UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCELO DE OLIVEIRA LUNA

AÇÕES PRÁTICAS E CRIATIVAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA: EXPLORAÇÃO DOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

MANAUS, AGOSTO
2025

MARCELO DE OLIVEIRA LUNA

AÇÕES PRÁTICAS E CRIATIVAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA: EXPLORAÇÃO DOS POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Dissertação apresentada à Universidade do Estado do Amazonas como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UEA.

Orientadora: Dra. Nadime Mustafa Moraes

MANAUS, AGOSTO

2025

FICHA CATALOGRÁFICA

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

L961a LUNA, Marcelo de Oliveira

Ações práticas e criativas para o ensino de Geometria: exploração dos poliedros de Arquimedes / Marcelo de Oliveira LUNA . Manaus : [s.n], 2025.

112 f.: color.; 21,0 cm.

Dissertação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2025.

Inclui Bibliografia.

Inclui Apêndice.

Inclui Anexo.

Orientador: Moraes, Nadime Mustafa.

1. Geometria. 2. Poliedros de Arquimedes. 3. Ensino. 4. Metodologias Ativas. 5. Aprendizagem Significativa. I. Moraes, Nadime Mustafa (Orient.) II. Universidade do Estado do Amazonas. III. Título

CDU(1997)51(043.3)

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Ata de defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade do Estado do Amazonas, no município de Manaus-AM, do discente **Marcelo de Oliveira Luna,** matrícula nº **2391940007.**

Em 22 de agosto de 2025, às 18h, na sala B4 bloco B, localizada na Escola Normal Superior, no município de Manaus-AM, na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Profa. Dra. Nadime Mustafa Moraes, Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto e Prof. Dr. Geasi Morais, realizou-se a sessão pública de defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Amazonas - UEA, do discente **Marcelo de Oliveira Luna**, o discente apresentou sua dissertação intitulada: "**Ações práticas e criativas para o ensino de geometria: exploração dos poliedros de Arquimedes**".

A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do trabalho apresentado, divulgando o resultado ao discente e aos demais presentes.

Manaus, 22 de agosto de 2025

Nadime Mustafa Moraes
____
Orientador

____
Membro Interno da Banca Avaliadora

Geási Morais
____
Membro Externo da Banca Avaliadora

Marcelo de Oliveira Luna
____
Mestrando

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
PROFMAT
UEA

DEDICATÓRIA

Ao Deus único, a quem dedico esta dissertação. Por meio d'Ele temos a redenção e a salvação, e é n'Ele que encontramos o verdadeiro amor e o significado da paz. Sua graça nos concede sabedoria, amor e paciência. Agradeço a Deus por tudo.

À minha família, meus pais, minha esposa e meus filhos, que sempre me apoiaram nos momentos mais desafiadores. Agradeço pela dedicação, pelo tempo e pela compreensão, que foram fundamentais para a conclusão deste mestrado.

“Nenhuma investigação humana pode ser chamada realmente Ciência, se não puder ser demonstrada matematicamente.”

Leonardo da Vinci

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família por toda motivação e apoio ao longo desta jornada. O amor e a compreensão de vocês foram fundamentais para a conclusão deste mestrado. Amo muito todos vocês.

Aos meus professores do mestrado, minha gratidão pela sabedoria e paciência ao compartilhar seus conhecimentos matemáticos e de vida, contribuições essenciais para nossa formação e aprimoramento como professores.

À minha orientadora, professora Nadime Mustafa, expresso meu profundo reconhecimento. Seu exemplo de vida e sabedoria nos inspira a acreditar que tudo é possível e que Deus está sempre presente em nossas vidas.

Aos meus colegas de mestrado, meu sincero agradecimento pelo apoio, encorajamento e dedicação, que foram indispensáveis para superarmos juntos os desafios desta etapa acadêmica.

Por fim, agradeço à Universidade do Estado do Amazonas por toda a infraestrutura física e social disponibilizada aos integrantes do PROFMAT, proporcionando condições adequadas para nossa formação.

RESUMO

O ensino de Geometria, frequentemente restrito a abordagens teóricas, dificulta a compreensão e a aplicação prática dos conceitos pelos estudantes. Nesse contexto, metodologias inovadoras tornam-se fundamentais para potencializar a aprendizagem. Esta dissertação propõe como objeto de estudo a exploração dos Poliedros de Arquimedes como recurso pedagógico para tornar o ensino da Geometria mais dinâmico e significativo. A justificativa para este estudo baseia-se na necessidade de estratégias que estimulem o raciocínio espacial e a construção do conhecimento geométrico por meio da experimentação e manipulação de modelos tridimensionais. A utilização de atividades práticas e criativas contribui para uma aprendizagem mais interativa e envolvente, favorecendo a assimilação dos conceitos matemáticos. A metodologia adotada inclui a aplicação de oficinas pedagógicas em turmas do ensino fundamental e médio, utilizando materiais concretos. A coleta de dados foi realizada por meio de observações, questionários e avaliações comparativas entre os estudantes que participaram das atividades e aqueles que seguiram o ensino tradicional. Os resultados evidenciaram que a abordagem prática, aliada à criatividade, melhorou o entendimento das propriedades geométricas e ampliou o interesse dos alunos pela disciplina. Conclui-se que o uso dos Poliedros de Arquimedes como ferramenta didática pode transformar o ensino de Geometria, tornando-o mais acessível e eficaz.

Palavras-chave: Geometria; Poliedros de Arquimedes; Ensino; Metodologias Ativas; Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

Teaching Geometry, often limited to theoretical approaches, hinders students' understanding and practical application of concepts. In this context, innovative methodologies become essential to enhance learning. This dissertation proposes as an object of study the exploration of Archimedes' Polyhedra as a pedagogical resource to make the teaching of Geometry more dynamic and meaningful. The justification for this study is based on the need for strategies that stimulate spatial reasoning and the construction of geometric knowledge through experimentation and manipulation of three-dimensional models. The use of practical and creative activities contributes to a more interactive and engaging learning process, facilitating the assimilation of mathematical concepts. The adopted methodology includes the implementation of pedagogical workshops in elementary and high school classes, using concrete materials. Data collection was carried out through observations, questionnaires, and comparative assessments between students who participated in the activities and those who followed traditional teaching methods. The results showed that the practical approach, combined with creativity, improved the understanding of geometric properties and increased students' interest in the subject. It is concluded that using Archimedean Polyhedra as a didactic tool can transform Geometry teaching, making it more accessible and effective.

Keywords: Geometry; Archimedean Polyhedra; Teaching; Active Methodologies; Meaningful Learning.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria desempenha um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio espacial, oferecendo aportes teóricos essenciais para a interpretação e aplicação de conceitos geométricos no cotidiano. No entanto, o ensino tradicional tem se limitado, em grande parte, a uma abordagem exclusivamente teórica, o que pode dificultar a assimilação dos conteúdos pelos estudantes. Nesse contexto, observa-se a ausência de estratégias metodológicas inovadoras capazes de romper paradigmas que restringem o ensino e a aprendizagem da Geometria.

A predominância de abordagens teóricas, sem a devida articulação com práticas concretas, compromete a construção do conhecimento e a compreensão dos conceitos geométricos de forma significativa. Diante desse cenário, torna-se essencial a implementação de metodologias que integrem teoria e prática, aliando criatividade e experimentação. O uso de estratégias inovadoras pode ampliar as possibilidades de uma aprendizagem significativa que, segundo Ausubel (2003, p. 25), por definição “ocorre quando uma nova informação se relaciona de maneira substantiva e não arbitrária a conceitos relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aluno.” Aplicada ao contexto desta pesquisa, a utilização dos Poliedros de Arquimedes pode possibilitar que o estudante relacione conceitos prévios de geometria plana e espacial à manipulação concreta e visual de modelos tridimensionais, favorecendo a construção ativa do conhecimento.

A metodologia empregada foi a pesquisa qualitativa, exploratória, descritiva e intervencionista, estruturada a partir de atividades pedagógicas, as quais obedeceram a uma sequência didática para seu respectivo desenvolvimento. As atividades foram aplicadas no contexto escolar, utilizando papel, palitos com jujubas, origami modular, brinquedos geométricos, com registros via observação participante e aplicações de questionários.

A dissertação está vinculada ao **PROFMAT/UEA**, inserindo-se na linha de pesquisa *Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias*, conforme alínea II, do parágrafo único do Art. 1° do Regimento do PROFMAT, contribuindo para o ensino de Matemática ao articular teoria e prática por meio de recursos metodológicos, fortalecendo o processo de ensino-aprendizagem na Educação Básica.

Os Poliedros de Arquimedes representam um excelente recurso para tornar o ensino da Geometria mais dinâmico e interativo. Almeida (2015, p. 40) diz que os sólidos semirregulares provavelmente tiveram seus estudos retomados por Kepler[1] onde os sistematizou e atribuiu nome a cada um deles. Basicamente, os Poliedros de Arquimedes são, por definição, poliedros que possuem uma combinação “harmoniosa” de diferentes polígonos regulares em suas faces e vértices (excluindo-se os prosmas e anti-prismas), e podem permitir aos alunos compreender propriedades geométricas de forma concreta. A exploração desses poliedros por meio de atividades manipulativas, modelagem matemática e tecnologias educacionais favorecem a construção do conhecimento de maneira intuitiva e engajadora.

Há uma gama de contribuições na vida de Arquimedes, como por exemplo, os métodos de exaustão, dentre outras obras que constituem um rico celeiro de contribuições científicas e significativas para a geometria, além de resultados que cercam os estudos colaborativos da ciência no ramo da Matemática. Suas obras, "a Esfera e o Cilindro" e “as Espirais", elencam forte destaque à fundamentação de muitos princípios geométricos modernos que incluem estruturação ao cálculo integral, dentre muitas outras formulações que permitiram o cálculo da área de um círculo, bem como, propriedades das espirais que marcaram a presença de conceitos fundamentais inovadores para outros resultados, tais como, alavanca e o centro de gravidade.

Segundo Assis (2008, p. 13 e 14), Arquimedes é considerado um dos maiores cientistas da antiguidade e maior matemático da antiguidade, comparado aos dias atuais a Isaac Newton (1642-1727), pelo seu brilhantismo e influência de sua obra, tanto que é considerado um dos fundadores da estática e hidrostática. A principal fama de Arquimedes está em seus trabalhos com artefatos de guerra, trabalho feito como engenheiro e arquiteto. Algumas de suas invenções são: catapulta, guindastes, espelhos ardentes, cóclea (sistema de bombeamento de água) ou parafuso de Arquimedes, planetário (onde observava o movimento do sol, lua e estrelas), órgão hidráulico. A polia composta, elevador hidráulico, balança romana (que possuía braços de tamanhos diferentes) e outros artefatos mecânicos são atribuídos a ele.

---

[1] Johannes Kepler (1571 – 1630) foi um astrônomo alemão que descobriu três grandes leis do movimento planetário (https://www.britannica.com/biography/Johannes-Kepler) acesso em 03/09/2025

1.1 JUSTIFICATIVA

O ensino de Geometria, especialmente no que tange à exploração dos Poliedros de Arquimedes, é excelente ferramenta para o desenvolvimento do pensamento espacial e da visualização geométrica dos estudantes. No entanto, pesquisas como as de Rodrigues (2016, p. 128) e Nunes (2010, p. 102) apontam dificuldades significativas no aprendizado dessa área, frequentemente associadas a abordagens excessivamente teóricas e desvinculadas da experimentação concreta. Dessa forma, torna-se essencial o uso de metodologias ativas que possibilitem a manipulação de materiais concretos e o envolvimento do aluno na construção do conhecimento.

Segundo Dante (2018, p. 45), "o ensino da Geometria deve ir além da memorização de fórmulas e propriedades; é preciso proporcionar aos alunos oportunidades para explorar, conjecturar e desenvolver o raciocínio espacial por meio de atividades práticas." Essa abordagem está alinhada com perspectivas contemporâneas da Educação Matemática, que enfatizam a importância da experimentação e da criatividade no ensino de conceitos geométricos.

Além disso, a inclusão de materiais concretos e recursos manipuláveis pode favorecer a aprendizagem significativa, conforme destacou Euclides em sua obra *Os Elementos*: "O conhecimento geométrico deve ser construído com base na experiência visual e tátil, pois a intuição desempenha papel fundamental na compreensão das formas e relações espaciais".

Portanto, esta dissertação propõe como objeto de estudo uma abordagem metodológica baseada na experimentação e no uso de estratégias lúdicas e criativas, visando aprimorar o ensino de Geometria e contribuir para o desenvolvimento de habilidades espaciais e matemáticas nos alunos, conforme Almeida (2015, p. 31):

> A exploração adequada de materiais manipuláveis pode ajudar no desenvolvimento de visualização geométrica e, consequentemente, na construção de imagens mentais [*capacidade de relacionar e enunciar, de forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência deste*], que vão sendo cada vez mais enriquecidas e multiplicadas quanto mais operacionais elas forem. Para tanto, se torna inevitável dizer que, para a aprendizagem geométrica, boas imagens mentais fazem-se necessárias.

Tomamos por hipótese que o uso dos Poliedros de Arquimedes em práticas pedagógicas ativas e manipulativas potencializa a aprendizagem significativa da

Geometria, despertando maior interesse nos estudantes, estimulando o raciocínio espacial e ampliando a compreensão das propriedades matemáticas. Assim, tentaremos responder à seguinte pergunta: **as práticas pedagógicas aqui sugeridas e realizadas contribuem para a superação das limitações dos métodos tradicionais puramente teóricos?** Para responder tal questionamento, tomamos por base algumas pesquisas brasileiras que destacam a relevância da abordagem prática no ensino da Geometria: Pavanello (1993, p. 16), que evidenciou a necessidade de superar o ensino excessivamente teórico da Geometria; Lorenzato (1995, p. 9), que defendeu o uso de materiais manipuláveis para favorecer a visualização geométrica; e Smole e Diniz (2003), que apresentaram propostas lúdicas para a construção de conceitos matemáticos, enfatizando a importância da criatividade. Dessa forma, esta dissertação contribui ao propor um conjunto de atividades desenvolvidas e sistematizadas, ampliando as alternativas metodológicas já discutidas no cenário brasileiro, porpondo estratégias práticas e criativas para o ensino da Geometria, utilizando os Poliedros de Arquimedes como recurso pedagógico. Além disso,

Trabalhos similares foram analisados, evidenciando a lacuna que esta dissertação busca preencher: “A manipulação de poliedros regulares e semirregulares amplia a percepção espacial dos estudantes, possibilitando conexões entre teoria e prática” (Ferreira; Oliveira, 2017, p. 88); “O uso de atividades com sólidos geométricos em sala de aula mostrou resultados significativos na compreensão das propriedades das figuras espaciais” (Moura; Gomes, 2018, p. 112); “A modelagem dos Poliedros de Arquimedes com materiais concretos contribui para uma aprendizagem mais investigativa e lúdica” (Silva; Barbosa, 2020, p. 64); e “Projetos que exploram a geometria espacial com recursos manipulativos e tecnológicos apontam para um ensino mais atrativo e eficaz” (Almeida e Costa, 2021, p. 130). Embora haja estudos sobre a exploração de poliedros, poucos trabalhos sistematizaram desenvolvimento e exploração de atividades, obedecendo uma sequência didática diversificada, aliando diferentes materiais (papel, origami, kits de brinquedos). Essa é a lacuna que esta pesquisa busca preencher.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Aprimorar estratégias didáticas inovadoras e criativas para o ensino de Geometria, com foco na exploração dos Poliedros de Arquimedes, por meio de atividades práticas que favoreçam a visualização espacial e a aprendizagem significativa dos estudantes.

1.2.2 Objetivos específicos

a) Explorar metodologias ativas e recursos manipuláveis para o ensino dos Poliedros de Arquimedes, promovendo uma abordagem lúdica e interativa.
b) Aplicar atividades didáticas que envolvam a construção e a experimentação dos Poliedros de Arquimedes, utilizando materiais concretos e ferramentas digitais.
c) Observar o impacto das estratégias propostas na aprendizagem dos alunos, considerando o desenvolvimento do raciocínio espacial e geométrico.

1.3 ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS

Este estudo está estruturado em quatro capítulos, em que:

O Capítulo I, onde estamos, apresenta a Introdução, a justificativa e os objetivos desta dissertação.

No Capítulo II são abordados os fundamentos teóricos que sustentam a pesquisa, com base em autores clássicos e contemporâneos da Educação Matemática. São abordados temas como um breve resumo da vida de Arquimedes, a contribuição de Arquimedes para a Matemática (como ele encontrou a medida aproximada do círculo em sua época) e sobre os Poliedros de Arquimedes.

O Capítulo III apresenta os materiais detalhados e os procedimentos metodológicos adotados para a realização do estudo. São descritos o tipo de pesquisa, sua abordagem (qualitativa e descritiva), a definição do público-alvo, os instrumentos de coleta de dados (observações, entrevistas ou análise documental), bem como os métodos de análise empregados para interpretar os resultados obtidos.

Apresentamos, no Capítulo IV, os principais resultados da pesquisa, a partir da aplicação das atividades didáticas propostas. A interpretação dos dados é realizada à luz do referencial teórico, buscando identificar padrões, dificuldades e avanços no aprendizado dos alunos. Também são discutidas as implicações das descobertas para a prática docente e sugestões para aprimoramento das metodologias empregadas.

Encerrando a dissertação, teremos as considerações finais da pesquisa, quatro apêndices tratando dos questionários feitos aos alunos e professores e um anexo falando sobre os Poliedros de Platão.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 UM BREVE RESUMO DA VIDA DE ARQUIMEDES

As principais referências de Arquimedes falam que ele viveu entre os anos de 287 a 212 a.C., na atual cidade de Siracusa – Itália. Boyer (2012, p. 99), diz que é provável que ele tenha morado e estudado em Alexandria, centro da ciência grega, com os discípulos de Euclides. Muitas das obras de Arquimedes devem ter sido perdidas num incêndio, no ano 391 d.C., que atingiu o palácio de Alexandria e seu depósito de livros, época que Alexandria era governada por Roma.

Eves (2011, p. 192) diz que em 214 a.C. tropas marítimas romanas atacaram Siracusa (cidade em que vivia Arquimedes), comandadas pelo general Marcelo, por cerca de 3 anos, na segunda Guerra Púnica (entre Roma e Cartago/Siracusa). Segundo Plutarco[2] (45-125 d.C.), que escreveu, em 75 a.C.:

> As forças terrestres foram conduzidos por Appius: Marcellus, com sessenta galeras, cada uma com cinco fileiras de remos, equipados com todos os tipos de armas e mísseis, e um enorme ponte de tábuas assente sobre oito navios acorrentados entre si, sobre a qual estava carregava o motor para lançar pedras e dardos, atacava as muralhas, confiando na abundância e magnificência de seus preparativos, e em seu próprio glória; tudo o que, no entanto, era, ao que parece, apenas ninharias para Arquimedes e suas máquinas. Essas máquinas ele projetou e inventou, não por questões de qualquer importância, mas como meras diversões em geometria.

É notório a relevância de Arquimedes nesta guerra, pois através do uso de seus artefatos, deixou os romanos apavorados só em ver um pedaço de corda ou madeira na parede.

Plutarco afirmou que o General Marcelo desistiu dos assaltos e conflitos tanto que só conseguiu a vitória após um cerco de quase três anos e que ficou muito angustiado com a morte de Arquimedes, considerando como assassino aquele que o matou, pois ordenara que Arquimedes não fosse morto.

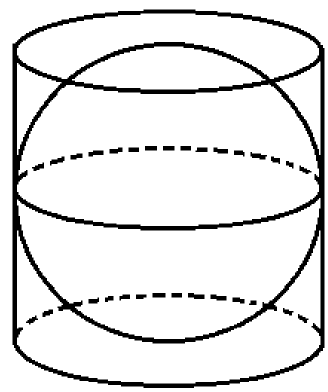
> Todas as narrativas da vida de Arquimedes, no entanto, concordam que ele dava menos valor a seus engenhos mecânicos do que à abordagem excepcionalmente inovadora dos produtos abstratos de seus pensamentos. Mesmo quando lidava com alavancas e outras máquinas simples, acredita-se que ele estava mais interessado em princípios gerais que em aplicações práticas. (Boyer, 2012, p. 99).

[2] Plutarco foi o historiador que viveu mais próximo à época de Arquimedes, relatando fatos da vida de Arquimedes por meio da biografia do general Marcelo.

Arquimedes, conforme Heath (1897, p. xviii), expressou em vida o desejo de que em seu túmulo fosse colocado um cilindro circunscrito a uma esfera dentro dele, juntamente com uma inscrição dando a razão entre os volumes destes corpos, similarmente à Figura 01.

Figura 01 – Cilindro circunscrito na esfera

"Toda esfera é o quádruplo do cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e uma altura igual ao raio da esfera; e o cilindro que tem uma base igual ao círculo máximo de uma esfera e uma altura igual ao diâmetro da esfera é três meios da esfera". (Assis, 2008, p. 20).



Fonte – do autor

Vejamos a demonstração com os cálculos dos dias atuais:

Sejam, referente ao cilindro reto: ***Vc*** o volume, $\boldsymbol{A_b} = \pi . R^2$ a área da base e $\boldsymbol{h} = D = 2 \cdot R$ sua altura; e referente à esfera: ***Ve*** seu volume e ***R*** o raio, teremos:

$$\frac{Vc}{Ve} = \frac{A_b \cdot h}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 2 \cdot R}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{3}{2} \qquad \textbf{[Eq. 01]}$$

2.2 CONTRIBUIÇÃO DE ARQUIMEDES PARA A GEOMETRIA

De todos os tratados de Arquimedes que chegaram aos dias atuais três são de geometria plana ("Medida de um círculo", "A quadratura da parábola" e "Sobre as espirais") e dois são de geometria espacial ("Sobre a esfera e o cilindro" e "Sobre os cones e os esferoides") dos quais segundo Eves (2011, p. 194): "*são obras-primas de exposição matemática e lembram, consideravelmente, artigos de revistas especializadas modernas*".

Veremos um caso em que Arquimedes foi notável, no seu tratado sobre a "Medida de um Círculo", onde ele verifica e demonstra a relação entre a circunferência e o diâmetro. Não é o objetivo deste trabalho analisar todos os tratados de Arquimedes, onde para isso sugerimos ver em Assis (2008 e 2019) e Heath (1897).

2.2.1 Medida de um círculo

De fato, e é notório que Arquimedes obteve as principais propriedades dos círculos e das esferas, como por exemplo, ele sabia que a medida do comprimento da circunferência e seu diâmetro eram proporcionais, ou seja, *o comprimento de uma circunferência A está para seu diâmetro assim como o comprimento da circunferência B está para o seu diâmetro*:

$$\frac{C_A}{D_A} = \frac{C_B}{D_B} \Rightarrow \frac{C_A}{C_B} = \frac{D_A}{D_B} \therefore \Rightarrow \frac{C_A}{C_B} = \frac{R_A}{R_B} \qquad \textbf{[Eq. 02]}$$

Heath (1897, p. 93), diz que o resultado do cálculo de Arquimedes, de "A Medida do Círculo", sobre o círculo foi uma aproximação do valor de π expressa pelas desigualdades $\mathbf{3\frac{10}{71} < \frac{C}{D} < 3\frac{1}{7}}$, que pode ser escrita $\mathbf{3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}}$ nos dias atuais ou mesmo **3,1408 < π < 3,1428**, uma aproximação melhor que a dos egípcios e a dos babilônicos.

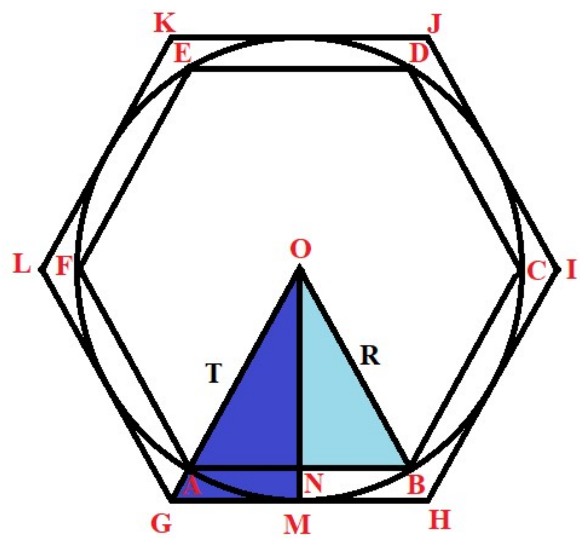
Já no segundo teorema do capítulo XII livro da obra Os Elementos, Euclides afirma:

Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros, ou seja:

$$\frac{C_1}{C_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \therefore \frac{C_1}{C_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \qquad \textbf{[Eq. 03]}$$

Segundo Boyer (2012, p. 102), Arquimedes conseguiu ir além do cálculo do perímetro e da área da circunferência ao verificar polígonos circunscrito e inscrito numa circunferência, conforme figura 02 abaixo, verificando que quanto maior for o número de lados do polígono maior será a aproximação do cálculo do perímetro e da área da circunferência.

Figura 02 – Hexágonos inscritos e circunscrito numa circunferência de raio 1



Fonte – do autor

Vamos então calcular os lados e consequentemente os perímetros dos hexágonos inscrito e circunscrito.

Seja uma circunferência de centro O e raio R = 1. Do hexágono ABCDEF inscrito é fácil perceber que os seus lados possuem a medida do raio da circunferência, ou seja, $l = \overline{AB} = 1$ e $p_6 = 6$. Nosso objetivo agora é ver as medidas do hexágono circunscrito GHIJKL cujo lado vamos designar por $\overline{GH} = \overline{GO} = T$. Para isso, observando o ΔOGM teremos:

$$T^2 = (\overline{GM})^2 + (\overline{OM})^2 = \left(\frac{\overline{GH}}{2}\right)^2 + 1 \Rightarrow (T)^2 - \left(\frac{T}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{3T^2}{4} = 1 \Rightarrow T = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \overline{GH}$$

, então $P_6 = 6 \cdot T = 4\sqrt{3} \cong 6{,}9282$.

Logo, temos a primeira desigualdade da relação entre a medida da circunferência e a medida do diâmetro.

Começando com hexágono e finalizando com um polígono de 96 (noventa e seis) lados. Este processo por vezes é chamado de *Algoritmo de Arquimedes* e, contados a partir do terceiro e dos dois precedentes, cada termo é a média harmônica P_n e geométrica p_n, alternadamente, formando a sequência:

$S = (P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, P_{8n}, p_{8n}, P_{16n}, p_{16n}) = (P_6, p_6, P_{12}, p_{12}, P_{24}, p_{24}, P_{48}, p_{48}, P_{96}, p_{96})$.

Tomando P_n e p_n as medidas dos perímetros dos polígonos circunscrito e inscritos de n lados, teremos:

$$\boldsymbol{P_{12} = \frac{2 \cdot p_6 \cdot P_6}{p_6 + P_6} \text{ e } p_{12} = \sqrt{p_6 \cdot P_{12}}} \qquad \textbf{[Eq. 04]}$$

$$\boldsymbol{P_{24} = \frac{2 \cdot p_{12} \cdot P_{12}}{p_{12} + P_{12}} \text{ e } p_{24} = \sqrt{p_{12} \cdot P_{24}}} \qquad \textbf{[Eq. 05]}$$

$$\boldsymbol{P_{48} = \frac{2 \cdot p_{24} \cdot P_{24}}{p_{24} + P_{24}} \text{ e } p_{48} = \sqrt{p_{24} \cdot P_{48}}} \qquad \textbf{[Eq. 06]}$$

$$\boldsymbol{P_{96} = \frac{2 \cdot p_{48} \cdot P_{48}}{p_{48} + P_{48}} \text{ e } p_{96} = \sqrt{p_{48} \cdot P_{96}}} \qquad \textbf{[Eq. 07]}$$

Entretanto, Boyer (2012, p. 102) concluiu erroneamente a fórmula do perímetro dos hexágonos inscritos, fazendo $\boldsymbol{p_{2n}} = \sqrt{\boldsymbol{p_n \cdot P_n}}$. Ele mesmo afirmou que este perímetro é a média geométrica dos seus dois precedentes, ou seja, observando a série, teremos $\boldsymbol{p_{2n}} = \sqrt{\boldsymbol{p_n \cdot P_{2n}}}$. Caso percistíssimos no erro, em poucos cálculos encontraríamos as duas médias iguais e não sendo possível verificar o cálculo para os hexágonos propostos.

Da equação [02] teremos:

$$\boldsymbol{\frac{p_6}{2} = 3 < \frac{C}{D} < 3,4641 = \frac{P_6}{2}}$$

Da equação [04] teremos:

$\boldsymbol{P_{12}} = \frac{2 \cdot p_6 \cdot P_6}{p_6 + P_6} \cong \mathbf{6,4307}$ e $\boldsymbol{p_{12}} = \sqrt{\mathbf{6 \cdot 6,4307}} \cong \mathbf{6,2116}$, desta forma:

$$\frac{p_{12}}{2} = 3,1058 < \frac{C}{D} < 3,2154 = \frac{P_{12}}{2}$$

Da equação [05] teremos:

$\boldsymbol{P_{24}} = \frac{2 \cdot p_{12} \cdot P_{12}}{p_{12} + P_{12}} \cong \mathbf{6,3192}$ e $\boldsymbol{p_{24}} = \sqrt{p_{12} \cdot P_{12}} \cong \mathbf{6,2651}$, desta forma:

$$\frac{p_{24}}{2} = 3,1325 < \frac{C}{D} < 3,1596 = \frac{P_{24}}{2}$$

Da equação [06] teremos:

$\boldsymbol{P_{48}} = \frac{2 \cdot p_{24} \cdot P_{24}}{p_{24} + P_{24}} \cong \mathbf{6,2920}$ e $\boldsymbol{p_{48}} = \sqrt{p_{24} \cdot P_{48}} \cong \mathbf{6,2785}$, desta forma:

$$\frac{p_{48}}{2} = 3,1393 < \frac{C}{D} < 3,146 = \frac{P_{48}}{2}$$

Da equação [07] teremos:

$\boldsymbol{P_{96}} = \frac{2 \cdot p_{48} \cdot P_{48}}{p_{48} + P_{48}} \cong \mathbf{6,2852}$ e $\boldsymbol{p_{96}} = \sqrt{p_{48} \cdot P_{96}} \cong \mathbf{6,2819}$, desta forma:

$$\frac{p_{96}}{2} = 3,1409 < \frac{C}{D} < 3,1426 = \frac{P_{96}}{2}$$

Com as devidas aproximações, o cálculo do valor aproximado de π demonstrou ser bastante preciso. Naturalmente, Arquimedes usou aproximações para seus cálculos pois os números irracionais ainda não existiam em sua época.

