UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ANDRÉ LUIZ MARANHÃO PORTO DA SILVEIRA

Uma Abordagem Lúdica da Geometria utilizando a pipa como instrumento no ensino aprendizagem

RECIFE
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ANDRÉ LUIZ MARANHÃO PORTO DA SILVEIRA

Uma Abordagem Lúdica da Geometria utilizando a pipa como instrumento no ensino aprendizagem

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. JOSÉ DEIBSOM DA SILVA

RECIFE
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

S587a Silveira, André Luiz Maranhão Porto da.
Uma abordagem lúdica da geometria utilizando a pipa como instrumento no ensino aprendizagem / André Luiz Maranhão Porto da Silveira. – Recife, 2024.
117 f. : il.

Orientador: José Deibsom da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Mestrado Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.
Inclui referências.

1. Geometria 2. Desenho geométrico – Papagaio (Brinquedo) 3. Matemática – Estudo e ensino 4. Geometria – Estudo e ensino – Brincadeiras I. Silva, José Deibsom da, orient. II. Título

CDD 510

Trocar essa página pela Folha de Aprovação

À minha família

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus por me dar forças, sabedoria e orientação ao longo desta jornada acadêmica. Aos meus pais,em especial à minha mãe Dra Ana Maria Maranhão Porto da Silveira, pelo amor, apoio incondicional e ensinamentos que foram fundamentais para minha formação pessoal e profissional e todo incentivo para a conclusão do meu curso .A minha esposa, Helen Cristine Montanha Nazário Porto da Silveira, pelo amor, compreensão e suporte constantes que foram essenciais durante toda a realização deste trabalho, me incentivando com palavras de apoio e não me deixando desistir em momentos de fraquesa,ao meu filho Luiz Felipe Nazário Porto da Silveira,a minha filha Maria Eduada Nazário Porto da Silveira que me apoiaram em diversos momentos do curso lutando comigo em varias batalhas.Ao meu amigo Douglas de Souza Rodrigues da Silva com todos os ensinamentos e paciência em varias disciplinas com diversos encontros de estudo durante todo o curso, Ao meu professor orientador, Dr JOSÉ DEIBSOM DA SILVA, pela paciência, dedicação e valiosas orientações que contribuíram imensamente para a realização deste trabalho. À minha família, pelo constante apoio e compreensão durante todo o período de pesquisa e redação desta dissertação. Aos meus amigos, que sempre me incentivaram e apoiaram, Ao Profmat-UFRPE, pelo programa de excelência e pelas oportunidades de aprendizado proporcionadas. E, por fim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, meu sincero agradecimento.

"Ainda que eu falasse a línguas dos homens e dos anjos,
e não tivesse amor, seria como o metal que soa ou como o sino que retine.
E ainda que tivesse o dom de profecia,
e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé,
de maneira tal que transportasse os montes, e se não tivesse amor, nada seria..
(Bíblia Sagrada, coríntios 13.1)

Resumo

O presente estudo aborda o processo ensino-aprendizagem da geometria sob uma perspectiva lúdica, a fim de estimular o interesse dos alunos com relação à percepção e ao uso das figuras geométricas. Tomando como base (1) que preconiza o conceito da zona de desenvolvimento proximal e outros seguidores que amplia e foca a construção do saber como marco principal para o sucesso do processo ensino aprendizagem. O objetivo da pesquisa é promover a construção de pipas na sala de aula como um convite para o aluno expor o próprio conhecimento. O trabalho foi realizado, para sabermos o nível do conhecimento geométrico dos alunos de uma turma do oitavo ano do ensino fundamental II, de uma escola da rede pública em Recife no estado de Pernambuco. Trabalhamos com uma metodologia diferente, a construção de pipas, numa escola que acolhe alunos de bairros periféricos, e muito faz uso desse objeto como brinquedo, pois tem um baixo custo para construção. Decidimos levar os materiais necessários, para que eles construíssem as pipas. Após a construção, constatou-se o êxito do processo ensino aprendizagem a partir do resultado obtido no material. As Pipas foram expostas e os alunos tiveram a oportunidade de descrever o processo da aprendizagem. Dessa maneira, esperamos ter despertado o interesse do educando e a partir disso, envolvê-lo cada vez mais, buscando a compreensão de modo significativo das relações existentes entre o material concreto (pipa) e o abstrato (conteúdo teórico) para que a geometria não seja vista pelos mesmos, como uma matéria difícil e desta feita,construímos um tutorial para professores como elemento facilitador para o ensino da Geometria.

Palavras-chave:Geometria.prática. construção de pipas.tutorial para professores

Abstract

The present study approaches the teaching-learning process of geometry from a playful perspective, in order to stimulate the students' interest in the perception and use of geometric figures. Taking as a basis (1) which advocates the concept of the zone of proximal development and other followers that expand and focus in the construction of knowledge as the main milestone for the success of the teaching-learning process. The objective of the research is to promote building a kite in the classroom as an invitation for students to share their knowledge. The work was made to find out the level of geometric knowledge eighth grade students in a elementary public school in Recife in the state of Pernambuco. We work with a different methodology, the construction of kites, are from peripheral neighborhoods, and often uses this object as a toy, as it has a low construction cost. We decided to take the necessary materials so they could build the kites. After construction,it was found that the teaching-learning process was successful based on the results obtained in the material. The Kites were displayed and the students had the opportunity to describe the learning process. In this way, we hope to have waken the student's interest and to involve him more and more, seeking to understand in a meaningful way the relationships that exist between the concrete material (kite) and the abstract (theoretical content) so that geometry does not be seen by them as a difficult subject. So we created a tutorial for teachers as a facilitating element for teaching Geometry.

Keywords:Geometry.practice. kite building.tutorial for teachers

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

Sumário

Introdução

A jornada educacional é um espaço privilegiado para o desenvolvimento da linguagem, do sentimento e do pensamento. Neste contexto, a presente dissertação propõe uma reflexão sobre como uma abordagem lúdica da geometria, utilizando a construção e o manuseio de pipas, pode constituir uma estratégia eficaz para o ensino e o aprimoramento da aprendizagem dos estudantes. Reconhece-se a necessidade de proporcionar ao aluno um ambiente de vivência e ampliação do trabalho pedagógico, que fomente novas experiências e aprendizagens.

O processo de ensino-aprendizagem requer que o professor planeje cuidadosamente a metodologia, a rotina e o espaço físico, englobando todo o contexto estratégico para explorar a autonomia dos alunos. É fundamental que o estudante seja o protagonista de sua própria história educacional. Dentre as diversas abordagens pedagógicas, o lúdico emerge como uma ferramenta poderosa para resgatar o prazer pelo estudo e otimizar o desenvolvimento e a aprendizagem. Jogos e brincadeiras desempenham um papel crucial no desenvolvimento sociocultural, capacitando os futuros cidadãos a serem mais reflexivos, despertando sua atenção, pensamentos, experiências, autonomia e ações colaborativas, o que impacta positivamente seu estado de aprendizagem.

A palavra *lúdico* tem origem no latim "*Ludus*", que significa "jogo". Ao brincar, o aluno descobre, se envolve, reflete, se expressa e aprende, vivenciando momentos únicos e marcantes em sua jornada escolar que se perpetuam por toda a vida. Conforme ALIPIO et al.(2) afirma,o lúdico representa um meio de comunicação e um prazer que o aluno domina ou exerce em razão de sua própria iniciativa. A partir dessa perspectiva, o presente trabalho investiga a utilização de jogos e brincadeiras como estratégia para o ensino das múltiplas linguagens inerentes à geometria.

Diante do exposto, esta pesquisa problematiza: *Como facilitar a aprendizagem das teorias da Geometria através da abordagem lúdica utilizando a Pipa?* Sendo assim,objetiva-se compreender a importância da utilização da pipa como elemento facilitador do processo ensino-aprendizagem de conceitos geométricos. Estudar a história da pipa e sua relevância cultural,desenvolver modelos de construção de pipas que permitam a aplicação de teorias da Geometria Plana,Elaborar um tutorial didático para professores, detalhando a metodologia proposta.Com isto, este trabalho justifica-se pela latente necessidade de auxiliar professores na implementação de práticas lúdicas no ensino de geometria, por meio de um relato de experiência centrado na construção e uso de pipas. Ao observar a lacuna existente na exploração acadêmica da ludicidade e a aplicação limitada da Geometria como meio de criação e design, notou-se a viabilidade de elaborar uma experiência que enfatize o potencial da relação entre teoria e prática.

Como um incentivo adicional, este trabalho se destaca por ser pioneiro em abordar características do trabalho com pipas que podem inspirar outros pesquisadores a explorar o tema, bem como aspectos ligados à cultura. A experiência de oito anos do pesquisador na aplicação do lúdico em sala de aula demonstrou um domínio aprimorado do ambiente de aprendizagem e uma notável melhora na assimilação do conteúdo pelos alunos, culminando no alcance dos objetivos pedagógicos propostos.

Este estudo embasa sua teoria em referências como (2), (3), (4), (5), e (6). O trabalho foi desenvolvido por meio de um ***Relato de Experiência*** focado na exploração da ludicidade na geometria utilizando a pipa como instrumento de ensino-aprendizagem.

Criou-se um tutorial detalhado para professores, visando orientá-los em cada etapa do processo. A estrutura propõe a aplicação em sala de aula compreendendo cinco encontros de 50 minutos cada, com a seguinte organização:

- **Primeiro Encontro:** Foco em segurança e cuidados, manejo do compasso e identificação dos materiais necessários. Foi concedido aos alunos liberdade para praticar o manuseio do compasso, garantindo familiaridade para as aulas futuras. foram orientados sobre os cuidados com os materiais.
- **Segundo Encontro:** Planejamento e preparação, incluindo a orientação sobre materiais a serem adquiridos (régua, compasso, esquadro, cartolina, papel seda, bambu, linha 10), e a formação de grupos estimulando a delegação de tarefas e o protagonismo do aluno.
- **Terceiro Encontro:** Atividade prática com palha de coqueiro, abordando a desigualdade triangular, retas paralelas e perpendiculares, ângulos alternos internos, alternos externos, colaterais, correspondentes, entre outros.
- **Quarto Encontro:** Construção das pipas e de modelos geométricos, onde os alunos puderam escolher o modelo a ser construído.
- **Quinto Encontro:** Discussão sobre a importância dos locais para empinar pipas, cuidados necessários (não uso de cerol), e conscientização sobre os perigos dessa prática na comunidade. O professor atuou como agente multiplicador, instruindo os alunos a disseminarem essas informações, conferindo um cunho social ao trabalho.

Um encontro adicional foi dedicado à **exposição e montagem de uma feira de matemática** na semana da matemática, onde os trabalhos serão expostos. Os alunos apresentaram à escola a teoria utilizada, e foi organizada uma competição e votação da melhor pipa, com fotos dos alunos empinando e das pipas no Instagram da escola, visando engajar a comunidade.

Para auxiliar os professores na replicação da metodologia, foram desenvolvidos vídeos de apoio, que detalharão:

1. Cuidados ao empinar pipa.
2. Exemplo prático de desigualdade triangular.
3. Como desenhar retas paralelas e perpendiculares.
4. Materiais necessários para a construção da pipa.
5. Esqueleto da pipa.
6. Traçado das arestas.
7. Aplicação da teoria.
8. Área e perímetro.
9. Rabiola da pipa.
10. Fazendo a pipa voar.

Esses vídeos serviram como modelo para os professores aplicarem a técnica em sala de aula.

Adicionalmente, foi proposto um *banner* com um modelo sugerido para organização, que o professor pode adaptar, e uma aula para ser aplicada no software livre GeoGebra.Criou-se um tutorial com comandos básicos para familiarizar o aluno com o software, suas barras de ferramentas e noções de plano cartesiano. Após o domínio básico, os alunos foram incentivados a fazer desenhos livres e, posteriormente, a construir modelos de pipa a partir de figuras do Google, ajustando pontos e trabalhando as teorias de geometria necessárias para o oitavo ano do Ensino Fundamental II. Foi possível destacar triângulos (acutângulos, obtusângulos, retângulos) e, ao identificar um triângulo retângulo, construir quadrados sobre a hipotenusa e os catetos, utilizando o GeoGebra para calcular suas áreas e comprovar o Teorema de Pitágoras. Desenvouveu-se uma sugestão de verificação da aprendizagem, disponível em formato editável (DOC), para que o professor possa avaliar a teoria vivenciada em sala de aula. Por fim, apresentou-se uma sugestão de projeto pedagógico para que o professor possa submeter à direção e coordenação de sua escola, facilitando a execução do projeto.

1 Referencial Teórico

1.1 Competências para o ensino da Matemática

Segundo a BNCC de matemática existem (7) COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL, são elas:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. .Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. O nosso trabalho se encaixa perfeitamente em todos os itens relacionados pela BNCC

Na BNCC a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos.

Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.

No Ensino Fundamental – Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança.

Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo.

No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa é que os alunos reconheçam que medir é comparar uma grandeza com uma unidade e expressar o resultado da comparação por meio de um número. Além disso, devem resolver problemas oriundos de situações cotidianas que envolvem grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área (de triângulos e retângulos) e capacidade e volume (de sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, recorrendo, quando necessário, a transformações entre unidades de medida padronizadas mais usuais.

No Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais. Além disso, espera-se que estabeleçam e utilizem relações entre essas grandezas e entre elas e grandezas não geométricas, para estudar grandezas derivadas como densidade, velocidade, energia, potência, entre outras.

Habilidades

- (EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
- (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
- (EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
- (EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
- (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

1.1.1 Construindo aprendizagem com pipas

Embora muitos professores usem a construção e o ato de empinar pipas para ensinar conceitos de geometria ou física, a verdade é que essa prática em si não é algo que a gente aprende na escola.

A brincadeira de pipa, ou papagaio, faz parte daquelas classificações de jogos que chamamos de "tradicionais"e "de rua". Ela funciona de um jeito bem diferente do que estamos acostumados com o ensino formal: acontece espontaneamente, nem sempre tem um adulto supervisionando e não precisa de leitura ou escrita.

Mesmo assim, essa brincadeira continua firme e forte ano após ano, juntando um monte de gente de todas as idades e classes sociais. A gente pôde observar isso de perto em várias situações, tanto participando de festivais de pipa quanto acompanhando a brincadeira durante nossa pesquisa de campo.

Segundo (8), os jogos tradicionais oferecem regras que são passadas de criança para criança, ao longo de séculos, sem nenhuma referência escrita, deflagrando, ao mesmo tempo, uma série de arranjos e ajustes, em cada lugar e grupo em que se atualizam. Os autores falam de uma "estrutura"da brincadeira, com o cuidado de não entender essa "estrutura"como um elemento rígido e determinante de tudo o que se segue, nem de tomá-la como uma realidade empírica, uma vez que é abstraída após a repetição de muitas experiências de regularidade. As formas de brincar, ao contrário de uma ideia de fixidez, seriam passíveis de modificações no tempo e no espaço, "em função da rede de relações especificadas dentro de um grupo".

1.2 Um pouco de História da Pipa para auxiliar o professor na didática da sua aula

Segundo (9)a pipa nasceu na China antiga por volta de 1200 a.C., feitas de seda e bambu. O primeiro relato escrito sobre pipas empinadas é de cerca de 200 a.C. Os arquivos mencionam pipas gigantescas, capazes de transportar um homem no ar, destinadas a observar a posição do inimigo. Os movimentos e as cores das pipas eram mensagens transmitidas à distância entre destacamentos militares.

O imperador chinês Wu que reinou entre 141 e 87 a.C., usou pipas para pedir ajuda quando estava cercado pelas tropas inimigas em Nanjing. A pipa, papagaio de papel, quadrado ou arraia é um brinquedo feito de papel sobre uma estrutura de varetas que usa a força do vento para voar enquanto é mantida presa por um fio segurado pelo operador.

Figura 1 – História da pipa

Fonte: Disponível em (10).

Empinar pipas tornou-se um passatempo de crianças e adultos. Logo espalhou-se pela Ásia e chegou à Europa levado por mercadores árabes. Na Europa do século XII, as crianças já brincavam com pipas às quais acrescentavam cordas para as fazer voar.

Mas as pipas também foram usadas com função militar como se vê no manuscrito técnico de guerra alemão chamado Bellifortis escrito em 1402 por Konrad Kyeser. Nele há uma ilustração de um cavaleiro levando uma pipa em forma de dragão talvez com a função de amedrontar o inimigo.

Ao longo dos anos, as pipas foram usadas na ciência, meteorologia, construção civil e fotografia. O político e inventor americano Benjamin Franklin usou uma pipa presa com um fio metálico para provar que os raios são descargas elétricas. Essa experiência serviu-lhe para inventar o para-raios em 1752.

Figura 2 – História da pipa

Fonte: Disponível em (10).

A história das pipas é recheada de mistérios, de lendas, símbolos e mitos, mas principalmente de muita magia, beleza e encantamento. Tudo deve ter começado quando o homem primitivo se deu conta de sua limitação diante da capacidade de voar dos pássaros. (...) Provavelmente, as pipas nascem desta tentativa frustrada de voar, quando o homem transferiu para um artefato de varetas, papel, cola e linha sua vontade intrínseca de planar, de alçar voo.

Teorias, lendas e suposições tendem a demonstrar que o primeiro voo de uma pipa ocorreu em tempos e em várias civilizações diferentes, mas, com toda certeza, a data aproximada gira em torno de 200 anos antes de Cristo. O local: China. (...) A histórias das pipas data de muitos séculos e se confunde com a própria história da civilização, sendo utilizada como brinquedo, instrumento de defesa, arma, objeto artístico e de ornamentação.

Conhecido como quadrado, pipa, papagaio, pandorga, barrilete ou outro nome dependendo da região ou país, ela é um velho conhecido de brincadeiras infantis. Todos nós, com maior ou menor sucesso, já tentamos empinar uma pipa. (...) Além do aspecto puramente lúdico, de lazer e encantamento diante das possibilidades de fazer com que os ventos trabalhem a nosso favor, as pipas, ao longo da história, tiveram uma importância fundamental nas pesquisas e descobertas científicas.

O inglês Roger Bacon, no ano de 1250, escreveu um longo estudo sobre as asas acionadas por pedais, tendo como base experiências realizadas com pipas. O gênio italiano Leonardo Da Vinci, em 1496, fez projetos teóricos com nada menos que 150 máquinas voadoras, também baseados na potencialidade das pipas.

No século 18, época das grandes descobertas, o brasileiro Bartolomeu de Gusmão mostrou os projetos de sua aeronave Passarola ao rei de Portugal, graças a estudos conseguidos através das pipas.

Em 1749, na Grã Bretanha, Alexandre Wilson empinou um série de seis pipas presas em uma mesma linha (trem), cada qual carregando um termômetro, conseguindo determinar as variações de temperatura, em função das diferentes altitudes. Em 1752 uma experiência de Benjamim Franklin demonstrou definitivamente a importância das pipas na história da Ciência. Prendendo uma chave ao fio da pipa, ele a empinou num dia de tempestade. Acontece que a eletricidade das nuvens foi captada pela chave e pelo fio molhado, descobrindo assim o para-raios.

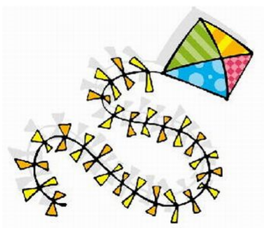
George Cayley, em 1809, realizou, através das pipas, o primeiro pouso acontecido na História, experiência com fundamentos aeronáuticos que mais tarde seria utilizado pela NASA através do engenheiro americano Francis M. Rogallo com as naves Apolo, que criou assim os paraquedas ascensionais (parawings), que permitem ainda hoje um perfeito controle ao retorno à terra das cápsulas espaciais. Foi através das pipas que o grande Santos Dumont conseguiu voar no famoso 14 Bis que, no final das contas não deixa de ser uma sofisticada pipa com motor.

Em 1894, B.F.S. Baden Pawell o irmão mais novo de Baden Pawell, o fundador do escotismo, elevou-se três metros do chão por um trem de quatro pipas hexagonais com 11 metros de envergadura cada, tornando-se o primeiro homem erguido do chão com auxílio de pipas, fato que mais tarde seria repetido em escala militar por exército durante a 1ª Grande Guerra Mundial.

Em 12 de dezembro de 1921, Marconi utilizou pipas para fazer experiências com a transmissão de rádio, teste que, mais tarde, seriam utilizados por Graham Bell em seu invento, o telefone.

Mais recentemente, durante a II Guerra Mundial, uma pipa em forma de águia seria empregada pelos alemães para observar a movimentação das tropas aliadas ou como alvo móvel para exercícios de tiros. Nós brasileiros conhecemos as pipas através dos colonizadores portugueses por volta de 1596 que, por sua vez, as conheceram através de suas viagens ao Oriente.

Figura 3 – História da pipa



Fonte: Disponível em (11).

Um fato pouco conhecido de nossa História deu-se no Quilombo dos Palmares, quando sentinelas avançadas anunciavam por meio de pipas quando algum perigo se aproximava - mais uma prova de que a pipa era conhecida na África há muito mais tempo, pois os negros já a cultuavam como oferenda aos deuses. (...) Através desses fatos temos uma gama muito grande de utilização das pipas através dos tempos. Elas simbolizam o poder espiritual dos homens, um grande instrumento na busca de novas descobertas e objeto capaz de tornar realidade o antigo desejo de voar, o sonho de Ícaro e de toda humanidade. Atualmente, as pipas são usadas para introduzir o estudo do ar, algumas de suas propriedades, os ventos, formação das nuvens entre outros temas.

Desta feita, podemos utilizar a pipa como instrumento de apoio pedagógico elemento facilitador no processo ensino aprendizagem da geometria trabalhando conceitos da geometria plana com teorias de triângulos e quadrilátero.

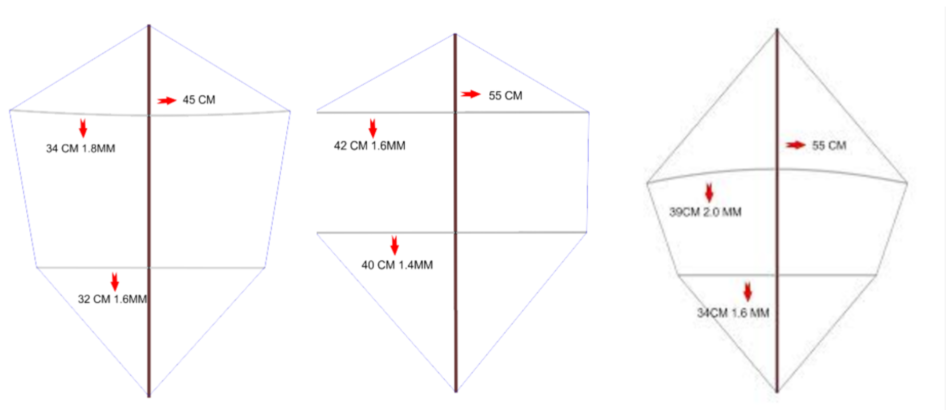
1.2.1 A utilização das teorias de Geometria Plana na Construção das Pipas

A abordagem sobre o triângulo para alunos do 8º ano possui uma relevância significativa, pois, a partir desse momento, os conceitos estudados sobre triângulos transcendem uma compreensão inicial e adentram um nível de maior profundidade e complexidade. Nesse estágio, os alunos começam a entender desde a condição de existência de um triângulo até as propriedades relacionadas às cevianas e pontos notáveis. O estudo dos principais ângulos, como 30°, 45° e 60°, não apenas facilita o entendimento do conteúdo, mas também prepara os alunos para futuros conceitos, como a trigonometria, e para o estudo das áreas de figuras planas no 9º ano.

O uso do modelo de pipa pode servir para explorar essas propriedades de forma prática. Ao traçar um segmento de reta e utilizar o esquadro, os alunos podem refletir sobre a possibilidade de traçar outras retas paralelas ou perpendiculares, consolidando os conceitos de forma experimental.

Além disso, ao introduzir a mediatriz de um segmento de reta, os alunos aprenderão que é a reta perpendicular ao segmento, que passa pelo ponto médio, dividindo-o em dois segmentos congruentes segundo (12). A construção da mediatriz pode ser realizada utilizando régua e compasso, construindo esse modelo de pipa da Figura.

Figura 4 – Pipa



Fonte: (13).

O objetivo desta próxima etapa de teorias é fundamentar o professor com teorias e algumas demonstrações, mesmo que a série não exija tanta demonstração. No entanto, pode haver algum aluno com muitas perguntas a serem respondidas pelo professor e essa parte do trabalho deverá auxiiar nessa possível demanda do aluno. Segue uma sugestão de livro para estudo e tive o cuidado de selecionar as teorias que o professor poderá abordar à medida que a pipa é construída. Toda a teoria que se segue, estudamos e nos baseamos no livro. (12) volume 9.

1.3 TRIÂNGULO

Nesta etapa, o professor pode integrar conceitos teóricos abordados em sala de aula à prática de construção de pipas. Durante a elaboração da pipa, o professor pode explorar a condição de existência de um triângulo e a desigualdade triangular.

À medida que diferentes tipos de triângulos emergem na construção – como triângulos retângulos, obtusângulos e acutângulos –, o professor pode aprofundar a classificação dos triângulos quanto aos ângulos. Da mesma forma, a ocorrência de triângulos isósceles, equiláteros e escalenos permite ao professor discutir a classificação dos triângulos quanto aos lados. Em particular, a teoria do triângulo equilátero pode ser contextualizada e visualizada neste momento.

