UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Aline Juliane Barbosa e Silva

Atividades Práticas e Ferramentas Tecnológicas no Ensino das Funções Exponenciais

RECIFE
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Aline Juliane Barbosa e Silva

Atividades Práticas e Ferramentas Tecnológicas no Ensino das Funções Exponenciais

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Antônio Hinojosa Vera

RECIFE
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

S586a Silva, Aline Juliane Barbosa e.
Atividades práticas e ferramentas tecnológicas no ensino das funções exponenciais / Aline Juliane Barbosa e Silva. – Recife, 2025.
88 f.; il.

Orientador(a): Jorge Antônio Hinojosa Vera.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Potenciação. 2. Funções exponenciais. 3. Fractais. 4. Didática 5. Matemática - Estudo e ensino. I. Vera, Jorge Antônio Hinojosa, orient. II. Título

CDD 510

ALINE JULIANE BARBOSA E SILVA

"Atividades Práticas e Ferramentas Tecnológicas no Ensino das Funções Exponenciais"

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 29/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera (Orientador) – UFRPE

Profa. Dra. Islanita Cecília Alcantara de Albuquerque Lima – UPE

Profa. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva – PROFMAT/UFRPE

À minha família

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, meu Criador e Senhor da minha vida.

Aos meus familiares, pelo apoio e incentivo constantes.

Aos professores do PROFMAT, à coordenação do programa e a todos os colaboradores do Departamento de Matemática da UFRPE.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Antônio Hinojosa Vera, por suas valiosas contribuições e prestatividade.

A todos os colegas de turma, que sempre trouxeram alegria e incentivo.

A toda a comunidade escolar da EREM Antônio Inácio, em especial a Denise Alves de Lucena e toda a equipe gestora, aos alunos, professores e demais funcionários, pela amizade e pela agradabilíssima convivência.

À Capes, pelo incentivo financeiro.

À Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, pelo apoio.

Por fim, a todos os amigos que, com palavras de incentivo, fizeram parte desta caminhada.

“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)

Resumo

O presente estudo teve como objetivo explorar soluções que auxiliem o professor do ensino médio no ensino das Funções Exponenciais. Para isso, foi desenvolvida e aplicada uma sequência didática que integra teoria, atividades práticas e ferramentas tecnológicas. A proposta didática foi dividida em cinco etapas, denominadas de Atividade I a V. Partindo de momentos de diagnose e revisão, o estudo da função exponencial foi introduzido por atividades práticas, como a construção de fractais, e recursos como o Excel e o Geogebra. Em seguida, foram realizadas resoluções de problemas em equipes, abordando aplicações em diferentes contextos. Posteriormente, foram trabalhadas as práticas de resolução de equações e inequações exponenciais, de forma expositiva e participativa, com o uso de ferramentas tecnológicas. Por fim, a sequência propôs um momento avaliativo, utilizado como ferramenta para a análise dos resultados. As atividades foram desenvolvidas com o uso de diferentes estratégias didáticas, sempre com foco na aprendizagem significativa, priorizando-se o planejamento, a diversidade de propostas e a contextualização. Pensada para o contexto de uma escola pública, a sequência didática apresentou resultados positivos quanto ao desempenho dos alunos e mostrou-se viável e eficiente. A pesquisa, portanto, articulou a busca por soluções com o relato de experiências no processo de ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Potências. Função Exponencial. Fractais. Sequência Didática. Tecnologias Educacionais. Ensino da Matemática.

Abstract

This study aimed to explore solutions to assist teachers in the teaching of Exponential Functions. For this purpose, a didactic sequence that integrates theory, practical activities, and technological tools was developed and applied. The didactic proposal was divided into five stages, denominated Activity I to V: starting from moments of diagnosis and review, the study of the exponential function was introduced through practical activities, such as the construction of fractals, and resources like Excel and Geogebra. Subsequently, team-based problem-solving sessions were held, addressing applications in different contexts. Afterwards, the practice of solving exponential equations and inequalities was addressed in an expository and participatory manner, with the use of technological tools. Finally, the sequence proposed an evaluative moment, used as a tool for the analysis of the results. The activities were developed using different didactic strategies, always with a focus on meaningful learning, prioritizing planning, diversity of proposals, and contextualization. Designed for a public school context, the didactic sequence presented positive results regarding student performance and proved to be viable and efficient. The research, therefore, articulated the search for solutions with the reporting of experiences in the teaching-learning process.

Keywords: Powers. Exponential Function. Fractals. Didactic Sequence. Educational Technologies. Teaching Mathematics.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica.
SAEPE	Sistema Avaliativo Educacional de Pernambuco.
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
BNCC	Base Nacional Comum Curricular.

Sumário

Introdução

As funções exponenciais podem ser utilizadas como modelo matemático em inúmeras situações. São aplicadas em diversos campos do conhecimento, sendo observadas em fenômenos biológicos, físicos, químicos, sociais, aplicações financeiras, nas ciências econômicas e nas engenharias. Por ser um conteúdo importante em várias áreas, o estudo das funções exponenciais deve ser consistente e, desde sua primeira abordagem, direcionado às diversas aplicabilidades. Nesse contexto, o presente trabalho pretende explorar ferramentas tecnológicas e práticas, que auxiliem o professor no ensino desse conteúdo, promovendo maior interação com os estudantes e, consequentemente, uma aprendizagem efetiva.

Atualmente, no currículo do Estado de Pernambuco, este conteúdo é trabalhado no primeiro e segundo ano do Ensino Médio, e revisto no terceiro ano, principalmente no estudo de juros. Dada a sua importância e abrangência, surge a necessidade de otimizar o tempo didático por meio de alternativas tecnológicas, aliadas a um planejamento específico para a turma. Sendo assim, um dos objetivos deste trabalho é a elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática sobre as funções exponenciais, com o auxílio de tecnologias e de atividades práticas. Com o intuito de alcançar uma aprendizagem significativa, busca-se analisar ferramentas que contribuam para o processo de ensino das funções exponenciais e, com base em um planejamento estratégico das aulas, explorar soluções viáveis que favoreçam a compreensão e estimulem o interesse dos estudantes. Pretende-se, dessa forma, aproveitar os recursos disponíveis para o engajamento dos alunos, uma vez que este é um conteúdo que permite ampla contextualização e aplicação no cotidiano.

Além disso, é importante destacar os desafios enfrentados no ensino das funções exponenciais, considerando o histórico de desempenho dos estudantes em avaliações diagnósticas e externas, como o SAEB e o SAEPE. Tais instrumentos têm evidenciado defasagens no domínio de conteúdos fundamentais, especialmente os que envolvem o raciocínio algébrico e a interpretação de funções, incluindo as de crescimento exponencial. Essas dificuldades se refletem diretamente na capacidade dos alunos de resolver problemas, compreender fenômenos com base em dados e estabelecer relações entre matemática e realidade.

Nesse panorama, o presente trabalho busca oferecer uma contribuição para a transposição dessas dificuldades, apresentando uma sequência didática que combina teoria, atividades práticas e tecnológicas. Recursos como o GeoGebra, planilhas eletrônicas e atividades interativas pretendem não apenas facilitar o acesso dos alunos aos conceitos envolvidos, mas também oferecer ao professor uma alternativa metodológica que seja viável no contexto da escola pública.

A sequência foi desenvolvida considerando as competências e habilidades propostas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e dialoga com os princípios de uma aprendizagem ativa e contextualizada.

O trabalho foi estruturado de modo a conduzir o leitor do estudo dos fundamentos teóricos até a análise dos resultados da proposta didática. No Capítulo 1, são revisados os conceitos e propriedades das potências, abrangendo expoentes naturais, inteiros, racionais e reais. Esse capítulo cumpre o papel de consolidar os pré-requisitos necessários para a compreensão das funções exponenciais, apresentando definições, demonstrações e exemplos que apoiam o aprofundamento do tema.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo das funções exponenciais, abordando sua definição formal, propriedades, gráficos e aplicações. Nesse contexto, são discutidas também as relações entre funções exponenciais e progressões, além da resolução de equações e inequações exponenciais. O Capítulo 3 apresenta os fractais como recurso didático, destacando objetos matemáticos que permitem explorar o crescimento e o decaimento exponencial de forma intuitiva e visual, como o Triângulo e o Tapete de Sierpinski, o Fractal de Vicsek e o Floco de Neve de Koch.

Já o Capítulo 4 descreve a proposta didática construída e aplicada em turmas do Ensino Médio, detalhando as etapas da sequência de atividades, que envolvem momentos de diagnóstico, revisão, prática com ferramentas tecnológicas e resolução de problemas em equipe. O Capítulo 5 apresenta a análise e discussão dos resultados obtidos, relacionando o desempenho dos estudantes aos objetivos da pesquisa e à literatura da área.

Ao final, espera-se que os resultados obtidos com a aplicação da proposta possam apontar caminhos para uma prática pedagógica mais eficiente, contribuindo para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática e para o desenvolvimento de uma postura investigativa e crítica por parte dos estudantes.

1 Potências e propriedades

O presente capítulo oferece uma revisão sobre o tema das potências, detalhando seus conceitos e propriedades fundamentais. Elaborado para aplicação em turmas do ensino médio, seu propósito é solidificar os conhecimentos que servem de pré-requisito ao estudo da função exponencial. A estrutura do capítulo inclui definições formais, demonstrações de propriedades e alguns exemplos para ilustrar a teoria.

Partindo da definição de potências com expoentes naturais, avançaremos para os expoentes inteiros negativos, racionais e irracionais, verificando a validade de suas propriedades em cada etapa.

Para indicar os conjuntos numéricos utilizaremos as seguintes notações:

- Conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.
- Conjunto dos números naturais não nulos, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- Conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$; $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- Conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q} = \{\frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*\}$; $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
- Conjunto dos números irracionais, $\mathbb{I}$ são os números reais que não são racionais.
- Conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Conjunto dos números reais positivos, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

1.1 Potência de expoente natural

Definição 1.1. Seja a um número real e n um número natural. A potência de base a e expoente n é o número a^n, tal que: $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$; e $a^n = a^{n-1} \cdot a$, para todo $n \geq 1$.

Da definição, percebe-se que:

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a, \quad a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a, \quad a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a.$$

E, de modo geral, para m natural e $m \geq 2$, a potência a^m é um produto com m fatores a, ou seja:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}}.$$

1.1.1 Propriedades

Sejam a e b números reais e m e n naturais, com $a \neq 0$ ou $n \neq 0$, valem as seguintes propriedades:

(A1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

(A2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m \geq n$.

(A3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

(A4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

(A5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Demonstração. Vamos usar a propriedade $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}}$.

(A1) $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ fatores}} = a^{n+m}$.

(A2) $\frac{a^m}{a^n} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ fatores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ fatores}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m-n \text{ fatores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}} = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m-n \text{ fatores}} = a^{m-n}$.

(A3) $(a \cdot b)^n = \overbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}^{n \text{ fatores}} = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ fatores}} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}^{n \text{ fatores}} = a^n \cdot b^n$, onde na segunda igualdade usamos a comutatividade dos números reais.

(A4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}^{n \text{ fatores}} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ fatores}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ fatores}}} = \frac{a^n}{b^n}$.

(A5) $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ fatores}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ fatores}} \cdot \ldots \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ fatores}}}_{n \text{ fatores}} = a^{m \cdot n}$.

□

1.2 Potência de expoente inteiro

Desejamos agora generalizar a definição de potência a^n para qualquer número real $a \neq 0$ e qualquer $n \in \mathbb{Z}$ mantendo a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, devemos ter

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, \quad \text{logo} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

1.2.1 Potência de expoente negativo

Definição 1.2. Seja a um número real não nulo, e $n \geq 1$ um número natural, define-se a potência a^{-n} de expoente negativo como:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemplo 1.3.

a) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

b) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

1.2.2 Propriedades

As propriedades listadas para os expoentes naturais, também são válidas para os expoentes inteiros. Além disso, a propriedade $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, também é verificada quando $m < n$.

Sendo a e b números reais não nulos, e m e n inteiros, valem as propriedades:

(B1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

(B2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

(B3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

(B4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

(B5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Demonstração. Para n e m naturais as propriedades foram demonstradas na seção anterior. Vejamos os casos onde n e m são negativos.

(B1) Caso os dois expoentes sejam negativos, ou seja, $-m > 0$ e $-n > 0$. Utilizando a propriedade (A1) e a definição, temos

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} \overset{(A1)}{=} \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Caso um dos expoentes é negativo. Suponha $m > 0$ e $-n > 0$, neste caso teremos as seguintes possibilidades:

(i) Se $m \geq -n$, teremos pela definição e a propriedade (A2),

$$a^m \cdot a^n = \frac{a^m}{a^{-n}} \overset{(A2)}{=} a^{m-(-n)} = a^{m+n}.$$

(ii) Se $m < -n$, novamente pela definição e a propriedade (A2)

$$a^m \cdot a^n = \frac{a^m}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{a^{-n}}{a^m}} \overset{(A2)}{=} \frac{1}{a^{-n-m}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

(B2) Caso $-n < 0$, pela definição e a propriedade (B1), teremos

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{\frac{1}{a^{-n}}} = a^m \cdot a^{-n} \overset{(B1)}{=} a^{m-n}.$$

(B3) Suponha $-n > 0$, então pela definição e a propriedade (A3), teremos

$$(a \cdot b)^n = \frac{1}{(a \cdot b)^{-n}} \overset{(A3)}{=} \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n.$$

(B4) Considere $-n > 0$, então pela definição e a propriedade (A4), teremos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}} \overset{(A4)}{=} \frac{1}{\frac{a^{-n}}{b^{-n}}} = \frac{a^n}{\frac{1}{b^{-n}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

(B5) Caso $-m > 0$ e $-n > 0$, teremos pela definição e as propriedades (A4) e (A5),

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^{-n}} = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{-m}\right]^{-n}} \\ &\overset{(A5)}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{(-m)(-n)}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{mn}} \overset{(A4)}{=} \frac{1}{\frac{1^{mn}}{a^{mn}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn}. \end{aligned}$$

□

1.3 Raízes e Potência de expoente racional

Antes de iniciar esta seção, é necessário introduzir algumas noções sobre as funções de números reais que serão utilizados a partir deste tópico. Obviamente, não pretendemos fazer um desenvolvimento completo deste assunto, nos restringiremos somente ao conteúdo básico que utilizaremos neste trabalho.

Definição 1.4. Dados os conjuntos X, Y, uma função $f : X \to Y$ é uma regra que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$.

Definição 1.5. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto dos números reais. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é:

- Crescente, quando para todo $x, y \in X,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- Decrescente, quando para todo $x, y \in X,\ x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$.

Definição 1.6. Quando $X = \mathbb{N}$ ou $X = \mathbb{N}^*$, a função $f : X \to \mathbb{R}$ é chamada sequência (infinita).

Definição 1.7. Dados um número real $a \geq 0$ e um número natural $n \in \mathbb{N}^*$, existe sempre um número real positivo b, tal que $b^n = a$. O número b será chamado raiz n-ésima de a e será representado por $\sqrt[n]{a}$.

Exemplo 1.8.

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$.

b) $\sqrt[5]{32} = 2$, pois $2^5 = 32$.

c) $\sqrt[4]{0} = 0$, pois $0^4 = 0$.

Da definição, segue que:

(i) Quando $a = 0$, então $b = 0$, pois $0^n = 0$ para $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Para todo numero real $a \geq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

A raiz de um número tem as seguintes propriedades: Para a, b e c reais positivos e n, m, p naturais positivos:

(R1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

(R2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

(R3) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

(R4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.

(R5) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

Demonstração. Vamos usar que $\sqrt[n]{a} = b$, quando $b^n = a$.

(R1) Sejam $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{b}$. Logo, $x^n = a$ e $y^n = b$. Assim,

$$a \cdot b = x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a \cdot b} = x \cdot y = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

(R2) Sejam $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{b}$, temos $x^n = a$ e $y^n = b$. Logo,

$$\frac{a}{b} = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

(R3) Seja $x = \sqrt[n]{a}$, logo $x^n = a$ e $x^m = (\sqrt[n]{a})^m$. Portanto,

$$a^m = (x^n)^m = x^{n\,m} = (x^m)^n \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a^m} = x^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

(R4) Sejam $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[m]{x}$, logo $x^n = a$ e $y^m = x$. Assim,

$$y^{m \cdot n} = (y^m)^n = x^n = a \;\Rightarrow\; \sqrt[m \cdot n]{a} = y = \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

(R5) Seja $x = \sqrt[n]{a^m}$, logo $x^n = a^m$. Portanto,

$$a^{m \cdot p} = (a^m)^p = (x^n)^p = x^{n \cdot p} \;\Rightarrow\; \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = x = \sqrt[n]{a^m}.$$

□

Agora vamos definir a^r para um número real $a > 0$ e r número racional de modo que continue válida a regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Portanto, para $r = p/q \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$, deve-se ter:

$$(a^r)^q = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r}_{q \text{ fatores}} = a^{\overbrace{r + r + \cdots + r}^{q \text{ somados}}} = a^{q \cdot r} = a^p.$$

Logo, a^r é o número real cuja q-ésima potência é igual a a^p. Pela definição de raiz q-ésima, este número é $\sqrt[q]{a^p}$.

Definição 1.9. Dados $a \in \mathbb{R}^+$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$, a potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ é definida por:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Para $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, adotaremos $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Exemplo 1.10.

a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

b) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

c) $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$.

1.3.1 Propriedades

As propriedades listadas para potências com expoentes inteiros, são válidas também para as potências com expoentes racionais, segue que, para a e b reais positivos e r e s racionais, valem:

(C1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

(C2) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, a \neq 0, m \geq n$.

(C3) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$.

(C4) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, b \neq 0$.

(C5) $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$.

Demonstração. Considere $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, com m, n, p e q inteiros, e $n > 0$, $q > 0$.

(C1) Usaremos as propriedades (R1) e (B1).

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{np}{nq}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} \stackrel{(R1)}{=} \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} \\ &\stackrel{(B1)}{=} \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}. \end{aligned}$$

(C2) Vamos usar as propriedades (R2) e (B2).

$$\begin{aligned} \frac{a^r}{a^s} &= \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{a^{\frac{mq}{nq}}}{a^{\frac{np}{nq}}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} \\ &\stackrel{(R2)}{=} \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} \stackrel{(B2)}{=} \sqrt[nq]{a^{mq-nq}} \\ &= a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{r-s}. \end{aligned}$$

(C3) Vamos usar as propriedades (B3) e (R1).

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^r &= (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m} \stackrel{(B3)}{=} \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} \\ &\stackrel{(R1)}{=} \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^n} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^r \cdot b^r. \end{aligned}$$

(C4) Usaremos as propriedades (B4) e (R2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} \\ &\stackrel{(B4)}{=} \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} \stackrel{(R2)}{=} \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}. \end{aligned}$$

(C5) Aqui, usaremos as propriedades (B5)

$$\begin{aligned} (a^r)^s &= \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} \stackrel{(B5)}{=} \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}} \\ &= a^{\frac{\frac{mp}{n}}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{r\cdot s}. \end{aligned}$$

□

1.4 Potência de expoente irracional

O lema abaixo mostra que as potências a^r, com expoentes racionais, estão espalhadas por toda parte em $\mathbb{R}^+$, mesmo não contendo todos os números reais positivos. Os "vazios"de $\mathbb{R}^+$ são as potências a^x, de expoentes irracionais.

Para estabelecer isto precisamos fazer algumas observações.

Se $a > 1$ então, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n, obtemos $a^{n+1} > a^n$. Portanto,

$$a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \cdots$$

Além disso,

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots$$

como se vê multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ pelo número positivo a^n. Isto significa que a sequência cujo n-ésimo termo é a^n, é crescente quando $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Para $a = 1$, esta sequência é constante, com todos os seus termos iguais a 1.

Finalmente, observamos que, se $a > 1$, a sequência formada pelas potências a^n, $n \in \mathbb{N}$ é ilimitada superiormente. Isto é, dado $c \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > c$. De fato, escrevendo $a = 1 + d$ com $d > 0$, pela fórmula do binômio de Newton, obtemos

$$\begin{aligned} a^n &= (1+d)^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}d + \binom{n}{2}d^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}d^{n-1} + \binom{n}{n}d^n \\ &= 1 + nd + \left[\frac{(n-1)n}{2}d^2 + \cdots + nd^{n-1} + d^n\right] \\ &> 1 + nd. \end{aligned}$$

Assim, escolhendo $n > \frac{c-1}{d}$, obtemos $a^n > 1 + nd > 1 + (c-1) = c$.

Lema 1.11. *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Prova. Dados $\alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, vamos supor a e α maiores que 1. Como as potencias de expoente natural de números maiores do que 1 é crescente e ilimitada superiormente, podemos obter:

- $M \in \mathbb{N}$ tal que $\beta < a^M$;
- $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < \left(1 + \frac{\beta-\alpha}{a^M}\right)^n$.