2.3 SOBRE OS POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Boyer (2012, p. 136) nos diz que em 320 d.C., aproximadamente, Papus de Alexandria[3] escreveu uma obra com o título *Coleção* (que Boyer descreveu assim: ***uma mina rica em pepitas geométricas***), que é importante por várias razões, pois é pelo livro V da *Coleção* que ficamos sabendo da descoberta por Arquimedes dos 13 poliedros semirregulares ou "sólidos arquimedianos". Mas infelizmente, *Coleção* é o último tratado matemático antigo realmente significativo, pois a tentativa do autor de ressuscitar a geometria clássica e lógica não teve sucesso.

Precisamos de algumas definições e propriedades antes de estudarmos sobre os Poliedros Arquimedianos.

As definições 01 a 05, a seguir, estão de acordo com Neves (2017, p. 27, 32 e 42).

DEFINIÇÃO 01: poliedros é reunião de finitos polígonos planos chamados de faces. Poliedros são objetos tridimensionais.

Os poliedros assim definidos possuem as seguintes propriedades:

a) Cada lado de uma dessas faces é lado de apenas uma outra face;

b) A interseção de duas faces, ou é uma aresta ou é um vértice ou é vazia;

c) Pode-se, com um simples lápis, riscar todo o poliedro passando a ponta deste lápis por suas faces, sem passar por seus vértices.

Então, exclui-se a possibilidade de que sólidos com faces arredondadas sejam poliedros, como as esferas, cones e cilindros, por exemplo.

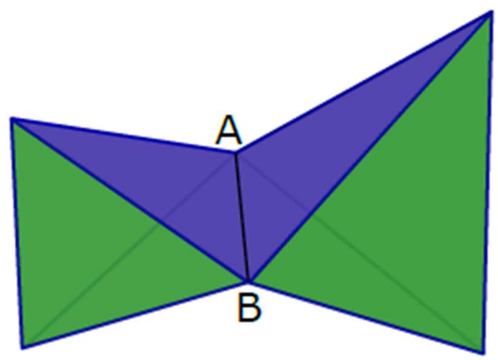
---

[3] Segundo Boyer (2012, p. 135), **Papus de Alexandria** (viveu durante o reino de Diocleciano 284-305 d.C.) era um defensor ardente e estudioso da geometria clássica, movido pelo mesmo espírito que animara os grandes geômetras do passado: Euclides, Arquimedes e Apolônio, que compartilhava integralmente da clássica apreciação grega pelas sutilezas da precisão lógica em geometria.

Chama-se **aresta** a interseção entre duas faces de um polígono e **vértice** a interseção entre as arestas. Vamos designar as arestas pela letra **A,** os vértices por **V** e as faces por **F**.

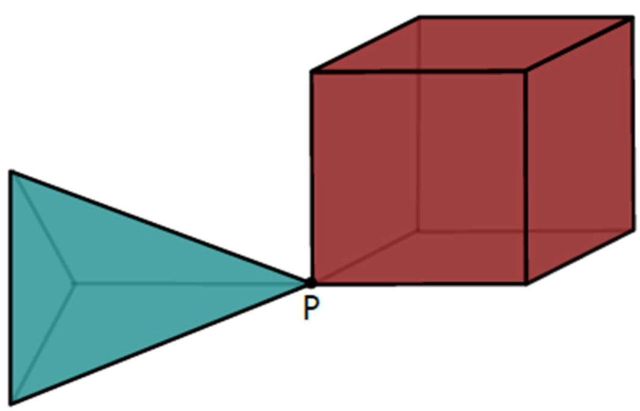
Percebe-se que os sólidos das figuras 03 e 04, abaixo, não são poliedros. A figura 03 não cumpre a propriedade da letra a), pois a aresta AB pertence a mais de duas faces e a figura 04 não cumpre a propriedade c), pois para ir de uma das faces em azul para uma face vermelha (em comum com o vértice P) não existe a possibilidade de passar o lápis apenas pelas arestas.

Figura 03 – não é poliedro (dois sólidos unidos pelas arestas)



Fonte – do autor

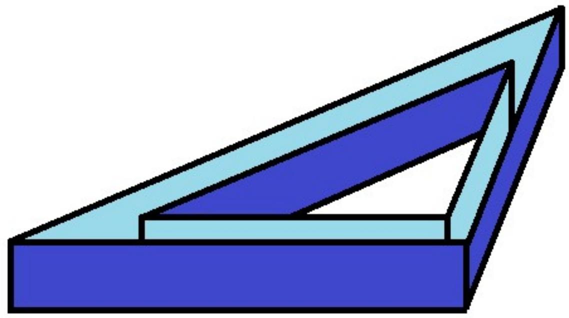
Figura 04 – não é poliedro (dois sólidos unidos pelos vértices)



Fonte – do autor

Note que, na figura 05, abaixo, a região em azul mais clara não é uma face, e sim uma região entre duas faces retangulares.

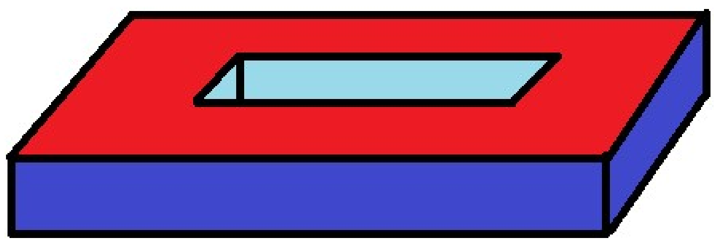
Figura 05 – não é poliedro (sólido sem a face superior)



Fonte – do autor

Já na figura 06, temos que duas faces não são polígonos já que tem um buraco em seu interior.

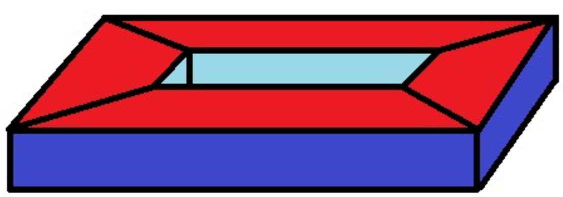
Figura 06 – não é poliedro (sólido com espaço interno vazio)



Fonte – do autor

Na figura 07, abaixo, teremos um poliedro, pois a face em vermelho foi dividida e não há face com buracos.

Figura 07 – é poliedro (sólido bem definido)



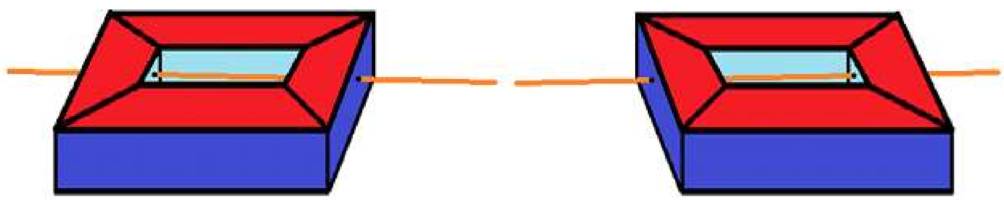
Fonte – do autor

Há também a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 02: um poliedro é dito *convexo* se qualquer reta secante ao poliedro possui apenas dois pontos em comum com o poliedro, afirma Neves (2017, p. 32).

Na figura 08, abaixo, vemos um exemplo de poliedros não convexo, que ao traçar uma reta que o intercepta, existe regiões que a reta não possui apenas dois pontos em comum com o poliedro.

Figura 08 – Poliedro não convexo

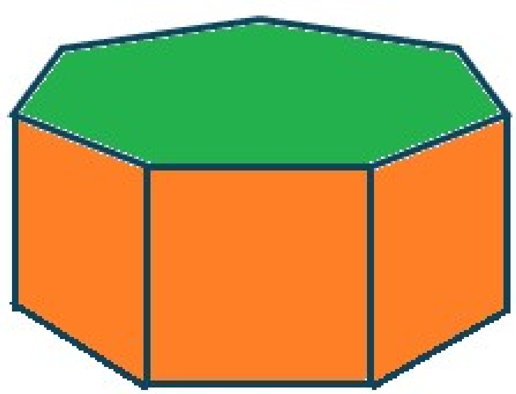


Fonte – do autor

DEFINIÇÃO 03: um prisma é um tipo de poliedro que possui duas faces paralelas congruentes (faces) e demais faces (laterais) são paralelogramos,

DEFINIÇÃO 04: um prisma regular é um tipo de prisma que possui as faces (laterais) no formato de um quadrado (figura 09).

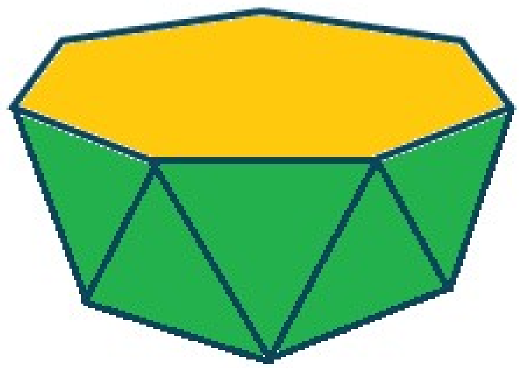
Figura 09 – Prisma heptagonal regular



Fonte – do autor

DEFINIÇÃO 05: se um prisma regular possuir as faces laterais no formato de triângulo equiláteros foram chamados de anti-prisma regulares (figura 10).

Figura 10 – Anti-prisma heptagonal regular



Fonte – do autor

Estando bem definido o que é poliedro, prisma e anti-prisma, vamos ver um pouco dos poliedros regulares, que muito provavelmente foram os precursores dos poliedros de Arquimedes.

DEFINIÇÃO 06: se diz [poliedro] *regular* se suas faces são polígonos regulares congruentes e se seus ângulos poliédricos são todos congruentes (Eves, 2011):

Eves (2011) continua:

> "Os primórdios da história dos poliedros regulares perdem-se nas brumas do passado. Há um início de tratamento matemático desses sólidos no Livro XIII dos Elementos de Euclides. O primeiro escólio desse livro observa que se "irá tratar dos sólidos de Platão[4], assim chamados erradamente, porque três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto". É bem possível que isso corresponda aos fatos."

[4] Abordamos um pouco mais sobre os sólidos ou poliedros de Platão no ANEXO

Cada um é designado conforme uma de suas faces, e, desta forma, temos apenas cinco poliedros regulares, que segundo Euclides: "*Digo, então, que exceto as cinco ditas figuras não foram construídas outra figura, contida por equiláteras e também equiângulas iguais entre si*".

É fácil verificar que existem apenas estes poliedros regulares. Vejamos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 07: Ângulo poliédrico ou ângulo sólido é a figura formada por três ou mais planos que, limitados às suas interseções consecutivas, possuem um único ponto comum.

Temos o teorema 01 conforme demonstrado em Almeida (2021 ,p. 62)

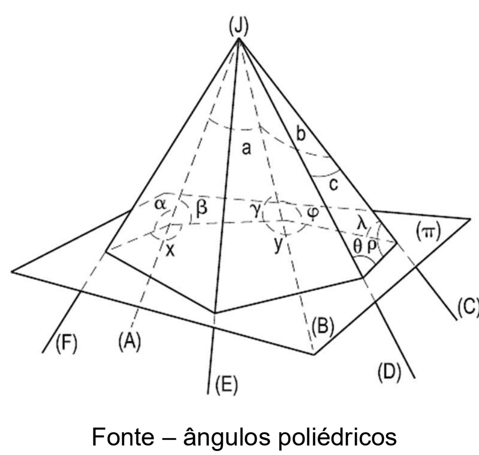
TEOREMA 01: num ângulo poliédrico convexo, a soma das faces é menor que quatro ângulos retos (360º).

DEMONSTRAÇÃO: conforme figura 11, abaixo, sejam:

i. (J) um ângulo poliédrico convexo genérico;
ii. a, b, c, d, ... os ângulos faces do ângulo poliédrico;
iii. x, y, z, ... os ângulos internos do polígono convexo segundo o qual (π) corta (J);
iv. α, β, γ, ϕ, λ, ρ, ..., os ângulos que as diversas arestas do ângulo poliédrico formam com os pares de lados do polígono concorrentes com elas.

Para os diversos triângulos formados pelo vértice (J) e pelos lados do polígono, temos

Figura 11 – ângulos poliédricos



Fonte – ângulos poliédricos

$$a + \beta + \gamma = 180°$$
$$b + \varphi + \lambda = 180°$$
$$c + \rho + \theta = 180°$$
$$S_f + S = n \cdot 180° \;\therefore$$

$$S = -S_f + n \cdot 180° \qquad \textbf{[Eq. 08]}$$

Onde $\boldsymbol{S_f}$ representa a soma dos ângulos faces do ângulo sólido ($\boldsymbol{S_f} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \ldots$) e $\boldsymbol{S}$ a soma dos ângulos que as arestas do ângulo sólido formam com os lados do polígono seção que concorrem com elas ($\boldsymbol{S} = \beta + \gamma + \varphi + \lambda + \rho + \theta + \ldots$)

Designando por $\boldsymbol{S_i}$ a soma dos ângulos internos x, y, z, ... ($\boldsymbol{S_i} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} + \ldots$) do polígono seção e observando os triedros formados em cada um dos vértices do polígono seção, po demos escrever:

$$
\begin{array}{c}
x < \alpha + \beta \\
y < \gamma + \varphi \\
z < \lambda + \rho \\
\hline
S_i < S
\end{array}
$$

[Eq. 09]

Substituindo **[Eq. 08]** em **[Eq. 09]** teremos:

$$S_i < -S_f + n \cdot 180°$$

$$S_f < -S_i + n \cdot 180°$$

[Eq. 10]

Mas como a soma dos ângulos internos de um polígono é dado pela equação

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

[Eq. 11]

Portanto, ao substituir **[Eq. 11]** em **[Eq. 10],** teremos:

$$S_f < -(n-2) \cdot 180° + n \cdot 180°$$

$$S_f < -n \cdot 180° + 2 \cdot 180° + n \cdot 180°$$

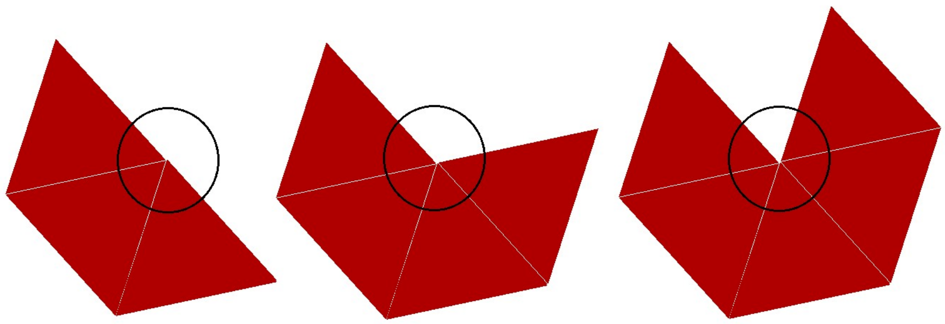
$$S_f < 2 \cdot 180° \rightarrow S_f < 4 \cdot 90°$$

Como queríamos demonstrar.

Tratando de poliedros regulares cujas faces são polígonos regulares e que cada ângulo poliédrico convexo é menor 360º, percebe-se que não existe ângulos poliédricos, formados a partir de polígonos regulares, com seis ou mais faces e com menos de três faces, já que com seis faces teremos um ângulo total igual a 360º, contradizendo o Teorema 01. Então, teremos as seguintes possibilidades:

POSSIBILIDADE 1: com três triângulos, o tetraedro, e com quatro triângulos, o octaedro, e com cinco triângulos, o icosaedro. Mas com seis triângulos equiláteros não se consegue, pois, o vértice dos triângulos juntos contradiz a Teorema 01.

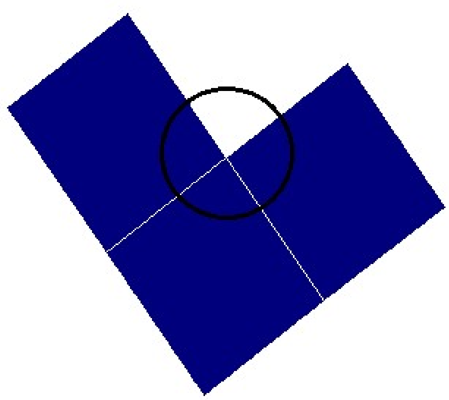
Figura 12 – faces triangulares formando ângulos poliédricos



Fonte – do autor

POSSIBILIDADE 2: para o quadrado, três conseguem formar um hexaedro (cubo) e quatro quadrados num único vértice teremos que a soma de seus ângulos neste vértice será 360º, o mesmo caso dos seis triângulos equiláteros.

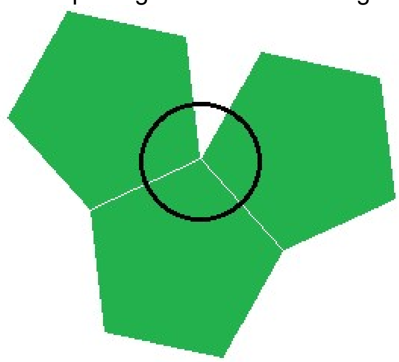
Figura 13 – faces quadrangulares formando ângulo poliédrico



Fonte – do autor

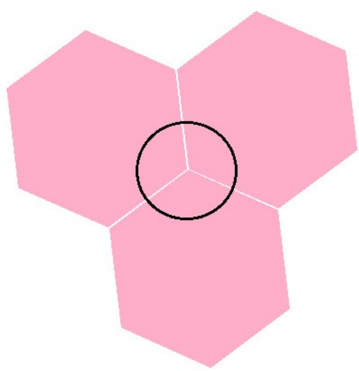
POSSIBILIDADE 3: para o pentágono, que possui um ângulo interno de 108º, três conseguem, o dodecaedro, mas quatro não conseguem pois passa os 360º limites para formar um poliedro. Então decorre que o pentágono é o polígono com maior lado a formar um poliedro regular, já que para o hexágono, três deles fazem os 360º de ângulo, não sendo possível formar um poliedro regular.

Figura 14 – faces pentagonais formando ângulo poliédrico



Fonte – do autor

Figura 15 – faces hexagonais formando ângulo não poliédrico



Fonte – do autor

TEOREMA 02: (*Relação de Euler*) Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação abaixo, em que **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas e **F** é o número de faces do poliedro.

$$V - A + F = 2 \quad \textbf{[Eq. 12]}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Para um poliedro regular, observe que cada face **F** tem as mesmas **n** arestas **A** (**n ≥ 3**) e cada aresta está em duas faces, logo

$$n \cdot F = 2A \Leftrightarrow F = \frac{2A}{n} \qquad \textbf{[Eq. 13]}$$

Temos que cada um dos vértices **V** formam um ângulo poliédrico que tem **m** arestas **A** (**m ≥ 3**) e cada aresta está em dois vértices:

$$m \cdot V = 2A \Leftrightarrow V = \frac{2A}{m} \qquad \textbf{[Eq. 14]}$$

Substituindo as [Eq. 13] e [Eq. 14] na [Eq. 12] temos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \qquad \textbf{[Eq. 15]}$$

Temos que **n ≥ 3** e **m ≥ 3** e fazendo ambos simultaneamente **n > 3** e **m > 3**, temos **n ≥ 4** e **m ≥ 4** e então, $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ e $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ que é falso, pois observando a [Eq. 15] e sabendo que o número de arestas **A** é positivo, então temos que $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, logo **m = 3** ou **n = 3**.

Para **n = 3** (triângulos) temos, da [Eq. 15]:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \therefore m < 6,$$

com ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos.

Para **m = 3** (ângulo triédrico), temos da [Eq. 15]:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \therefore n < 6,$$

com faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais.

Resumindo e substituindo os valores de ***n*** e ***m*** na [Eq. 15] e em seguida nas [Eq. 13] e [Eq. 14], temos:

Tabela 01 – Poliedros regulares

n	**m**	**A**	**F**	**V**	**Nome do Poliedro**
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Octaedro
3	5	30	20	12	Icosaedro
4	3	12	6	8	Hexaedro (cubo)
5	3	30	12	20	Dodecaedro

Fonte – do autor

Então, visto que só existem esses cinco poliedros regulares, cabe a pergunta: quantos poliedros arquimedianos existem? Primeiramente, definimos, segundo Neves (2017, p. 42) e Brasil (2008), os poliedros arquimedianos e então verificamos sua existência.

DEFINIÇÃO 08: os **poliedros semirregulares** são poliedros convexos que possui mais de um tipo de polígono regular em suas faces e todos os seus vértices são congruentes, existindo o mesmo número de arranjo de polígonos ao seu redor.

Pela Definição 04 e Definição 05, acerca dos prismas, temos que os prismas regulares e anti-prismas satisfazem a Definição 08, o que nos dá infinitos poliedros arquimedianos. Pode-se perceber que cada vértice da *figura 09 - Prisma heptagonal regular* consiste em dois quadrados e um heptágono, formando uma configuração QQHp e na *figura 10 - Antiprisma heptagonal regular* temos a configuração TTHp. Não tratamos destes poliedros (prisma e anti-prisma) neste trabalho.

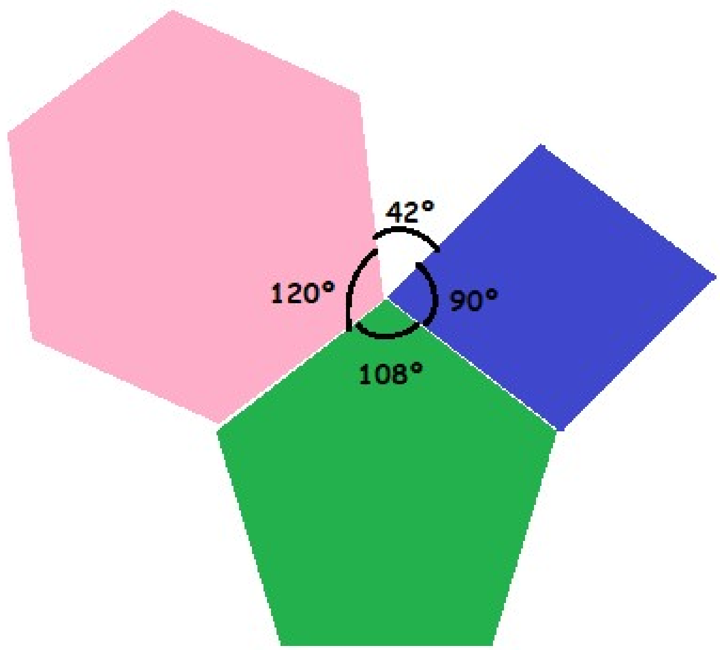
Segundo Ribeiro (2015, p. 28) *apud* Peter Crommwell (1997), Kepler subdividiu os poliedros semirregulares em arquimedianos e imperfeitos (prismas e anti-prismas) e verificou as possibilidades de agrupar os polígonos regulares a formar um poliedro arquimediano.

Temos então dois lemas necessários para esta formação, em Ribeiro (2015, p. 28) e Neves (2017, p. 43):

LEMA 01: se todas as faces de um poliedro convexo são polígonos regulares, então, no máximo três tipos diferentes de faces podem aparecer em torno de qualquer ângulo sólido.

Observe que, ao somar quatro ângulos regulares diferentes, temos um ângulo maior que 360º, contrariando o Teorema 01. Mas se tirarmos da figura 16 o quadrado, nos sobraria 132º o que dá suficiente dois triângulos equiláteros.

Figura 16 – faces regulares formando ângulo poliédrico não arquimediano



Fonte – do autor

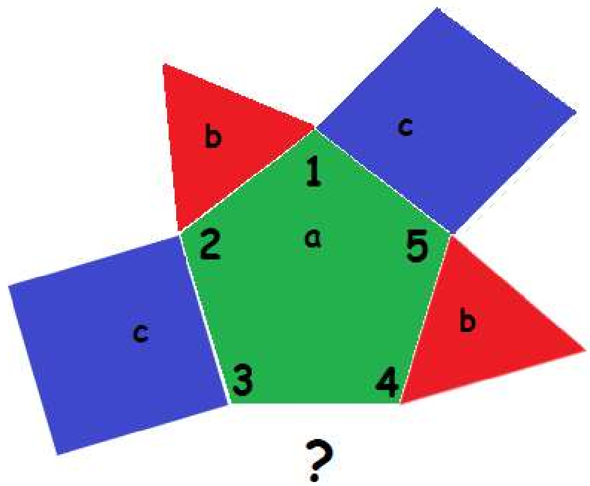
LEMA 02: em todo poliedro arquimediano, seus vértices podem ter combinações de 3, 4 ou 5 arestas em comum, como visto nas demonstrações dos Teorema 01 e 02.

Mas nem toda configuração de vértice/aresta/faces regulares é possível para se formar um poliedro arquimediano. Vejamos o Lema 03, em Ribeiro (2015, p. 29):

LEMA 03: um poliedro arquimediano em que todos os ângulos sólidos estão rodeados da mesma maneira não pode ter ângulos sólidos se:

a) num vértice com três arestas concorrentes e faces *a, b* e *c* (relativos a polígonos com a, b e c números de arestas), **a é ímpar e b ≠ c.** Vejamos um exemplo na figura 17:

Figura 17 – faces regulares impossíveis de formar um poliedro arquimediano

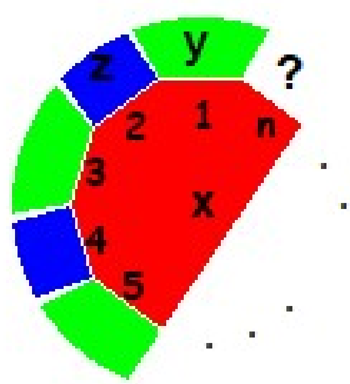


Fonte – do autor

Percebe-se que seria impossível formar um poliedro arquimediano com inicialmente estas faces, pois se colocasse um triângulo entre os vértices 3 e 4, o vértice 4 contrariaria a Definição 08 e se colocasse um quadrado entre os vértices 3 e 4, o vértice 3 também contrariaria a Definição 08.

b) num vértice com três arestas concorrentes e faces *x, y* e *z* (relativos a polígonos com x, y e z números de arestas), **x é ímpar.**

Figura 18 – faces regulares impossíveis de formar um poliedro arquimediano

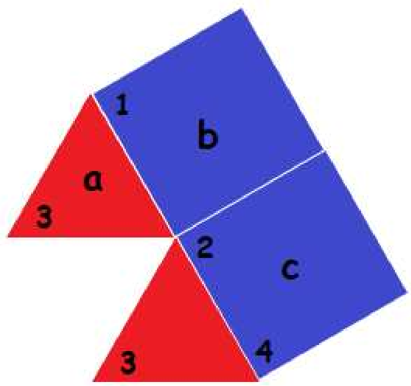


Fonte – do autor

c) num vértice com quatro arestas concorrentes e faces *a, b, c* e uma face triangular (relativos a polígonos com a, b e c números de arestas), a ≠ c.
Vejamos um exemplo e inicialmente vamos supor que possa haver tal combinação:

Dado um triângulo regular, associa-se no vértice 2 um triângulo regular e dois quadrados, conforme figura 19.

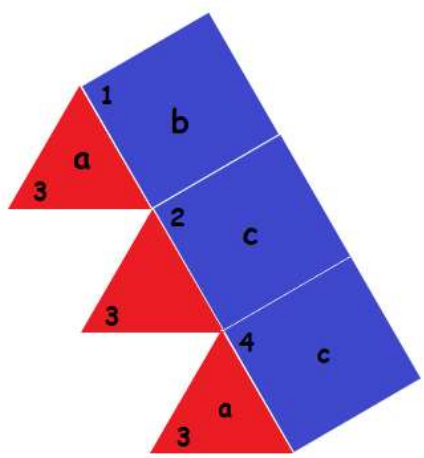
Figura 19 – faces regulares formando um ângulo poliédrico no vértice 2



Fonte – do autor

Acrescentamos mais uma combinação de quadrado triângulo ao vértice 4, pois o vértice 4 deve ter a mesma combinação de faces do vértice 2, logo:

Figura 20 – faces regulares formando um ângulo poliédrico no vértice 2 e vértice 4



Fonte – do autor

Então, para formar um vértice com 4 faces concorrentes ao vértice, a combinação da figura 20 não será possível, pois nos vértices 2 e 4 temos uma combinação (dois triângulos regulares e dois quadrados) diferente de faces em relação ao vértice 3 (três triângulos e outro polígono). Logo, cumpre verificar as possíveis combinações possíveis para um ângulo poliédrico num sólido arquimediano. Vejamos o Lema 04, segundo Neves (2017, p. 45).

LEMA 04: seja ***A*** um poliedro arquimediano, com três arestas formando um ângulo poliédrico. Se as faces dessas arestas possuírem ***x, y e z*** lados, então:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{2} \qquad \textbf{[Eq. 16]}$$

DEMONSTRAÇÃO: sejam os ângulos internos dos polígonos que formam o ângulo poliédrico tais que:

$$a_x + a_y + a_z < 360°$$

$$\frac{180°(x-2)}{x}+\frac{180°(y-2)}{y}+\frac{180°(z-2)}{z}<360°$$

$$\frac{(x-2)}{x}+\frac{(y-2)}{y}+\frac{(z-2)}{z}<2$$

$$1-\frac{2}{x}+1-\frac{2}{y}+1-\frac{2}{z}<2 \therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{2}$$

Então, podemos combinar faces regulares num vértice com três arestas em comum a este vértice. Veremos quais foram as possíveis combinações, tudo conforme as definições e lemas anteriormente citados.