Ainda, com o surgimento de triângulos congruentes, é possível abordar os casos de congruência de triângulos, conforme exemplificado e discutido no presente trabalho. A teoria apresentada está em consonância com as atividades propostas, visando auxiliar o professor no desenvolvimento e aprofundamento do estudo dos triângulos.

1.3.1 Conceito e Classificação

Definição:

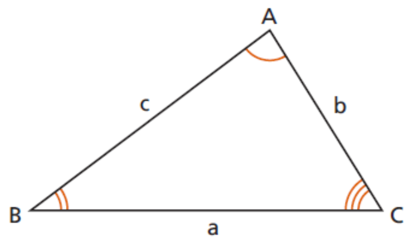
Dados três pontos, A, B e C, não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se **triângulo ABC**.

Notação:

$$\text{Triângulo ABC} = \triangle ABC$$

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$$

Figura 5 – Triângulo



Fonte: (12).

1.3.2 Classificação:

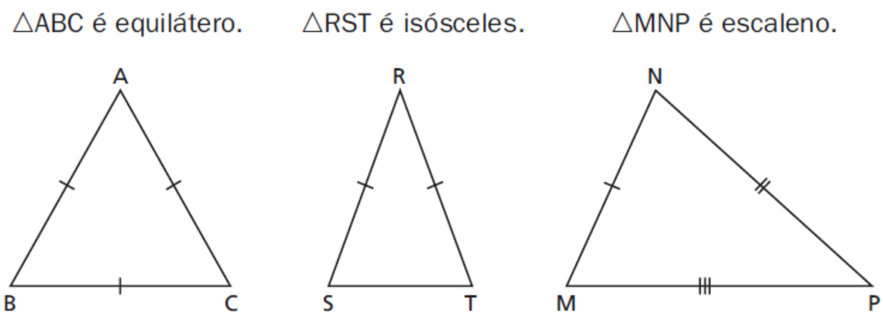
Quanto aos Lados, os triângulos se cassificam em:

Equilátero: Se, somente se, têm os três lados congruentes;

Isoscéles: Se, somente se, têm dois lados congruentes.

Escaleno: Se, somente se ,dois quaisquer lados não são congruentes.

Figura 6 – Classificação quanto aos lados



Fonte: (12).

Quanto aos ângulos os trângulos se classificam em:

Retângulo: Se, somente se , possui um ângulo reto ;

Acutângulo: Se, somente se,têm três ângulos agudos;

Obtusângulo: Se, e somente se , têm um angulo obtuso.

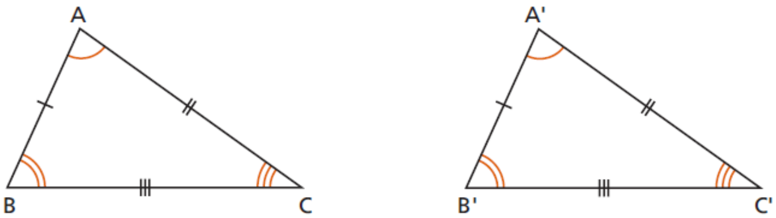
1.3.3 Congruência de triângulo

Definição:

Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- Seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;
- Seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

Figura 7 – Congruência LLL



Fonte: (12).

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \iff \begin{pmatrix} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \hat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \hat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \hat{C} \equiv \widehat{C'} \end{pmatrix}$$

1.3.4 Casos de congruência

A definição de congruência de triângulos dá todas as condições que se devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas condições (seis conguências: três entre lados e três entre ângulos) são totais. Existem "condições mínimas"para que dois tiângulos sejam congruentes. São chamados **casos** ou **critérios** de congruência.

1.3.5 1°Caso -LAL-postulado

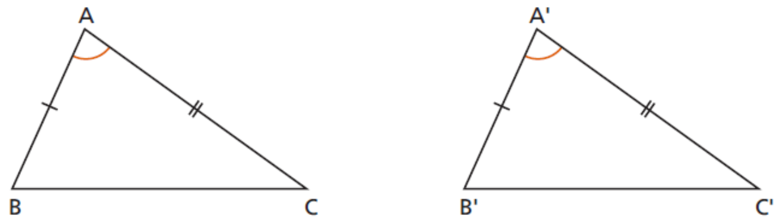
Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.

Esta proposição é um "postulado"e indica que , se dois triângulo têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então o lado restante e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes

Esquema do 1º caso:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{A} = \widehat{A'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{LAL}} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \hat{B} = \widehat{B'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \hat{C} = \widehat{C'} \end{array}\right.$$

Figura 8 – LAL



Fonte: (12).

1.3.6 Demonstração do Primeiro Caso de Congruência de Triângulos (LAL)

Considere dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$.

1. **Hipótese (Lado-Ângulo-Lado - LAL):** Assumimos que os seguintes elementos correspondentes são congruentes:

    - O lado $\overline{AB}$ do $\triangle ABC$ é congruente ao lado $\overline{A'B'}$ do $\triangle A'B'C'$, ou seja, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.
    - O ângulo $\hat{A}$ do $\triangle ABC$ é congruente ao ângulo $\hat{A}'$ do $\triangle A'B'C'$, ou seja, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$.
    - O lado $\overline{AC}$ do $\triangle ABC$ é congruente ao lado $\overline{A'C'}$ do $\triangle A'B'C'$, ou seja, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

    Podemos sintetizar essa hipótese da seguinte forma:

$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{cases}$$

2. **Conclusão:** Com base na hipótese LAL, podemos concluir que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes. Isso é denotado por:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

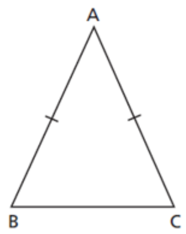
3. **Implicações da Congruência:** Se dois triângulos são congruentes, então todos os seus elementos correspondentes (lados e ângulos) são congruentes. Portanto, temos que:

$$\begin{cases} \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{cases}$$

TEOREMA DO TRIÂNGULO ISÓSCELES

Segundo (12)"Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes."

Figura 9 – Triângulo isósceles



Fonte: (12).

1.3.7 Demonstração da Propriedade dos Ângulos da Base de um Triângulo Isósceles

Um triângulo é chamado de isósceles se possuir pelo menos dois lados com medidas iguais. A propriedade fundamental dos triângulos isósceles é que os ângulos opostos aos lados de mesma medida (os ângulos da base) são congruentes.

Hipótese: Considere um triângulo $\triangle ABC$ no qual os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ têm a mesma medida. Ou seja:

$$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$$

(Este é o ponto de partida, a definição de triângulo isósceles para este caso específico.)

Tese: Nosso objetivo é demonstrar que os ângulos da base, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, são congruentes. Ou seja:

$$\hat{B} \equiv \hat{C}$$

Demonstração:

Para provar a tese, utilizaremos o critério de congruência Lado-Ângulo-Lado (LAL) aplicando-o ao próprio triângulo $\triangle ABC$, mas "associando"seus vértices de uma forma específica.

Considere o triângulo $\triangle ABC$. Vamos analisar a relação de congruência entre ele e "ele mesmo", mas com os vértices associados de uma maneira diferente.

1. **Triângulos a serem comparados:** Consideremos o triângulo $\triangle ABC$ e o triângulo $\triangle ACB$. Nesta comparação, associamos os vértices da seguinte forma:

    - A com A

- B com C
- C com B

2. **Análise dos elementos correspondentes (conforme a hipótese do triângulo isósceles):** Vamos verificar as condições para o critério LAL entre $\triangle ABC$ e $\triangle ACB$:

   - **Lado:** $\overline{AB}$ (do $\triangle ABC$) e $\overline{AC}$ (do $\triangle ACB$). Por hipótese (definição de triângulo isósceles), sabemos que:
   $$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$$
   - **Ângulo:** $\hat{A}$ (do $\triangle ABC$, também denotado por $B\hat{A}C$) e $\hat{A}$ (do $\triangle ACB$, também denotado por $C\hat{A}B$). O ângulo $\hat{A}$ é comum a ambos os "arranjos"do triângulo. Portanto:
   $$B\hat{A}C \equiv C\hat{A}B$$
   - **Lado:** $\overline{AC}$ (do $\triangle ABC$) e $\overline{AB}$ (do $\triangle ACB$). Novamente, por hipótese, sabemos que:
   $$\overline{AC} \equiv \overline{AB}$$

   Podemos sintetizar essas três condições para a aplicação do critério LAL:
   $$\text{Hipótese} \implies \begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{AC} \quad \text{(Lado)} \\ B\hat{A}C \equiv C\hat{A}B \quad \text{(Ângulo comum)} \\ \overline{AC} \equiv \overline{AB} \quad \text{(Lado)} \end{cases}$$

3. **Aplicação do Critério LAL:** Como satisfazemos as três condições (Lado-Ângulo-Lado) para a congruência entre $\triangle ABC$ e $\triangle ACB$, podemos afirmar que:
   $$\text{LAL} \implies \triangle ABC \equiv \triangle ACB$$

4. **Conclusão:** Se os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACB$ são congruentes, então todos os seus elementos correspondentes são congruentes. Em particular, os ângulos correspondentes são:

   - $\hat{A}$ do $\triangle ABC$ corresponde a $\hat{A}$ do $\triangle ACB$.
   - $\hat{B}$ do $\triangle ABC$ corresponde a $\hat{C}$ do $\triangle ACB$.
   - $\hat{C}$ do $\triangle ABC$ corresponde a $\hat{B}$ do $\triangle ACB$.

   Portanto, da congruência dos triângulos, segue que os ângulos da base são congruentes:
   $$\hat{B} \equiv \hat{C}$$

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

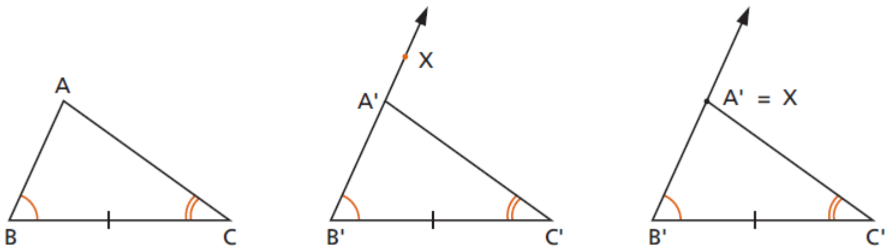
“Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles.”

1.3.8 2°Caso -ALA

"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses trîãngulos são congruentes"

Os ângulos adjacentes ao lado $\overline{BC}$ são $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$; os adjacentes ao lado $\overline{B'C'}$ são $\widehat{B'}$ e $\widehat{C'}$.

Figura 10 – ALA



Fonte: (12).

1.3.9 Demonstração do Critério de Congruência ALA (Ângulo-Lado-Ângulo)

O critério de congruência ALA afirma que:

Se dois ângulos e o lado compreendido entre eles de um triângulo são respectivamente congruentes a dois ângulos e o lado compreendido entre eles de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Hipótese

Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tais que:

- $\angle A \equiv \angle A'$
- $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$
- $\angle B \equiv \angle B'$

Expressamos isso como:

$$\begin{cases} \angle A = \angle A' & (1) \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} & (2) \\ \angle B = \angle B' & (3) \end{cases}$$

Tese:

Demonstrar que os triângulos são congruentes:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

1.3.10 Demonstração (por construção e aplicação do critério LAL)

1. **Construção de um ponto X:**
   Pela possibilidade de transportar segmentos, construa um ponto X sobre a semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ tal que:
   $$\overline{A'X} = \overline{AC} \quad (4)$$
   Considere o triângulo $\triangle A'XB'$.

2. **Aplicação do critério LAL em $\triangle ABC$ e $\triangle A'XB'$:** Verificamos:
   - $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ (hipótese 2)
   - $\angle A = \angle A'$ (hipótese 1)
   - $\overline{AC} = \overline{A'X}$ (construção 4)

   Assim, pelo critério LAL:
   $$\triangle ABC \equiv \triangle A'XB' \quad (5)$$

3. **Implicações da congruência:**
   Pela congruência dos triângulos:
   $$\angle B = \angle B'XA' \quad (6)$$

4. **Comparando os ângulos em B':**
   Pela hipótese (3), temos $\angle B = \angle B'$ e, pela (6), $\angle B = \angle B'XA'$. Logo:
   $$\angle B' = \angle B'XA'$$
   Como os ângulos são iguais e compartilham o lado $\overline{B'A'}$, as semirretas que definem $\angle B'$ e $\angle B'XA'$ coincidem. Assim, X deve coincidir com o ponto C', ou seja:
   $$X = C'$$

5. **Conclusão:**
   O triângulo $\triangle A'XB'$ é o triângulo $\triangle A'B'C'$. Como:
   $$\triangle ABC \equiv \triangle A'XB' \quad \text{e} \quad X = C',$$

então:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Portanto, está demonstrado o critério ALA.

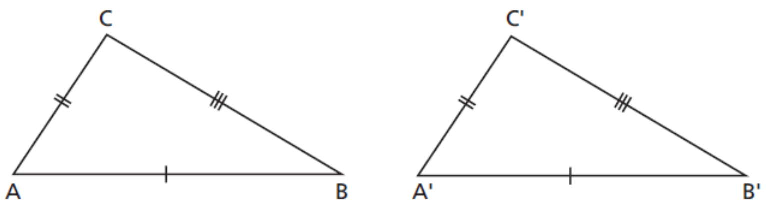
Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

Considerando um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$, basta observar os triângulos ABC e ACB e proceder de modo análogo ao do teorema direto.

1.3.11 3° Caso LLL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.

Figura 11 – LLL



Fonte: (12).

1.3.12 Demonstração do Caso de Congruência LLL (Lado-Lado-Lado)

O critério de congruência LLL estabelece que se os três lados de um triângulo são respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Hipótese Considere dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Assumimos que os lados correspondentes são congruentes:

- Lado $\overline{AB}$ do $\triangle ABC$ é congruente ao lado $\overline{A'B'}$ do $\triangle A'B'C'$. ($\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ ou $\overline{AB} = \overline{A'B'}$) (1)
- Lado $\overline{AC}$ do $\triangle ABC$ é congruente ao lado $\overline{A'C'}$ do $\triangle A'B'C'$. ($\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ ou $\overline{AC} = \overline{A'C'}$) (2)
- Lado $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$ é congruente ao lado $\overline{B'C'}$ do $\triangle A'B'C'$. ($\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ ou $\overline{BC} = \overline{B'C'}$) (3)

Podemos expressar a hipótese como:

$$\text{Hipótese:} \begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} & (1) \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} & (2) \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} & (3) \end{cases}$$

Tese: Nosso objetivo é demonstrar que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

1.3.13 Demonstração (por construção e aplicação do LAL)

A ideia é "transportar"o $\triangle ABC$ para a posição do $\triangle A'B'C'$ de tal forma que dois lados coincidam e então usar o caso LAL para provar a congruência.

1. **Construção de um ponto X:** No semiplano oposto ao de C' em relação à reta $A'B'$, vamos construir um ponto X tal que o ângulo $\angle XA'B'$ seja congruente ao ângulo $\angle CAB$ (ou $\hat{A}$), e o segmento $\overline{A'X}$ seja congruente ao segmento $\overline{AC}$.

   - $\angle XA'B' \equiv \angle CAB$ (4) (Pelo Postulado do Transporte de Ângulos)
   - $\overline{A'X} \equiv \overline{AC}$ (5) (Pelo Postulado do Transporte de Segmentos)

2. **Aplicação do Critério LAL em $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'X$:** Vamos comparar $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'X$:

   - **Lado:** $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (da hipótese (1)).
   - **Ângulo:** $\angle CAB \equiv \angle XA'B'$ (da nossa construção (4)).
   - **Lado:** $\overline{AC} \equiv \overline{A'X}$ (da nossa construção (5)).

   Portanto, pelo critério LAL, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'X$ são congruentes:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{AB} = \overline{A'B'} \quad (1) \\ \angle CAB = \angle XA'B' \quad (4) \\ \overline{AC} = \overline{A'X} \quad (5) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{LAL}} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'X \quad (6)$$

3. **Implicações da Congruência (6):** Se $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'X$, então todos os seus elementos correspondentes são congruentes. Em particular:

   - $\overline{BC} \equiv \overline{B'X}$ (7)

4. **Combinando informações sobre os lados:** Da nossa hipótese (3), sabemos que $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. Da implicação (7), sabemos que $\overline{BC} \equiv \overline{B'X}$. Por transitividade, temos que:

$$\overline{B'C'} \equiv \overline{B'X} \quad (8)$$

5. **Formação de Triângulos Isósceles:** Observe o triângulo $\triangle A'C'X$. Da nossa construção (5) e da hipótese (2), temos $\overline{A'X} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$. Portanto, $\overline{A'X} \equiv \overline{A'C'}$. Isso significa que $\triangle A'C'X$ é um triângulo isósceles com base $\overline{C'X}$. Logo, os ângulos da base são congruentes:

$$\angle A'C'X \equiv \angle A'XC' \quad (9)$$

Observe o triângulo $\triangle B'C'X$. Da implicação (8), temos $\overline{B'C'} \equiv \overline{B'X}$. Isso significa que $\triangle B'C'X$ é um triângulo isósceles com base $\overline{C'X}$. Logo, os ângulos da base são congruentes:

$$\angle B'C'X \equiv \angle B'XC' \quad (10)$$

6. **Análise da Soma/Diferença de Ângulos:** Vamos considerar o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{C'X}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$. Chamemos esse ponto de D. Dependendo se D é interno ou externo ao segmento $\overline{A'B'}$, teremos uma soma ou diferença de ângulos. De (9) e (10), ao somar ou subtrair os ângulos apropriados, obtemos:

$$\angle A'C'B' \equiv \angle A'XB' \quad (11)$$

(Esta etapa é crucial e mais complexa na demonstração formal, envolvendo a posição de X e C' em relação à linha $A'B'$ e a aplicação de propriedades de ângulos adjacentes ou externos).

7. **Aplicação final do critério LAL:** Agora, vamos comparar $\triangle A'B'C'$ e $\triangle A'B'X$:

   - **Lado:** $\overline{A'C'} \equiv \overline{A'X}$ (de (2) e (5), pois $\overline{A'C'} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{A'X}$).
   - **Ângulo:** $\angle A'C'B' \equiv \angle A'XB'$ (de (11)).
   - **Lado:** $\overline{B'C'} \equiv \overline{B'X}$ (de (3) e (7), pois $\overline{B'C'} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{B'X}$).

   Correção Importante na Sequência de Argumentos: A demonstração original parece aplicar LAL diretamente com $\triangle A'B'C'$ e $\triangle A'B'X$ usando $A'C' \equiv A'X$, $A'B'$ lado comum e $\angle C'A'B' \equiv \angle XA'B'$. Contudo, essa não é a forma como o LLL é usualmente provado (que é a partir do LAL).

   A linha original na imagem sugere o seguinte:

$$(6), (11), (8) \implies \triangle A'B'C' \equiv \triangle A'B'X \xrightarrow{(7)} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

   Isso significa:

   - $\overline{A'C'} \equiv \overline{A'X}$ (vem de (2) e (5))
   - $\angle A'C'B' \equiv \angle A'XB'$ (vem de (11))
   - $\overline{B'C'} \equiv \overline{B'X}$ (vem de (3) e (7))

Estes três elementos correspondem a um caso de congruência. Notamos que são Lado-Ângulo-Lado, mas o ângulo está no meio dos lados que estamos usando (o ângulo no vértice C' ou X). Isso não é ALA diretamente, mas sim LAL (se focarmos em $\overline{A'C'}$ e $\overline{B'C'}$ e o ângulo entre eles, que seria $\hat{C}'$, ou em $\overline{A'X}$ e $\overline{B'X}$ e o ângulo $\hat{X}$).

Vamos reajustar o passo final para ser mais direto:

Se $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'X$ (de (6)), e já temos que $X = A'$ (o que é o objetivo da demonstração), então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

O caminho mais comum para provar LLL é usar o LAL desta forma: Como $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'X$ (de (6)), sabemos que:

- $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (Hipótese (1))
- $\overline{AC} \equiv \overline{A'X}$ (Construção (5))
- $\angle A \equiv \angle XA'B'$ (Construção (4))
- $\overline{BC} \equiv \overline{B'X}$ (Consequência da congruência (7))
- $\angle B \equiv \angle B'$ (Consequência da congruência)
- $\angle C \equiv \angle X$ (Consequência da congruência)

O ponto crucial da demonstração LLL é mostrar que X coincide com A'. Se X não coincidisse com A', então A' e X estariam em lados opostos de $B'C'$ (se D fosse externo), ou A' e X estariam no mesmo lado de $B'C'$. A igualdade dos ângulos da base dos triângulos isósceles $\triangle A'C'X$ e $\triangle B'C'X$ (resultantes de $A'X = A'C'$ e $B'X = B'C'$) leva a uma contradição a menos que A' e X coincidam.

Se X coincide com A', então a nossa construção de $\triangle A'B'X$ é, na verdade, $\triangle A'B'C'$. Portanto, da congruência $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'X$, segue diretamente que:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

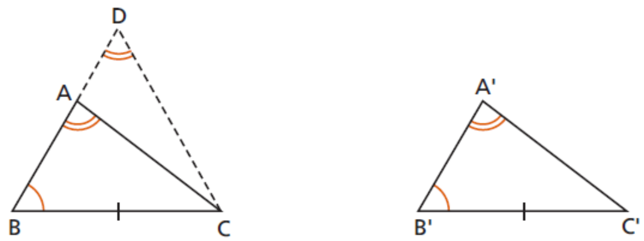
Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

1.3.14 4º caso de congruência — LAA$_0$

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

Hipótese	Tese
$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ (1), $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ (2), $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ (3)	$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

Figura 12 – $\mathrm{LAA_0}$



Fonte: (12).

Demonstração:

Há três possibilidades para $\overline{AB} = \overline{A'B'}$:

1ª) $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ 2ª) $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ 3ª) $\overline{AB} > \overline{A'B'}$

Se a 1ª se verifica, temos:

$$(\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \hat{B} \equiv \widehat{B'}, \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}) \xrightarrow{\text{LAL}} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Se a 2ª se verificasse, tomando um ponto D na semirreta $\overrightarrow{BA}$ tal que $\overline{BD} \equiv \overline{A'B'}$ (postulado do transporte de segmentos - item 18), teríamos:

$$(\overline{DB} \equiv \overline{A'B'}, \hat{B} \equiv \widehat{B'}, \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}) \xrightarrow{\text{LAL}} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Rightarrow \widehat{D} \equiv \hat{A} \overset{(3)}{\Rightarrow} \hat{A} \equiv \widehat{A'},$$

o que é absurdo, de acordo com o teorema do ângulo externo no $\triangle ADC$. Logo, a 2ª possibilidade não se verifica. A 3ª possibilidade também não se verifica, pelo mesmo motivo, com a diferença de que D estaria entre A e B.

Como só pode ocorrer a 1ª possibilidade, temos:

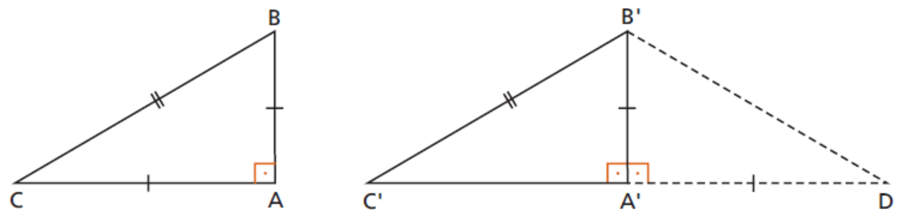
$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

Caso especial de congruência de triângulos retângulos

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

Figura 13 – Caso especial: Cateto-Hipotenusa (CH)



Fonte: (12).

1.3.15 Demonstração do Caso de Congruência CH (Cateto-Hipotenusa) para Triângulos Retângulos

O critério de congruência CH (Cateto-Hipotenusa) afirma que se a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo são respectivamente congruentes à hipotenusa e um cateto de outro triângulo retângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Hipótese: Considere dois triângulos retângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Assumimos que:

- Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ são ângulos retos (90 graus). ($\hat{A} \equiv \hat{A}'$ (retos)) (1)
- O cateto $\overline{AB}$ do $\triangle ABC$ é congruente ao cateto $\overline{A'B'}$ do $\triangle A'B'C'$. ($\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$) (2)
- A hipotenusa $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$ é congruente à hipotenusa $\overline{B'C'}$ do $\triangle A'B'C'$. ($\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$) (3)

Podemos expressar a hipótese como:

$$\text{Hipótese: } \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \quad \text{(retos)} \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{cases}$$

Tese: Nosso objetivo é demonstrar que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Demonstração:

A estratégia da demonstração é construir um triângulo auxiliar que seja congruente ao primeiro triângulo ($\triangle ABC$) usando o critério LAL, e então mostrar que este triângulo auxiliar é congruente ao segundo triângulo ($\triangle A'B'C'$).

1. **Construção de um Ponto Auxiliar D:** Na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{A'C'}$, tomamos um ponto D tal que o segmento $\overline{A'D}$ seja congruente ao segmento $\overline{AC}$.

$$\overline{A'D} = \overline{AC}$$

(Isso é permitido pelo Postulado do Transporte de Segmentos).