Logo, existem M é n números naturais tais que

$$\alpha < \beta < a^M \quad e \quad 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Da última relação, obtemos

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \Rightarrow 0 < a^{1/n} - 1 < \frac{\beta - \alpha}{a^M} \Rightarrow 0 < a^M(a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo,

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{m/n}(a^{1/n} - 1)\beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências $a^0 = 1$, $a^{1/n}$, $a^{2/n}, \cdots, a^M$ são extremos de intervalos consecutivos todos de comprimento menor do que $\beta - \alpha$.

Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{m/n}$ está no intervalo $[\alpha, \beta]$. $\square$

Observamos também

Lema 1.12. *A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, definida por $f(q) = a^q$ é crescente quando $a > 1$, decrescente para $0 < a < 1$ e constate igual a 1 quando $a = 1$.*

Prova. Como vimos, para $n \in \mathbb{N}^*$, temos

$$a > 1 \Rightarrow 1 = a^0 < a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \cdots$$

e

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1 = a^0 > a > a^2 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots$$

Note que se $a > 1$, então $1 > \frac{1}{a} = a^{-1}$. Logo, $0 < a^{-1} < 1 < a$ e para $n \in \mathbb{N}$, temos $(a^{-1})^n = a^{-n}$. Assim, pelas relações estabelecidas anteriormente para os números naturais, obtemos

$$a > 1 \Rightarrow \cdots < a^{-(n+1)} < a^{-n} < \cdots < a^{-2} < a^{-1} < 1 = a^0 < a < a^2 < \cdots a^n < a^{n+1} < \cdots$$

Agora, se $0 < a < 1$, então $0 < a < 1 < a^{-1}$. Novamente, as relações estabelecidas nos números naturais fornecem

$$0 < a < 1 \Rightarrow \cdots > a^{-(n+1)} > a^{-n} > \cdots > a^{-1} > 1 = a^0 > a > a^2 > \cdots a^n > a^{n+1} > \cdots$$

Isto é, a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(z) = a^z$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

Sejam $p, q \in \mathbb{Q}$ com $p < q$. Podemos escrever $p = \frac{z}{m}$ com $z \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^*$ e $q = p + \frac{k}{n}$, onde $k, n \in \mathbb{N}^*$. Temos os seguintes casos:

1. $a > 1$. Neste caso teremos

$$\frac{a^q}{a^p} = a^{q-p} = a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k \overset{(i)}{>} 1^k = 1 \Rightarrow a^q > a^p.$$

(i) segue pelos seguintes fatos:

- Se $a > 1$, então $\sqrt[n]{a} > 1$ para $n \in \mathbb{N}^*$. De fato, caso $\sqrt[n]{a} = b \leq 1$, teríamos que $a = b^n \leq 1$, que é absurdo.

- $b > c > 0 \Rightarrow b^k > c^k$ para $k \in \mathbb{N}^*$. Pois, $\frac{b}{c} > 1$, logo $\frac{b^k}{a^k} = \left(\frac{b}{c}\right)^k > 1$, ou seja, $b^k > c^k$.

2. $0 < a < 1$. Neste caso,

$$\frac{a^q}{a^p} = a^{q-p} = a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[k]{n} = (\sqrt{a})^k \overset{(ii)}{<} 1^k = 1 \Rightarrow a^q < a^p.$$

(ii) segue de:

- Se $0 < a < 1$, então $\sqrt[n]{a} < 1$ para $n \in \mathbb{N}^*$. De fato, caso $\sqrt[n]{a} = b \geq 1$, teríamos que $a = b^n \geq 1$, que é absurdo.
- $0 < b < c \Rightarrow b^k < c^k$ para $k \in \mathbb{N}^*$. Pois, $0 < \frac{b}{c} < 1$, logo $\frac{b^k}{a^k} = \left(\frac{b}{c}\right)^k < 1$, ou seja, $b^k < c^k$.

Observe que a afirmação 1. acima, fornece que a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ é crescente e a afirmação 2. estabelece que tal função é decrescente.

Resta mostrar que $1^r = 1$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. De fato,

- $1^0 = 1$.
- Para $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$, temos $1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n \text{ fatores}} = 1$.
- Para $n \in \mathbb{Z}$, e $n < 0$, temos $1^n = \frac{1}{1^{-n}} = \frac{1}{1} = 1$.
- Para $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $1^r = ^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{1^m} = \sqrt[n]{1} = 1$.

$\square$

Agora vamos definir a potencia a^x, nos casos $a > 0$, $a \neq 1$ e $0 < a < 1$ para x número irracional, mantendo a propriedade da função ser crescente no caso $a > 0$, $a \neq 1$ e decrescente no caso $0 < a < 1$.

Definição 1.13. A potência a^x, com x irracional é definida como segue:

- Caso $a > 1$, a^x é definido pela seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r,\ s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

- No caso $0 < a < 1$, a^x é definido pela propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r,\ s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^s < a^x < a^r.$$

- Quando $a = 1$, visto Lema 1.12, a definição natural é $1^x = 1$.

Vejamos a unicidade de a^x, para $a > 1$. (o caso $0 < a < 1$ é análogo).

Unicidade de a^x no caso $a > 1$: Não podem existir dois números reais distintos, digamos $A < B$, para assumir o valor a^x, com a propriedade acima. Se existissem tais A e B teríamos

$$r < x < s, \ r, s \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow \ a^r < A < B < a^s,$$

e então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o lema anterior.

Portanto, quando x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por faltas são as potencias a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior do que x.

Note que no caso $a = 1$, quando x é irracional, as aproximações por faltas e as aproximações por excesso de 1^x são constates iguais a 1. Então, nada mais natural que definir $1^x = 1$.

Exemplo 1.14. A potência $2^{\sqrt{3}}$ é um número real, e a definição de potência está relacionada às potências com expoentes racionais próximos, verificamos que:

$$2^{1{,}732050807} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}732050808}.$$

1.5 Potência de expoente real

Tendo sido definidas anteriormente, as potências de expoente racional e irracional, está definida a potência a^x com $a \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$.

1.5.1 Propriedades

Sendo $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $x, y \in \mathbb{R}$, as propriedades seguintes são válidas:

(P1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

(P2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

(P3) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

(P4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

(P5) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

Demonstração. Tais propriedades foram provados quando $x, y \in \mathbb{Q}$. Logo, basta mostrar elas no caso em que x ou y são números irracionais. Lembrando a definição de a^x para $a > 1$ e x irracional: a^x com $a > 1$ é o único número que satisfaz:

$$\text{Para todo } r, s \in \mathbb{Q} \text{ com } r < x < s \text{ tem-se } a^r < a^x < a^s. \tag{1.1}$$

Note que (1.1), pelo Lema 1.12, também vale para os números x racionais.

(P1) Sejam $r, s, p, q \in \mathbb{Q}$ tais que

$$r < x < s \;\Rightarrow\; a^r < a^x < a^s. \tag{1.2}$$

$$p < y < q \;\Rightarrow\; a^p < a^y < a^q. \tag{1.3}$$

As equações (1.2) e (1.3) fornecem para $r < x < s$, $p < y < q$ e logo para $r + p < x + y < s + q$,

$$a^{r+p} = a^r \cdot a^p < a^x \cdot a^y < a^s \cdot a^q = a^{s+q}.$$

Por outra parte, temos

$$r + p < x + y < s + q \;\Rightarrow\; a^{r+p} < a^{x+y} < a^{s+q}.$$

Agora, se $A = a^x \cdot a^y$ e $B = a^{x+y}$ fossem distintos, pelo Lema (1.11), existiria $R \in \mathbb{Q}$ tal que a^R está entre A e B, que é absurdo, pela unicidade de (1.1). Portanto,

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

(P2) Note que por (P1) para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ e $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, temos $(a^x)^{-1} = a^{-x}$, pois

$$1 = a^0 = a^{x-x} \overset{(P1)}{=} a^x \cdot a^{-x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (a^x)^{-1} = a^{-x} & (i) \\ (a^{-x})^{-1} = a^x & (ii). \end{cases}$$

Assim, de (i) e (P1), obtemos

$$\frac{a^x}{a^y} = a^x \cdot (a^y)^{-1} \overset{(i)}{=} a^x \cdot a^{-y} \overset{(P1)}{=} a^{x-y}.$$

(P3) Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que

$$r < x < s \;\Rightarrow\; \begin{cases} a^r < a^x < a^s & (1) \\ b^r < b^x < b^s & (2) \\ (a \cdot b)^r < (a \cdot b)^x < (a \cdot b)^s & (3) \end{cases}.$$

As desigualdades (1) e (2), junto com a propriedade (C3), obtemos

$$(a \cdot b)^r \overset{(C3)}{=} a^r \cdot b^r < a^x \cdot b^x < a^s \cdot b^s \overset{(C3)}{=} (a \cdot b)^s.$$

Esta desigualdade junto a desigualdade (3), por um argumento similar ao dado em (P1), obtemos $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

(P4) Note que, as propriedades (P1) e (P3) fornecem

$$\begin{cases} 1 = 1^x = (b \cdot b^{-1})^x \overset{(P3)}{=} b^x \cdot (b^{-1})^x \\ 1 = b^0 = b^{x-x} \overset{(P1)}{=} b^x \cdot b^{-x} \end{cases} \;\Rightarrow\; b^{-x} = (b^{-1})^x \quad (iii).$$

Assim,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = (a \cdot b^{-1})^x \overset{(P3)}{=} a^x \cdot (b^{-1})^x \overset{(iii)}{=} a^x \cdot b^{-x}.$$

(P5) Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e r, s, p, $q \in \mathbb{Q}^*$, tais que $r < x < s$ e $p < y < q$.

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

- Caso (1): $x = 0$ ou $y = 0$. É trivial, pois $a^0 = 1$ e $1^z = 1$ $(z \in \mathbb{R})$.
- Caso (2): x e y positivos. Podemos escolher $r > 0$ e $p > 0$. Assim, $a^r > 1$ e $a^s > 1$. Temos
$$(a^r)^y < (a^x)^y < (a^s)^y. \tag{1.4}$$
Como $p < y < q$, segue:
$$(a^r)^p < (a^r)^y < (a^r)^q. \tag{1.5}$$
$$(a^s)^p < (a^s)^y < (a^s)^q. \tag{1.6}$$
As desigualdades (1.4), (1.5), (1.6), com a propriedade (C5), obtemos
$$a^{r\cdot p} \overset{(C5)}{=} (a^r)^p < (a^r)^y < (a^x)^y < (a^s)^y < (a^s)^q \overset{(C5)}{=} a^{s\cdot q}.$$
ou seja,
$$a^{r\cdot p} < (a^x)^y < a^{s\cdot q}. \tag{1.7}$$
Por outro lado,
$$r \cdot p < x \cdot y < s \cdot q \Rightarrow a^{r\cdot p} < a^{x\cdot y} < a^{s\cdot q}.$$
Esta desigualdade com (1.7), por um argumento similar ao dado em (P1), obtemos
$$(a^x)^y = a^{x\cdot y}.$$
- Caso (3): x negativo e y positivo. Seja $z = -x > 0$. Então,
$$(a^x)^y = (a^{-z})^y \overset{(P2)}{=} \left(\frac{1}{a^z}\right)^y \overset{(P4)}{=} \frac{1}{(a^z)^y} = \frac{1}{a^{z\cdot y}} \overset{(P2)}{=} a^{-z\cdot y} = a^{x\cdot y},$$
onde na quarta igualdade acima usamos o caso anterior.
- Caso (4): x positivo e y negativo. Seja $z = -y > 0$. Então,
$$(a^x)^y = (a^x)^{-z} \overset{(P2)}{=} \frac{1}{(a^x)^z} = \frac{1}{a^{x\cdot z}} \overset{(P2)}{=} a^{-x\cdot z} = a^{x\cdot(-z)} = a^{x\cdot y},$$
onde na terceira igualdade acima usamos o caso (2).
- Caso (5): x e y negativos. Seja $z = -x > 0$. Então,
$$(a^x)^y = (a^{-z})^y \overset{(P2)}{=} \left(\frac{1}{a^z}\right)^y \overset{(P4)}{=} \frac{1}{(a^z)^y} = \frac{1}{a^{z\cdot y}} \overset{(P2)}{=} a^{-z\cdot y} = a^{x\cdot y},$$
onde na quarta igualdade acima usamos o caso (4).

□

Esta propriedade nos permite concluir que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

2 Função Exponencial

Neste capítulo a definição e as propriedades da Função Exponencial, foram baseadas no texto do livro Números e Funções Reais (1) da coleção Profmat. Abordamos também, a caracterização das funções exponenciais e sua relação com as progressões, conforme a mesma referência.

Tratamos também das equações e inequações exponenciais, principalmente por meio de exemplos. Por fim, as aplicações das Funções Exponenciais foram baseadas em exemplos de livros didáticos do Ensino Médio.

Definição 2.1. Dado um número real a, com $0 < a \neq 1$. A função exponencial f de base a associa cada número $x \in \mathbb{R}$ à potência a^x. Assim, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, é dada por $f(x) = a^x$.

Exemplo 2.2. Funções exponenciais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $h(x) = (\sqrt{2})^x$.

Segundo Lima (1), a função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
2. $a^1 = a$.
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.
4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.
5. A função exponencial é contínua.
6. A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.

As demonstrações das propriedades acima, podem ser encontradas nas páginas de 154 à 157 de (1). Ainda segundo o mesmo autor, apresentamos a caracterização da função exponencial:

Teorema 2.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

É possível ver a demonstração em (1, p. 158).

E, a caracterização das funções do tipo exponencial (teorema 2.5), demostrado em (1, p. 159).

Definição 2.4. Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando temos $g(x) = ba^x$ para todo todo $x \in \mathbb{R}$, com a e b constantes positivas.

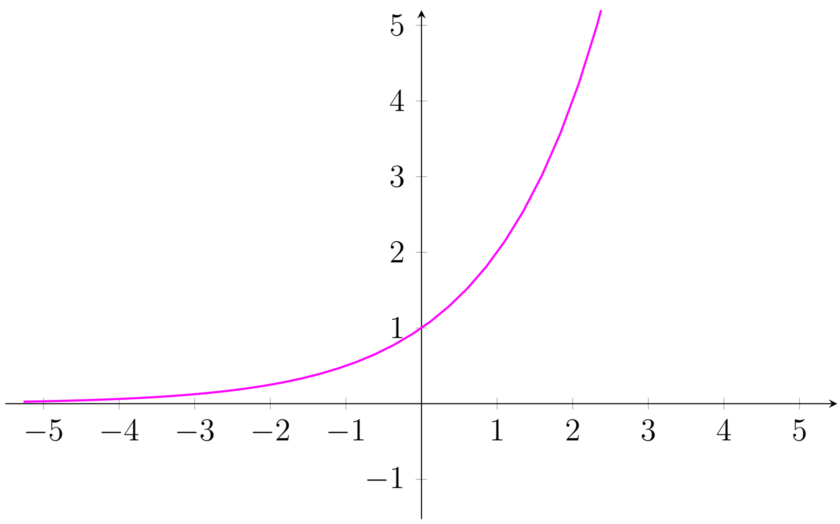
Quando b é positivo, a função $g(x) = ba^x$ é crescente se $a > 1$, e é decrescente se $0 < a < 1$.

Teorema 2.5. *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

2.1 Gráfico da Função Exponencial

A propriedade 3. da seção anterior, afirma que a função exponencial é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Como exemplo, vejamos os gráficos das funções reais $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

Figura 1 – Gráfico da função $f(x) = 2^x$

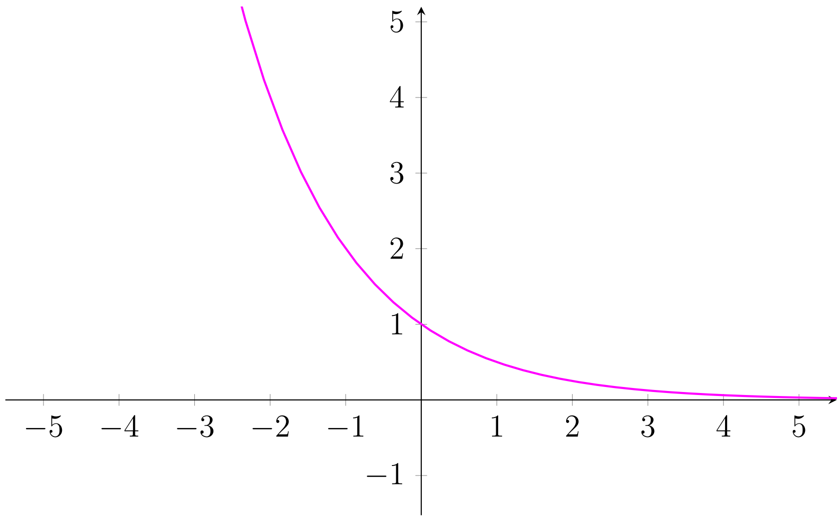


Fonte: Autor

Com relação a função $f(x) = a^x$, podemos dizer que a curva representativa está toda acima do eixo x, pois $f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, além disso, corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

Quando $a > 1$, nota-se que, quando x varia da esquerda para direita, a curva exponencial $y = a^x$ (Figura 1) apresenta um crescimento bastante lento enquanto x é

Figura 2 – Gráfico da função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Fonte: Autor

negativo. À medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; para valores positivos muito grandes de x , a tangente é quase vertical, conforme (1).

Quando $0 < a < 1$, a curva $y = a^x$ (Figura 2) decresce rapidamente para valores negativos de x e tem o decrescimento mais lento quando x assume valores positivos.

2.2 Funções Exponenciais e Progressões

Como vimos na definição 1.6, uma sequência de números reais é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números naturais não nulos, ou seja, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$. As progressões são exemplos interessantes de sequências.

Uma progressão aritmética é uma sequência de números $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, na qual a diferença entre cada termo x_{n+1} e o seu antecedente x_n é constante. Em outros termos:

Definição 2.6. Uma progressão aritmética (P. A.) é uma sequência $x_1, x_2, x_3, ...$, onde cada termo, a partir do segundo, é a soma $x_{n+1} = x_n + r$ do termo anterior mais uma constante r, chamada razão de progressão. De forma geral, $x_{n+1} = x_1 + nr$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.7. As sequências:

$(1, 2, 3, ...)$,

$(2, 5, 8, 11, ...)$,

$(5, 5, 5, ...)$,

e $(7, 3, -1, -5, ...)$
são progressões aritméticas cujas razões valem, respectivamente, 1, 3, 0 e -4.

Conforme Morgado (2), as progressões geométricas são sequências que variam com taxa de crescimento constante, onde a taxa de crescimento de uma grandeza, que passa do valor a para o valor b é a razão entre o aumento da grandeza e seu valor inicial, ou seja, a taxa é definida por $\frac{b-a}{a}$. Podemos definir:

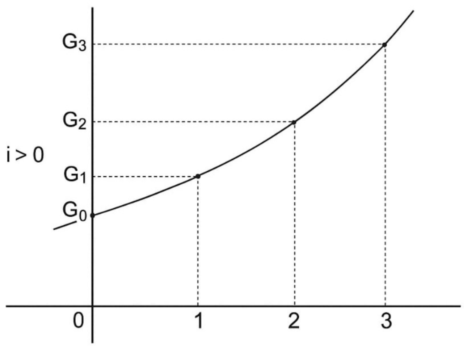
Definição 2.8. Uma progressão geométrica (P. G.) é uma sequência $x_1, x_2, x_3, ...$, onde cada termo, a partir do segundo, é o produto $x_{n+1} = x_n \cdot q$ do anterior por uma constante q, chamada razão da progressão. Em geral, $x_{n+1} = x_1 \cdot q^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.9. Se a população de certa cidade é hoje de 200 mil habitantes e cresce 2% ao ano, a população dessa cidade daqui a 10 anos será $P_{10} = P_0 \cdot (1+i)^{10} = 200 \cdot (1+0,02)^{10} \approx 243,8$ mil habitantes.

Exemplo 2.10. Restrição da exponencial aos naturais. [MORGADO, (2)]

Se a grandeza G varia com taxa de crescimento constante igual a i, o valor de G na época n é $G_n = G_0 \cdot (1+i)^n$. Note que a função que associa a cada natural n o valor de G_n é simplesmente a restrição aos naturais da função exponencial $G(x) = G(0) \cdot (1+i)^x$. A figura mostra a variação de G para $i > 0$.

Figura 3 – Gráfico de $G(x)$



Fonte: Morgado (2)

Teorema 2.11. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_x) de razão $q \neq 1$ é igual a*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Demonstração. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$, multiplicando por q obtemos:

$$qS_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n + a_n q,$$

subtraindo as duas igualdades anteriores, obtemos

$$S_n - qS_n = a_1 - a_n q = a_1 - a_1 q^n,$$

ou seja,

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n),$$

logo

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

□

Exemplo 2.12. Lenda do Xadrez [MORGADO, (2)]

Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa um grão de trigo pela primeira casa, dois grãos pela segunda, quatro pela terceira e assim sucessivamente, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, a quantidade de grãos pedida pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é 2, isto é

$$1\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

Calculando, obtemos um estupendo número de vinte dígitos, 18 446 744 073 709 551 615.

