de um problema de maximização, com apenas restrições do tipo menor ou igual e constantes das restrições e variáveis de decisão não negativas.

O primeiro passo do nosso procedimento consiste em converter restrições funcionais de desigualdade em restrições de igualdade equivalentes. As restrições de não-negatividade são deixadas como desigualdades, pois elas são tratadas separadamente. Essa conversão é realizada introduzindo-se **variáveis de folga**.

Na primeira restrição do nosso problema, temos:

$$x + 2y \leq 120$$

A variável de folga para essa restrição é definida como:

$$s_1 = 120 - x - 2y$$

Logo,

$$x + 2y + s_1 = 120$$

Dada essa equação, $x + 2y \leq 120$ se, e somente se, $120 - x - 2y = s_1 \geq 0$. Portanto, a restrição original $x + 2y \leq 120$ é inteiramente equivalente ao par de restrições:

$$x + 2y + s_1 = 120 \qquad \text{e} \qquad s_1 \geq 0$$

Após a introdução de variáveis de folga para as demais restrições funcionais, o modelo de programação linear original para o exemplo pode agora ser substituído pelo modelo equivalente (chamado **forma aumentada** do modelo). Quando temos o problema na forma aumentada, é conveniente considerar e manipular a equação da função objetivo ao mesmo tempo que as novas equações de restrições. É como se a função objetivo fosse, na verdade, uma das restrições originais, porém, pelo fato de ela já se encontrar na forma de igualdade, não é necessária nenhuma variável de folga. Logo, o problema tem a seguinte forma equivalente:

Maximizar L, sujeito a:

$$L - 180x - 300y = 0$$

$$x + 2y + s_1 = 120$$
$$x + s_2 = 60$$
$$y + s_3 = 50$$

Vamos agora definir algumas propriedades das variáveis.

Propriedade 1: Cada variável é designada como uma variável básica ou uma variável não-básica.

Propriedade 2: O número de variáveis básicas é igual ao número de restrições funcionais (agora equações). Portanto, o número de variáveis não-básicas é igual ao número total de variáveis menos o número de restrições funcionais.

Propriedade 3: As variáveis não-básicas são configuradas em zero.

Propriedade 4: Os valores das variáveis básicas são obtidos como a solução simultânea das equações (restrições funcionais na forma aumentada). (O conjunto de variáveis básicas é normalmente conhecido como a base.)

No nosso problema, temos 3 variáveis básicas e 2 variáveis não-básicas (Propriedade 2). Escolhendo-se x e y como variáveis não-básicas, temos: $x = y = 0$ (Propriedade 3). Assim, pela propriedade 4, temos que:

$$s_1 = 120$$
$$s_2 = 60$$
$$s_3 = 50$$

Note que essa solução nos retorna $L = 0$, uma solução viável mas não otimizada do nosso problema. Assim, conforme a figura 16, devemos determinar uma solução viável melhor.

Com a finalidade de registrar somente as informações essenciais, a saber: os coeficientes das variáveis, as constantes do lado direito das equações e a variável básica que aparece em cada equação, vamos utilizar a forma tabular do método simplex.

A tabela terá colunas para a iteração, variáveis básicas, equações (enumeradas para identificação), todos os coeficientes das restrições e da função-objetivo e as constantes das equações. Para padronização, colocaremos na primeira linha a equação que representa a função-objetivo. Isso não é obrigatório, mas facilita a explanação e a compreensão do método.

A tabela 1 mostra a forma tabular inicial do método simplex aplicada ao nosso problema.

Tabela 1. Forma tabular inicial do problema 2

Iteração	Variável básica	Equação	Coeficiente de:						Constante
			L	x	y	s_1	s_2	s_3	
0	L	0	1	-180	-300	0	0	0	0
	s_1	1	0	1	2	1	0	0	120
	s_2	2	0	1	0	0	1	0	60
	s_3	3	0	0	1	0	0	1	50

Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Cada variável básica é apresentada na segunda coluna e o seu valor atual aparece na mesma linha, na coluna final (constante). Neste caso, leríamos: $s_1 = 120$, $s_2 = 60$ e $s_3 = 50$. As variáveis que não aparecem na segunda coluna (não-básicas), neste caso x e y, têm o valor atual igual a zero. O valor de L (função-objetivo) é lido da mesma maneira que as variáveis básicas, isto é, o valor da última coluna na linha correspondente ao valor da função-objetivo, neste caso, equação 0. Portanto, podemos ler a solução associada facilmente a partir do quadro do método simplex.

O próximo passo será verificar se a solução encontrada já é a ótima ou se ela pode ser melhorada (**teste de otimalidade**). O teste consiste em verificar os sinais dos coeficientes das variáveis na equação 0. Caso tenhamos coeficientes negativos, a solução não está otimizada. Como no nosso problema existem coeficientes negativos (-180 para x e -300 para y), a solução ótima ainda não foi atingida. Portanto, devemos encontrar uma nova solução viável para o problema.

Para isso, vamos determinar a **variável básica que entra** selecionando a variável não-básica com o coeficiente negativo tendo o maior valor absoluto na equação 0. Como $y = -300$ cumpre esse requisito, y é a variável básica que entra. Denominaremos **coluna pivô** (destacada na tabela 2), a coluna abaixo desse coeficiente.

Tabela 2. Coluna pivô na iteração 0

Iteração	Variável básica	Equação	Coeficiente de:						Constante
			L	x	y	s_1	s_2	s_3	
0	L	0	1	-180	-300	0	0	0	0
	s_1	1	0	1	2	1	0	0	120
	s_2	2	0	1	0	0	1	0	60
	s_3	3	0	0	1	0	0	1	50

Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Agora vamos determinar a **variável básica que sai** aplicando o **teste da razão mínima**. Esse teste consiste nos seguintes passos:

1. Selecione cada coeficiente da coluna pivô que seja estritamente positivo (> 0).
2. Divida cada um dos valores da coluna "constante" pelos coeficientes da coluna pivô selecionados no passo 1 nas respectivas linhas.
3. Identifique a linha que possui a menor dessas razões.
4. A variável básica para esta linha é a variável básica que sai; portanto, substitua-a pela variável básica que entra na coluna variável básica na próxima iteração.

Aplicando o teste da razão mínima, temos que:

$$\frac{120}{2} = 60 \qquad , \qquad \frac{50}{1} = 50$$

A razão mínima corresponde a linha da equação 3. Logo, a variável que sai é s_3. Denominaremos **linha pivô** a linha que apresenta a razão mínima (equação 3). Chamaremos de **número pivô** o número que se encontra na intersecção da coluna pivô e linha pivô. Na iteração 0, o número pivô é igual a 1 conforme a tabela 3.

Tabela 3. Coluna, linha e número pivô na iteração 0

Iteração	Variável básica	Equação	Coeficiente de:						Constante
			L	x	y	s_1	s_2	s_3	
0	L	0	1	-180	-300	0	0	0	0
	s_1	1	0	1	2	1	0	0	120
	s_2	2	0	1	0	0	1	0	60
	s_3	3	0	0	1	0	0	1	50

Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Esse procedimento é equivalente a encontrar uma nova solução viável usando operações elementares em linhas (multiplicar ou dividir uma linha por uma constante diferente de zero; adicionar ou subtrair um múltiplo de uma linha com outra) visando construir uma nova tabela simplex na forma apropriada de eliminação gaussiana abaixo da atual. Após esse processo, retornaremos para o teste de otimalidade.

As operações elementares em linhas específicas que precisam ser realizadas são indicadas nos passos a seguir:

Passo 1. Divida a linha pivô pelo número pivô. Use essa nova linha pivô nos passos 2 e 3.

No nosso caso, como o número pivô é 1, a linha da equação 3 permanece inalterada.

Passo 2. Para cada outra linha que possua um coeficiente negativo na coluna pivô (inclusive a linha da equação 0), adicione a essa linha o produto do valor absoluto desse coeficiente pela nova linha pivô.

Vamos obter a *Nova linha equação 0* aplicando a seguinte operação:

$$(Nova\ linha\ equação\ 0) = (linha\ equação\ 0) + 300 \cdot (Nova\ linha\ pivô)$$

Tabela 4. Nova linha equação 0 na iteração 1

Iteração	Variável básica	Equação	Coeficiente de:						Constante
			L	x	y	s_1	s_2	s_3	
0	L	0	1	-180	-300	0	0	0	0
	s_1	1	0	1	2	1	0	0	120
	s_2	2	0	1	0	0	1	0	60
	s_3	3	0	0	1	0	0	1	50
1	L	0	1	-180	0	0	0	300	15000
	s_1	1							
	s_2	2							
	y	3	0	0	1	0	0	1	50

Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Passo 3. Para cada outra linha que tiver um coeficiente positivo na coluna pivô, subtraia dessa linha o produto desse coeficiente pela nova linha pivô.

Vamos obter a *Nova linha equação 1* aplicando a seguinte operação:

$$(Nova\ linha\ equação\ 1) = (linha\ equação\ 1) - 2 \cdot (Nova\ linha\ pivô)$$

Tabela 5. Nova linha equação 1 na iteração 1

Iteração	Variável básica	Equação	Coeficiente de:						Constante
			L	x	y	s_1	s_2	s_3	
0	L	0	1	-180	-300	0	0	0	0
	s_1	1	0	1	2	1	0	0	120
	s_2	2	0	1	0	0	1	0	60
	s_3	3	0	0	1	0	0	1	50
1	L	0	1	-180	0	0	0	300	15000
	s_1	1	0	1	0	1	0	-2	20
	s_2	2	0	1	0	0	1	0	60
	y	3	0	0	1	0	0	1	50

Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Note que a linha da equação 2 foi repetida pois o coeficiente y já se encontra no padrão que precisamos.

Após essa iteração, temos a seguinte solução viável:

$$x = 0 \quad ; \quad y = 50 \quad ; \quad s_1 = 20 \quad ; \quad s_2 = 60 \quad ; \quad s_3 = 0 \quad \text{com} \quad L = 15000$$

Aplicando o teste de otimalidade, percebemos que o coeficiente x na linha da equação 0 é negativo. Portanto a solução ótima não foi atingida e uma nova iteração deve ser feita.

De maneira análoga, agora observando os valores na iteração 1, encontramos a variável básica que entra (x, coeficiente negativo com maior valor absoluto) e a variável básica que sai (s_1, pelo teste da razão mínima). Assim, o padrão de coeficientes que devemos reproduzir na coluna x é $(0,1,0,0)$. Para isso, aplicamos as operações básicas em linhas específicas, detalhadas abaixo, para obtermos os valores da iteração 2 (tabela 6).

- $(Nova\ linha\ pivô) = \frac{(linha\ pivô)}{1}$

- $(Nova\ linha\ equação\ 0) = (linha\ equação\ 0) + 180 \cdot (Nova\ linha\ pivô)$

- $(Nova\ linha\ equação\ 2) = (linha\ equação\ 2) - (Nova\ linha\ pivô)$

A linha da equação 3 permanece a mesma pois já encontra-se no padrão que desejamos.

Tabela 6. Tabela simplex após a iteração 2

Iteração	Variável básica	Equação	Coeficiente de:						Constante
			L	x	y	s_1	s_2	s_3	
0	L	0	1	-180	-300	0	0	0	0
	s_1	1	0	1	2	1	0	0	120
	s_2	2	0	1	0	0	1	0	60
	s_3	3	0	0	1	0	0	1	50
1	L	0	1	-180	0	0	0	300	15000
	s_1	1	0	1	0	1	0	-2	20
	s_2	2	0	1	0	0	1	0	60
	y	3	0	0	1	0	0	1	50
2	L	0	1	0	0	180	0	-60	18600
	x	1	0	1	0	1	0	-2	20
	s_2	2	0	0	0	-1	1	2	40
	y	3	0	0	1	0	0	1	50

Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Concluída a iteração 2, temos a seguinte solução viável:

$x = 20$; $y = 50$; $s_1 = 0$; $s_2 = 40$; $s_3 = 0$ com $L = 18600$

Veja que a solução não é ótima pois, aplicando o teste da otimalidade, o coeficiente s_3 na linha da equação 0 é negativo. Logo, uma nova iteração deve ser feita.