2. **Análise do Ângulo $\angle B'A'D$:** Como $\hat{A}'$ é um ângulo reto e a semirreta $\overrightarrow{A'D}$ é oposta a $\overrightarrow{A'C'}$, então o ângulo $\angle B'A'D$ também é um ângulo reto. (Forma um ângulo de 180 graus com $\angle B'A'C'$, sendo $\angle B'A'C'$ reto, $\angle B'A'D$ também será reto).

3. **Aplicação do Critério LAL em $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'D$:** Vamos comparar os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'D$:

   - **Lado:** $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (da hipótese (2)).
   - **Ângulo:** $\hat{A} \equiv \angle B'A'D$ (ambos são retos, da hipótese (1) e do passo 2).
   - **Lado:** $\overline{AC} \equiv \overline{A'D}$ (da nossa construção no passo 1).

   Pelo critério LAL (Lado-Ângulo-Lado), podemos concluir que $\triangle ABC$ é congruente a $\triangle A'B'D$:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{A'B'} \\ \hat{A} &= \angle B'A'D \quad \text{(retos)} \\ \overline{AC} &= \overline{A'D} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{LAL}} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'D \quad (4)$$

4. **Implicações da Congruência (4):** Se os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'D$ são congruentes, então todos os seus elementos correspondentes são congruentes. Em particular:

   - O lado $\overline{BC}$ é congruente ao lado $\overline{B'D}$.

$$\overline{BC} \equiv \overline{B'D} \quad (5)$$

5. **Análise do Triângulo $\triangle B'C'D$:** Da hipótese (3), sabemos que $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. Da implicação (5), sabemos que $\overline{BC} \equiv \overline{B'D}$. Por transitividade, concluímos que:

$$\overline{B'C'} \equiv \overline{B'D}$$

   Como o triângulo $\triangle B'C'D$ possui dois lados congruentes ($\overline{B'C'}$ e $\overline{B'D}$), ele é um triângulo isósceles.

6. **Triângulos Retângulos $\triangle A'B'C'$ e $\triangle A'B'D$:** Ambos $\triangle A'B'C'$ e $\triangle A'B'D$ são triângulos retângulos em A'. Eles compartilham o cateto $\overline{A'B'}$. Nós provamos que as hipotenusas são congruentes: $\overline{B'C'} \equiv \overline{B'D}$ (do passo 5). E também sabemos que $\overline{A'C'} \equiv \overline{A'D}$ (da construção do ponto D e da hipótese (2) de $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ – na

verdade, $\overline{A'D}$ foi construído igual a $\overline{AC}$, que é o cateto, mas o objetivo é que $\overline{A'D}$ seja congruente a $\overline{A'C'}$).

Correção e Ajuste da Lógica: O passo crucial aqui é que, sendo $\triangle B'C'D$ um triângulo isósceles com base $\overline{C'D}$ (por ter $B'C' \equiv B'D$), a altura relativa à base (que é $\overline{A'B'}$) deve ser a bissetriz do ângulo do vértice e a mediana da base. Como $\overline{B'A'}$ é perpendicular à reta que contém $\overline{C'D}$ (ambos ângulos em A' são 90 graus), $\overline{B'A'}$ é a altura. Em um triângulo isósceles, a altura relativa à base também é a mediana. Isso significa que A' é o ponto médio de $\overline{C'D}$. Se A' é o ponto médio de $\overline{C'D}$ e D foi construído na semirreta oposta a $\overrightarrow{A'C'}$ com $\overline{A'D} = \overline{AC}$, então: $\overline{A'C'} = \overline{A'D}$ (Pois C' está em uma direção e D na oposta, e A' está entre eles, se consideramos a linha CD). Com $\overline{A'D} = \overline{AC}$ (construção), e agora $\overline{A'C'} = \overline{A'D}$, segue que $\overline{A'C'} = \overline{AC}$.

7. **Conclusão Final (Aplicação do Caso LLL ou LAL):** Agora, temos para $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$:

   - $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ (Hipótese (2))
   - $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ (Acabamos de provar isso no passo anterior, a partir da construção e propriedades do isósceles.)
   - $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ (Hipótese (1), ambos retos).

   Portanto, pelo critério LAL (Lado-Ângulo-Lado), os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{A'B'} \\ \hat{A} &= \hat{A}' \\ \overline{AC} &= \overline{A'C'} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{LAL}} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

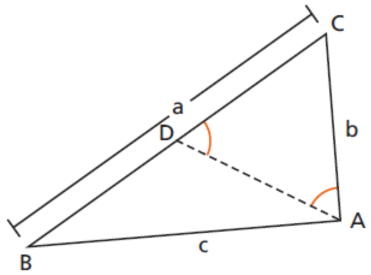
1.3.16 Desigualdades nos triângulos

1.3.16.1 Ao maior lado opõe-se o maior ângulo

Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

Hipótese	Tese
$\overline{BC} > \overline{AC}$	$B\widehat{A}C > A\widehat{B}C$
$a > b$	$\widehat{A} > \widehat{B}$

Figura 14 – Desigualdades nos triângulos



Fonte: (12).

Demonstração:

Consideremos D em $\overline{BC}$ tal que $\overline{CD} = \overline{CA}$.

1. Se $\overline{BC} > \overline{AC} \Rightarrow D$ é interno a $\angle C\hat{A}B \Rightarrow \angle C\hat{A}B > \angle C\hat{A}D$. Como $\triangle CAD$ é isósceles de base $\overline{AD}$, temos $\overline{CD} = \overline{CA} \Rightarrow \angle C\hat{A}D = \angle C\hat{D}A$. Portanto, $\angle C\hat{A}B > \angle C\hat{D}A$. (1)

2. $\angle C\hat{D}A$ é ângulo externo no $\triangle ABD \Rightarrow \angle C\hat{D}A > \angle A\hat{B}D = \angle A\hat{B}C$. (2)

De (1) e (2), vem:

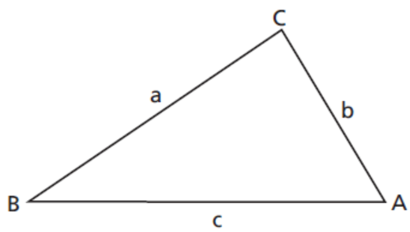
$\angle C\hat{A}B > \angle A\hat{B}C$ ou seja $\hat{A} > \hat{B}$.

Q.E.D. (*Quod Erat Demonstrandum* - O que era para ser demonstrado)

1.3.16.2 Ao maior ângulo opõe-se o maior lado

Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

Figura 15 – Desigualdades nos triângulos



Fonte: (12).

Hipótese	Tese
$B\widehat{A}C > A\widehat{B}C$	$\overline{BC} > \overline{AC}$
$\widehat{A} > \widehat{B}$	$a > b$

Demonstração:

Há três possibilidades para $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$:

1ª) $\overline{BC} < \overline{AC}$ ou 2ª) $\overline{BC} = \overline{AC}$ ou 3ª) $\overline{BC} > \overline{AC}$

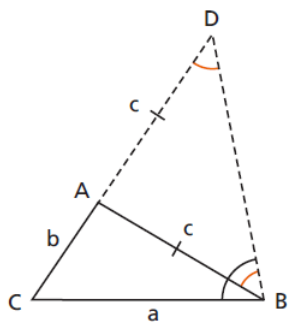
1ª) Se $\overline{BC} < \overline{AC}$, então, pelo teorema anterior, $\widehat{A} < \widehat{B}$, o que contraria a hipótese.

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

1.3.17 A desigualdade triangular

Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

Figura 16 – Desigualdades nos triângulos



Fonte: (12).

1.3.18 A Desigualdade Triangular

A **Desigualdade Triangular** é um dos princípios mais fundamentais da geometria euclidiana, que estabelece uma condição necessária para a existência de um triângulo. Ela afirma que, em qualquer triângulo, a soma das medidas de quaisquer dois lados deve ser sempre maior que a medida do terceiro lado. Intuitivamente, isso significa que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta, e, portanto, "dar a volta"pelos outros dois lados de um triângulo sempre será um caminho mais longo.

Definição Formal

Considerando um triângulo com vértices A, B e C, e os comprimentos de seus lados opostos como a, b e c (onde $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$), a Desigualdade Triangular pode ser formalmente expressa pelas seguintes três condições:

1. $a < b + c$
2. $b < a + c$
3. $c < a + b$

Qualquer conjunto de três segmentos de reta cujos comprimentos não satisfaçam simultaneamente essas três condições não pode formar um triângulo. Se, por exemplo, $a = b + c$, os três pontos seriam colineares (estariam em uma mesma linha reta), não formando um triângulo no sentido estrito.

Hipótese e Tese

Para formalizar a Desigualdade Triangular em termos de hipótese e tese, podemos apresentá-la da seguinte forma:

Hipótese	**Tese**
Vértices A, B, C não colineares	$\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$
ou	
Lados a, b, c de um triângulo	$a < b + c$ e permutações

Implicações Didáticas

A compreensão da Desigualdade Triangular é crucial para a formação de conceitos geométricos básicos. No contexto do ensino, a exploração desta propriedade pode ser realizada através de atividades práticas, como a construção de triângulos com materiais diversos .Para constatar essa teoria na prática, podemos usar materiais acessíveis como o bambu e a palha de coqueiro na construção da pipa. Ao manipular esses elementos, a gente consegue visualizar e comprovar as condições da Desigualdade Triangular de forma concreta, observando como os comprimentos dos pedaços de bambu e das nervuras da palha de coqueiro precisam se relacionar para que a estrutura do triângulo da pipa se forme corretamente.

1.4 Paralelismo

A construção de pipas oferece uma oportunidade rica para o ensino de conceitos de geometria plana, especialmente aqueles relacionados a paralelismo e perpendicularidade. Ao invés de apenas apresentar a teoria, o professor pode, com o auxílio de régua e compasso, guiar os alunos na montagem do esqueleto da pipa.

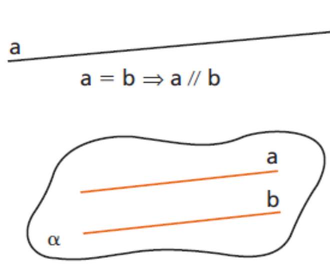
Durante esse processo prático, é possível ensinar os alunos a traçar retas paralelas e retas perpendiculares de forma concreta. Além disso, a estrutura da pipa permite a exploração de diversas relações angulares:

Ângulos alternos internos e externos: observando as linhas que se cruzam na pipa. Ângulos colaterais: percebendo as relações entre ângulos no mesmo lado de uma transversal. Ângulos correspondentes: identificando ângulos em posições semelhantes em relação a duas retas e uma transversal. Ângulos opostos pelo vértice (OPV): surgem naturalmente nos cruzamentos das varetas. Ângulos adjacentes, suplementares e complementares: a manipulação das varetas e linhas da pipa permite visualizar e discutir essas classificações. Essa abordagem lúdica e contextualizada facilita a assimilação dos conceitos, tornando a aprendizagem mais significativa. O trabalho com paralelismo na construção da pipa também prepara o terreno para a compreensão de quadriláteros, como paralelogramos e trapézios, onde as propriedades de retas paralelas são fundamentais. O professor pode, então, provar e aplicar as teorias de ângulos colaterais internos e externos diretamente nesses contextos, fortalecendo a conexão entre a prática da pipa e a teoria geométrica.

1.4.1 Conceitos e propriedade

1.4.1.1 Retas paralelas — definição

Figura 17 – Paralelismo



Fonte: (12).

Duas retas são paralelas (símbolo: //) se, e somente se, são coincidentes (iguais)

ou

são coplanares e não têm nenhum ponto comum.

Sejam a e b duas retas distintas, paralelas ou não, e t uma reta concorrente com a e b:

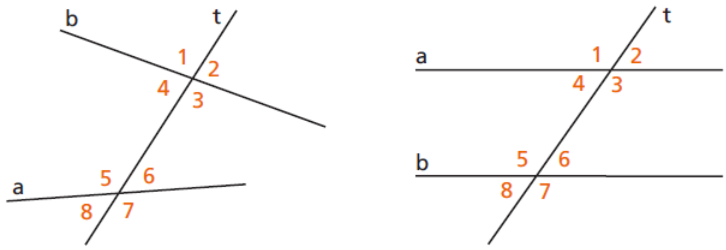
Retas concorrentes: são retas que se cruzam em um único ponto, chamado de ponto de concorrência. Essa interseção pode ocorrer de duas formas:

Retas perpendiculares: quando as retas concorrentes formam um ângulo de 90 graus no ponto de interseção.

Retas oblíquas: quando as retas concorrentes formam ângulos diferentes de 90 graus no ponto de interseção.

1º) t é uma transversal de a e b;

Figura 18 – Retas transversais



Fonte: (12).

2º) Dos oito ângulos determinados por essas retas indicados nas figuras, chamam-se ângulos

- Alternos: $\widehat{1}$ e $\widehat{7}$, $\widehat{2}$ e $\widehat{8}$, $\widehat{3}$ e $\widehat{5}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{6}$
- Correspondentes: $\widehat{1}$ e $\widehat{5}$, $\widehat{2}$ e $\widehat{6}$, $\widehat{3}$ e $\widehat{7}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{8}$
- Colaterais: $\widehat{1}$ e $\widehat{8}$, $\widehat{2}$ e $\widehat{7}$, $\widehat{3}$ e $\widehat{6}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{5}$

1º) Com mais detalhes podemos ter:

- Alternos
  - Alternos internos:
    $\widehat{3}$ e $\widehat{5}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{6}$
  - Alternos externos:
    $\widehat{1}$ e $\widehat{7}$, $\widehat{2}$ e $\widehat{8}$
- Colaterais
  - Colaterais internos:
    $\widehat{3}$ e $\widehat{6}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{5}$
  - Colaterais externos:
    $\widehat{1}$ e $\widehat{8}$, $\widehat{2}$ e $\widehat{7}$

2º) A congruência de dois ângulos alternos de um dos pares (por exemplo, $\widehat{1} = \widehat{7}$) equivale a:

a) a congruência dos ângulos de todos os pares de ângulos alternos

($\widehat{2} = \widehat{8}$, $\widehat{3} = \widehat{5}$, $\widehat{4} = \widehat{6}$);

b) a congruência dos ângulos de todos os pares de ângulos correspondentes

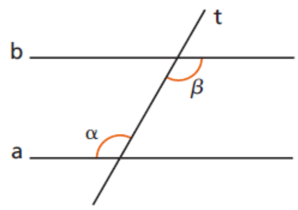
$(\widehat{1} = \widehat{5}, \widehat{2} = \widehat{6}, \widehat{3} = \widehat{7}, \widehat{4} = \widehat{8})$; e

c) a suplementaridade dos ângulos de todos os pares de colaterais

$(\widehat{1} + \widehat{8} = \widehat{2} + \widehat{7} = \widehat{3} + \widehat{6} = \widehat{4} + \widehat{5} = 180°)$.

Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas são paralelas.

Figura 19 – Retas paralelas cortadas por uma transversal



Fonte: (12).

$\Rightarrow \alpha = \beta,\ a//b$

Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos (ou os ângulos correspondentes) são congruentes.

Uma condição necessária e suficiente para duas retas distintas serem paralelas é formarem com uma transversal ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes.

1.4.2 Ângulo Externo

Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

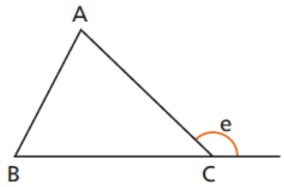
Hipótese	Tese
e é ângulo externo adjacente a $\widehat{C}$	$\widehat{e} = \widehat{A} + \widehat{B}$

Demonstração:

Por C conduzimos a reta $\overleftrightarrow{CD}$ paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, determinando os ângulos α e β caracterizados na figura:

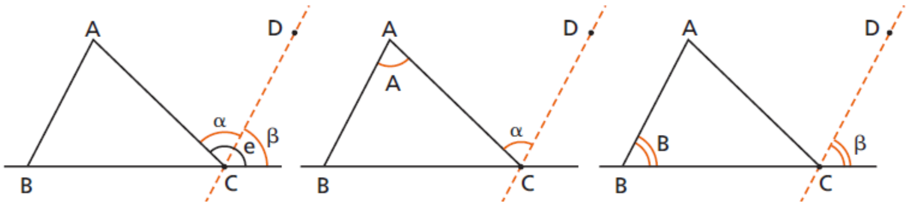
$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \alpha = \widehat{A} \quad \text{(alternos)}$$
$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \beta = \widehat{B} \quad \text{(correspondentes)}$$

Figura 20 – Ângulo externo



Fonte: (12).

Figura 21 – Demonstração



Fonte: (12).

Somando as duas relações acima, vem:

$$\alpha + \beta = \widehat{A} + \widehat{B}$$
$$\underbrace{\alpha + \beta}_{\hat{e}} = \widehat{A} + \widehat{B}$$

ou seja:

$$\hat{e} = \widehat{A} + \widehat{B}$$

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

1.4.3 Soma dos ângulos de um triângulo

A soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a 180°

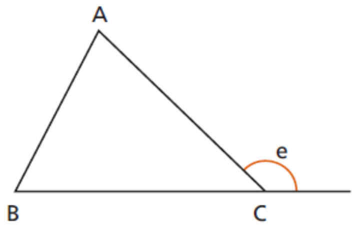
Hipótese	Tese
$\triangle ABC$ é um triângulo	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

Demonstração:

Sendo e o ângulo externo adjacente a $\hat{C}$ e aplicando o item anterior, vem:

$\hat{e}$ e $\hat{C}$ são suplementares $\implies \hat{e}+\hat{C} = 180° \xrightarrow{\text{teorema anterior}} \hat{e} = \hat{A}+\hat{B} \implies \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$

Figura 22 – Demonstração



Fonte: (12).

Considerando as medidas dos ângulos, temos:

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$$

que representaremos simplesmente por:

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°}$$

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

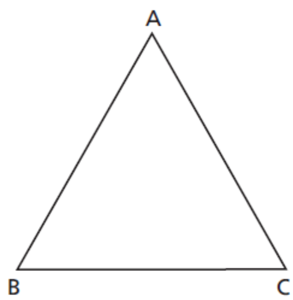
1.4.4 Triângulo Equilátero

Num triângulo equilátero cada ângulo mede 60°.

Demonstração:

Seja ABC o triângulo equilátero: AB=AC= BC Usando o teorema do triângulo isósceles , temos:

Figura 23 – Triângulo Equilátero



Fonte: (12).

$$CA = CB \implies \hat{A} = \hat{B}$$
$$AB = AC \implies \hat{B} = \hat{C}$$

$\implies \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ (item 76), vem: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$.

Ou seja:

Todo triângulo equilátero é equiângulo e cada ângulo mede 60°.

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

1.5 Perpendiculares

Duas retas são perpendiculares (símbolo: $\perp$) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes.

$$a \perp b$$

Duas semirretas são perpendiculares se, e somente se, estão contidas em retas perpendiculares e têm um ponto comum. Dois segmentos de reta são perpendiculares se, e somente se, estão contidos em retas perpendiculares e têm um ponto comum.

1.5.1 Retas oblíquas

Se duas retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que essas retas são **oblíquas**.

Definição:

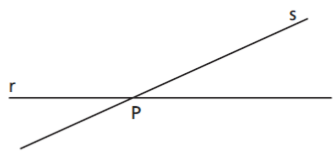
Duas retas r e s são ditas *oblíquas* se forem concorrentes, mas não perpendiculares.

Em notação matemática:

$$r \text{ e } s \text{ são oblíquas} \iff (r \cap s = \{P\} \text{ e } r \not\perp s).$$

Num plano, por um ponto dado de uma reta dada passa uma única reta perpendicular à reta dada.

Figura 24 – Retas oblíquas

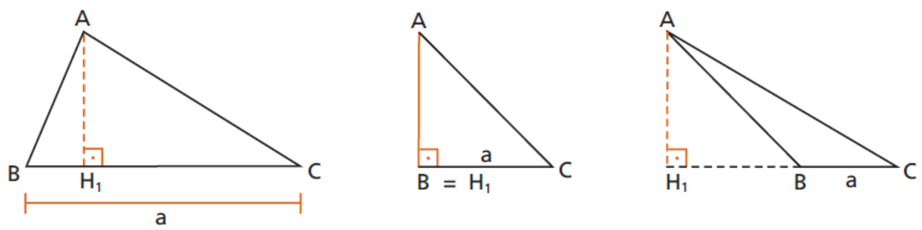


Fonte: (12).

1.5.2 Altura de um triângulo

Altura de um triângulo é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado.

Figura 25 – Altura



Fonte: (12).

H_1 é a interseção da reta $\overleftrightarrow{BC}$ com a perpendicular a ela, conduzida por A.

$\overline{AH_1}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$, ou

$\overline{AH_1}$ é a altura relativa ao lado a, ou ainda

$\overline{AH_1}$ é a altura relativa ao vértice A.

H_1 também é dito "pé da altura".

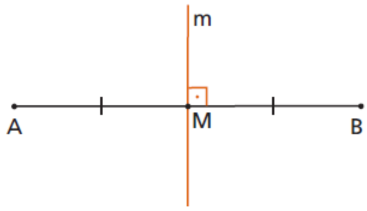
1.6 Mediatriz de um segmento

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.

1.6.1 A Mediatriz de um Segmento e seu Lugar Geométrico

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.

Figura 26 – Mediatriz



Fonte: (12).

Teorema da Mediatriz (Lugar Geométrico): A mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos equidistantes das extremidades desse segmento.

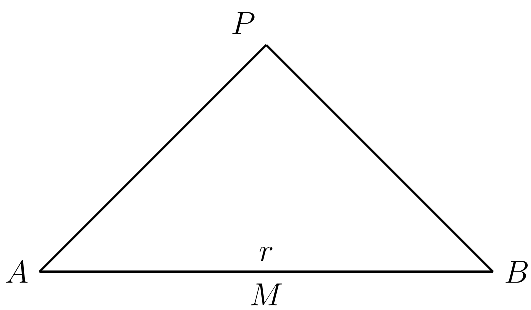
Para demonstrar este teorema, precisamos provar duas coisas:

1. Todo ponto que pertence à mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades desse segmento.
2. Todo ponto que é equidistante das extremidades de um segmento pertence à mediatriz desse segmento.

1.6.2 Demonstração da Parte 1: Ponto na Mediatriz $\implies$ Equidistante

Prova da Parte 1. Hipótese: Seja $\overline{AB}$ um segmento e M seu ponto médio. Seja r a reta mediatriz de $\overline{AB}$, ou seja, $r \perp \overline{AB}$ e $M \in r$. Seja P um ponto qualquer pertencente à reta r (e $P \neq M$).

Tese: $PA = PB$ (ou seja, P é equidistante de A e B).



Demonstração: Consideremos os triângulos $\triangle PMA$ e $\triangle PMB$.

1. $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$: Pois M é o ponto médio de $\overline{AB}$ por definição da mediatriz.

2. $\angle PMA \equiv \angle PMB$: Ambos são ângulos retos (90°), pois a reta r é perpendicular a $\overline{AB}$ por definição da mediatriz.

3. $\overline{PM} \equiv \overline{PM}$: Lado comum a ambos os triângulos.

Pelo critério de congruência LAL (Lado-Ângulo-Lado), podemos afirmar que:

$$\triangle PMA \equiv \triangle PMB$$

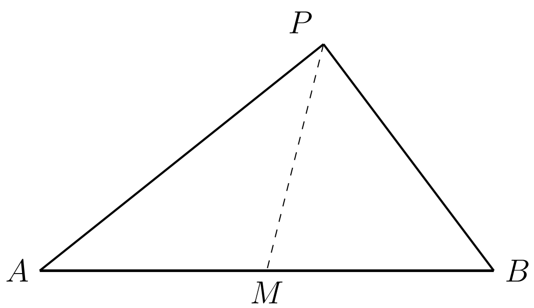
Como os triângulos são congruentes, seus lados correspondentes também o são. Portanto, $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$, o que significa que $PA = PB$.

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

1.6.3 Demonstração da Parte 2: Equidistante $\implies$ Ponto na Mediatriz

Prova da Parte 2. Hipótese: Seja $\overline{AB}$ um segmento. Seja P um ponto qualquer tal que $PA = PB$ (ou seja, P é equidistante de A e B).

Tese: P pertence à mediatriz de $\overline{AB}$. (Isto é, a reta que passa por P e pelo ponto médio de $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{AB}$).



Demonstração: Consideremos o triângulo $\triangle PAB$. Por hipótese, $PA = PB$, o que significa que $\triangle PAB$ é um triângulo isósceles com base $\overline{AB}$.

Vamos traçar o segmento $\overline{PM}$, onde M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Consideremos os triângulos $\triangle PMA$ e $\triangle PMB$.

1. $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$: Por hipótese (o ponto P é equidistante de A e B).

2. $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$: Pois M é o ponto médio de $\overline{AB}$ por construção.

3. $\overline{PM} \equiv \overline{PM}$: Lado comum a ambos os triângulos.

