



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Douglas de Souza Rodrigues da Silva

**A Geometria Plana nas Olimpíadas de Matemática para alunos
da educação básica**

RECIFE
2025



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Douglas de Souza Rodrigues da Silva

**A Geometria Plana nas Olimpíadas de Matemática para alunos
da educação básica**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Clessius Silva

RECIFE
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

S586g Silva, Douglas de Souza Rodrigues da.
A geometria plana nas olimpíadas de matemática para
alunos da educação básica / Douglas de Souza Rodrigues
da Silva. – Recife, 2025.
121 f.; il.

Orientador(a): Clessius Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de
Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em
Matemática (PROFMAT), Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Geometria plana. 2. Teorema de Menelaus. 3.
Quadrilátero. 4. Triângulo 5. Matemática - Olimpíadas. I.
Silva, Clessius, orient. II. Título

CDD 510

DOUGLAS DE SOUZA RODRIGUES DA SILVA

"A Geometria plana nas Olimpíadas de Matemática para alunos da educação básica.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 21/02/2025

BANCA EXAMINADORA

Clessius Silva

Prof. Dr. Clessius Silva (Orientador) – UFRPE

Joelma A. de Moura Nascimento

Profa. Dra. Joelma Azevedo de Moura – UPE

Tarciana M^ª S Silva

Profa. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva – PROFMAT/UFRPE

À minha família.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus pelo dom da vida e pelas oportunidades que sempre estiveram presentes em meu caminho. Agradeço também à minha família, por todo o apoio constante. Em momentos difíceis, o elo familiar se torna ainda mais importante, e é nessas horas que sua presença faz uma notável diferença. Aos meus colegas de turma do PROFMAT, expresso minha gratidão pelo carinho e pela parceria ao longo de todo o trajeto acadêmico. E, finalmente, agradeço ao meu orientador, Clessius Silva, por todo o apoio e compreensão.

*“A ciência é o conhecimento organizado.
A sabedoria é a vida organizada.”
(Immanuel Kant)*

Resumo

Este trabalho apresenta tópicos de geometria plana de grande importância para estudantes que participam de olimpíadas de matemática, como o Teorema de Ceva, Teorema de Menelaus, Quadriláteros cíclicos, dentre outros. A ideia central, reside na criação e implementação de um curso de geometria olímpica para alunos da educação básica, bem como fornecimento de material para professores. Nesse sentido, inicialmente é feita uma abordagem histórica acerca das olimpíadas de matemática a nível nacional e internacional. Em seguida, os tópicos da teoria são tratados, sempre seguindo a linha da construção de tal teoria, via demonstração, seguida de algumas aplicações. Um pouco mais adiante, são tratados problemas olímpicos em nível mais avançado, com a ideia de fortalecer cada vez mais o campo de Resolução de Problemas, que acredita-se ser o coração do aprendizado matemático. Finaliza-se o trabalho com a apresentação e execução de uma sequência didática, estruturada em formato de curso.

Palavras-chave: Geometria plana; Teorema de Menelaus; Quadriláteros cíclicos; Teorema de Ceva; Resolução de problemas; Semelhança de triângulos; Olimpíadas de Matemática.

Abstract

This work presents important topics in plane geometry for students participating in mathematics olympiads, such as Ceva's Theorem, Menelaus' Theorem, Cyclic Quadrilaterals, among others. The central idea lies in the creation and implementation of an olympic geometry course for basic education students, as well as the provision of material for teachers. In this regard, a historical approach to mathematics olympiads at the national and international levels is initially undertaken. Then, the theory topics are addressed, always following the line of building such theory through demonstration, followed by some applications. Further on, olympic-level problems are addressed at a more advanced level, with the aim of increasingly strengthening the field of Problem Solving, which is believed to be at the heart of mathematical learning. The work concludes with the presentation and execution of a didactic sequence, structured in the format of a course.

Keywords: Plane Geometry; Menelaus' Theorem; Cyclic Quadrilaterals; Ceva's Theorem; Problem Solving; Similarity of triangles; Mathematics Olympiads.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Triângulo com áreas iguais	26
Figura 2 – Problema sobre área - OPEMAT 2023	28
Figura 3 – Questão sobre área.	29
Figura 4 – Importante resultado sobre alturas de um triângulo.	31
Figura 5 – Forma trigonométrica da área do triângulo.	33
Figura 6 – Triângulo qualquer.	33
Figura 7 – Triângulo e seu incírculo.	34
Figura 8 – Dedução da área via Incírculo.	35
Figura 9 – Triângulo e seu Circuncírculo.	36
Figura 10 – Triângulo qualquer com lados definidos.	37
Figura 11 – Semelhança de triângulos	40
Figura 12 – Problema 01 - semelhança de triângulos	41
Figura 13 – Triângulos retângulos semelhantes	43
Figura 14 – Figura base para as relações métricas	44
Figura 15 – Exemplo de uma Corda.	46
Figura 16 – Relação entre cordas.	46
Figura 17 – Relação entre segmentos secantes.	47
Figura 18 – Relação entre segmentos secante e tangente a uma circunferência.	48
Figura 19 – Potência de ponto - Caso 01	49
Figura 20 – Demonstração - Eixos Radicais	51
Figura 21 – Finalizando a demonstração	52
Figura 22 – Triângulo retângulo.	54
Figura 23 – Triângulo com altura traçada.	55
Figura 24 – Triângulo retângulo isósceles.	56
Figura 25 – Ilustração do problema.	57
Figura 26 – Lei dos Cossenos	58
Figura 27 – Caso β agudo.	59
Figura 28 – Caso β obtuso.	60
Figura 29 – Relação de Stewart.	61
Figura 30 – Lei dos Senos	62
Figura 31 – Demonstração da Lei dos Senos.	62
Figura 32 – Teorema de Menelaus.	64
Figura 33 – Demonstração do Teorema de Menelaus	64
Figura 34 – Problema 1 sobre o Teorema de Menelaus.	66
Figura 35 – Ilustração do problema da IMO 1982	67
Figura 36 – Resolvendo o problema.	68