Para a iteração 3, agora analisando os valores na iteração 2, encontramos s_3 como a variável básica que entra e s_2 como variável básica que sai. Logo, o padrão de coeficientes que devemos reproduzir na coluna s_3 é $(0,0,1,0)$. Vamos aplicar as seguintes operações básicas em linhas específicas para obter esses valores:

- $(Nova\ linha\ pivô) = \frac{(linha\ pivô)}{2}$

- $(Nova\ linha\ equação\ 0) = (linha\ equação\ 0) + 60 \cdot (Nova\ linha\ pivô)$

- $(Nova\ linha\ equação\ 1) = (linha\ equação\ 1) + 2 \cdot (Nova\ linha\ pivô)$

- $(Nova\ linha\ equação\ 3) = (linha\ equação\ 3) - (Nova\ linha\ pivô)$

Tabela 7. Tabela simplex após a iteração 3

Iteração	Variável básica	Equação	Coeficiente de:						Constante
			L	x	y	s_1	s_2	s_3	
0	L	0	1	-180	-300	0	0	0	0
	s_1	1	0	1	2	1	0	0	120
	s_2	2	0	1	0	0	1	0	60
	s_3	3	0	0	1	0	0	1	50
1	L	0	1	-180	0	0	0	300	15000
	s_1	1	0	1	0	1	0	-2	20
	s_2	2	0	1	0	0	1	0	60
	y	3	0	0	1	0	0	1	50
2	L	0	1	0	0	180	0	-60	18600
	x	1	0	1	0	1	0	-2	20
	s_2	2	0	0	0	-1	1	2	40
	y	3	0	0	1	0	0	1	50
3	L	0	1	0	0	150	30	0	19800
	x	1	0	1	0	0	1	0	60
	s_3	2	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	20
	y	3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	30

Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Assim, temos a seguinte solução viável:

$$x = 60 \quad ; \quad y = 30 \quad ; \quad s_1 = 0 \quad ; \quad s_2 = 0 \quad ; \quad s_3 = 20 \quad \text{com} \quad L = 19800$$

Partindo para o teste de otimalidade, concluímos que essa solução é ótima, pois nenhum dos coeficientes na linha da equação 0 é negativo. Isso encerra, então, o algoritmo. Consequentemente, a solução ótima para o nosso problema (antes das variáveis de folga serem introduzidas) é $x = 60$ e $y = 30$, ou seja, a produção deve ser de 60 computadores do modelo A e 30 computadores do modelo B para maximizar o lucro $(R\$\ 19800{,}00)$.

4. PROPOSTA DIDÁTICA COM O USO DO EXCEL NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO

Neste produto educacional, apresentaremos uma proposta didática interdisciplinar, com auxílio de tecnologias digitais, para a construção do conhecimento da Programação Linear de forma estruturada e organizada.

O programa *Excel* dará suporte na resolução dos exercícios através da ferramenta *Solver*, que pode ser ativado seguindo os passos descritos no Apêndice A. Vale destacar que o recurso computacional é muito conveniente para adaptar o método simplex à problemas que não estão na forma padrão.

A presente proposta pode ser aplicada aos estudantes do 3º ano do Ensino Médio, preferencialmente após o estudo de sistemas lineares e geometria analítica, sob o tema Noções de Programação Linear, contemplando a unidade temática Números e Álgebra.

4.1 Objetivos propostos

1. Compreender os fundamentos da Programação Linear, incluindo variáveis de decisão, função objetivo e restrições.
2. Relacionar fundamentos matemáticos e de outras áreas do conhecimento a problemas reais para analisar o impacto das soluções.
3. Desenvolver habilidades de modelagem para resolução de problemas e tomada de decisão.
4. Utilizar ferramentas computacionais para resolver problemas de PL.

4.2 Objetos de conhecimento e habilidade relacionada

- Tabelas e Gráficos

Habilidade: (EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

Objeto de conhecimento: Análise de tabelas, gráficos, e amostras de pesquisa estatísticas, abordando aspectos etnomatemáticos das diversas culturas da região.

- Equações Lineares e Sistemas Lineares

Habilidade: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objeto de conhecimento: Entendimento de como as equações e sistemas lineares modelam as restrições e auxiliam na solução do problema.

- Plano Cartesiano e Função polinomial de 1º grau

Habilidade: (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

Objeto de conhecimento: Representação gráfica da região de soluções viáveis de um problema e soluções no plano cartesiano.

4.3 Metodologia de ensino

Para tornar o ensino mais acessível e aplicável, esta metodologia propõe a construção do conhecimento de forma ativa, explorando problemas reais e utilizando tecnologia para que os alunos aprendam descobrindo e experimentando.

O ensino da Programação Linear pode ser contextualizado para que os alunos desenvolvam soluções aplicáveis à realidade. Na Amazônia, por exemplo, onde desafios logísticos, econômicos e ambientais são frequentes, a PL é uma excelente ferramenta para otimizar recursos e resolver problemas envolvendo transportes, produção e sustentabilidade.

A conexão do conteúdo à realidade Amazônica, atende um importante pressuposto indicado na Proposta Curricular e Pedagógica do Ensino Médio da Secretaria de Estado de Educação e Desporto do Amazonas (PCP-EM/SEDUC-AM) para o ensino da Matemática:

> Assim, o ensino nessa área deverá ser adequado aos contextos educacionais amazônicos, dando ênfase a uma educação voltada ao social e à cidadania, proporcionando ao estudante a capacidade de refletir na solução de problemas apresentados pela sociedade, desenvolvendo suas competências e habilidades de forma crítica, diante das transformações que ocorrem na atualidade (Amazonas, 2021, p. 301).

Antes dos conceitos básicos de Programação Linear, o professor deve adotar uma estratégia de ensino e aprendizagem eficaz e propício aos problemas que serão resolvidos. A Modelagem Matemática atende esse requisito e deve ser tratada como o alicerce que possibilita ao aluno "matematizar" alguma realidade e interpretar seus resultados significativos.

O PCP-EM/SEDUC-AM destaca que:

> O desenvolvimento do conhecimento matemático envolve a utilização da resolução de problemas, modelagem matemática, investigação científica e história da matemática, numa perspectiva de transformar os saberes matemáticos favorecendo a elaboração de novas hipóteses na resolução de problemas (Amazonas, 2021, p. 303).

O contexto de abertura da proposta é baseado na realidade de comunidades extrativistas da nossa região e tem como tema "O cooperativismo no manejo da castanha-do-brasil e borracha natural na região Amazônica".

Por se tratar de um método de investigação científica, as etapas da modelagem submetem professores e alunos à imersão da realidade para que sejam conhecedores das principais características da situação-problema. Com as informações obtidas neste aprofundamento, os partícipes do processo de ensino e aprendizagem serão capazes de selecionar as variáveis que tornam o modelo matemático mais próximo da realidade.

Como o cenário se torna mais perceptível quando os dados são complementados com a familiarização do problema, isto é, os parâmetros envolvidos no assunto a ser modelado ficam mais claros através da investigação, devemos realizar a etapa de interação da Modelagem Matemática, fazendo uma pesquisa sobre o assunto na busca de informações que permitem o reconhecimento do objeto de estudo.

4.3.1 Abertura: O cooperativismo no manejo da castanha-do-Brasil e borracha natural na região Amazônica

O extrativismo vegetal e animal serve como uma das estratégias de sobrevivência e atividade complementar para a maioria das famílias de agricultores tradicionais da Amazônia. No entanto, as comunidades extrativistas também enfrentam desafios externos à unidade de produção, como a deficiente infraestrutura de transporte e as dificuldades de acesso ao mercado (Mariosa *et al.*, 2024).

Segundo dados do Plano Amazônia Sustentável, faltam condições estruturais básicas para viabilizar a economia local, tais como: acesso à energia; estradas vicinais e ramais em bom estado de trafegabilidade; segurança pública; transporte fluvial em condições regulares e seguras; disponibilidade de tecnologias de comunicação; capacidade de estocagem; boas condições de conservação dos produtos, entre outros (Brasil, 2008).

Silva *et al.* (2024) afirma que produtos extrativistas demandados pelo mercado internacional, inclusive a borracha e a castanha, expõem fragilidades vinculadas a heranças coloniais e de acesso ao mercado.

Em relação a castanha-do-brasil (*Bertholletia excelsa*), Santana *et al.* (2017) afirma que a partir do declínio do ciclo da economia da borracha, no início da década de 1950, passou a representar o principal produto florestal não madeireiro da região Amazônica.

Silva *et al.* (2024) destaca que o extrativismo da castanha é essencial para povos amazônicos devido ao fato de ser uma atividade econômica que conecta diretamente o interior da floresta aos supermercados, indústrias farmacêuticas e de produtos de beleza, criando, portanto, renda, empregos e mantendo a floresta em pé.

Mesmo diante de tal constatação, até chegar ao consumidor o extrativista precisa enfrentar grandes desafios, como: o escoamento da produção, tanto do interior da floresta para a comunidade, como para a comunidade ao centro consumidor; ausência de linha de crédito; baixa organização social, ausência de boas práticas de manejo e produção e dificuldade em beneficiar a produção de forma autônoma (Silva *et al.*, 2024).

Um exemplo prático são as dificuldades vivenciadas pelas comunidades extrativistas de castanha-do-pará em Tefé, um município brasileiro no interior do estado do Amazonas. Segundo Silva *et al.* (2024), o que determina o preço nessas comunidades é a disponibilidade de produto no mercado, a força dos intermediários que possuem recursos disponíveis, logística e amplo conhecimento da produção e do mercado, como também a ausência de uma organização dos extrativistas que possa criar um ambiente próprio para uma negociação mais favorável aos agricultores. Nesse cenário, a pesquisa ainda aponta que o desconhecimento de técnicas de mensuração de custos da produção expõe a fragilidade dos extrativistas em relação a precificação de sua produção na hora da comercialização (Silva *et al.*, 2024).

Outro produto de importante base econômica nas comunidades tradicionais é o da borracha natural. Extraída da seringueira (*Hevea brasiliensis*), é encontrada naturalmente em toda a região Amazônica e tem passado por ciclos de prosperidade e decadência.

Há mais de um século, a concorrência desigual, sobretudo da borracha de áreas de cultivo na Ásia, desvalorizou a atividade de seringueiros da Amazônia. Como resultado, sofreram regimes de forte exploração de mão-de-obra e de semi-escravidão por endividamento (Carneiro, 2024).

Os obstáculos enfrentados por seringueiros incluem dificuldades de acessar o mercado e falta de capacitação e assistência técnica, equipamentos básicos e capital de giro. O Estado do Amazonas é exemplo desses gargalos, o que resultou em uma baixa produção de borracha em 2018, mas devido esforços recentes, foram mapeadas políticas públicas e ações necessárias para incentivar a produção, como ajustes logísticos e programas para fortalecer as associações de seringueiros (Carneiro 2024).

Nos últimos anos, novos arranjos entre o setor privado e associações de extrativistas vêm impulsionando uma expansão da produção de borracha nativa, agora reconhecida como um produto sustentável que pode gerar renda para populações locais e ajudar a preservar a floresta (Carneiro, 2024).

Diante desses desafios, o cooperativismo surge como proposta para garantir o desenvolvimento, a sustentabilidade e a gestão eficiente dos recursos naturais dos ecossistemas amazônicos.

Para Silva *et al.* (2023), o cooperativismo constitui um movimento com grande ênfase na dimensão econômica e, por isso, é visto como opção essencial para promoção do desenvolvimento.