Pelo critério de congruência LLL (Lado-Lado-Lado), podemos afirmar que:

$$\triangle PMA \equiv \triangle PMB$$

Como os triângulos são congruentes, seus ângulos correspondentes também o são. Em particular, os ângulos $\angle PMA$ e $\angle PMB$ são congruentes.

$$\angle PMA \equiv \angle PMB$$

Além disso, esses dois ângulos são adjacentes e suplementares (formam um ângulo de 180° na reta $\overleftrightarrow{AB}$). Se dois ângulos são congruentes e suplementares, eles devem ser ângulos retos (90°). Portanto, $\angle PMA = 90°$, o que significa que $\overline{PM}$ é perpendicular a $\overline{AB}$.

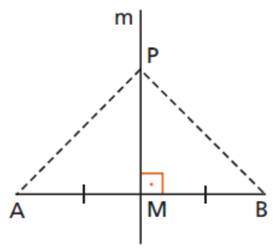
Como a reta $\overleftrightarrow{PM}$ (que contém P) passa pelo ponto médio M de $\overline{AB}$ e é perpendicular a $\overline{AB}$, por definição, a reta $\overleftrightarrow{PM}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$. Assim, o ponto P pertence à mediatriz de $\overline{AB}$.

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

Conclusão: As duas partes da demonstração, tomadas em conjunto, provam que a mediatriz de um segmento é, de fato, o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes das extremidades desse segmento.

Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades do segmento.

Figura 27 – Mediatriz



Fonte: (12).

$(m$ é mediatriz de $\overline{AB}, P \in m) \implies PA = PB$

Note que, se $P = M$, a propriedade também vale.

1.7 Quadriláteros Notáveis

Conforme o processo de construção da pipa avança, as relações fundamentais de retas paralelas e perpendiculares e a formação de triângulos gradualmente dão lugar a estruturas mais complexas, como os quadriláteros. Este estágio da atividade didática com a pipa é particularmente propício para aprofundar o estudo dessas figuras planas.

Ao observar o esqueleto de uma pipa clássica, como o modelo hexagonal, a emergência de retângulos se torna evidente. Tal percepção permite ao professor não apenas introduzir a classificação dos quadriláteros, mas também explorar suas propriedades de forma empírica. Por exemplo, a visualização dos lados opostos paralelos em um retângulo reforça o conceito de paralelogramo. A medição e comparação das diagonais na prática demonstram a propriedade de congruência, solidificando o entendimento de que as diagonais de um retângulo são iguais.

Além disso, a versatilidade da pipa como ferramenta didática se estende à construção de outras formas de quadriláteros, como o losango. Ao orientar os alunos na criação de uma pipa com esse formato, utilizando régua e compasso, o professor pode discutir as características específicas do losango, como seus quatro lados iguais e diagonais perpendiculares que se bissectam. A manipulação desses elementos no contexto de um projeto concreto não só facilita a absorção do conhecimento teórico, mas também promove a capacidade do aluno de articular e aplicar as propriedades geométricas estudadas, transcendo a memorização para uma compreensão mais profunda e duradoura. Esta abordagem alinha-se com as perspectivas de autores como [cite aqui um autor que defenda o ensino contextualizado ou por projetos, ex: John Dewey, ou um autor da educação matemática que valorize a construção e a experimentação], que preconizam o aprendizado ativo e significativo."

Tomando como base (1) que preconiza o conceito da zona de desenvolvimento proximal e outros seguidores que amplia e foca a construção do saber como marco principal para o sucesso do processo ensino aprendizagem. Essa estrutura mostra como a pipa pode ser uma ferramenta progressiva no ensino da geometria, desde conceitos mais simples até os mais complexos.

1.8 Quadrilátero — Definição e elementos

Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um **quadrilátero**.

Quadrilátero ABCD = ABCD = $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$

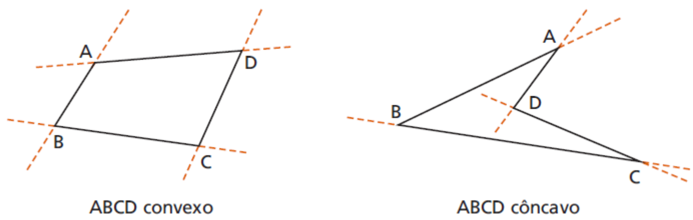
O quadrilátero é um polígono simples de quatro lados.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ são os **lados**,

$\hat{A} = D\hat{A}B$, $\hat{B} = A\hat{B}C$, $\hat{C} = B\hat{C}D$ e $\hat{D} = C\hat{D}A$ são os **ângulos** e

$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as **diagonais** do quadrilátero ABCD.

Figura 28 – Quadriláteros



Fonte: (12).

Um quadrilátero tem 2 diagonais ($d = 2$), soma dos ângulos internos igual a 360° e soma dos ângulos externos também igual a 360°.

1.8.1 Quadriláteros notáveis — Definições

Os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados.

1.9 Trapézio

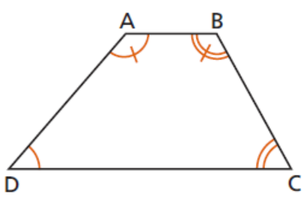
Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui **dois lados paralelos.**

ABCD é trapézio $\iff$ ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ou $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$).

Os lados paralelos são as bases do trapézio.

De acordo com os outros dois lados não bases, temos:

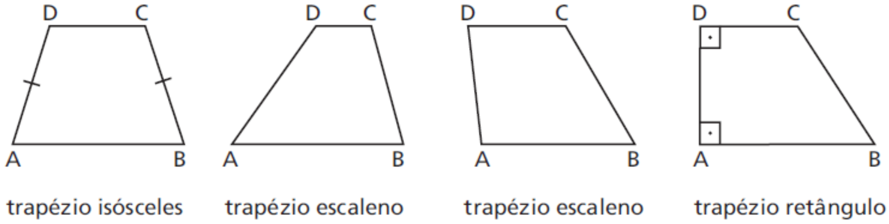
Figura 29 – Trapézio



Fonte: (12).

1. trapézio isósceles, se estes lados são congruentes;
2. trapézio escaleno, se estes lados não são congruentes.
3. Trapézio retângulo (ou birretângulo) é um trapézio que tem dois ângulos retos.

Figura 30 – Trapézio



Fonte: (12).

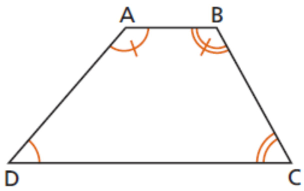
1.9.1 Propriedades dos trapézios

1.9.1.1 Trapézio qualquer

Em qualquer trapézio ABCD (notação cíclica) de bases AB e CD temos:

$$\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

Figura 31 – Trapézio



Fonte: (12).

De fato,

$$(\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AD} \text{ transversal}) \implies \hat{A} + \hat{D} = 180°$$
$$(\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BC} \text{ transversal}) \implies \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

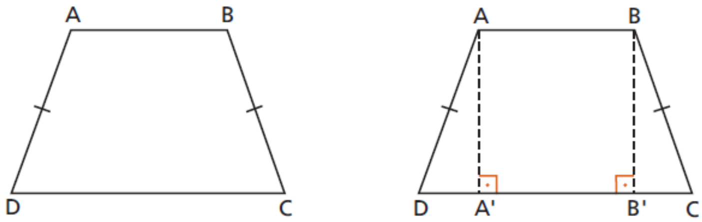
$$\implies \hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

1.9.2 Trapézio isósceles

Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.

Hipótese	Tese
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são bases do trapézio isósceles	$\hat{C} = \hat{D}$ e $\hat{A} = \hat{B}$

Figura 32 – Trapézio



Fonte: (12).

Demonstração:

1º) Tracemos as perpendiculares às bases pelos vértices A e B da base menor, obtendo os pontos A' e B' na base maior $\overline{CD}$. Notemos que $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ por serem distâncias entre retas paralelas.

2º) Os triângulos retângulos AA'D e BB'C são congruentes pelo caso especial visto que $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ (cateto) e $\overline{AD} = \overline{BC}$ (hipotenusa). Daí obtemos $\hat{C} = \hat{D}$.

3º) Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares de $\hat{D}$ e $\hat{C}$, respectivamente, temos: $\hat{A} = \hat{B}$.

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

Observação:

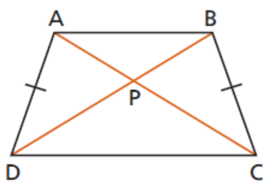
Da congruência dos triângulos AA'D e BB'C decorre também que $\overline{A'D} = \overline{B'C}$, o que nos permite enunciar:

As projeções ortogonais dos lados não bases de um trapézio isósceles, sobre a base maior, são congruentes.

1.9.3 Trapézio isósceles — Diagonais congruentes

As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Figura 33 – Trapézio



Fonte: (12).

Hipótese	Tese
ABCD é trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$	$\overline{AC} = \overline{BD}$

Demonstração:

Observemos os triângulos ADC e BCD:

$(\overline{AD} = \overline{BC}, \hat{D} = \hat{C}, \overline{DC} = \overline{CD}) \xrightarrow{\text{LAL}} \triangle ADC \equiv \triangle BCD \implies \overline{AC} = \overline{BD}$

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

Nota:

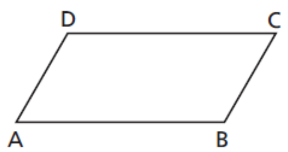
Da congruência acima obtemos $A\hat{C}D = B\hat{D}C$. Daí decorre que os triângulos PCD e PAB são isósceles com bases CD e AB, sendo P o ponto onde as diagonais se cortam.

1.10 Paralelogramo

Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui os **lados opostos paralelos**.

ABCD é paralelogramo $\iff \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Figura 34 – Paralelogramo



Fonte: (12).

1.10.1 Propriedades dos paralelogramos

1.10.1.1 Ângulos opostos congruentes

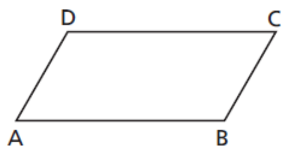
Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Hipótese	Tese
ABCD é paralelogramo	$\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$

Demonstração:

$$\text{ABCD é paralelogramo} \implies \left\{ \begin{matrix} \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC} \implies \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \\ \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \implies \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \end{matrix} \right\} \implies \hat{A} = \hat{C}$$

Figura 35 – Paralelogramo



Fonte: (12).

Analogamente para $\hat{B} = \hat{D}$. *Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)*

Todo quadrilátero convexo que tem ângulos opostos congruentes é paralelogramo.

Sendo ABCD um quadrilátero convexo,

Hipótese	Tese
$\hat{A} = \hat{C},\ \hat{B} = \hat{D}$	ABCD é paralelogramo

Demonstração:

$$\hat{A} = \hat{C}, \hat{B} = \hat{D} \implies \hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$$
$$\text{ABCD quadrilátero} \implies \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$$

$$\implies \hat{A} + \hat{B} = \hat{A} + \hat{D} = 180° \implies \overline{AD} \parallel \overline{BC} \text{ e } \overline{AB} \parallel \overline{CD} \implies \text{ABCD é paralelogramo.}$$

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

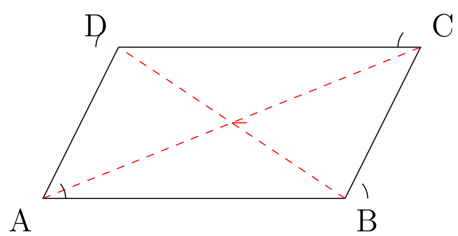
Consequência:

Todo retângulo é paralelogramo.

1.10.1.2 Lados opostos congruentes

Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.

Hipótese	Tese
ABCD é paralelogramo	$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$



Demonstração:

$$ABCD \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{D} \\ \overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow B\widehat{A}C \equiv D\widehat{C}A \end{cases}$$

$$(\overline{AC} \text{ comum}, B\widehat{A}C \equiv D\widehat{C}A, \widehat{B} \equiv \widehat{D}) \overset{LAAo}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle CDA \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{CD} \text{ e } \overline{BC} \equiv \overline{DA}.$$

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

Todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo.

Sendo ABCD um quadrilátero convexo,

Hipótese	Tese
$\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = \overline{DA}$	ABCD é paralelogramo

Demonstração:

$$\begin{aligned} &(\overline{AB} = \overline{CD}, \overline{BC} = \overline{DA}, \overline{AC} \text{ comum}) \\ \xrightarrow{LLL} &\triangle ABC \equiv \triangle CDA \\ \Rightarrow &\begin{cases} B\widehat{A}C = D\widehat{C}A \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ B\widehat{C}A = D\widehat{A}C \Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{BC} \end{cases} \\ \Rightarrow &ABCD \text{ é paralelogramo} \end{aligned}$$

Consequência:

Todo losango é paralelogramo.

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

1.10.2 Diagonais dividem-se ao meio

Em todo paralelogramo, as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios.

Hipótese Tese

$$(ABCD \text{ é paralelogramo}, \overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}) \Rightarrow (\overline{AM} = \overline{CM} \text{ e } \overline{BM} = \overline{DM})$$

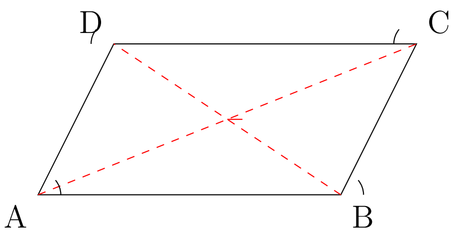
Demonstração:

$$ABCD \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD} \quad (1)$$

$$ABCD \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow B\widehat{A}C = D\widehat{C}A \quad (2) \text{ e } A\widehat{B}D = C\widehat{D}B \quad (3)$$

$$(2),(1),(3) \overset{ALA}{\Rightarrow} \triangle ABM \equiv \triangle CDM \Rightarrow (\overline{AM} = \overline{CM} \text{ e } \overline{BM} = \overline{DM})$$

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

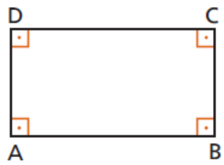


1.11 Retângulo

Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.

ABCD é retângulo $\iff \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$

Figura 36 – Paralelogramo



Fonte: (12).

1.12 Losango

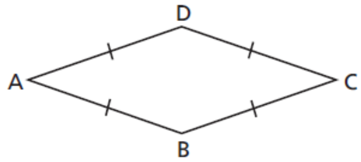
Um quadrilátero plano convexo é um losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes.

1.12.1 Losango — diagonais perpendiculares

Além das propriedades do paralelogramo, o losango tem a propriedade característica que segue.

Todo losango tem diagonais perpendiculares.

Figura 37 – Losango



Fonte: (12).

Hipótese	Tese
ABCD é losango	$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Demonstração:

ABCD é losango $\Longrightarrow$ ABCD é paralelogramo $\Longrightarrow$ $(\overline{AM} = \overline{CM}, \overline{BM} = \overline{DM})$.

Pelo caso LLL, temos as congruências:

$\triangle AMB \equiv \triangle AMD \equiv \triangle CMB \equiv \triangle CMD$

e, então, os ângulos de vértice M são congruentes e suplementares.

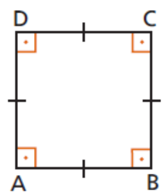
Logo, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

1.13 Quadrado

Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.

Figura 38 – Quadrado



Fonte: (12).

ABCD é quadrado $\Longleftrightarrow$ $(\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$ e $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA})$

1.13.1 Quadrado — diagonais congruentes e perpendiculares

Pelas definições, podemos concluir que:

Todo quadrado é retângulo e também é losango.

Portanto, além das propriedades do paralelogramo, o quadrado tem as propriedades características dos retângulos e do losango.

ABCD é quadrado $\Leftrightarrow$ (ABCD é paralelogramo, $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$).

1.13.2 Propriedades do retângulo, do losango e do quadrado

Em todo retângulo as diagonais são congruentes.

Hipótese	Tese
ABCD é retângulo	$\overline{AC} = \overline{BD}$

Demonstração:

- ABCD é retângulo $\implies$ ABCD é paralelogramo
- ABCD é paralelogramo $\implies$ $\overline{BC} = \overline{AD}$

$$(\overline{BC} = \overline{AD}, \hat{B} = \hat{A}, \overline{AB} \text{ comum.}) \overset{\text{LAL}}{\implies} \triangle ABC \equiv \triangle BAD \implies \overline{AC} = \overline{BD}$$

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

1.13.2.1 Retângulo — diagonais congruentes

Além das propriedade do paralelogramo, o retângulo tem a propriedade característica que segue.

Sendo ABCD um paralelogramo,

Hipótese	Tese
$\overline{AC} = \overline{BD}$	ABCD é retângulo

Demonstração:

ABCD é paralelogramo $\implies$ $\overline{BC} = \overline{AD}$.

$(\overline{AC} = \overline{BD}, \overline{BC} = \overline{AD}, \overline{AB} \text{ comum}) \overset{\text{LLL}}{\implies} \triangle ABC \equiv \triangle BAD \implies \hat{A} = \hat{B}$.

Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos colaterais em relação às paralelas AD e BC, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares.

Logo, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, sendo congruentes e suplementares, são retos.

No paralelogramo, os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são opostos respectivamente a $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e, portanto, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ também são retos.

Então:

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$ (são todos retos) $\Longrightarrow$ ABCD é retângulo.

Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum - O que era para ser demonstrado)

Notemos, em resumo, que se um quadrilátero convexo:

- *tem as diagonais que se cortam ao meio, então é um paralelogramo;*
- *tem diagonais que se cortam ao meio e são congruentes, então é um retângulo;*
- *tem diagonais que se cortam ao meio e são perpendiculares, então é um losango;*
- *tem diagonais que se cortam ao meio, são congruentes e são perpendiculares, então é um quadrado.*

Ao longo da aula, os alunos terão a oportunidade de aplicar esses conceitos de forma integrada, relacionando-os à geometria de figuras planas, como o triângulo equilátero, o triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras. Segundo (12), o teorema de Pitágoras afirma que :

Eu, como professor, senti dificuldade em ensinar toda essa teoria em sala de aula, pois os alunos do 8º ano do ensino fundamental II têm, em média, 13 e 14 anos, e a imaturidade existente nessa idade é muito grande. A quantidade de teorias tornava a aula monótona, causando muita dispersão e um gasto de energia muito grande da minha parte no controle da turma, além de teorias que levavam mais de 6 meses para serem vistas em sala de aula. Pensando nisso, um belo dia, estava em uma praia quando me deparei com um vendedor de pipas com várias delas em uma linha, percorrendo a beira da praia. Lembrei-me de quando era criança e das várias vezes em que eu e meu grupo de amigos da cidade de Olinda fazíamos essas pipas. Comecei a observar as formas das pipas do vendedor, comprei uma delas e, diante da dificuldade que estava tendo em ministrar minhas aulas, pensei: 'Vou construir uma delas na sala com os meninos, e, à medida que for construindo, vou ensinando de forma prática o máximo de teorias que eu puder.' Deu tão certo que os alunos prestaram muita atenção e, na próxima aula, pedi que eles mesmos construíssem suas pipas em grupo. Fiquei muito feliz em ver a turma toda separada em grupos e como eles se ajudavam e comprovavam, à medida que construíam, as teorias que em outro momento eram tão difíceis para mim de ensinar. O trabalho foi um sucesso. Nos próximos anos, estruturei todo o trabalho, criei exposições e competições de qual pipa era a melhor, envolvendo toda a comunidade escolar no processo. Todo o meu trabalho e a evolução dele seguem para você, professor, como um relato de experiência e como sugestão para engrandecer e tornar a geometria um encanto para os seus alunos.

2 Relato de Experiência

Nosso principal objetivo neste trabalho é compartilhar uma experiência prática e, com isso, orientar outros professores em cada etapa do processo. Queremos que eles se sintam confiantes para replicar o que fizemos, desde a preparação e manuseio dos materiais até a aplicação em sala de aula. Para alcançar isso, nossa proposta integra de forma coesa a teoria e a prática, buscando demonstrar como os conceitos se concretizam.

Para facilitar a vida do docente, produzimos vídeos e organizamos todos os recursos de maneira intuitiva, mostrando como eles podem ser aplicados em sala de aula. Pensando na robustez do nosso trabalho, a pesquisa que realizamos segue um padrão formal, sendo metódica, sistemática e empírica. Essa abordagem é crucial, pois é o rigor metodológico que permite a reprodutibilidade e a avaliação crítica de qualquer pesquisa.

A Essência da Nossa Investigação:

Nossa análise possui uma natureza qualitativa. Isso significa que nossa preocupação maior não foi apenas quantificar, mas sim compreender o significado e a profundidade das informações que coletamos. Buscamos os detalhes e a riqueza explicativa, o que nos permitiu uma visão mais aprofundada da experiência.

Em relação à classificação, nossa pesquisa se mostrou descritiva, ao delinear o fenômeno observado, e explicativa, na medida em que buscava responder aos questionamentos que nortearam nosso trabalho. Para embasar nossas conclusões, recorremos a diversas fontes: realizamos uma pesquisa bibliográfica extensiva, consultando livros, artigos e periódicos especializados, e também utilizamos recursos digitais em uma abordagem telematizada, buscando informações através de computadores e telecomunicações.

Detalhes da Nossa Experiência Educacional:

Ao longo do projeto, abordamos e detalhamos uma série de aspectos práticos e teóricos, que acreditamos serem essenciais para o professor. Começamos com as recomendações de segurança e cuidados no manuseio de materiais, como tesouras e compassos, e os cuidados específicos ao empinar pipas.

Em seguida, mergulhamos no planejamento e preparação, que incluiu o estudo da condição de existência de um triângulo, o traçado de retas paralelas e perpendiculares, a construção de mediatrizes e perpendiculares na extremidade. Demonstramos, inclusive, como traçar retas paralelas com o auxílio de esquadros. A parte prática foi muito rica, com a construção de pipas utilizando palha de coqueiro, a criação do modelo geométrico e a decoração das pipas. O momento culminante foi o empinamento da pipa, onde os alunos escolheram o local adequado e vivenciaram essa etapa, com toda a documentação do processo sendo realizada.

O Relato de Experiência como Ponte para o Conhecimento:

Assumimos o relato de experiência como a modalidade central do nosso trabalho, por entender que a experiência é, de fato, o ponto de partida fundamental para a aprendizagem. Nesse sentido, foi crucial garantir que a escrita mantivesse uma perspectiva acadêmica. Discutimos, então, os pressupostos teóricos e estruturantes que guiam a elaboração de relatos de experiências colaborativos, sempre com o foco na construção de conhecimento. Metodologicamente, este estudo se configura como um ensaio acadêmico-científico.

Nossa principal contribuição reside na apresentação de um roteiro estruturado para a descrição e a crítica reflexiva da experiência relatada. Sugerimos que o relato seja composto por quatro tipos de descrição: informativa, para contextualizar os fatos; referenciada, para dialogar com a teoria; dialogada, para expor as interações e discussões; e crítica, para analisar os pontos fortes e as oportunidades de melhoria. Cada tipo de descrição é acompanhado de elementos e perguntas que facilitam a organização das informações. Nossa expectativa é que essa proposta ajude a consolidar o relato de experiência como uma modalidade de escrita acadêmica valiosa para a produção do conhecimento, especialmente para aprimorar as ações científicas e profissionais.

Demonstra-se a seguir a sequência dos encontros,objetivando explicar de forma clara e objetiva a experiência vivenciada como tutorial para os professores.

Figura 39 – Pipa

fonte:(13)

2.1 Encontro 1

2.1.1 Segurança e Cuidados

Para garantir a segurança durante as atividades práticas: Instruções de Segurança: Foram fornecidas orientações detalhadas sobre o uso seguro de ferramentas cortantes e materiais. Monitoramento: O professor supervisionou continuamente as atividades para prevenir acidentes e garantir o uso adequado dos materiais.

2.1.2 Recomendações de segurança

Segundo (14) Ao colocar uma tesoura na mão de uma criança é sempre importante explicar que é uma ferramenta que deve ser usado com cuidado e atenção, e apenas para cortar os materiais oferecidos durante cada atividade.

Reforce as instruções: "você só pode usar a tesoura para papel e os materiais que eu (profissional, os pais) deixar, certo?"

Repita as instruções toda vez que ela for usar a tesoura. E só deixe que ela utilize a tesoura sob a sua supervisão.

Ensine a ela como deve segurar a tesoura enquanto caminha, apontado as partes cortantes para baixo e envolve-las com a mão

Dicas de como segurar a tesoura e o papel:

Usar uma tesoura corretamente é uma habilidade que a criança vai desenvolver com a prática. Podemos ajuda-las a ensinando-as a forma correta de segurar a tesoura e o papel.

1. Mostre à criança que cada mão tem um papel no processo. Enquanto a mão dominante segura a tesoura, a mão auxiliar segura o papel.

2. O polegar deve ficar encaixado no aro superior da tesoura. Os dedos indicador e médio se encaixam no aro inferior, enquanto os demais dedos ficam flexionados junto à palma da mão. Outra maneira de segurar a tesoura é colocando o dedão no aro superior, o dedo médio no inferior, enquanto o dedo indicador fica embaixo do cabo, dando sustentação à tesoura. O antebraço deve ficar posicionado de modo que o polegar fique para o lado de cima.

3. Posicione o dedo polegar da mão auxiliar sobre o papel, enquanto os demais dedos ficam flexionados na parte de baixo. A mão auxiliar deve virar o papel, permitindo que a mão dominante corte-o da forma desejada.

4. Providencie uma mesa e uma cadeira adequadas à altura da criança, permitindo que ela fique com pés no chão e possa apoiar de forma confortável os cotovelos e antebraços sobre a mesa.