Figura 37 – Cevianas concorrentes.	70
Figura 38 – Construção auxiliar para provar o Teorema de Ceva.	71
Figura 39 – Utilizando os Teoremas de Ceva e Menelaus.	73
Figura 40 – O Teorema do ângulo externo.	74
Figura 41 – Quadriláteros cíclicos.	75
Figura 42 – Auxílio para a demonstração.	76
Figura 43 – Caso em que o ponto B é interno ao quadrilátero.	77
Figura 44 – Ilustração do critério 2 para determinação de um quadrilátero cíclico.	78
Figura 45 – Recíproca da demonstração do critério 2 para determinação de um quadrilátero cíclico.	80
Figura 46 – Quadrilátero cíclicos - um bom problema.	80
Figura 47 – Quadrilátero cíclicos - parte final	81
Figura 48 – Teorema de Ptolomeu.	81
Figura 49 – Demonstração do Teorema de Ptolomeu.	82
Figura 50 – Demonstração via Teorema de Ptolomeu.	84
Figura 51 – Demonstração da Desigualdade de Ptolomeu via semelhança de triângulos.	85
Figura 52 – Problema sobre áreas determinadas pela concorrência de três cevianas.	87
Figura 53 – Questão da OBMEP	88
Figura 54 – Resolvendo a questão da OBMEP 2023.	89
Figura 55 – Questão da OPEMAT 2023 sobre áreas e círculos.	91
Figura 56 – Ilustração do problema	92
Figura 57 – Auxílio para a resolução do problema.	93
Figura 58 – Ilustração do problema da IMO 1985.	95
Figura 59 – Ilustração do problema com eixos radicais.	96
Figura 60 – Com a interseção Q	97
Figura 61 – Final da resolução.	97
Figura 62 – Situação inicial do problema.	98
Figura 63 – Situação atual do problema.	98
Figura 64 – Questão da Olimpíada Cone Sul.	99
Figura 65 – Ilustração do lema.	100
Figura 66 – Incentros dos triângulos.	101
Figura 67 – Portal da OBMEP.	106
Figura 68 – Fundamentos de Matemática Elementar	107
Figura 69 – POTI - Geometria	108
Figura 70 – Questão da OBMEP 2022 - 2º fase - Nível 02.	108
Figura 71 – Questão da OBMEP 2022 - 2º fase - Nível 02 - item b.	109
Figura 72 – Questão da OBMEP 2022 - 2º fase - Nível 02 - item c.	109
Figura 73 – Questão sobre áreas de círculos - Clubes de Matemática da OBMEP.	109
Figura 74 – Prova Nacional - PROFMAT - 2013	110

Figura 75 – OBMEP 2023 - Áreas	110
Figura 76 – OBMEP - Áreas - Letra B	110
Figura 77 – Áreas de figuras planas - OBMEP 2021.	111
Figura 78 – OBMEP 2021 - item A.	111
Figura 79 – OBMEP 2021 - item B.	112
Figura 80 – OBMEP 2021 -item C.	112
Figura 81 – Teorema de Menelaus - Portal da Matemática OBMEP	113
Figura 82 – Questão sobre quadriláteros cíclicos e ângulos na circunferência.	114
Figura 83 – Banco de Questões da OBMEP - 2016	114
Figura 84 – Portal da Matemática	115
Figura 85 – Aplicação direta do Teorema de Ptolomeu.	115
Figura 86 – Teorema de Ptolomeu e triângulo equilátero.	116
Figura 87 – Excelente questão do Portal da Matemática - OBMEP	117
Figura 88 – OBMEP 2015 - Nível 03 - 1ªFase	117
Figura 89 – Questão da OBMEP 2016 - Nível 03 - 1ªFase.	118
Figura 90 – Auxílio para resolução.	118

Sumário

	Introdução	21
1	ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE AS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA	23
2	TÓPICOS BÁSICOS DE GEOMETRIA PLANA	25
2.1	Estudo de áreas de triângulos	25
2.1.1	Área de um triângulo qualquer	26
2.1.2	Forma trigonométrica da área de um triângulo	32
2.1.3	Área de um triângulo em função do raio do incírculo	34
2.1.4	Área de um triângulo em função do raio do circuncírculo	35
2.1.5	Fórmula de Heron - Área de um triângulo em função dos seus lados	37
2.2	Semelhança de Figuras Planas e suas consequências	39
2.3	Semelhança de Triângulos	39
2.3.1	Relações métricas no triângulo retângulo	44
2.3.2	Relações métricas na circunferência	45
2.3.3	Potência de ponto e Eixo radical	48
2.4	Resultados elementares de Trigonometria	53
2.4.1	Relações trigonométricas no Triângulo retângulo	53
2.4.2	Relações trigonométricas em Triângulos quaisquer	58
2.5	Teorema de Menelaus	63
2.6	Teorema de Ceva	70
2.7	Quadriláteros Cíclicos	73
2.7.1	Teorema de Ptolomeu	80
2.7.2	Desigualdade de Ptolomeu	83
3	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS OLÍMPICOS	87
3.1	Problemas	87
4	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	103
4.1	Estrutura Curricular da Sequência Didática	103
4.2	Descrição do Curso ministrado	105
4.3	Questões aplicadas nos Encontros	106
4.3.1	Questões referentes ao encontro 01 - Semelhança de figuras planas	106

4.3.2	Questões referentes ao encontro 02 - Áreas de figuras planas	108
4.3.3	Questões referentes ao encontro 03 - Teorema de Ceva e Menelaus	112
4.3.4	Questões referentes ao encontro 04 - Quadriláteros cíclicos . .	113
4.3.5	Questões referentes ao encontro 05 - Teorema de Ptolomeu .	115
4.3.6	Questões referentes ao encontro 06 - Avaliação final	117
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	119
	REFERÊNCIAS	121

Introdução

A Matemática é fortemente presente no dia a dia da sociedade. Contudo, não se limita a tal feito, sendo objeto de estudo em Universidades e Centros de Pesquisas em escala Mundial. Nesse sentido, está em constante avanço, sendo base para a resolução de problemas que permitem o avanço social, seja na área econômica, na medicina, dentre outras. Essa ciência busca compreender e atuar da melhor forma no mundo. Assim, pode-se afirmar que o conhecimento alcançado é resultado de esforços humanos, sendo a matemática, portanto, uma das ciências mais humanas (1).

A geometria plana, é uma das áreas mais antigas e fundamentais de toda a matemática, tanto no nível básico, quanto no superior. Tal campo desempenha papel fundamental no desenvolvimento lógico dos estudantes. Desde os tempos da Grécia Antiga, com os trabalhos de Euclides, até os dias atuais, o estudo das figuras planas, bem como suas propriedades e relações, tem sido uma parte essencial do currículo matemático. Nas últimas décadas, as olimpíadas de matemática têm se destacado como uma importante ferramenta pedagógica e motivacional na educação básica. Esses eventos, que vão além das salas de aula tradicionais, incentivam os alunos a explorarem problemas desafiadores, desenvolvendo habilidades de raciocínio, criatividade e persistência. Vale ainda ressaltar o papel social desempenhado por tais Olimpíadas.

Dessa forma, esse trabalho tem como objetivo explorar o papel da Geometria Plana nas Olimpíadas de Matemática voltadas para estudantes da Educação Básica. Mais precisamente, a ideia central reside no desenvolvimento e implementação de um curso de geometria plana voltado para preparar alunos da educação básica para competições de matemática, promovendo o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, raciocínio lógico e criatividade.