Silva *et al.* (2024) entende que a cooperativa em territórios rurais amazônicos pode ser instrumento de compreensão de estratégias de desenvolvimento e também pode estabelecer a base para criar condições de emancipação a fim de superar as cegueiras que muitas vezes resultam em opressão e exclusão de povos e comunidades amazônicas.

Além de essenciais para o uso dos recursos naturais na conservação dos ecossistemas e nos enfrentamentos das mudanças climáticas, as cooperativas da região Amazônica despontam como solução para a superação do atraso, produzindo condições para seus filiados, oportunidades de trabalho, renda e qualidade de vida.

Apesar disso, Mariosa *et al.* (2024) alerta para a concorrência dos atravessadores, que muitas vezes sendo membros da comunidade ou comerciantes bem estabelecidos gozam de elevado prestígio local ou de relações de parentesco e compadrio.

Ainda assim, o cooperativismo na região Amazônica é visto como um instrumento capaz de viabilizar atividades econômicas dinâmicas e inovadoras, buscando valorização da produção e facilitação na comercialização e transporte. Seu potencial de organização coletiva desenvolve as comunidades rurais e cria condições para superar situação de dominação econômica e social, imposta por atravessadores e comerciantes, presente há décadas no interior da floresta.

4.3.2 Encaminhamento do objeto a ser ensinado

Para que os alunos entendam melhor a realidade do cooperativismo no manejo de produtos florestais, vamos explorar o vídeo “Cooperacre – Produção Florestal[6]”. Essa mesma estratégia pode ser adotada nos exercícios propostos que serão apresentados mais adiante.

O vídeo apresenta uma cooperativa localizada na região Amazônica que atua no manejo sustentável de produtos florestais como castanha-do-brasil, açaí, borracha e madeira certificada. Seu modelo valoriza o trabalho dos pequenos produtores da floresta, promovendo a preservação ambiental, geração de renda e desenvolvimento regional.

Trazendo como destaque o cooperativismo, o vídeo evidencia a integração de produtores familiares em um sistema coletivo de produção e comercialização e a distribuição justa de lucros, fortalecendo a economia local. Além disso, o foco em práticas sustentáveis garante uma renda contínua sem desmatamento.

Referente ao manejo florestal sustentável, a preservação e renovação dos recursos naturais são observadas através da exploração planejada da floresta, respeitando seu ciclo natural e incentivando o uso racional dos recursos. Atividades como coleta de castanha e extração de madeira são feitas com planejamento técnico e certificação ambiental.

[6] Vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=TXyIz8dC3Tw. Acesso em 10 Jul. 2025.

O trecho 1:38 – 2:12 do vídeo, pode ser utilizado para associar a Matemática envolvida no custo amazônico[7] e na análise quantitativa da produção, armazenamento e distribuição dos produtos florestais.

Figura 17. Produção, armazenamento e distribuição dos produtos florestais

Fonte: Vídeo ”Cooperacre – Produção Florestal”

Uma integração interdisciplinar também pode ser explorada com os seguintes componentes curriculares:

1. Biologia: No trecho 0:18 – 0:44, temas como boa saúde, biodiversidade e ecossistemas da Amazônia podem ser explorados.

Figura 18. Boa saúde, biodiversidade e ecossistemas da Amazônia

Fonte: Vídeo ”Cooperacre – Produção Florestal”

[7] O custo amazônico refere-se aos custos adicionais e desafios logísticos enfrentados por empresas e governos ao operar na região amazônica, devido à sua geografia complexa e infraestrutura limitada. Esses custos incluem despesas maiores com transporte, comunicação, energia e outras necessidades básicas.

2. Geografia: No trecho 2:13 – 2:27, temas como o uso do território, recursos naturais e impactos ambientais podem ser explorados.

Figura 19. Uso do território, recursos naturais e impactos ambientais

Fonte: Vídeo "Cooperacre – Produção Florestal"

3. Sociologia: No trecho 2:51 – 3:06, temas como organização cooperativa e economia solidária podem ser explorados.

Figura 20. Organização cooperativa e economia solidária

Fonte: Vídeo "Cooperacre – Produção Florestal"

Observe a seguinte situação envolvendo o cooperativismo no manejo da castanha-do-brasil e borracha natural na região Amazônica como um exemplo de aplicação da Programação Linear:

Uma cooperativa na Amazônia realiza a extração de dois produtos florestais não madeireiros: castanha-do-brasil e borracha natural. Esses produtos são transportados por barcos até uma central de distribuição. Devido à necessidade de preservar o meio ambiente e atender à demanda local, a cooperativa deve planejar suas atividades considerando as seguintes informações:

1. Cada tonelada de castanha gera um lucro de R$ 1.500,00 e cada tonelada de borracha gera um lucro de R$ 2.000,00.
2. O barco disponível possui capacidade máxima de transporte de 20 toneladas por viagem.
3. A cooperativa tem uma demanda mínima a ser atendida de 8 toneladas de castanha e 6 toneladas de borracha.
4. Exige-se que pelo menos 45% da carga transportada em cada viagem seja composta de castanha-do-pará, como incentivo à diversificação sustentável.

Quantas toneladas de cada produto devem ser transportadas por viagem para maximizar o lucro, respeitando as restrições impostas?

Esse contexto pode ser trabalhado interdisciplinarmente com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, integrada por Filosofia, Geografia, História e Sociologia, favorecendo a habilidade (EM13CHS302):

> Analisar e avaliar criticamente os impactos econômicos e socioambientais de cadeias produtivas ligadas à exploração de recursos naturais e às atividades agropecuárias em diferentes ambientes e escalas de análise, considerando o modo de vida das populações locais – entre elas as indígenas, quilombolas e demais comunidades tradicionais –, suas práticas agroextrativistas e o compromisso com a sustentabilidade (Brasil, 2018, p. 575).

Aproveita-se nesse momento de troca de saberes entre as áreas do conhecimento para um breve relato histórico da Programação Linear, salientando as necessidades que existiam e foram supridas com a aplicação dessa ferramenta. Destaca-se também as vantagens da PL e sua aplicação em diversas áreas como transportes, investimentos financeiros, alocação de recursos, entre outros. Essa relação é importante pois enfatiza a relevância na formação acadêmica e profissional dos discentes.

Nesse momento, o professor pode promover um debate para identificar os desafios e prioridades na resolução do problema, discutir possíveis soluções sem, necessariamente, usar formalismos matemáticos. Os possíveis erros nessa fase podem ser usados como aliados no processo de aprendizagem, beneficiando o aluno na persistência, reflexão, questionamento e exploração de novas estratégias. Tais debates são fundamentais na interlocução professor/aluno para incentivar o pensamento crítico nos estudantes.

As soluções propostas para o problema nessa etapa inicial podem ser registradas para efeito de comparação com a resposta obtida através dos métodos de resolução que a Programação Linear proporciona. Assim, os estudantes constatam como pequenas mudanças afetam os resultados.

Os conceitos básicos devem ser expostos de forma clara e concisa para que o aluno desenvolva as competências cognitivas que contribuam para sua autonomia, favorecendo a participação do jovem como um ator principal em ações que não dizem respeito somente à sua vida individual, familiar e/ou afetiva, mas a problemas ligados ao bem comum, na sua escola, na sua comunidade ou na sociedade em que ele está inserido (Amazonas, 2021).

Aplicando as técnicas de Programação Linear, temos os seguintes passos para a resolução do problema:

Passo 1. Determinamos a função objetivo, ou seja, a função que queremos maximizar.

Queremos maximizar o lucro, dado por:

$$L = 1500x + 2000y$$

Em que x e y referem-se, respectivamente, a quantidade da castanha e borracha, em toneladas.

Passo 2. Transformamos as restrições impostas no problema em um sistema de inequações lineares.

As condições impostas pelo problema são:

$x + y \leq 20$	(Capacidade do barco)
$x \geq 8$	(Demanda da castanha)
$y \geq 6$	(Demanda da borracha)
$x \geq \frac{45}{100}(x + y) \Leftrightarrow 11x - 9y \geq 0$	(Incentivo a diversificação sustentável)

Nesta etapa de matematização do problema, hipóteses são levantadas e relações são descritas em termos matemáticos visando a solução. Examina-se nos passos 1 e 2 a capacidade do estudante de converter o registro verbal para o registro algébrico. Para efetuar essa conversão é necessário selecionar os dados pertinentes para a resolução e organizá-los de tal forma que a operação matemática se torne evidente.

Nesta fase, a principal função dos registros de representação está na verificação da capacidade do aluno em transitar entre esses registros, isto é, na compreensão do enunciado através da mobilização simultânea desses registros. Nota-se ainda o tratamento feito no registro algébrico da restrição “incentivo a diversificação sustentável” para uma inequação equivalente conveniente.

Cabe ao professor orientar os alunos na formulação do problema real em termos de variáveis, restrições e função objetivo, favorecer a interpretação do modelo matemático e intervir nos casos em que há dificuldades nessa manipulação. Fazer diferentes testes para validar o modelo com base nos dados fornecidos é uma boa opção para fomentar a participação dos estudantes.

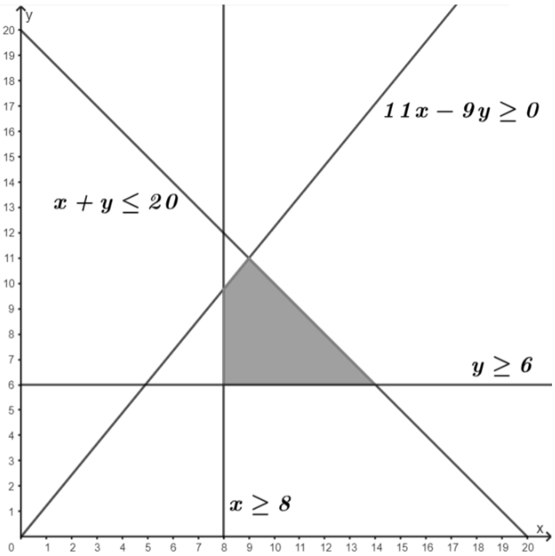
Passo 3. Escolhemos o método de resolução.

Em um primeiro momento, visando trabalhar os fundamentos matemáticos presentes na Programação Linear, utilizaremos o método gráfico. Em seguida, utilizaremos a resolução computacional através da ferramenta Solver do Excel para maximizar o lucro mediante as restrições impostas.

No método gráfico, destacamos a região das soluções viáveis do problema na figura 21 (intersecção de todas as restrições). Aqui temos a possibilidade de trabalhar construções geométricas utilizando régua e papel milimetrado.

Para um ensino mais dinâmico e interativo, o Geogebra deve ser utilizado como um meio de mediação entre conceitos abstratos e representações visuais, atendendo à demanda da BNCC por uso de tecnologias digitais no ensino da Matemática. Dessa forma, os alunos conseguem testar hipóteses e comparar resultados como, por exemplo, manipular a interseção das restrições e identificar a região das soluções viáveis com clareza, podendo observar em tempo real como essa área pode se alterar ao realizar pequenas mudanças nas inequações (restrições).