ATENÇÃO! Escolha tesouras adequadas para a faixa etária da criança. Tesouras com a lâmina mais curta e sem ponta são mais seguras e fáceis de manusear. Uma tesoura com cabo de borracha pode ser mais confortável para a criança que está começando a manusear o instrumento. Tesouras de mola facilitam o movimento de abrir e fechar, sendo mais indicadas para os mais novos.

2.1.2.1 Dicas de como usar um compasso:

1. Segundo (15) como fazer segmentos de reta iguais usando um compasso? Coloque a ponta do compasso em uma das extremidades do segmento de reta que você deseja duplicar. Controle a abertura para que a ponta do lápis/grafite/mina coincida com a outra extremidade da reta. A seguir, desenhe uma segunda linha usando uma régua. Faça-a um pouco maior do que o segmento que você está duplicando e posicione a ponta do compasso em uma de suas extremidades. Por fim, desenhe um arco de circunferência com o compasso que faça uma intersecção com o segmento de reta e apague a parte que ficou além da marca do lápis. A linha gerada é igual em comprimento ao segmento inicial que você queria duplicar.

2. Como encontrar o ponto médio de uma linha com um compasso? Posicione a ponta do compasso em uma das extremidades do segmento de reta. Então, abra o compasso de forma que o lápis alcance além do ponto médio do segmento e desenhe um arco acima da reta e outro abaixo. Mantenha o compasso aberto na mesma configuração e posicione sua ponta na outra extremidade da linha. Desenhe arcos acima e abaixo do segmento de reta. Esses arcos farão intersecção com o primeiro conjunto de arcos já desenhado. Use uma régua para desenhar uma linha do ponto onde os arcos de cima se tocam até o ponto onde os arcos de baixo se tocam, passando essa linha pela reta em análise. O ponto onde essa nova linha encontra a linha original é o ponto médio.

3. Como usar um compasso para desenhar um hexágono? Comece desenhando um círculo simples, de raio do tamanho correspondente ao tamanho do lado do hexágono desejado. Então, posicione a agulha/ponta do compasso em cima da circunferência desenhada e marque um arco que atravesse o círculo. Mova a agulha para a intersecção do arco com o círculo e crie uma segunda intersecção. Repita o processo até que haja seis pontos marcados no círculo. Ligue os pontos cuidadosamente com uma régua para criar um hexágono perfeito.

4. Qual é a pressão correta que devo fazer no lápis ao usar um compasso? É difícil aplicar pressão usando um compasso. Usar um grafite (também chamado de mina) duro demais pode resultar em uma linha leve demais. Já um grafite mais macio, com ponta chanfrada, geralmente produz uma linha bastante nítida sem a necessidade de pressão exagerada. No entanto, uma ponta chanfrada fica arredondada rapidamente, devendo ser refeita com frequência.

5. Como manter a ponta do compasso protegida quando não estiver usando? Quando não estiver em uso, o compasso deverá sempre ser guardado em um recipiente fechado. A ponta afiada pode causar arranhões e cortes caso fique exposta. Você pode proteger a ponta com um pedaço de borracha, por exemplo. Muitos compassos já vêm com uma capa protetora para a ponta. O importante é nunca deixar de protegê-la, até mesmo para aumentar a vida útil de seu instrumento. Um adaptador permite que canetas nanquim sejam utilizadas em um compasso. Até mesmo círculos maiores podem ser desenhados, usando um compasso com extensor.

   O compasso é uma ferramenta de desenho muito útil de se ter por perto. Pode ser usado, por exemplo, para fazer círculos perfeitos, para fazer segmentos de reta iguais e para achar o ponto médio de uma linha.

2.2 Cuidados com a prática ao empinar a Pipa:

Segundo (16),alguns cuidados devem ser tomados para evitar as causas de acidente. A linha da pipa, por exemplo, quando engata no fio de alta tensão, pode provocar um curto-circuito que, na maioria dos casos, interrompe a distribuição de energia.

Em dias de chuva, a brincadeira também deve ser evitada, porque os raios direcionam a receber uma descarga elétrica. Também deve-se ter atenção redobrada nos cabos elétricos como antenas e fios eletrônicos.

A linha com cerol (mistura de vidro, cola e outros ingredientes) e a chamada linha chilena são produtos ilegais, por isso, pais e responsáveis devem se atentar e não permitir que as crianças e adolescentes utilizem estes produtos nas pipas. Esse material em contato com os cabos de energia, pode provocar curto-circuito e descarga elétrica. Em caso de acidentes com vítimas, os pais e responsáveis podem responder criminalmente, transformando a brincadeira em caso de polícia.

2.2.1 Dicas:

Não solte pipas perto da rede e da fiação elétrica, prefira os campos abertos ou parques; Se a pipa enroscar nos fios da rede elétrica não tente tirar. Ao puxar a pipa, os fios podem se tocar, provocando curto-circuito e rompimento de cabos. Isso ocasiona falta de energia e pode causar graves acidentes.

Não solte pipas em dias com chuva ou com relâmpagos. Você corre o risco de levar uma descarga elétrica;

Não use cerol na linha das pipas, que, além de ser proibido, constitui um grande risco para as pessoas, podendo cortar a rede elétrica e provocar acidentes graves com ciclistas e motociclistas;

Evite usar linhas metálicas ou fitas magnéticas, que são materiais condutores de energia elétrica e podem causar acidentes;

Não suba em telhados, lajes e postes para empinar ou recuperar pipas;

Não tente retirar as pipas, rabiolas e papagaios engatados na rede elétrica. Esse tipo de situação é responsável por boa parte das interrupções no fornecimento de energia elétrica e pode causar acidentes fatais

Figura 40 – Cuidados ao empinar:

fonte:Produzido pelo autor

Acesse o link da apresentação do You Tube clicando no seguinte endereço:

Apresentação no You tube

2.3 Encontro 2:

Planejamento e Preparação Inicialmente, foi realizada uma revisão das teorias geométricas relevantes, incluindo a condição de existência de triângulos, retas paralelas, retas perpendiculares e ângulos. Com base nessa revisão, o projeto foi estruturado em três etapas principais.

2.3.1 Primeira etapa :

Estudaremos a condição de existência de um triângulo , segundo (17)"A condição de existência de um triângulo é um conjunto de relações entre as medidas de seus lados que possibilitam decidir se, com as medidas propostas, é possível construí-lo. Essa condição pode ser vista como uma propriedade e é conhecida como desigualdade triangular.

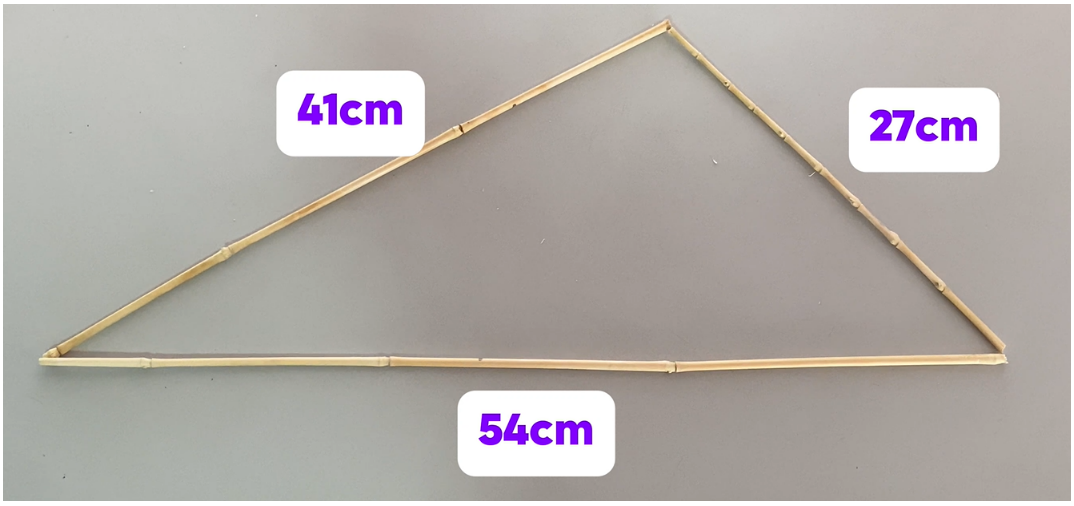
2.3.1.1 Condição de existência de um triângulo

.

Dados três segmentos de reta distintos, se a soma das medidas de dois deles é sempre maior que a medida do terceiro, então, eles podem formar um triângulo.

Nessa etapa do trabalho os alunos poderam comprovar essa teoria com o uso dos bambus, onde o professor pode sugerir que os alunos peguem três pedaços aleatórios e tentem formar um triângulo, se todos os alunos conseguirem anotaremos os valores e testaremos a teoria aplicada, caso tenha algum aluno que não conseguiu anotaremos os valores desse aluno o professor pode sugerir também alguns valores e com isso comprovaremos a desigualdade triangular.

Figura 41 – Exemplo Pratico 1:



fonte:Produzido pelo autor

Acesse o link da apresentação do You Tube clicando no seguinte endereço:

Apresentação no You Tube

Nesse exemplo podemos constatar que com segmentos de 54cm 41cm e 27cm poderemos formar um triangulo, pois

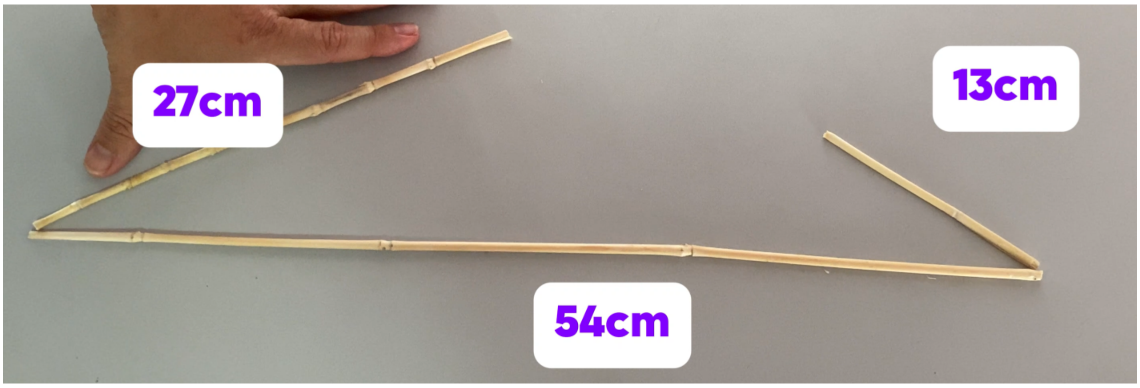
$54 < 41 + 27$,

$41 < 54 + 27$

$27 < 54 + 41$

logo , utilizando esses três segmentos irá formar um triângulo

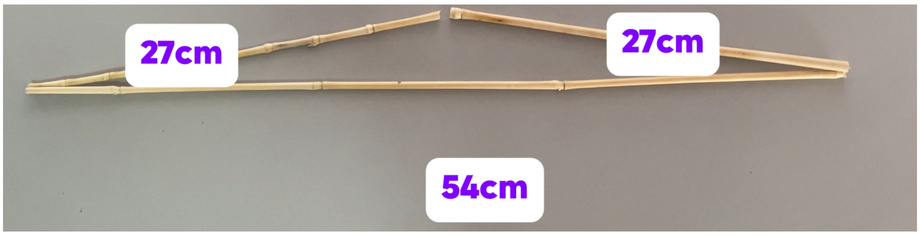
Figura 42 – Exemplo Pratico 2:



fonte:Produzido pelo autor

Na figura 13 podemos notar que não conseguimos formar um triângulo pois é facil ver que um segmento é maior do que a soma dos outros dois segmentos de reta

Figura 43 – Exemplo Pratico 3:



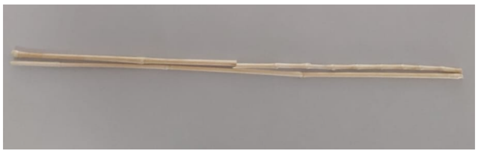
fonte:Produzido pelo autor

Note que na figura 14 não consiguiremos formar um triângulo pois um segmento de 54cm é igua a soma dos outros dois segmentos de 27cm

$54 = 27 + 27$

logo não forma triângulo os segmentos só se encontram em cima do segmento de 54cm , a medida que levantamos os segmentos eles começam a se afastar

Figura 44 – Exemplo Pratico 4:



fonte:Produzido pelo autor

Na figura 13 podemos notar que não conseguimos formar um triângulo pois é facil ver que um segmento é maior do que a soma dos outros dois segmentos de reta.

2.3.1.2 Segunda Etapa:

Retas paralelas e Perpendiculares Segundo (18) No traçado de retas paralelas ou perpendiculares é indispensável o manejo adequado dos esquadros. Na construção das retas perpendiculares e paralelas pode-se usar o par de esquadros ou um esquadro e uma régua. Neste caso a régua fica fixa pela mão esquerda, servindo de apoio para o esquadro, que deve correr livre, movido pela mão direita.

Nessa Etapa do trabalho utilizando o jogo de esquadra vamos ensinar para o aluno como traçar retas paralelas e perpendiculares na mesma hora em que o aluno faz oprojeto da pipa na cartolina , nessa faze o professor poderá indicar no projetor as formas geométricas já estudadas e sala de aula.

.

2.3.1.3 Traçado de Mediatriz

É fundamental que o aluno do 8º ano aprenda a utilizar régua e compasso. Ensinaremos a traçar a mediatriz utilizando esses instrumentos.

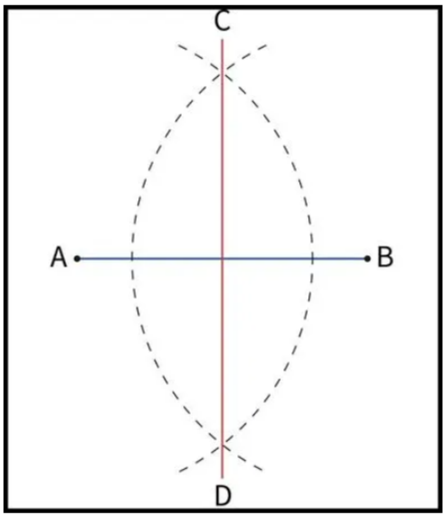
A **mediatriz** de um segmento de reta é definida como:

Mediatriz é uma linha perpendicular que divide um segmento de reta em duas partes iguais.

Essa definição é fundamental para entender diversos conceitos da geometria.

Seja AB um segmento de reta. Com centro em A e a uma distância maior do que a metade de AB, traçar dois arcos (um inferior e o outro superior). Agora com o mesmo raio e centro em B, trace outros dois arcos de circunferência. Unindo os pontos de intersecção destes arcos C e D obtêm-se uma reta perpendicular ao segmento AB e que intercepta o segmento seu ponto médio.

Figura 45 – Mediatriz



fonte:(19)

Para compreender por que essa construção gera a mediatriz, analisemos os passos e suas implicações geométricas:

A seguir, detalho os passos para a construção da mediatriz de um segmento, acompanhados de suas respectivas justificativas geométricas:

1. **Criação de Pontos Equidistantes:**

   - Iniciamos posicionando a ponta seca do compasso em uma das extremidades do segmento (por exemplo, no ponto A). Com uma abertura arbitrária (que deve ser maior que a metade do comprimento do segmento $\overline{AB}$), traçamos um arco. Todos os pontos nesse arco estão, por construção, à mesma distância de A.

- Em seguida, repetimos esse procedimento a partir da outra extremidade do segmento, o ponto B. É crucial que mantenhamos a **mesma abertura do compasso** utilizada anteriormente. Dessa forma, todos os pontos no segundo arco estarão à mesma distância de B.

2. **Identificação dos Pontos de Interseção (C e D):**

   - Os pontos C e D surgem da interseção dos dois arcos traçados. A característica fundamental desses pontos é que eles se encontram à mesma distância tanto de A quanto de B. Matematicamente, isso significa que $\overline{AC} = \overline{BC}$ e $\overline{AD} = \overline{BD}$.

3. **Formação de Triângulos Isósceles:**

   - Ao conectar os pontos A, B e C, formamos o triângulo $\triangle ABC$. Este triângulo é isósceles, tendo $\overline{AB}$ como base, pois, conforme estabelecido, $\overline{AC} = \overline{BC}$.
   - De maneira análoga, o triângulo $\triangle ABD$ também se configura como um triângulo isósceles com base $\overline{AB}$, uma vez que $\overline{AD} = \overline{BD}$.

4. **Propriedade da Mediatriz como Eixo de Simetria:**

   - A mediatriz de um segmento é definida como o lugar geométrico de todos os pontos que são equidistantes das extremidades desse segmento. Como os pontos C e D atendem a essa condição, a reta que os une ($\overline{CD}$) é, por definição, a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
   - A reta $\overline{CD}$ funciona como um eixo de simetria para o segmento $\overline{AB}$, implicando que qualquer ponto localizado sobre $\overline{CD}$ manterá a mesma distância tanto de A quanto de B.

5. **Demonstração da Perpendicularidade e Ponto Médio:**

   - Consideremos M como o ponto de interseção da reta $\overline{CD}$ com o segmento $\overline{AB}$.
   - Os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$ são congruentes pelo caso LLL (Lado-Lado-Lado), pois possuem $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BD}$ e $\overline{CD}$ é um lado comum a ambos.
   - Da congruência dos triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$, podemos deduzir que os ângulos $\angle ACM$ e $\angle BCM$ são iguais.
   - Ao analisar os triângulos $\triangle ACM$ e $\triangle BCM$, verificamos que são congruentes pelo caso LAL (Lado-Ângulo-Lado), já que $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\angle ACM = \angle BCM$ e $\overline{CM}$ é um lado comum.
   - Consequentemente, $\overline{AM} = \overline{BM}$, o que prova que M é o ponto médio de $\overline{AB}$.
   - Adicionalmente, os ângulos $\angle CMA$ e $\angle CMB$ são iguais. Por serem adjacentes e formarem um ângulo raso (180°), cada um deve, necessariamente, medir 90°. Isso confirma que a reta $\overline{CD}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$.

Em síntese, a construção realizada com o compasso nos permite obter os pontos C e D, que são equidistantes das extremidades A e B. A reta que une esses pontos é a mediatriz, pois satisfaz as condições de ser perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e de passar precisamente pelo seu ponto médio.

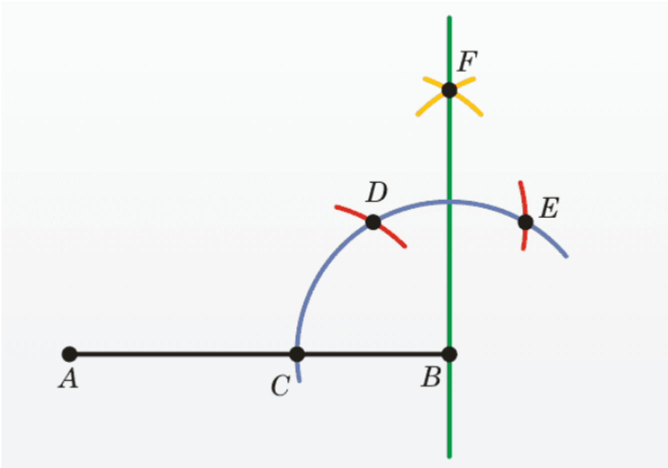
Construção da Perpendicular na Extremidade

Para traçar uma reta perpendicular a um segmento em uma de suas extremidades, como o ponto B do segmento $\overline{AB}$, o procedimento é o seguinte:

1. Marque um ponto C sobre a reta que contém $\overline{AB}$, posicionado mais próximo de B.
2. Com a ponta seca do compasso em B e com abertura igual à medida do segmento $\overline{BC}$, traçamos um arco.
3. Mantendo a mesma abertura do compasso, com centro em C, marcamos no arco o ponto D.
4. Ainda com a mesma abertura, com centro em D, marcamos no mesmo arco o ponto E.
5. Em seguida, construímos a mediatriz do segmento $\overline{DE}$ (que é um segmento auxiliar), identificando o ponto F onde essa mediatriz cruza o arco original.
6. Por fim, traçamos a reta que conecta os pontos B e F. Esta reta será a perpendicular desejada ao segmento $\overline{AB}$ no ponto B.

Para compreender a fundamentação geométrica dessa construção, analisamos os passos e suas implicações:

Figura 46 – Traçar uma perpendicular pela extremidade de um segmento de reta



fonte:(19)

1. **Criação de um Arco e Pontos Intermediários (C, D, E):**

   - Primeiramente, com a ponta seca do compasso em B e uma abertura qualquer, traça-se um arco que intersecta a reta que contém $\overline{AB}$ em um ponto C (posicionado à esquerda de B na figura) e que define outros dois pontos sobre o arco, D e E. A forma como D e E são marcados (geralmente mantendo a mesma abertura do compasso e centrando em C para D, e em D para E) garante que C, D, E estão no mesmo círculo centrado em B.
   - Para ser mais preciso sobre a construção ilustrada:
     - Traça-se um arco com centro em B que intersecta a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em C.
     - Mantendo a mesma abertura do compasso, com centro em C, traça-se um arco que intersecta o arco anterior em D.
     - Com centro em D e a mesma abertura, traça-se um arco que intersecta o primeiro arco em E.

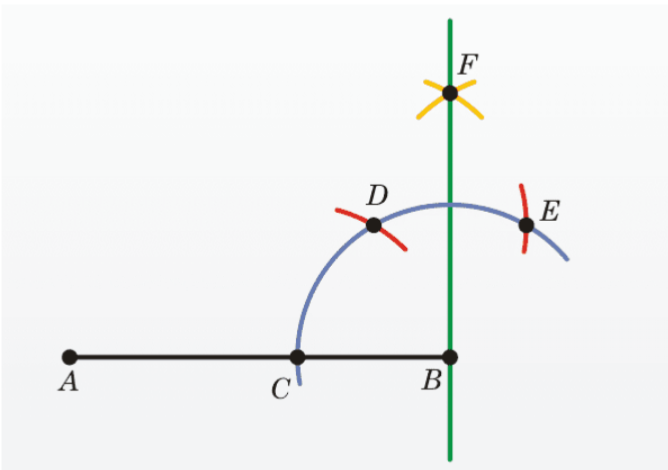
   Essa sequência de arcos assegura que C, D, E pertencem ao mesmo círculo com centro em B. Além disso, dependendo da abertura inicial, os triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle BDE$ podem ser equiláteros (se a abertura utilizada for igual a $\overline{BC}$). O ponto crucial dessa construção é que ela visa estabelecer uma relação geométrica específica entre C, B e E (por exemplo, em algumas variantes da construção, B se torna o ponto médio entre C e E) para facilitar a posterior determinação da perpendicular. Na figura apresentada, observa-se que C e E estão à mesma distância de B.

2. **Localização do Ponto F (Equidistância e Eixo de Simetria):**
   - Com a ponta seca do compasso em D e uma abertura maior que o segmento $\overline{DB}$, traçamos um arco.
   - Em seguida, com a ponta seca do compasso em E (mantendo rigorosamente a mesma abertura utilizada a partir de D), traçamos outro arco que irá intersectar o primeiro no ponto F.
   - O ponto F é, por construção, equidistante de D e E ($\overline{FD} = \overline{FE}$).
3. **Formação do Triângulo Isósceles $\triangle FDE$:**
   - Ao conectar os pontos F, D e E, formamos o triângulo isósceles $\triangle FDE$, que tem $\overline{DE}$ como base. A reta que une F ao ponto médio de $\overline{DE}$ seria a mediatriz de $\overline{DE}$ e, consequentemente, perpendicular a $\overline{DE}$. Neste contexto, a reta $\overleftrightarrow{BF}$ é a mediatriz do segmento $\overline{DE}$, o que a torna perpendicular a $\overline{DE}$ e, por extensão, à reta $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto B.

Perpendicular na extremidade

Traçar uma perpendicular pela extremidade de um segmento de reta, dado um segmento AB marca-se um onto C mais proximo de B ,com a abertura do compasso na medida de BC faz-se um arco com a mesma medida desse arco maramos nele o ponto D com a mesma medida de BC marcamos no arco o ponto E traçamos agora a mdiatriz do segmento imginário DE determinando o ponto F , traçamos agora a reta que passa por BF.

Figura 47 – Traçar uma perpendicular pela extremidade de um segmento de reta



fonte:(19)

Para compreender a fundamentação geométrica dessa construção, analisemos os passos e suas implicações:

1. **Criação de um Arco e Pontos Intermediários (C, D, E):**

   - Primeiro, com a ponta seca do compasso em B e uma abertura qualquer, traça-se um arco que intersecta a reta que contém $\overline{AB}$ em um ponto C (à esquerda de B) e que define outros dois pontos sobre o arco, D e E. A forma como D e E são marcados (geralmente mantendo a mesma abertura do compasso e centrando em C para D, e em D para E) garante que $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{BE}$ se C, D, E forem igualmente espaçados no arco. O importante é que a construção visa criar pontos simétricos ou que permitam a criação de um triângulo retângulo.
   - De forma mais precisa para a construção vista:
     - Traça-se um arco com centro em B que intersecta a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em C.
     - Mantendo a mesma abertura do compasso, com centro em C, traça-se um arco que intersecta o arco anterior em D.
     - Com centro em D e a mesma abertura, traça-se um arco que intersecta o primeiro arco em E.