Por meio da análise e resolução de questões de diversas competições, como a Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP), Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), dentre outras, pretende-se identificar as competências geométricas mais requisitadas, bem como os métodos mais eficazes para preparar os alunos para tais desafios. Portanto, a ideia é fornecer um curso de Geometria Plana, voltado para as Olimpíadas, possibilitando a preparação por partes dos estudantes, como também os subsídios necessários para que o professor da Educação Básica possa fazer uso em suas aulas ou em projetos afins. Além disso, busca-se investigar o impacto dessas competições no desempenho acadêmico e no interesse dos alunos pela matemática.

No Capítulo 1, realizamos uma breve, porém importante, abordagem histórica sobre as Olimpíadas de Matemática, visando descrever a trajetória e evolução, desde o nível

nacional até o mundial. Cabe ressaltar a relevância do tema Olimpíadas estar em constante pauta de debate, uma vez que é, sem dúvidas, um meio de progresso social por partes dos envolvidos, bem como forte contribuinte na divulgação matemática. No Capítulo 2 apresentaremos os principais teoremas de geometria plana presentes em competições de matemática. No Capítulo 3, focamos nossos esforços na resolução de questões de provas olímpicas, bem como em outros problemas de nível relevante e interessante. Por fim, no Capítulo 4, desenvolvemos uma Sequência Didática, que é o produto final do presente trabalho.

1 Abordagem histórica sobre as Olimpíadas de Matemática

Um dos principais instrumentos para a divulgação da ciência Matemática são as Olimpíadas de Matemática. Por Olimpíada de Matemática, entende-se uma competição similar às esportivas. Sendo assim, faz-se necessário uma preparação específica para sua realização. Desse modo, os estudantes envolvidos precisam seguir uma rotina de estudos individual ou em grupo, visando essencialmente a resolução de problemas dos mais variados níveis. Assim, em meio a tal preparação, os envolvidos são estimulados a desenvolver cada vez mais suas habilidades lógicas, aprimorando sua criatividade e sociabilidade, bem como o desenvolvimento do agir em grupo.

Historicamente, os primeiros vestígios de competições matemáticas, realizadas em um país, remontam aos concursos de matemática em Eotvos, na Hungria, por volta de 1894. Nesse marco, as organizações de Matemática e Física do país realizaram essa competição envolvendo todos os estudantes concluintes do segundo grau. Tal ação, foi uma homenagem ao famoso professor de matemática e membro da Academia de Ciência Húngara e do Instituto Politécnico da Universidade de Budapeste, József Kürschák. Pelo êxito obtido com tal evento, a ideia passou a ser difundida por toda a Europa e posteriormente a todo o mundo (1).

A nível mundial, a principal olimpíada de matemática é a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Tal evento acontece todo ano em um país sede previamente escolhido. A primeira edição da IMO ocorreu na cidade de Brasov na Romênia em 1959, com a participação de sete países: Romênia, Hungria, Bulgária, Polônia, Checoslováquia, Alemanha Oriental e URSS, envolvendo cerca de 52 pessoas. Nesse mesmo ano, tal olimpíada tornou-se uma competição. Pode-se afirmar que tal evento é de longe um dos mais importantes para a área da Matemática. Evidentemente, a IMO evoluiu bastante com o passar dos anos, abrangendo atualmente mais de 100 países dos 5 continentes. De forma organizacional, cada país participante pode enviar uma equipe composta de até seis alunos do ensino médio (ou ainda, estudantes que não ingressaram na Universidade ou instituição equivalente), além de um líder de equipe, um vice-líder e observadores, sendo esse último opcional (2).

No Brasil, tem-se como marco inicial das Olimpíadas de Matemática, a realizada em São Paulo, no ano de 1977, cuja organização ficou a cargo da Academia de Ciências do Estado de São Paulo. Um pouco mais adiante, a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Com o passar dos anos a OBM foi se moldando, mas sem perder o principal objetivo, que é estimular o estudo de

matemática por parte dos alunos, desenvolver e aprimorar o professor, visando a melhoria no ensino e também, descobrir cada vez mais jovens talentos (3).

Outra competição de extrema importância no cenário nacional, é a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Tal evento, é uma competição que se tornou um marco no cenário educacional brasileiro. Atualmente, a OBMEP é a maior olimpíada de matemática do mundo, envolvendo cerca de 18 milhões de estudantes de todo o país. Sua primeira edição foi realizada ano de 2005, com o objetivo de estimular o estudo da matemática entre os estudantes das escolas públicas do Brasil, além de revelar talentos e promover a melhoria do ensino dessa disciplina no país. A OBMEP foi idealizada e é promovida pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o apoio do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação e do Ministério da Educação. Desde sua criação, a competição tem alcançado um notório crescimento, tanto em número de participantes quanto em abrangência territorial. Atualmente, a OBMEP atinge quase que 100% do território nacional. A cada ano, milhões de estudantes de escolas públicas de todo o país se inscrevem para participar da OBMEP. A competição é dividida em três níveis de dificuldade: Nível 1, destinado a alunos do 6º e 7º anos do ensino fundamental; Nível 2, para alunos do 8º e 9º anos do ensino fundamental; e Nível 3, para alunos do ensino médio.

É de suma relevância destacar o grande papel que a Matemática desempenha no meio social, principalmente através das referidas olimpíadas. Em especial, pode-se citar as bolsas de incentivo aos estudantes que são premiados, bem como a oportunidade dos mesmos participarem de programas de iniciação científica.

2 Tópicos básicos de Geometria plana

A Geometria Plana é uma das áreas mais antigas e fundamentais de toda a matemática. Tal campo desempenha papel fundamental no desenvolvimento lógico dos estudantes.

Desde os tempos da Grécia Antiga, com os trabalhos de Euclides, até os dias atuais, o estudo das figuras planas, bem como suas propriedades e relações, tem sido uma parte essencial do currículo matemático. Tal área da matemática envolve o estudo de uma gama de conceitos e procedimentos essenciais na resolução de problemas do cotidiano, abrangendo diversas áreas do conhecimento (4).

O destaque, bem como a grande importância do estudo de geometria fica ainda mais evidente ao fazermos uma minuciosa análise dos documentos oficiais que regem a educação no país. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por exemplo, tópicos dessa área da matemática estão presentes desde os anos iniciais do ensino fundamental, até o ensino médio.

Diante do exposto, este capítulo visa descrever com clareza os principais resultados de Geometria Plana presentes na Educação Básica, de forma direta ou indireta. Convém ressaltar que o público alvo desse texto, são estudantes e professores envolvidos em preparação para Olimpíadas de Matemática. Dessa forma, algumas demonstrações dos resultados são apresentadas aqui visando o desenvolvimento lógico e abstrato dos estudantes, bem como para referência dos professores que trabalham em turmas olímpicas. Sendo assim, a ideia é, de fato, tratar conteúdos presentes no convívio dos alunos, mas com um pouco mais de rigor.