Exemplo 2.13. Considere a progressão aritmética: (1, 2, 3, ...) e a função real $f(x) = 500 \cdot 0,02^x$. Observe que os valorres de $f(1), f(2), f(3), ...$, formam uma progressão geométrica de razão $0,02$, que é: $(10; 0,2; 0,004; ...)$.

Exemplo 2.14. Seja $(3, 5, 7, ...)$ uma progressão aritmética de razão 2 e $f(x) = 7000 \cdot 3^x$, os valores de $f(3), f(5), f(7), ...$ formam a progressão geométrica de razão 3^2: $(7000 \cdot 3^3; 7000 \cdot 3^5; 7000 \cdot 3^7; ...)$.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, uma função do tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$.

Então, os valores $f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \cdots, f(x_n) = ba^{x_n}, \cdots$, formam uma progressão geométrica de razão a^h, visto que:

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n + h} = (ba^{x_n}) \cdot a^h = f(x_n) \cdot a^h.$$

Conforme (1, p. 161), esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial, conforme o teorema a seguir.

Teorema 2.15. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, ..., y_n, ...$, com $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

2.3 Equações Exponenciais

Definição 2.16. Equação exponencial é toda equação com incógnita no expoente.

Exemplo 2.17. São exemplos de equações exponenciais:

a) $2^x = 128$.

b) $9^x - 3^x = 6$.

c) $25^{x+1} = \sqrt{5^3}$.

Um dos métodos para resolver equações exponenciais é a redução a uma base comum, que é aplicado quando os membros da equação, por meio de transformações convenientes baseadas nas propriedades das potências, forem redutíveis a uma mesma base $a(0 < a \neq 1)$. Sendo a função exponencial $f(x)$ injetiva, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, isto é:

$$a^b = a^c \;\Rightarrow\; b = c \quad (0 < a \neq 1).$$

Exemplo 2.18.

a) $9^{x+1} = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^{2(x+1)} = 3^{-3} \Rightarrow 2x + 2 = -3 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$. $\quad S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

b) $3^x = 7^x \Rightarrow \frac{3^x}{7^x} = \frac{7^x}{7^x} \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$. $\quad S = \{0\}$.

c) $9^x - 10 \cdot 3^x = -9 \Rightarrow (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$, fazendo $3^x = y$, teremos:

$y^2 - 10 \cdot y + 9 = 0 \Rightarrow y_1 = 9$ e $y_2 = 1$.

Para $y_1 = 9$, temos: $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

Para $y_2 = 1$, temos:$3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$. $S = \{0, 2\}$.

2.4 Inequações Exponenciais

Uma desigualdade, cuja incógnita está no expoente é chamada inequação exponencial.

Exemplo 2.19. São exemplos de inequações exponenciais:

a) $3^x > 27$.

b) $5^{x+3} < 125$.

c) $4^{2x} \geq \frac{1}{64}$.

d) $\sqrt{3^{x+1}} \leq 81$.

Para resolver uma inequação exponencial, reduzimos os dois membros da inequação a potências de mesma base, em seguida aplicamos as propriedades 3 e 6 das funções exponenciais, resumidas da seguinte forma:

- Se $a > 1$ ($f(x) = a^x$ é crescente): $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$.
- Se $0 < a < 1$ ($f(x) = a^x$ é decrescente): $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$.

Exemplo 2.20. Em um estudo demográfico constatou-se que a população P de uma cidade cresce de acordo com a função $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $P(t) = 6250 \cdot 2^t$, em que t representa o tempo em anos. Seguindo essa tendência de crescimento populacional, qual o tempo necessário para que ela ultrapasse a quantidade de 50000 habitantes? Para responder a esta questão, precisamos determinar os valores de t para os quais $P(t) > 50000$, ou seja:

$$6250 \cdot 2^t > 50000 \Rightarrow 2^t > \frac{50000}{6250} \Rightarrow 2^t > 8 \Rightarrow t > 3.$$

2.5 Aplicações da Função Exponencial

Nesta seção apresentamos aplicações das funções exponenciais presentes em livros didáticos do Ensino Médio. Estas aplicações aparecem como exemplos e exercícios, que aqui foram adaptados.

Exemplo 2.21. Degradação de Substâncias [ANDRADE, (3)]

(Cesgranrio-RJ) Certo tratamento médico consiste na aplicação de uma determinada substância a um paciente. Admita que a quantidade Q de substância que permanece no paciente, t horas após sua aplicação, é dada, em miligramas, por $Q(t) = 250^{(1-0,1t)}$. Determine a quantidade que permanece no paciente 10 horas após a aplicação da substância.

Queremos determinar $Q(t)$, quando $t = 10$, então:

$$Q(10) = 250^{(1-0,1\cdot 10)} = 250^{(1-1)} = 1.$$

Assim, a quantidade de substância que permanece no paciente, após 10 horas, será 1 mg.

Exemplo 2.22. Cultura de Bactérias [DANTE, (4)]

Em uma certa cultura, há 1000 bactérias em determinado instante. Após 10 min, existem 4000, quantas bactérias existirão em 1 hora, sabendo que elas aumentam segundo a fórmula $P = P_o \cdot e^{kt}$, em que $P_0 = 1000$ é a quantidade de bactérias no instante inicial, $P = P(t)$ é o número de bactérias em t horas e k é uma constante?

Como em 10 min, que correspondem a $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ de horas, existem 4000 bactérias, temos:

$$4000 = 1000 \cdot e^{k \cdot \frac{1}{6}} \Rightarrow (e^k)^{\frac{1}{6}} = 4 \Rightarrow e^k = 4^6 \Rightarrow e^k = 4096.$$

Assim, em t horas temos:

$$P(t) = P_o \cdot e^{kt} \Rightarrow P(t) = P_o \cdot (e^k)^t \Rightarrow P(t) = 1000 \cdot 4096^t.$$

Logo, $P(1) = 4096000$, isto é, em 1 hora existirão 4.096.000 bactérias.

Exemplo 2.23. População Regional por Curva de Tendência

Uma região passa por um processo de êxodo rural. Por meio de uma curva de tendência, os técnicos de um instituto de Geografia e Estatística concluíram que a população P dessa região, em milhar de habitantes, daqui a t anos, pode ser estimada pela função:

$$P(t) = \frac{1560}{3 + 5 \cdot 2^{(0.5t)}}$$

a) Qual é a estimativa da população atual dessa região?

Para a população atual consideramos $t = 0$, assim,

$$P(0) = \frac{1560}{3 + 5 \cdot 2^{(0.5 \cdot 0)}} = \frac{1560}{3 + 5 \cdot 2^0} = \frac{1560}{8} = 195.$$

Portanto, a população atual é estimada em 195 mil habitantes.

b) Qual é a estimativa da população dessa região daqui a 1 ano?

Em um ano, ou seja $t = 1$, a população será

$$P(1) = \frac{1560}{3 + 5 \cdot 2^{(0.5 \cdot 1)}} = \frac{1560}{3 + 5 \cdot \sqrt{2}} \approx 155.$$

Então, em um ano a população será próxima de 155 mil habitantes.

c) Supondo que essa estimativa continue válida por tempo suficiente, daqui a quantos anos a população dessa região será estimada em 120 mil habitantes?

Neste caso, queremos determinar t, para o qual $P(t) = 120$, segue que

$$120 = \frac{1560}{3 + 5 \cdot 2^{(0.5 \cdot t)}} \Rightarrow \frac{1560}{120} = 3 + 5 \cdot 2^{(0.5 \cdot t)} \Rightarrow 5 \cdot 2^{\frac{t}{2}} = 10 \Rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = 2 \Rightarrow t = 2.$$

Logo, em 2 anos a população estimada será de 120 mil habitantes.

Exemplo 2.24. Cultura de Fungos

Um biólogo constatou que, à temperatura de -1°C, a população de uma cultura de fungos era estimada em 4000 indivíduos e que, a cada grau Celsius de aumento na temperatura, morriam 75% dos indivíduos.

a) Indicando por $f(x)$ a população remanescente, em milhar de indivíduos, á temperatura de x grau Celsius, escreva a equação que relaciona $f(x)$ e x.

Sendo x a temperatura, segue a variação de temperatura será $x + 1$.

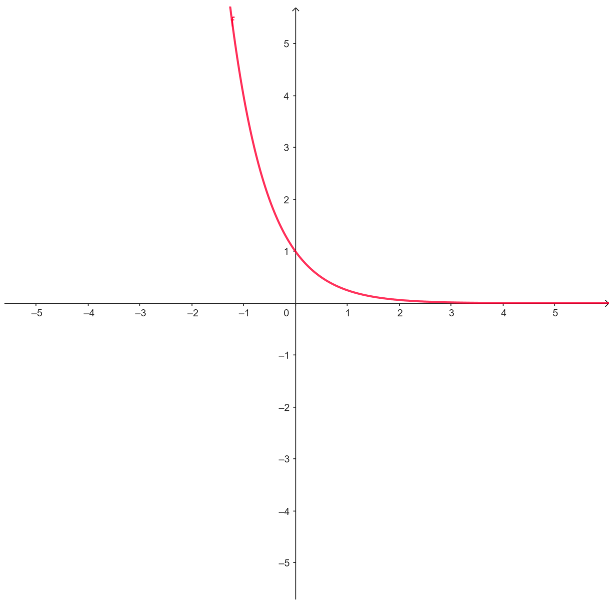
Como para cada grau Celsius, a população será reduzida em 75%, ou seja, teremos 25% restantes da população de fungos, e sendo 4000 a população inicial.

Podemos expressar a população $f(x)$, em milhar, por:

$$f(x) = 4 \cdot 0,25^{(x+1)}.$$

b) Esboce o gráfico da função exponencial que contém os pares $(x, f(x))$.

Figura 4 – Gráfico de $f(x) = 4 \cdot 0,25^{(x+1)}$



Fonte: Autor

Exemplo 2.25. Juros Compostos

Algumas aplicações financeiras em instituições bancárias têm rendimento diário e operam em regime de juro composto, isto é, no fim de cada dia o juro é acrescido ao montante do dia anterior. Se um capital de $R\$\,2.000,00$ for investido em uma dessas aplicações financeiras, cuja taxa diária de juro seja de $0,04\,\%$, qual será o montante acumulado em t dias?

Para responder a essa questão, vamos rever um conceito de juros, se um capital inicial C é aplicado em regime de juro composto à taxa constante i por unidade de tempo (dia, mês, ano etc.), então o montante M acumulado em t unidades de tempo é dado por:

$$M = C(1 + i)^t.$$

Assim, o montante acumulado em t dias pela aplicação de $R\$2.000,00$ à taxa diária de juro composto de $0,04\%$ é dado pela função:

$$M(t) = 2.000(1 + 0,0004)^t,$$

ou seja,

$$M(t) = 2.000(1,0004)^t.$$

Os exemplos 2.15, 2.16 e 2.17 foram extraídos do livro Matemática, de Paiva (5).

3 Fractais

Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e de escala. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

Para Antunes (6), a definição mais simples é que fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo (iteração/recursão), apresentando autossimilaridade, dimensão fractal e complexidade infinita.

A geometria fractal, com sua riqueza visual e seus processos iterativos, oferece uma analogia poderosa e concreta para o comportamento das funções exponenciais, servindo como uma base para as atividades práticas propostas.

Segundo Nunes (7), fractais são objetos que podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente, através de processos recursivos apresentando determinadas características que por vezes são encontradas em formas da natureza. Essas características são: autossemelhança, escala, complexidade e dimensão. De acordo com a autora:

> Uma figura é autossemelhante se apresenta sempre o mesmo aspecto visual a qualquer escala que seja ampliada ou reduzida, ou seja, se parte de uma figura se assemelha à figura vista como um todo.
>
> No entanto, quando falamos de figuras ou objetos autossemelhantes, temos de considerar dois tipos de autossemelhança: a exata e a aproximada (ou estatística). A autossemelhança exata só existe em figuras geradas por processos matemáticos em que, o conjunto total é formado por pequenas réplicas perfeitas delas mesmas, ou seja é formado através de um processo iterativo como é o caso, por exemplo, do triângulo e do tapete de Sierpinski e da curva de Koch.(7, p.29)

Em resumo, algumas características dos fractais são:

- Geração por Processo Iterativo/Recursivo: A essência da construção de um fractal reside na repetição contínua de uma regra ou processo simples. A partir de um estado inicial, uma transformação é aplicada repetidamente, e de cada aplicação emerge um novo nível de detalhe. Este processo de iteração é o elo direto com a ideia de multiplicação sucessiva, que é a base da potenciação.

- Autossimilaridade: Esta é a propriedade mais visualmente marcante dos fractais. Significa que partes da figura são cópias, exatas ou estatisticamente aproximadas, do todo, mas em escalas reduzidas. Ao ampliar uma pequena porção de um fractal, revela-se uma estrutura tão complexa quanto a figura original.

- Complexidade Infinita e Dimensão Fractal: Os detalhes em um fractal persistem em qualquer nível de ampliação, conferindo-lhe uma complexidade infinita. Essa característica desafia a nossa noção intuitiva de dimensão (1 para uma linha, 2 para um plano, 3 para um sólido), levando ao conceito de dimensão fractal, que frequentemente assume um valor não inteiro.

O processo de iteração geométrica é o mecanismo que, ao ser aplicado infinitamente, gera a propriedade emergente da autossimilaridade. De forma crucial, esse mesmo processo iterativo, quando quantificado, se manifesta algebricamente como uma função exponencial. O ato de repetir uma regra geométrica que multiplica o número de elementos por um fator constante a cada passo é perfeitamente análogo à operação algébrica de elevar uma base a uma potência. Se a cada iteração n, o número de elementos é multiplicado por um fator b, o número total de elementos será b^n. Portanto, a construção geométrica do fractal e a fórmula da função exponencial são, na verdade, duas representações (uma visual e outra algébrica) do mesmo fenômeno dinâmico. Explorar essa dualidade é o pilar pedagógico que fundamenta a inclusão deste capítulo e a subsequente utilização na proposta didática. De acordo com Nunes:

> A exploração da geometria fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona a utilização da matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos.(7, p.74)

3.1 Triângulo de Sierpinski

Abaixo está um exemplo de fractal:

Figura 5 – Triângulo de Sierpinski

Fonte: Autor

Como podemos ver na figura 5, os fractais possuem padrões autorreplicantes.

O Triângulo de Sierpinski é talvez o exemplo mais paradigmático de um fractal gerado por um sistema de funções iteradas, e sua construção é um excelente ponto de partida para a formalização matemática.

O algoritmo de construção do triângulo de Sierpinski é notavelmente simples e visualmente intuitivo:

1. Começa-se com um triângulo equilátero sólido (iteração $n = 0$).
2. Identificam-se os pontos médios de cada um dos três lados.
3. Esses pontos são conectados, dividindo o triângulo original em quatro triângulos menores e congruentes.
4. O triângulo central é removido, deixando três triângulos sólidos nos vértices.
5. O processo é repetido recursivamente para cada um dos triângulos restantes.

3.1.1 Número de Triângulos (Crescimento Exponencial)

Seja n o número da iteração. O número de triângulos coloridos (sólidos), que denotaremos por $N(n)$, segue uma progressão clara. Na iteração $n = 0$, temos $N(0) = 1$ triângulo. Na iteração $n = 1$, temos $N(1) = 3$ triângulos. Na iteração $n = 2$, cada um desses 3 triângulos gera outros 3, resultando em $N(2) = 3 \cdot 3 = 9$ triângulos. A sequência do número de triângulos é 1, 3, 9, 27,..., que é uma progressão geométrica(PG) de razão 3. A função que descreve este crescimento é uma função exponencial de domínio discreto:

$$N(n) = 3^n.$$

3.1.2 Área Restante (Decaimento Exponencial)

Se considerarmos a área do triângulo inicial como A_0, a cada iteração n, $\frac{1}{4}$ da área de cada sub-triângulo é removida, isso significa que $\frac{3}{4}$ da área permanecem. A área total restante, $A(n)$, também segue um padrão exponencial. Após a primeira iteração, a área é $A(1) = \frac{3}{4} \cdot A_0$. Após a segunda, é $A(2) = \frac{3}{4} \cdot A(1)$.

Generalizando, a área restante na iteração n é dada por:

$$A(n) = A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Esta análise transforma uma atividade geométrica de "desenhar e remover"em um problema de modelagem matemática. Ela estabelece uma ponte explícita entre a construção visual e a função tipo exponencial $f(n) = a \cdot b^n$, onde para $b > 1$ temos um crescimento, como em $N(n)$, ou para $0 < b < 1$, um decaimento, como em $A(n)$. Esta é a base para uma das atividades práticas proposta no Capítulo 4 e para a compreensão da relação entre progressões geométricas e funções exponenciais.

3.2 Fractal de Vicsek

Esse fractal é construído a partir de um quadrado inicial (Figura 1). Em cada etapa, o quadrado é dividido em uma grade de 3x3, e apenas os quadrados do centro e os quatro cantos são mantidos, formando a próxima figura (Figura 2). Esse processo é repetido recursivamente com os quadrados restantes, como mostrado na Figura 3, gerando padrões cada vez mais complexos. O Fractal de Vicsek é um exemplo de fractal autossemelhante e determinístico, usado frequentemente para ilustrar conceitos de geometria fractal e recursão.

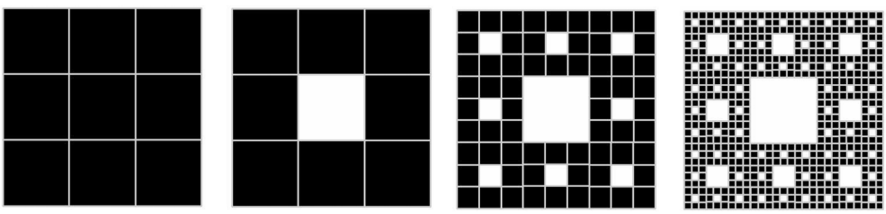
Figura 6 – Fractal de Vicsek

Fonte: Autor

3.3 Tapete de Sierpinski

O Tapete de Sierpinski é outro exemplo clássico de um fractal que demonstra de forma impressionante a infinita complexidade gerada a partir de uma regra simples. Sua construção é um análogo em duas dimensões da construção do Conjunto de Cantor.

Figura 7 – Tapete de Sierpinski



Fonte: Autor

O algoritmo para gerar o Tapete de Sierpinski é visualmente claro e segue uma lógica iterativa:

1. Começa-se com um quadrado sólido (Iteração $n = 0$).

2. O quadrado é dividido em nove quadrados menores e congruentes, como em um jogo da velha.
3. O quadrado central é removido, restando oito quadrados sólidos na borda
4. O processo é repetido recursivamente para cada um dos oito quadrados restantes.

As primeiras etapas, ilustradas na sequência de figuras, demonstram a propriedade da autossimilaridade em múltiplas escalas. A análise quantitativa deste processo iterativo revela, assim como no Triângulo de Sierpinski, duas progressões geométricas distintas.

3.3.1 Número de Quadrados (Crescimento Exponencial)

Seja n o número da iteração. O número de quadrados coloridos, que chamaremos de $N(n)$, cresce exponencialmente. A sequência do número de quadrados é 1, 8, 64, 512,..., que é uma progressão geométrica de razão 8. A função que descreve este crescimento é:

$$N(n) = 8^n.$$

3.3.2 Área Restante (Decaimento Exponencial)

Se a área do quadrado inicial for A_0, a cada passo, $\frac{1}{9}$ da área de cada sub-quadrado é removida, o que significa que $\frac{8}{9}$ da área permanecem. A área total restante, segue um padrão de decaimento, sendo definida por:

$$A(n) = A_0 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

3.4 Outros exemplos

Exemplo 3.1. Fractais na natureza [NUNES(7)]

Existem muitas formas da natureza, que apresentam estruturas de autossemelhança e que apesar de não conseguirmos visualizar muitas escalas de ampliação, são discutidas sob o ponto de vista da geometria fractal. Para estas formas da natureza, a noção de autossemelhança deve ser encarada como autossemelhança aproximada. A Figura 8 e a Figura 9 são exemplos de fractais na natureza.

Exemplo 3.2. Curva de Koch [NUNES(7)]

Desenvolvida pelo matemático sueco Helge von Kock, inicialmente com um segmento de reta, gerou o conhecido "Floco de Neve de Kock". O processo de construção de ambos é o mesmo, porém, no segundo caso a construção é iniciada com um triângulo equilátero, sendo as iterações realizadas em cada lado do triângulo, da mesma forma que no segmento da curva de Kock.