Figura 21. Região das soluções viáveis do problema de abertura



Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Escrevendo a função objetivo como $y = -\frac{3}{4}x + \frac{L}{2000}$ e fazendo $L = 40000$, temos:

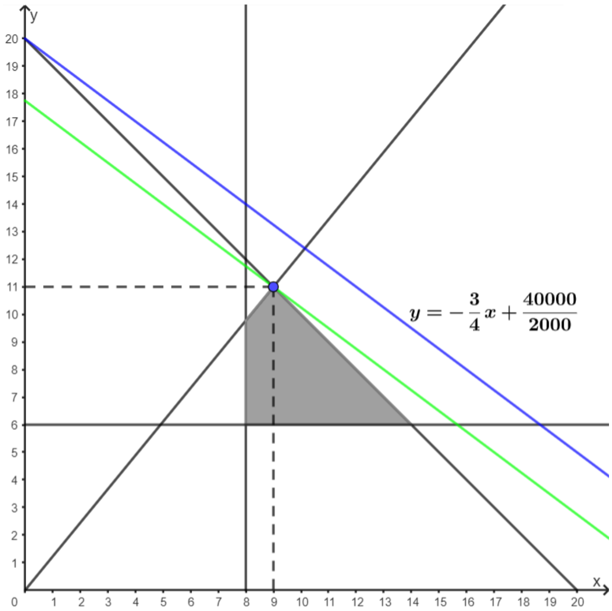
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{40000}{2000}$$

Agora temos o registro gráfico de todas as restrições do problema. Aqui temos uma maior possibilidade de mobilizar conhecimentos dos alunos visando à aquisição do conceito pois trata-se de uma conversão não-congruente, ou seja, a região das soluções viáveis não indica um significado direto (natural) do registro algébrico.

Para que o estudante perceba o que representa a região destacada, os alunos devem ser desafiados a encontrar as coordenadas de pontos pertencentes a essa região, testando os pares ordenados e comparando os lucros obtidos. A próxima etapa consiste numa estratégia para obter o lucro máximo, pois seria cansativo e inviável fazer testes para todos os pontos dessa região.

Como a representação gráfica das soluções dessa função é uma reta com coeficiente angular $m = -\frac{3}{4}$, observando a figura 22, ajusta-se uma régua nessa reta (azul) e deslocando-a com inclinação fixa o mais distante da origem e com pelo menos um ponto dentro da região de soluções viáveis, podemos traçar uma reta paralela (verde) a anterior.

Figura 22. Solução ótima do problema de abertura



Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Logo, para maximizar o lucro respeitando as restrições impostas, a cooperativa deve transportar 9 toneladas de castanha e 11 toneladas de borracha, obtendo um lucro de $L = 1500 \cdot 9 + 2000 \cdot 11 = 35500$.

Note que a solução é dada por construção geométrica. No entanto, o professor também deve explorar a resposta por meios algébricos através dos sistemas lineares, visto que a solução ótima é o ponto de intersecção entre duas retas. A compreensão dos dois tipos de soluções é essencial pois a conversão é feita nos dois sentidos dos registros, assegurando a aprendizagem matemática e em concordância com a competência específica 4 de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, prevista na BNCC:

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (Brasil, 2018, p. 531).

Na resolução computacional, a ferramenta Solver presente no Excel, executará o método simplex para encontrar a solução ótima, satisfazendo a restrições do problema. Na figura 23 temos o [modelo da planilha] que vamos preencher com as informações do nosso problema.

Figura 23. Modelo de planilha para inserção de dados

	A	B	C	D	E
1	**Função Objetivo**	**Coeficiente das variáveis:**			
2		**x**	**y**		
3					
4					
5	**Variáveis:**				
6	**Lucro:**				
7					
8	**Restrições**	**Coeficiente das variáveis**		**Resultado**	**Lado direito (Constante)**
9		**x**	**y**		
10	**1**				
11	**2**				
12	**3**				
13	**4**				

Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Para obter o lucro ótimo, o Excel fornecerá nas células:

- $B5$ – O valor da variável x (Quantidade de castanha)
- $C5$ – O valor da variável y (Quantidade de borracha)
- $B6$ – O lucro otimizado

Para isso, vamos inserir os seguintes dados do problema de abertura:

- Nas células $B3$ e $C3$, preenchemos com os coeficientes de x e y, respectivamente, da função objetivo.
- Nas células $B10$ e $C10$, preenchemos com os coeficientes de x e y, respectivamente, da inequação da restrição “capacidade do barco”.
- Nas células $B11$ e $C11$, preenchemos com os coeficientes de x e y, respectivamente, da inequação da restrição “demanda da castanha”.
- Nas células $B12$ e $C12$, preenchemos com os coeficientes de x e y, respectivamente, da inequação da restrição “demanda da borracha”.
- Nas células $B13$ e $C13$, preenchemos com os coeficientes de x e y, respectivamente, da inequação da restrição “incentivo a diversificação sustentável”.
- Nas células $E10$, $E11$, $E12$ e $E13$, preenchemos com as constantes das inequações das restrições, respectivamente, “capacidade do barco”, “demanda da castanha”, “demanda da borracha” e “incentivo a diversificação sustentável”.

Também vamos inserir as seguintes fórmulas:

- $= B3 * B5 + C3 * C5$ na célula $B6$ para informar o lucro otimizado.
- $= B10 * B5 + C10 * C5$ na célula $D10$ para informar o valor obtido na restrição "capacidade do barco".
- $= B11 * B5 + C11 * C5$ na célula $D11$ para informar o valor obtido na restrição "demanda da castanha".
- $= B12 * B5 + C12 * C5$ na célula $D12$ para informar o valor obtido na restrição "demanda da borracha".
- $= B13 * B5 + C13 * C5$ na célula $D13$ para informar o valor obtido na restrição "incentivo a diversificação sustentável".

Com dos dados do problema e as fórmulas inseridas, devemos ter a planilha da figura 24.

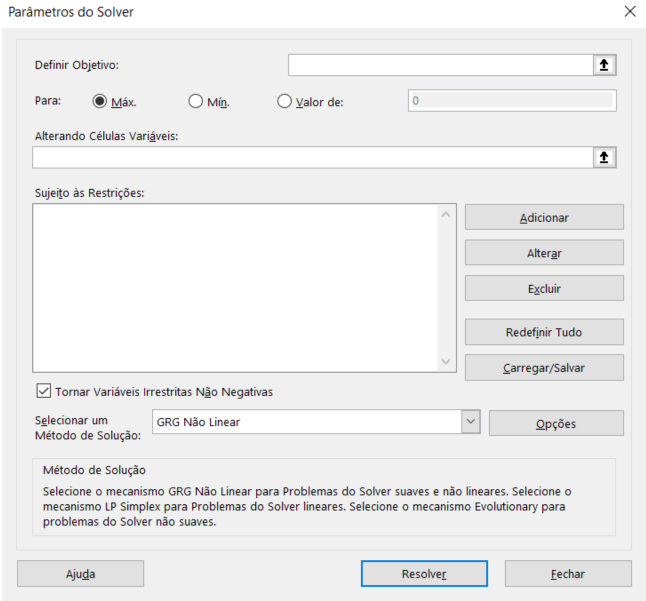
Figura 24. Planilha após inserir fórmulas e dados do problema de abertura

	A	B	C	D	E
1		**Coeficiente das variáveis:**			
2	**Função Objetivo**	**x**	**y**		
3		1500	2000		
4					
5	**Variáveis:**				
6	**Lucro:**	0			
7					
8	**Restrições**	**Coeficiente das variáveis**		**Resultado**	**Lado direito**
9		**x**	**y**		**(Constante)**
10	**1**	1	1	0	20
11	**2**	1	0	0	8
12	**3**	0	1	0	6
13	**4**	11	-9	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Ainda não temos o lucro ótimo pois desconhecemos os valores x (célula $B5$) e y (célula $C5$) que maximizam a função objetivo (célula $B6$). Para o Excel determinar esses valores, vamos executar a ferramenta Solver que se encontra no menu "Dados". Com isso, a janela "Parâmetros do Solver" aparecerá (Figura 25).

Figura 25. Parâmetros do Solver



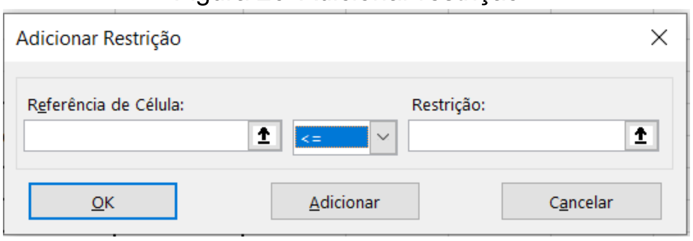
Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Vamos definir a célula que nos informará o lucro maximizado. No campo “Definir Objetivo”, selecionamos a célula $B6$ na planilha. Em seguida, a opção “Máx.” deve ser escolhida por se tratar de um problema de maximização.

Vamos escolher as células que nos retornarão os valores otimizados das variáveis x e y. No campo “Alterando Células Variáveis”, selecionamos na planilha o intervalo das células de $B5$ à $C5$.

Chegou o momento de comunicar ao Solver as restrições. Na parte central direita da janela, clicamos em “Adicionar”. A janela “Adicionar Restrição” aparecerá (Figura 26).

Figura 26. Adicionar restrição



Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Para adicionarmos a restrição “capacidade do barco”, no campo “Referência de Célula” selecionamos a célula $D10$ e no campo “Restrição” selecionamos a célula $E10$. Na parte central da janela, escolhemos o tipo de inequação. Para essa restrição, devemos escolher o “menor ou igual”. Em seguida, clicamos em “Adicionar” e outra janela semelhante abrirá para inserirmos a segunda restrição.

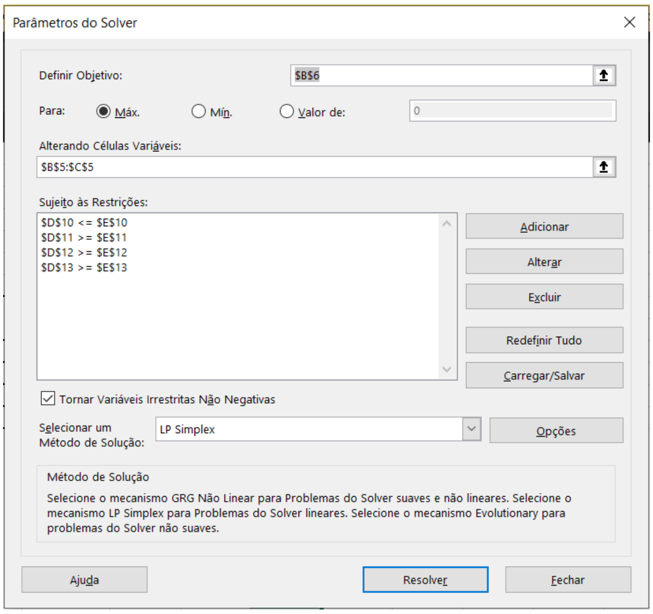
Para a restrição “demanda da castanha”, devemos colocar $D11$ no campo “Referência de Célula” e a célula $E11$ no campo “Restrição”. Note que essa restrição é do tipo “maior ou igual”, logo devemos selecionar essa opção e em seguida clicar em “Adicionar”.

Para a restrição “demanda da borracha”, devemos colocar $D12$ no campo “Referência de Célula” e a célula $E12$ no campo “Restrição”. Escolhemos a opção “maior ou igual” e em seguida clicamos em “Adicionar”.

Para a restrição “incentivo a diversificação sustentável”, devemos colocar $D13$ no campo “Referência de Célula” e a célula $E13$ no campo “Restrição”. Escolhemos a opção “maior ou igual” e em seguida clicamos em “OK”, finalizando as entradas das restrições.

Retornando à janela “Parâmetros do Solver” deixamos ativada a opção “Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas” para as variáveis de não negatividade e escolhemos “LP Simplex” no campo “Selecionar um Método de Solução”. Após esses passos, devemos ter nessa janela os dados preenchidos conforme figura 27.