2.1 Estudo de áreas de triângulos

O estudo da área de triângulos ocupa um papel de destaque na geometria plana, tendo aplicações fundamentais em diversas áreas da matemática e áreas afins. Desde os primórdios, a determinação da área de figuras geométricas foi essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático e para a solução de problemas práticos, como medições de terrenos e construções arquitetônicas (5).

Nesse sentido, essa seção destina-se a contemplar toda teoria necessária acerca do referido tópico, visando fornecer experiência suficiente ao estudante para resolver problemas do níveis mais avançados. Vale ressaltar que em todo o corpo do texto, a notação $[P_1P_2...P_n]$

denota a área de um polígono cujos vértices são os pontos $P_1, P_2, \dots, P_n$.

2.1.1 Área de um triângulo qualquer

O resultado a seguir, mostra como obter a área de um triângulo qualquer, quando conhecidas as medidas de um dos seus lados, e a altura relativa a esse. Evidentemente, tal resultado é bastante conhecido por todos estudantes da Educação Básica. Poderíamos executar a demonstração desse resultado utilizando a definição clássica de área, por meio de um quadrado de lado unitário. Contudo, para o objetivo inicial desse texto, basta ter posse do resultado.

Proposição 2.1. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, e alturas h_a, h_b, h_c relativas, respectivamente a $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$. Temos*

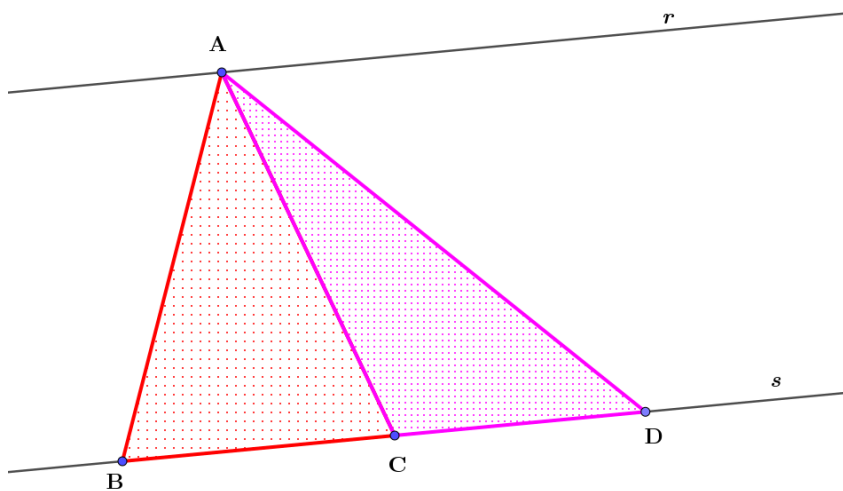
$$[ABC] = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Como consequência imediata da Proposição 2.1 temos os Corolários 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 enunciados e demonstrados a seguir.

Corolário 2.2. *Sejam r e s duas retas paralelas distintas. Tome um ponto $A \in r$ e os pontos $B, C, D \in s$ de modo que $\overline{BC} = \overline{CD}$. Desse modo, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ possuem áreas iguais.*

Antes de partirmos para a demonstração desse resultado, observe a Figura 1 que ilustra bem essa situação.

Figura 1 – Triângulo com áreas iguais



Fonte: Produzido pelo Autor.

Demonstração. Seja h a distância entre as retas r e s . Dessa forma, h é a altura dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ relativa a $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. Da Proposição 2.1, temos

$$[ABC] = \frac{\overline{BC} \cdot h}{2}$$

e

$$[ACD] = \frac{\overline{CD} \cdot h}{2}$$

Mas $\overline{BC} = \overline{CD}$. Portanto,

$$[ABC] = [ACD].$$

□

Corolário 2.3. *Sejam r e s duas retas paralelas distintas. Tome os pontos $A_1, A_2, \dots, A_n \in r$ e os pontos distintos $B, C \in s$. Desse modo,*

$$[A_1BC] = [A_2BC] = \dots = [A_nBC]$$

Demonstração. Basta observar que todos os triângulos possuem a mesma base, isto é, $\overline{BC}$ e a mesma altura relativa a essa base (que é a distância entre as retas r e s), visto que $r \parallel s$. Portanto, segue imediatamente do cálculo da área de um triângulo qualquer que

$$[A_1BC] = [A_2BC] = \dots = [A_nBC].$$

□

Corolário 2.4. *Se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ possuem alturas equivalentes, então a razão entre suas áreas equivale a razão entre as medidas de suas respectivas bases.*

Demonstração. Sejam h_a e h_d as alturas relativas as bases $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, respectivamente. Assim,

$$[ABC] = \frac{\overline{BC} \cdot h_a}{2} \tag{2.1}$$

$$[DEF] = \frac{\overline{EF} \cdot h_d}{2} \tag{2.2}$$

Sendo $h_a = h_d$ segue imediatamente que

$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}. \tag{2.3}$$

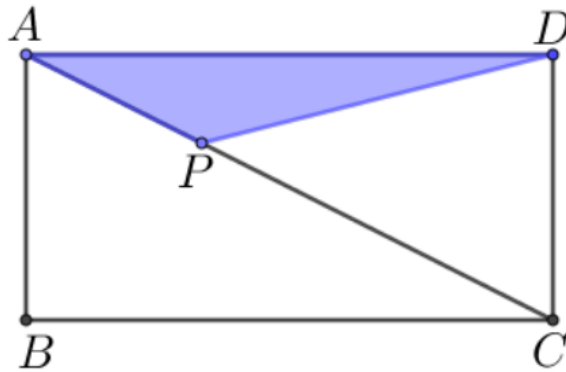
□

Vale ressaltar que o conhecimento de tais resultados, por partes dos estudantes, tende a propiciar uma resolução mais rápida e precisa dos problemas que irão enfrentar. Muitas vezes, é possível resolver certos problemas por diversas formas, mas conhecer mais ferramentas, tende a permitir uma solução mais clara.

De posse dos resultados acima, passemos a resolução de dois problemas: O Problema 1 é uma questão da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT), nível 1 da fase 1, já o Problema 2 consta no site Clubes de Matemática OBMEP.

1. (OPEMAT - 2023 - Nível 01 - 1ª fase) Na Figura 2 abaixo, $ABCD$ é um retângulo. Se $\overline{AP} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AC}$, qual é a razão entre a área do triângulo $\triangle APD$ e a área do retângulo $ABCD$?