Figura 8 – Feto e réplicas numa determinada folha

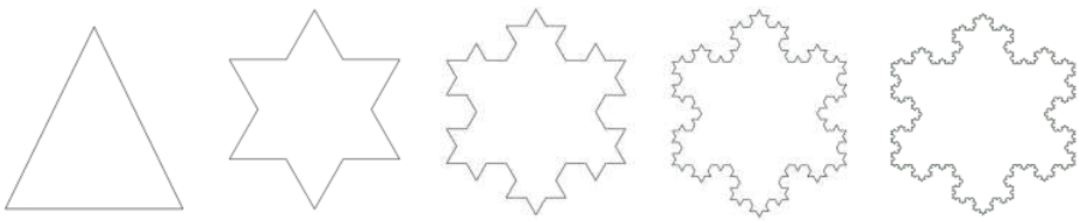
Fonte: Nunes (7)

Figura 9 – Couve-flor e réplica numa porção da mesma

Fonte: Nunes (7)

A Figura 10 apresenta 4 iterações. Inicia-se a construção com um triângulo equilátero. Nas etapas do processo iterativo, cada lado do triângulo é dividido em três segmentos iguais, no terço médio é construído um triângulo equilátero, cuja base é retirada gerando a segunda figura da sequência. Repete-se o processo com os 12 segmentos da figura obtida. O processo é repetido sucessivamente gerando o fractal.

Figura 10 – Floco de Neve de Kock

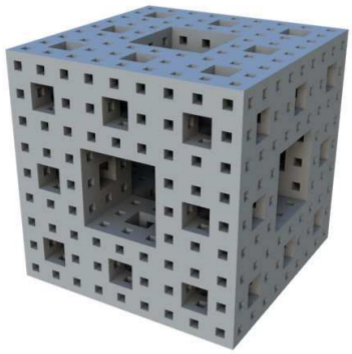


Fonte: Antunes (6)

Exemplo 3.3. Esponja de Menger [NUNES(7)]

A Esponja de Menger é um dos objetos mais fascinantes e contraintuitivos da matemática, um exemplo clássico de um fractal. Criada pelo matemático austríaco Karl Menger em 1926, esta estrutura tridimensional desafia nossa intuição sobre volume e área

Figura 11 – Esponja de Menger



Fonte: Nunes (7)

de superfície, revelando a beleza e a complexidade que podem emergir de regras simples e repetitivas.

É um fractal tridimensional, obtido a partir de um cubo. Em cada processo iterativo, o cubo é dividido em outros 27 iguais, retira-se do sólido os cubos centrais e os do centro de cada face, ou seja, os cubos que têm as 6 faces em contato com os demais e os que tem 5 faces em contato com os demais. Este processo é repetido sucessivamente com cada cubo restante, gerando um sólido cujo o volume tende a zero e a área tende ao infinito.

A Esponja de Menger não é apenas uma curiosidade matemática. Ela serve como uma extensão tridimensional de outros fractais famosos, como o Conjunto de Cantor e o Tapete de Sierpinski, e possui conexões com diversas áreas da ciência, como a teoria da medida e a topologia. Sua complexidade infinita e autossimilaridade são características encontradas em muitos fenômenos naturais, desde a estrutura dos pulmões até a distribuição de galáxias no universo.

4 A Proposta Didática

A sequência didática foi desenvolvida para ser aplicada em turmas do segundo ano do Ensino Médio, atualmente com carga horária de quatro aulas semanais, para o componente curricular em questão. Portanto, a sequência pretende ser concisa e assertiva. Dispondo de tempo didático extra classe, com o uso de atividades desenvolvidas pelos estudantes em casa ou em horários disponíveis nos Estudos Orientados.

O conteúdo inclui conceitos fundamentais, como potenciação, propriedades das potências e resolução de equações exponenciais, que são introduzidos por meio de atividades práticas e do uso de tecnologias como o GeoGebra e planilhas eletrônicas.

A presente proposta para o ensino de funções exponenciais tem o objetivo de explorar as propriedades e aplicações da função exponencial de maneira prática e contextualizada.

4.1 Informações Gerais

- **Área do Conhecimento:** Matemática e suas Tecnologias.
- **Componente Curricular:** Matemática.

Conteúdos abordados

- Potenciação e propriedades.
- Função exponencial e aplicações.
- Equação e inequação exponencial.

Tema

Desenvolvendo uma sequência didática para o ensino das Funções Exponenciais, com base em tecnologias e atividades práticas.

Justificativa

As funções exponenciais podem ser utilizadas como modelo matemático em inúmeras situações. Variando de fenômenos biológicos, físicos, químicos ou até mesmo sociais, à aplicações financeiras e econômicas, além dos usos nas engenharias.

Por ser um conteúdo importante em diversas áreas do conhecimento, o estudo das funções exponenciais deve ser consistente e desde sua primeira abordagem já direcionado às diversas aplicabilidades. Nesse contexto, a presente sequência pretende explorar, ferramentas tecnológicas e atividades práticas que auxiliem o professor no ensino dos conteúdos em questão, gerando interação com os estudantes e com isso uma aprendizagem efetiva. Sem, no entanto, abrir mão da contextualização e formalização necessárias para posteriores aplicações, nas diversas áreas de trabalho e pesquisa.

Objetivos

A presente proposta tem como objetivo geral proporcionar aos alunos a compreensão das funções exponenciais, capacitando-os a aplicar esse conhecimento na resolução de problemas e na modelagem de fenômenos em diversas áreas. Para alcançar este propósito, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Revisar potências e suas propriedades operacionais.
- Relacionar grandezas por meio de funções exponenciais.
- Identificar uma função exponencial, e suas características.
- Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial, esboçando-o previamente na malha quadriculada, bem como, utilizando o Geogebra.
- Resolver problemas envolvendo funções exponenciais.
- Perceber que a função exponencial modela problemas em diversos contextos, e como a análise do seu crescimento ou decrescimento é importante.
- Resolver equações e inequações exponenciais.

Público-alvo

Estudantes do Ensino Médio da Rede Estadual de Pernambuco, na faixa etária de 14 a 16 anos.

Perfil das turmas

Turmas compostas de 35 a 40 alunos, em sua maioria, egressos do Ensino Fundamental da Rede Pública.

Recursos

Quadro-branco, marcadores para quadro-branco, computador, calculadora, projetores digitais, livro didático, fichas de exercícios impressas, malhas quadriculadas, papel seda, papel guache ou colorset, papel quarenta, tesouras, réguas ou fitas métricas, fitas adesivas, barbantes, giz branco, cartazes impressos, e smartphones dos estudantes.

Avaliação

A avaliação e o seu acompanhamento serão executados durante o desdobramento das atividades propostas considerando dos estudantes: os conhecimentos prévios, o desenvolvimento nas atividades, o empenho, o desempenho e a evolução, além de garantir uma análise contínua e final do progresso dos alunos.

4.1.1 Competências e Habilidades

Da Base Nacional Comum Curricular (8), seguem as competências específicas a serem desenvolvidas, com a aplicação da proposta didática:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Matriz de Referência do SAEPE do Ensino Médio

Uma demanda atual das escolas da Rede Estadual de Ensino de Pernambuco, é a construção de habilidades que podem ser mensuradas por indicadores de desempenho, são os chamados descritores do SAEPE e do SAEBE. Apesar de ser uma avaliação externa, o sistema SAEPE, fornece informações quanto ao desempenho dos estudantes nos referidos indicadores, de modo que podemos ter acesso aos dados específicos destes indicadores, para estudos posteriores.

Aqui destacamos os descritores do SAEPE (9) que serão contemplados no desenvolvimento da proposta didática:

- (D20) Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
- (D26) Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
- (D28) Resolver problema que envolva função exponencial.
- (D34) Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

BNCC e Currículo de Pernambuco

O Organizador Curricular de Pernambuco (10) é formado por habilidades que estão diretamente ligadas às habilidades da BNCC (8), de modo que no próprio organizador, estas habilidades estão relacionadas.

Na BNCC as habilidades são apresentadas por um código alfanumérico formado por: um par de letras que representam a etapa de ensino; um par de números que indicam as séries de desenvolvimento da habilidade; uma sequência com três ou duas letras que representam a área ou componente curricular; três números, cujo primeiro indica a competência e os dois últimos a númeração no conjunto de habilidades.

Como exemplo, o código EM13MAT508 refere-se à oitava habilidade proposta na área de Matemática, relacionada à competência específica 5, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio. No currículo de Pernambuco, o código das habilidades apresentam quatro dígitos a mais, sendo o código do exemplo anterior associado à habilidade cujo código é EM13MAT508PE48. A seguir serão descritas as habilidades desenvolvidas na presente sequência didática:

- (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
- (EM13MAT508PE47) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de situações-problema em diversos contextos.
- (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

- (EM13MAT304PE20) Resolver e elaborar situações-problema, envolvendo funções exponenciais, interpretando a variação das grandezas envolvidas em diversos contextos como, por exemplo, no estudo da Matemática Financeira, entre outros, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.
- (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
- (EM13MAT303PE19) Interpretar e comparar situações problemas que envolvam os tipos de juros (simples e composto), utilizando como ferramentas de análise, planilhas e gráficos, enfatizando o comportamento linear e exponencial dos mesmos em cada caso, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.
- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

4.2 Atividade I

- **Público alvo:** Estudantes do segundo ano do Ensino Médio.
- **Conteúdos abordados:** Potências e Propriedades.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40.

ATIVIDADE DIAGNÓSTICA: Potências e propriedades

1. Calcule o valor das expressões:
   a) 3^5
   b) $2^2 + 3^2$
   c) 5^4
   d) $2^3 + 3^3$
   e) $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2^4 \cdot 3$
2. Calcule o valor das expressões:
   a) $(0,01)^3$
   b) $100 \cdot \frac{1}{5^2}$

c) $80 \cdot (\frac{5}{2})^3$

d) $\frac{1}{3} \cdot (0,3)^2$

e) $200 \cdot (0,040)^4$

3. Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.

   a) $a^n b^n = (a \cdot b)^n$

   b) $a^{-n} = -a^n$

   c) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a - b)^n$

   d) $(a^n)^m = a^{nm}$

   e) $(a^n)^m = a^{(n^m)}$

REVISÃO: Potências e propriedades

Potências de expoente natural

Para $a \in \mathbb{R}$ e $n \geq 2$, temos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}.$$

E, nos casos em que n=0 e n=1:

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

Propriedades

Sendo a e b reais e m e n naturais, valem as seguintes propriedades:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0 \text{ e } m \geq n)$.
3. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$.
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$.
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Potências de expoente inteiro negativo

Para $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Potências de expoente racionais

Para $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}^*$, lembremos a definição de raiz enésima:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b > 0 \text{ e } b^n = a.$$

Dados $a \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Potências de expoente irracional

$$a^x \quad (a \in \mathbb{R}^+ \text{ e } x \in \mathbb{I}).$$

4.2.1 Questões diagnósticas

Para a atividade diagnóstica será proposta a formação de duplas. Deverá ser entregue a cada aluno da turma uma lista com os exercícios (ATIVIDADE DIAGNÓSTICA: Potências e propriedades)

Os alunos serão convidados a responderem a lista e, no quadro, os seguintes problemas:

1. A metade de 4^{10} é:

   a)2^{19}

   b)2^{10}

   c)2^5

   d)4^5

   e)4^8

2. Sabendo que o valor de 5^7 é 78125, qual o valor de 5^8?

3. Em um sítio há 12 árvores. Cada árvore possui 12 galhos e em cada galho tem 12 maçãs. Quantas maçãs existem no sítio?

Nesse primeiro momento espera-se a interação entre os alunos e suas respostas aos problemas propostos no quadro. Estima-se um tempo de 30 min para a resolução dos problemas e dos exercícios.

Com a resolução dos problemas adicionais no quadro, tentamos identificar na turma os alunos que compreendem o conceito de potência e suas propriedades, os mesmos poderão ajudar os que apresentarem dificuldades, na realização das demais atividades da proposta. Neste momento faz-se necessário a atenção do professor para identificar possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos.

A opção pela atividade diagnóstica busca promover uma aprendizagem significativa, pois será ponto de partida para a relação entre conhecimentos prévios e novos, conforme Moreira:

> "a essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias simbolicamente expressas sejam relacionadas de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária ao que o aprendiz já sabe, ou seja, a algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante."(11, p. 141)

4.2.2 Revisando potências e propriedades

Segue-se explicação oral do conceito de potência e suas propriedades. A revisão será direcionada por apresentação de slides com a exemplificação desenvolvida no quadro branco.

O estudo das funções exponenciais e a resolução de equações, sistemas e inequações exponenciais, dependem muito destes conteúdos revisados. Para suprir possíveis dificuldades, serão fixados na sala de aula cartazes com resumo das definições e propriedades revistas.

Figura 12 – Cartazes para fixação

$$a^n = \underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{\text{n fatores}}$$

$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$

1º. $a^m.a^n = a^{m+n}$

2º. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0 \text{ e } m \geq n)$

3º. $(a.b)^m = a^m.b^m$

4º. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$

5º. $(a^m)^n = a^{m.n}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0 \text{ e } b^n = a$$

$$a^x \ (a \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } x \in \mathbb{I})$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

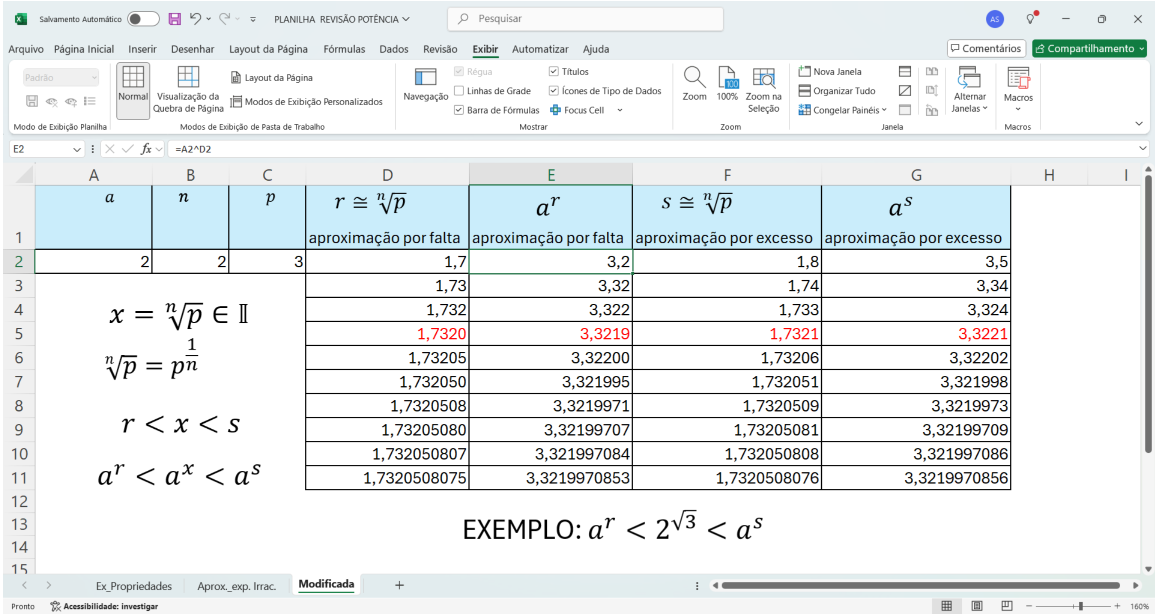
Fonte: Autor

A sequência da explanação seguirá os itens listados abaixo, e no quadro branco deverá ser exposto a justificativa das definições e para cada item os exemplos relacionados:

- Potência de expoente natural;
- Propriedades;
- Potência de expoente inteiro negativo;
- Raízes;
- Potência de expoente racional;
- Potência de expoente irracional.

Em alguns momentos da aula, faremos uso de calculadoras e planilhas eletrônicas. Os valores de exemplos propostos poderão ser testados na calculadora do computador, que deverá ser acompanhado pelos alunos por meio da projeção de tela. Com essa dinâmica mostramos o uso de funções/teclas das calculadoras, que os alunos devem aprender.

Figura 13 – Exemplo na planilha do Excel



a	n	p	$r \cong \sqrt[n]{p}$ aproximação por falta	a^r aproximação por falta	$s \cong \sqrt[n]{p}$ aproximação por excesso	a^s aproximação por excesso
2	2	3	1,7	3,2	1,8	3,5
			1,73	3,32	1,74	3,34
			1,732	3,322	1,733	3,324
			1,7320	3,3219	1,7321	3,3221
			1,73205	3,32200	1,73206	3,32202
			1,732050	3,321995	1,732051	3,321998
			1,7320508	3,3219971	1,7320509	3,3219973
			1,73205080	3,32199707	1,73205081	3,32199709
			1,732050807	3,321997084	1,732050808	3,321997086
			1,7320508075	3,3219970853	1,7320508076	3,3219970856

$x = \sqrt[n]{p} \in \mathbb{I}$

$\sqrt[n]{p} = p^{\frac{1}{n}}$

$r < x < s$

$a^r < a^x < a^s$

EXEMPLO: $a^r < 2^{\sqrt{3}} < a^s$

Fonte: Autor

A planilha eletrônica será utilizada na determinação de valores aproximados para potências com expoentes irracionais do tipo $\sqrt[n]{x}$, funções básicas do Excel serão mostradas, como por exemplo:

- Escrever $= x\hat{}(1/n)$, para o cálculo de $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
- Adicionar ou remover casas decimais.
- Usar a função "arredondar para baixo".
- Deixar a fórmula para o cálculo nas células.

No exemplo da Figura 13, apresentaremos os passos de escrever:

- =C2ˆ(1/B2) na célula D2, para calcular a aproximação do irracional.
- =A2ˆD2 na célula E2, para determinar a aproximação da potência por falta.
- =D2+0,1 na F2, para determinar a aproximação do irracional por excesso.
- =A2ˆF2 na G2, para determinar a aproximação da potência por excesso.

Procuramos conduzir a aprendizagem por meio de ferramentas tecnológicas, para estimular os estudantes à sua adequada utilização. Além de facilitar processos de cálculo, esses momentos apresentam aos discentes novas experiências, e diversifica seus conhecimentos, quanto à tecnologia. Concluiremos esta etapa com a correção dos exercícios diagnósticos.

4.2.3 Momento dos exercícios

Terminada a exposição das definições e propriedades, sugere-se a realização de exercícios relacionados ao conteúdo exposto. Tal exercício deve ser realizado individualmente, porém as conversas, dúvidas e sugestões entre alunos serão, não somente permitidas, mas também estimuladas pelo professor.

Os exercícios propostos foram adaptados de uma ficha disponível no Portal da Matemática/OBMEP, disponível em (12). Deverão ser iniciados na sala e concluídos em casa ou nos momentos de estudo orientado. Pretende-se com estes exercícios fixar os conteúdos revisados e acompanhar a aprendizagem dos alunos. O exercício deverá ser entregue na aula seguinte e posteriormente corrigido e comentado. Segue a apresentação da lista de exercícios:

EXERCÍCIOS: Potências e propriedades

1. Calcule as potências abaixo:

   a) 11^2
   b) 2^8
   c) 17^0
   d) $(-4)^4$
   e) -4^4
   f) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$
   g) $2,7^2$
   h) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$
   i) $(-5)^{-4}$

2. Utilize uma única potência para representar as expressões abaixo:

   a) $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4$
   b) $\frac{3^2 \cdot 3^0 \cdot 3^7}{27}$
   c) $\frac{4 \cdot 8^2 \cdot 2^3}{16 \cdot 2^{-1}}$
   d) $\frac{a^2 \cdot a^4}{a^3}$

3. Escreva os radicais abaixo na forma de potência, simplificando quando possível.

   a) $\sqrt[3]{6^9}$
   b) $\sqrt[5]{(-8)^2}$

c) $\sqrt[3]{(\sqrt{9})^4}$

d) $\left(\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}\right)^{10}$

4. Determine o valor numérico da expressão:

$$(\sqrt[6]{4})^{-3} - \left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2.$$

5. O valor da expressão $\sqrt[3]{5^{-2}} \cdot 5^{1,333\ldots}$ é:

a) um número primo.

b) um decimal exato.

c) uma dízima periódica.

d) um número irracional.

e) um número não real.

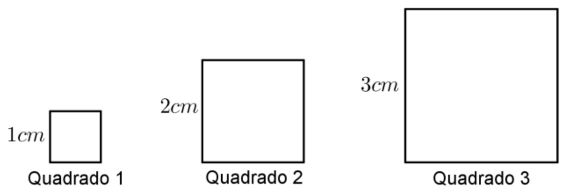
6. Escreva em uma única potência:

a) a metade de 2^{50}.

b) o triplo de 3^{15}.

c) o quadrado do quíntuplo de 25^{12}.

7. Observe a figura.



Determine:

a) a medida do lado do quadrado 5 .

b) a área do quadrado n.

c) qual quadrado terá área 81 cm^2.

8. Luiz ingeriu 500 mg de amoxicilina às 8 h . Suponha que a meia-vida dessa substância é de aproximadamente $1h$.

a) Determine a massa dessa substância no organismo de Luiz às $9h, 10h, 11h$.

b) Qual é a massa restante no organismo de Luiz após t horas da ingestão do remédio?