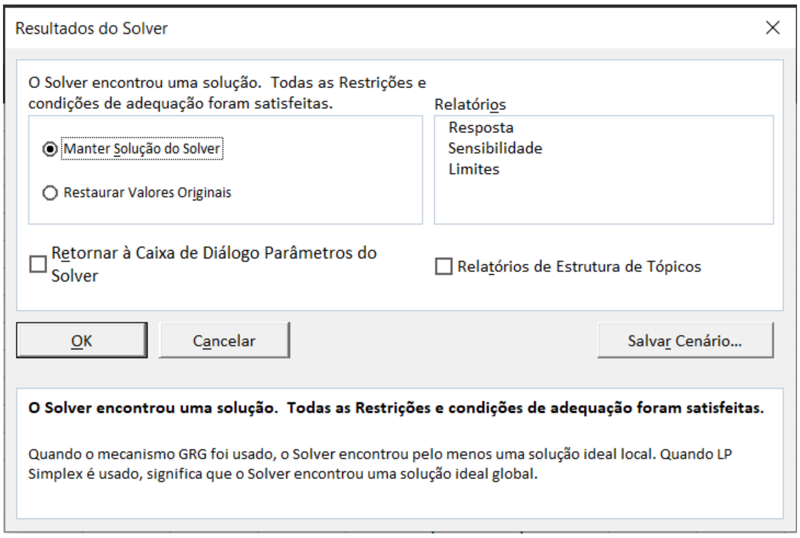
Figura 27. Preenchimento da janela Parâmetros do Solver



Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Ao clicar em “Resolver”, a janela “Resultados do Solver” abrirá (Figura 28), informando que a ferramenta encontrou uma solução. Para um relatório detalhado da solução, pode-se selecionar as opções “Resposta”, “Sensibilidade” e “Limites”. Ao clicar em “OK”, as células $B5$, $C5$ informarão a quantidade, em toneladas, da castanha e borracha, respectivamente, que otimizam e o lucro, informado na célula $B6$ (figura 29).

Figura 28. Resultados do Solver



Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

Figura 29. Planilha com resultado otimizado do problema de abertura

	A	B	C	D	E
1		**Coeficiente das variáveis:**			
2	**Função Objetivo**	**x**	**y**		
3		1500	2000		
4					
5	**Variáveis:**	9	11		
6	**Lucro:**	35500			
7					
8		**Coeficiente das variáveis**			**Lado direito**
9	**Restrições**	**x**	**y**	**Resultado**	**(Constante)**
10	**1**	1	1	20	20
11	**2**	1	0	9	8
12	**3**	0	1	11	6
13	**4**	11	-9	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor; 2025

4.3.3 Exercícios propostos

Os exercícios propostos a seguir visam trabalhar a Programação Linear no Ensino Médio de forma interdisciplinar e contextualizada para analisar os dados e tomar decisões ótimas.

Com o objetivo de aplicar a Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval para cada questão, destacamos a seguir possíveis intervenções pedagógicas para as seguintes conversões:

a) Verbal → Algébrico (Converter o enunciado em restrições e função objetivo)

Possível dificuldade: Confusão no sinal de inequação ($\geq$ ou $\leq$) ou troca dos coeficientes.

Intervenção pedagógica: Retomar o contexto verbal, explicando o que a restrição significa no problema real e mostrar o que acontece se inverter o sinal.

b) Tabular → Algébrico (Extrair coeficientes da tabela e montar inequações)

Possível dificuldade: leitura incorreta de informações tabeladas.

Intervenção pedagógica: Fornecer a tabela sem as informações e auxiliar no preenchimento ditando os dados e reforçando sua localização na tabela através do cruzamento linha/coluna.

c) Algébrico → Gráfico (Traçar as soluções das inequações que representam as restrições no plano cartesiano e destacar a região viável)

Possível dificuldade: confusão sobre qual lado da reta satisfaz a inequação.

Intervenção pedagógica: Utilizar recursos visuais (cores) para destacar a região de soluções, associando expressões como “no mínimo” ou “não ultrapasse” com a ideia de inequação. Testes de pontos no plano cartesiano também podem ser aplicados para verificar se o ponto pertence ou não a região de soluções.

d) Gráfico → Verbal (Encontrar pontos de interseção candidatos a solução ótima e traduzir o resultado para fazer sentido ao contexto do problema)

Possível dificuldade: Não perceber que os pontos relevantes para a otimização são os vértices da região de soluções viáveis.

Intervenção pedagógica: Demonstrar geometricamente (movimentar a reta da função objetivo) que a solução ótima está em um vértice, provando com pequenos experimentos (avaliar custo em pontos distintos e comparar com custos nos vértices).

QUESTÃO 1 (Essa questão pode ser explorada interdisciplinarmente com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias – Biologia. Unidade temática: Terra e Universo. Objeto de conhecimento: Saúde e Nutrição. Habilidade relacionada: EM13CNT310)

Dois produtos, P e Q, contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas no quadro ao lado. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o mínimo custo?

	P	**Q**	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

<u>Solução</u>

Função objetivo: Minimizar a função que representa o custo:

$$C = 3x + 2y$$

Restrições:

$3x + y \geq 12$ (Quantidade mínima da vitamina A)

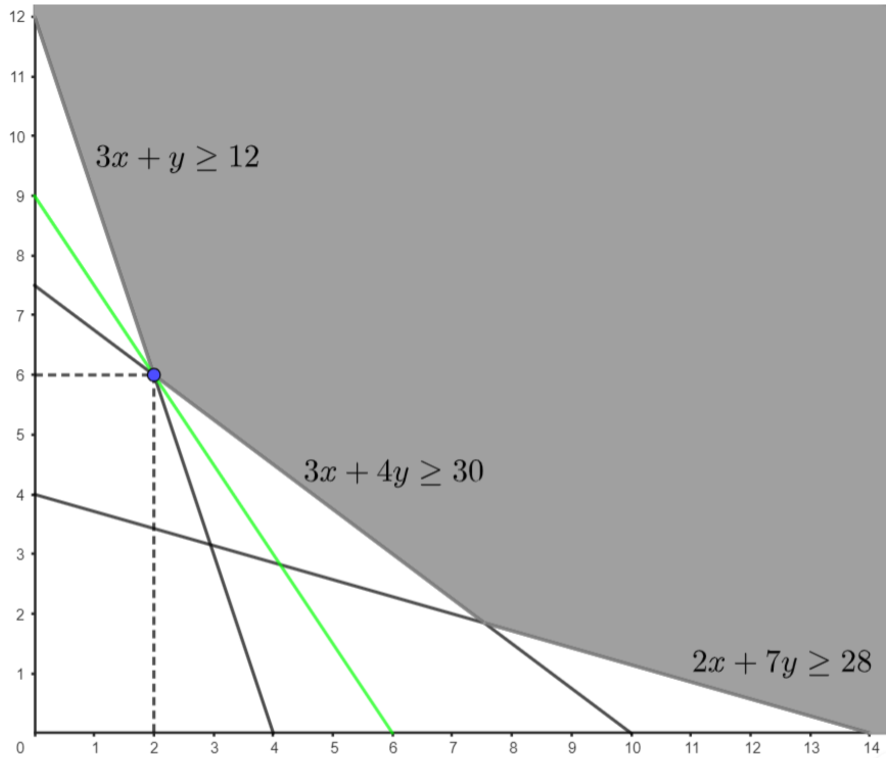
$3x + 4y \geq 30$ (Quantidade mínima da vitamina B)

$2x + 7y \geq 28$ (Quantidade mínima da vitamina C)

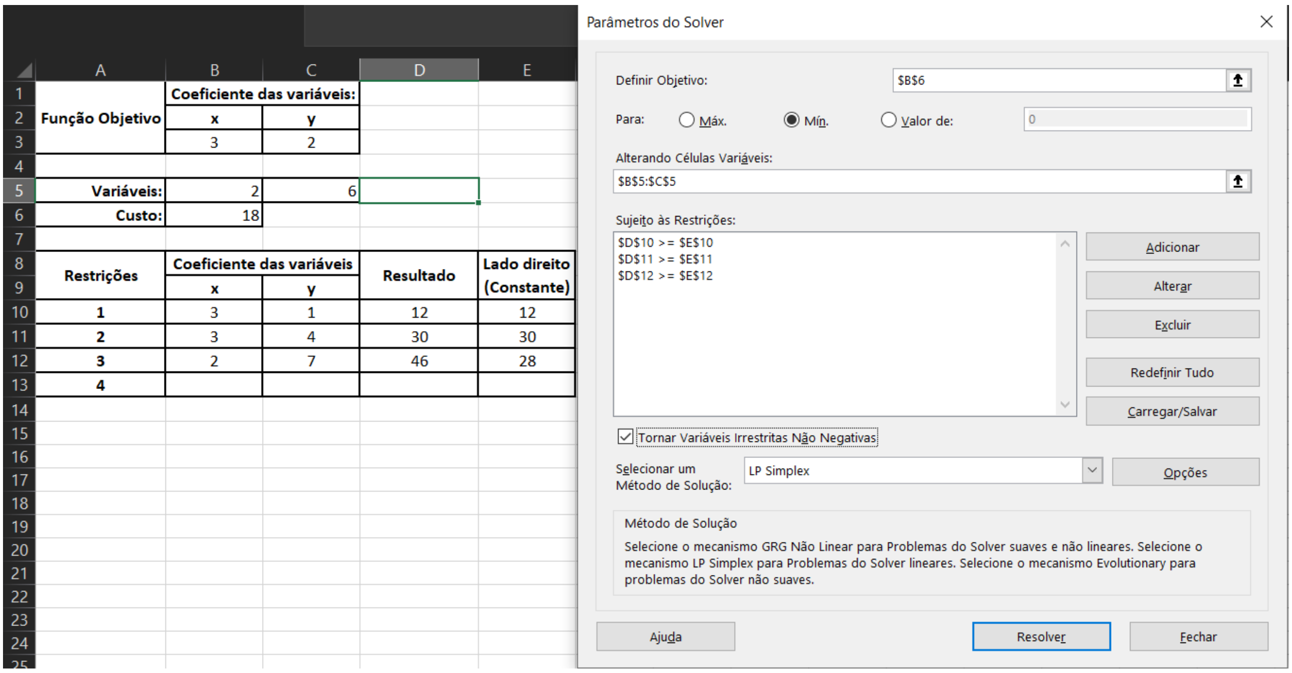
$x \geq 0$ e $y \geq 0$ (Não negatividade)

Resposta: 2 produtos P e 6 produtos Q. Custo de $R\$ \ 18{,}00$.

- Solução pelo Método Gráfico



- Solução pelo Solver



	A	B	C	D	E
1		Coeficiente das variáveis:			
2	Função Objetivo	x	y		
3		3	2		
4					
5	Variáveis:	2	6		
6	Custo:	18			
7					
8	Restrições	Coeficiente das variáveis		Resultado	Lado direito
9		x	y		(Constante)
10	1	3	1	12	12
11	2	3	4	30	30
12	3	2	7	46	28
13	4				

QUESTÃO 2 (Essa questão pode ser explorada interdisciplinarmente com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas – Geografia e Sociologia. Unidade temática: Natureza, Cultura e Sustentabilidade. Objeto de conhecimento: Política e gestão dos recursos hídricos. Habilidade relacionada: EM13CHS302)

Uma cooperativa de agricultores familiares em uma região semiárida do Brasil precisa planejar a produção de dois tipos de alimentos: milho e feijão, que são culturas adaptadas à região.

O milho gera R$ 250,00 de lucro por hectare, enquanto que o feijão gera R$ 300,00 de lucro por hectare. O objetivo da cooperativa é maximizar a renda com a venda desses produtos, respeitando as limitações dos recursos naturais, promovendo a sustentabilidade econômica e social da comunidade.

Sabendo que a cooperativa tem disponíveis 100 hectares de terra, 240 mil litros de água (recurso escasso na região), sendo necessários 2 mil litros por hectare para a plantação de milho e 3 mil litros por hectare na plantação de feijão e que deve ser atendida a demanda mínima do mercado de 30 hectares de feijão, qual deve ser a quantidade, em hectare, da produção dessas culturas para maximizar a renda?