Figura 2 – Problema sobre área - OPEMAT 2023



Fonte: OPEMAT

- a) $1/5$
- b) $2/9$
- c) $3/10$
- d) $1/6$
- e) $3/8$

Solução: Como $ABCD$ é um retângulo, temos $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$. Dessa forma, é imediato concluir que

$$[ABC] = [ACD].$$

De modo que

$$\frac{[ACD]}{[ABCD]} = \frac{1}{2}. \quad (2.4)$$

Seja Q o ponto médio do segmento $\overline{PC}$. Note que os $\triangle DAP, \triangle DPQ, \triangle DQC$ possuem as bases congruentes, visto que, $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$ e possuem a mesma altura (basta notar que o vértice A é comum). Sendo assim, possuem a mesma área, pelo Corolário 2.3. Observe ainda, que

$$[ACD] = [DAP] + [DPQ] + [DQC] = [DAP] + [DAP] + [DAP] \text{ isso implica } \frac{[DAP]}{[ACD]} = \frac{1}{3}. \quad (2.5)$$

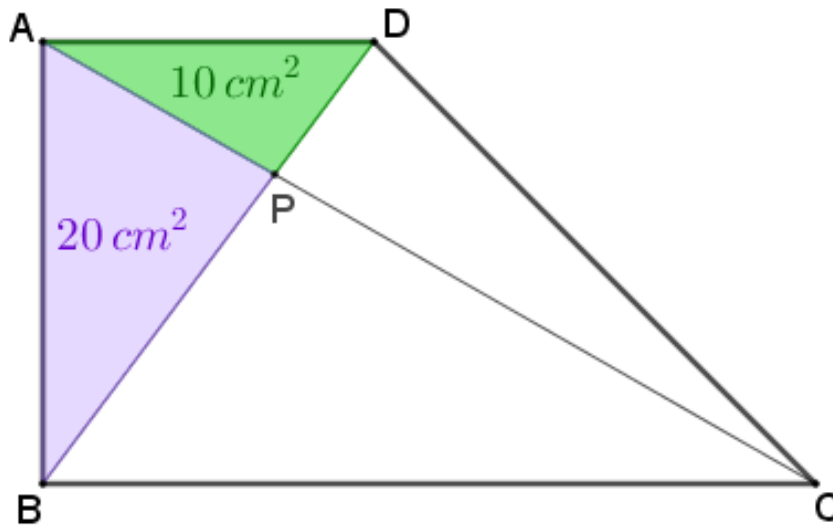
Portanto, de (2.4) e (2.5) temos

$$\frac{[ACD]}{[ABCD]} = \frac{1}{6}. \quad (2.6)$$

□

2. (Problema do Site Clubes de Matemática - OBMEP) Traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do trapézio retângulo $ABCD$ mostrado na Figura 3. A interseção dessas diagonais é o ponto P e as áreas dos triângulos APD e ABP são 10cm^2 e 20cm^2 , respectivamente.

Figura 3 – Questão sobre área.



Fonte: Site Clubes de Matemática - OBMEP.

Desse modo, determine a área do trapézio $ABCD$.

Solução: Sendo $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ as bases do trapézio $ABCD$, temos $AD \parallel BC$. Desse modo, como os $\triangle BAD$ e $\triangle CAD$ possuem a mesma base, e $B, C \in BC$ temos do Corolário 2.3 que

$$[BAD] = [CAD].$$

Mas

$$[BAD] = [APB] + [APD] = 20 + 10 = 30cm^2.$$

Assim, como

$$[BAD] = [CAD]$$

temos

$$[CAD] = 30cm^2.$$

Como

$$[CAD] = [APD] + [CPD] \implies 30 = 10 + [CPD] \implies [CPD] = 20.$$

Note ainda que os $\triangle APD$ e $\triangle APB$ possuem a mesma altura. Sendo assim, segue do Corolário 2.4 que

$$\frac{[APD]}{[APB]} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Analogamente, os $\triangle CPD$ e $\triangle CPB$ possuem a mesma altura. Sendo assim,

$$\frac{[CPD]}{[CPB]} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \implies \frac{20}{[CPB]} = \frac{1}{2} \implies [CPB] = 40.$$

Portanto,

$$[ABCD] = [APD] + [APB] + [CPD] + [CPB] = 10 + 20 + 20 + 40 = 90cm^2.$$

□

Por último, note também que

Corolário 2.5. *Se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ possuem bases de medidas iguais, então a razão entre suas áreas equivale a razão entre as medidas de suas respectivas alturas relativas as tais bases.*

Demonstração. Sejam $\overline{BC} = \overline{EF}$ e h_a e h_d as alturas relativas as bases $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, respectivamente. Temos

$$[ABC] = \frac{\overline{BC} \cdot h_a}{2} \tag{2.7}$$

$$[DEF] = \frac{\overline{EF} \cdot h_d}{2}. \tag{2.8}$$

Sendo $\overline{BC} = \overline{EF}$, segue imediatamente que

$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{h_a}{h_d}. \tag{2.9}$$

□

Aplicaremos o Corolário 2.5 para demonstrar um resultado razoavelmente importante neste trabalho. Antes, porém, precisamos de uma definição acerca da classificação dos triângulos, quanto às medidas de seus ângulos internos.

Definição 2.6. Um triângulo é dito

- **Acutângulo:** quando possui todos os ângulos internos agudos, isto é, cada ângulo interno tem medida superior a 0° e inferior à 90° .
- **Retângulo:** quando possui um, e apenas um ângulo interno com medida igual à 90° . Tal ângulo é chamado de ângulo reto.
- **Obtusângulo:** quando possui um, e apenas um ângulo interno obtuso, isto é, com medida superior à 90° e inferior à 180° .

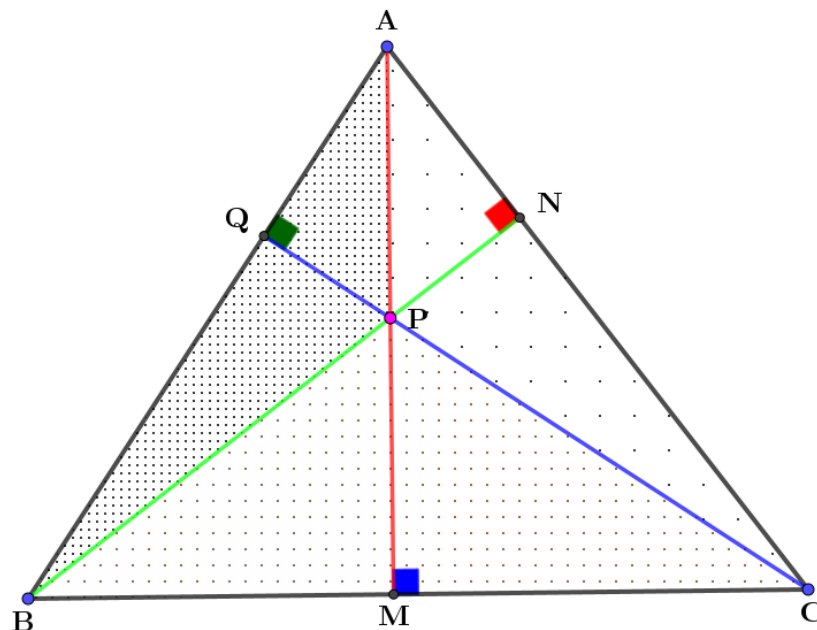
Teorema 2.7. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo. Se as alturas AM, BN, CQ se intersectam num ponto P , interno ao triângulo, então*

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} + \frac{\overline{PN}}{\overline{BN}} + \frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = 1.$$

O ponto P é chamado de ortocentro do triângulo $\triangle ABC$.