9. Jonas precisa fazer um empréstimo em um banco, que cobra uma taxa de juros compostos de 10% ao mês. Ele tomou emprestado $R\$2.400,00$.

    a) Se Jonas pagar sua dívida depois de 3 meses, qual será o valor total pago?

    b) Escreva uma função f que expresse a quantia paga em função do tempo t, dado em meses.

    c) Ao final de m meses, ele pagou ao banco $R\$3.513,84$. Qual o valor de m ?

10. Se $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ e $b = \frac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$, determine a^b.

4.2.4 Procedimentos avaliativos

No primeiro momento, serão avaliados os conhecimentos prévios dos estudantes em relção ao tema, por meio da atividade diagnóstica e da resolução dos problemas propostos no quadro. Buscando acompanhar o processo de aprendizagem, surgere-se que o professor esteja atento as respostas, dúvidas e questionamento dos estudantes em cada etapa da atividade.

Durante a revisão, por meio da exposição oral, o professor poderá direcionar as perguntas que servirão de base para as definições e exemplificação das propriedades. Assim, teremos a avaliação não apenas pelos materiais escritos, na atividade diagnóstica e no exercício que encerra a atividade, mas também uma percepção sobre os conhecimentos dos alunos, ja na primeira atividade. O procedimento de fazer perguntas durante a exposição do conteúdo, além de estimular o raciocinio dos alunos, fornece um retorno imediato sobre potencialidades e dificuldades a serem trabalhadas.

Ainda como procedimento avaliativo, mencionamos o exercício proposto no final da aula, contendo 10 (dez) questões sobre o assunto revisado. O acompanhamento deste exrcício, que deverá ser entregue na aula seguinte, fará parte do processo avaliativo na unidade curricular trabalhada.

4.3 Atividade II

- **Público alvo:** Estudantes do segundo ano do Ensino Médio.
- **Conteúdos abordados:** Função Exponencial
- **Quantidade de aula/tempo:** 3 (três) aulas/2h30min.

4.3.1 Dobraduras e fractais

Nesta etapa propomos a formação de grupos de 4 à 5 alunos. Com o objetivo de introduzir o conteúdo de funções exponenciais por meio de funções de domínios discretos, iremos propor três atividades práticas, em cada uma delas, os estudantes devem associar grandezas e construir o gráfico. Passemos para a descrição das atividades:

1 ª) Cada grupo deverá receber uma folha de papel seda colorido, e seguindo as orientações do professor dobrá-la ao meio sucessivas vezes. A cada nova dobra, os membros da equipe deverão anotar o número de retângulos formados na folha pelos vincos das dobras. Na ficha de atividades, estará disponível uma tabela (a ser preenchida pela equipe) e uma malha quadriculada para a construção do gráfico (é importante que eles percebam que alguns pontos não poderão ser anotados no papel). As grandezas observadas nessa etapa serão: o número de dobras e a quantidade de retângulos formados (contabilizando apenas, os menores retângulos formados). A função que deve ser identificada é $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $f(n) = 2^n$.

2 ª) Cada equipe receberá uma folha contendo a sequência de figuras:

Figura 14 – Sequência de figuras

Fonte: Autor

Será apresentado a turma, oralmente, as iterações (modificações) realizadas em cada figura para a obtenção da figura posterior, com esta apresentação, os fractais serão introduzidos por meio de suas características.

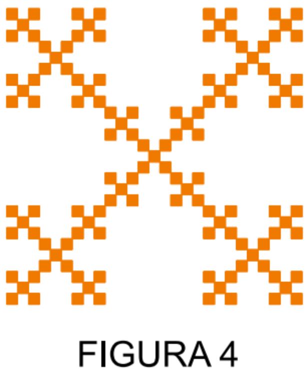
Na atividade, é proposta a construção da a figura 4. Para auxiliar a construção da figura será disponibilizada uma malha 9 x 9.

Os alunos devem responder na folha de atividades a pergunta sobre quantos quadrados têm as próximas figuras da sequência (figuras 4 e 5) que geram o fractal. Também nessa atividade, será pedido a construção do gráfico e a tabela que associe as grandezas: número da figura (ou posição da figura na sequência) e número de quadrados coloridos em cada figura. Neste caso, será ainda mais difícil anotar os pontos no plano cartesiano uma vez que a figura 4 possui 125 quadrados coloridos e a figura 5 possui 625. Aqui, será solicitado aos alunos, escreverem a lei de formação de uma função que relacione as grandezas em questão. É importante a percepção do crescimento exponencial, ou seja, como os valores aumentam rapidamente.

As figuras obtidas devem ser expostas aos demais e, comparadas as respostas, identificados os possíveis erros, também as funções escritas devem ser avaliadas pelo professor.

Pretende-se obter a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $f(n) = 5^{(n-1)}$ e a figura:

Figura 15 – Figura esperada

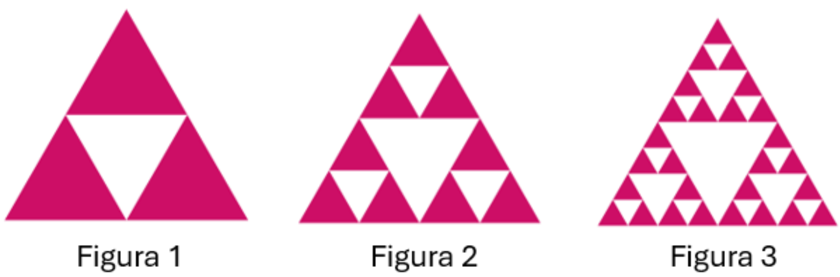


Fonte: Autor

3ª) Nesta atividade será proposta a construção do triângulo de Sierpinski. Assim como na atividade anterior, deve-se associar a posição da figura na sequência ao número de triângulos coloridos. Os triângulos serão construídos no papel guache e pintados com giz branco. Será orientada a construção do triângulo equilátero por meio de marcações com lápis presos com barbante, fita e régua.

Apresentada aos alunos a sequência da Figura 16, estes devem ser estimulados por meio de perguntas a identificar o processo de geração das figuras na sequência, e perceber o padrão de semelhança.

Figura 16 – Triângulo de Sierpinski



Fonte: Autor

Uma sugestão é apresentar à turma algum vídeo, por exemplo <http://www.youtube.com/watch?v=d-lcM6J2-Jc>(13), com a geração do fractal, para de forma dinâmica mostrar as características de autossimilaridade, e geração por processo iterativo/recursivo.

Como no item anterior, será solicitado a tabela que relaciona as grandezas e a função correspondente. Mas uma vez o estudante encontrará dificuldades de anotar os pontos no plano cartesiano a partir da quarta figura, espera-se, no entanto, que ele perceba que o crescimento na atividade dos quadrados se deu “mais rapidamente”. A função que deve ser identificada é $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ com $f(n) = 3^n$.

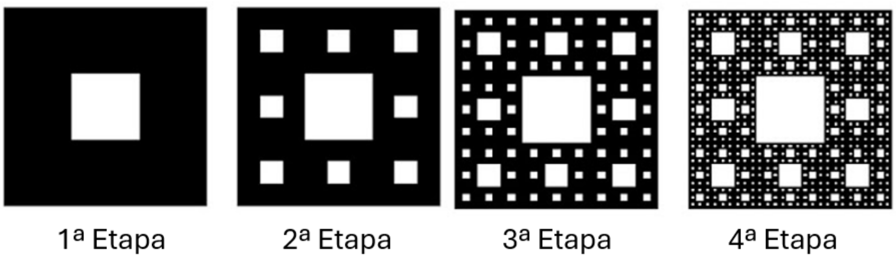
4 º A última atividade será proposta para ser realizada em casa ou no momento dos estudos orientados. Será a construção de um Tapete de Sierpinski no papel “quarenta” ou cartolina, este deverá ser marcado e pintado seguindo as indicações da sequência. Por ser uma atividade demorada, deverá ser entregue pelas equipes na semana seguinte.

A construção do Tapete de Sierpinski, deve ser demonstrada por meio de seu processo gerador, de forma que os estudantes consigam reproduzir o fractal no papel (apesar de poucas iterações).

Assim como nas etapas anteriores será solicitado a tabela e a função correspondente, aqui as grandezas envolvidas serão: as etapas de pintura e o número de quadrados pintados por etapa. As equipes serão orientadas a fazer apenas três etapas de pintura. Espera-se obter a função $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ com $f(n) = 8^{(n-1)}$.

Para a construção do tapete segue a figura:

Figura 17 – Tapete de Sierpinski



Fonte: Autor

Ao finalizar as atividades práticas, os gráficos que não puderem ser construídos no papel serão demostrados no Geogebra. Por se tratar de um programa intuitivo e de fácil manipulação, espera-se que os alunos consigam utilizá-lo, para isso, utilizarão os notbooks do laboratório móvel. Apesar de ser pedido uma atividade simples, este momento é importante para o desenvolvimento das demais, aqui serão superadas possíveis dificuldades de utilização do programa. Por meio da projeção de tela, o professor fará as orientações de uso.

Inicialmente, os pontos anotados nas tabelas das atividades serão representados no programa, depois será escrita a função correspondente. Faremos uso da função "zoom"para identificar os pontos sobre o gráfico da função correspondente, dessa forma, validando se a função está correta.

Ao anotar os pontos, os alunos representarão a função de domínio $\mathbb{N}$, ao escrever a equação, estarão representando a função em $\mathbb{R}$. Dessa forma, estaremos ampliando (graficamente) o domínio das funções para os números reais.

Também é possível analisar o primeiro gráfico, como os pontos de uma P.G., estabelecendo dessa forma, uma relação entre as progressões geométricas e as funções exponenciais.

4.3.2 Generalização e formalização de conceitos

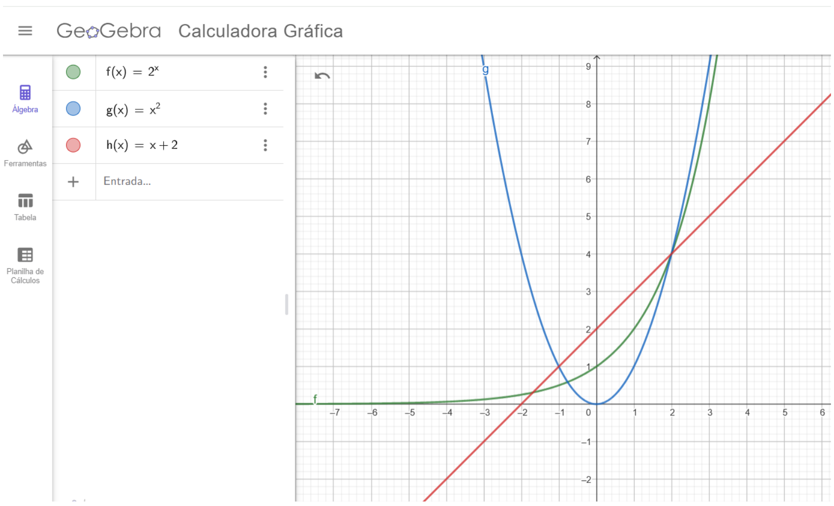
No quadro, será definida a função exponencial, exemplos e características gerais. Também será feita a construção dos gráficos das funções reais $f(x) = 2^x$ e $g(x) = (1/2)^x$. Os exemplos serão utilizados para analisar os casos de crescimento e decrescimento da função exponencial.

Ao mostrar a definição e os exemplos, sugere-se mencionar as funções obtidas a partir das atividades práticas. Pode-se fazer alguns questionamentos como: "Seria possível a construção de uma função exponencial decrescente com o Triângulo de Sierpinski? Existe alguma grandeza que no caso em questão diminui exponencialmente?"

Apresentar, como exemplo, a função área restante $A(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, de um triângulo de área inicial 1. Pretende-se, com isso, estabelecer a relação entre os conceitos e as atividades concretas.

4.3.3 Analisando gráficos de funções no Geogebra

Figura 18 – Gráficos no Geogebra



Fonte: Autor

Usando o Geogebra vamos analisar os gráficos das funções reais $f(x) = 2^x$; $g(x) = x^2$; e $h(x) = x + 2$. Primeiramente, os estudantes serão questionados sobre modelos das funções apresentadas. Logo em seguida, será analisado os crescimentos das funções.

Como atividade, solicitar dos alunos que obtenham no app Geogebra, de forma individual ou em duplas, os gráficos das seguintes funções de domínio real:

$$f(x) = 3^x,\ \ g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x,\ \ h(x) = 3^x + 4,\ \ i(x) = 3^x - 2,\ \ j(x) = 2 \cdot 3^x,\ \ l(x) = \frac{1}{2} \cdot (3^x).$$

4.3.4 Procedimentos avaliativos

A participação dos estudantes nas atividades propostas será a forma de avaliar nesta atividade. Também serão considerados as respostas orais durante as etapas de explanação e questionamentos. Serão recolhidas as fichas de atividade, para análise posterior.

4.4 Atividade III

- **Público alvo:** Estudantes do segundo ano do Ensino Médio.
- **Conteúdos abordados:** Aplicações da Função Exponencial.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40min.

4.4.1 Crescimento exponencial

Figura 19 – Vídeo: "A bomba atômica do trigo"

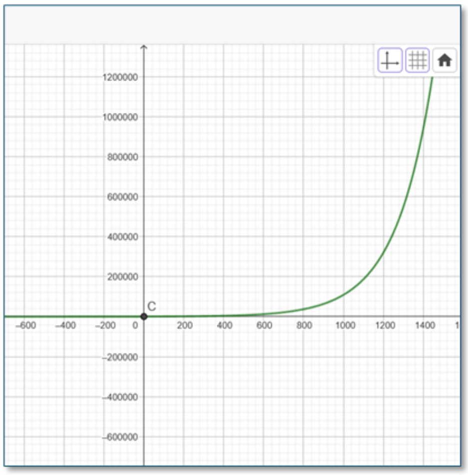
Fonte: Canal Isto é Matemática, (14)

Espera-se que os alunos já tenham percebido como a função exponencial tem a característica de "rápido" crescimento ou decrescimento. De forma lúdica, o tema é tratado no vídeo sobre uma lenda da criação do jogo de xadrez e sobre a bomba nuclear. O vídeo "A bomba atômica do trigo", do canal "Isto é Matemática", será apresentado aos estudantes no laboratório de informática, onde as demais atividades serão desenvolvidas. O vídeo está disponível em <https://youtu.be/GThyTefiVlY?si=uPwXk5INHEGKuXsg>.

4.4.2 Resolvendo problemas com auxílio do Geogebra e planilhas

Inicialmente serão apresentados três problemas envolvendo a função exponencial, estes serão resolvidos utilizando o quadro, o excel e o Geogebra. A exposição inicial será conduzida pelo professor, e os problemas tratarão da questão dos juros compostos.

Figura 20 – Gráfico no Geogebra



Fonte: Autor

Buscando a interação dos estudantes por meio de perguntas, serão resolvidos os seguintes problemas propostos por Barrozo (15) na sua proposta de sequência didática para o ensino da Função Exponencial:

1º Suponha que ao entrar na universidade você tenha ganho uma quantia de Qo reais de presente e resolveu guardá-la em uma aplicação cuja taxa de juros mensais é de j %. Supondo que os juros sejam compostos continuamente, deduza a função matemática que calcula o valor acumulado deste dinheiro após t meses. Utilizando esta função e supondo $Qo = R\$500,00$ e $j = 0,53\%$, descubra quanto você terá ao finalizar seu curso, considerando que se formará em 4 anos.

2º Agora suponha que você decida continuar guardando este dinheiro (após formado) para sua aposentadoria. Assim, você mudará seu investimento para uma aplicação mais rentável, depositará k reais todo mês (k fixo) e não fará saques. Deduza a função matemática que calcula o valor acumulado após t meses, no caso geral. Utilizando esta função e considerando $j = 0,7\%$ e $k = R\$150,00$, descubra quanto você terá quando fizer 65 anos de idade.

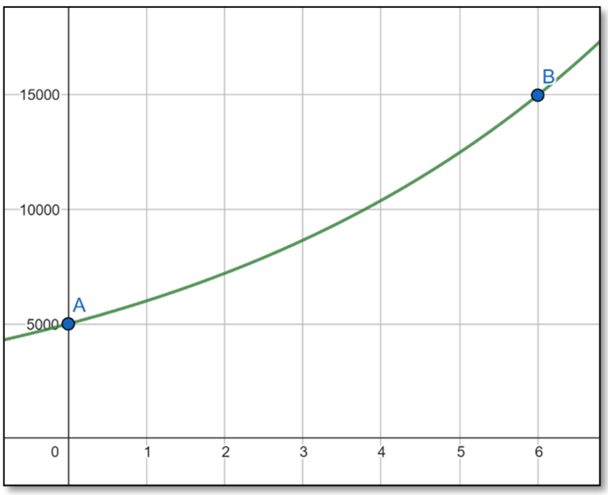
3º Suponha ainda que ao fazer 65 anos você pare de fazer depósitos e comece a retirar um valor mensal (finalmente a aposentadoria chegou!!!). Supondo que seu saldo seja igual a Q, que você retirará w reais todo mês e que a taxa de juros seja $i\%$ ao mês, encontre a função que representa seu saldo em um tempo t qualquer, após iniciar a retirada do dinheiro. Utilizando o valor de Q calculado no problema anterior, $i = 0,7\%$ ao mês e $w = R\$6.000,00$, calcule seu saldo ao fazer 90 anos de idade.

4.4.3 Momento de exercícios com auxílio de ferramentas

Serão formados grupos de três a quatro alunos para a resolução de uma lista com cinco problemas. Cada grupo deverá escolher um problema para ter a resolução apresentada aos demais, de modo que todos os problemas sejam apresentados. Cada esquipe pode escolher a forma de apresentar o problema, se utilizarão apenas o quadro, o Geogebra, o Excel, ou outra ferramenta. A lista respondida deve ser entregue ao professor e apenas um problema apresentado por grupo. Os problemas foram escolhidos de forma a mostrar a diversidade de aplicações das funções exponenciais. Segue a lista de problemas propostos:

EXERCÍCIOS: Aplicações da função exponencial

1º Em uma pesquisa, obteve-se o gráfico abaixo, que indica o crescimento de uma cultura de bactérias no decorrer de 6 meses.



a) Com quantas bactérias se iniciou a pesquisa?

b) Após 6 meses, qual é a quantidade total de bactérias?

c) Admitindo a lei de formação da função que representa essa situação como $f(x) = ka^x$, determine os valores de a e de k.

d) Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função?

e) Qual é o número de bactérias após 3 meses?

2º Certo montante pode ser calculado pela fórmula $M = C.(1 + i)^t$, em que C é o capital, i é a taxa corrente e t é o tempo. Com um capital de $R\$20.000,00$, a uma taxa anual de $(i = 0,12)$, qual será o montante após 3 anos?

3º Segundo a lei de resfriamento do cientista inglês Isaac Newton (1643-1727), a temperatura de um corpo diminui exponencialmente. Por exemplo, sob certas condições, a temperatura T de batatas assadas, após saírem do forno, em grau Celsius, é dada por $T = 20 + 160.e^{-6t}$, em que $e = 2,7$ e t é o tempo decorrido, em hora.

a) Qual era a temperatura das batatas quando saíram do forno?

b) Qual a temperatura das batatas 30 minutos após saírem do forno?

4º Estima-se que certa população aumente de acordo com a lei $P(t) = 15000(1,035)^t$, sendo t o tempo em anos e $P(t)$ o número de indivíduos após t anos. Adotando $(1,035)^{10} = \sqrt{2}$, determine o número de indivíduos daqui a 80 anos.

5º A taxa de inflação anual de certo país é 15%, isto é, a cada ano os produtos comercializados nesse país têm seus preços multiplicados por $1,15$ e, em n anos, por $1,15n$.

a) Quantos anos são necessários para que os produtos comercializados nesse país dobrem de preço?

b) Qual será o preço daqui a 7 anos de um produto que hoje custa $R\$8,00$ nesse país?

4.4.4 Procedimento avaliativo

Os estudantes serão avaliados pelo processo de realização e apresentação dos problemas. Será verificado se seguem um raciocínio lógico na resolução dos problemas e se utilizam de corretamente as ferramentas escolhidas para resolução e apresentação. Também fará parte do processo avaliativo, a correção da lista proposta, realizada posteriormente pelo professor.

4.5 Atividade IV

- **Público alvo:** Estudantes do segundo ano do Ensino Médio.
- **Conteúdos abordados:** Equações e inequações exponenciais.
- **Quantidade de aula/tempo:** 1 (uma) aula/50min.

4.5.1 Resolvendo equações e inequações exponenciais

Nesta etapa serão resolvidos no quadro exemplos de equações e inequações exponenciais. É importante mostrar métodos diferentes de resolver estas equações, usando o recurso da fatoração e a substituição de termos, também serão resolvidos, sistemas de equações exponenciais.

4.5.2 Momento de exercícios

Em duplas, será solicitado a resolução do exercício do livro didático Conexões com a Matemática (16), das seções sobre equações, inequações e sistemas exponenciais. Esta atividade é composta por 14 questões, entre exercícios próprios para fixação dos métodos de resolução e exercícios de aplicação dos conceitos da exponencial.

As questões propostas nesta atividade tratam de crescimento populacional, decomposição de substâncias nos organismos, entre outros.