<u>Solução</u>

Função objetivo: Maximizar a função que representa a renda:

$$R = 250x + 300y$$

Restrições:

$x + y \leq 100$ (Terra disponível)

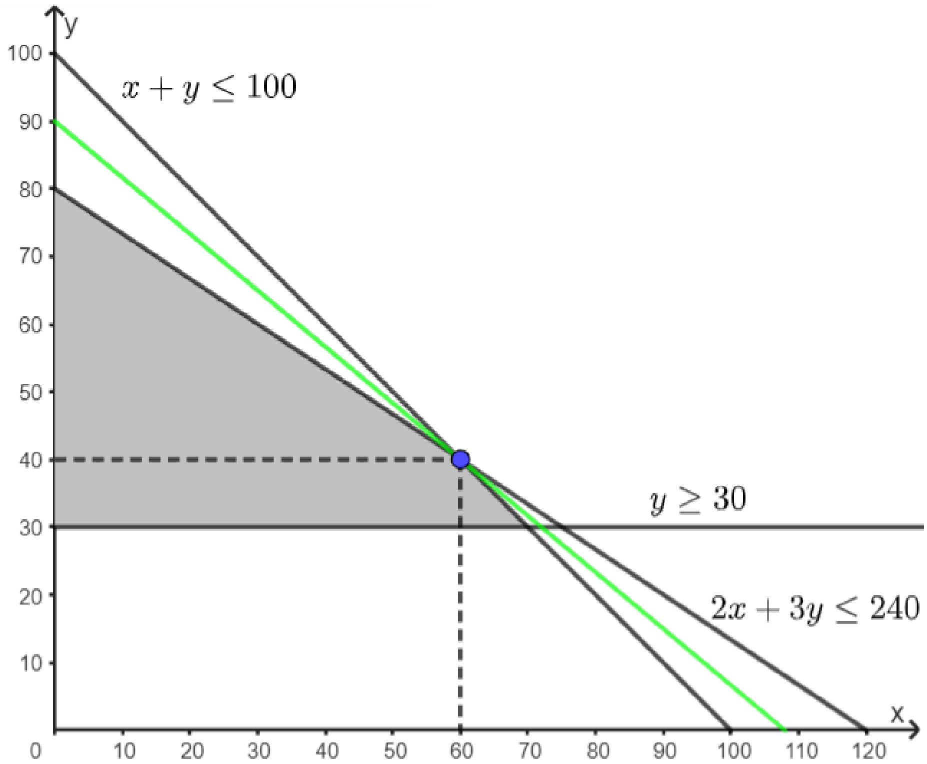
$2x + 3y \leq 240$ (Água disponível)

$y \geq 30$ (Quantidade mínima de feijão)

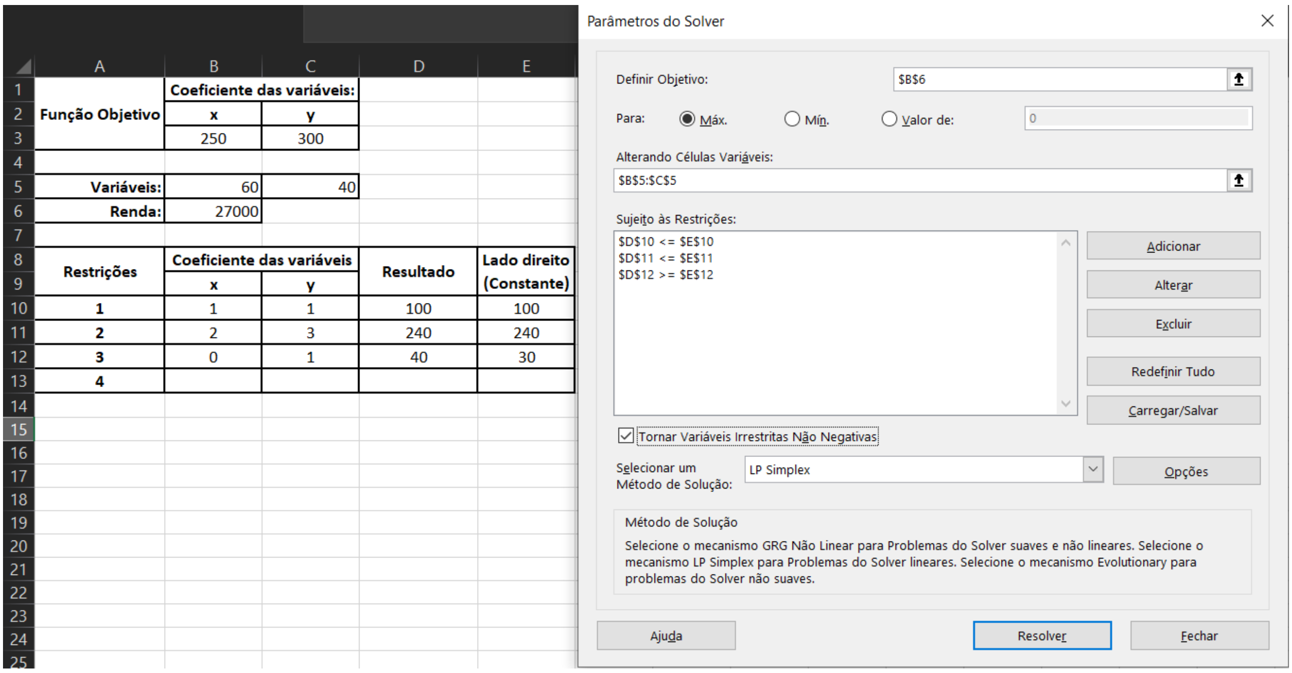
$x \geq 0$ e $y \geq 0$ (Não negatividade)

Resposta: 60 hectares de milho e 40 hectares de feijão. Renda de $R\$\ 27000{,}00$.

- Solução pelo Método Gráfico



- Solução pelo Solver



QUESTÃO 3 (Essa questão pode ser explorada com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias – Física. Unidade temática: Matéria e Energia. Objeto de conhecimento: Energia e suas modalidades. Habilidade relacionada: EM13CNT101)

Um grupo de alunos está desenvolvendo um projeto de carrinhos movidos por energia elástica em uma feira de ciências. Eles querem montar dois tipos de carrinhos: um mais leve e veloz (Tipo A), e outro mais robusto e forte (Tipo B). Cada carrinho exige um certo número de molas e rodas, e os alunos têm 32 rodas e 12 molas disponíveis.

Sabe-se que cada carrinho do Tipo A, que usa 1 mola e 3 rodas, atinge uma energia cinética de 20 J e que cada carrinho do Tipo B, que usa 2 molas e 4 rodas, atinge uma energia cinética de 30 J. Além disso, por orientação do professor responsável, os alunos devem construir, pelo menos, 5 carrinhos do Tipo A.

Aplicando os conceitos de energia da Física e de otimização da Matemática, qual a quantidade de cada tipo de carrinho deve ser desenvolvida para maximizar a energia cinética total dos carrinhos?

<u>Solução</u>:

Função objetivo: Maximizar a função que representa a energia cinética total:

$$E = 20x + 30y$$

Restrições:

$x + 2y \leq 12$ (Molas disponíveis)

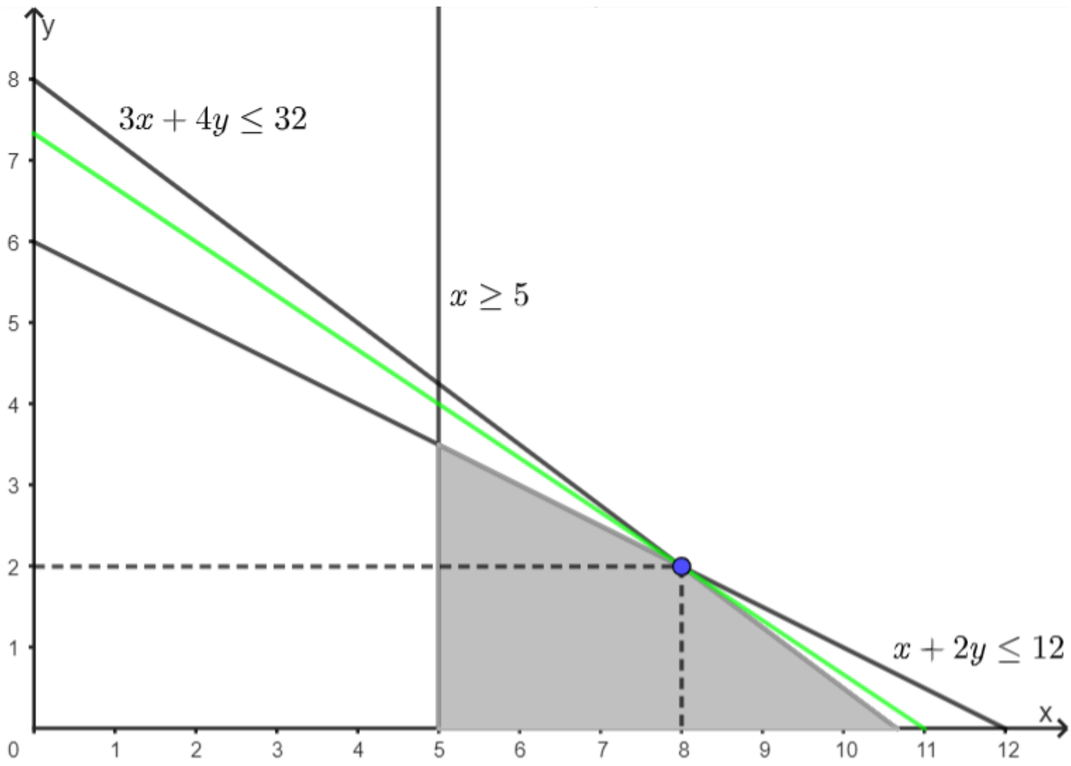
$3x + 4y \leq 32$ (Rodas disponíveis)

$x \geq 5$ (Quantidade mínima de carrinhos do Tipo A)

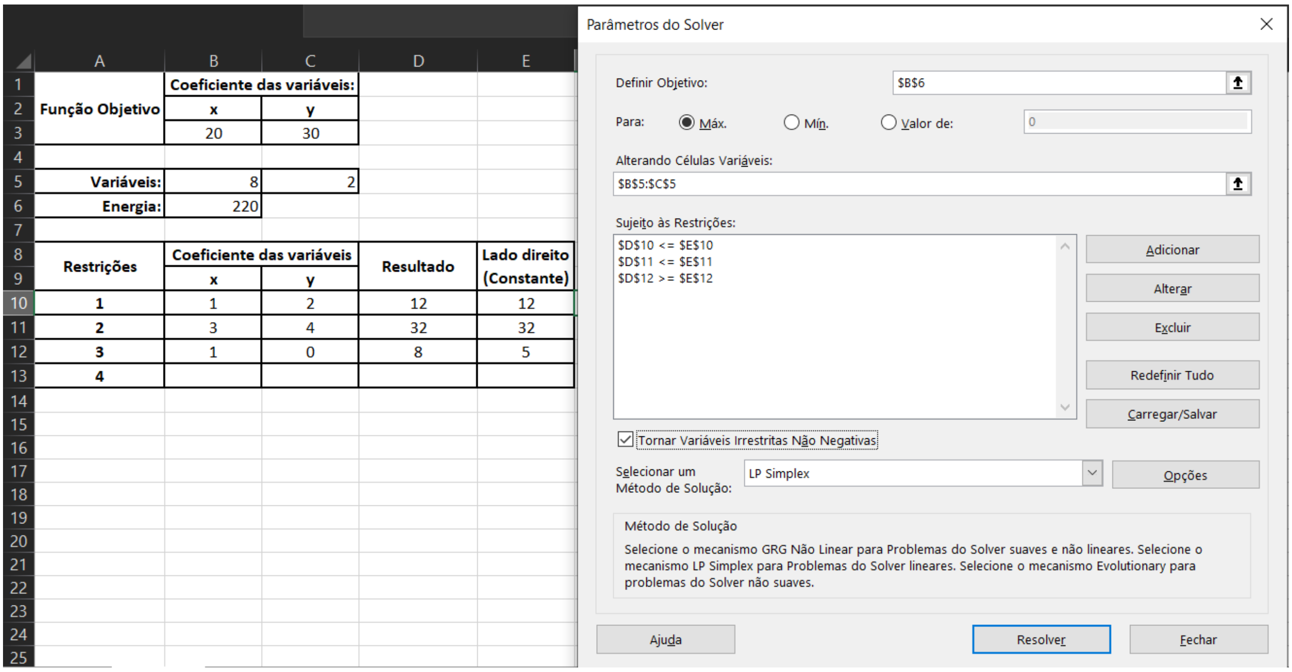
$x \geq 0$ e $y \geq 0$ (Não negatividade)

Resposta: 8 carrinhos do Tipo A e 2 carrinhos do Tipo B. Energia de 220 J.