Demonstração. Para facilitar a compreensão e auxiliar na resolução do problema, veja a Figura 4.

Figura 4 – Importante resultado sobre alturas de um triângulo.



Fonte: Produzido pelo autor.

Inicialmente, observe que

$$[APB] + [APC] + [BPC] = [ABC]. \quad (2.10)$$

Por outro lado, os triângulos $\triangle APB$ e $\triangle ABC$ possuem a mesma base $\overline{AB}$. Segue do Corolário 2.5 que

$$\frac{[APB]}{[ABC]} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}}. \quad (2.11)$$

Analogamente

$$\frac{[APC]}{[ABC]} = \frac{\overline{PN}}{\overline{BN}} \quad (2.12)$$

$$\frac{[BPC]}{[ABC]} = \frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} \quad (2.13)$$

Somando membro a membro as Equações (2.11), (2.12), (2.13) e usando (2.10) obtemos

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} + \frac{\overline{PN}}{\overline{BN}} + \frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{[APB] + [APC] + [BPC]}{[ABC]} = \frac{[ABC]}{[ABC]} = 1. \quad (2.14)$$

O que finaliza nossa demonstração.

□

A seguir, exibiremos um modo prático e eficiente para o cálculo da área de um triângulo quando é conhecido dois de seus lados e a medida do ângulo entre tais lados.

2.1.2 Forma trigonométrica da área de um triângulo

A seguir, apresentamos um método prático para calcular a área de um triângulo qualquer, quando são conhecidos dois de seus lados e o ângulo entre eles.

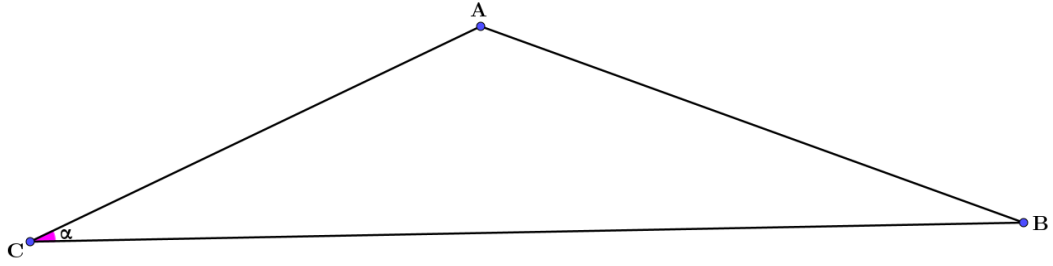
Proposição 2.8. *Seja o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\angle ACB = \alpha$. A área desse triângulo é dada por*

$$[ABC] = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}.$$

Como ilustração veja a Figura 5.

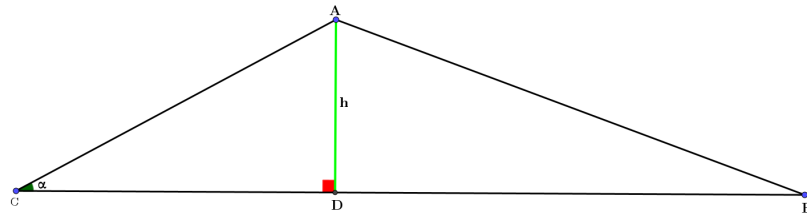
Demonstração. A demonstração desse resultado é razoavelmente simples e resume-se no conhecido resultado de que a área de um triângulo qualquer é o semiproduto da medida

Figura 5 – Forma trigonométrica da área do triângulo.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 6 – Triângulo qualquer.



Fonte: Produzido pelo autor.

de sua base pela medida da altura relativa a essa base. Seja, $\overline{AD} = h$, a altura do $\triangle ABC$ relativa a $\overline{BC}$. Vide Figura 6.

Desse modo, a área do triângulo $\triangle ABC$ pode ser encontrada fazendo

$$[ABC] = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{a \cdot h}{2} \quad (2.15)$$

Agora, considerando o triângulo $\triangle ACD$ que é retângulo em D , temos

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{h}{b} \quad (2.16)$$

Logo,

$$h = b \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (2.17)$$

Assim, de (2.15) e (2.17) obtemos

$$[ABC] = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}. \quad (2.18)$$

□

Outros detalhes sobre Trigonometria serão apresentados na Seção 2.2.

2.1.3 Área de um triângulo em função do raio do incírculo

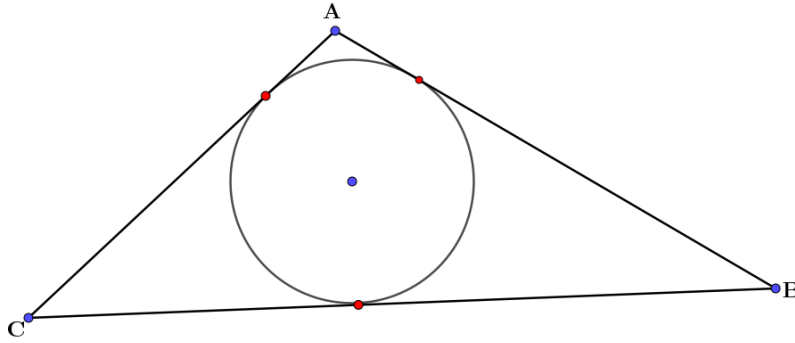
A seguir, exibiremos uma fórmula que permite calcular a área um triângulo, a partir do seu perímetro (ou semiperímetro) e do raio do círculo inscrito a esse triângulo.

Proposição 2.9. *Considere o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, e seja γ o círculo de raio r inscrito no triângulo $\triangle ABC$. Sendo p o semiperímetro desse triângulo, isto é, $p = \frac{a+b+c}{2}$, então a área do triângulo $\triangle ABC$ pode ser encontrada da seguinte forma:*

$$[ABC] = \frac{p \cdot r}{2}.$$

Como ilustração veja a Figura 7.

Figura 7 – Triângulo e seu incírculo.



Fonte: Produzido pelo autor.

Para a demonstração da Proposição (2.9), recorde o resultado a seguir.