Poderá ser sugerido aos alunos que utilizem os recursos trabalhados nas atividades anteriores.

O exercício será iniciado na sala de aula e os alunos deverão terminá-lo em casa. É importante que os alunos sejam estimulados a tentar resolver todas as questões, mas caso não consigam resolver alguma, anotem as dúvidas para o momento de correções.

4.5.3 Correções e procedimentos avaliativos

A verificação sobre a realização dos exercícios é a forma proposta como avaliação desta atividade, que posteriormente deve ser corrigida com a turma.

A depender do ritmo de andamento das atividades da proposta pedagógica, talvez seja necessário a correção nos momentos de estudo orientado. Uma vez que a forma de resolução das exponenciais é nova para a maioria dos estudantes é importante realizar a correção destes exercícios no quadro. (No momento da correção os recursos serão utilizados apenas para verificações)

Nesta etapa, o professor perceberá as possíveis dificuldades apresentadas pelos estudantes, e deverá orientá-los quanto aos erros observados.

4.6 Atividade V

- **Público alvo:** Estudantes do segundo ano do Ensino Médio.
- **Conteúdos abordados:** Funções e equações exponenciais.
- **Quantidade de aula/tempo:** 2 (duas) aulas/1h40min.

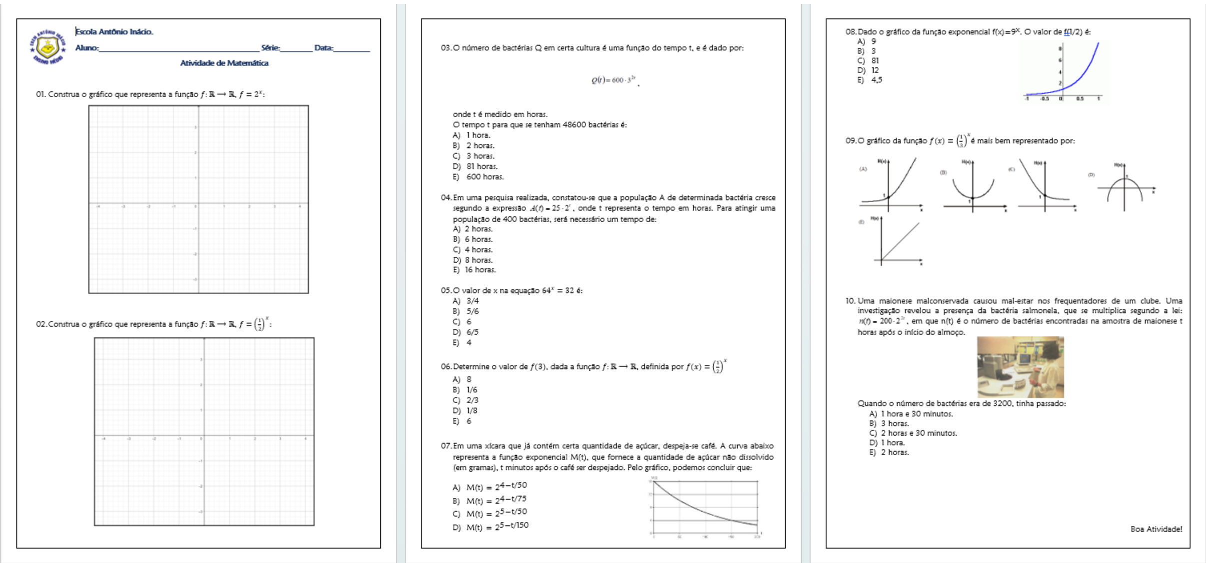
4.6.1 Atividade avaliativa

A atividade será composta por dez questões, que tratam os conceitos básicos do tema e algumas aplicações. O grau de dificuldade das questões vai variar, sendo a maioria fácil (5 questões), algumas medianas (3 questões) e apenas duas questões um pouco mais desafiadoras, não traremos aqui questões muito difíceis ou trabalhosas. A atividade será individual e sem a utilização dos recursos utilizados em alguns momentos anteriores, porém possível de ser resolvida sem cálculos excessivos.

Está atividade pretende ser desenvolvida para a verificação dos objetivos estabelecidos e das habilidades esperadas.

A sugestão da atividade proposta a seguir, é apenas um modelo de avaliação aplicada anteriormente pelo autor, que serviria para esse fim, no entanto, compreendemos que o objetivo deste instrumento avaliativo, será melhor alcançado, se ele for construído a partir da observação de todo processo e do desempenho já apresentado pelos alunos. Dessa forma é importante rever, alterar, ou substituir totalmente, caso se perceba necessário. Pois, como afirma Luckesi (17) "a avaliação deve ser flexível e adaptável, considerando o processo de aprendizagem de cada aluno".

Figura 21 – Modelo de atividade avaliativa



Escola Antônio Inácio.

Aluno:______ Série:____ Data:____

Atividade de Matemática

01. Construa o gráfico que representa a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = 2^x$:

02. Construa o gráfico que representa a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

03. O número de bactérias Q em certa cultura é uma função do tempo t, e é dado por:

$$Q(t) = 600 \cdot 3^{2t}.$$

onde t é medido em horas.
O tempo t para que se tenham 48600 bactérias é:
A) 1 hora.
B) 2 horas.
C) 3 horas.
D) 81 horas.
E) 600 horas.

04. Em uma pesquisa realizada, constatou-se que a população A de determinada bactéria cresce segundo a expressão $A(t) = 25 \cdot 2^t$, onde t representa o tempo em horas. Para atingir uma população de 400 bactérias, será necessário um tempo de:
A) 2 horas.
B) 6 horas.
C) 4 horas.
D) 8 horas.
E) 16 horas.

05. O valor de x na equação $64^x = 32$ é:
A) 3/4
B) 5/6
C) 6
D) 6/5
E) 4

06. Determine o valor de $f(3)$, dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
A) 8
B) 1/6
C) 2/3
D) 1/8
E) 6

07. Em uma xícara que já contém certa quantidade de açúcar, despeja-se café. A curva abaixo representa a função exponencial M(t), que fornece a quantidade de açúcar não dissolvido (em gramas), t minutos após o café ser despejado. Pelo gráfico, podemos concluir que:
A) $M(t) = 2^{4-t/50}$
B) $M(t) = 2^{4-t/75}$
C) $M(t) = 2^{5-t/50}$
D) $M(t) = 2^{5-t/150}$

08. Dado o gráfico da função exponencial $f(x)=9^x$. O valor de f(1/2) é:
A) 9
B) 3
C) 81
D) 12
E) 4,5

09. O gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ é mais bem representado por:

10. Uma maionese malconservada causou mal-estar nos frequentadores de um clube. Uma investigação revelou a presença da bactéria salmonela, que se multiplica segundo a lei: $n(t) = 200 \cdot 2^{2t}$, em que n(t) é o número de bactérias encontradas na amostra de maionese t horas após o início do almoço.

Quando o número de bactérias era de 3200, tinha passado:
A) 1 hora e 30 minutos.
B) 3 horas.
C) 2 horas e 30 minutos.
D) 1 hora.
E) 2 horas.

Boa Atividade!

Fonte: Autor

Os comentários e correções desta atividade, feitos posteriormente, certamente contribuirão para o desenvolvimento da aprendizagem efetiva. Independente do desempenho dos estudantes nesta atividade, estes momentos de correções e comentários são necessários para a consolidação dos saberes.

4.7 Considerações

Ao combinar métodos tradicionais com o uso de tecnologias e atividades práticas, espera-se que a sequência didática, proposta para o ensino da função exponencial, contribua para o desenvolvimento das competências e habilidades previstas. Durante o desenvolvimento das atividades, os alunos poderão explorar conceitos fundamentais como potenciação e propriedades das funções exponenciais, além de aplicá-los em contextos reais, como o crescimento populacional e a matemática financeira. O uso de ferramentas como o GeoGebra e planilhas eletrônicas auxiliam na construção e análise de gráficos, proporcionando aos alunos uma compreensão visual dos problemas.

A proposta foi planejada para promover a aprendizagem significativa, incentivando a autonomia dos alunos, conforme sugerido por Bacich (18) sobre metodologias ativas. Essas metodologias colocam o aluno no centro do processo, permitindo que construam o conhecimento de forma engajada e contextualizada. Além disso, a sequência teve como objetivo integrar teoria e prática, permitindo que os alunos percebessem a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em problemas do cotidiano, fortalecendo assim a aprendizagem e o interesse pelo tema.

Com base nas experiências e no planejamento das atividades, espera-se que a abordagem seja aplicável à realidade de turmas do Ensino Médio. Esperamos, portanto, que a presente sequência didática seja uma ferramenta eficaz no ensino de funções exponenciais, trazendo benefícios que vão além do aprendizado do conteúdo, capacitando os alunos para enfrentar os desafios do cotidiano.

5 Análise e discussão dos resultados

Neste capítulo buscamos descrever a aplicação da sequência didática, detalhando os processos, e registrando as dificuldades e os avanços no processo de aprendizagem.

A presente sequência didática foi organizada em cinco etapas (Atividades I a V), cada uma concebida com estratégias e finalidades distintas. A primeira etapa, Atividade I, destina-se a diagnosticar a compreensão de pré-requisitos essenciais ao estudo das funções exponenciais e a sanar lacunas por meio de uma revisão estruturada. Em seguida, a Atividade II introduz os conceitos e propriedades do tema, integrando teoria, prática e tecnologia ao explorar a atratividade dos fractais. A terceira etapa, Atividade III, aprofunda a aplicação da função exponencial, propondo a dinâmica de resolução de problemas em equipe. A Atividade IV é dedicada à prática de equações e inequações exponenciais, combinando uma abordagem expositiva e colaborativa com o uso de recursos tecnológicos. Por fim, a sequência culmina na Atividade V, um momento avaliativo que integra um processo de avaliação contínuo e progressivo.

5.1 Atividade I

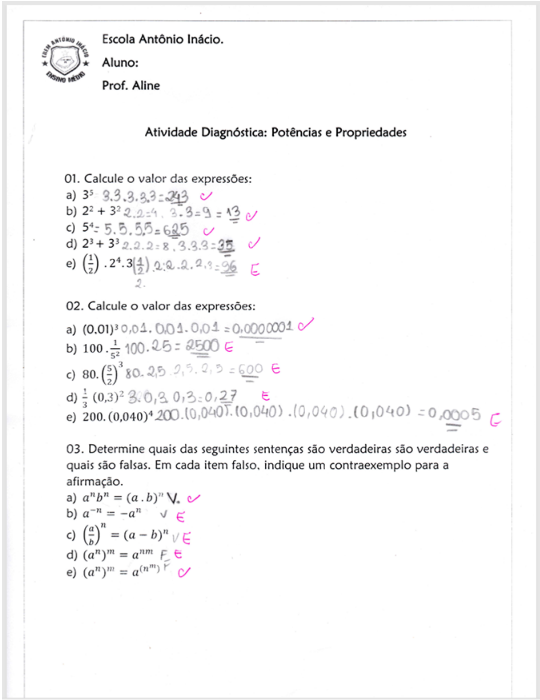
Esta atividade teve como objetivo verificar os conhecimentos dos alunos da turma sobre potências e suas propriedades, além de promover uma revisão sobre os conteúdos necessários para desenvolver o estudo da Função Exponencial. Foi realizada em dois momentos, no primeiro houve a aplicação de uma "atividade diagnóstica", no segundo, foi desenvolvida a revisão (de forma expositiva) do conceito de potência e suas propriedades, seguida do momento de exercícios.

Aplicada de forma individual no período de uma aula (50 min), a "atividade diagnóstica"foi composta por três questões, cada uma com cinco itens. No dia da aplicação estavam presentes 26 alunos, porém a turma é composta por 38 estudantes.

Alguns alunos demonstraram dúvidas na resolução de todas as questões. Todos foram orientados a responder as questões "como achavam ser correto", mesmo não tendo total convicção das respostas, de forma a não deixar questões sem respostas.

Observamos que os alunos com maior número de erros não fizeram perguntas durante a aplicação. A primeira questão, que tratava do cálculo de potências com expoentes naturais e operações simples, foi respondida corretamente pela maior parte dos alunos (78% da turma). A segunda, envolvendo o cálculo de potências com bases decimais e fracionarias e com expoentes naturais, apresentou um número de erros maior que a primeira, cerca de 60% dos estudantes erraram os itens dessa questão.

Figura 22 – Atividade Diagnóstica



Escola Antônio Inácio.

Aluno:

Prof. Aline

Atividade Diagnóstica: Potências e Propriedades

01. Calcule o valor das expressões:

a) 3^5 3.3.3.3.3 = 243 ✓

b) $2^2 + 3^2$ 2.2=4 . 3.3=9 = 13 ✓

c) 5^4 = 5.5.5.5 = 625 ✓

d) $2^3 + 3^3$ 2.2.2=8 . 3.3.3 = 35 ✓

e) $\left(\frac{1}{2}\right) . 2^4 . 3\left(\frac{1}{2}\right)$ 2.2.2.2.3 = 96 E

02. Calcule o valor das expressões:

a) $(0{,}01)^3$ 0,01 . 0,01 . 0,01 = 0,000001 ✓

b) $100 . \frac{1}{5^2}$ 100 . 25 = 2500 E

c) $80 . \left(\frac{5}{2}\right)^3$ 80 . 2,5 . 2,5 . 2,5 = 600 E

d) $\frac{1}{3}(0{,}3)^2$ 3 . 0,3 0,3 = 0,27 E

e) $200 . (0{,}040)^4$ 200 . (0,040) . (0,040) . (0,040) . (0,040) = 0,0005 E

03. Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.

a) $a^n b^n = (a . b)^n$ V. ✓

b) $a^{-n} = -a^n$ V E

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a - b)^n$ V E

d) $(a^n)^m = a^{nm}$ F E

e) $(a^n)^m = a^{(n^m)}$ F ✓

Fonte: Autor

Na terceira questão, cujo objetivo era identificar sentenças falsas e verdadeiras sobre propriedades das potências, percebemos o menor desempenho. Vários alunos deixaram a questão sem resposta e a média de acerto dos itens da questão foi 35%.

De forma geral, a maior parte dos alunos participou da atividade tentando responder e fazendo perguntas.

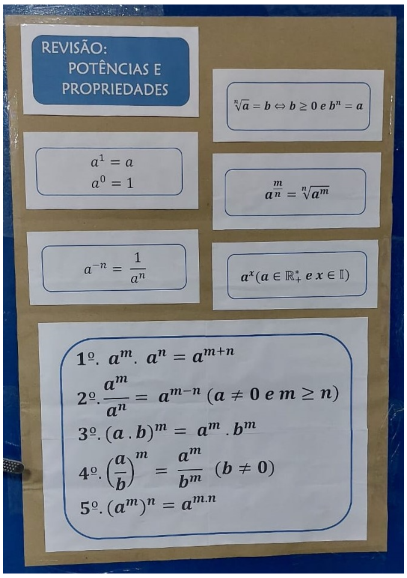
Dando continuidade ao momento diagnóstico, aos alunos que terminavam a atividade citada anteriormente, foi mostrado no quadro três questões a serem resolvidas.

Os alunos foram convidados a resolvê-las no quadro. As duas últimas foram resolvidas com facilidade pelos alunos, que logo se dispuseram para responder no quadro. O primeiro problema foi respondido em conjunto por três alunos, os demais apresentaram dúvidas na resolução do problema proposto.

Durante a aplicação e posteriormente com a correção da atividade, foi possível identificar que alguns alunos apresentam dificuldades no conceito de potência, outros porém, trazem esses conceitos e suas propriedades bem estruturados. Ou seja, a turma tem caráter bastante heterogêneo no que se refere aos conceitos de potência e propriedades.

A "atividade diagnóstica"nos orientou para a aula de revisão de Potências e Propriedades, esta fez-se necessária, pois a maior parte da turma apresentou dificuldades nas propriedades de potência. Os erros identificados no processo de correção puderam ser revistos, corrigidos e tomados como base para novos exemplos. A adoção das atividades

Figura 23 – Cartaz: Revisão potência e propriedades



Fonte: Autor

diagnósticas foi fundamental para o desenvolvimento das atividades seguintes, de acordo com Hoffmann:

> "A avaliação diagnóstica não tem a função de reprovar ou aprovar, mas sim de subsidiar o professor, fornecendo-lhe informações sobre o desenvolvimento do educando, para que possa planejar suas ações de forma mais segura, atendendo às reais necessidades dos alunos."(19, p. 73)

Durante a revisão, alguns exemplos foram resolvidos com auxílio de calculadoras (projetada do notbook e dos alunos). Também foi utilizada uma planilha do Excel, para o cálculo de aproximações de números irracionais, e consequentemente potências de expoente irracional. A figura abaixo apresenta a planilha desenvolvida e utilizada.

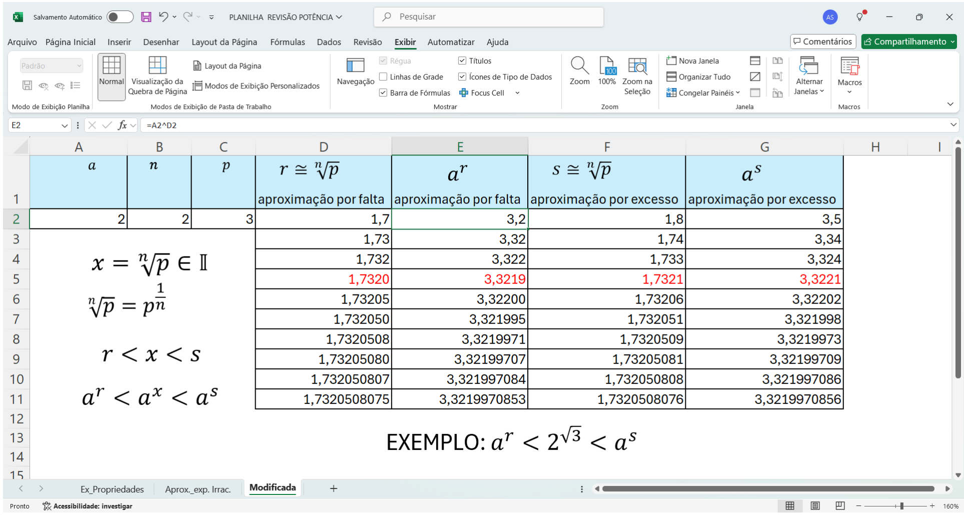
O excel também foi utilizado como ferramenta para a resolução de alguns exemplos, e a verificação das propriedades da potência, como mostra a Figura 25.

A exposição foi feita com auxilio de projeção de slides e utilização do quadro branco, para resolução de exemplos e demonstração de propriedades. Também foram fixados na sala cartazes, como resumo.

O momento de exercícios, que se seguiu à revisão expositiva, buscou o desenvolvimento de habilidades referentes aos conceitos de potências e propriedades e a operacionalização destas, por meio da simplificação de expressões que envolvam potências. Alguns problemas inicias, sobre juros compostos e degradação de substâncias, também foi proposto neste momento.

Os exercícios foram corrigidos no quadro, na aula seguinte. Os alunos receberam o exercício de volta e puderam verificar erros e acertos, acompanhando a resolução no quadro.