- Solução pelo Método Gráfico



- Solução pelo Solver



	A	B	C	D	E
1	Função Objetivo	Coeficiente das variáveis:			
2		x	y		
3		20	30		
4					
5	Variáveis:	8	2		
6	Energia:	220			
7					
8	Restrições	Coeficiente das variáveis		Resultado	Lado direito
9		x	y		(Constante)
10	1	1	2	12	12
11	2	3	4	32	32
12	3	1	0	8	5
13	4				

QUESTÃO 4 (Essa questão pode ser explorada interdisciplinarmente com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas – História. Unidade temática: Economia e trabalho. Objeto de conhecimento: As transformações sócio econômicas nos pós 1ª e 2ª Guerra Mundial. Habilidade relacionada: EM13CHS402)

Durante a Segunda Guerra Mundial, o racionamento de alimentos e recursos levou muitos governos a adotarem planos de distribuição mínima de calorias e nutrientes para a população. Suponha que um grupo de estudantes está recriando, para fins educativos, um plano de racionamento alimentar baseado nos padrões da época. Eles querem encontrar a combinação mais barata de dois alimentos típicos da época (batata e feijão – informações de valores e nutrientes na tabela abaixo) para atender às necessidades mínimas de calorias, proteínas e carboidratos por pessoa, por dia.

Alimento (Porção)	**Custo (R$)**	**Calorias (kcal)**	**Proteínas (g)**	**Carboidratos (g)**
Batata	2	80	2	20
Feijão	4	120	5	15

A dieta mínima exige:

- Pelo menos 1560 calorias por dia.
- Pelo menos 49 gramas de proteína por dia.
- Pelo menos 240 gramas de carboidratos por dia.

Determine a quantidade de porções de batata e feijão que minimiza o custo, atendendo a dieta mínima.

<u>Solução</u>:

Função objetivo: Minimizar a função que representa o custo:

$$C = 2x + 4y$$

Restrições:

$$80x + 120y \geq 1560 \Leftrightarrow 2x + 3y \geq 39 \text{ (Quantidade mínima de calorias)}$$

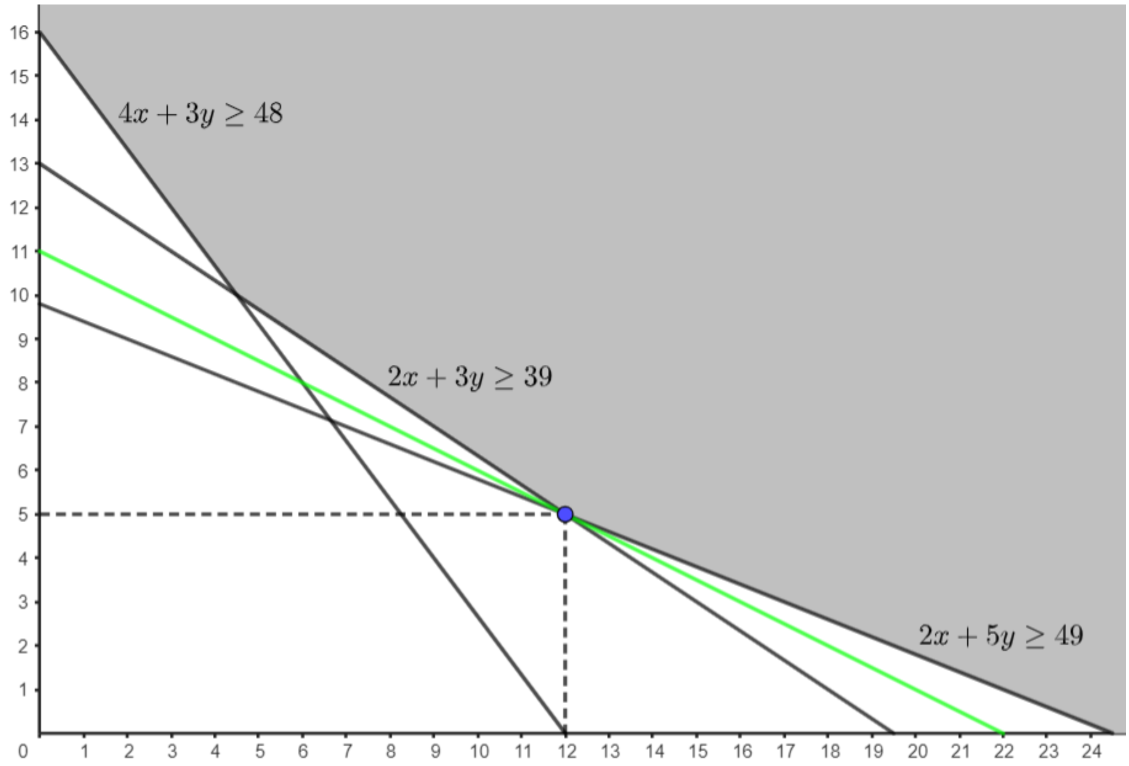
$$2x + 5y \geq 49 \text{ (Quantidade mínima de proteínas)}$$

$$20x + 15y \geq 240 \Leftrightarrow 4x + 3y \geq 48 \text{ (Quantidade mínima de carboidratos)}$$

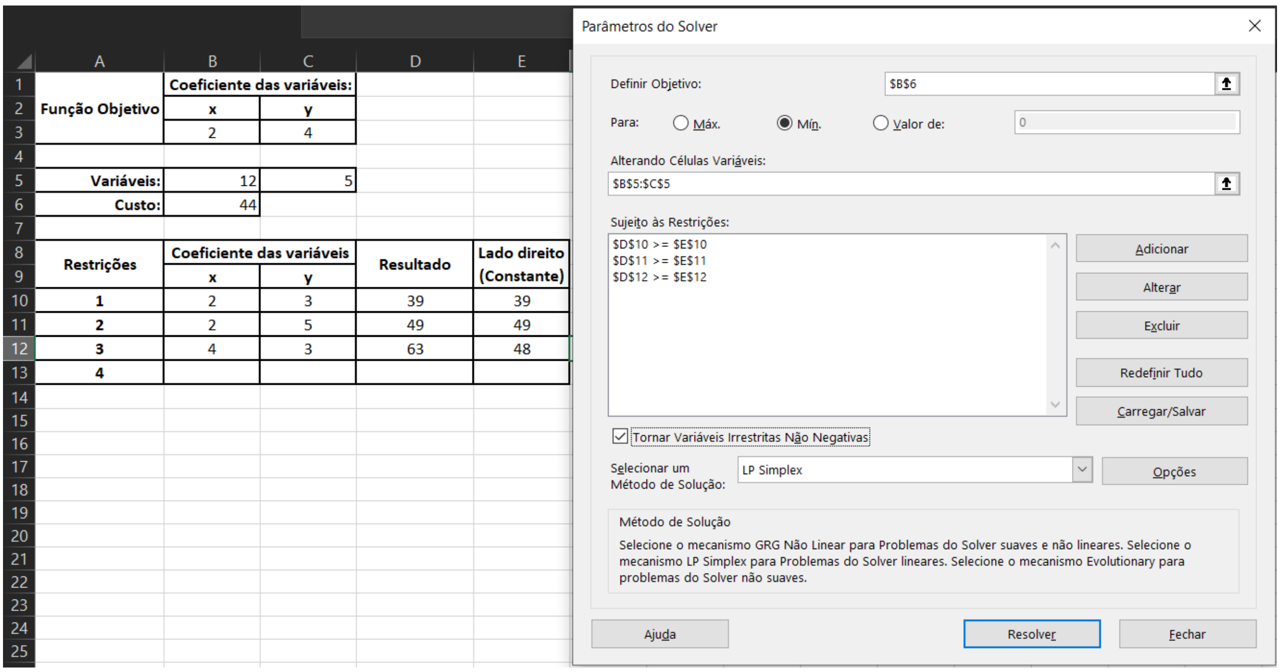
$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \text{ (Não negatividade)}$$

Resposta: 12 porções de batata e 5 de feijão. Custo de R$ 44,00.

- Solução pelo Método Gráfico



- Solução pelo Solver



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo utilizar a Programação Linear como instrumento interdisciplinar de aprendizagem no Ensino Médio, com base em pressupostos teóricos da Modelagem Matemática, da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e das orientações propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A pesquisa entende que a inserção da Programação Linear em uma proposta didática interdisciplinar contribui significativamente para tornar o ensino da Matemática mais contextualizado, investigativo e próximo da realidade dos estudantes. Ao lidar com situações-problema de otimização, os alunos serão capazes de relacionar conteúdos matemáticos com outras áreas do conhecimento, desenvolver habilidades de resolução de problemas, argumentação, interpretação de dados e tomada de decisões, aspectos fortemente valorizados tanto pela BNCC quanto pelos fundamentos da Modelagem Matemática.

Como contribuição, este trabalho oferece uma proposta pedagógica que pode ser replicada ou adaptada em diferentes realidades escolares, servindo de base para novos estudos e experiências pedagógicas.

A proposta pedagógica elaborada aplica os princípios da Programação Linear no processo de Modelagem Matemática, contextualizando problemas através da interdisciplinaridade e destaca a importância da representação semiótica na construção de significados matemáticos e na superação de dificuldades de aprendizagem. Tais aspectos fortalecem a relação entre o professor e aluno, onde ambos pesquisam e compartilham conhecimento, estimulando a participação discente nas atividades e a criatividade que permite o desenvolvimento na cognição matemática.

A pesquisa considera que a aplicação dos objetos matemáticos com o envolvimento de ferramentas computacionais para a resolução de problemas enriquece a aprendizagem matemática dos alunos e oferece ao professor uma inovadora metodologia de ensino capaz de incentivar a manifestação de ideias, opiniões e discussões em sala de aula.

Entre os desafios para aplicação da proposta, destacam-se a necessidade da formação continuada dos professores para o trabalho interdisciplinar, o tempo reduzido para planejamento coletivo, e a limitação de recursos didáticos. Ainda assim, a possibilidade de inovar na forma como a Matemática é ensinada, integrando saberes e ampliando a compreensão dos estudantes, é essencial para a valorização da disciplina.

Pesquisas futuras poderão aplicar a presente proposta na escola e analisar as contribuições e limitações do ensino e aprendizagem da Programação Linear em diferentes contextos, bem como sua articulação com o uso de tecnologias digitais e outras estratégias de ensino.