Lema 2.10. *Seja γ um círculo de centro O e q uma reta, tal que $\gamma \cap q = \{P\}$, ou seja, a reta q é tangente ao círculo em P . Então*

$$OP \perp q.$$

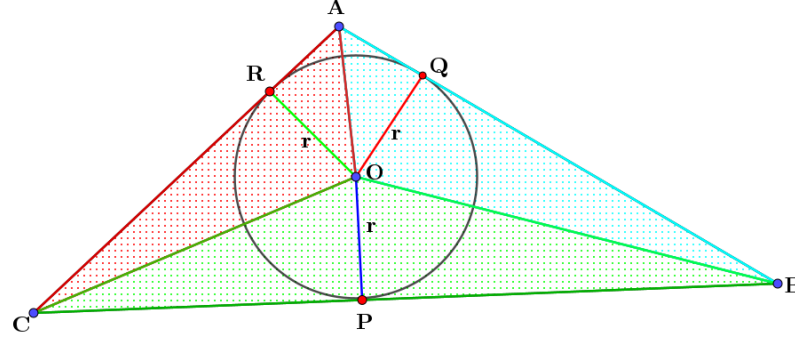
A demonstração do Lema 2.10 pode ser vista em (6). De posse desse resultado, passemos a demonstração da Proposição 2.9.

Demonstração da Proposição 2.9. Sejam P, Q, R os pontos de tangência do triângulo $\triangle ABC$ com círculo γ de centro O e raio r . Sendo $P \in BC, Q \in AB$ e $R \in AC$. Como ilustração observe a Figura 8.

Assim, a área do triângulo $\triangle ABC$, é dada pela soma das áreas dos triângulos $\triangle OBC, \triangle OAB, \triangle OAC$, isto é,

$$[ABC] = [OBC] + [OAB] + [OAC] \tag{2.19}$$

Figura 8 – Dedução da área via Incírculo.



Fonte: Produzido pelo autor.

Mas

$$[OBC] = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{OP}}{2} = \frac{a \cdot r}{2} \quad (2.20)$$

$$[OAB] = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OQ}}{2} = \frac{c \cdot r}{2} \quad (2.21)$$

$$[OAC] = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OR}}{2} = \frac{b \cdot r}{2} \quad (2.22)$$

Assim, de (2.19), (2.20), (2.21) e (2.22) obtemos

$$[ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = \frac{(a + b + c) \cdot r}{2} = \frac{p \cdot r}{2}. \quad (2.23)$$

□

2.1.4 Área de um triângulo em função do raio do circuncírculo

Provaremos na Seção 2.2 de Trigonometria um resultado bastante conhecido, que é a Lei dos Senos. Por hora, faremos uso desse resultado para tornar a demonstração a seguir mais simples.

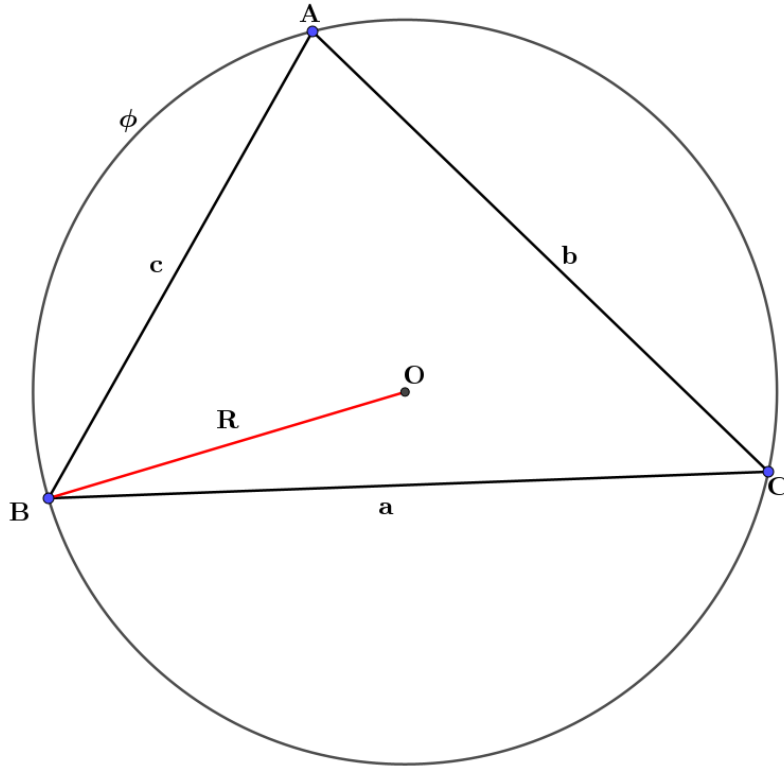
Proposição 2.11. *Seja o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Seja ϕ o círculo de raio R e centro O , circunscrito a esse triângulo. Então*

$$[ABC] = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

Como ilustração veja a Figura 9.

Demonstração. Seja $\angle ABC = \alpha$. Pela Proposição 2.8 a área do triângulo $\triangle ABC$ pode ser obtida via forma trigonométrica fazendo

Figura 9 – Triângulo e seu Circuncírculo.



Fonte: Produzido pelo autor.

$$[ABC] = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \text{sen}(\alpha)}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}. \quad (2.24)$$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo $\triangle ABC$ referente ao lado $\overline{AC}$ obtemos

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen}(\alpha)} = 2R \quad (2.25)$$

Ou seja,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{2R} = \frac{b}{2R}. \quad (2.26)$$

Assim, substituindo (2.26) em (2.24) obtemos

$$[ABC] = \frac{a \cdot c \cdot \frac{b}{2R}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}. \quad (2.27)$$

□

2.1.5 Fórmula de Heron - Área de um triângulo em função dos seus lados

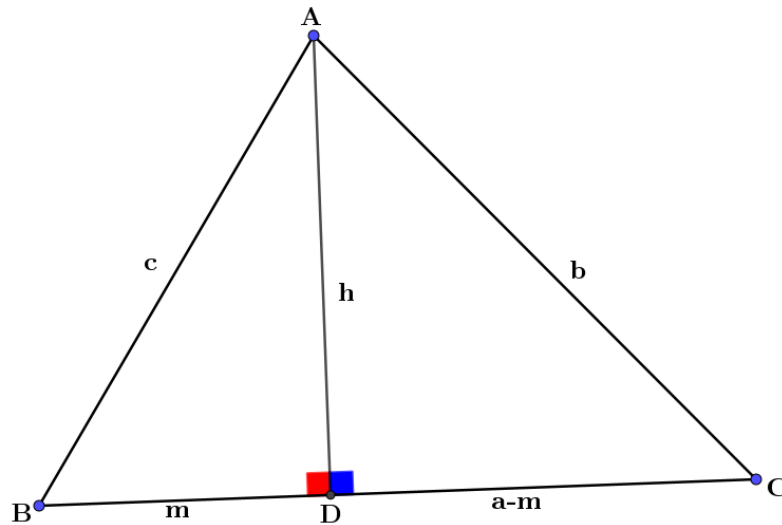
A seguir exibiremos um método para o cálculo da área de um triângulo qualquer, quando conhecidas as medidas de seus lados.