Figura 24 – Ferramenta: Planilha Excel



a	n	p	$r \cong \sqrt[n]{p}$ aproximação por falta	a^r aproximação por falta	$s \cong \sqrt[n]{p}$ aproximação por excesso	a^s aproximação por excesso
2	2	3	1,7	3,2	1,8	3,5
			1,73	3,32	1,74	3,34
			1,732	3,322	1,733	3,324
			1,7320	3,3219	1,7321	3,3221
			1,73205	3,32200	1,73206	3,32202
			1,732050	3,321995	1,732051	3,321998
			1,7320508	3,3219971	1,7320509	3,3219973
			1,73205080	3,32199707	1,73205081	3,32199709
			1,732050807	3,321997084	1,732050808	3,321997086
			1,7320508075	3,3219970853	1,7320508076	3,3219970856

$x = \sqrt[n]{p} \in \mathbb{I}$

$\sqrt[n]{p} = p^{\frac{1}{n}}$

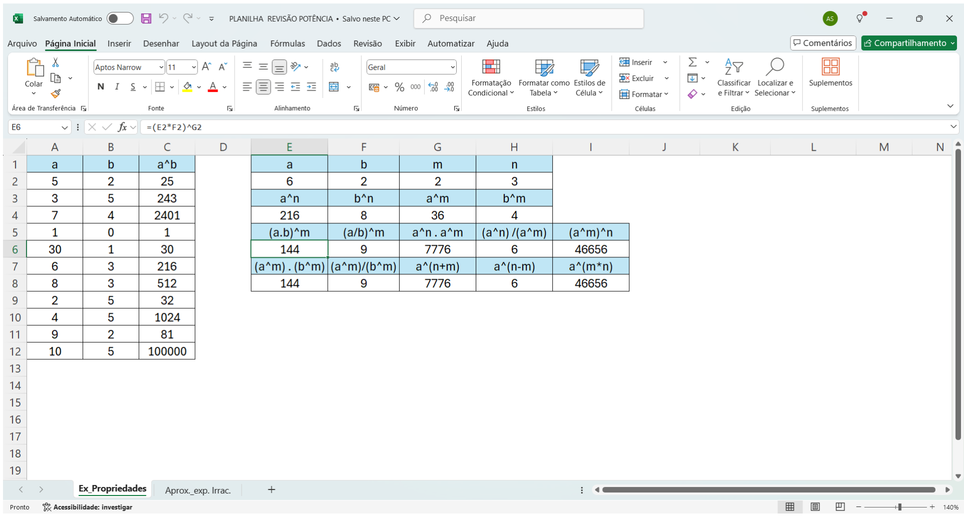
$r < x < s$

$a^r < a^x < a^s$

EXEMPLO: $a^r < 2^{\sqrt{3}} < a^s$

Fonte: Autor

Figura 25 – Ferramenta: Exemplos no Excel



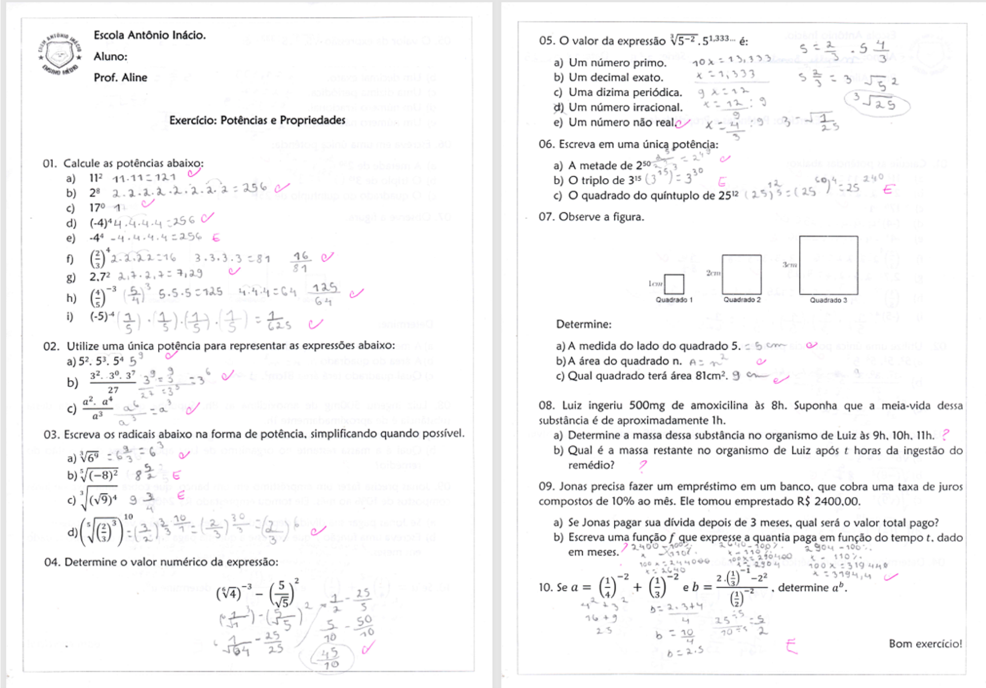
a	b	a^b
5	2	25
3	5	243
7	4	2401
1	0	1
30	1	30
6	3	216
8	3	512
2	5	32
4	5	1024
9	2	81
10	5	100000

a	b	m	n	
6	2	2	3	
a^n	b^n	a^m	b^m	
216	8	36	4	
(a.b)^m	(a/b)^m	a^n . a^m	(a^n) /(a^m)	(a^m)^n
144	9	7776	6	46656
(a^m) . (b^m)	(a^m)/(b^m)	a^(n+m)	a^(n-m)	a^(m*n)
144	9	7776	6	46656

Fonte: Autor

As correções ocorreram na seguinte dinâmica: o gabarito foi projetado no quadro e para cada questão foi feita a pergunta, se seria necessário desenvolvê-la. A atividade foi entregue sem pontuação, porém os registros dos acertos forma feitos previamente pelo professor. A opção de não devolver atividade com a nota se deu para que as demais atividades da sequência didática fossem realizadas sem uma nota pré-estabelecida. De modo a estimular a participação dos estudantes nas demais atividades.

Figura 26 – Exercício posterior à revisão



Escola Antônio Inácio.
Aluno:
Prof. Aline

Exercício: Potências e Propriedades

01. Calcule as potências abaixo:
a) 11^2
b) 2^8
c) 17^0
d) $(-4)^4$
e) -4^4
f) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$
g) $2{,}7^2$
h) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$
i) $(-5)^{-4}$

02. Utilize uma única potência para representar as expressões abaixo:
a) $5^2 . 5^3 . 5^4$
b) $\frac{3^2 . 3^0 . 3^7}{27}$
c) $\frac{a^2 . a^4}{a^3}$

03. Escreva os radicais abaixo na forma de potência, simplificando quando possível.
a) $\sqrt[3]{6^9}$
b) $\sqrt[5]{(-8)^2}$
c) $\sqrt[3]{(\sqrt{9})^4}$
d) $\left(\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}\right)^{10}$

04. Determine o valor numérico da expressão:
$$(\sqrt[6]{4})^{-3} - \left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2$$

05. O valor da expressão $\sqrt[3]{5^{-2}} . 5^{1,333...}$ é:
a) Um número primo.
b) Um decimal exato.
c) Uma dízima periódica.
d) Um número irracional.
e) Um número não real.

06. Escreva em uma única potência:
a) A metade de 2^{50}
b) O triplo de 3^{15}
c) O quadrado do quíntuplo de 25^{12}

07. Observe a figura.

1cm Quadrado 1 · 2cm Quadrado 2 · 3cm Quadrado 3

Determine:
a) A medida do lado do quadrado 5.
b) A área do quadrado n.
c) Qual quadrado terá área 81cm².

08. Luiz ingeriu 500mg de amoxicilina às 8h. Suponha que a meia-vida dessa substância é de aproximadamente 1h.
a) Determine a massa dessa substância no organismo de Luiz às 9h, 10h, 11h.
b) Qual é a massa restante no organismo de Luiz após t horas da ingestão do remédio?

09. Jonas precisa fazer um empréstimo em um banco, que cobra uma taxa de juros compostos de 10% ao mês. Ele tomou emprestado R$ 2400,00.
a) Se Jonas pagar sua dívida depois de 3 meses, qual será o valor total pago?
b) Escreva uma função f que expresse a quantia paga em função do tempo t, dado em meses.

10. Se $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ e $b = \frac{2.\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$, determine a^b.

Bom exercício!

Fonte: Autor

5.2 Atividade II

Iniciamos o estudo das Funções Exponenciais por meio de atividades práticas, fazendo a associação de grandezas com tabelas e a construção de gráficos, no primeiro momento com o domínio discreto. Com o resultado das atividades práticas, desenvolvemos o estudo das funções de domínio real, para isso, foi utilizado, além dos exemplos das atividades, o aplicativo Geogebra e exposição no quadro.

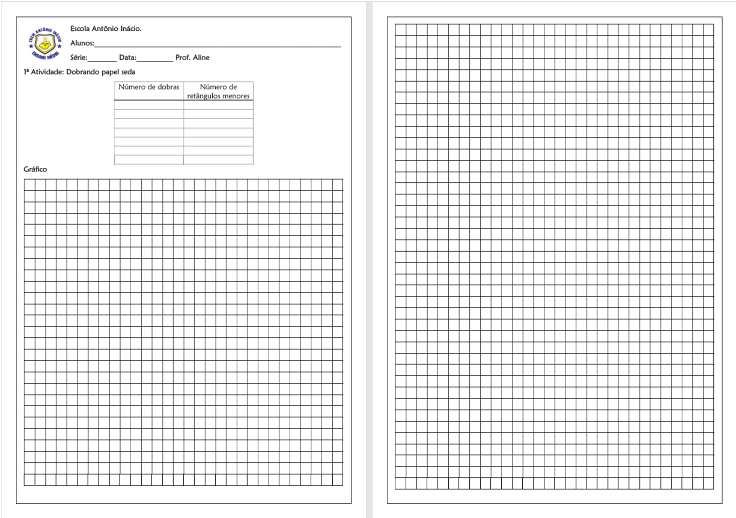
Foram desenvolvidas três atividades na sala de aula e a quarta (Construção do Tapete de Sierpinski) ficou como atividade para ser realizada no contra-turno. As atividades foram realizadas em equipes de 4 e 5 alunos.

A primeira atividade (Dobrando o papel seda), a segunda (Sequência de Fractais), e a terceira (Construção do Triângulo de Sierpinski), foram desenvolvidas em duas aulas. Por equipe, em cada atividade foi disponibilizada uma ficha impressa, contendo uma tabela e uma malha quadriculada para a construção do gráfico. A ficha da segunda atividade também possuía uma malha específica (9x9) para facilitar a construção do fractal correspondente à quarta figura da sequência, que foi solicitado na atividade.

A primeira atividade foi desenvolvida com facilidade por todas as equipes, no entanto, duas equipes demostraram dificuldades na construção do gráfico e do próprio plano cartesiano.

Para o desenvolvimento da segunda atividade, foi fixado no quadro o modelo

Figura 27 – Ficha da 1ª Atividade Prática



Escola Antônio Inácio.

Alunos:________________________________

Série:_______ Data:________ Prof. Aline

1ª Atividade: Dobrando papel seda

Número de dobras	Número de retângulos menores

Gráfico

Fonte: Autor

Figura 28 – Ficha da 2ª Atividade Prática

Escola Antônio Inácio.

Alunos:________________________________

Série:_______ Data:________ Prof. Aline

2ª Atividade: Construindo fractais

Observe a sequência de figuras abaixo:

FIGURA 1 FIGURA 2 FIGURA 3

a) Com o auxílio da malha quadriculada, construa a FIGURA 4 da sequência:

Quantos quadrados coloridos tem a FIGURA 4?

Quantos quadrados coloridos tem a FIGURA 5?

Na tabela abaixo, relacione a posição da figura na sequência com o número de quadrados coloridos em cada figura. Escreva ema expressão matemática que represente essa relação.

Posição da figura na sequência	Número de quadrados coloridos na figura

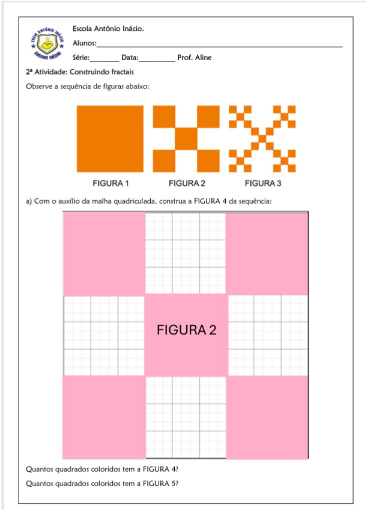
Gráfico: Anote no plano cartesiano os pontos da tabela.

Fonte: Autor

da construção na malha das três primeiras figuras, e solicitado a construção da quarta figura. Além de iniciar o contato da turma com fractais, a atividade buscou promover o desenvolvimento da sequência lógica. Houve uma associação imediata da função exponencial de domínio discreto com as progressões geométricas(PG), por parte de alguns alunos da turma. Este fato contribuiu com a explanação sobre a relação entre de PG e Função Exponencial.

A prática de construir o fractal foi desenvolvida pelas equipes de forma satisfatória, o mesmo ocorreu com o preenchimento da tabela e com as respostas às perguntas. Mais uma vez, algumas equipes apresentaram dificuldades na construção dos gráficos, quanto à lei de formação da função que associa as grandezas em questão, apenas três equipes desenvolveram

Figura 29 – Modelo para a construção dos fractais



Escola Antônio Inácio.

Alunos:____

Série:_______ Data:_________ Prof. Aline

2ª Atividade: Construindo fractais

Observe a sequência de figuras abaixo:

FIGURA 1 FIGURA 2 FIGURA 3

a) Com o auxílio da malha quadriculada, construa a FIGURA 4 da sequência:

FIGURA 2

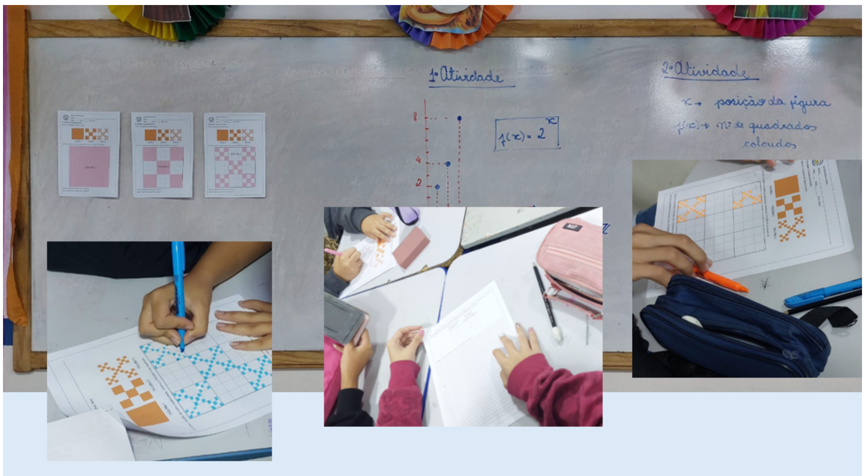
Quantos quadrados coloridos tem a FIGURA 4?

Quantos quadrados coloridos tem a FIGURA 5?

Fonte: Autor

antes de uma explicação no quadro. De forma geral, os estudantes perceberam que não poderiam anotar todos os pontos da tabela no gráfico, assim iniciamos a reflexão sobre o "rápido crescimento exponencial".

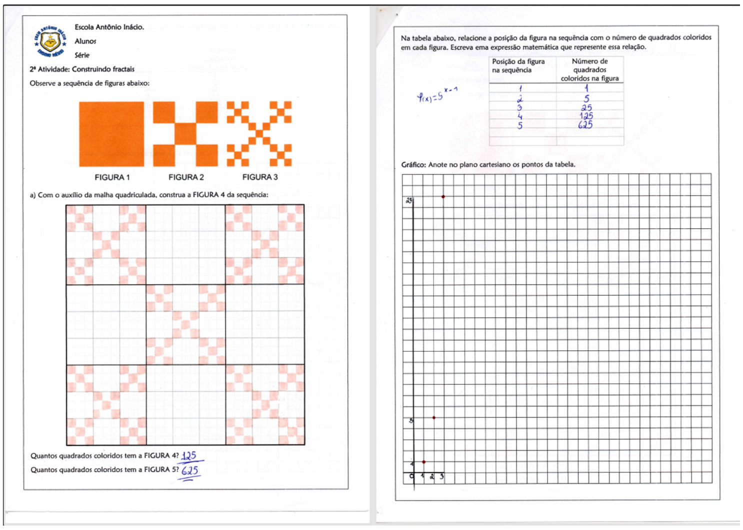
Figura 30 – Registros fotográficos: Atividade II



Fonte: Autor

Para a construção do triângulo de Sierpinski, utilizamos a aula de estudo orientado, na qual as equipes se deslocaram ao laboratório de informática, onde todo o processo foi orientado pelo próprio professor. Cada equipe recebeu um papel guache, a construção do triângulo equilátero foi realizada com um barbante amarrado na ponta de um lápis, feitas as marcações, o próprio papel foi utilizado como régua para os traçados, depois os triângulos foram cortados. As etapas de marcação e pintura (realizada com giz branco) dos triângulos, correspondentes a cada figura da sequência mostarda na Figura 16, foi realizada na própria sala de aula pelas equipes, que também foram preenchendo a tabela e

Figura 31 – Atividade: Construindo fractais


Escola Antônio Inácio.
Alunos
Série
2ª Atividade: Construindo fractais
Observe a sequência de figuras abaixo:
FIGURA 1 FIGURA 2 FIGURA 3
a) Com o auxílio da malha quadriculada, construa a FIGURA 4 da sequência:
Quantos quadrados coloridos tem a FIGURA 4? 125
Quantos quadrados coloridos tem a FIGURA 5? 625

Na tabela abaixo, relacione a posição da figura na sequência com o número de quadrados coloridos em cada figura. Escreva ema expressão matemática que represente essa relação.

$f(x) = 5^{x-1}$

Posição da figura na sequência	Número de quadrados coloridos na figura
1	1
2	5
3	25
4	125
5	625

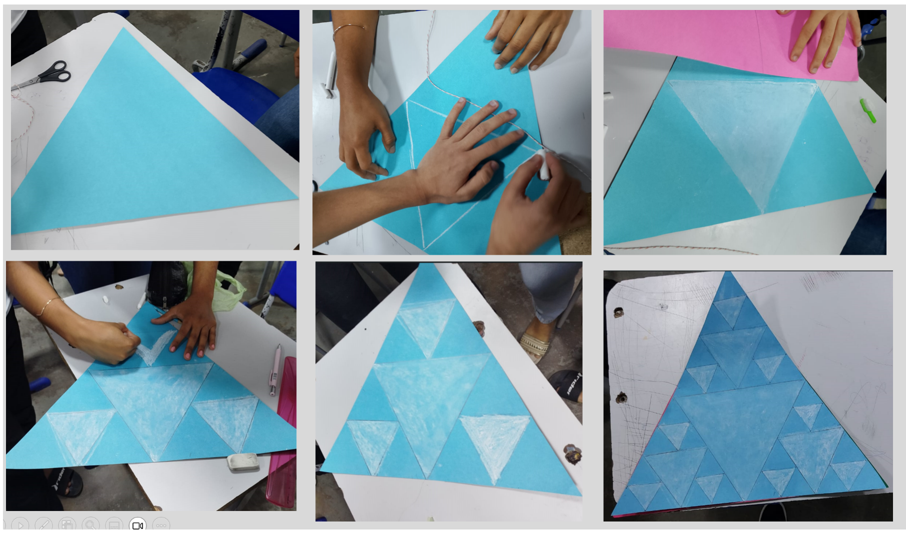
Gráfico: Anote no plano cartesiano os pontos da tabela.

Fonte: Autor

construindo o gráfico correspondente a função que relacionou a etapa de pintura com o número de triângulos coloridos (que não foram pintados).

As imagens da Figura 32 mostram as etapas de pintura de uma equipe.

Figura 32 – Triângulo de Sierpinski: Construção de uma equipe



Fonte: Autor

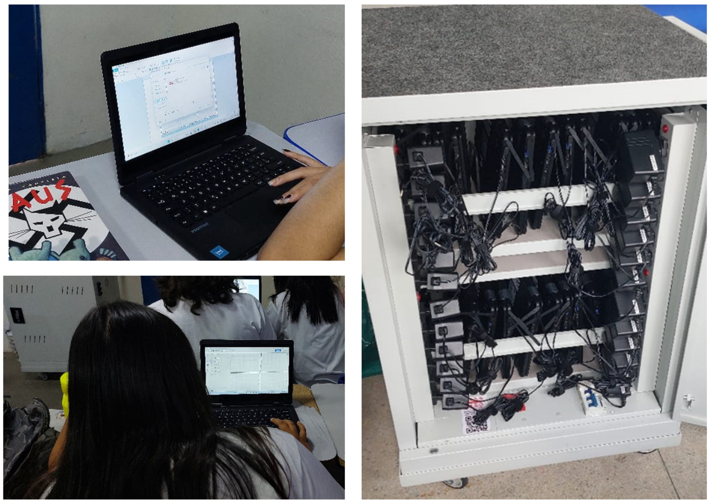
Na aula posterior, os dados (pontos das tabelas) de cada atividade foram anotados no Geogebra, bem como a lei de formação da função correspondente com o domínio real. Para este momento foram utilizados os notbooks de um laboratório móvel. O aplicatido Calculator Suite (Geogebra) foi previamente instalado em todos os equipamentos, para que a sua utilização pudesse dispensar o acesso à Internet.

Mesmo com equipamentos suficientes para todos os alunos da turma, optamos

Figura 33 – Construção da turma

Fonte: Autor

Figura 34 – Dispositivos do laboratório móvel

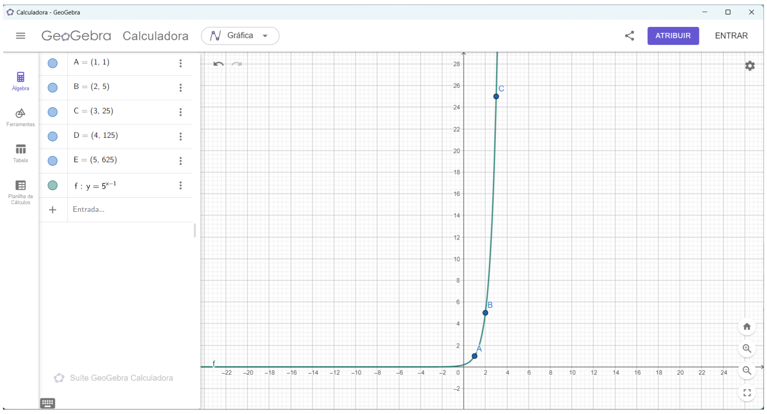


Fonte: Autor

por usá-los em duplas, para que os alunos que não tem familiaridade computacional pudessem ser auxiliados pelos colegas. A orientação da atividade aconteceu com a projeção do notbook e no contato próximo com as duplas. Foi pedido a atividade salva na área de trabalho, para posterior verificação. Com esta simples atividade, os alunos começaram a utilização do programa, e também puderam verificar se as leis de formação indicadas em cada atividade prática estavam corretas.