2.3.1 Ângulos triédricos

2.3.1.1 Formações com duas faces iguais e outra diferente

Observe que pela [Eq 16], ao fazer $x = y$, temos:

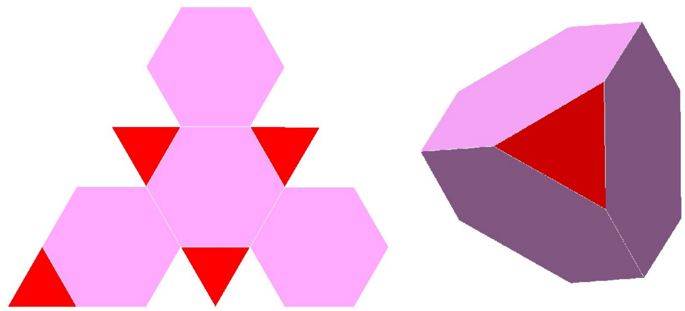
$$\frac{2}{x}+\frac{1}{z}>\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z}>\frac{1}{2}-\frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad z<\frac{2x}{x-4} \qquad \textbf{[Eq 17]}$$

Logo, $x > 4$ e como visto na letra **b)** do Lema 03, x é par.

a) fazendo $x = 6$ na [Eq 17] teremos: $\boldsymbol{z} < \frac{\mathbf{2 \cdot 6}}{\mathbf{6-4}} = \mathbf{6}$, três combinações:

1) Tetraedro truncado

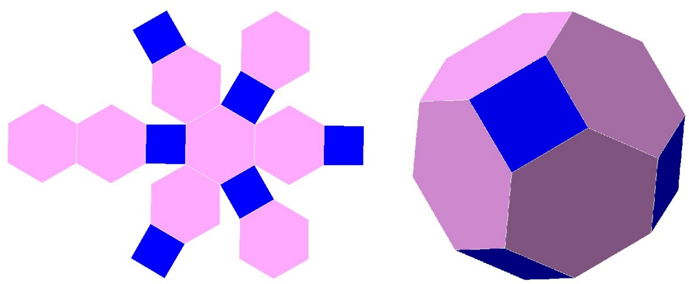
Figura 21 – tetraedro truncado (x = y = 6 e z = 3)



Fonte – do autor

2) Octaedro truncado

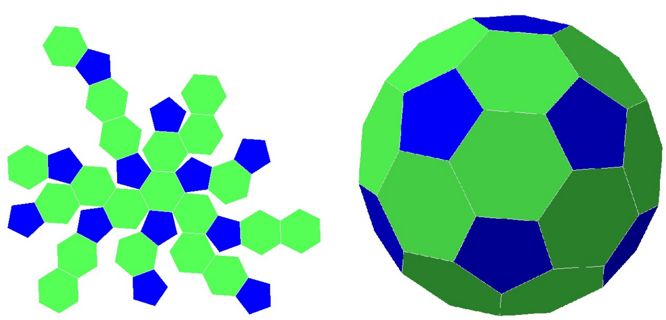
Figura 22 – octaedro truncado (x = y = 6 e z = 4)



Fonte – do autor

3) Icosaedro truncado

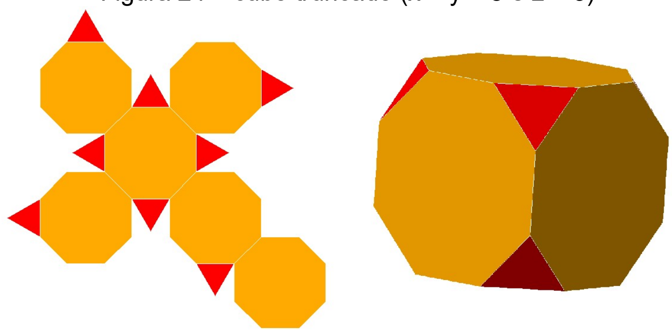
Figura 23 – icosaedro truncado (x = y = 6 e z = 5)



Fonte – do autor

b) fazendo $x = 8$ na [Eq 17] teremos: $\boldsymbol{z} < \frac{\mathbf{2 \cdot 8}}{\mathbf{8-4}} = \mathbf{4}$, uma combinação:

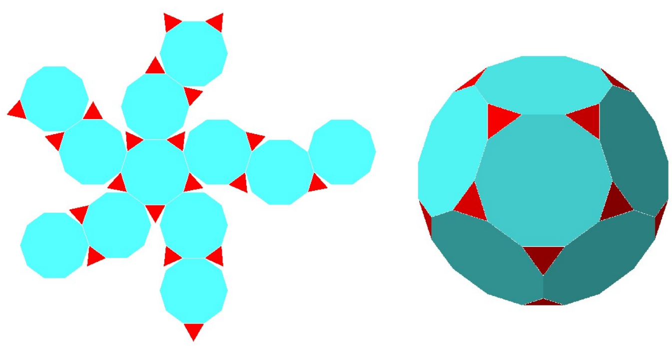
Figura 24 – cubo truncado (x = y = 8 e z = 3)



Fonte – do autor

c) fazendo $x = 10$ na [Eq 17] teremos: $\boldsymbol{z} < \frac{\mathbf{2 \cdot 10}}{\mathbf{10-4}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}$, uma combinação:

Figura 25 – dodecaedro truncado (x = y = 10 e z = 3)



Fonte – do autor

d) e, por último, fazendo $x = 12$ na [Eq 17] teremos: $\boldsymbol{z} < \frac{\mathbf{2 \cdot 12}}{\mathbf{12-4}} = \mathbf{3}$

Dessa forma, não teremos poliedro arquimediano com uma combinação de dodecágono / dodecágono / z, pois não existe polígono com um ou dois lados.

2.3.1.2 Formações com faces diferentes

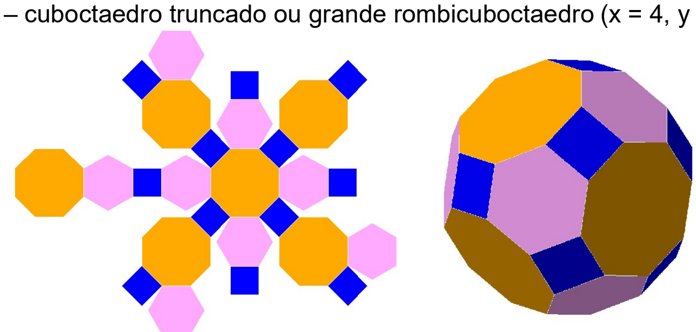
Observa-se agora os casos que no ângulo triédrico as faces são diferentes. Como já visto, as faces das arestas em comum aos vértices são pares. A primeira sugestão é:

a) Quadrado / hexágono / octógono: 90° + 120° + 135° = 345° < 360°

Vemos que a [Eq 16] é verdadeira:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1 \quad \rightarrow \quad \frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}>1$$

Figura 26 – cuboctaedro truncado ou grande rombicuboctaedro (x = 4, y = 6 e z = 8)



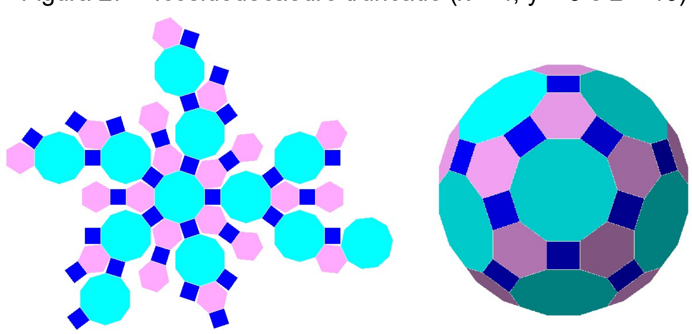
Fonte – do autor

b) Quadrado / hexágono / decágono: 90° + 120° + 144° = 354° < 360°

Vemos que a [Eq 16] é verdadeira:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}>\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}>1 \quad \rightarrow \quad \frac{15+10+6}{30}=\frac{31}{30}>1$$

Figura 27 – Icosidodecaedro truncado (x = 4, y = 6 e z = 10)



Fonte – do autor

c) Quadrado / hexágono / dodecágono: 90° + 120° + 150° = 360°

Vemos que a [Eq 16] não é verdadeira para este caso:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}>\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\ngtr 1 \quad \rightarrow \quad 1=1$$

Da mesma forma para o Hexágono / octógono / decágono:

120° + 135° + 144° = 399° > 360°

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}>\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}>1 \quad \rightarrow \quad \frac{20+15+12}{60}=\frac{47}{60} \ngtr 1$$

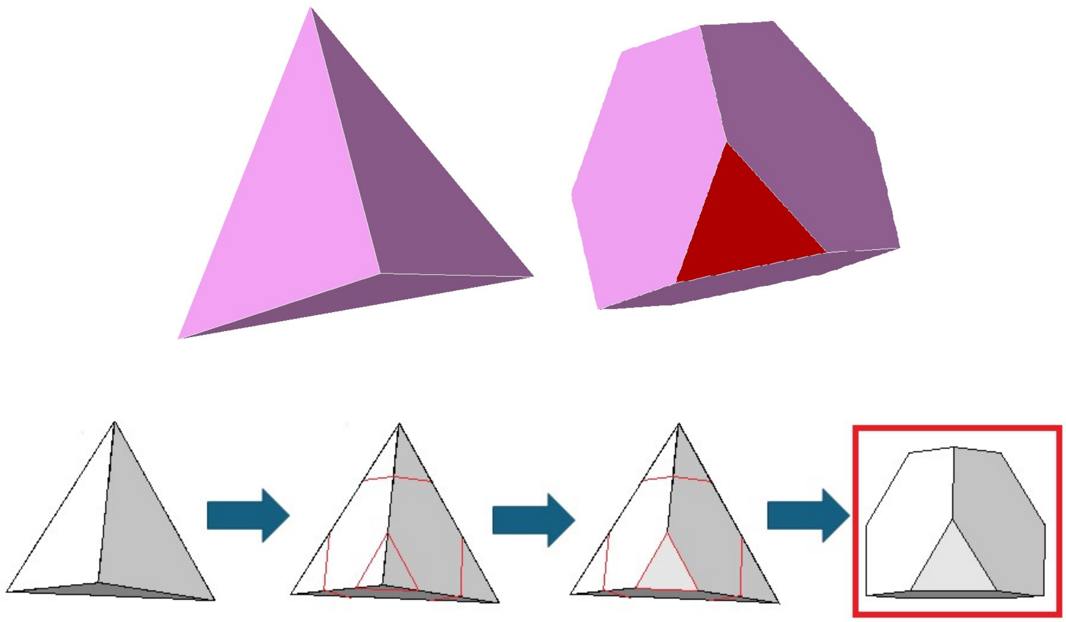
Portanto, não há mais possibilidade de combinar outros polígonos com lados pares, pois a desigualdade da [Eq 16] não mais é verificada e a soma dos ângulos são maiores que 360°.

Então, temos estes sete poliedros arquimedianos com ângulos triédrico:

1. Tetraedro truncado
2. Octaedro truncado
3. Icosaedro truncado
4. Cubo truncado
5. Dodecaedro truncado
6. Cuboctaedro truncado ou grande rombicuboctaedro
7. Icosidodecaedro truncado

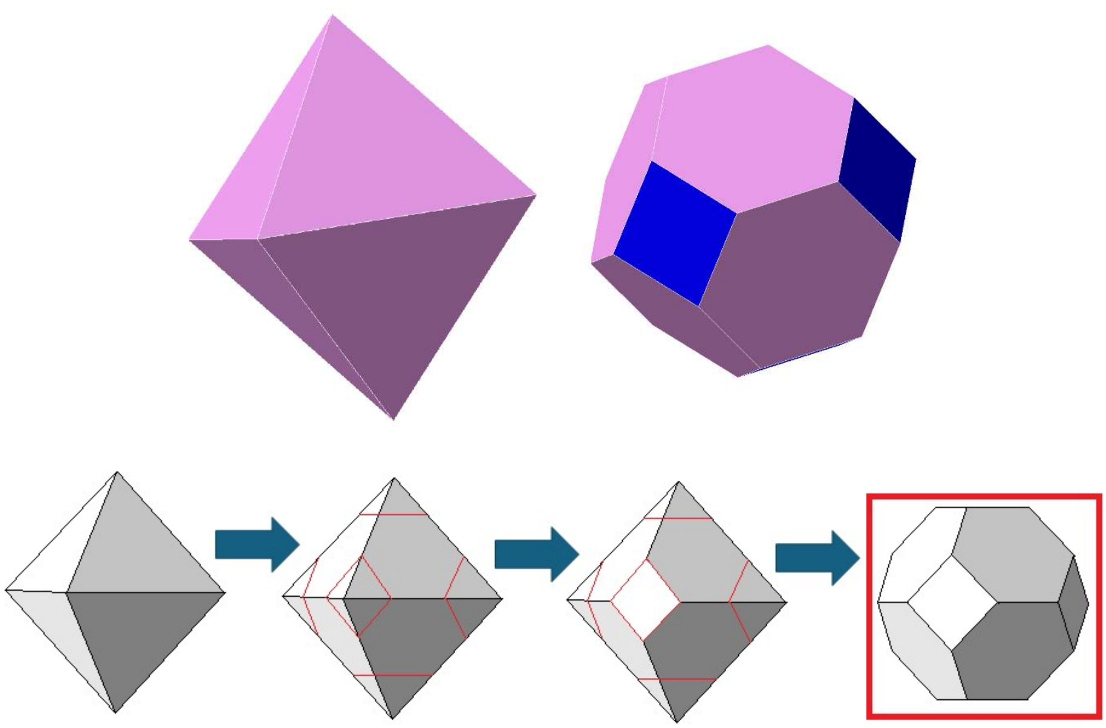
Os cinco primeiros poliedros arquimedianos acima podem ser vistos concomitantemente com os poliedros de Platão, sendo estes últimos seccionados, formando os poliedros de Arquimedes, como veremos a seguir, nas próximas páginas:

Figura 28 – Tetraedro e tetraedro truncado



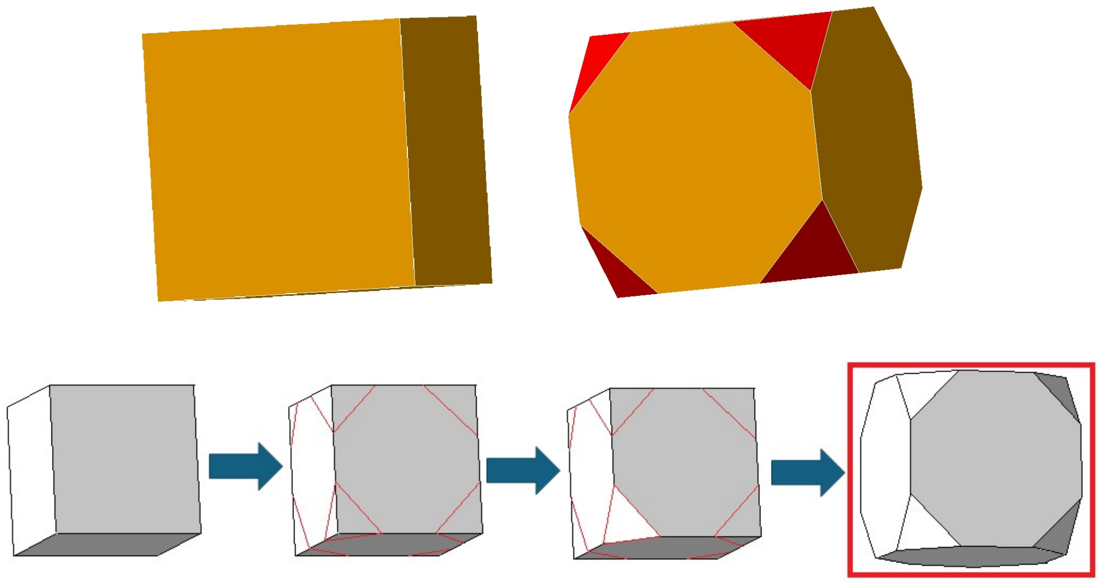
Fonte – do autor

Figura 29 – Octaedro e octaedro truncado



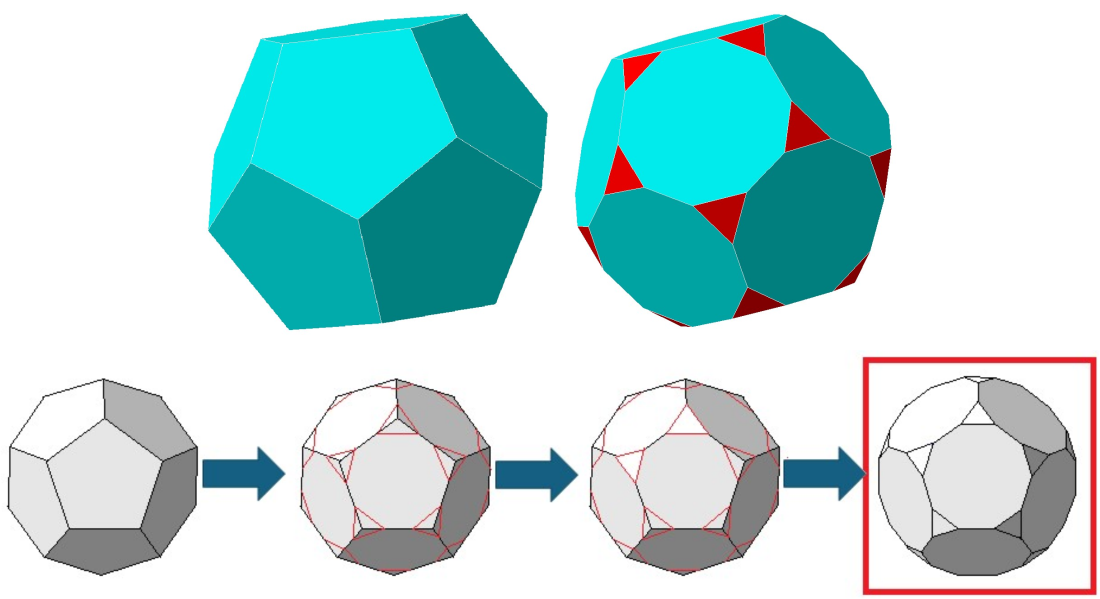
Fonte – do autor

Figura 30 – Cubo e cubo truncado



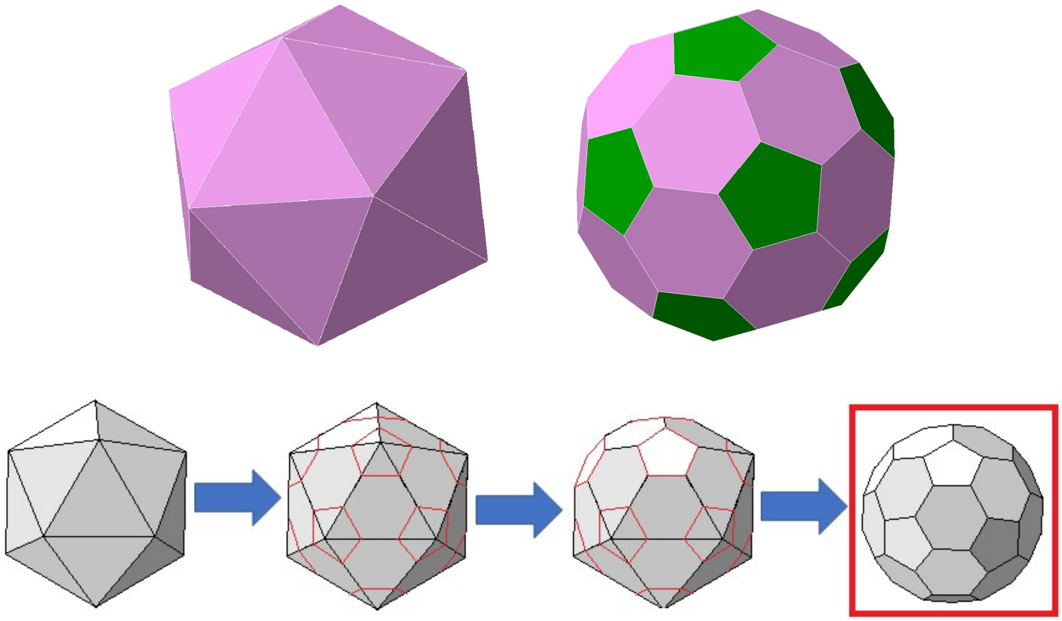
Fonte – do autor

Figura 31 – Dodecaedro e Dodecaedro truncado



Fonte – do autor

Figura 32 – Icosaedro e Icosaedro truncado



Fonte – do autor

2.3.2 Ângulos quadriédricos

Neves (2017, p. 49) dissertou o lema 05 desta forma:

LEMA 05: seja ***A*** um poliedro arquimediano, com quatro arestas formando um ângulo poliédrico. Então, podemos combinar os vértices da seguinte forma: *aaab*, *abab* e *abac*. Além disso, a combinação *abac* deverá ser par.

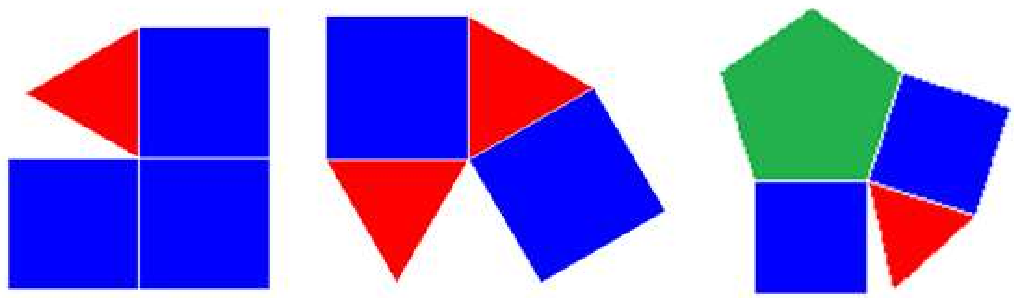
Demonstração: conforme a letra c) do [**LM 03**], dada uma combinação de polígonos num ângulo:

"*Num vértice com quatro arestas concorrentes e faces a, b, c e uma face triangular (relativos a polígonos com a, b e c números de arestas), a ≠ c*".

Então, seja um poliedro arquimediano ***A*** tal que ***A*** possui ângulos quadriédricos. Primeiramente observamos a figura 33 abaixo e para que haja um ângulo quadriédrico, necessita necessariamente de um triângulo equilátero.

OBSERVAÇÃO 01: é fácil perceber que qualquer poliedro arquimediano que contenha ângulos quadriédricos é necessário que haja pelo menos um triângulo equilátero.

Figura 33 – exemplos de ângulos quadriédricos aaaT, aTaT e abaT



Fonte – do autor

Pelo Lema 05 e Observação 01 temos algumas combinações de faces regulares como aaaT, aTaT e abaT.

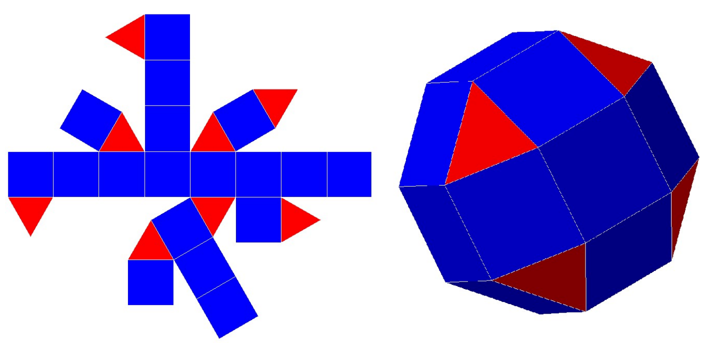
2.3.2.1 Combinação aaaT:

A única possível será com quadrados. Com quaisquer outros polígonos, não é formado o ângulo quadriédrico. Pois:

$$a_x + a_y + a_z + a_w < 360° \qquad \textbf{[Eq 18]}$$

$a_x + a_x + a_x + 60° < 360° \rightarrow 3 \cdot a_x < 300° \rightarrow a_x < 100°$, logo $a_x = 90°$.

Figura 34 – Rombicuboctaedro



Fonte – do autor

2.3.2.2 Combinação aTaT:

Vejamos os possíveis valores para os ângulos internos dos polígonos que formarão o ângulo quadriédrico:

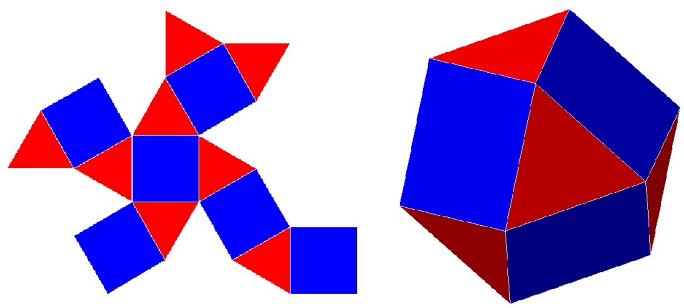
$$a_x + 60° + a_x + 60° < 360° \rightarrow 2 \cdot a_x < 240° \rightarrow a_x < 120°$$

Logo, podemos ter combinações de quadrados e pentágonos, mas nada maior que um hexágono (ângulo interno do hexágono = 120°).

a) QTQT – Quadrado-Triângulo-Quadrado-Triângulo

$$90° + 60° + 90° + 60° < 360° \rightarrow 300° < 360°$$

Figura 35 – Cuboctaedro

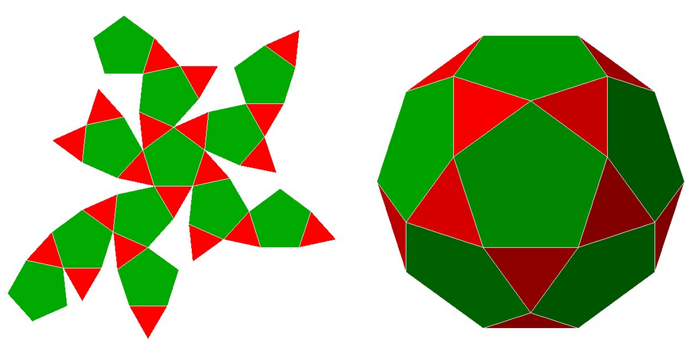


Fonte – do autor

b) PTPT – Pentágono-Triângulo-Pentágono-Triângulo

$$108° + 60° + 108° + 60° < 360° \rightarrow 336° < 360°$$

Figura 36 – Icosidodecaedro



Fonte – do autor

2.3.2.3 Combinação abaT:

Vejamos os possíveis valores para os ângulos internos dos polígonos que formam o ângulo quadriédrico:

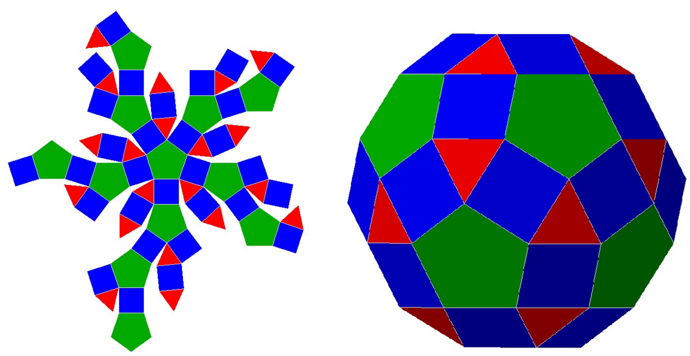
$$a_x + a_y + a_x + 60° < 360° \rightarrow 2 \cdot a_x + a_y < 300°$$

1º caso: supondo $\boldsymbol{a_x}$ ser o próximo polígono regular com menor ângulo, teremos:

$$2 \cdot 90° + a_y < 300° \rightarrow a_y < 120°$$

logo, temos um pentágono como o quarto polígono, formando a combinação QPQT – Quadrado-Pentágono-Quadrado-Triângulo, conforme figura 37, abaixo.

Figura 37 – Rombicosidodecaedro



Fonte – do autor

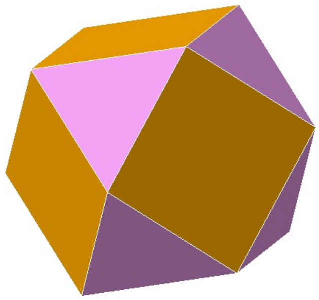
2º caso: supondo $\boldsymbol{a_x}$ ser o polígono regular com menor ângulo depois do quadrado, teremos:

$$108° + a_y + 108° + 60° < 360° \rightarrow a_y < 84°$$

Logo, não é possível fazer a combinação PQPT e nem mais alguma outra combinação com polígonos regulares.

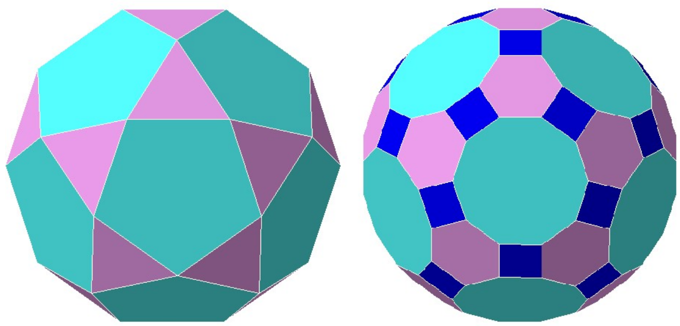
Podemos ainda encontrar os truncamentos dos Cuboctaedro e Icosidodecaedro, mostrando-os concomitantemente (embora sejam poliedros com ângulos triédricos).