REFERÊNCIAS

AMAZONAS. **Proposta Curricular e Pedagógica do Ensino Médio.** Secretaria de Estado de Educação e Desporto. Manaus. 2021. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1OvvP9ZesI0O4HCQJJlkMif6jT9PnxeAm/view. Acesso em: 10 Out. 2024

ARAGÃO, M. D. F. A. **A história da modelagem matemática: Uma perspectiva de didática no Ensino Básico**. Anais IX EPBEM. Campina Grande: Realize Editora, 2016. Dispon[ivel em: https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/26383. Acesso em: 13 Set. 2024

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3ª. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BRASIL. **Plano Amazônia Sustentável: diretrizes para o desenvolvimento sustentável da Amazônia Brasileira**. Brasília: MMA, 2008. Disponível em: https://www.fundoamazonia.gov.br/export/sites/default/pt/.galleries/documentos/biblioteca/PAS-Presidencia-Republica.pdf. Acesso em: 01 Fev 2025

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 02 Out 2024

CARNEIRO, J. D. 'O seringueiro é o melhor guarda florestal': o novo ciclo de borracha nativa que está ajudando a preservar a Amazônia. **BBC News Brasil**, 2024. Disponivel em: <https://www.bbc.com/portuguese/articles/c25qlrk5vgqo#:~:text=Incentivos%20%C3%A0%20bioeconomia%20e%20seus,b%C3%A1sicos%20e%20capital%20de%20giro.>. Acesso em: 04 Fevereiro 2025.

CONEXÕES: Matemática e sua tecnologias: manual do professor. In: LEONARDO, F. M. D. **Organizadora Editora Moderna; Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna**. 1. ed. São Paulo: Moderna, v. 6, 2020. Disponível em: https://pnld.moderna.com.br/ensino-medio/obras-didaticas/area-de-conhecimento/matematica/conexoes. Acesso em: 14 Jan. 2025.

D'AMBRÓSIO, U. Etnomatemática: Um programa. Blumenau: **A Educação Matemática em Revista**, 1993. 7-12 p. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/1936. Acesso em: 10 Set 2024

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações: Ensino Médio**, vol. 2. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Aprendizagem em matemática. Campinas: Papirus, 2003. E-book Kindle.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5ª. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FLORES, C. R. **Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem**. Rio Claro: Boletim de Educação Matemática, v. 19, 2006. 1-22 p. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1853/1614. Acesso em: 20 Nov 2024

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

JUNIOR, P. I. C. D. S.; ASSIS, S. C. D. **A programação linear como ferramenta interdisciplinar para turmas do ensino médio**. Blumenau: CONTRAPONTO: Discussões Científicas e Pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação, v. 3, 2022. 149-166 p. Disponível em: https://publicacoes.ifc.edu.br/index.php/contraponto/article/view/2742/2326. Acesso em: 10 Out 2024

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. E-book Kindle.

MARIOSA, P. H. et al. Cooperativas agroindustriais da cadeia de valor da castanha-do-brasil: um novo paradigma extrativista na Amazônia. **Revista de Economia e Sociologia Rural**, 62(4), e277617, 2024. Disponivel em: https://doi.org/10.1590/18069479.2023.277617. Acesso em: 10 Fev 2025

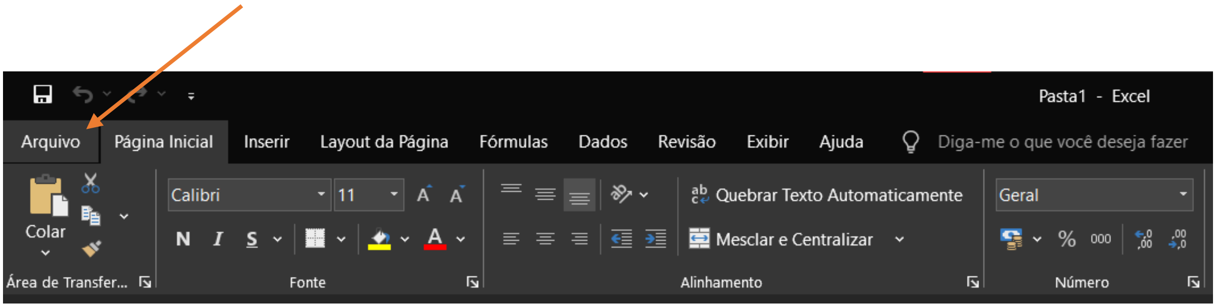
PRADO, D. S. D. **Programação Linear (Série Pesquisa Operacional, vol. 1)**. 7. ed. Nova Lima: FALCONI Editora, 2016.

SANTANA, A. C. D. et al. Valoração e sustentabilidade da castanha-do-brasil na Amazônia. **Revista de Ciências Agrárias**, v. 60, n. 1, Jan./Mar. 2017. p. 77-89. Disponivel em: http://dx.doi.org/10.4322/rca.60101. Acesso em: 10 Fev 2025

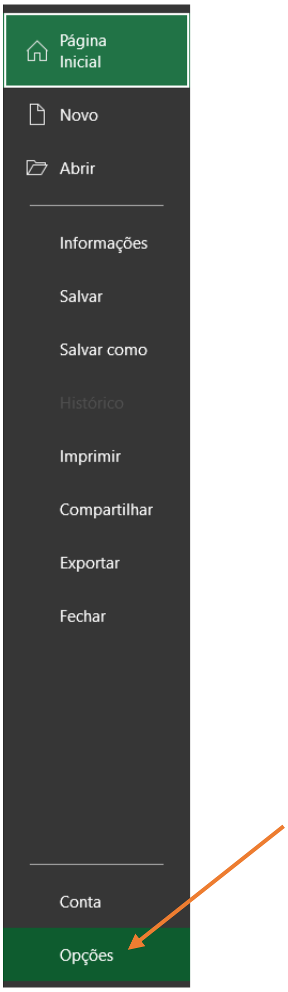
SILVA, L. D. J. D. S. et al. Cooperativismo e bioeconomia: desafios para o desenvolvimento sustentavel na amazônia. **Peer Review**, v. 6, n. 10, p. 204-219, 2024. Disponível em: https://www.alice.cnptia.embrapa.br/alice/bitstream/doc/1168272/1/prw4033.pdf. Acesso em: 10 Fev 2025

APÊNDICE A – ATIVAÇÃO DO SOLVER NO EXCEL

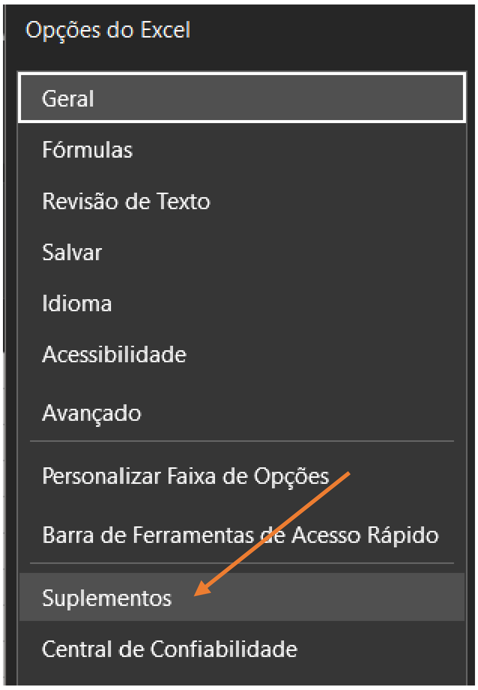
- Ao abrir o *Excel*, clique em “Arquivo” no menu superior.



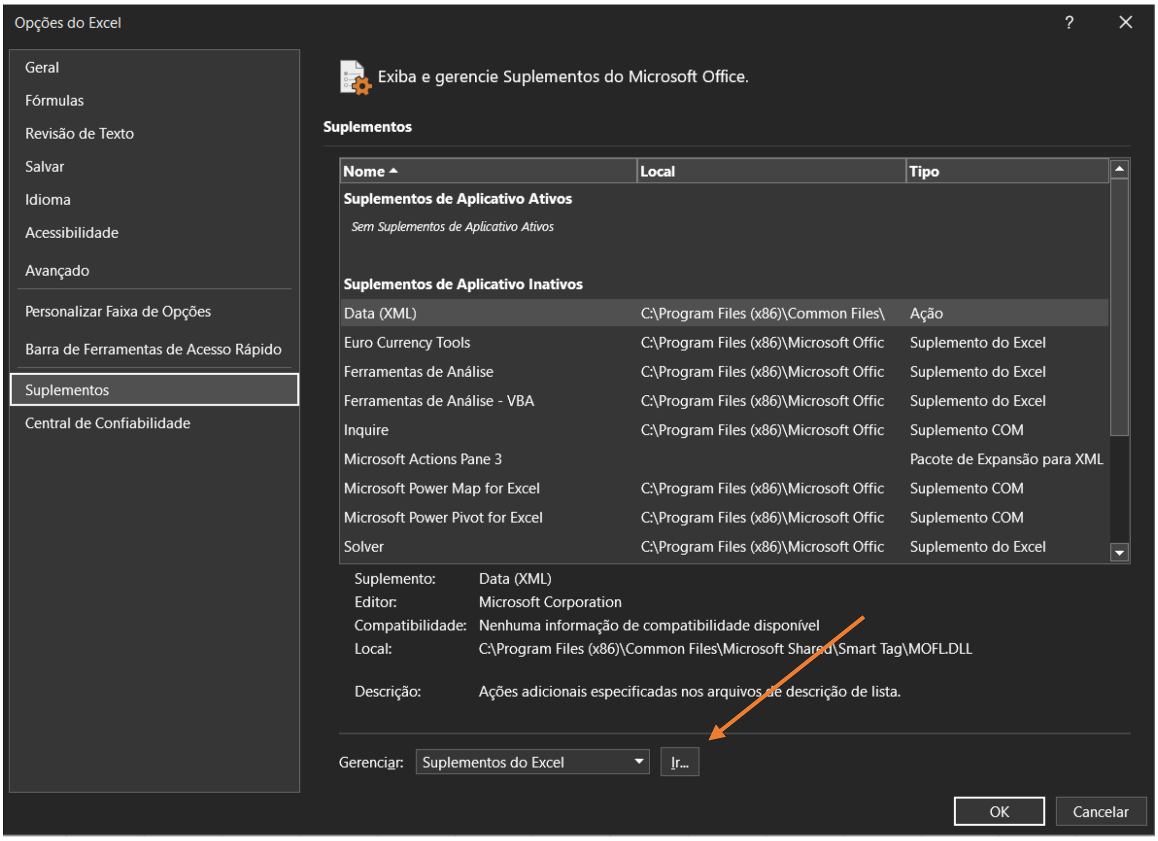
- Clique em “Opções” na parte inferior esquerda.



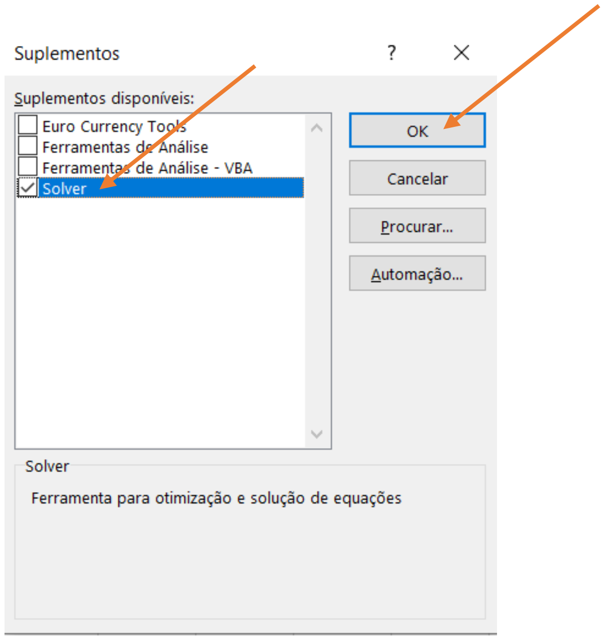
- Clique em “Suplementos” no menu lateral esquerdo.



- No campo “Gerenciar:” selecione “Suplementos do Excel” e clique em “Ir...”



- Ative a opção “Solver” e clique em “OK”



- A ferramenta “Solver” aparecerá no menu “Dados”, grupo “Análise”.