   Essa sequência de arcos garante que C, D, E estão no mesmo círculo centrado em B. Além disso, os triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle BDE$ são equiláteros, se a abertura for $\overline{BC}$. No entanto, a construção da imagem parece mais genérica. O ponto crucial é que C, B, E tornam-se pontos alinhados se C é a reflexão de E sobre B, ou mais precisamente, a construção procura fazer com que C, B, E formem um segmento de reta se B for o ponto médio entre C e E (o que é feito em algumas variantes da construção). Na figura, C e E estão à mesma distância de B.

2. **Localização do Ponto F (Equidistância e Eixo de Simetria):**

   - Com a ponta seca do compasso em D e uma abertura maior que $\overline{DB}$, traça-se um arco.
   - Com a ponta seca do compasso em E (mantendo a mesma abertura usada a partir de D), traça-se outro arco que intersecta o primeiro no ponto F.
   - O ponto F é, por construção, equidistante de D e E ($\overline{FD} = \overline{FE}$).

3. **Formação do Triângulo Isósceles $\triangle FDE$:**

   - Ao conectar F, D e E, forma-se o triângulo isósceles $\triangle FDE$ com base $\overline{DE}$. A mediana de $\triangle FDE$ relativa à base $\overline{DE}$ (que passaria por B se B fosse o ponto médio de $\overline{DE}$) seria perpendicular a $\overline{DE}$.

4. **A Propriedade Chave: Construção de um Triângulo Retângulo Inscrito em um Semicírculo (Implícita):**

- Uma das formas de entender essa construção é que ela implicitamente cria um semicírculo onde C, B, E poderiam estar alinhados ou onde F se torna o terceiro vértice de um triângulo que possui $\overline{CE}$ como diâmetro.
- Se C, B, E são colineares e B é o ponto médio de CE, então qualquer ponto P no círculo (cujo diâmetro é CE) formaria um ângulo $\angle CPE$ de 90°. A construção visa encontrar um ponto F que se comporta dessa forma.
- A linha verde que passa por B e F é a reta perpendicular desejada.

5. **Justificativa Formal (Congruência de Triângulos ou Eixo de Simetria):**

- Considere o triângulo $\triangle FBE$ e $\triangle FBD$. A reta $\overline{FB}$ é a mediatriz do segmento $\overline{DE}$ se o ponto B for o ponto médio de $\overline{DE}$ (o que não é diretamente garantido pela imagem mas é um objetivo comum de variantes dessa construção).
- Uma forma mais robusta de provar a perpendicularidade é notar que a reta $\overline{FB}$ é o eixo de simetria do segmento $\overline{DE}$ porque F é equidistante de D e E, e B é equidistante de D e E (já que $BD = BE$ pela construção inicial do arco). Portanto, a reta que passa por F e B é a mediatriz de $\overline{DE}$, o que significa que $\overline{FB} \perp \overline{DE}$. Se a construção for tal que $\overline{DE}$ é paralela a $\overline{AB}$, ou que o triângulo $\triangle FBE$ é construído de forma específica, a perpendicularidade com $\overline{AB}$ é garantida.
- Em muitas variantes, os pontos C, D, E são construídos de forma que $\triangle FBC$ e $\triangle FBE$ sejam congruentes, ou que $\triangle FDB$ e $\triangle FEB$ são congruentes. O objetivo é que $\angle FBC = \angle FBE = 90°$. A construção vista na imagem, onde F é o ponto de interseção de arcos centrados em D e E com mesma abertura, garante que $\triangle FDE$ é isósceles com base $\overline{DE}$. A reta FB é o eixo de simetria de $\triangle FDE$ se B for o ponto médio de $\overline{DE}$.
- A propriedade chave é que a reta que une F ao ponto B (eixo de simetria do triângulo $\triangle FDE$ se B for o ponto médio de $\overline{DE}$) ou a reta que une F a B forma um ângulo de 90° com a linha original ($\overline{AB}$). Essa construção é geralmente baseada na ideia de que se um triângulo é inscrito em um semicírculo, o ângulo oposto ao diâmetro é um ângulo reto. Embora não explícito, os pontos C, B, E e F são manipulados para criar essa relação.

Em resumo, a construção da reta perpendicular na extremidade de um segmento explora a simetria e a equidistância de pontos criados pelos arcos do compasso. Ao garantir que o ponto F esteja a uma distância igual de D e E, e que B também esteja a uma distância igual (pela construção inicial), a linha $\overline{FB}$ torna-se a mediatriz de $\overline{DE}$. Quando $\overline{DE}$ é posicionado de forma estratégica em relação a $\overline{AB}$ (por exemplo, com B sendo o ponto médio de $\overline{CE}$ e F sendo um ponto no semicírculo com diâmetro $\overline{CE}$), a perpendicularidade é estabelecida.

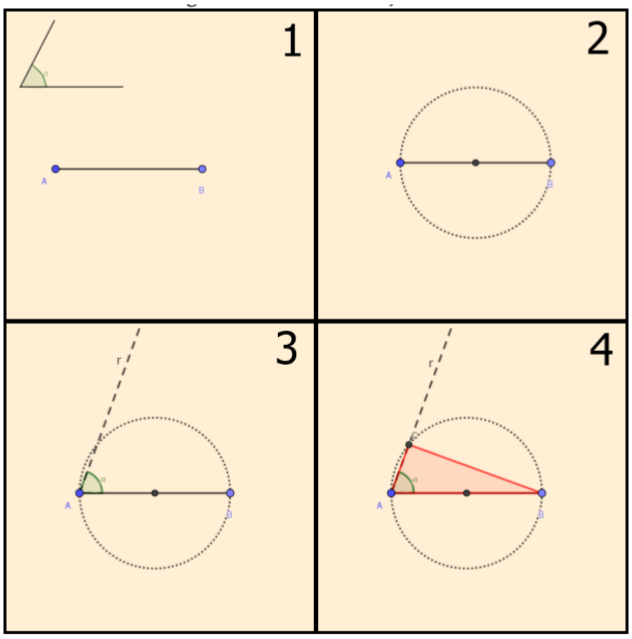
2.3.2 Construir um triangulo retângulo sendo dados a hipotenusa e um ângulo agudo.

Segundo (20):

1. .Considerar o segmento $\overline{AB}$ a hipotenusa e α o ângulo agudo.
2. Traçar uma circunferencia cujo raio seja metade de AB.
3. Construir uma semirreta r com origem em A, tal que, junto com o segmento AB termina um angulo congruente a α .
4. Marcar o ponto C na circunferencia descrita, obtido pela intersecção com a semirreta. Sendo assim, os pontos A, B e C determinam o triangulo procurado.

A Figura 16 ilustra os passos da construção.

Figura 48 – Construir um triangulo retângulo sendo dados a hipotenusa e um ângulo agudo



fonte:(20)

2.3.2.1 Terceira Etapa:

Ensinar ao aluno a construção de algumas formas geometricas,através de régua compasso e esquadro que irão auxiliar o aluno no seu projeto da Pipa :

Nessa etapa vamos colocar a cartolina em cima de uma mesa e prender as pontas com uma fita adesiva, pode ser um durex ou outra similar é muito importante prender a ponta as quatro pontas da cartolina para poder evitr que a mesma fique se deslocando , feito isso, vamos começar o processo da construção do projeto da sua ipa nessa cartolina.

Figura 49 – Como desenhar retas Paralelas e Perpendiculares

fonte:Produzido pelo autor

Acesse o link da apresentação do You Tube clicando no seguinte endereço:

Apresentação no You Tube

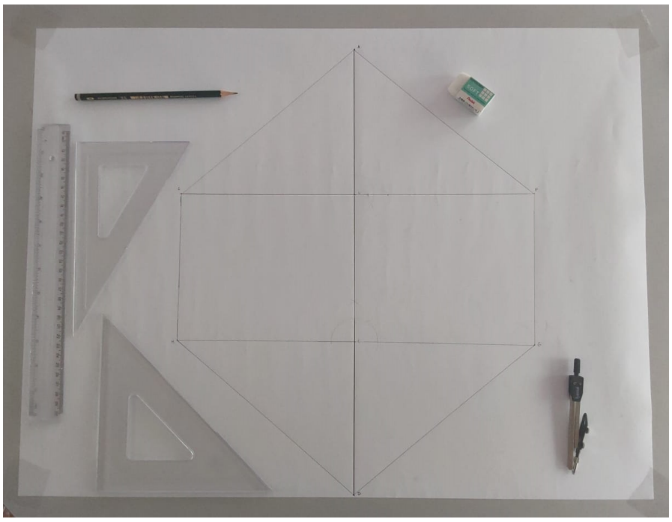
Vamos traçar inicialmente um segmento de reta AB vertical com 48cm ,logo depois vamos dividi-lo em 3 partes iguais , determinando C e D ,traçaremos agora duas retas perpendiculares ao segmento AB passando por C e outra por D, nessas perpendiculares marcaremos um segmento de 38 cm em cada , para finalizar faremos o contorno traçando segmentos de reta unindo todas as extremidades formando a Pipa segue um vídeo ensinando a fazer as paralelas e perpendiculaes com o jogo de esquadro e com o compaço e a regua

2.3.3 Como traçar retas paralelas com o auxílio de um par de esquadros

Segundo (21). Os esquadros são usados como instrumentos de desenho para traçagem e solução de problemas de geometria. É possível traçar várias entidades geométricas com o auxílio de um par de esquadros, esta animação faz parte do programa educativo O Desenho Geométrico em Multimídia

O par de esquadros é composto por um esquadro com um ângulo reto e dois ângulos de 45º e outro com um ângulo reto, um de 30º e outro de 60º. Nele a hipotenusa do esquadro com ângulos de 45° é congruente ao maior cateto do esquadro com ângulos de 30° e 60º. É recomendado que se utilize esquadros sem chanfro ou graduação.

Figura 50 – Retas paralelas e perpendiculares



fonte:Produzido pelo autor

1. Use um esquadro para traçar a primeira linha.
2. Sem o movimentar, encoste o segundo esquadro em um de seus lados.
3. Deslize o primeiro esquadro usando o segundo como referência até a posição desejada.
4. Afaste o segundo esquadro.
5. Sem movimentar o esquadro, trace a linha paralela à primeira.

2.4 Encontro 3:

Atividade com Palha de Coqueiro: Os alunos foram divididos em grupos e instruídos a utilizar talos de palha de coqueiro para experimentar a construção de triângulos, observando a condição de existência de um triângulo. Construção de Losango: Utilizando régua e compasso, os alunos construíram um losango e verificaram a relação entre ângulos agudos e obtusos, ajustando-os conforme as propriedades geométricas dos losangos.

2.5 Encontro 4:

Segundo (22) Construção de Pipas Construção do Modelo Geométrico: Os alunos, em grupos, foram orientados a desenhar e construir um modelo de pipa, utilizando as propriedades geométricas previamente estudadas. Confecção da Pipa: Com os materiais trazidos pelos alunos (folha de coqueiro, papel seda, linha, cartolina e cola), cada grupo construiu uma pipa baseada no modelo desenhado.

Pipas são divertidas de fazer e de colocar para voar ao ar livre, em um dia bonito e com um pouco de vento. Uma pipa simples em forma de losango é um artesanato fácil que pode ser feito em uma tarde.

Para começar, faça o quadro da pipa. Depois, meça e corte o corpo dela, em forma de losango. Para terminar, amarre a linha e uma rabiola para que a pipa voe direito. Você também pode decorar quando terminar para que a pipa fique ainda mais bonita enquanto paira no ar.

Modelo 1: Nesse modelo o Professor poderá abordar as teorias do Losango

Depois que o aluno construir a sua Pipa que é um losango o professor pedirá para o aluno efetuar algums mediçoes e contatará que num losango:

Os lados opostos são congruentes, ou seja, têm a mesma medida Os ângulos opostos são congruentes Os ângulos adjacentes são suplementares, ou seja, a soma dos seus valores é igual a 180° As diagonais se cruzam nos seus pontos médios As diagonais são bissetrizes dos vértices (com o auxilio do transferidor) As diagonais são perpendiculares entre si A área do losango é calculada multiplicando a diagonal maior pela diagonal menor e dividindo o resultado por dois (poderemos calcular quanto de papel foi utilizado pelo aluno) O perímetro do losango é calculado multiplicando o comprimento de um lado por quatro (poderemos medir o comprimento da linha utilizada para contornar esse losango) As diagonais do losango são mediatrizes.

2.5.1 Material necessário

Papela seda, papel resistente ou tecido fino; varetas finas de madeira ou bambu de 48cm e 38cm; Barbante ou linha de algodão, pelo menos 21 a 30 m; 5 ou 6 pedaços de fita ou tecido; Supercola; Fita adesiva ou isolante; Uma régua; Tesoura; Papel colorido, canetinhas ou lápis de cor (opcionais). linha 10 ou zero

Figura 51 – Materiais necessários

fonte:Produzido pelo autor

Acesse o link da apresentação do You Tube clicando no seguinte endereço:

Apresentação no You Tube

2.5.1.1 Video 1:

Junte as três varetas usando barbante e cola. Passe o barbante uma ou duas vezes ao redor do ponto onde as duas varetas se juntam. Em seguida, amarre com um nozinho e corte o excesso de material usando a tesoura. Você também pode colocar uma gota de supercola entre as duas varetas e apertar uma contra a outra no ponto onde elas se juntam para deixá-las bem presas.

As varetas precisam formar um ângulo reto quando forem unidas. A vareta horizontal precisa estar perpendicular em relação à vertical.ultilizei vareta grande de 48cm e duas varetas menores de 38cm, dividi a vareta de 48 cm em três partes iguais a 16 cm e as varetas menores dividi por dois e encontrei segmentos de 19cm , muito importante para determinar aonde vamos fazer as amarrações.

Figura 52 – Esqueleto da pipa

fonte:Produzido pelo autor

Acesse o link da apresentação do You Tube clicando no seguinte endereço:

Apresentação no You Tube

Nesse momento o professor poderá falar sobre tipos de ângulos: ângulo agudo, ângulo obtuso, angulo reto, ângulos opostos pelo vértice, angulos complementares , suplementares, angulos correspondentes congruentes, alternos internos alternos externos, colaterais internos e externos ,para auxiliar essa explanação o professor poderá ter o auxilio de um transferidos e outro pedaço de bambú que ajudará na visualização da teoria vivênciada na prática Segue um video demonstrativo abaixo como sugestões de como poderemos abordar esses contúdos na sala com os alunos

Segue um video demonstrativo abaixo como sugestões de como poderemos abordar esses contúdos na sala com os alunos

Figura 53 – Aplicação da teoria de geometria

fonte:Produzido pelo autor

Acesse o link da apresentação do You Tube clicando no seguinte endereço:

Apresentação no You Tube

2.5.1.2 Video 2:

Faça entalhes horizontais de 2,5 a 5 cm nas pontas de cada vareta. Use a tesoura para fazer um entalhe na ponta de cada vareta. Esses entalhes devem ficar na horizontal, ou ao longo da largura da vareta. Eles precisam ser fundos o bastante para acomodarem a linha que você vai usar para prender o corpo da pipa. Se você estiver usando varetas e uma linha bem finas, pode fazer furos nas pontas das varetas em vez de entalhes.

Figura 54 – Traçando as arestas

fonte:Produzido pelo autor

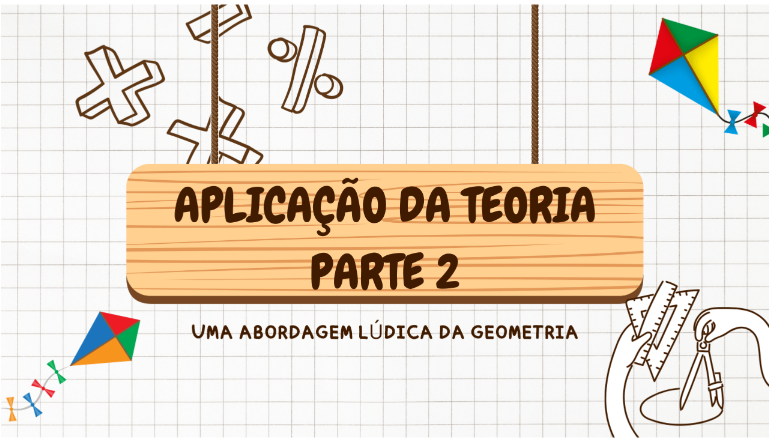
Acesse o link da apresentação do You Tube clicando no seguinte endereço:

Apresentação no You Tube

2.5.1.3 Video 3:

Estique a linha ao redor do quadro. Passe a linha pelo entalhe superior do quadro e enrole a vareta com ela uma vez. Em seguida, puxe a linha pelo entalhe da ponta direita do quadro. Estique a linha até o entalhe da parte de baixo e depois passe-a pela ponta esquerda do quadro. Por fim, enrole a linha uma ou duas vezes ao redor da ponta superior e corte o excesso de linha com a tesoura. A linha precisa ficar esticada, mas não tensa demais. Caso contrário, as varetas vão dobrar ou entortar. A linha ajuda a fazer com que o quadro mantenha o formato quando a pipa estiver voando no ar.

Figura 55 – Aplicação da teoria

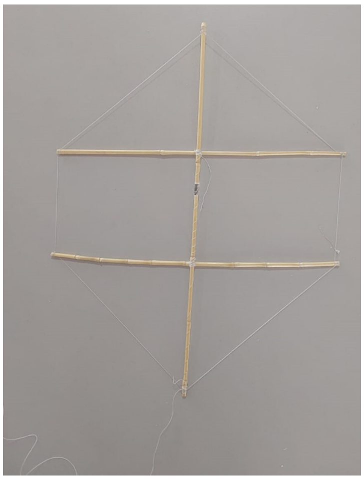


fonte:Produzido pelo autor

Acesse o link da apresentação do You Tube clicando no seguinte endereço:

Apresentação no You tube

Figura 56 – Imagem do esqueleto da pipa



fonte:Produzido pelo autor

2.5.1.4 Video 4:

Use uma folha de Papel seda ou saco plastico com pelo menos 1 m de largura para fazer o corpo da pipa. A melhor opção é um uma folha de papel seda devido a beleza e a quantidade de cores, já que ele é resistente e fácil de decorar. Você também pode usar papel contact branco é resistente ou jornal. O tecido também serve para fazer o corpo da pipa se você não tiver outra opção, mas ele precisa ser grosso e resistente para que a pipa seja forte.

Coloque o quadro em cima do corpo da pipa. Abra o material que você pretende usar no chão ou numa mesa e coloque o quadro no meio dele.

Dobre a ponta do corpo da pipa por cima do quadro e prenda com cola . Passe uma linha fina de supercola no quadro e aperte a borda da pipa contra ele para mantê-la no lugar. Você também pode usar fita adesiva ou isolante para prender a pipa ao quadro, colando a borda na parte interior da pipa. Veja se a pipa está bem presa ao quadro para que ela não se solte quando estiver no ar.

Prenda a linha. Use uma linha com pelo menos 50 cm de comprimento. Faça um furinho no ponto logo acima de onde as varetas se encontram usando a tesoura. O furo precisa ser grande o bastante para você passar a linha. Em seguida, puxe uma ponta da linha por dentro do furo e amarre bem ao redor do cruzamento entre as varetas. Deixe a linha solta enquanto você termina o resto da pipa. Você pode amarrar mais linha a esse primeiro pedaço para deixá-lo mais longo dependendo da sua altura e do tamanho do seu braço. Às vezes, amarrar mais linha pode ajudar a fazer com que a pipa voe mais reta.

Figura 57 – Área e Perímetro

fonte:Produzido pelo autor

Acesse o link da apresentação do You Tube clicando no seguinte endereço:

Apresentação do You Tube

2.5.1.5 Video 5:

Faça uma rabiola com um pedaço de linha mais grossa de 1,8 m. Prenda a rabiola à ponta inferior do quadro, enrolando a linha no quadro várias vezes e amarrando bem. Use uma linha grossa ou uma tira de tecido para fazer a rabiola.[6] Escolha um tecido ou uma linha da mesma cor da pipa para que ela fique bonita no céu.

Prenda pedaços de tecido ou fita à rabiola em intervalos de 30 cm. Use pedaços com 5 a 7,5 cm de comprimento. Amarre-os à rabiola com um nozinho, deixando-os pendurados pela linha. Esses pedaços de tecido ou fita vão ajudar a fazer com que a rabiola se mantenha equilibrada e a pipa voe reta.

Figura 58 – Rabilola da pipa:

fonte:Produzido pelo autor

Acesse o link da apresentação do You Tube clicando no seguinte endereço:

Apresentação no You tube

2.5.1.6 Decoração da pipa:

Use a sua criatividade para fazer a decoração da pipa, com canetinhas ou papel colorido. Quando terminar de montar a pipa, use a criatividade e inscreva uma palavra ou frase inspiradora nela com canetinhas. Você também pode pintá-la com as canetas e fazer um padrão divertido, como listras ou bolinhas. Experimente colar formas feitas de papel colorido, como redemoinhos, triângulos ou círculos. Ou escreva seu nome na pipa para que todos saibam que ela é sua e você possa ver seu nome voando no céu.

2.6 Encontro 5

2.6.1 Proposta de locais para empinar a pipa:

Orientem aos seus alunos a não soltarem pipas às margens das rodovias.Quando soltam pipas, as crianças ficam distraídas e não se atentam para os carros e o risco de um atropelamento é grande, principalmente quando a pipa quebra a linha e elas saem correndo para tentar pegá-la. O trânsito da rodovia é diferente da cidade. Embora os dois sejam perigosos, na rodovia, devido à velocidade dos veículos, um atropelamento sempre é fatal. Então orientem seus alunos. procurem um local aberto como terrenos ,praças e praias distantes das rodovias,nesses lugares supervisionados pelos responsáveis poderemos tornar essa prática prazeirosa e um momento especial de uniao familiar.

2.6.1.1 Empinamento e Documentação

Empinamento da Pipa: Os alunos escolheram um local para empinar a pipa e realizaram o processo com suas famílias. Cada grupo foi instruído a documentar a atividade com três fotos: da pipa, do grupo e do grupo empinando a pipa e alguns videos que irão fazer parte do instagram da escola aonde iremos abrir uma votação para eleger a melhor Pipa ,o Professor e a escola poderam dar um prémio simbólico para o grupo vencedor desse concurso esse trabalho tem potencial de unir familias e toda a comunidade escolar, fazendo com que a escola seja divulgada na comunidade aumentando com isso o interesse de jovens em participar de uma escola que poporcina projetos educacionais

Figura 59 – Pipa:

fonte:Produzido pelo autor

2.6.1.2 Video 6:

Coloque a pipa para voar em um local sem árvores e fios de energia. Procure por um espaço perto de um corpo de água, como um lago ou o mar, pois ali os ventos serão bons para soltar pipa. Segure bem a linha e corra na direção do vento. Em seguida, solte a pipa enquanto corre, empurrando-a para cima, na direção do vento. Use a linha para manter a pipa no ar.