Figura 38 – Cuboctaedro e Cuboctaedro truncado



Fonte – do autor

Figura 39 – Icosidodecaedro e Icosidodecaedro truncado



Fonte – do autor

2.3.3 Ângulos pentaédricos

Os sólidos arquimedianos com ângulos pentaédricos são mais fáceis de serem determinados, pois como deve ter 5 faces em comum a um vértice e seu ângulo menor que 360°, não podemos pegar 4 quadrados ou um outro polígono maior pois ultrapassaria os 360°. Só nos sobra usar o triângulo equilátero.

$$a_v + a_z + a_w + a_y + a_x < 360° \qquad \textbf{[Eq 19]}$$

$$a_T + a_T + a_T + a_T + a_x < 360°$$

$$a_x + 240° < 300°$$

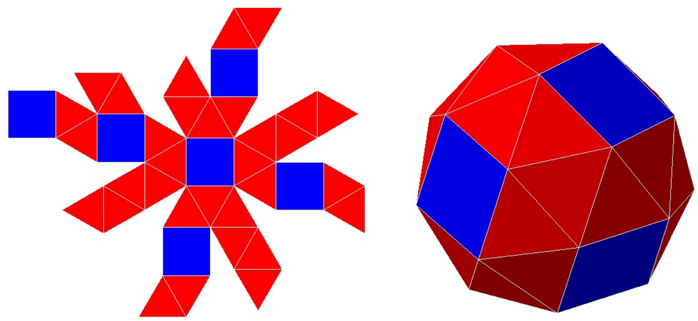
$$a_x < 120°$$

Então o polígono que difere do triângulo terá um ângulo menor que 120°. Logo, teremos quadrados ($a_i = 90°$) e pentágonos ($a_i = 108°$).

2.3.3.1 *Triângulos e quadrados*

Quatro triângulos formam um ângulo de 240° mais um quadrado com um ângulo de 90° (< 120°) ficará um total de 330°. Veja a figura 40 a seguir:

Figura 40 – Snub Cuboctaedro



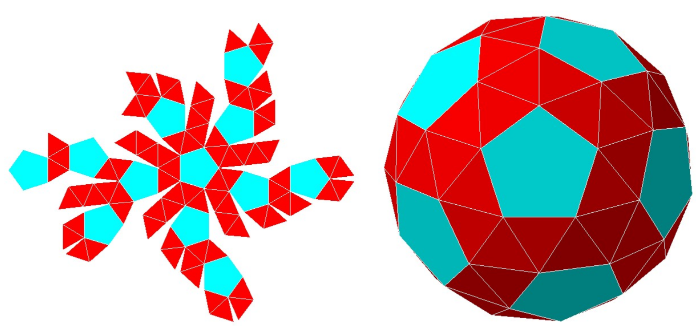
Fonte – do autor

Se combinarmos 3 triângulos e dois quadrados, teremos 360° e não formará um ângulo poliédrico. Desta forma a única combinação possível de triângulos e quadrados para um ângulo pentaédrico é TTTTQ.

2.3.3.2 *Triângulos e pentágonos:*

Quatro triângulos nos formam um ângulo de 240° mais um pentágono com um ângulo de 108° ficará um total de 348°. Vemos na figura 41 a seguir:

Figura 41 – Snub Icosidodecaedro



Fonte – do autor

Se combinar 3 triângulos e dois pentágonos, teremos 396° e não forma um ângulo poliédrico. Desta forma a única combinação possível de triângulos e pentágonos é TTTTP.

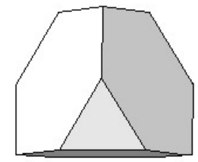
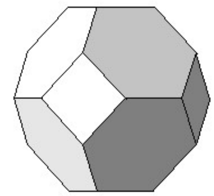
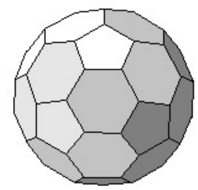
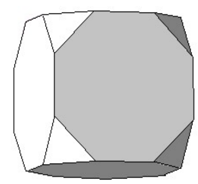
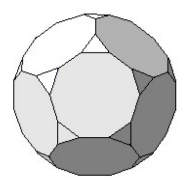
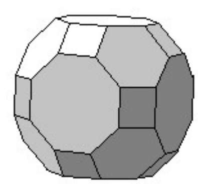
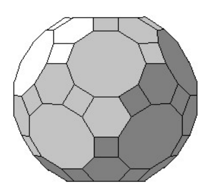
Perceba que não há mais combinações de ângulo pentaédricos, pois ao somar 4 triângulos e um hexágono temos um total de 360°. A medida que aumentamos o número de lados do polígono diferente ao triângulo este resultado acima aumentará, logo só existem estas duas combinações de ângulos pentaédricos formando um polígono arquimediano.

Note também que não há ângulo hexaédrico, conforme a Definição 07.

Segundo Melo (2014, p. 13), a snubficação é o processo de afastar as faces de um poliedro preenchendo os espaços formados entre elas com outras faces (polígonos), em alguns casos a rotação das faces é necessária.

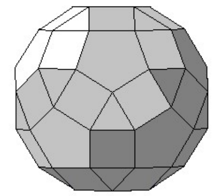
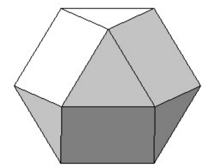
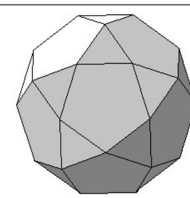
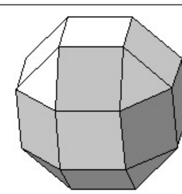
Resumindo nas tabelas 02, 03 e 04 abaixo, teremos os 13 poliedros de Arquimedes:

Tabela 02 – Poliédros Arquimedianos com Ângulos Triédricos

Nr	Nome do Poliedro	Configuração das faces	Configuração F + V = A + 2	Poliedros
1	Tetraedro truncado	Hexágono Hexágono Triângulo **H-H-T**	4 Triângulos 4 Hexágonos 12 Vértices 18 Arestas **12 + 8 = 18 + 2**	
2	Octaedro truncado	Hexágono Hexágono Quadrado **H-H-Q**	6 Quadrados 8 Hexágonos 24 Vértices 36 Arestas **14 + 24 = 36 + 2**	
3	Icosaedro truncado	Hexágono Hexágono Pentágono **H-H-P**	12 Pentágonos 20 Hexágonos 60 Vértices 90 Arestas **32 + 60 = 90 + 2**	
4	Cubo truncado	Octógono Octógono Triângulo **O-O-T**	8 Triângulos 6 Octógonos 24 Vértices 36 Arestas **14 + 24 = 36 + 2**	
5	Dodecaedro truncado	Dodecágono Dodecágono Triângulo **D-D-T**	20 Triângulo 12 Dodecágono 60 Vértices 90 Arestas **32 + 60 = 90 + 2**	
6	Cuboctaedro truncado ou grande rombicuboctaedro	Quadrado Hexágono Octógono **Q-H-O**	12 Quadrados 8 Hexágonos 6 Octógono 48 Vértices 72 Arestas **26 + 48 = 72 + 2**	
7	Icosidodecaedro truncado	Quadrado Hexágono Dodecágono **Q-H-D**	30 Quadrados 20 Hexágonos 12 Dodecágonos 48 Vértices 72 Arestas **62 + 120 = 180 + 2**	

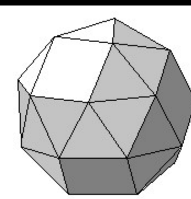
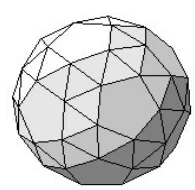
Fonte – do autor

Tabela 03 – Poliédros Arquimedianos com Ângulos Quadriédricos

Nr	Nome do Poliedro	Configuração das faces	Configuração F + V = A + 2	Poliedros
1	Rombicosi- dodecaedro	Triângulo Quadrado Pentágono Quadrado **T-Q-P-Q**	20 Triângulos 30 Quadrados 12 Pentágonos 60 Vértices 120 Arestas **62 + 60 = 120 + 2**	
2	Cuboctaedro	Triângulo Quadrado Triângulo Quadrado **T-Q-T-Q**	8 Triângulos 6 Quadrados 12 Vértices 24 Arestas **14 + 12 = 24 + 2**	
3	Icosidodecaedro	Triângulo Pentágono Triângulo Pentágono **T-P-T-P**	20 Triângulos 12 Pentágonos 30 Vértices 60 Arestas **32 + 30 = 60 + 2**	
4	Rombicuboctaedro	Triângulo Quadrado Quadrado Quadrado **T-Q-Q-Q**	8 Triângulos 18 Quadrados 26 Vértices 48 Arestas **26 + 24 = 48 + 2**	

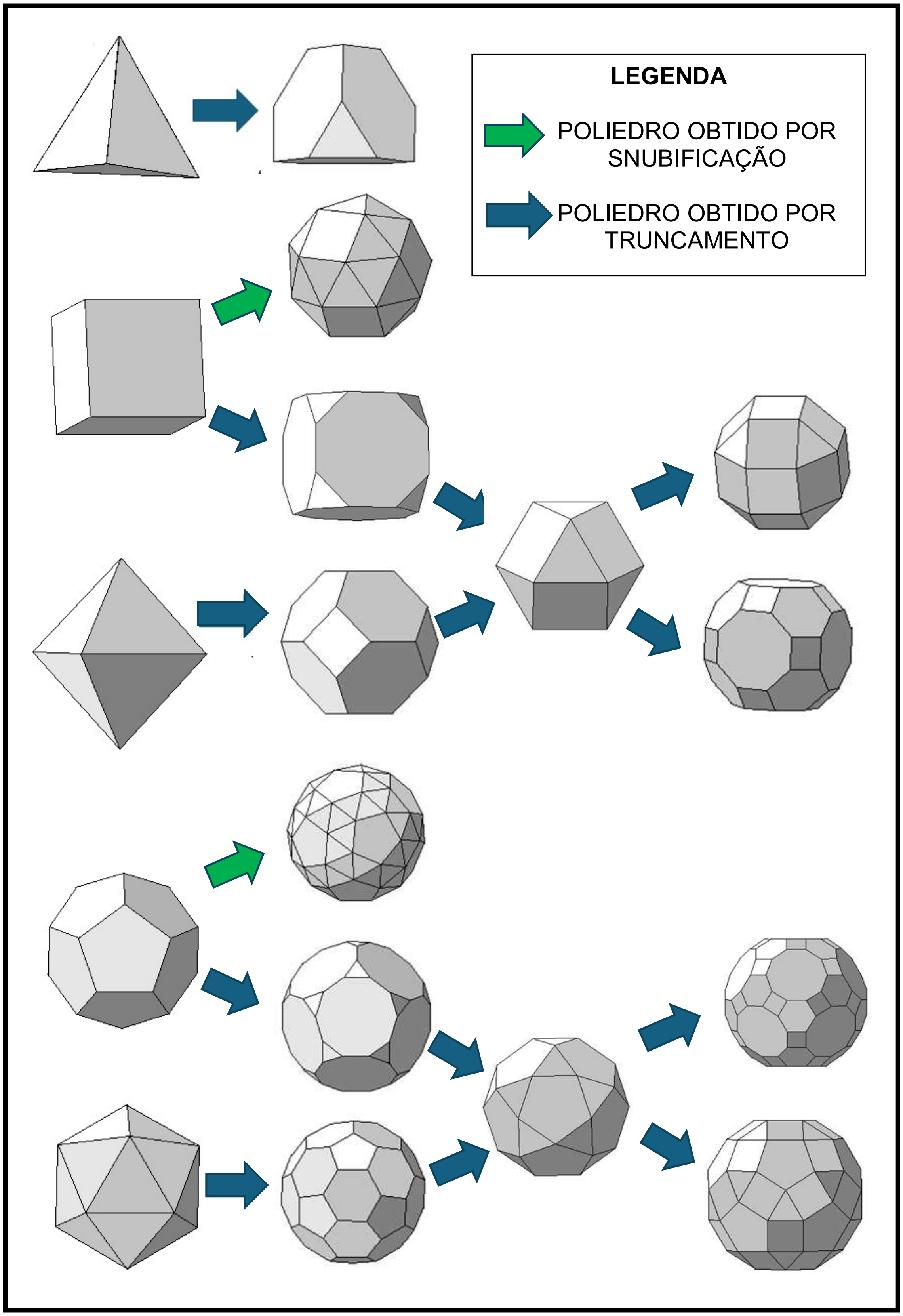
Fonte – do autor

Tabela 04 – Poliédros Arquimedianos com Ângulos Pentaédricos

Nr	Nome do Poliedro	Configuração das faces	Configuração F + V = A + 2	Poliedros
1	Snub Cuboctaedro	Triângulo Triângulo Triângulo Triângulo Quadrado **T-T-T-T-Q**	32 Triângulos 6 Quadrados 24 Vértices 60 Arestas **38 + 24 = 60 + 2**	
2	Snub Icosidodecaedro	Triângulo Triângulo Triângulo Triângulo Pentágono **T-T-T-T-P**	80 Triângulos 12 Pentágonos 60 Vértices 150 Arestas **92 + 60 = 150 + 2**	

Fonte – do autor

Figura 42 – Obtenção de poliedros arquimedianos



Fonte – do autor

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

A presente pesquisa teve como objetivo explorar ações práticas e criativas para o ensino de Geometria, com ênfase na exploração dos **Poliedros de Arquimedes**. Dessa forma, a metodologia adotada foi estruturada a fim de que houvesse uma investigação e a aplicação de atividades didáticas baseadas na experimentação e construção geométrica, possibilitando uma abordagem significativa para a aprendizagem.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa adotou uma abordagem **qualitativa e exploratória**, com características de pesquisa **intervencionista** e **descritiva**.

- **Qualitativa**: o estudo priorizou a compreensão da aprendizagem dos alunos por meio da observação de suas interações com as atividades práticas, bem como suas percepções e dificuldades.

Segundo Minayo (2010, p. 21) "A pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais."

- **Exploratória:** buscou investigar e testar estratégias didáticas inovadoras para o ensino de Geometria, particularmente no estudo dos Poliedros de Arquimedes.

Gil (2010, p. 27) descreve que "A pesquisa exploratória tem como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, com vistas à formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores."

- **Intervencionista**: a pesquisa envolveu a aplicação de uma sequência didática com atividades práticas e criativas, visando testar métodos que facilitem a aprendizagem dos conceitos geométricos.

Em sua pesquisa, Engeström (2011, p. 86) diz que "A pesquisa intervencionista supõe uma ação planejada do pesquisador, voltada à transformação de uma determinada realidade, ao mesmo tempo em que se produz conhecimento sobre esse processo.”

- **Descritiva**: Além de propor estratégias de ensino, a pesquisa descreveu os impactos das atividades na compreensão dos alunos sobre os conceitos geométricos.

Gil (2010, p. 28) afirma ainda que “As pesquisas descritivas têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis.”

No cenário da pesquisa-ação, os participantes e os pesquisadores podem responder com mais precisão às questões cotidianas pelo fato de existir uma ‘relação direta’ entre eles. Nesse sentido, Thiollent (2011, p. 20) nos diz que “a pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.”

O estudo foi realizado em um ambiente escolar, utilizando materiais concretos e digitais para a construção dos Poliedros de Arquimedes, promovendo, desta forma, uma abordagem lúdica e interativa.

Quanto ao procedimento metodológico, tratou-se de um estudo de caso, um método que possibilitasse a investigação aprofundada de um fenômeno específico dentro de um contexto delimitado. Essa abordagem permitiu a triangulação de diferentes técnicas de coleta de dados, tais como análise documental, entrevistas semiestruturadas, questionários e observação do participante, proporcionando uma visão holística do objeto de estudo e contribuindo para o aprofundamento das interpretações e inferências sobre o fenômeno analisado (Yin, 2018).

3.2 SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida com **estudantes do Clube de Matemática do Colégio Militar de Manaus – CMM**.

O Clube de Matemática é composto por alunos voluntários do CMM do ensino fundamental II (6º ao 9º ano) ou ensino médio, sem qualquer distinção de notas escolares. O clube funciona no turno vespertino, toda quarta-feira e tem 1:30 de funcionamento. Um dos seus principais objetivos é preparar os alunos para olimpíadas, tipo OBMEP, Canguru e Sem Fronteira com atividades lúdicas e resolução de provas anteriores. O clube possui uma sala própria e todas as atividades aqui elencadas foram realizadas nesta sala com os alunos participantes. O professor responsável pelo Clube de Matemátia atua no clube há 4 anos, sendo ele também responsável pelas OBMEP e Canguru, no CMM. Os alunos do 8º e 7º ano que participam do clube, estão no clube desde o 6º ano do EF.

A implementação da Sequência Didática planejada exigiu um total de 7 horas-aula, distribuídas estrategicamente ao longo do período da pesquisa. As atividades foram desenvolvidas de maneira sistematizada, com o objetivo de promover uma abordagem didático-pedagógica estruturada e alinhada às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), garantindo a efetividade da aprendizagem dos conteúdos abordados.

3.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática foi planejada para **cinco encontros**, cada uma abordando diferentes aspectos dos Poliedros de Arquimedes por meio de atividades práticas e reflexivas.

1º Encontro (1h 30min) – Introdução à geometria espacial, aos poliedros de Arquimedes e construção manual dos poliedros de Arquimedes utilizando papel para cortar e colar

a) Discussão inicial sobre a importância da Geometria no cotidiano.

b) Breve histórico e conceitos fundamentais dos Poliedros de Arquimedes.

c) Apresentação de modelos físicos e digitais desses poliedros.

d) Divisão da turma em grupos para a construção de modelos físicos utilizando papel para cortar e colar.

e) Identificação e comparação das propriedades geométricas de cada poliedro construído.

2º Encontro (1h 30min) – Construção manual dos poliedros de Arquimedes utilizando palitos e jujubas

a) Apresentação de modelos físicos e digitais desses poliedros.

b) Divisão da turma em grupos para a construção de modelos físicos utilizando palitos e jujubas.

c) Identificação e comparação das propriedades geométricas de cada poliedro construído.

3º Encontro (1h 30min) – Construção manual dos poliedros de Arquimedes utilizando Origami modular

a) Apresentação de modelos físicos e digitais desses poliedros.

b) Divisão da turma em grupos para a construção de modelos físicos utilizando Origami modular.

c) Identificação e comparação das propriedades geométricas de cada poliedro construído.

4º Encontro (1h 30min) – Construção manual dos poliedros de Arquimedes utilizando brinquedo de sólidos de Arquimedes

a) Apresentação de modelos físicos e digitais desses poliedros.

b) Divisão da turma em grupos para a construção de modelos físicos utilizando brinquedo de sólidos de Arquimedes.

c) Identificação e comparação das propriedades geométricas de cada poliedro construído.

5º Encontro (1h) – Avaliação e Reflexão Final

a) Questionário e roda de conversa sobre as aprendizagens adquiridas.

b) Comparação entre o conhecimento prévio dos alunos e suas percepções após as atividades.

c) Sugestões de aprimoramento das práticas desenvolvidas.

Essa sequência didática pôde permitir que os alunos aprendessem de forma **ativa**, **colaborativa e interdisciplinar**, reforçando a importância da experimentação na Matemática.

Primeiramente, as observações realizadas pelo pesquisador foram documentadas de forma contínua, com o intuito de registrar o comportamento dos alunos, suas interações e o desenvolvimento das atividades propostas durante as aulas expositivas, bem como durante a produção dos sólidos em construção, abordando conceitos matemáticos específicos relacionados ao conteúdo das atividades aplicadas na sequência didática.

3.4 COLETA E ANÁLISE DE DADOS

A coleta de dados para a realização deste estudo foi desenvolvida a partir de múltiplos instrumentos, com o objetivo de proporcionar uma análise abrangente e detalhada do processo de ensino-aprendizagem durante a aplicação das Atividades. Os dados foram obtidos por meio de registros de observações sistemáticas realizadas pelo pesquisador ao longo da implementação das atividades pedagógicas, complementadas pela aplicação de questionários e pela execução de atividades práticas com os estudantes.

3.4.1 Instrumentos de Coleta de Dados

3.4.1.1 Observações dos participantes

Durante todas as atividades, o pesquisador acompanhou os alunos e registrou suas interações, dificuldades e percepções sobre os Poliedros de Arquimedes.

3.4.1.2 Registros fotográficos e audiovisuais

As etapas da construção dos poliedros foram documentadas por meio de fotos e vídeos, permitindo analisar posteriormente as estratégias dos alunos na construção e manipulação dos modelos.

3.4.1.3 Questionários e entrevistas semiestruturadas

Foram aplicados questionários para avaliar a evolução do conhecimento dos alunos, antes e depois das atividades, nos 1º e 4º encontros. Os professores participantes foram entrevistados para compreender a aplicabilidade da abordagem no ensino regular.

Os questionários diagnósticos e avaliativos e entrevistas com alunos e professores para esta pesquisa encontram-se disponíveis nos apêndices.

1) Questionário Diagnóstico (Aplicado antes da Intervenção Didática)

Este questionário visou avaliar o conhecimento prévio dos alunos sobre conceitos geométricos e os Poliedros de Arquimedes, bem como entender suas percepções sobre o ensino da Geometria. (APÊNDICE A)

2) Questionário Avaliativo (Aplicado no último da Intervenção Didática)

Este questionário procurou avaliar o conhecimento adquirido dos alunos sobre os conceitos básicos e os poliedros de Arquimedes. (APÊNDICE B)

3) Entrevistas com alunos e professores

Esta entrevista teve a finalidade de oferecer aos alunos e professores a oportunidade de se expressar no contexto didático, avaliando-o e melhorando-o. (APÊNDICES C e D)

3.4.1.4 Instrumentos de pesquisa

a) PAPEL PARA CORTAR E COLAR: a fonte das figuras dos poliedros arquimedianos abaixo é o site:

   https://www.polyhedra.net/pt/pictures.php?type=a

Figura 43 – Tetraedro truncado (à esquerda) e Cubo truncado (à direita)

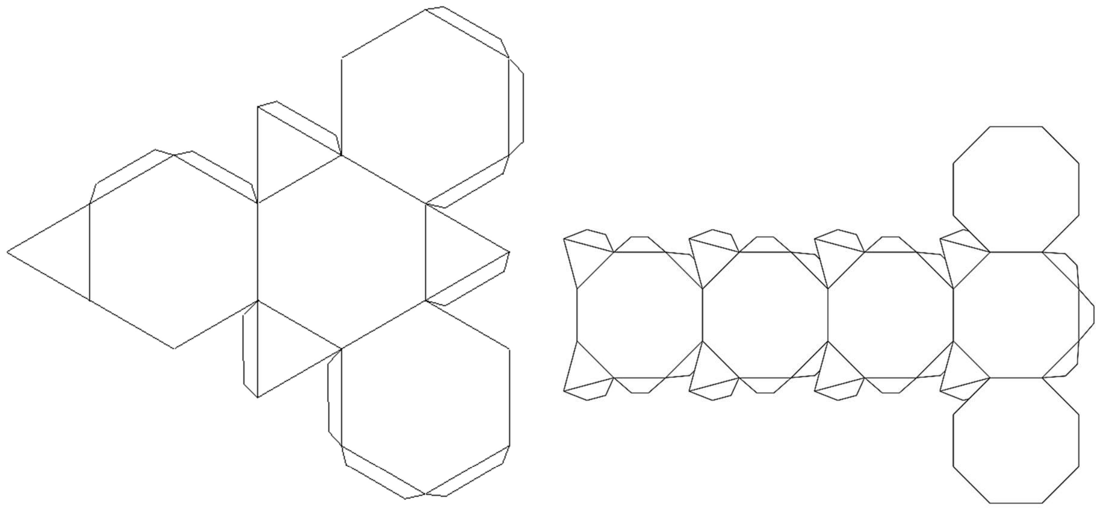


Figura 44 – Cubo Snub (à esquerda) e Dodecaedro Snub (à direita)

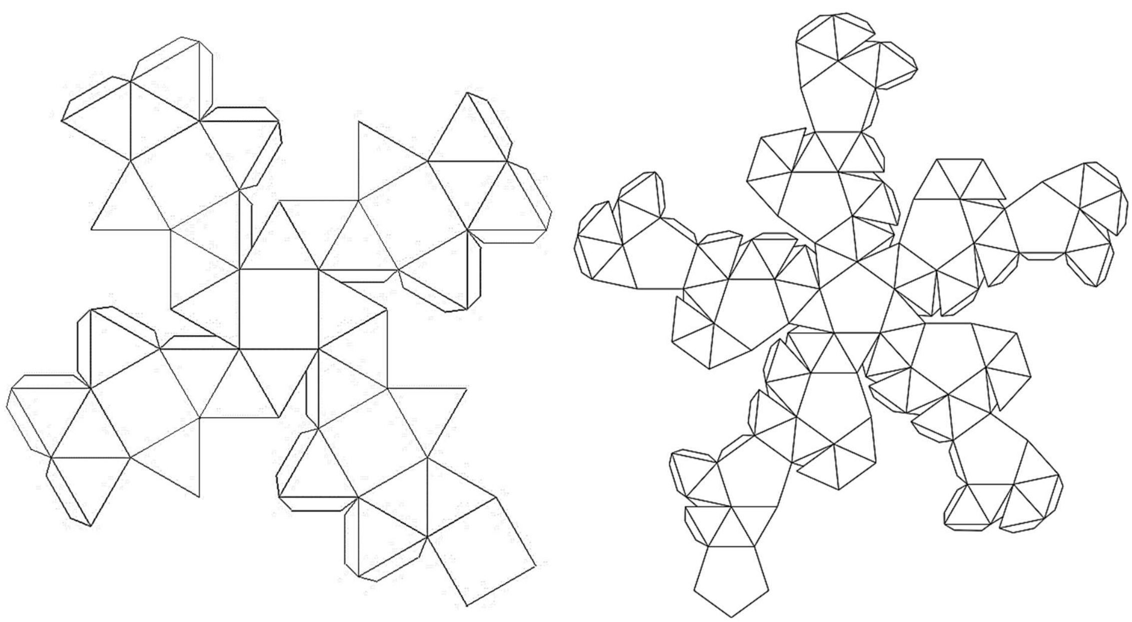


Figura 45 – Octaedro truncado (à esquerda) e Dodecaedro Truncado (à direita)

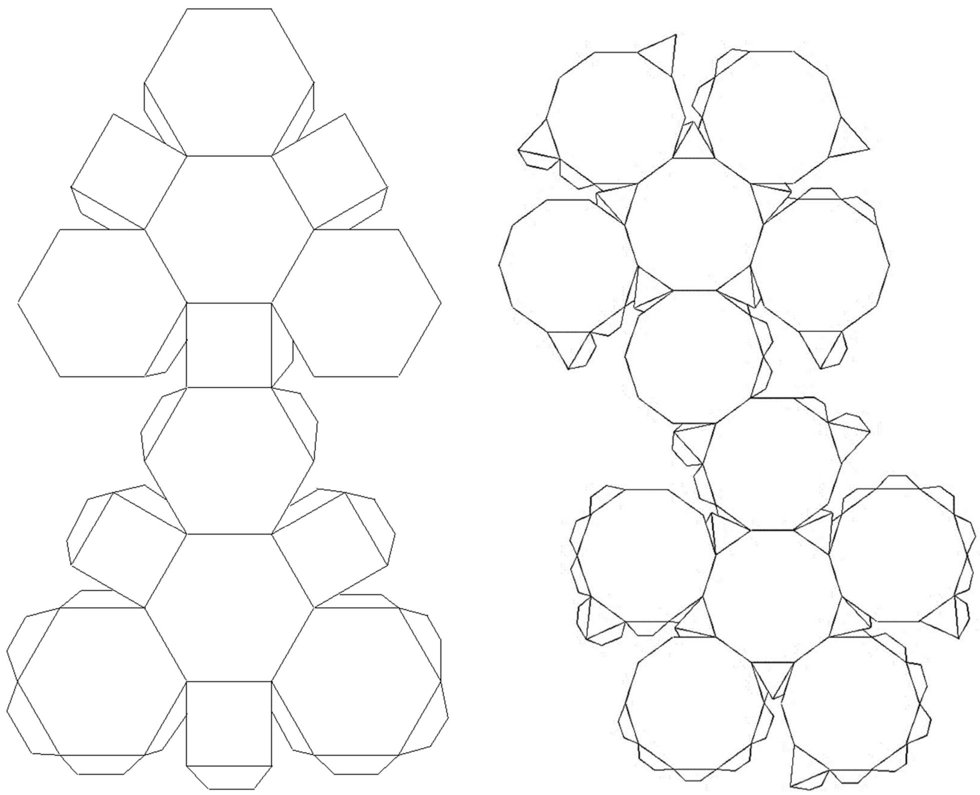


Figura 46 – Icosaedro truncado

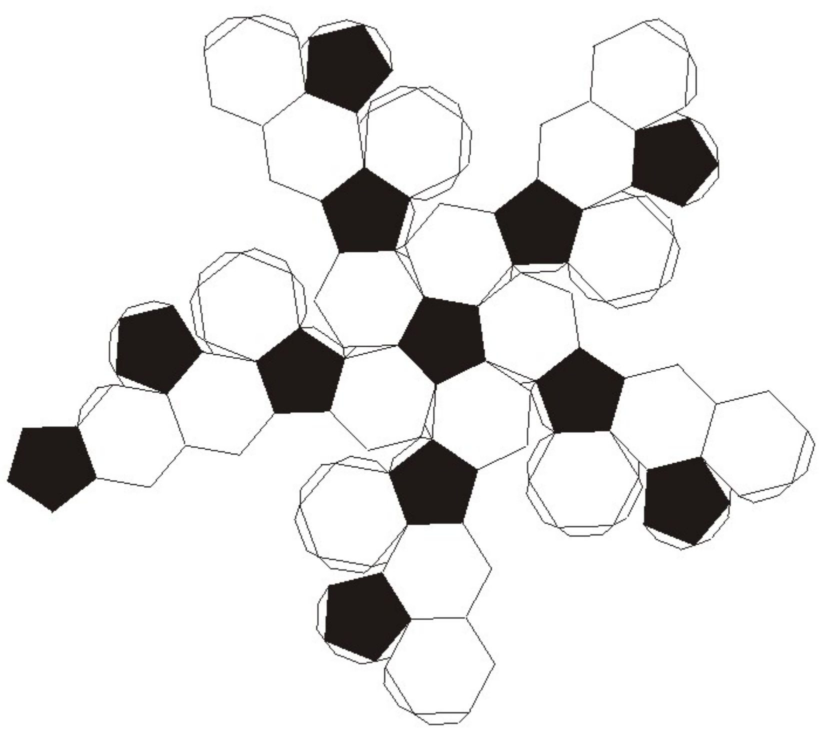


Figura 47 – Cuboctaedro (à esquerda) e Rombicuboctaedro (à direita)