Na mesma aula, foi apresentada de forma expositiva, a função exponencial, suas propriedades, exemplos, e características do seu gráfico. A exposição foi feita no quadro e também com o Geogebra, que também foi utilizado pelos alunos.

Figura 35 – Dados das atividades no Geogebra



Fonte: Autor

Ao analisar os gráficos da função exponencial, propomos a utilização do zoom para observação do fato que o gráfico de $f(x) = a^x$ não intersecta o eixo dos x. Ainda observamos que, a intersecção do gráfico de $f(x) = a^x$ com o eixo y é o ponto $(0, 1)$. (Para $f(x)$ uma função real, com $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$).

Para a conclusão desta atividade foi necessária outra aula, nesta fizemos a análise de outros modelos de função (afim e quadrática) e da função exponencial, comparando o seu crescimento com o das demais.

Concluímos a atividade com a construção (no Geogebra), das funções do tipo exponencial listadas abaixo:

1. $f(x) = 3^x$.
2. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
3. $h(x) = 3^x + 4$.
4. $i(x) = 3^x - 2$.
5. $j(x) = 2 \cdot 3^x$.
6. $l(x) = \frac{1}{2} \cdot (3^x)$.

Como no exercício anterior, foi pedido que ele fosse salvo na área de trabalho do equipamento. Além de observar as funções crescentes e decrescentes, este exercício teve objetivo de verificar o comportamento da função para modificações nos parâmetros k e b de funções do tipo $f(x) = k \cdot a^x + b$. Os alunos representaram as funções e acompanharam a análise das modificações por meio da projeção, o professor buscou conduzir o momento por meio de questionamentos sobre como a função se comportaria com determinada modificação no parâmetro.

5.3 Atividade III

Com esta atividade buscamos estimular o estudo das Funções Exponenciais por meio das suas várias aplicações. Como planejado, o momento teve inicio com a apresentação do vídeo "A bomba atômica do trigo"e posterior resolução de problemas pelo professor.Nesta atividade, utilizamos a dinâmica de resolução de problemas em equipes.

Figura 36 – Apresentação do vídeo

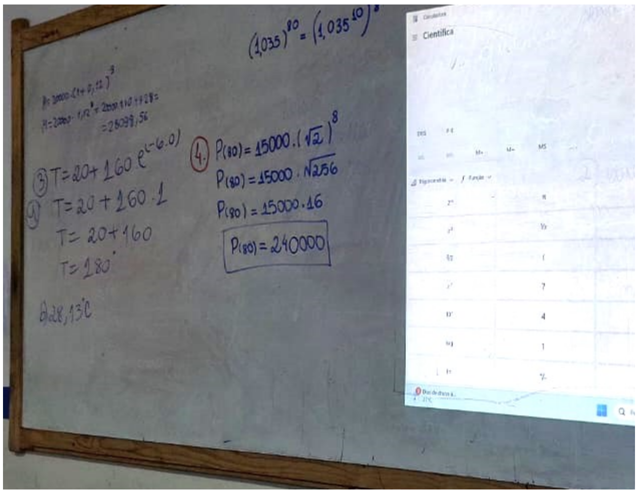
Fonte: Autor

Ao tempo previsto para atividade (duas aulas) foi acrescentado uma aula para a apresentação das respostas das equipes e para as correções gerais.

Na exposição dos problemas iniciais, houve uma modificação, optamos por resolver inicialmente problemas que seriam mais parecidos com os problemas das atividades propostas, e só então desenvolver os problemas de juros apresentados no capítulo 4. Os estudantes foram orientados a utilizarem, caso quisessem, os recursos disponíveis para a apresentação dos problemas. No entanto, as seis equipes formadas escolheram fazer a apresentação no quadro, apenas utilizando a calculadora projetada para a conferir as respostas.

Os problemas para serem apresentados foram sorteados entre as equipes, sendo a quinta questão dividida entre duas: quinta questão item a); e quinta questão item b). Durante a resolução das questões os estudantes apresentaram suas dúvidas e mostraram suas respostas para correção pelo professor. As equipes entregaram a lista respondida e a apresentação aconteceu na aula seguinte, algumas equipes não concluíram a lista na sala de aula, mesmo assim, a lista foi entregue ao professor e foi sugerido que as demais questões fossem respondidas em casa, o que foi possível pois cada estudante recebeu uma lista.

Figura 37 – Exposição dos problemas pelas equipes



Fonte: Autor

Durante a realização desta atividade, pudemos perceber o desenvolvimento dos alunos com relação ao conteúdo. A forma como alguns membros das equipes explicam a resolução aos demais demonstra que estão aprendendo o conteúdo. Também foi interessante perceber a fácil interação entre as equipes, e também as dúvidas que eles expuseram entre os membros. Consideramos o momento proveitoso e de muito aprendizado. Todas as equipes participaram efetivamente, mesmo sendo observado que alguns alunos participam mais e outros menos, o importante foi perceber a atenção que os membros da equipe deram àquele que se dispunha a explicar a resolução aos outros.

Já no inicio da aula os alunos foram informados que iriam, em equipes, responder exercícios semelhantes aos que o professor estava expondo, o que gerou maior atenção e participação da parte dos alunos.

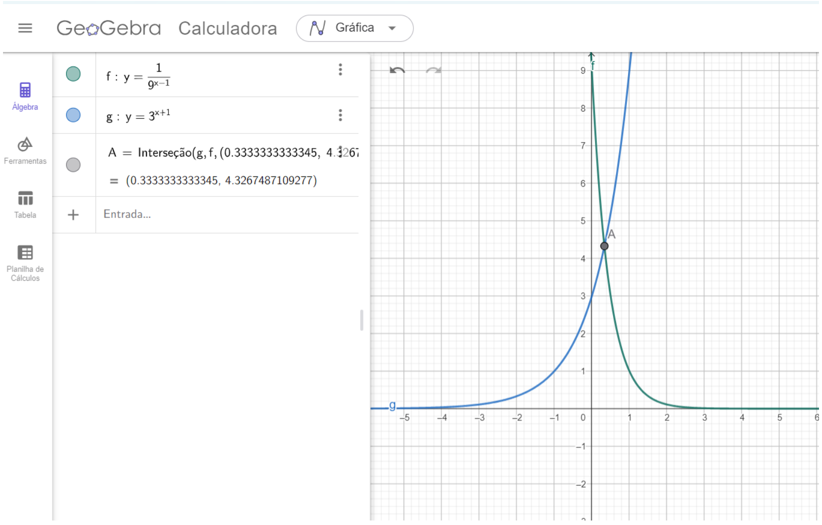
A avaliação desta atividade foi positiva, no entanto, vale registrar que a segunda e terceira questão de juros foram retomadas numa aula posterior, sendo respondida antes da formação das equipes apenas a primeira questão. Conforme o planejamento, na primeira aula aconteceu a apresentação do vídeo (Figura 36) e a explicação, as equipes se reuniram na segunda aula, ficando as apresentações para o dia seguinte.

5.4 Atividade IV

Esta atividade foi proposta em uma aula para a resolução de exercícios pelo professor seguido do momento de exercícios (em duplas), pelos alunos. E outra aula para a correção dos exercícios propostos. Os exemplos e exercícios foram extraidos do livro didático (16), presentes nas páginas 159 até 162.

A exposição foi feita no quadro, e em alguns momentos as calculadoras e o Geogebra

Figura 38 – Verificação das questões com o Geogebra



Fonte: Autor

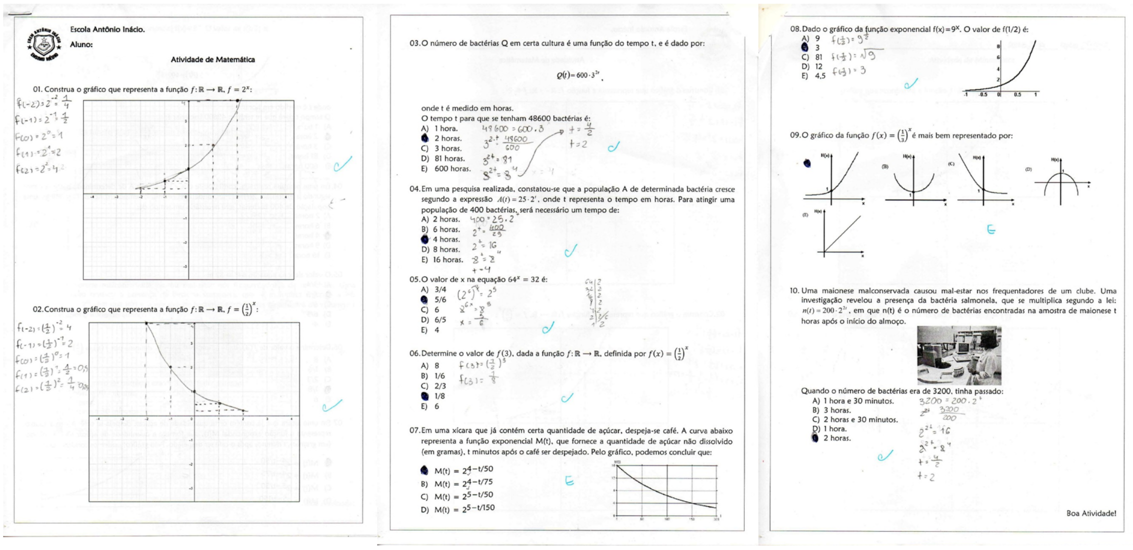
foram utilizados na resolução das questões. Por exemplo, para a verificação gráfica da resposta da questão 27 (Figira 38), neste caso, foi pedido a um estudante que representasse no Geogebra as duas funções $f(x) = \frac{1}{9^{x-1}}$ e $g(x) = 3^{x+1}$, e identificasse a intersecção das funções. O valor, representado em decimal pelo programa, foi verificado. Com essa dinâmica, alguns alunos auxiliaram nas resoluções com as ferramentas e os demais observavam, uma vez que a tela do computador estava sendo projetada. Ou seja, as questões foram resolvidas no quadro pelo professor e as respostas verificadas pelos próprios alunos.

Para esse momento de exercícios, os notbooks não foram levados para a sala, apenas o do professor, que estava sendo projetado, era utilizado pelas duplas, quando estas queriam. Como o previsto, o exercício foi iniciado na sala e concluído em casa. Esta atividade foi registrada na ficha de acompanhamento, individualmente, pois as duplas foram formadas apenas para se auxiliarem na resolução. A correção aconteceu na aula seguinte, onde as dúvidas puderam ser esclarecidas.

5.5 Atividade V

Com esta atividade finalizamos a sequência didática, trata-se da aplicação de uma atividade avaliativa individual, sobre o conteúdo desenvolvido. Esta atividade não foi considerada o objetivo final da sequência, apenas, mais uma ferramenta, e de muita importância, para nos ajudar a observar o desenvolvimento dos estudantes quanto ao estudo das Funções Exponenciais. Vale lembrar, que todas as atividades aplicadas contribuíram com o processo avaliativo, e mesmo que, não sendo atribuídas notas para as atividades inicialmente, para não atrapalhar no desenvolvimento pleno de todas as atividades, elas formaram 50% da nota de atividades do segundo trimestre.

Figura 39 – Atividade Avaliativa



Fonte: Autor

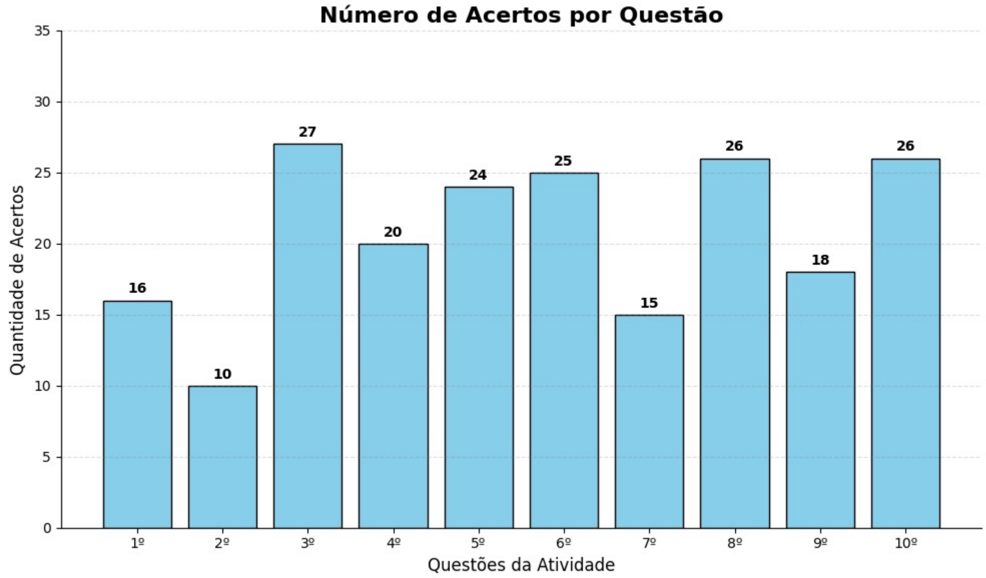
A atividade aplicada, foi composta por 10 questões, sendo as duas primeiras para esboçar o gráfico de funções exponenciais e as outras questões de múltipla escolha. O resultado da atividade foi considerado bom, pois a maioria dos estudantes acertou mais de 60% das questões, ficando a média de acertos dos estudantes em 6,47 questões. Estavam presentes nessa atividade 32 estudantes. Dispomos o número de acertos por questão no gráfico da Figura 40, notamos que a questão com menor número de acertos foi a construção do gráfico de uma função decrescente, seguida da outra questão também de construção de gráfico (crescente), dentre as questões de múltipla escolha a sétima foi a que apresentou um maior número de erros, tratava-se de uma questão que solicitava a lei de formação da função correspondente ao gráfico dado.

O bom desempenho da turma, em algumas questões específicas(terceira e nona), foi um indicativo de que o planejamento e a aplicação da sequência didática foram eficientes. Pois estas questões foram aplicadas em atividades avaliativas de anos anteriores (sem o uso da sequência didática), apresentando um resultado bem inferior ao atual.

Na Figura 41, podemos verificar a distribuição de notas da turma nesta atividade (utilizando a escala de 0 à 10).

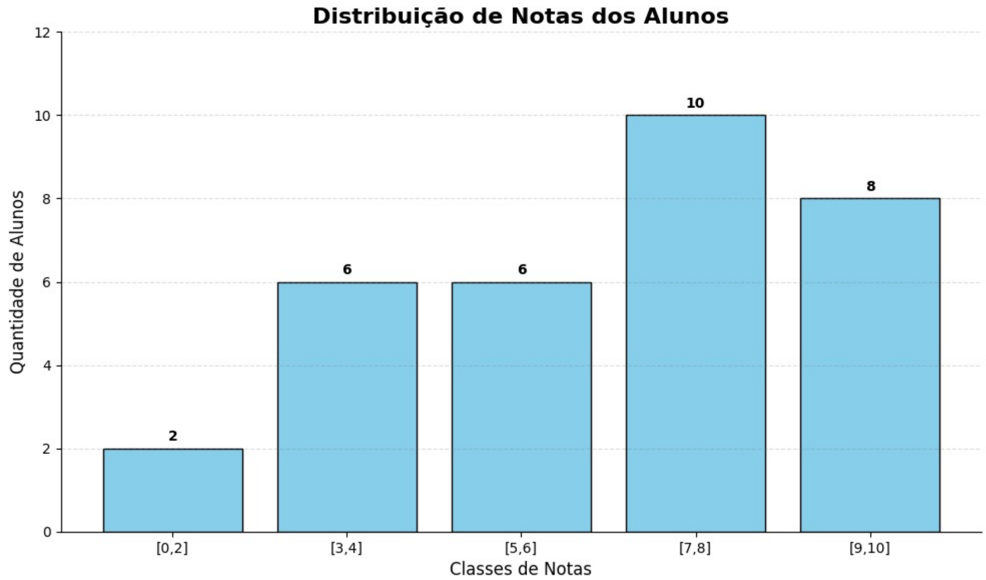
Dentre os 32 alunos que fizeram atividade, 23 acertaram seis ou mais questões. O resultado desta atividade, confirmou a percepção do professor acerca do desenvolvimento da turma. O nível de dificuldade da atividade foi compatível com o desenvolvimento demonstrado pelos estudantes nas atividades anteriores.

Figura 40 – Gráfico: Acertos por questão



Fonte: Autor

Figura 41 – Gráfico: Notas da Atividade V



Fonte: Autor

5.6 Análise Geral

A implementação da sequência didática para o ensino de funções exponenciais demonstrou ser uma abordagem pedagógica eficaz e bem-sucedida. A proposta, que visava combinar métodos tradicionais com tecnologias e atividades práticas para promover uma aprendizagem significativa, atingiu seus objetivos, conforme evidenciado pela análise detalhada dos resultados.

A utilização de ferramentas como GeoGebra, planilhas eletrônicas, e atividades manuais, como a construção de fractais, mostrou-se útil ao incentivar o engajamento dos alunos e eficiente aos objetivos de aprendizagem. A intenção de permitir que os alunos aplicassem conceitos matemáticos em contextos reais, como matemática financeira e crescimento populacional, foi concretizada nas atividades, fortalecendo o interesse e a percepção da utilidade do tema.

As atividades práticas, não apenas introduziram o conceito de função exponencial de forma lúdica, mas também estimularam a associação com outros saberes, como as Progressões Geométricas. O trabalho em equipe fomentou a colaboração e a aprendizagem entre pares, com alunos explicando resoluções uns aos outros, um forte indicativo de apropriação do conteúdo.

Apesar do sucesso geral, a análise também apontou desafios recorrentes. A construção e interpretação de gráficos, especialmente de funções decrescentes, foi a principal dificuldade observada tanto nas atividades práticas quanto na avaliação final.

Portanto, a combinação de diagnóstico preciso, atividades práticas contextualizadas, uso intencional de tecnologia e avaliação contínua não só melhorou o desempenho acadêmico, mas também promoveu a autonomia e o engajamento dos estudantes, capacitando-os de forma mais completa para aplicar o conhecimento matemático em seus desafios cotidianos.

Referências

1 LIMA, E. L. *Números e Funções*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. (Coleção do Profmat).

2 MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. *Progressões e Matemática Financeira*. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. (Coleção do Professor de Matemática).

3 ANDRADE, T. *Matemática interligada: volume 1*. São Paulo: Scipione, 2020.

4 DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações, Volume 1*. São Paulo: Ática, 2007.

5 PAIVA, M. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 2015.

6 ANTUNES, I. C. G. Geometria fractal no ensino médio: teoria e prática. *Professor de Matemática Online*, v. 2, n. 1, 2014. ISSN 2319-023X. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2014/pmo23>.

7 NUNES, R. S. R. *Geometria Fractal e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006.

8 BRASIL, M. d. E. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf>. Acesso em: 5 set. 2024.

9 CAED. *Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco*. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, 2023. Disponível em: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/#!/colecoes>. Acesso em: 3 set. 2024.

10 PERNAMBUCO, S. d. E. e. E. *Currículo de Pernambuco: Ensino Médio*. Recife, 2021. Disponível em: <https://portal.educacao.pe.gov.br/ensino-medio/>. Acesso em: 6 set. 2024.

11 MOREIRA, M. A. *Teorias de aprendizagem*. São Paulo: Editora pedagógica e universitária São Paulo, 1999. v. 2.

12 ASSIS, C.; MIRANDA, T. *Função exponencial e Propriedades*. Portal da OBMEP. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/5ohpe7bqa408s.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2025.

13 ARTEMáTICA. *Triângulo de Sierpinski*. 2018. YouTube. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=d-lcM6J2-Jc>. Acesso em: 17 jul. 2025.

14 MATEMáTICA, I. *Isto é Matemática - T08E13 - "A Bomba Atómica do Trigo"*. 2016. YouTube. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=GThyTefiVlY>. Acesso em: 17 jul. 2025.

15 BARROZO, S.; COSTA, M. M.; CAPELATO, E. Proposta de uma sequência didática para o ensino da função exponencial. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de Actas*, Madrid, p. 390–400, 2017.

16 MODERNA, E. *Conexões com a Matemática*. São Paulo: Moderna, 2016.

17 LUCKESI, C. C. *Avaliação da Aprendizagem Escolar*. São Paulo: Cortez, 2011.

18 BACICH, L.; MORAN, J. *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*. Porto Alegre: Penso Editora, 2017.

19 HOFFMANN, J. *Avaliar para promover: as setas do caminho*. Porto Alegre: Mediação, 2001.