Figura 60 – fazendo a pipa voar:

fonte:Produzido pelo autor

Acesse o link da apresentação do You Tube clicando no seguinte endereço:

Apresentação no You tube

Figura 61 – Empinando a pipa:

fonte:Produzido pelo autor

2.7 Encontro 6

2.7.1 Exposição dos Trabalhos e Montagem da Exposição:

Será montada uma exposição presencial das Pipas com suas teorias em banners, permitindo que a comunidade escolar e os pais visualizassem os resultados e a aplicação dos conceitos geométricos.Cada crupo ficará ao lado de seu banner com a sua pipa aonde eles iram explicar as teorias estudadas em cada pipa produzida e contar a sua experiência e os cuidados que se deve ter no empinamento da pipa, fazendo com que exista uma conscientização sobre a prática e tornando o trabalho uma forma de educar toda a comunidade escolar ,fazendo com que eles sejam agentes multiplicadores

2.7.2 Banner para a exposição

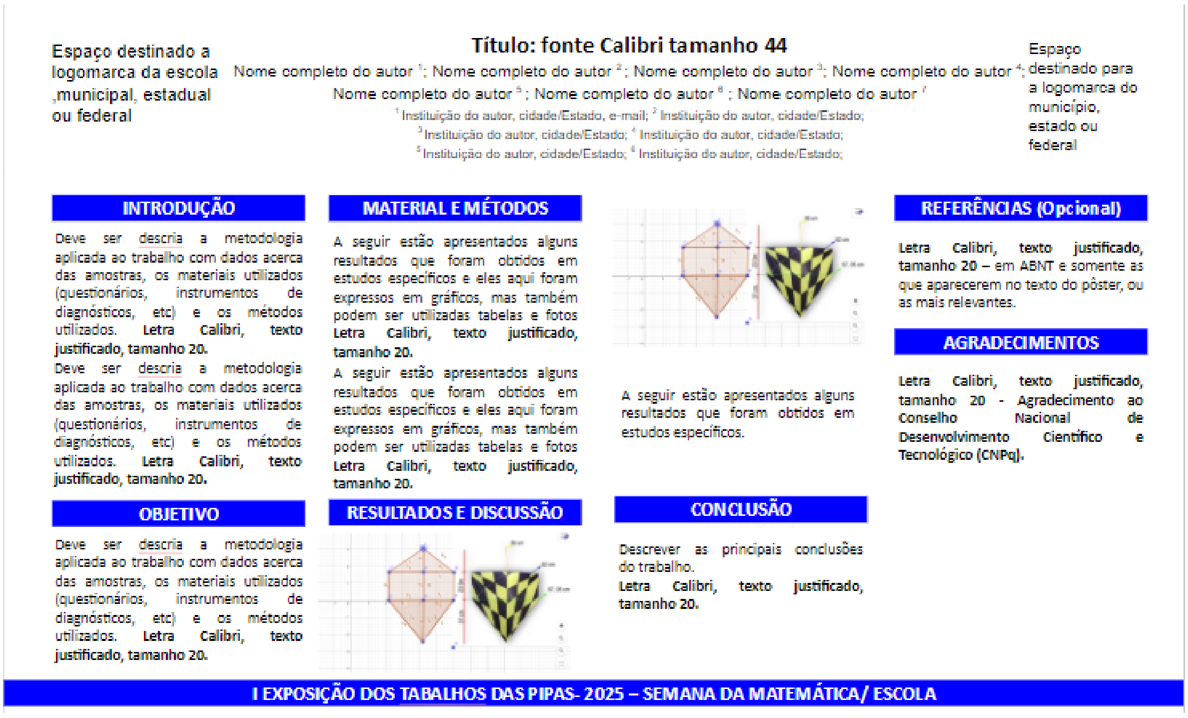
Como contribuição para essa organização, elaboramos uma proposta de banner que pode servir como orientação para os professores na apresentação do projeto. O modelo sugerido é apenas uma referência prática, sendo importante que cada professor tenha liberdade para criar e se adaptar conforme as necessidades de sua turma e da realidade de sua escola. Além disso, sugerimos que cada grupo de alunos leve as pipas confeccionadas para a exposição, o que enriquece o evento e valoriza o trabalho realizado

Uma atividade complementar recomendada é a realização de uma votação para eleger a "pipa mais bonita", utilizando o Instagram da escola para publicar as fotos das pipas de cada grupo. Essa estratégia incentiva a participação dos alunos, promove o engajamento da comunidade escolar e fortalece os vínculos entre a escola e a comunidade

Essa proposta evidencia como a integração entre teoria e prática pode tornar o ensino da matemática mais dinâmico, significativo e atrativo para os alunos. Ao utilizar a construção de pipas como recurso pedagógico, o professor proporciona um ambiente de aprendizagem que conecta os conteúdos teóricos de geometria a experiências práticas, estimulando o desenvolvimento integral dos alunos e destacando a importância de metodologias

segue o modelo do banner e logo abaixo um modelo com link para que o profesor possa editar

Figura 62 – Banner para a exposição semana da matemática



fonte:Produzida pelo autor

Acesse o link da edição do banner no Google Slides clicando no seguinte endereço: [banner no Google Slides]

3 Construindo o projeto da pipa ultilizando o Geogebra

Ensinar e inserir o aluno no universo tecnológico, fazendo com que ele utilize essa ferramenta como facilitadora do ensino-aprendizagem, é um desafio para todo professor, seja da área de matemática ou de outras áreas. Ter o GeoGebra, um software educacional livre que permite ensinar e comprovar diversas teorias de geometria, é uma vantagem. Pensando nisso, organizei um tutorial do GeoGebra com suas principais funções e elaborei um passo a passo de como o professor pode ensinar a geometria plana do oitavo ano e desenvolver com seus alunos o projeto da Pipa

3.1 Comandos básicos para o geogebra

Segundo (23) Para adquiri-lo e instalá-lo o usuário pode-se proceder da seguinte maneira:Para adquiri-lo e instalá-lo o usuário pode-se proceder da seguinte maneira:

I) Acessar a página inicial do site contendo o Software GeoGebra, digitando http://www.geogebra.org/cms/pt.BR/download/ na barra de endereço do seu navegador de internet e em seguida clique na opção Download;

II) Escolha o instalador compatível com seu sistema operacional (plataforma);

III) Clique na opção Instalação Off-line. Ao fazer isso será feito o download do setup do programa na sua versão mais atual.

IV) Execute o setup e siga os procedimentos de instalação

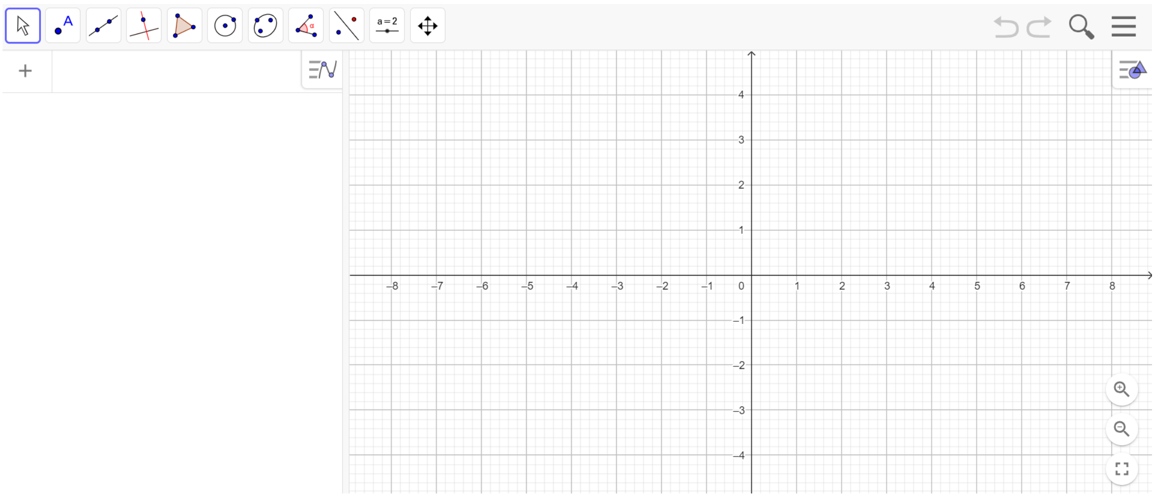
3.2 Apresentação do software Geogebra

A Interface A interface do software GeoGebra ao ser “carregado4 ” apresenta a seguinte configuração padrão

3.2.1 Barra de Ferramentas

A Barra de Ferramentas localizada na parte superior da tela do GeoGebra é composta de doze conjuntos de ícones com as ferramentas necessárias para o usuário construir, movimentar, obter medidas e modificar atributos de objetos construídos. Ao abrir o GeoGebra a Barra de Ferramentas apresenta a seguinte configuração visual.

Figura 63 – Tela inicial do geogebra



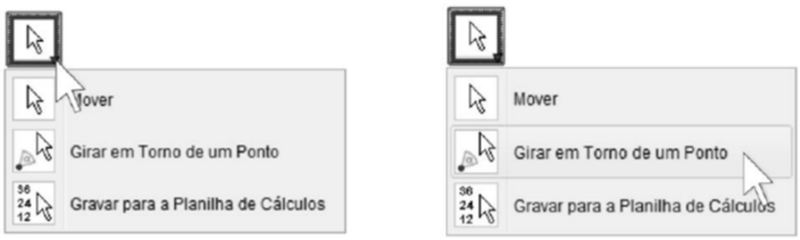
fonte:Produzido pelo autor

Figura 64 – Barra de ferramenta

fonte:(23)

Para ativar uma ferramenta clique em seu ícone. No entanto, para cada conjunto de ícones há apenas um visível. Para acessar os ícones ocultos, clique no canto inferior direito do ícone que contenha a ferramenta que deseja utilizar e selecione a ferramenta.

Figura 65 – Acessando ítens ocultos da barra de feramenta



fonte:(23)

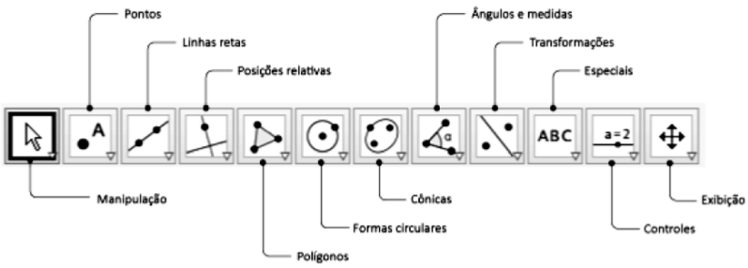
A ferramenta selecionada fica ativa e seu ícone ocupa o lugar de destaque do conjunto que ela pertence.

A Barra de Ferramentas do GeoGebra é dividida em 12 janelas, como vemos na Figura 64 a seguir

Figura 66 – ferramenta selecionada ativa

fonte:(23)

Figura 67 – Barra de ferramenta do geogebra



fonte:(23)

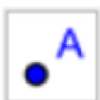
Cada uma destas janelas possui várias ferramentas. Para visualizar estas ferramentas, basta clicar sobre a seta no canto do ícone e então irão aparecer as opções referentes a cada uma delas. Algumas destas ferramentas serão descritas a seguir.

Figura 68 – MOVER

fonte:(23)

Esta ferramenta é utilizada para arrastar e mover objetos livres. Ao selecionar um objeto no modo Mover, pode-se apagar o objeto pressionando a tecla Delete (Del), ou então movê-lo usando o mouse ou as setas do teclado.

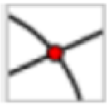
Figura 69 – NOVO PONTO



fonte:(23)

Para criar um novo ponto, selecione esta ferramenta e em seguida clique na janela geométrica. Clicando em um segmento, reta, polígono, cônica, gráfico de função ou curva, você pode criar um ponto nesse objeto. Clicando na interseção de duas linhas cria-se um ponto de interseção.

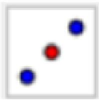
Figura 70 – INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS :



fonte:(23)

Os pontos de intersecção de dois objetos podem ser criados selecionando dois objetos, assim todos os pontos de intersecção serão criados; ou então, clicando-se diretamente sobre uma intersecção de duas linhas, assim apenas um ponto de intersecção será criado.

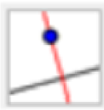
Figura 71 – PONTO MÉDIO OU CENTRO:



fonte:(23)

Com esta ferramenta pode-se obter o ponto médio entre dois pontos ou de um segmento. Para isso, basta selecionar a ferramenta, e em seguida clicar em dois pontos ou em um segmento para obter o respectivo ponto médio. Também se pode clicar numa secção cônica (por exemplo, circunferência) para criar o respectivo centro.

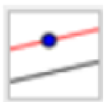
Figura 72 – RETA PERPENDICULAR :



fonte:(23)

Com esta ferramenta, pode-se construir uma reta perpendicular a uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Assim, para se criar uma perpendicular, deve-se clicar sobre um ponto e sobre uma direção, que poderá ser definida por qualquer um dos objetos citados anteriormente.

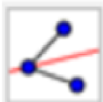
Figura 73 – RETA PARALELA :



fonte:(23)

Utilizando esta ferramenta, pode-se construir uma reta paralela a uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Para criar a reta paralela, basta clicar sobre um ponto e sobre uma direção, que poderá ser definida por qualquer um dos objetos recentemente citados.

Figura 74 – BISSETRIZ



fonte:(23)

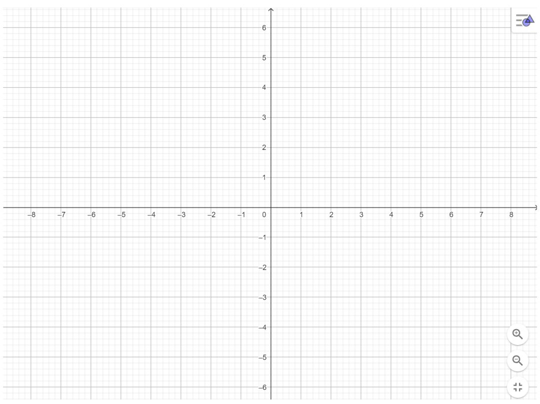
Através desta ferramenta, podemos definir uma bissetriz selecionando três pontos A, B e C, obtendo-se assim a bissetriz do ângulo ABC; ou então selecionando-se duas retas, semirretas vetores, ou segmentos de reta. Neste caso, serão determinados todos os ângulos existentes entre o par de objetos utilizado.

3.2.2 Construindo a pipa no Geogebra:

3.2.2.1 Aula 1:

Nessa aula o professor ensinará os comandos básicos do Geogebra vistos anteriormente,depois do aluno ter se familiarizado com todos os comando do geogebra ,vamos começar ensinanado o plano catesiano é fácil ver no geogebra que a tela inicial já apresenta os eixos das abscissas (x) e das ordenadas (y)facilitando o processo ensino aprendizagem ,com isso o professor poderá passar a ideia de quadrantes 1° quadrante onde o x>0 e o y>0, 2°quadrante onde x<0 e o Y>0, 3°quadrante onde o x<0 e o Y<0 e o 4°quadrante onde o x>0 e o Y<0 como veremos na figura abaixo:

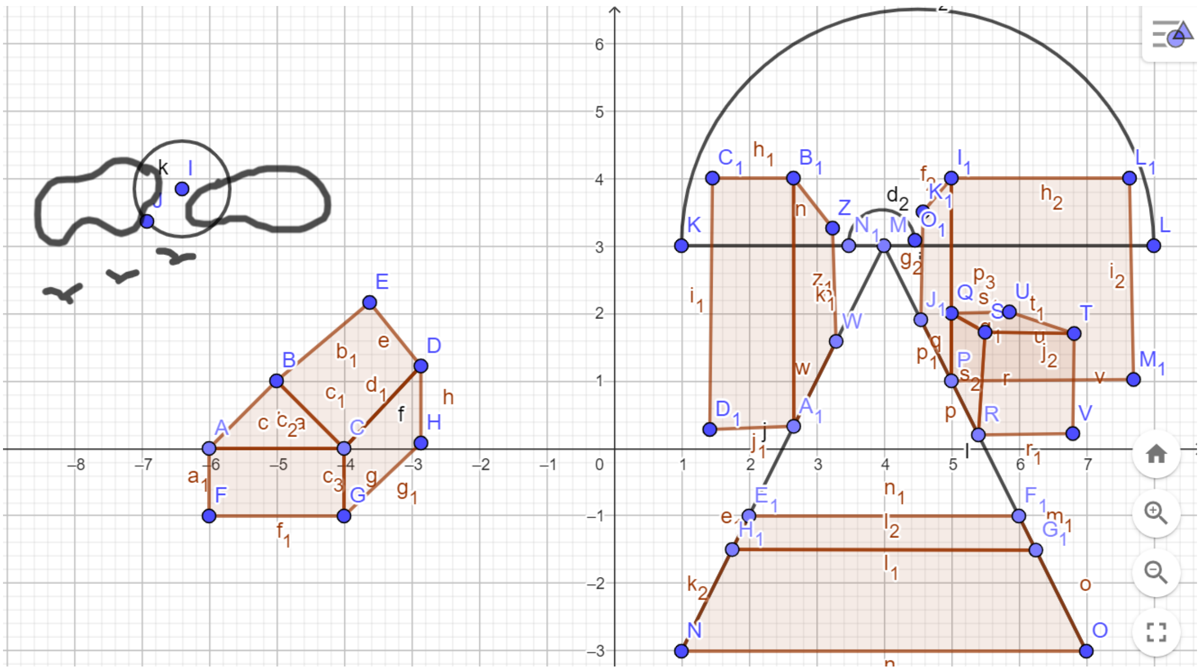
Figura 75 – Plano Cartesiano no Geogebra



fonte:Produzida pelo autor

Nesse momento vamos pedir para o aluno fazer um desenho livre utilizando pontos, retas paralelas retas perpendiculares, polígonos em especial triangulos e quadriláteros notáveis, paralelogramo, losango, retangulo e quadrado ,num segundo momento poderemos incluir circunferências e seus arcos

Figura 76 – Desenho Livre



fonte:Produzida pelo autor

É muito importante para o aluno que o professor nessa fase do 8°ano do fundamental II ,incentive cada vez mais a criatividade , nessa ase a curiosidade é muito presente, rapidamente voce irá notar alunos avançando e dominando o geogebra e fazend desenhos cada vez mais maravilhosos.

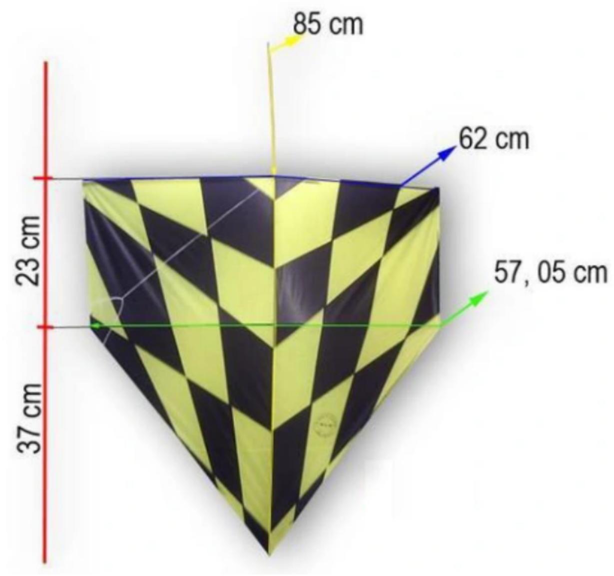
3.2.2.2 Aula 2:

O aluno vai pesquisar no Google ou criar com o auxiliode regua e compasso o modelo que ele deverá construir , escolhido esse modelo vamos importar para o geogebra essa figura

A figura escolhida por mim foi essa:

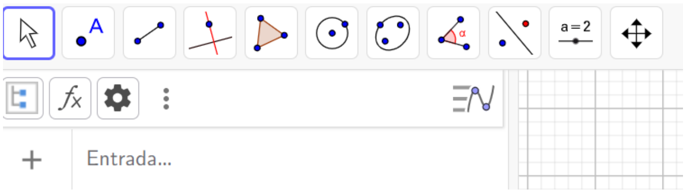
Vamos importar a figura escolhida para o geogebra clicando no (+) que fica no canto superior esquerdo

Figura 77 – Figura escolhida no google



fonte:(24)

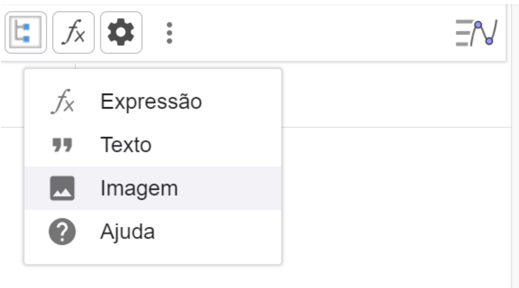
Figura 78 – botão de +



fonte:produzida pelo autor

Logo depois clicar e imagem para poder importar a figura.

Figura 79 – Clicar em Imagem

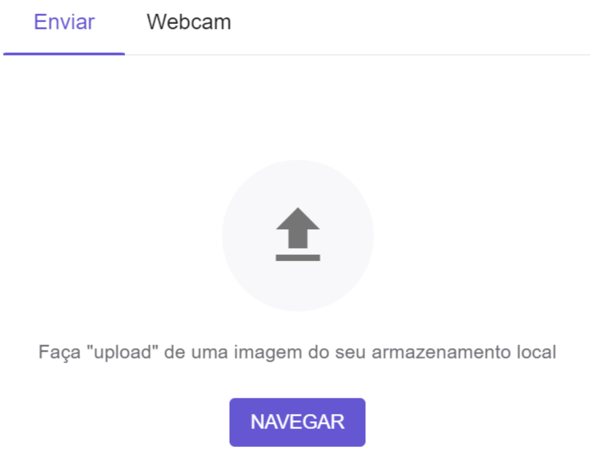


fonte:produzida pelo autor

Proximo passo é fazer o upload clicando no botão navegar

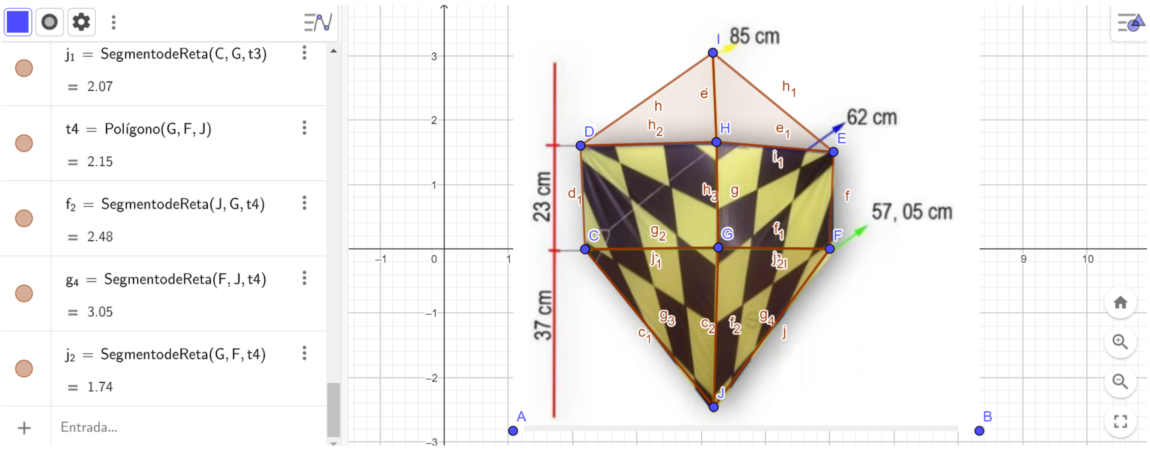
Escolha a figura e posicione de forma mais coviniente , dessa forma você poerá marcar os pontos, traçar poligono e fazer um progeto para a contrução da sua pipa deuma forma mais prática .

Figura 80 – Clicar em navegar



fonte:produzida pelo autor

Figura 81 – Pipa no geogebra

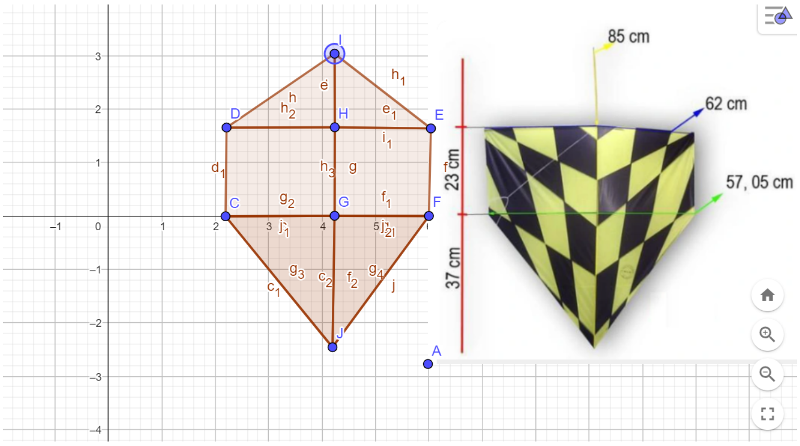


fonte:produzida pelo autor

Os alunos irão poder ajustar a figura deslocando cada ponto marcado de forma a obter o seu projeto desejado .

Nesse momento o professor poderá pedir para o aluno identificar cada forma geométrica e listar toda a teoria estudada na sala de aula

Figura 82 – Ajustar os pontos no projeto

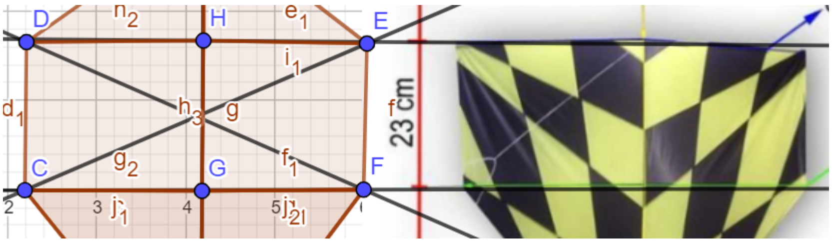


fonte:produzida pelo autor

Por exemplo:

Na figura abaixo podemos facilmente identificar um retângulo:

Figura 83 – Retângulo

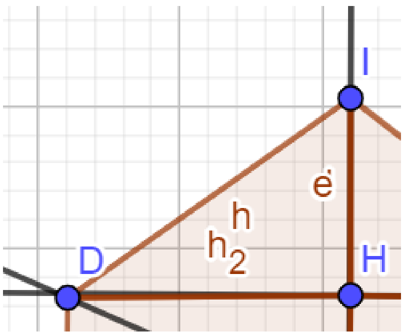


fonte:produzida pelo autor

Segundo (12) Em todo retângulo as diagonais são congruentes.