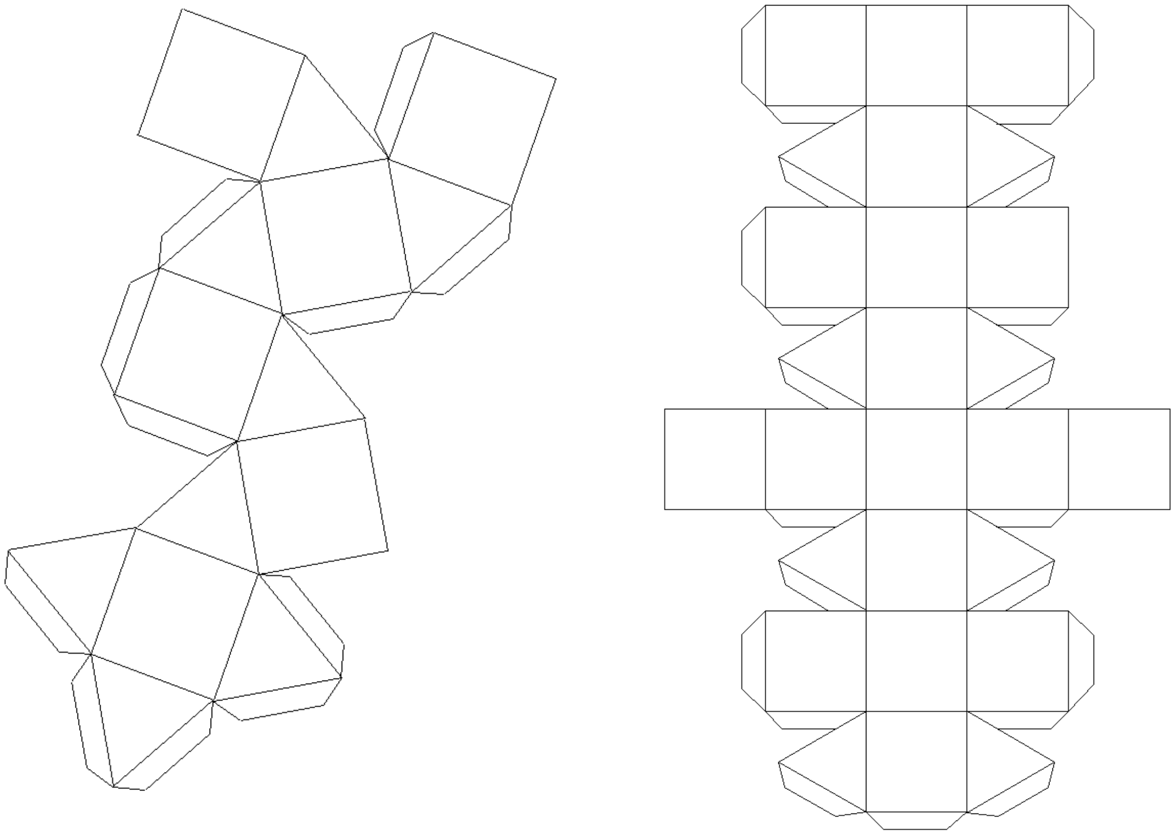


Figura 48 – Cuboctaedro truncado

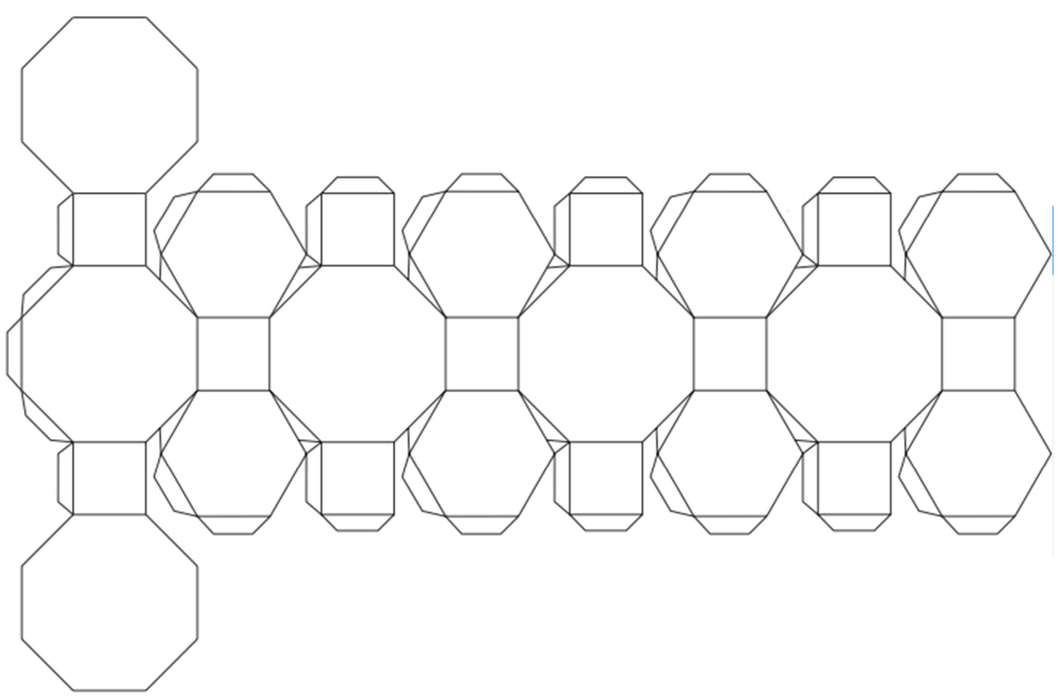


Figura 49 – Rombicosidodecaedro (à esquerda) e Icosidodecaedro truncado (à direita)

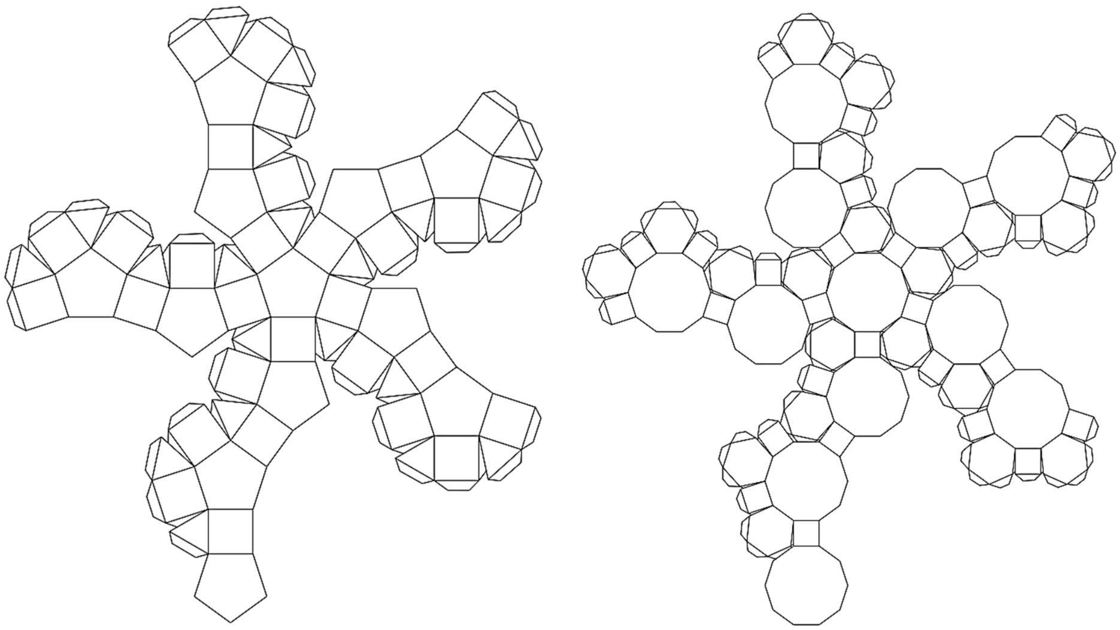
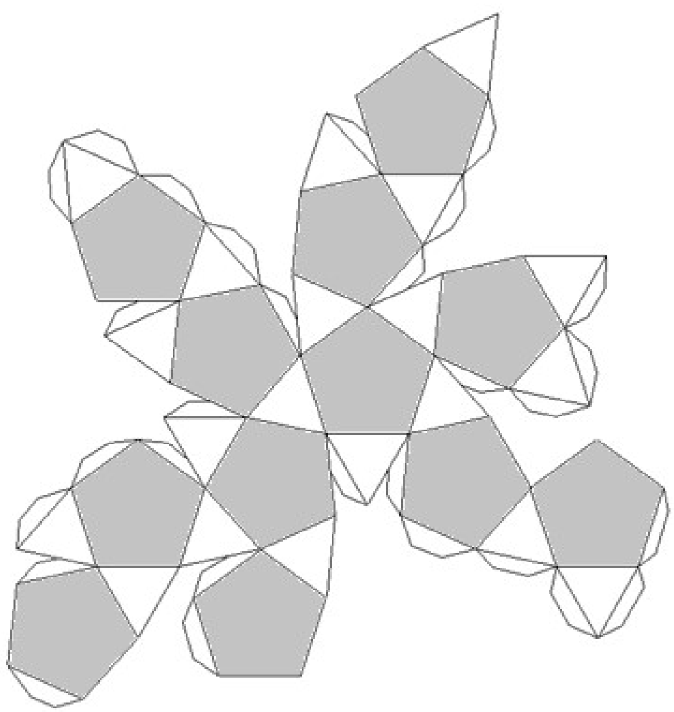


Figura 50 – Icosidodecaedro



b) PALITOS COM JUJUBAS

Ao realizar esta atividade, com o intuito de evitar o desperdício de material e recursos, foi acrescentado o Nr de 20% ao de jujubas e 5% ao de pailito de dente, já que este útimo não havia o risco de ser comido pelas crianças. A tabela abaixo foi elaborada tomando por base o número de vértices e arestas de cada poliedro, possibilitando calcular o número de material a ser empregado na atividade.

Tabela 05 – Poliédros Arquimedianos com Ângulos Triédricos

Nr	Nome do Poliedro	Nr total de Vértices	Nr total de Arestas	Nr aproximado de Jujubas (≥ 20%) e palitos (≥ 5%)	
1	Tetraedro truncado	12	18	15 jujubas	19 palitos
	Cuboctaedro	12	24	15 jujubas	26 palitos
2	Octaedro truncado	24	36	29 jujubas	38 palitos
3	Cubo truncado	24	36	29 jujubas	38 palitos
4	Snub Cuboctaedro	24	60	29 jujubas	63 palitos
5	Rombicuboctaedro	26	48	32 jujubas	51 palitos
	Icosidodecaedro	30	60	36 jujubas	63 palitos
6	Cuboctaedro truncado ou grande rombicuboctaedro	48	72	58 jujubas	76 palitos
7	Icosidodecaedro truncado	48	72	58 jujubas	76 palitos
11	Dodecaedro truncado	60	90	72 jujubas	95 palitos
12	Rombicosidodecaedro	60	120	72 jujubas	126 palitos
13	Snub Icosidodecaedro	60	150	72 jujubas	158 palitos

Fonte – do autor

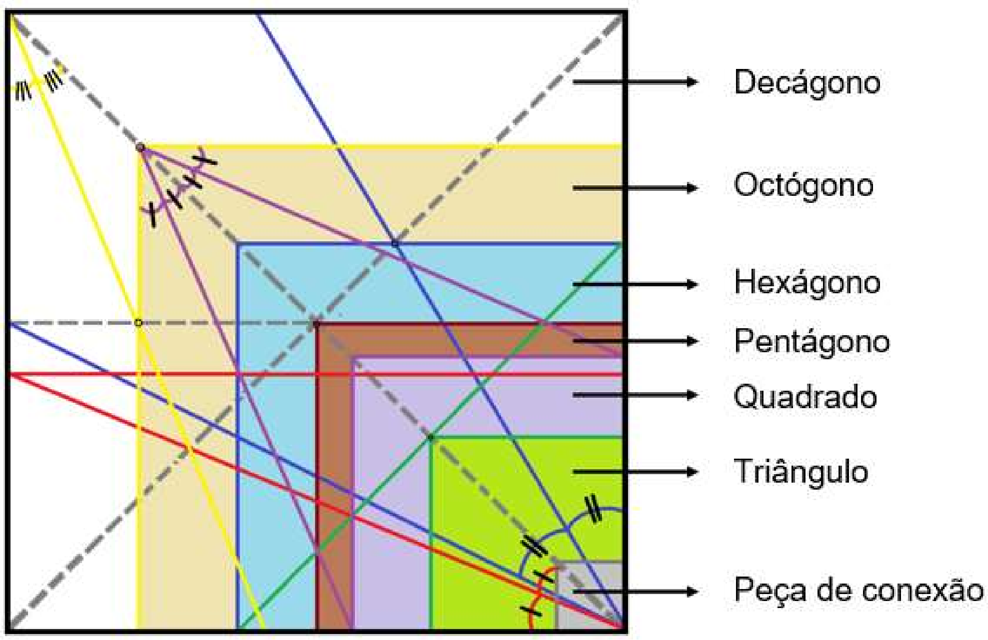
Figura 51 – Jujubas coloridas (moles e genéricas) e palitos de dente (genéricos)

Fonte – da internet

c) ORIGAMI MODULAR

Segundo Kasahara (2005, p. 223), para realizar os origamis modulares dos poliedros, regulares e arquimedianos, é necessário construir origamis que tenham a mesma medida de suas arestas e para isso as medidas iniciais das folhas de origami quadradas devem ser diferentes. Na figura abaixo, é mostrado a dobradura das medidas dos polígonos regulares (figura fora de proporções).

Figura 52 – Origami das medidas dos polígonos regulares



Fonte – Kasahara (2005, p. 223)

Fizemos as medições dos papéis em formato de quadrado aproveitando ao máximo uma folha de rascunho A4. Então o maior quadrado que esta folha possui tem lado de 21 cm e a partir daí foi construído o origami acima e extraído os lados dos quadrados dos polígonos regulares que são possíveis construir um poliedro arquimediano. A tabela abaixo nos fornece as medidas extraídas.

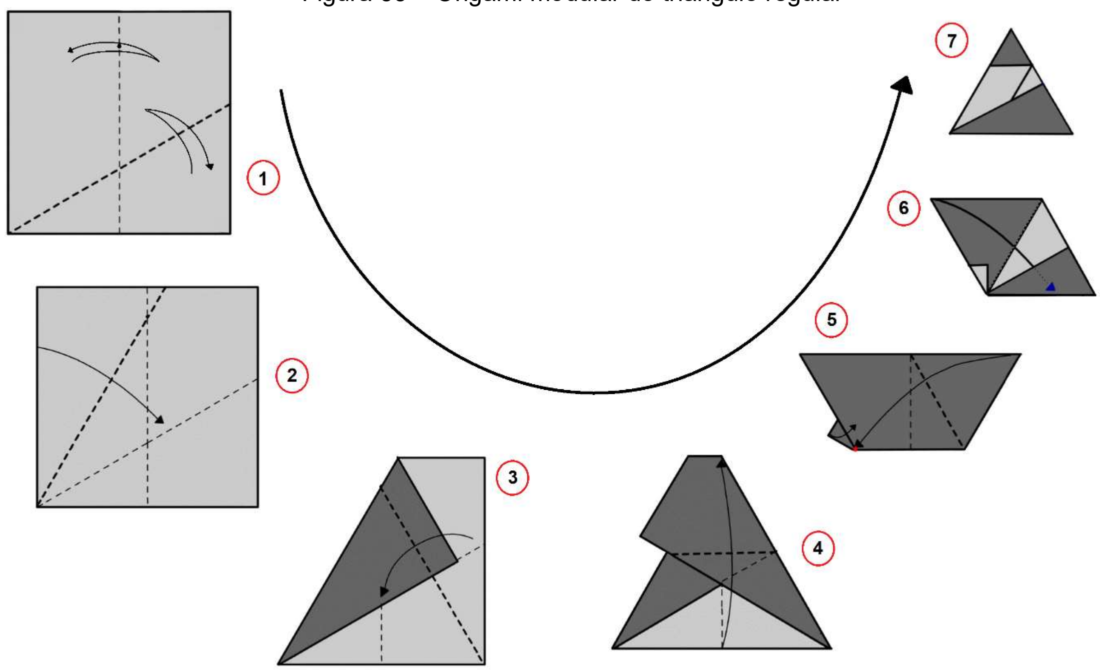
Tabela 06 – Sugestão de medidas dos quadrados das folhas dos polígonos

Peça de conexão	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Decágono
2,35	6,5	9,4	10,5	13	15,9	21

Fonte – do autor

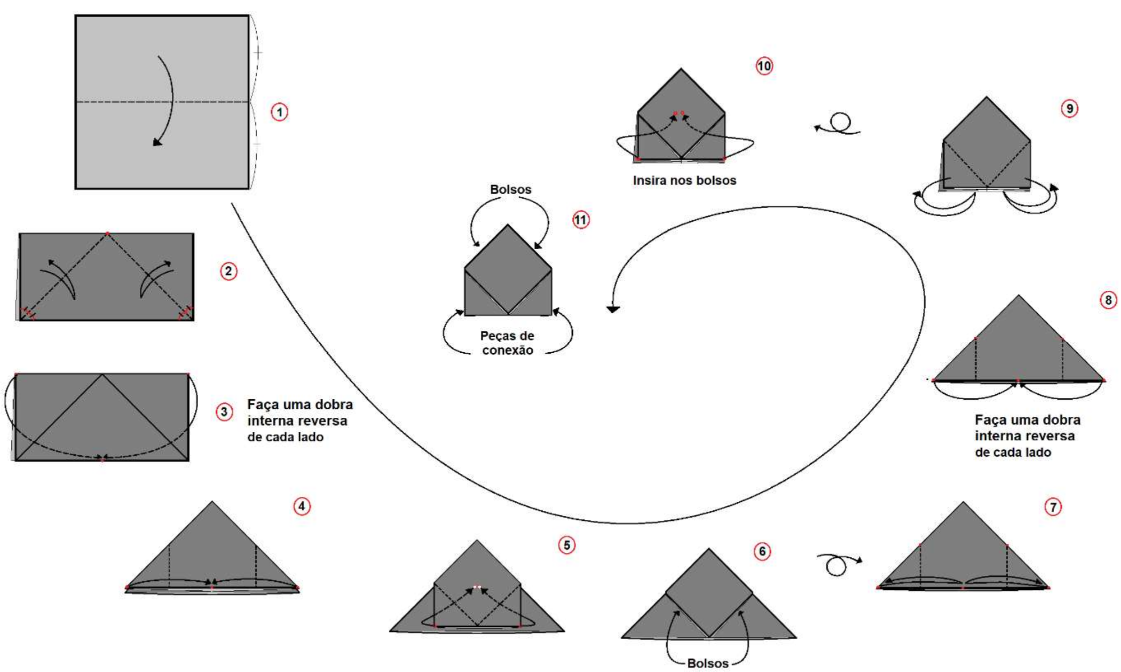
Abaixo, temos imagens dos origamis modulares dos polígonos regulares para construção dos poliedros arquimedianos.

Figura 53 – Origami modular do triângulo regular



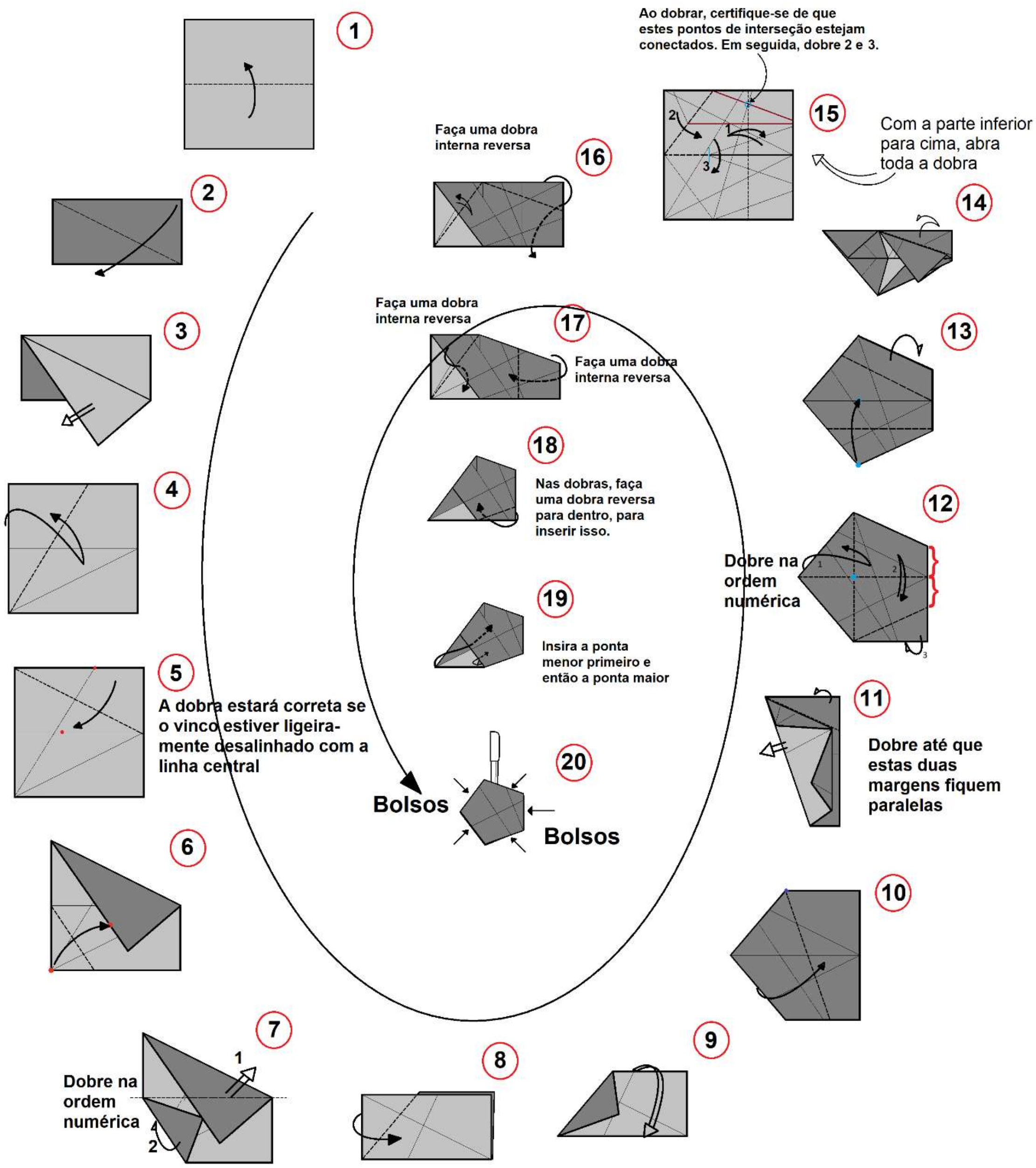
Fonte – Kasahara (2005, p. 204 e 205)

Figura 54 – Origami modular do quadrado



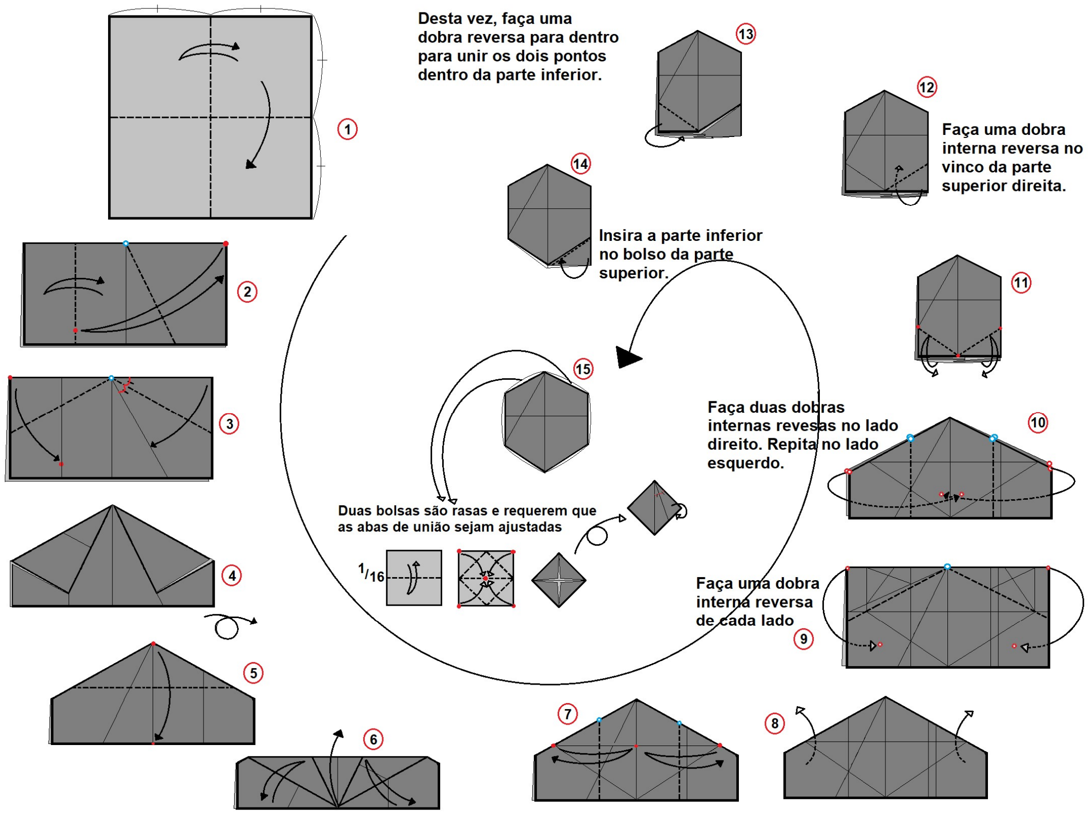
Fonte – Kasahara (2005, p. 206 e 207)

Figura 55 – Origami modular do pentágono regular



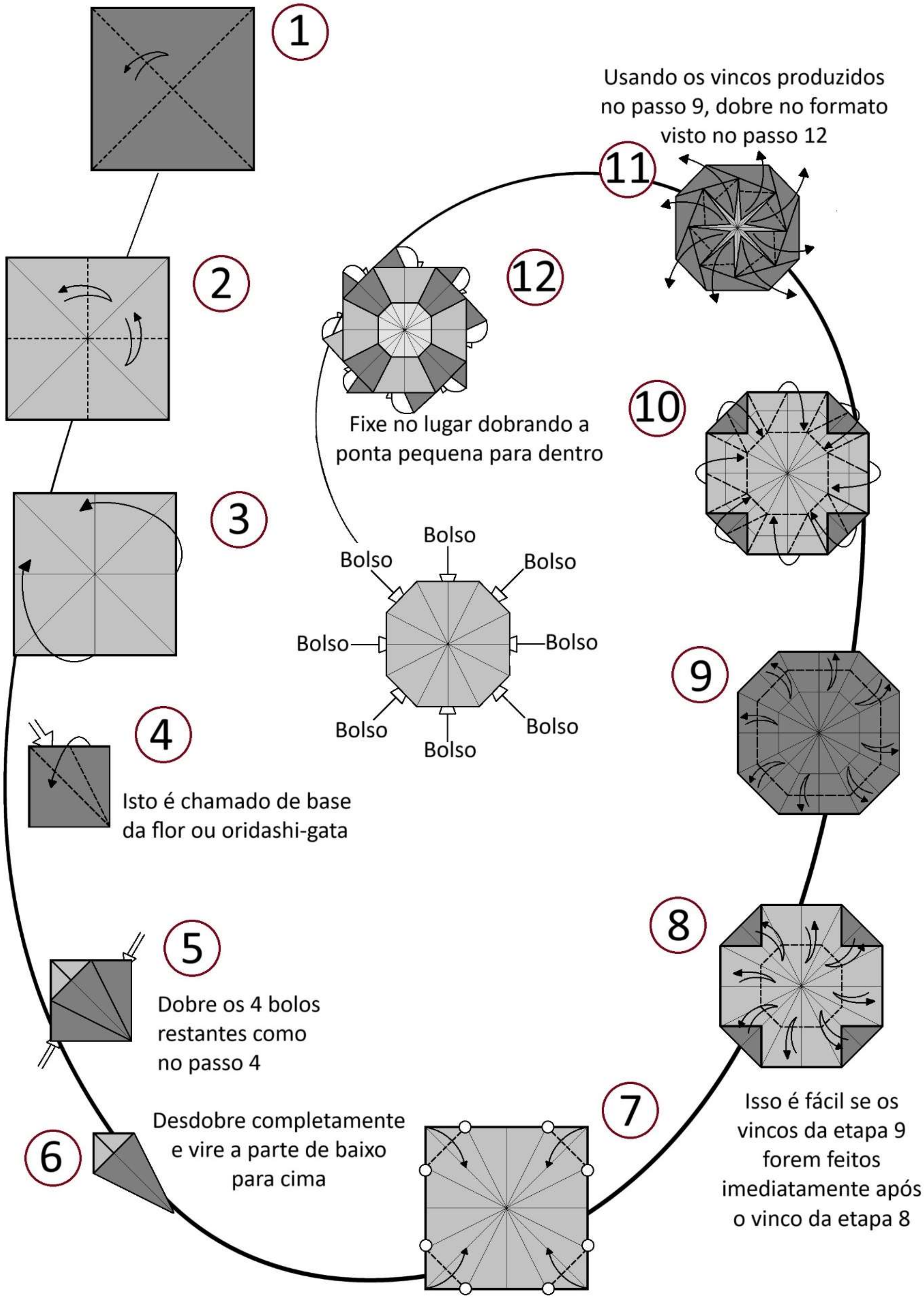
Fonte – Kasahara (2005, p. 218 e 219)