Teoria sobre triângulo retângulo

Figura 84 – Triângulo Retângulo



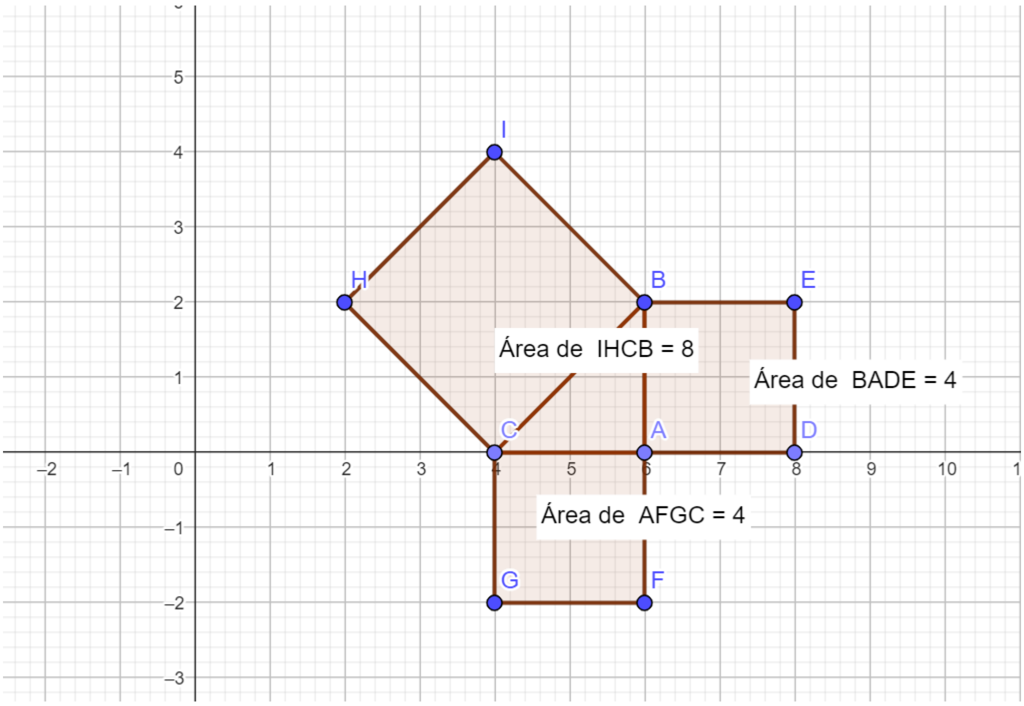
fonte:produzida pelo autor

Poderemos mostrar que o maior lado do triângulo retângulo é chamado de hipotenusa e que os outros dois lados são chamados de catetos

poderemos medir a hipotenusa desse triângulo e os dois catetos e constatar de uma forma experimental que o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos, que essa comprovação chammos na geometria de teorema de pitágoras

Como podemos comprovar montando um quadrado na hipotenusa e em cada cateto e notaremos que a área do quadrado da hipotenusa é igual a soma das áreas dos dois catetos

Figura 85 – Teorema de Pitágoras



fonte:produzida pelo autor

O aluno poderá notar que 8 (área do quadrado da hipotenusa) = 4(área do quadrado do cateto) + 4(área do quadrado do cateto), comprovando de uma forma mais lúdica o teorema de Pitágoras

Com o auxilio do geogebra e do projeto de construção da Pipa o professor poderá de uma forma rática e lúdica ministrar os conteúdos de geometria plana do 8°do fundamentel 2 ,seguindo a BNCC que (7) que fala (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

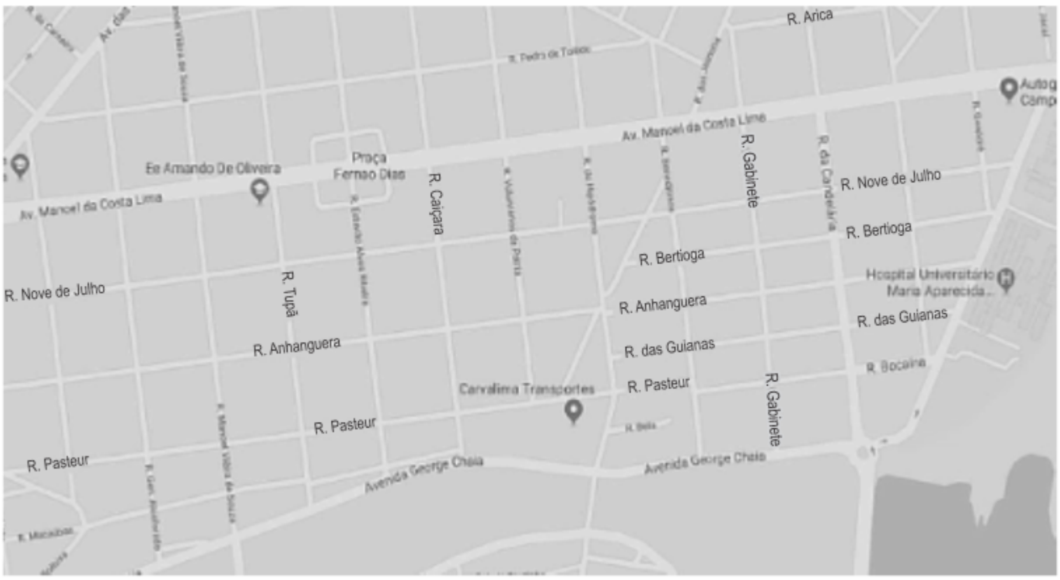
Ensinar ao aluno o geogebra possibilitará a ele uma liberdade de criar, de comprovar teorias e entender cada vez mais as formas geométricas e suas teorias.

4 Sugestão de Verificação da aprendizagem

Essa Ficha de exercício complementar é uma sugestão para que o professor possa aplicar na sua turma depois da exposição da semana da matemática. É sempre bom fazer uma verificação de aprendizagem para que os professores possam construir um relatório para possíveis adaptações do projeto a ser aplicado numa próxima oportunidade aumentando a taxa de sucesso.Seguem as questões com respostas comentadas e disponibilizadas em DOC para ser acessado pelo professor.

1. (Ufms) A figura a seguir mostra parte do mapa da cidade de Campo Grande – MS, no qual se leem os nomes de algumas ruas e avenidas.

Figura 86 – figura questão 1



(Disponível em: https://www.google.com.br/maps/place/Campo+Grande,+MS/@-20.5001896,-54.6233011,16.39z/data=!4m5!3m4!1s0x9486e6726b2b9f27:0xf5a8469ebc84d2c1!8m2!3d-20.4697105!4d-54.6201211. Acesso em 10 nov. 2018).

fonte:UFMS

Fazendo uma análise das vias como segmentos de retas, são paralelas e concorrentes, respectivamente:

a) R. Tupã e R. Anhanguera, R. Gabinete e R. Arica.
b) R. Bertioga e R. das Guianas, R. Tupã e R. Caiçara.
c) R. Tupã e R. Nove de Julho, R. Bertioga e R. Pasteur.

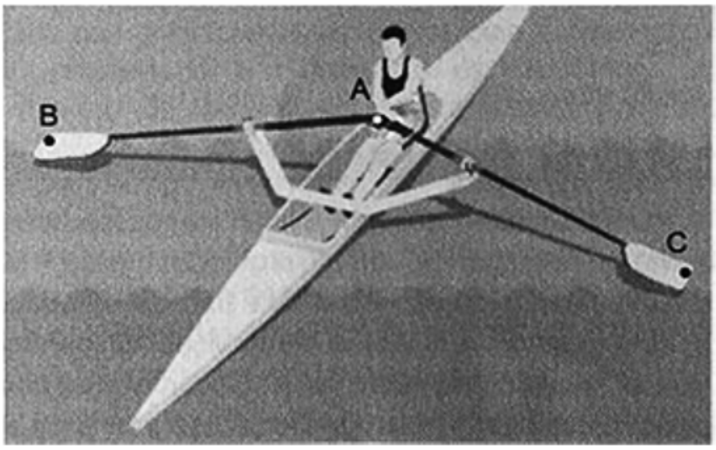
d) R. Bertioga e R. Pasteur, R. Bertioga e R. das Guianas.

e) R. Bertioga e R. Nove de Julho, R. Tupã e R. Nove de Julho.

Solução. São paralelas entre si as ruas: Arica, Bertioga, Anhanguera, das Guianas, Pasteur e Nove de Julho. As ruas Gabinete, Caiçara e Tupã também são paralelas entre si. Por outro lado, os pares de ruas concorrentes são: Arica e Gabinete, Caiçara e Nove de Julho, Caiçara e Anhanguera, Caiçara e Pasteur, Tupã e Nove de Julho, Tupã e Anhanguera, Tupã e Pasteur, Gabinete e Nove de Julho, Gabinete e Bertioga, Gabinete e Anhanguera, Gabinete e das Guianas, Gabinete e Pasteur. A resposta é a alternativa [E]. □

2. (Enem) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

Figura 87 – figura questão 2



Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

fonte:ENEM

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo $B\hat{A}C$ tem medida de 170°

O tipo de triângulo com vértices nos pontos A,B e C no momento em que o remador está nessa posição, é :

a) retângulo escaleno.

b) acutângulo escaleno.

c) acutângulo isósceles.

d) obtusângulo escaleno.

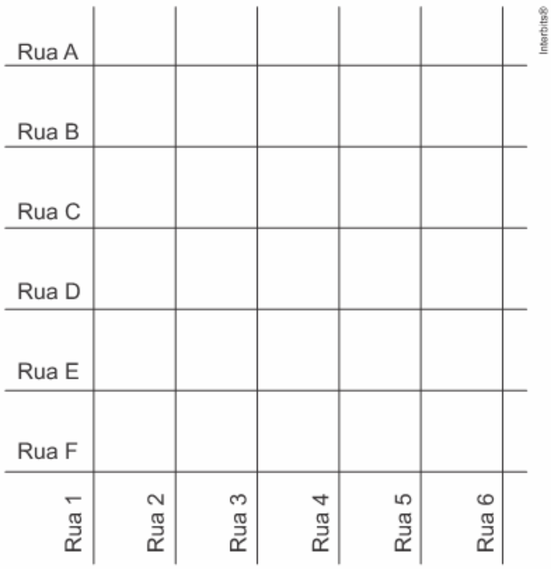
e) obtusângulo isósceles.

Solução. Sendo Solução. Sendo AB=AC e 90°< Â < 180° podemos afirmar que é obtusângulo isósceles. resposta [E].

□

3. (Enem) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.

Figura 88 – figura questão 3



fonte:ENEM

A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A.

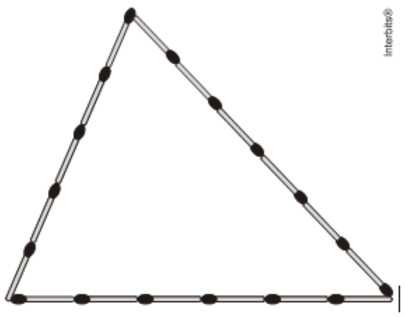
Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C.
b) 4 e C.
c) 4 e D.
d) 4 e E.
e) 5 e C.

Solução. Por simetria, o imóvel deverá estar sobre a mediatriz do segmento de reta que une o local de trabalho da mãe e o consultório do pai. Tal mediatriz corresponde à rua Ademais, por inspeção, concluímos que a rua horizontal que cumpre a condição é a letra [C] □

4. (Enem) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.

Figura 89 – figura questão 4



fonte:ENEM

A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é :

a) 1-2-4
b) 3-2-6
c) 8-4-3
d) 3-9-4
e) 6-4-5

Solução. Sejam a e b as quantidades de palitos em cada um dos outros dois lados do triângulo. Tem-se que $\{a, b\} \in \{\{1, 10\}, \{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}\}$. Mas, pela condição de existência de um triângulo, só pode ser $\{a, b\} \in \{\{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}\}$ e, portanto, a resposta é 3. Resposta letra $[A]$. □

5. (Ufrgs) Assinale a alternativa que apresenta corretamente os valores, na mesma unidade de medida, que podem representar as medidas dos lados de um triângulo.

a) 1 – 2 – 4
b) 3 – 2 – 6

c) 8 – 4 – 3

d) 3 – 9 – 4

e) 6 – 4 – 5

Solução. Condições para representar um triângulo: "Qualquer um dos lados é menor que a soma dos outros dois e maior que o valor absoluto da diferença entre esses lados". Logo, a resposta é a alternativa [E]. □

6. (Uem - adaptada) Com base em conhecimentos de Geometria Plana, faça o somatório dos ítens corretos e e coloque a resposta no luger indicado.

01) O quadrado do comprimento do lado maior de um triângulo só é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos demais lados se o ângulo interno oposto ao maior lado é reto.

02) Todo quadrilátero no qual as medidas de todos os lados são as mesmas é um quadrado.

04) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 360 graus.

08) Todo quadrilátero que é um retângulo é, também, um paralelogramo.

16) Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é sempre maior do que o comprimento do lado restante.

Resposta ( ).

Solução. $01 + 08 + 16 = 25$.

[01] Verdadeiro. Trata-se da descrição do Teorema de Pitágoras (triângulos retângulos).

[02] Falso. A condição para ser considerado quadrado são todos os lados e todos os ângulos iguais (losango também tem lados iguais, mas ângulos diferentes).

[04] Falso. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 360 graus.

[08] Verdadeiro. As condições para ser paralelogramo são verificadas também nos retângulos, ou seja: têm lados opostos congruentes, ângulos opostos congruentes e as diagonais cortam-se ao meio.

[16] Verdadeiro. Está é uma condição para que se tenha um triângulo. □

7. (S1 - ifal) Julgue as afirmativas abaixo e assinale a alternativa correta.

I. Todo paralelogramo é losango.

II. Se um quadrilátero tem todos os lados com a mesma medida, então esse quadrilátero é um quadrado.

III. As diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si.

a) Só I é verdadeira.
b) Só II é verdadeira.
c) Só III é verdadeira.
d) I e III são verdadeiras.
e) II e III são verdadeiras.

Solução. [I] Falsa. Um losango é um paralelogramo de lados congruentes.

[II] Falsa. Um quadrado deve ter todos os lados com a mesma medida e todos os ângulos retos.

[III] Verdadeira. As diagonais de um quadrado são sempre perpendiculares entre si. Resposta letra [C]. □

8. (Uerj-Adaptada) Se um polígono tem todos os lados iguais, então todos os seus ângulos internos são iguais.

   Para mostrar que essa proposição é falsa, pode-se usar como exemplo a figura denominada:

   a) Losango
   b) Trapézio
   c) Retângulo
   d) Quadrado
   e) Hexágono

   Solução. Falsa , pois o losango possui lados iguais e seus angulos não são obrigatoriamente iguais.Resposta letra[A]. □

9. (ITA 89)

   Dadas as afirmações:

   I - Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares.

   II - Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

   III - Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzam em seu ponto médio, então esse paralelogramo é um losango.

   Podemos garantir que:

a) Todas são verdadeiras.

b) Apenas I e II são verdadeiras.

c) Apenas II e III são verdadeiras.

d) Apenas II é verdadeira.

e) Apenas III é verdadeira.

Solução. I- Falso, os trapezoides são quadriláteros que não possuem essa propriedade,

II- Verdadeiro, num paralelogramo os angulos consecutivos são suplementares,

III- Verdadeiro, em todo losango as diagonais são perpendiculares e se encontram num ponto médio, logo a resposta será a letra [C]. □

10. (Unesp) Considere as seguintes proposições:

I)Todo quadrado é um losango.

II)Todo quadrado é um retângulo.

III)Todo retângulo é um paralelogramo.

IV) Todo triângulo equilátero é isóscele.

Pode-se afirmar que:

a) Só uma é verdadeira.

b) Todas são verdadeiras.

c) Só uma é falsa.

d) Duas são verdadeiras e duas são falsas.

e) Todas são falsas.

Solução. I) verdadeiro, todo quadrado posui os lados congruentes logo será um losango.

II)verdadeiro, todo quadrado possui os angulos congruentes logo será um retângulo.

III)verdadeiro, todo retangulo possui os lados opostos paralelos logo será um paralelogramo.

IV)verdadeiro , todo triângulo equilátero possui dois lados congruente logo será um triângulo isósceles.Resposta letra [B] □

4.1 Baixar o material em DOC

Acesse o link da apresentação do Google Slides clicando no seguinte endereço:

Apresentação no Google Slides

4.2 Sugestão de projeto pedagógico para o professor

Segue uma sugestão de uma ficha de identificação de projeto para auxiliar o professor apresentar a direção da sua escola.

Figura 90 – Projeto da pipa

Ficha de Identificação de Projeto

Curso: 8° ano Ensino Fundamental II	**Turma A e B**
Nome do Projeto: **Pipa uma abordagem lúdica da Geometria**	
Inicio Março	**Término: Junho**
Nome dos Responsáveis: **Professor de Matemática; Coordenação Psicopedagógica e alunos**	
Objetivos: **Construir o Processo ensino aprendizagem de forma lúdica e contextualizada**	
Justificativa: **Justifica-se este projeto tendo em vista a necessidade de relacionar a teoria à prática**	
Resultados esperados: **Espera-se que ao final do processo o aluno seja capaz de ter compreendido as teorias de paralelismo, perpendicularidade, triângulos e quadriláteros.**	
Sistemática: • **Aula expositiva com participação** • **Construção da Pipa** • **Prática** • **Exposição de resultados na Semana da Matemática** • **Atividades de verificação da aprendizagem**	
Custo **Papel de seda** **Bambu** **Linha 10 ou 0**	

Cronograma	**Fev**	**Mar**	**Abr**	**mai**
Preparação	**X**			
Realização		**X**		
Exposição			**X**	
Avaliação				**X**

Avaliação: **Sistemática e Contínua com recuperação ao longo do trabalho** **Verificação da aprendizagem** **OBSERVAÇÕES**	

fonte:Produzido pelo autor

Acesse o link para baixar a sugestão de projeto no seguinte endereço:

Ficha de identificação de projeto

Conclusão

A dissertação de mestrado foi construída para abranger atividades nas quais os alunos tivessem a autonomia e liberdade para debater e trocar ideias com os colegas e professor, questionando, argumentando e tirando conclusões sobre seus pontos de vista, e abranger também os temas transversais conforme estabelece os PCNs (1998).

Durante o desenvolvimento das atividades do processo pode-se observar que esse recurso propiciou o desenvolvimento da visualização, identificação, nomeação de ângulos, triângulos, quadriláteros e polígonos com mais de quatro lados identificando características como lados, ângulos, vértices, eixo de simetria e outras propriedades dos polígonos, além de estimular os alunos a desenvolver métodos próprios.

Ao iniciar a pesquisa foram aplicadas atividades com pipas explorando ângulos e eixos de simetria. A partir desta experiência foi possível construir um tutorial para professores. Concluímos que os recursos didáticos desempenham um papel importante no processo de ensino e aprendizagem, desde que haja clareza das potencialidades e dos limites que cada um deles proporciona e de como eles podem ser inseridos numa proposta global de trabalhos.

É preciso interligar os conceitos matemáticos e relacioná-los com outras áreas do conhecimento, inclusive com o senso comum para, através da análise, separar crença de ciência. Dessa forma, o cotidiano do aluno, além de ser um elemento motivador da aprendizagem, passa a ser explicado com maior clareza pelo conhecimento objetivo adquirido e pela análise feita.

Por esse motivo, pensamos que o professor necessita conhecer o recurso didático que pretende utilizar para aproveitá-lo como instrumento de aprendizagem e por meio dele oferecer situações onde o aluno apresente progressos na construção de conceitos. O recurso didático explorado neste trabalho possui a vantagem de ser de fácil construção e manuseio, sendo acessível a qualquer professor e promove entre os alunos a interação, a colaboração, a motivação e a ajuda mútua. Portanto, o recurso didático pipa, viabilizou o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes do ensino fundamental.

A pipa vem novamente estimular o aluno, para que a experiência em sala de aula seja mais prazerosa. Não há dúvidas de que, quando estiver tentando elaborar um raciocínio para responder questões, o aluno se lembrará da pipa e dos momentos agradáveis que ela proporcionou, fazendo com que as próximas etapas (estudo profundo envolvendo a pipa) não sejam tão entediantes.

Após todo o estudo feito, o aluno percebeu que podem ser explorados vários conceitos matemáticos olhando para a pipa, tais como desigualdade triangular, classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos, triângulo retângulo e suas propriedades, quadriláteros, hexágono regular, entre outras. Aqui o aluno deixa de ver a pipa apenas como um arranjo de bambu, palha de coqueiro, papéis de seda e linhas, ou seja, a pipa se concretizou para ele; a visão de pipa mudou pois a visão de mundo se altera com o conhecimento.

Ou seja, através da análise, o conhecimento do aluno sobre a pipa saiu do senso comum e chegou à síntese, que é a compreensão da realidade investigada em seu todo concreto e é assim que o indivíduo se humaniza. Ao mesmo tempo, os alunos se conscientizaram sobre os cuidados na utilização da pipa, e conscientizam a comunidade em que vive, escolhendo os melhores locais para a sua prática evitando acidentes na sociedade.

Ao mesmo tempo constata-se o crescimento do processo ensino aprendizagem da geometria no que diz respeito a compreensão do mundo , aprimorando o raciocinio lógico,proporcionando o entendimento ao trabalho de outras áreas do conhecimento, devido a importância no cotidiano do indivíduo

Referências

1 VEER, R. V. D.; VALSINER, J. *Vygotsky-uma síntese*. [S.l.]: Edições Loyola, 1996.

2 ALIPIO, A. N. P. et al. O lúdico no processo de ensino aprendizagem na educação infantil.

3 BRIZOLA, M. B. d. A. Classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos, apresentação do teorema de pitágoras. 2015.

4 CAPARICA, Á. d. A. O isocronismo dos triângulos retângulos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, p. 389–392, 2007.

5 D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: Papirus Editora, 1996.

6 COSTA, A. P. da; SANTOS, M. C. dos. Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do geogebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do ensino fundamental. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v. 5, n. 2, p. 3–17, 2016.

7 BRASIL, S. *Ministério da Educação. Base nacional comum curricular*. [S.l.]: MEC Brasília, DF, 2018.

8 MELO, M. d. F. A. Q. Algumas aprendizagens construídas durante a brincadeira de pipa: o que está em jogo. *Educação em Revista*, v. 26, n. 02, p. 89–115, 2010.

9 STUDHISTóRIA. *História dos Brinquedos: Pipa*. 2024. Acessado em: 10 dez. 2024. Disponível em: <https://studhistoria.com.br/historia-das-coisas/historia-dos-brinquedos-pipa/>.

10 StudHistória. *História dos Brinquedos: Pipa*. 2024. Acessado em: 9 de dezembro de 2024. Disponível em: <https://studhistoria.com.br/historia-das-coisas/historia-dos-brinquedos-pipa>.

11 PIPAS - Curso Passo a Passo. Acessado em: 9 dez. 2024. Disponível em: <http://www.passoapassocursos.com.br/pipas1>.

12 DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana*. [S.l.]: Atual, 1993.

13 VALCI. *Construção de Pipas*. 2019. Acessado em: 6 de dezembro de 2024. Disponível em: <https://valci.com.br/home/2019/08/28/construcao-de-pipas/>.

14 ARANHA, J. *Habilidades de recortar com tesoura e aprendizagem: Psicopedagoga em Campinas responde*. 2024. Acessado em: 10 dez. 2024. Disponível em: <https://julianaaranha.com/habilidades-de-recortar-com-tesoura-e-aprendizagem-psicopedagoga-campinas-responde/#:~:text=Recomenda%C3%A7%C3%B5es%20de%20seguran%C3%A7a,(como%20a%20foto%20abaixo).>

15 ARTES, G. *5 dicas muito úteis de como usar um compasso*. 2024. Acessado em: 10 dez. 2024. Disponível em: <https://blog.grafittiartes.com.br/5-dicas-muito-uteis-de-como-usar-um-compasso>.

16 CALDAS, P. de Poços de. *DME orienta sobre os cuidados ao soltar pipa*. 2024. Acessado em: 10 dez. 2024. Disponível em: <https://pocosdecaldas.mg.gov.br/noticias/dme-orienta-sobre-os-cuidados-ao-soltar-pipa/>.

17 ESCOLA, B. *O que é a condição de existência de um triângulo?* 2024. Acessado em: 10 dez. 2024. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-a-condicao-existencia-um-triangulo.htm>.

18 IFSC Wiki. *Desenho Geométrico - Unilasalle*. 2024. Acessado em: 9 de dezembro de 2024. Disponível em: <https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/images/5/52/ARU_DEB_desgeo_unilasalle1.pdf>.

19 O Baricentro da Mente. *Construção Geométrica de Perpendiculares*. 2018. Acessado em: 9 de dezembro de 2024. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2018/02/construcao-geometrica-de-perpendiculares.html>.

20 (UFSM), U. F. de S. M. *Construções geométricas com régua e compasso*. 2020. Acessado em: 10 dez. 2024. Disponível em: <https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/783/2020/08/Apostila-Finalizada-Constru%C3%A7%C3%B5es-Geom%C3%A9tricas-com-r%C3%A9gua-e-compasso.pdf>.

21 Stefanelli Engenharia. *Paralelas para Esquadro*. 2025. Acessado em: 9 mar. 2025. Disponível em: <https://www.stefanelli.eng.br/paralelas-par-esquadro/>.

22 WIKIHOW. *Como fazer uma pipa*. 2024. Acessado em: 10 dez. 2024. Disponível em: <https://pt.wikihow.com/Fazer-uma-Pipa>.

23 PEIXOTO, L. F. d. J. *O uso do software GeoGebra e suas aplicações no ensino das cevianas básicas*. 2014. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Disponível em: <https://ri.ufrb.edu.br/bitstream/123456789/3658/1/Uso_Software_GeoGebra_Disserta%c3%a7%c3%a3o_2014.pdf>.

24 São Paulo Pipas. *Medidas de pipas: tamanho da pipa e distância das varetas*. 2010. Acessado em: 6 jan. 2025. Disponível em: <https://saopaulopipas.wordpress.com/2010/08/13/medidas-pipas-tamanho-pipa-distancia-vareta/>.