Figura 56 – Origami modular do hexágono regular



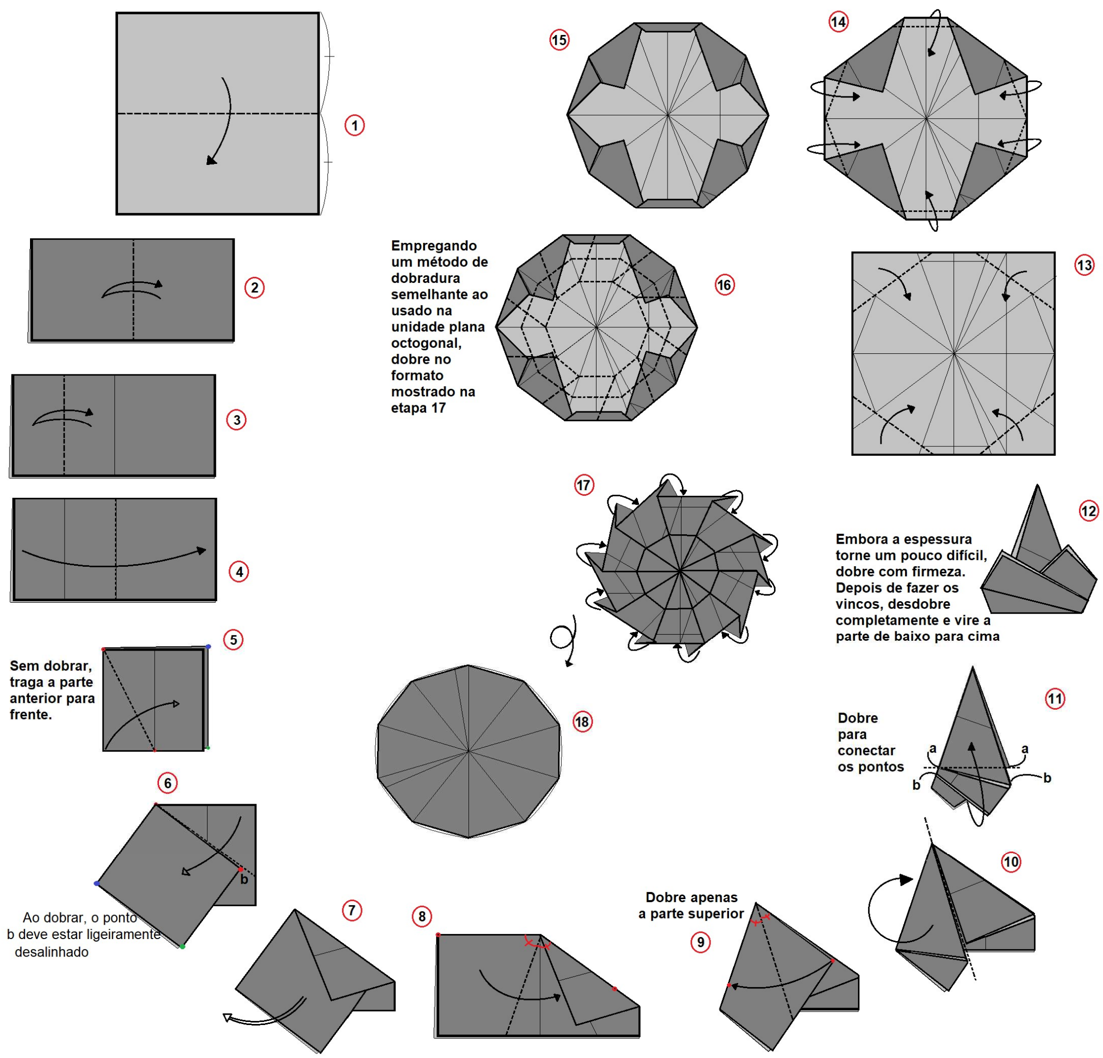
Fonte – Kasahara (2005, p. 224 e 225)

Figura 57 – Origami modular do octógono regular



Fonte – Kasahara (2005, p. 226 e 227)

Figura 58 – Origami modular do decágono regular



Fonte – Kasahara (2005, p. 228 e 229)

d) BRINQUEDO DA MARCA EDULIG

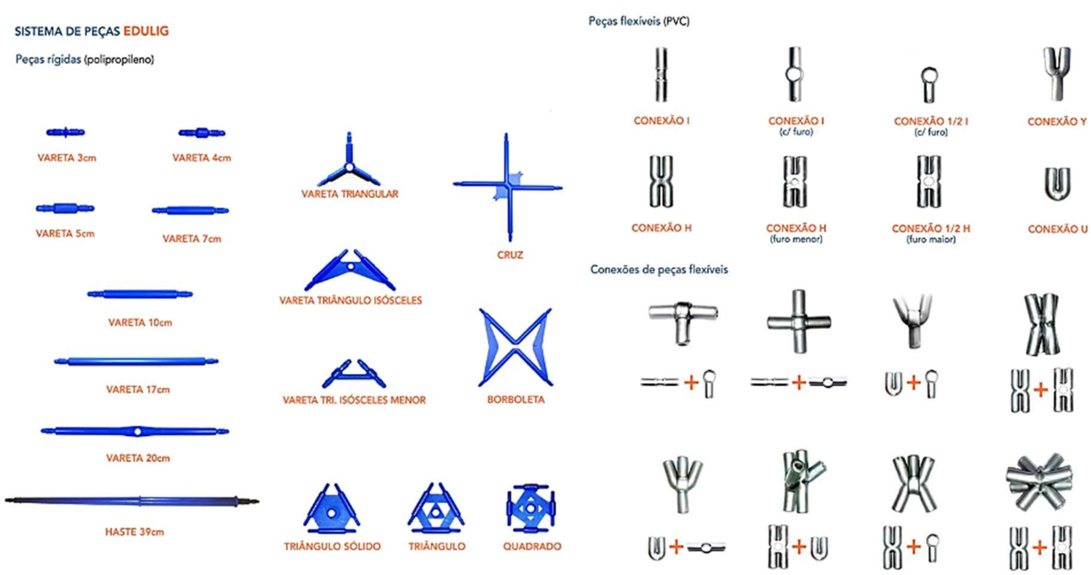
Conforme consta em seu próprio site: “A Edulig é uma empresa brasileira que desenvolve e produz kits de peças rígidas e conexões flexíveis, para o desenvolvimento de crianças e adolescentes através de atividades criativas e lúdicas.”

Ainda sobre a empresa:

> A empresa com a razão social EDULIG OBJETOS PEDAGOGICOS LTDA, opera com o CNPJ 50.627.698/0001-48 e tem sua sede localizada na Rua Neonio, 97 - Imbaubas, Ipatinga - MG, 35.160-270. Seu foco principal de atuação é de Comércio atacadista de artigos de escritório e de papelaria, de acordo com o código CNAE G-4647-8/01.[5]

Os brinquedos da Edulig possuem dois tipos de peças de conexões: dezesseis peças rígidas e oito peças flexíveis, conforme imagem abaixo.

Figura 59 – Conexões rígidas (à esquerda) e flexíveis (à direita)



Fonte – https://www.edulig.com.br/

Algumas dessas peças de conexão são necessárias para a construção dos poliedros.

[5] https://www.econodata.com.br/consulta-empresa/50627698000148-EDULIG-OBJETOS-PEDAGOGICOS-LTDA

Os brinquedos desta empresa são divididos em seis categorias:

a) Educação Matemática;
b) Brinquedos pedagógicos;
c) Puzzles 3D figurativos;
d) Puzzles 3D geométricos;
e) Jogos, e
f) Desenvolvimento Humano.

O brinquedo utilizado neste trabalho foi o Brinquedo de Sólidos de Arquimedes.

Figura 60 – Brinquedo de Sólidos de Arquimedes

Fonte – https://www.edulig.com.br/

3.5 PRODUÇÕES DOS ALUNOS

3.5.1 Papel para cortar e colar:

Nesta oportunidade, havia no laboratório de matemática apenas 8 crianças de 11 a 12 anos (6º e 7º anos). Foi distribuído 1 folha A4 impressa de algum poliedro de arquimedes. Aos mais novos, poliedros mais simples, tipo o tetraedro truncado, e aos mais velhos um pouco mais complexo, como o cuboctaedro. Havia na mesa cola e tesoura para todos, mas alguns meninos não queriam ficar com a tesoura rosa, aguardando outro aluno terminar o corte com uma tesoura de outra cor, mesmo com a intervenção do professor.

3.5.2 Palitos com jujubas:

Neste dia, havia no laboratório de matemática cerca de 16 crianças, de 11 a 16 anos (6º, 7º, 8º e 2º anos). A sala de aula foi preparada com 3 mesas e seis cadeiras cada mesa e foi deixado em cada mesa 100 jujubas e 150 palitos. Foi solicitado que todos fizessem o tetraedro truncado para que houvesse uma comparação entre os modelos construídos e por ser mais simples. Os alunos foram orientados a começar com a face hexagonal em baixo para dar uma melhor sustentação e então continuassem a montagem. Como as arestas de poliedros diferentes seriam do mesmo tamanho, é natural que poliedros com mais faces sejam maiores que os de menos faces. Os professores sempre flagravam os comilões, beliscando as jujubas preferidas.

3.5.3 Origami:

Havia nesta atividade 10 estudantes, 7 do 6º e 7º ano e 3 do 8º ano. Foi solicitado que fizessem o cuboctaedro. Logo os alunos concluíram que precisariam fazer origamis de triângulos equiláteros e quadrados e também que precisariam de peças de encaixe. Foi entregue folhas A4 de rascunho para a construção dos origamis. Foi solicitado que cortassem os papéis conforme tabela 5. Foi entregue uma folha de papel para construção dos origamis aos alunos, conforme figuras 53 e 54.

3.5.4 Brinquedo de sólidos de arquimedes:

Nesta atividade, havia no laboratório de matemática cerca de 12 crianças (6º, 7º e 8º ano). Inicialmente, as crianças mais novas começaram a atividade por se encontrarem no laboratório mais cedo. Os alunos mais novos, 11/12 anos, montaram o cuboctaedro truncado e o icosidodecaedro, dois poliedros que estavam no manual de instrução. Foi solicitado aos alunos da faixa etária de 13/14 anos que montassem o Rombicuboctaedro, que também se encontrava no manual de instrução.

3.5.5 Procedimentos de Análise dos Dados

A análise dos dados seguiu uma abordagem **qualitativa e quantitativa**, garantindo uma interpretação detalhada dos resultados.

a) **Análise Qualitativa**

A partir da **Análise de Conteúdo**, conforme Santos (2012, p. 383-387), foram categorizadas as falas dos alunos e professores, identificando padrões e percepções sobre as atividades.

Foram analisados registros fotográficos para identificar comportamentos, dificuldades e engajamento dos alunos.

As respostas abertas dos questionários foram classificadas conforme recorrências temáticas.

b) **Análise Quantitativa**

Tabulação de dados dos questionários fechados para medir o impacto da sequência didática no aprendizado dos alunos.

Comparação de notas ou desempenho dos alunos antes e depois da aplicação das atividades.

c) **Triangulação dos Dados**

Os diferentes instrumentos de coleta (questionários, observação e entrevistas) foram cruzados para garantir maior confiabilidade e coerência nos resultados.

3.6 LIMITAÇÕES DO ESTUDO

a) **Tempo limitado para aplicação das atividades**: o tempo disponível para a sequência didática não foi suficiente para um aprofundamento maior.

b) **Número de participantes**: a pesquisa foi aplicada a um grupo específico de alunos, o que pôde limitar a generalização dos resultados.

c) **Infraestrutura escolar**: a escola não dispôs de materiais concretos ou acesso a computadores para a modelagem digital.

d) **Interferências externas**: fatores como engajamento dos alunos e apoio do professor influenciaram os resultados obtidos.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A presente pesquisa teve como objetivo central analisar, sob a perspectiva da aprendizagem significativa e da experimentação lúdica, as potencialidades pedagógicas do uso de materiais didáticos concretos e atividades criativas na abordagem dos poliedros de Arquimedes com estudantes do Ensino Fundamental II e ensino médio. As atividades foram desenvolvidas com alunos de 11 a 16 anos de idade, organizadas em turmas do 6º ao 9º ano e 1º ao 2º ano do ensino médio, integrantes do clube de matemática, e os resultados aqui apresentados estão apoiados em registros fotográficos, observações sistemáticas e interações espontâneas dos alunos durante as oficinas.

4.1 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS MATERIAIS DIDÁTICOS UTILIZADOS

A escolha dos materiais didáticos foi pautada por critérios de acessibilidade, estímulo à criatividade, estímulo à coordenação motora fina e incentivo ao trabalho colaborativo. As atividades inerentes ao processo, como *papel para cortar e colar, palitos com jujubas, origami modular e brinquedos de sólidos de Arquimedes* foram explorados como alternativas didáticas para tornar visível a estrutura tridimensional e a composição geométrica dos poliedros arquimedianos.

As análises a seguir sintetizam os aspectos observados durante a aplicação das atividades, agrupando os desafios enfrentados, os comportamentos dos alunos, as intervenções docentes necessárias e sugestões de aprimoramento.

4.1.1 Papel para cortar e colar

A primeira atividade consistiu na construção de poliedros arquimedianos a partir de moldes planos, que exigem corte e colagem precisa das abas. Observou-se que os alunos dos 6º e 7º anos (faixa etária entre 11 e 12 anos) demonstraram grande dependência da mediação docente. Mesmo após explicações sucessivas, a atenção dispersa e a falta de compreensão das instruções iniciais geraram confusões frequentes sobre onde cortar e colar, além de cortes indevidos que comprometeram a montagem.

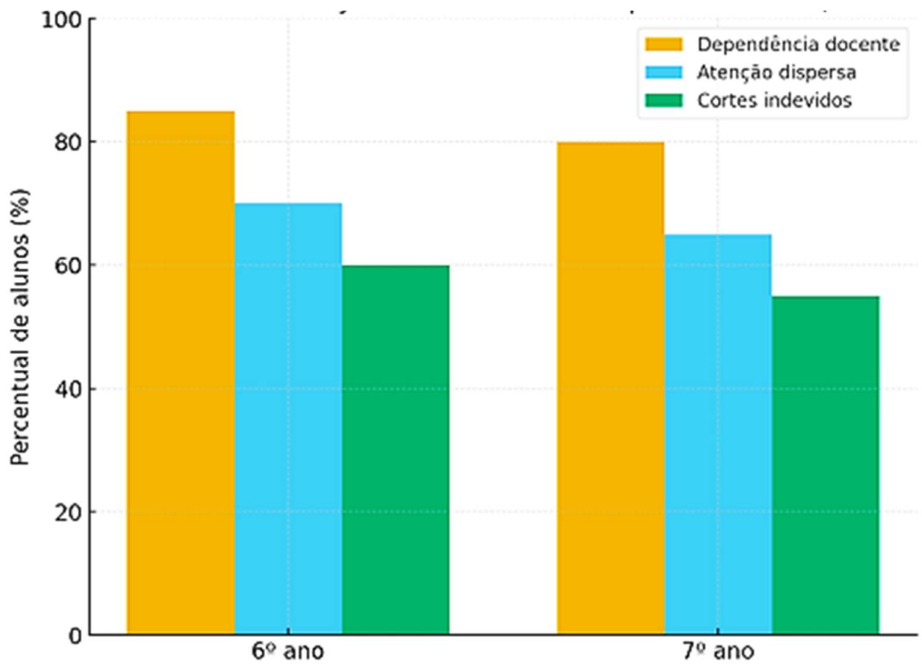
Figura 61 – Cortes do papel

Fonte – do autor

Apesar das dificuldades enfrentadas na fase inicial, as quais se manifestaram, sobretudo, na compreensão das instruções e na manipulação dos elementos constitutivos da tarefa, a atividade revelou-se dotada de um potencial expressivo para a promoção de competências cognitivas relacionadas à visualização e à orientação espacial. Além disso, favoreceu o reconhecimento, a análise e a aplicação prática das propriedades geométricas inerentes ao conteúdo explorado, contribuindo para a consolidação de conceitos e para o desenvolvimento de raciocínio lógico e dedutivo, indispensáveis ao estudo da Geometria.

Com o intuito de evidenciar os aspectos mais significativos da atividade realizada, apresenta-se o Figura 62 que permite visualizar o grau de envolvimento, a cooperação em grupo e os desafios encontrados pelos estudantes na construção dos poliedros.

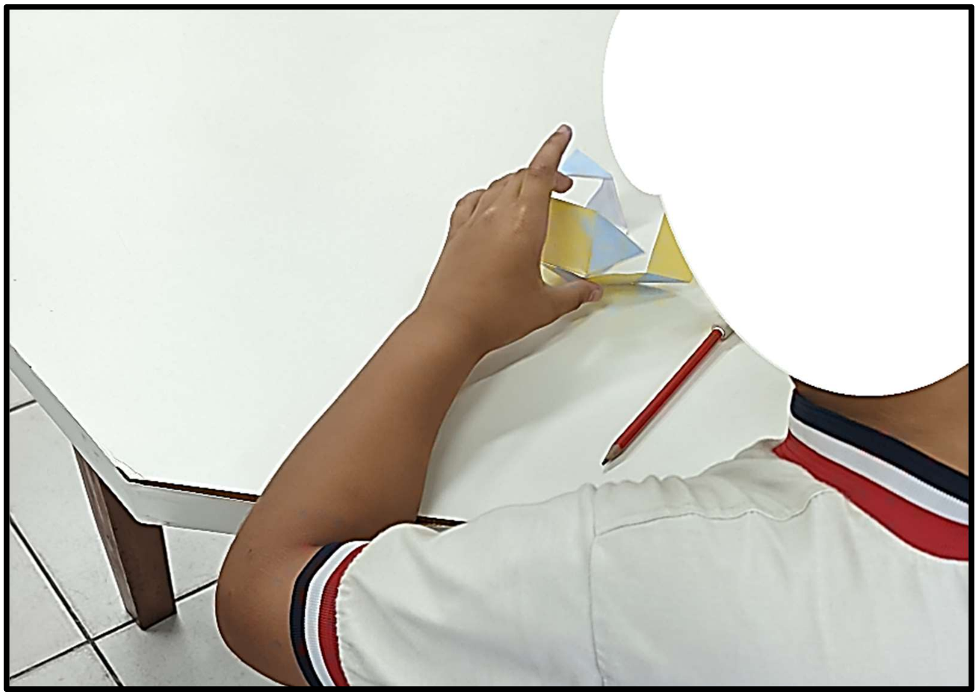
Figura 62 – Dificuldades na Construção de Poliedros Arquimedianos (6º e 7º Anos)



Fonte – do autor

A execução reiterada da tarefa contribuiu para uma evolução perceptível, ainda que moderada, na destreza manual dos participantes, evidenciando maior precisão nos movimentos e coordenação motora. Paralelamente, observou-se um incremento na capacidade de atenção direcionada às instruções minuciosas, refletindo uma assimilação mais criteriosa dos procedimentos a serem seguidos. Contudo, apesar desses avanços, a autonomia no desempenho da atividade não se manifestou de forma plena, indicando que o processo de internalização e autogestão das etapas requereu um tempo mais prolongado de prática e acompanhamento sistemático.

Figura 63 – Montagem do poliedro



Fonte – do autor

A compreensão efetiva da estrutura tridimensional manifestou-se de forma mais evidente apenas nas etapas finais da atividade, quando o poliedro passou a apresentar uma configuração visivelmente definida. Esse momento possibilitou aos participantes estabelecer conexões mais concretas entre as representações bidimensionais e a forma espacial obtida, aspecto que, segundo Duval (1999), é fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico, uma vez que a conversão entre diferentes registros de representação semiótica constitui um processo cognitivo essencial.

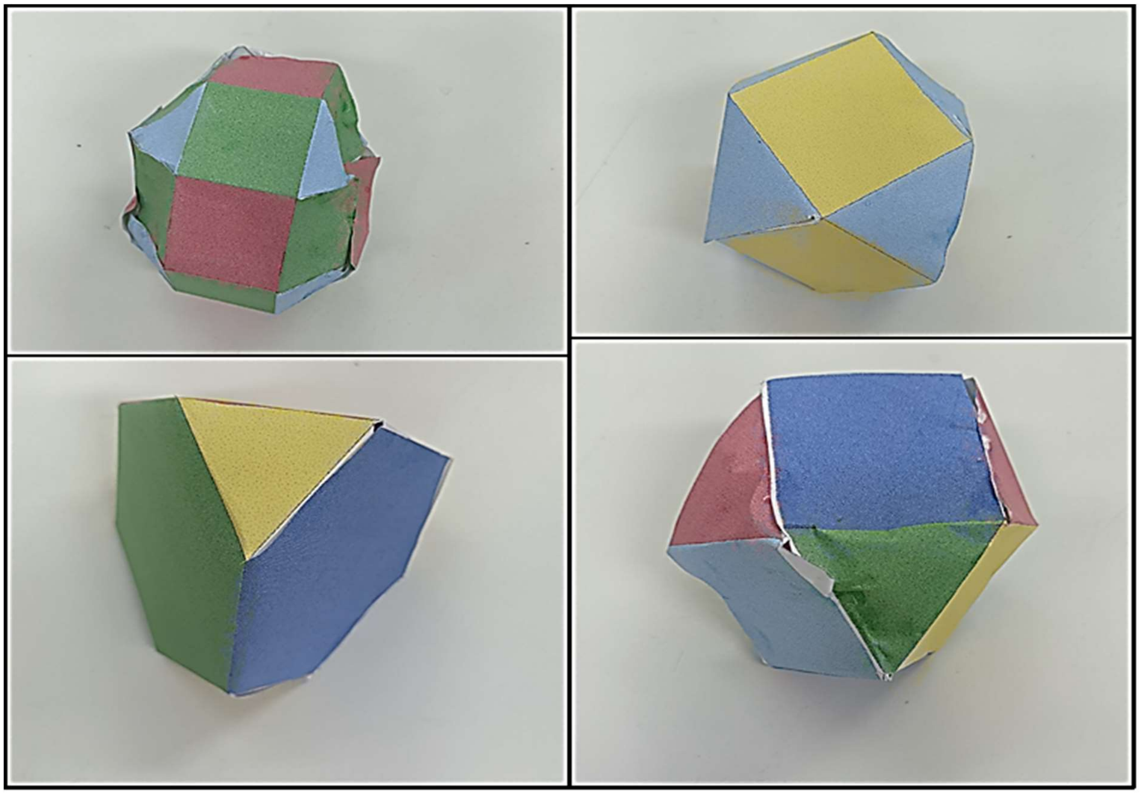
Verificou-se que poliedros com maior número de faces impuseram desafios adicionais, sobretudo no que tange à identificação e articulação das arestas e vértices, o que exigiu maior esforço de coordenação espacial e de raciocínio lógico. Tal constatação corrobora o modelo de Van Hiele (1986), que defende a necessidade de progressão gradual no ensino da Geometria, partindo de figuras mais simples até alcançar formas mais complexas, para que os alunos possam avançar nos níveis de raciocínio geométrico de forma consistente.

Figura 64 – Montagem do poliedro

Fonte – do autor

Segundo Lorenzato (2006), os recursos manipuláveis auxiliam na transposição de conceitos matemáticos do campo da abstração para o plano concreto, permitindo que o estudante estabeleça relações significativas entre a teoria e a prática. Essa perspectiva encontra respaldo também na abordagem construtivista de Piaget (1976), para quem a aprendizagem se fortalece quando o sujeito interage ativamente com o objeto de estudo, e na concepção de Vygotsky (1984), que enfatiza o papel dos instrumentos e signos como mediadores no desenvolvimento das funções psicológicas superiores. Dessa forma, experiências táteis e visuais proporcionadas pelos materiais concretos não apenas contribuem para a compreensão de conceitos geométricos e espaciais, mas também potencializam a retenção e a aplicação desses conhecimentos em situações diversificadas.

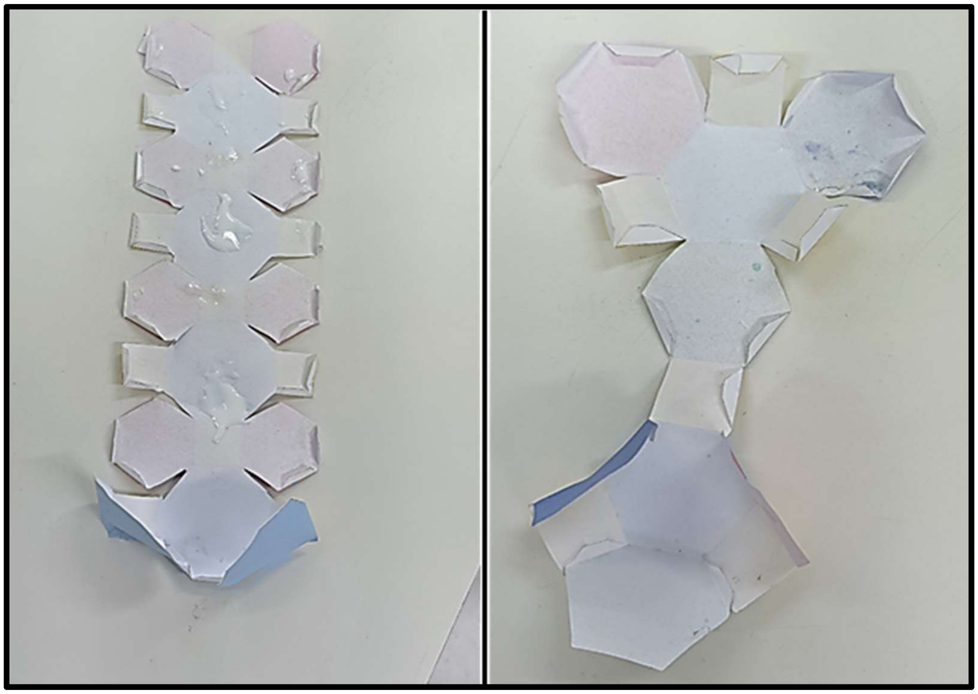
Figura 65 – Poliedros cortados e colados



Fonte – do autor

No que concerne às recomendações de natureza pedagógica, a experiência analisada evidencia a importância de disponibilizar aos discentes moldes previamente elaborados com marcações visuais claras e intuitivas, contemplando, por exemplo, ícones de tesoura para indicar com precisão os pontos de corte e numerações ou códigos nas abas, com vistas a orientar a sequência correta de colagem das faces. Essa estratégia, segundo Lorenzato (2006), contribui para reduzir a carga cognitiva extrínseca associada à interpretação das instruções, permitindo que o aluno concentre seus recursos mentais no desenvolvimento das habilidades espaciais e na compreensão das propriedades geométricas.

Figura 66 – Poliedro cortado e não colado



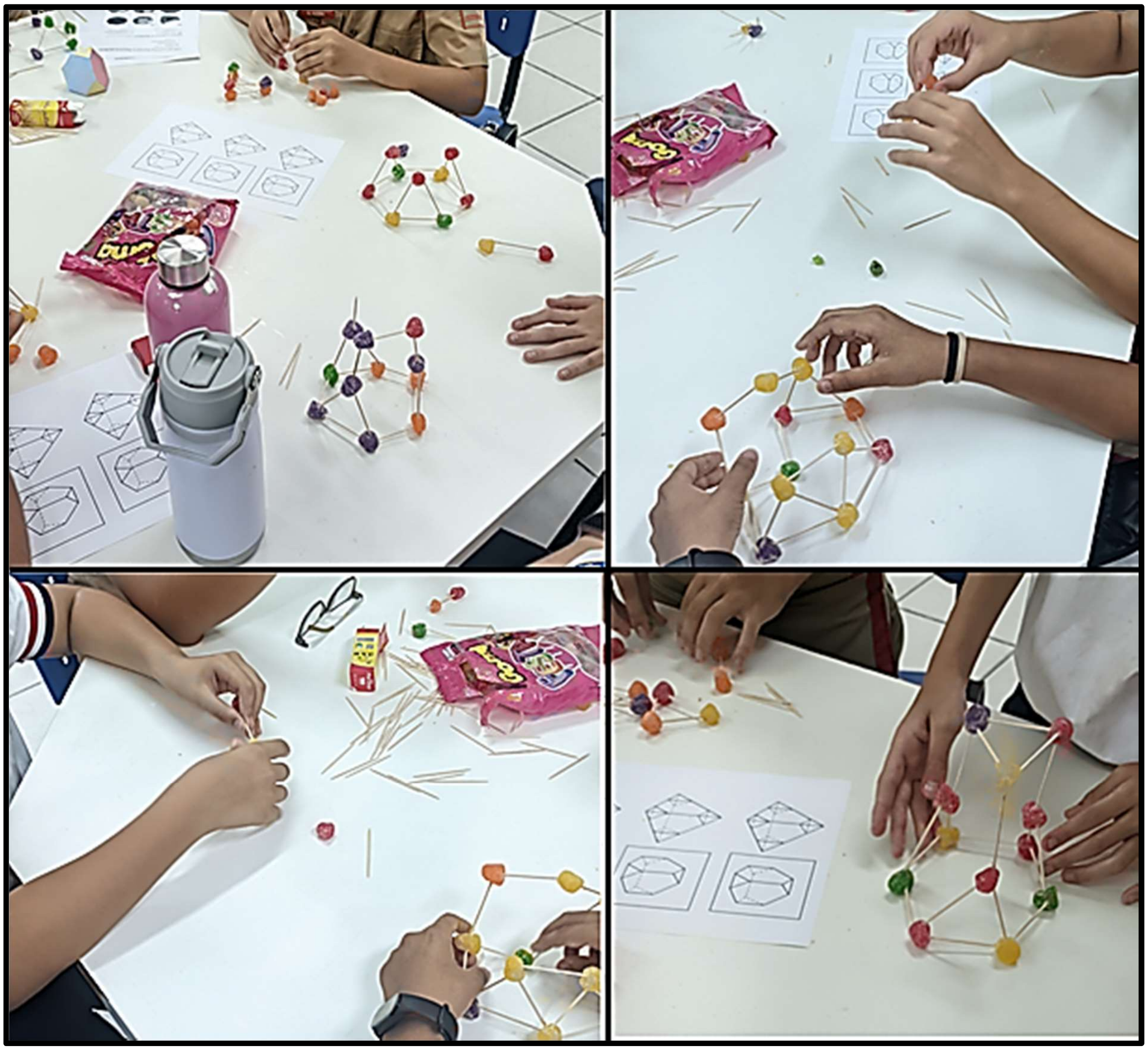
Fonte – do autor

Ademais, recomenda-se que a atividade seja iniciada com a montagem de poliedros de menor complexidade estrutural, em consonância com a progressão gradual de dificuldade defendida por Van Hiele (1986), o que possibilita o fortalecimento prévio das competências necessárias antes de abordar figuras mais elaboradas. A apresentação prévia de um exemplar já montado, por sua vez, favorece a antecipação visual do produto final, recurso que, conforme Duval (1999), potencializa a conversão entre diferentes registros de representação semiótica, facilitando a passagem do plano bidimensional do molde para a estrutura tridimensional do poliedro.

4.1.2 Palitos com jujubas

A construção de poliedros utilizando palitos com jujubas demonstrou-se uma prática didático-pedagógica de elevada acessibilidade e atratividade, capaz de envolver estudantes de diferentes faixas etárias em virtude de seu caráter lúdico, interativo e sensorial. A natureza tátil e visual dessa abordagem desperta o interesse e a motivação intrínseca, aspectos reconhecidamente relevantes para a aprendizagem significativa, conforme defendem Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

Figura 67 – Poliedros em construção

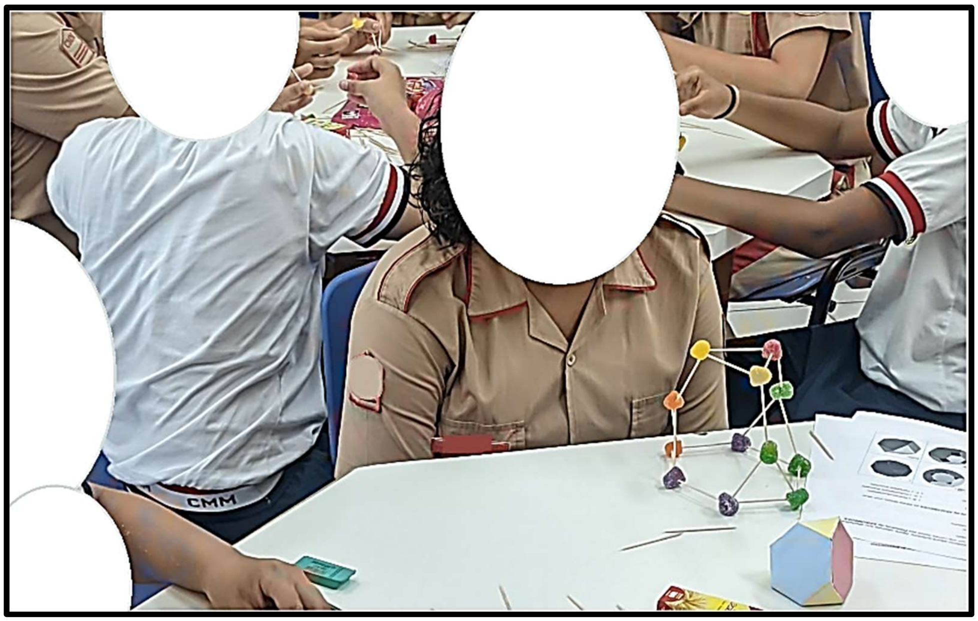


Fonte – do autor

No processo construtivo, as jujubas desempenharam a função de vértices flexíveis, atuando como elementos de conexão que possibilitaram a junção dos palitos e a formação das arestas. Essa flexibilidade, embora vantajosa para a manipulação e montagem, resultou em estruturas cujas faces nem sempre se apresentaram perfeitamente regulares, em virtude de pequenos desalinhamentos angulares, o que reflete as limitações físicas do material utilizado. Apesar dessa imprecisão geométrica, a atividade manteve seu valor didático ao permitir a visualização concreta das relações entre vértices, arestas e faces, alinhando-se à perspectiva de Lorenzato (2006) sobre o uso de materiais concretos como mediadores na compreensão de conceitos espaciais.

Esse tipo de construção apresenta um elevado potencial para a promoção do engajamento discente, uma vez que desperta o interesse e a curiosidade por meio de uma abordagem prática e interativa.

Figura 68 – Poliedro construído

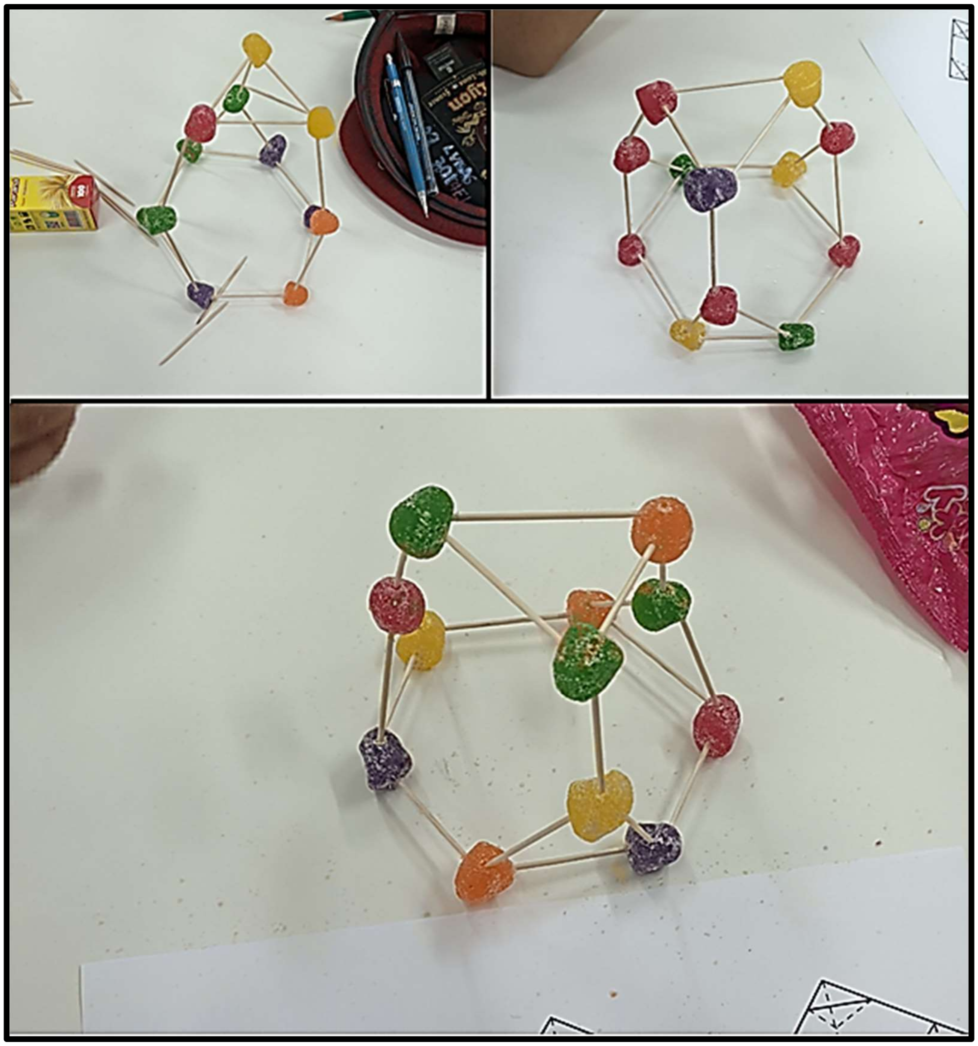


Fonte – do autor

O caráter lúdico da atividade estimula a criatividade, permitindo que os estudantes explorem soluções construtivas diversas e personalizadas, conforme defendem Kishimoto (2010) e Huizinga (2014) ao destacarem o papel do jogo e da ludicidade no desenvolvimento cognitivo e na motivação para a aprendizagem. Paralelamente, a tarefa demanda a mobilização de noções espaciais, como a visualização tridimensional, a orientação no espaço e o reconhecimento das relações entre vértices, arestas e faces, competências essenciais para o pensamento geométrico segundo Van Hiele (1986).

Além disso, a montagem requer atenção à proporcionalidade geométrica, envolvendo conceitos de medida, simetria e regularidade, que, segundo Duval (1999), são fundamentais para a compreensão das propriedades formais das figuras.

Figura 69 – Poliedros construídos

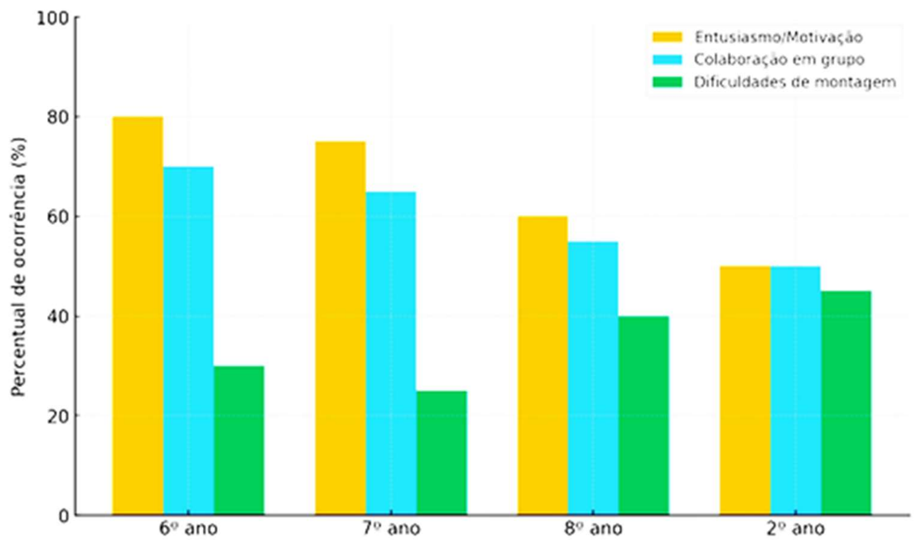


Fonte – do autor

Dessa forma, a atividade concilia aspectos criativos e rigor conceitual, configurando-se como um recurso pedagógico que integra motivação, desenvolvimento de habilidades cognitivas e consolidação de conceitos matemáticos.

A seguir, apresenta-se um Figura 70 ilustrativo que sintetiza os principais aspectos observados durante a execução da proposta, evidenciando os níveis de entusiasmo, colaboração e dificuldades relatados pelos alunos dos diferentes anos escolares. Para complementar a análise dessa atividade de construção de poliedros com jujubas, observa-se especialmente que os dados revelam que a maior parte dos alunos do 6º e 7º anos demonstrou elevado entusiasmo e motivação, além de significativa colaboração em grupo. Em contrapartida, ainda que em menor proporção, registraram-se dificuldades no processo de montagem, o que evidencia a necessidade de mediação docente, mas também ressalta o potencial lúdico e colaborativo da atividade.

Figura 70 – Aspectos observados durante a execução da proposta com palitos e jujubas (16 crianças)



Fonte – do autor

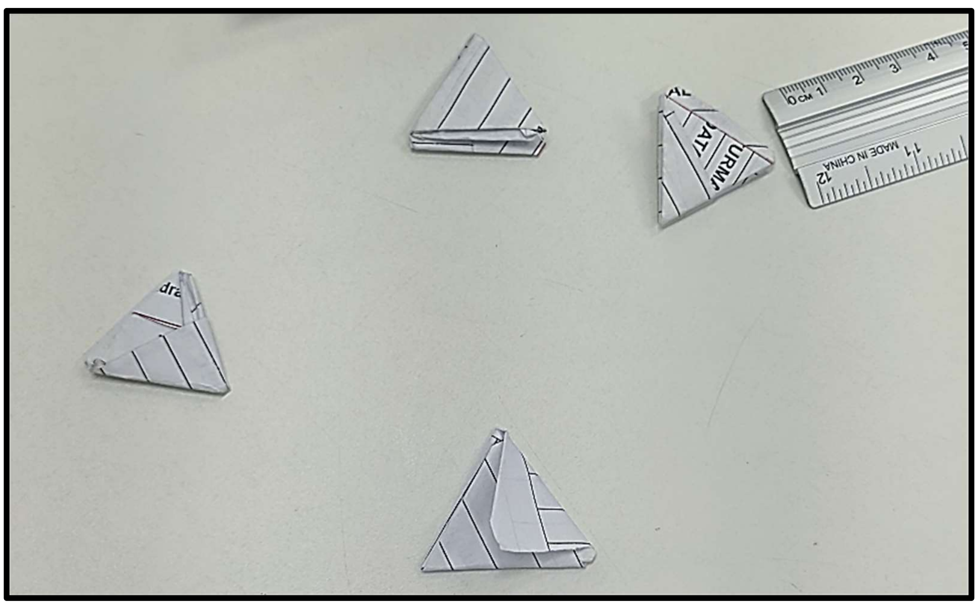
A interação social entre os participantes constituiu um elemento central da atividade, caracterizando-se por intensos momentos de colaboração, nos quais os alunos trocaram ideias, auxiliaram-se mutuamente na montagem das estruturas e compartilharam estratégias para solucionar dificuldades técnicas. Paralelamente, observaram-se episódios de disputa pela escolha de determinadas cores de jujubas, revelando não apenas preferências pessoais, mas também dinâmicas de negociação e de afirmação individual no contexto coletivo. Esses comportamentos evidenciam aspectos relevantes do desenvolvimento sócio-emocional, como a capacidade de trabalhar em grupo, administrar conflitos e lidar com frustrações. Ademais, parte dos alunos demonstrou elevado nível de exigência estética, buscando minuciosamente a simetria, a harmonia cromática e a uniformidade na construção dos poliedros, o que indica um cuidado apurado com a apresentação visual e uma valorização da dimensão estética integrada ao processo de aprendizagem.

No que se refere as sugestões pedagógicas, para aprimorar a experiência, recomenda-se apresentar o modelo montado antes da atividade, além de fornecer impressões das faces planas dos poliedros em tamanho real como referência visual. A distribuição de jujubas pode ser organizada por cor em diferentes recipientes, atendendo à diversidade de preferências e otimizando o tempo de execução. Deve-se ainda prever o uso de papel toalha ou lenços para higienização das mãos, já que o açúcar deixou os dedos pegajosos, interferindo na manipulação do material.

4.1.3 Origami modular geométrico

A introdução do origami como ferramenta de construção geométrica evidenciou-se como um dos maiores desafios didáticos, especialmente com alunos mais novos (11-12 anos). Apesar da familiaridade prévia com dobraduras simples como aviões de papel, a abstração exigida para compreender símbolos e executar dobras geométricas precisas não foi prontamente assimilada.

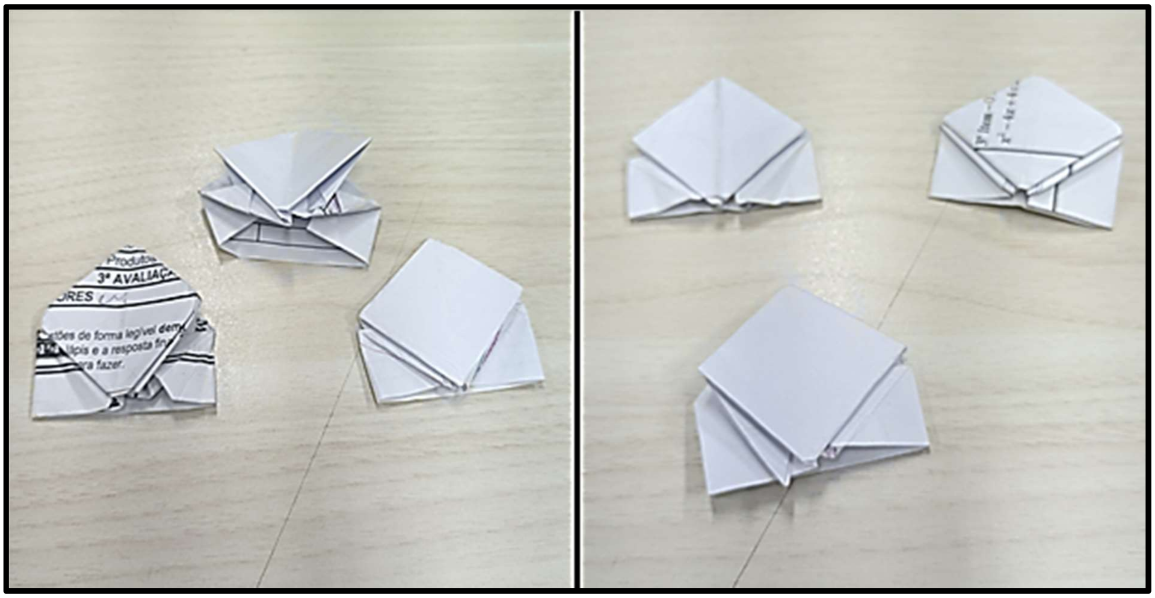
Figura 71 – Origamis modulares do triângulo



Fonte – do autor

Durante toda a atividade, a presença do professor foi indispensável para a orientação em cada etapa, desde o traçado dos polígonos básicos até as medições milimétricas e os cortes finais. A complexidade das etapas exigiu paciência e acompanhamento contínuo.

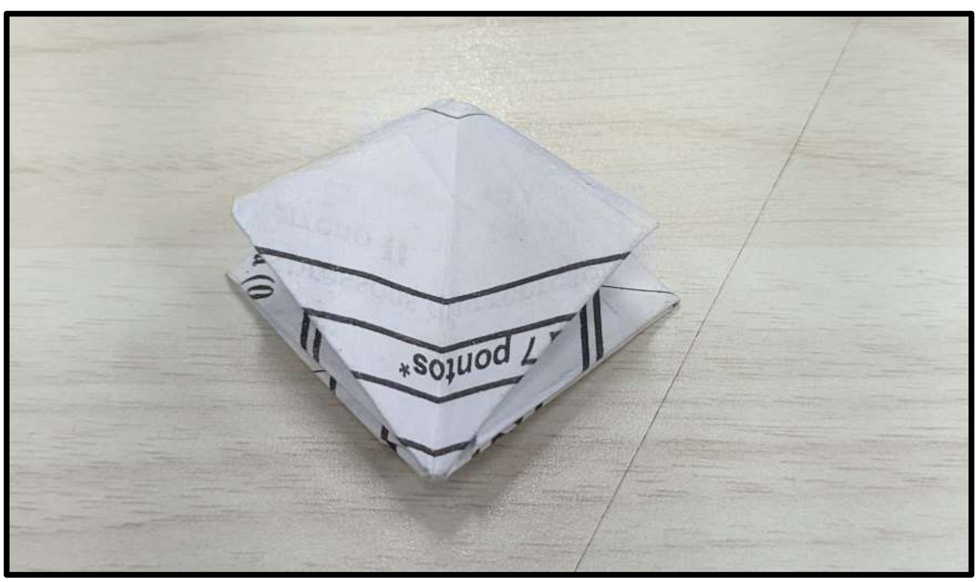
Figura 72 – Origamis modulares do quadrado



Fonte – do autor

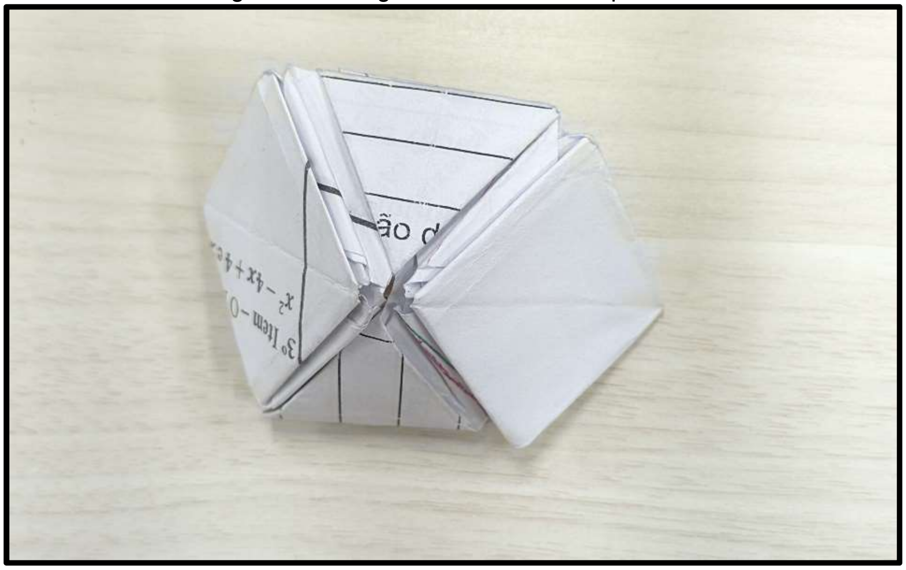
No que se refere as sugestões pedagógicas, é recomendável iniciar a prática com dobraduras conhecidas (como o avião) e, a partir delas, estabelecer comparações estruturais com as figuras geométricas desejadas. A utilização de folhas maiores para treino, bem como a preparação prévia dos papéis já cortados nos tamanhos ideais, contribui para a fluidez da atividade. Também se sugere apresentar um passo-a-passo visual impresso e um vídeo demonstrativo com pausas didáticas.

Figura 73 – Origamis modulares do quadrado não finalizado



Fonte – do autor

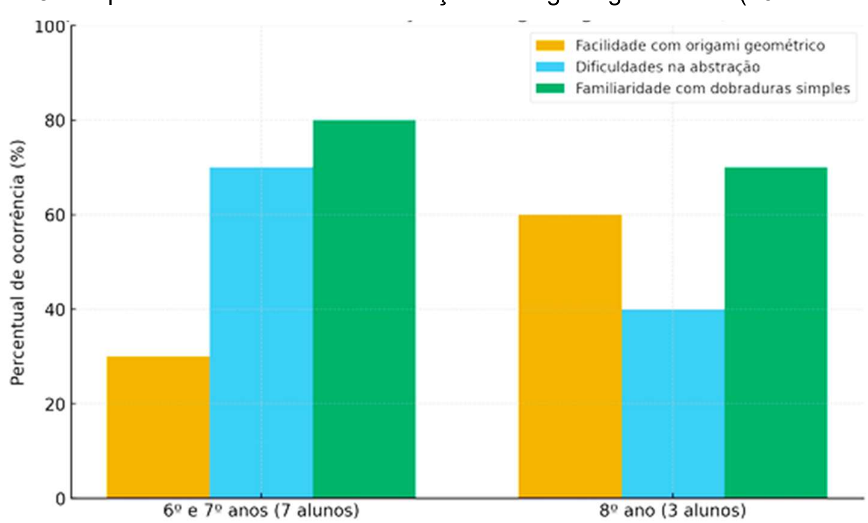
Figura 74 – Origamis com encaixes perfeito



Fonte – do autor

No que se segue, observamos representar de forma clara como os alunos do 6º e 7º anos interagiram na proposta com origami modular geométrico, evidenciando tanto os avanços em termos de motivação e colaboração, quanto as dificuldades surgidas durante a montagem, mostrando três aspectos centrais: as dificuldades de compreensão das etapas, a necessidade de ajuda constante e a perseverança dos alunos diante do desafio. O Figura 75 mostra a forte familiaridade com dobraduras simples, mas também evidencia que os alunos mais novos enfrentaram maiores dificuldades de abstração para compreender e executar corretamente as dobras geométricas, em comparação aos do 8º ano.

Figura 75 – Aspectos observados na introdução do origami geométrico (10 estudantes)



Fonte – do autor

4.1.4 Brinquedo de sólidos de Arquimedes

O kit lúdico composto por peças plásticas modulares trouxe um recurso atrativo, mas que demandou organização prévia e condução assertiva para evitar a dispersão.

Figura 76 – Brinquedos em construção

Fonte – do autor

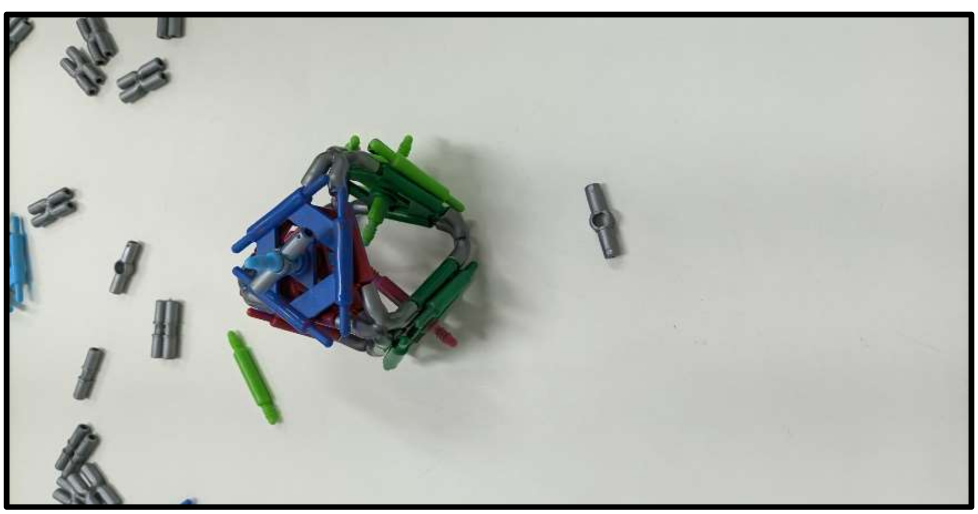
O manual que acompanhava o brinquedo foi pouco funcional para os estudantes, pois não compreendiam as imagens ilustradas, os paço a paços, exigindo a atuação constante dos professores para a identificação das peças e a sequência de montagem.

Figura 77 – Brinquedos em construção

Fonte – do autor

Observou-se uma tendência ao desvio de foco: diante da dificuldade em construir os poliedros, muitos alunos passaram a criar outros objetos ou brinquedos com as peças. Isso reforça a importância da preparação logística e do direcionamento claro das atividades.

Figura 78 – Brinquedo com peças restantes



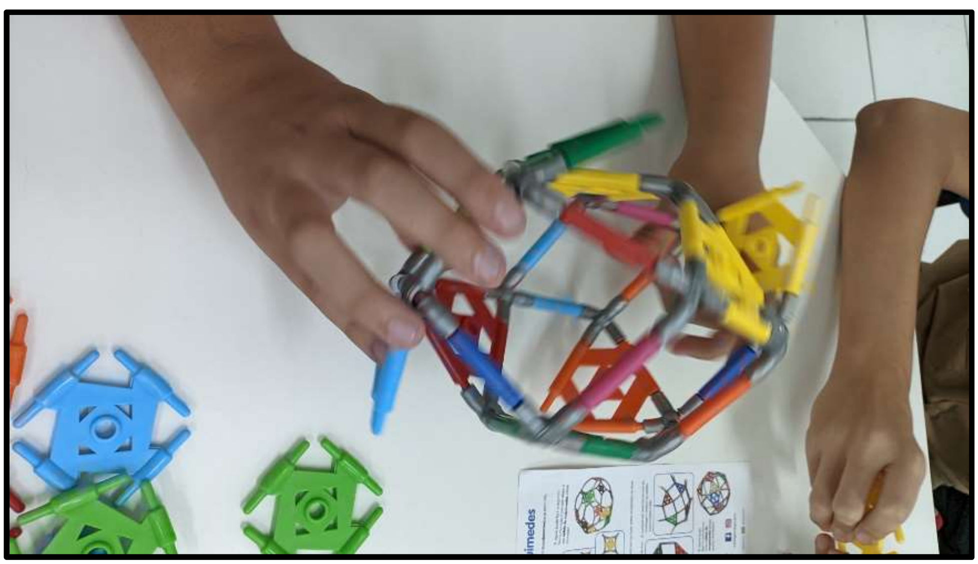
Fonte – do autor

Figura 79 – Brinquedo quase finalizado

Fonte – do autor

Foi notório a satisfação dos alunos ao concluírem os poliedros, verificando que todas as faces são formadas por polígonos regulares, contando vértices e lados e questionando os professores se poderiam formar outros poliedros com as mesmas faces.

Figura 80 – Brinquedo não finalizado por falta de peças



Fonte – do autor

No que se refere as sugestões pedagógicas, recomenda-se a pré-seleção das peças necessárias para cada poliedro e a apresentação de modelos já montados. A desmontagem guiada por parte dos alunos, após visualizarem o objeto completo, favorece a compreensão estrutural. A separação das conexões por tipo em recipientes distintos também otimiza o processo e minimiza as perdas.

Figura 81 – Brinquedo finalizado (cuboctaedro truncado)

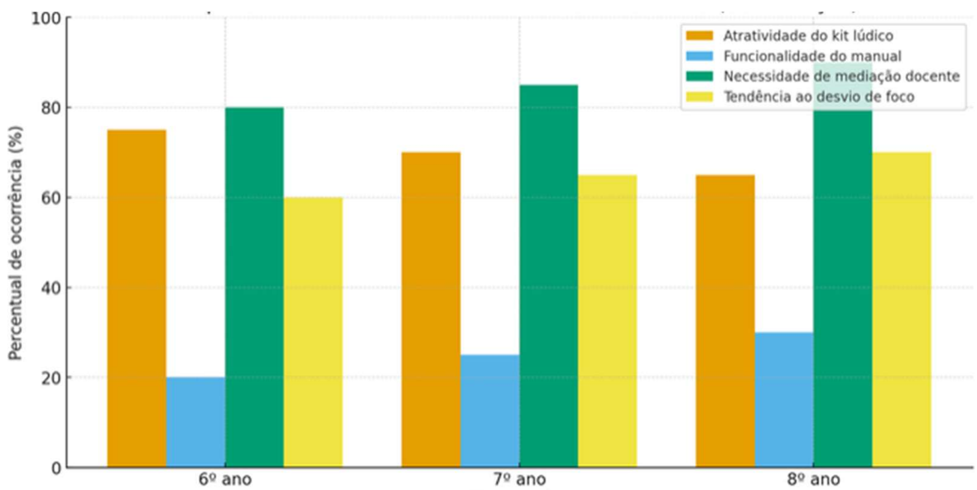
Fonte – do autor

Figura 82 – Brinquedo finalizado (icosidodecaedro)

Fonte – do autor

Os principais indicadores observados na atividade com o kit lúdico de peças plásticas modulares trazem os dados que permitem compreender não apenas o entusiasmo e o envolvimento dos alunos, mas também as dificuldades enfrentadas durante a montagem dos sólidos. O Figura 83 mostra que, embora o recurso tenha sido atrativo, a baixa funcionalidade do manual do material e a necessidade constante de mediação docente impactaram a experiência. Além disso, a tendência ao desvio de foco ficou evidente, reforçando a importância da preparação logística e de instruções claras para o sucesso da atividade.

Figura 83 – Aspectos observados na Atividade com Kit Lúdico (12 alunos)



Fonte – do autor

4.2 TRABALHOS FUTUROS

As sugestões aqui apresentadas não são fechadas e muito menos limitadas, são apenas sugestões de trabalhos futuros que podem enriquecer o ambiente escolar e acadêmico:

a) Explorar o uso de impressoras 3D e máquinas de corte a laser para a construção de poliedros, ampliando as possibilidades do ensino maker na Matemática;

b) Uso de estratégias voltada para o ensino médio com cálculo de medidas de truncaduras, construção gráfica de sólidos platônicos e truncamento destes sólidos para então encontrar os sólidos arquimedianos;

c) Desenvolver propostas interdisciplinares entre Geometria e Arte, aprofundando o uso do origami e da estética dos poliedros, bem como revisitando os artistas renascentitas que exploraram os Poliedros de Arquimedes em suas obras e pesquisas;
d) Investigar o impacto das atividades com Poliedros de Arquimedes em formação continuada de professores, avaliando práticas pedagógicas.
e) Criar um repositório digital interativo com modelos 3D dos poliedros, integrando realidade aumentada ao ensino de Geometria;
f) Explorar a Fulereno (ou Buckminsterfulereno), uma descoberta, feita em 1985, que, segundo ROCHA-FILHO (1996), rendeu o Prêmio Nobel de Química em 1996[6], que é uma molécula de carbono puro C_{60} cuja estrutura é idêntica a um Icosidodecaedro Truncado;
g) Construir estruturas no Minecraft, por exemplo cúpulas, observatórios ou torres, usando os Poliedros de Arquimedes.
h) Outras possibilidades são na Biologia, os capsídeos de vírus; na Arquitetura, cúpulas geodésicas, estruturas de estádios, luminárias, esculturas; na Matemática, teoria dos grafos.

4.3 CONSIDERAÇÕES INTERMÉDIÁRIAS

Os registros fotográficos feitos durante as atividades revelaram expressões diversas dos alunos na perspectiva da concentração à frustração, da dispersão à descoberta. Cada imagem capturada constituiu em evidência da vivência concreta dos conceitos geométricos e do impacto dos materiais didáticos na aprendizagem.

Verificou-se que as práticas mais manipulativas e sensoriais obtiveram maior engajamento inicial, ao passo que atividades com maior carga simbólica (como o origami) exigiram intervenções mais intensas por parte do professor.

Dessa forma, os resultados indicam que a combinação entre ludicidade, mediação docente e progressão na complexidade dos conceitos foi fundamental para a efetiva construção do conhecimento geométrico no Ensino Fundamental.

---

[6] Os ganhadores são o inglês Harold W. Kroto (Universidade de Sussex, em Brighton, Inglaterra) e os americanos Robert F. Curl e Richard E. Smalley (Universidade Rice, em Houston, Texas, EUA)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo buscou investigar e desenvolver estratégias didáticas inovadoras para o ensino de Geometria, com foco na exploração dos Poliedros de Arquimedes por meio de atividades práticas e criativas. A pesquisa permitiu compreender a importância do uso de metodologias ativas e recursos concretos na construção do conhecimento matemático, proporcionando aos estudantes uma aprendizagem mais significativa e engajadora.

Piaget e Inhelder (1993) destacam que a construção da noção de espaço e a capacidade de manipular mentalmente formas tridimensionais dependem de experiências sucessivas e crescentes em complexidade, reforçando a importância de uma abordagem didática que valorize a sequência e a progressão das atividades propostas.

Nesse sentido, a utilização de materiais concretos revelou-se um recurso pedagógico imprescindível para a mediação entre o conhecimento abstrato e a experiência sensorial dos discentes. Ao possibilitar a manipulação física de objetos, tais materiais favoreceram a construção ativa do saber, estimulando a integração entre as dimensões tátil, visual e cognitiva do processo de aprendizagem.

A análise teórica e a aplicação das atividades propostas demonstraram que o ensino da Geometria, quando associado a práticas interativas, favoreceu o desenvolvimento do raciocínio espacial e ampliou a compreensão dos conceitos geométricos. Conforme destacado por Dante (2018), a experimentação é essencial para que os alunos possam visualizar e manipular as formas geométricas, facilitando a assimilação dos conteúdos. Além disso, a abordagem qualitativa utilizada na pesquisa possibilitou uma visão mais aprofundada das percepções dos participantes, evidenciando os impactos positivos das estratégias aplicadas.

Os resultados obtidos indicam que a utilização de materiais concretos, aliados a ferramentas tecnológicas, contribuiu significativamente para a superação das dificuldades enfrentadas no ensino de Geometria. Segundo Vergnaud (2009), a aprendizagem matemática se consolida quando os alunos conseguem estabelecer conexões entre os conceitos abstratos e sua materialização no ambiente educacional, reforçando a relevância de propostas pedagógicas que valorizem a experimentação e a ludicidade.

A pesquisa buscou demonstrar como a abordagem experimental pode contribuir para a aprendizagem, incentivando a participação ativa dos estudantes e promovendo uma compreensão mais aprofundada dos conceitos geométricos.

Foi observado que a exploração dos poliedros de Arquimedes, tradicionalmente ausentes do currículo básico, por meio de metodologias ativas mostrou-se viável e promissora quando aplicadas por meio de recursos manipuláveis, práticas acessíveis, visualmente atrativas e centradas na experiência ativa dos alunos. Dessa forma, explorá-los por meio de atividades criativas e práticas pode tornar o aprendizado mais dinâmico e acessível, superando as limitações dos alunos para uma compreensão mais profunda das propriedades geométricas desses sólidos.

Dessa forma, espera-se que este estudo possa contribuir para futuras pesquisas e práticas docentes, incentivando a adoção de metodologias inovadoras no ensino da Geometria. Sugere-se a ampliação da investigação para outras estruturas geométricas e a incorporação de novas tecnologias educacionais, de modo a fortalecer o ensino-aprendizagem da Matemática e tornar o processo educativo mais dinâmico e acessível a todos os estudantes.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Célio Pinto de. **Geometria Espacial**. 2ª ed. Rio de Janeiro. G. Ermakoff Casa Editorial. 2021

ALMEIDA, Talita C. S. **A Base de Conhecimento para o ensino de Sólidos arquimedianos.** 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática). – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUCSP.

ALMEIDA, J.; COSTA, R. **Projetos em Geometria Espacial: práticas inovadoras no ensino básico**. Revista Educação Matemática em Foco, v. 14, n. 2, p. 120-135, 2021.

ASSIS, André Koch Torres. **Arquimedes, o centro de gravidade e a lei da alavanca**. 2008. Canadá. 249 p. ISBN 978-0-9732911-7-9

ASSIS, André K.T.; MAGNAGHI, Ceno Pietro. **O método de Arquimedes: análise e tradução comentada**. [tradução do inglês por Ceno Pietro Magnaghi] 2019. ISBN 9781987980189 (PDF). Canadá.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Plátano, 2003.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BRASIL. MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO FUNDESCOLA. Caderno de teoria e prática 3 (GESTAR). Brasília, 2008

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BOYER, Carl B. Merzbach, Uta C. **História da matemática.** [tradução do inglês por Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

DANTE, L. R. **Teláris Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2018.

DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar, 10: geometria espacial**. 7ª Ed. São Paulo. Editora Atual, 2013. ISBN 978-85-357-1758-7

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** Revemat, 1999.

ENGESTRÖM, Yrjö. **From design experiments to formative interventions**. Theory & Psychology, v. 21, n. 5, p. 598-628, 2011.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009. ISBN 978-85-7139-935-8

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5ª Ed. Campinas. Editora da UNICAMP. 2011. ISBN 85-268-0657-2

FERREIRA, M.; OLIVEIRA, A. **O ensino de poliedros com materiais manipuláveis**. Educação Matemática Pesquisa, v. 19, n. 3, p. 80-95, 2017.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GRÜNBAUM, Branko. **An enduring error**. Elemente der Mathematik. Swiss Mathematical Society, 2009. Disponível em https://ems.press/content/serial-article-files/45375. Acesso em 26 set. 2024

HEATH, T. L.. **The Works of Archimedes**. Cambridge. 1897.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens: o jogo como elemento da cultura**. São Paulo: Perspectiva, 2014.

KASAHARA, K. **Origami Omnibus: Paper folding for everybody**. 20ª ed. Tokyo, New York: Japan Publications, 2005.

KISHIMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 2010.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis**. Campinas: Autores Associados, 1995.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

MELO, Helena Sousa. Os 13 sólidos Arquimedianos. **Correio dos Açores**. Açores/Portugal. 13 nov. 2014. Educação, p. 13. Disponível em https://repositorio.uac.pt/entities/publication/7a11ab1a-1abb-4dc7-a4a0-2039f28873b5. Acesso em: 11 set. 2024.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 12. ed. São Paulo: Hucitec, 2010.

MOURA, C.; GOMES, T. **Ensino de sólidos geométricos: práticas escolares**. Bolema, v. 32, n. 60, p. 110-125, 2018.

NEVES, José Ribamar de Souza. **Poliedros Arquimedianos**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Pernambuco, 2017. Disponível em http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7893. Acesso em: 11 set. 2024.

NUNES, Célia Barros. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática**. 2010. 430 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2010. Disponível em https://repositorio.unesp.br/entities/publication/dd0ca090-d824-4775-bfed-a3baa30a1ad9 . Acesso em: 17 set. 2025

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil**. Revista Zetetiké, v. 1, n. 1, p. 7-18, 1993.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação**. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PLATÃO. Timeu. Disponível em https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/363788/mod_resource/content/0/Plat%C3%A3o_Timeu-%20Completo.pdf . Acesso em 15 set 2024.

PLUTARCO, Marcelo (lendário, morreu em 208 aC). Traduzido por John Dryden. Disponível em http://classics.mit.edu/Plutarch/marcellu.html . Acesso em 23 maio 2024.

RIBEIRO, Thais de Sales. **Poliedros de Arquimedes**: um estudo enriquecedor para as aulas de geometria espacial na rede pública. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2015. Disponível em https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/26454/26454.PDF . Acesso em 23 outubro 2024.

ROCHA-FILHO, Romeu C. **Os fulerenos e sua espantosa geometria molecular**. Revista Química Nova na Escola. 1996. n. 4, p. 7-11. Disponível em https://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc04/atual.pdf Acesso em 03 set. 2025

RODRIGUES, J. G. L. **Por que alunos do ensino médio apresentam baixo desempenho em Geometria Plana**? 2016. xvi, 138 f., il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade de Brasília, Brasília, 2016. 154 p. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/22396. Acesso em: 17 set. 2025

SANTOS, Fernanda Marsaro dos. **Análise de conteúdo: a visão de Laurence Bardin**. Resenha de: [BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011, 229p.] Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v.6, no. 1, p.383-387, mai. 2012. Disponível em http://www.reveduc.ufscar.br. Acesso em 23 outubro 2024.

SILVA, L.; BARBOSA, P. **A construção dos Poliedros de Arquimedes em sala de aula**. Revista do Professor de Matemática, v. 22, n. 1, p. 60-70, 2020.

SMOLE, K.; DINIZ, M. Matemática e jogos: propostas para sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2003.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. 18ª ed. São Paulo. Cortez, 2011.

VAN HIELE, P. M. **Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education**. Orlando: Academic Press, 1986.

VERGNAUD, G. O que é aprender? *In*: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org) **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos campos conceituais**. Curitiba. Editora CRV. 2009.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

YIN, R. K.. **Estudo de Caso, Pesquisa e Aplicações: Design e Métodos** (6ª ed.). Thousand Oaks, CA: Sage. 2018

APÊNDICE A

QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO (1º ENCONTRO)

Parte 1 – Identificação:

Nome: ____ Idade: _______

Ano escolar: ___________

Parte 2 - Conhecimento Prévio sobre Geometria e Poliedros

MARQUE **X** NA(S) SUA(S) RESPOSTA(S)

1. O que você entende por **Geometria**?

( ) Estudo das formas e suas propriedades

( ) Estudo dos números e operações matemáticas

( ) Algo que envolve desenhos e medidas

( ) Nunca ouvi falar sobre isso

2. Você já ouviu falar sobre **Poliedros de PLATÃO**?

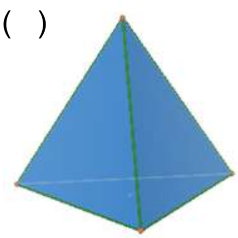
( ) Sim, sei o que são

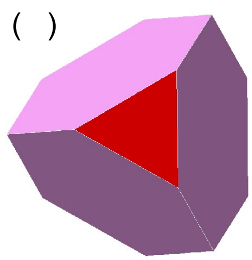
( ) Sim, mas não sei explicar

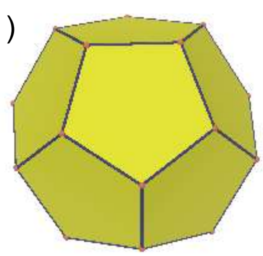
( ) Não tenho certeza

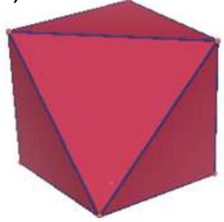
( ) Nunca ouvi falar

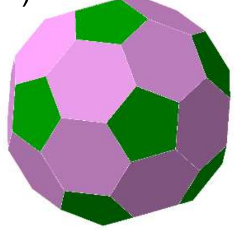
3. Se sim, identifique alguns dos **Poliedros de PLATÃO**?

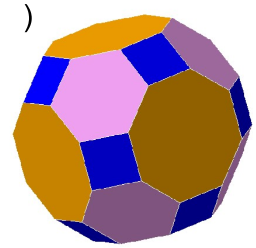
( )


( )


( )


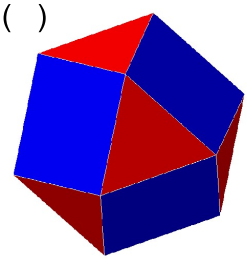
( )


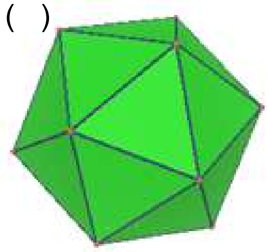
( )


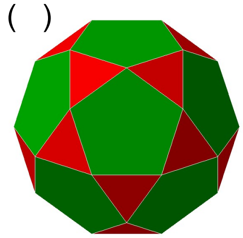
( )


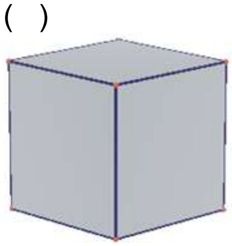
4. Você já ouviu falar sobre **Poliedros de ARQUIMEDES**?
( ) Sim, sei o que são
( ) Sim, mas não sei explicar
( ) Não tenho certeza
( ) Nunca ouvi falar

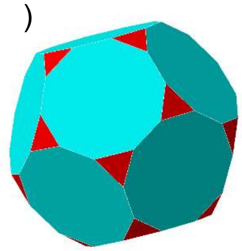
5. Se sim, identifique alguns dos **Poliedros de ARQUIMEDES**?

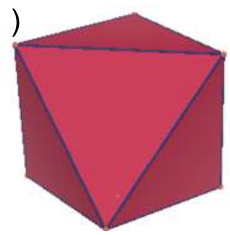
( )


( )


( )


( )


( )


( )


6. Você se sente confortável em identificar e nomear diferentes tipos de sólidos geométricos?
( ) Sim, com facilidade
( ) Sim, mas com alguma dificuldade
( ) Não tenho certeza
( ) Não, tenho dificuldade

7. Como você descreveria sua experiência com o ensino de Geometria até agora?
( ) Muito interessante e fácil de aprender
( ) Interessante, mas com algumas dificuldades
( ) Difícil e desmotivador
( ) Não gosto de Geometria

APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO (4º ENCONTRO)

Parte 1 - Identificação:

Nome: ____ Idade: _______

Ano escolar: __________

Parte 2: Conhecimento Prévio sobre Geometria e Poliedros

MARQUE **X** NA(S) SUA(S) RESPOSTA(S)

1. O que você entende por **Geometria**?

( ) Estudo das formas e suas propriedades

( ) Estudo dos números e operações matemáticas

( ) Algo que envolve desenhos e medidas

( ) Nunca ouvi falar sobre isso

2. Agora que você já ouviu falar dos **Poliedros de ARQUIMEDES**, defina-os?

( ) são poliedros convexos que possuem mais de um tipo de polígono regular em suas faces e todos os seus vértices são congruentes.

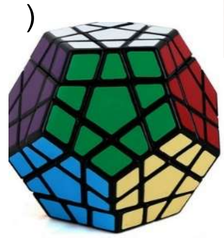
( ) são poliedros convexos que possuem um único tipo de polígono regular em suas faces e todos os seus vértices são congruentes.

( ) são poliedros côncavos que possuem mais de um tipo de polígono regular em suas faces e todos os seus vértices são congruentes.

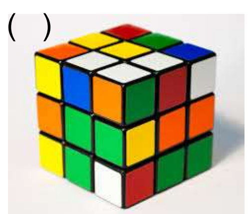
3. Identifique abaixo quais figuras abaixo[7] são **Poliedros de ARQUIMEDES.**

( )

( )



( )



( )

[7] Imagens disponível em https://ideiasesquecidas.com/2015/05/31/poliedros-magicos/

4. Você definiu e identificou alguns poliedros. Agora, assinale a(s) alternativa(s) que indicam pelo menos um dos nomes dados aos **Poliedros de ARQUIMEDES**.

( ) Octaedro truncado

( ) Octaedro

( ) Icosidodecaedro

( ) Rombicosidodecaedro

( ) Icosaedro

5. Relacione os **Poliedros de ARQUIMEDES** da tabela abaixo com seus respectivos nomes.

(A) Snub Cuboctaedro

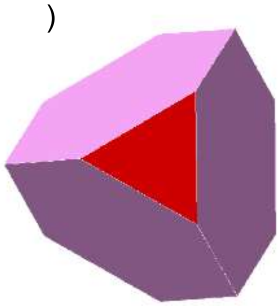
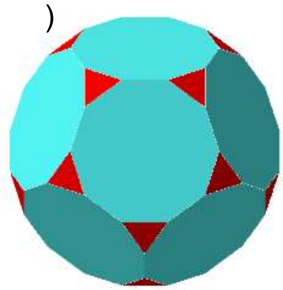
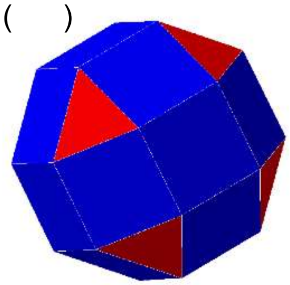
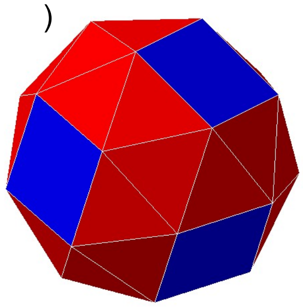
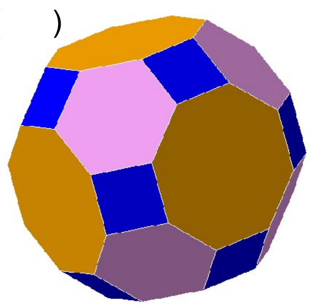
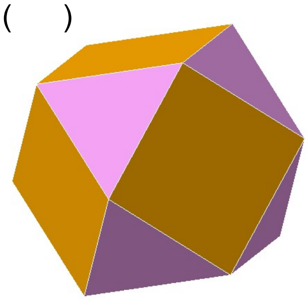
(B) Rombicuboctaedro

(C) Cuboctaedro

(D) Cuboctaedro truncado

(E) Dodecaedro truncado

(F) Tetraedro truncado

( ) 	( ) 	( ) 
( ) 	( ) 	( ) 

APÊNDICE C

QUESTIONÁRIO AVALIATIVO (5º ENCONTRO)

Parte 1 - Identificação:

Nome: ____ Idade: _______

Ano escolar: __________

Parte 2: Compreensão dos Conceitos Aprendidos

MARQUE **X** NA(S) SUA(S) RESPOSTA(S)

1. Após a sequência didática, como você descreveria seu nível de conhecimento sobre os Poliedros de Arquimedes?

( ) Melhorou muito

( ) Melhorou um pouco

( ) Continua igual

( ) Ainda tenho muitas dúvidas

2. Você acha que a construção manual dos poliedros ajudou no seu aprendizado?

( ) Sim, muito

( ) Sim, um pouco

( ) Não fez diferença

( ) Não ajudou

3. Qual método de utilizado pelos professores você gostaria de repetir?

( ) Papel para cortar e colar

( ) Jujuba com palitos

( ) Origami

( ) Brinquedo geométrico dos poliedros de Arquimedes

4. O que foi mais difícil para você durante as atividades?

( ) Papel para cortar e colar

( ) Jujuba com palitos

( ) Origami

( ) Brinquedo geométrico dos poliedros de Arquimedes

Parte 3: Percepção sobre a Metodologia Utilizada

5. Você gostou da abordagem utilizada nas aulas?

( ) Sim, foi muito interessante

( ) Sim, mas poderia ter sido diferente

( ) Não fez muita diferença para mim

( ) Não gostei

6. Em comparação com as aulas tradicionais de Geometria, como você avaliaria essa experiência?

( ) Muito melhor

( ) Um pouco melhor

( ) Igual

( ) Pior

7. Você gostaria que esse tipo de metodologia fosse aplicado em outras aulas de Matemática?

( ) Sim, com certeza

( ) Sim, mas com algumas modificações

( ) Talvez, dependendo do conteúdo

( ) Não

8. O que você mais gostou na sequência de ensino?

____

____

9. O que você mudaria na abordagem utilizada?

____

____

____

APÊNDICE D

QUESTIONÁRIO AO PROFESSOR

Ano escolar que leciona: _____________ Turno: _____________

Esta entrevista visa coletar as percepções dos professores sobre a aplicabilidade das estratégias didáticas empregadas na pesquisa.

1. Antes da intervenção, qual era sua percepção sobre as dificuldades dos alunos no aprendizado de Geometria?

____

____

____

2. Você acredita que a abordagem utilizada (modelagem física) impactou positivamente a aprendizagem dos alunos? Por quê?

____

____

____

3. Como os alunos reagiram às atividades práticas? Eles demonstraram maior interesse e engajamento?

____

____

____

4. Na sua opinião, quais foram os maiores desafios da aplicação dessa sequência didática?

____

____

____

5. Você acredita que essa metodologia pode ser incorporada ao currículo de forma mais ampla? O que seria necessário para isso acontecer?

6. Você percebeu diferenças no desempenho dos alunos após a intervenção? Se sim, quais foram as mudanças mais notáveis?

7. Se tivesse a oportunidade de aplicar essa abordagem novamente, o que mudaria ou aprimoraria?

10. Em sua experiência, quais são os principais desafios para tornar o ensino de Geometria mais envolvente e acessível para os alunos?

ANEXO

SOBRE PLATÃO E OS POLIEDROS REGULARES

É interessante como Platão, em seu livro Timeu, descreveu os cinco poliedros regulares que foram associados ao seu nome. Descreveu associando-os aos com os quatro “elementos” primordiais empedocleanos de todos os corpos materiais — fogo, ar, água e terra (Eves, 2011). Vamos ver como ele descreveu cada um destes cinco poliedros:

AO TETRAEDRO: Quatro desses triângulos constituídos por quatro lados iguais, unidos a três ângulos planos, formam um único ângulo sólido que é gerado imediatamente a seguir ao mais obtuso dos ângulos planos. Uma vez formados quatro ângulos desse tipo, está composta a primeira figura sólida, que divide um todo esférico em partes iguais e semelhantes. *Portanto, de acordo com o raciocínio correto e verosímil, estabeleçamos que a figura sólida da pirâmide é o elemento que gerou o fogo e a sua semente.*

AO OCTAEDRO A segunda figura é formada a partir dos mesmos triângulos, combinando-se oito triângulos equiláteros que produzem um só ângulo sólido a partir de quatro ângulos planos; e quando se geram seis ângulos deste tipo, o segundo corpo está deste modo terminado.

...e o médio ao ar ... o segundo mais agudo ao ar ... digamos que, na ordem de geração, o ar é o segundo

AO ICOSAEDRO: A terceira figura é constituída pela conjunção de cento e vinte triângulos elementares e de doze ângulos sólidos, cada um dos quais envolvido por cinco triângulos planos equiláteros, e é gerada com vinte bases que são triângulos equiláteros.

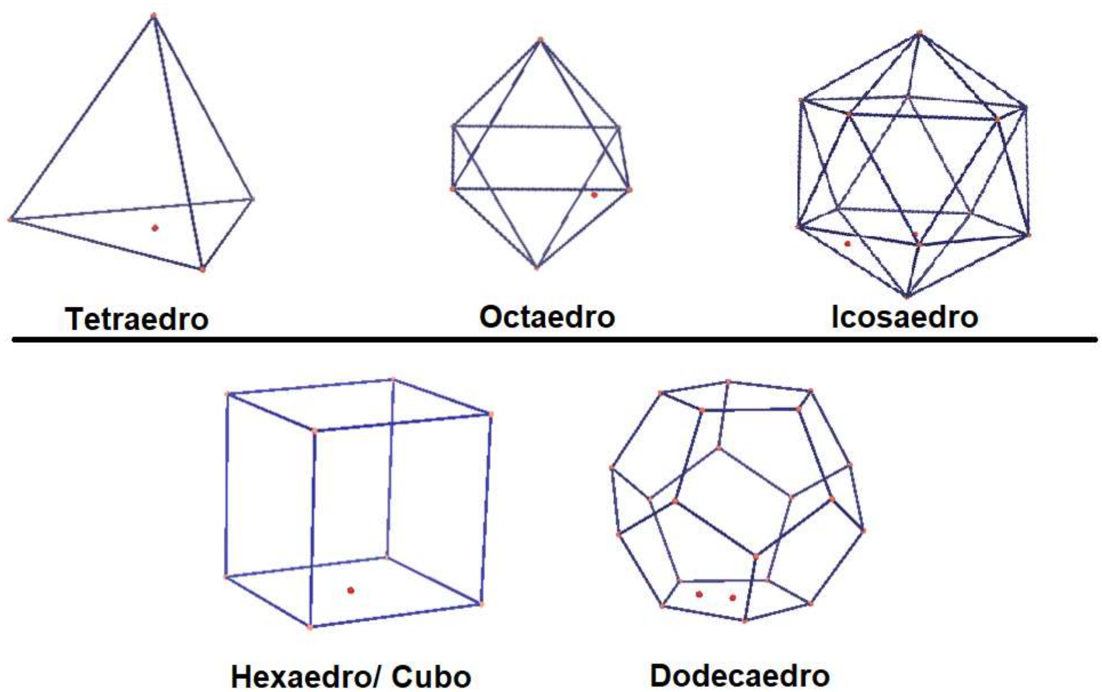
...o maior à água ... o terceiro mais agudo à água ... e a água o terceiro

AO HEXAEDRO/ CUBO: Engendrados estes sólidos, o outro triângulo elementar foi deixado de parte, e o triângulo isósceles engendrou a natureza do quarto, constituindo quatro triângulos que coincidiram no centro os seus ângulos retos, formando um único quadrilátero equilateral. Quando foram conjugados seis deste tipo, produziu oito ângulos sólidos, sendo cada um deles constituído pela harmonia de três ângulos planos retos; a figura do corpo constituído foi a do cubo, que tem seis faces planas, quadrangulares e equilaterais.

Atribuamos à terra a forma cúbica, pois a terra, dos quatro elementos, é o que tem mais dificuldade em mover-se e, dos corpos, o mais adequado para ser moldado – inevitavelmente e com certeza que foi gerado deste modo para que tivesse as bases mais estáveis.

AO DODECAEDRO: *Visto que havia ainda uma quinta combinação, o deus utilizou-a para pintar animais no universo.*

Figura 84 – Sólidos ou Poliedros de Platão



Fonte – do autor

Platão compreendia que os poliedros associados aos elementos primordiais empedocleanos não podia ser visto, como ele descreve: *é necessário ter em mente que todos os corpos são de tal forma pequenos, que, tomando cada um deles de acordo com o seu género, nenhum pode ser observado por nós por causa da sua pequenez, mas só são visíveis quando reunidos em grande número numa massa consistente,* ou seja, a noção de partículas muito pequena que formavam um todo já era compreendida desde Platão e posteriormente por seus discípulos.