Proposição 2.12. *Seja o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Denotando o semiperímetro desse triângulo por p , isto é, $p = \frac{a+b+c}{2}$. A área do $\triangle ABC$, é dada por*

$$[ABC] = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Demonstração. Para a demonstração dessa proposição, partiremos do fato que em qualquer triângulo existe ao menos uma altura interna. Dessa forma, ao considerarmos como ilustração um triângulo acutângulo, não estamos restringindo em nada a generalidade do resultado. Considere o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Veja a Figura 10. Denotando a altura relativa ao lado BC por $\overline{AD} = h$ e sendo $\overline{BD} = m$ temos $\overline{CD} = a - m$.

Figura 10 – Triângulo qualquer com lados definidos.



Fonte: Produzido pelo autor.

Sabemos que a área desse triângulo pode ser encontrada por

$$[ABC] = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{a \cdot h}{2}. \quad (2.28)$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle ABD$ temos

$$c^2 = m^2 + h^2 \quad (2.29)$$

Analogamente, no triângulo $\triangle ACD$ verificamos que

$$b^2 = h^2 + (a - m)^2 \quad (2.30)$$

ou seja,

$$b^2 = a^2 - 2am + m^2 + h^2 \quad (2.31)$$

Substituindo (2.29) em (2.31) obtemos

$$m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.29) obtemos

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2 + h^2 \Leftrightarrow \\ h^2 &= c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2 \Leftrightarrow \\ h^2 &= \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \cdot \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \Leftrightarrow \\ h^2 &= \left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a} \right) \cdot \left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \Leftrightarrow \\ h^2 &= \left(\frac{b^2 - (a - c)^2}{2a} \right) \cdot \left(\frac{(a + c)^2 - b^2}{2a} \right) \Leftrightarrow \\ 4 \cdot a^2 \cdot h^2 &= (b + a - c) \cdot (b - a + c) \cdot (a + c + b) \cdot (a + c - b) \Leftrightarrow \\ 4 \cdot a^2 \cdot h^2 &= (a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (a + c - b) \cdot (b + c - a) \Leftrightarrow \\ 4 \cdot a^2 \cdot h^2 &= (a + b + c) \cdot (a + b + c - c - c) \cdot (a + c + b - b - b) \cdot (b + c + a - a - a) \Leftrightarrow \\ 4 \cdot a^2 \cdot h^2 &= (2p) \cdot (2p - 2c) \cdot (2p - 2b) \cdot (2p - 2a) \Leftrightarrow \\ 4 \cdot a^2 \cdot h^2 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot p \cdot (p - c) \cdot (p - b) \cdot (p - a) \Leftrightarrow \\ \frac{a^2 \cdot h^2}{4} &= p \cdot (p - c) \cdot (p - b) \cdot (p - a) \end{aligned}$$

Assim,

$$\left(\frac{a \cdot h}{2} \right)^2 = p \cdot (p - c) \cdot (p - b) \cdot (p - a) \quad (2.33)$$

De (2.28) e (2.33) obtemos

$$[ABC] = \sqrt{p \cdot (p - c) \cdot (p - b) \cdot (p - a)} \quad (2.34)$$

□

2.2 Semelhança de Figuras Planas e suas consequências

Nesta seção estabeleceremos a noção de semelhança entre figuras planas. Evidentemente, o foco será a semelhança de triângulos. Para a escrita dessa seção, tomamos como embasamento teórico (6).

De modo geral, dizemos que duas figuras F_1 e F_2 são semelhantes, com razão de semelhança r , quando existe uma correspondência (biunívoca) H entre os pontos de F_1 e os pontos de F_2 , chamada de **transformação de semelhança**, que preserva a forma das figuras. Equivalentemente, **sejam P_1, P_2 pontos quaisquer de F_1 e $P'_1 = H(P_1)$ e $P'_2 = H(P_2)$ são pontos correspondentes em $F_2 = H(F_1)$** (denominados pontos homólogos) então

$$\overline{P'_1 P'_2} = r \cdot \overline{P_1 P_2}. \quad (2.35)$$

Em outras palavras, dizemos que duas figuras são semelhantes, quando podemos obter uma a partir da outra via uma ampliação ou redução, de modo a conservar sua forma original. Se F_1 e F_2 são figuras semelhantes, simbolizaremos por $F_1 \sim F_2$. Temos ainda que qualquer transformação que satisfaz (2.35) transforma pontos colineares em pontos colineares, preserva medida de ângulos e paralelismo de retas. Desse modo, a noção de semelhança equivale à ideia intuitiva de “mudança de escala”, ou seja, ampliação (quando a razão r é tal que $r > 1$) ou redução (quando a razão r é tal que $0 < r < 1$) de uma figura, alterando suas dimensões sem modificar suas proporções.

Trataremos a seguir da semelhança envolvendo a principal figura para o desenvolver desse texto.

2.3 Semelhança de Triângulos

Definição 2.13. Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Por lados “**homólogos**” entendemos ser aqueles que estão localizados entre os mesmos ângulos ao compararmos tais triângulos.

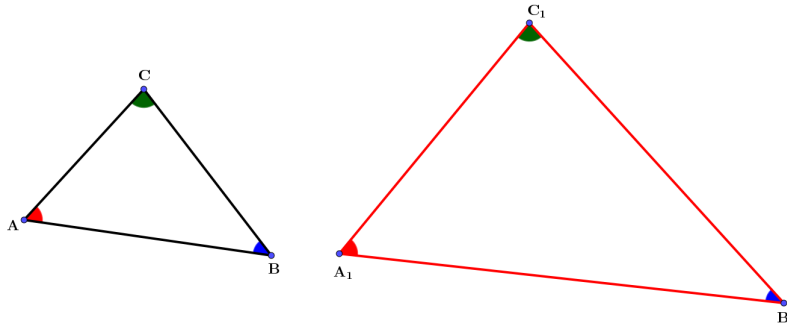
Em outras palavras, sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1 B_1 C_1$. Dizemos que tais triângulos são semelhantes, e escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$, se

$$\angle BAC = \angle B_1 A_1 C_1, \angle ACB = \angle A_1 C_1 B_1, \angle ABC = \angle A_1 B_1 C_1 \text{ e} \quad (2.36)$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1 C_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1 C_1}} \quad (2.37)$$

Para auxiliar na compreensão, observe a Figura 11.

Figura 11 – Semelhança de triângulos



Fonte: Produzido pelo autor.

Seja k em (2.37) a constante de proporcionalidade, isto é,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = k,$$

chamamos k de razão de semelhança dos triângulos.

Critérios de semelhança

Caso 1: Se dois triângulos têm congruentes dois a dois os ângulos internos, então esses triângulos são semelhantes.

Caso 2: Se dois triângulos têm dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.

Caso 3: Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

Teorema 2.14. (*Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos*) Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

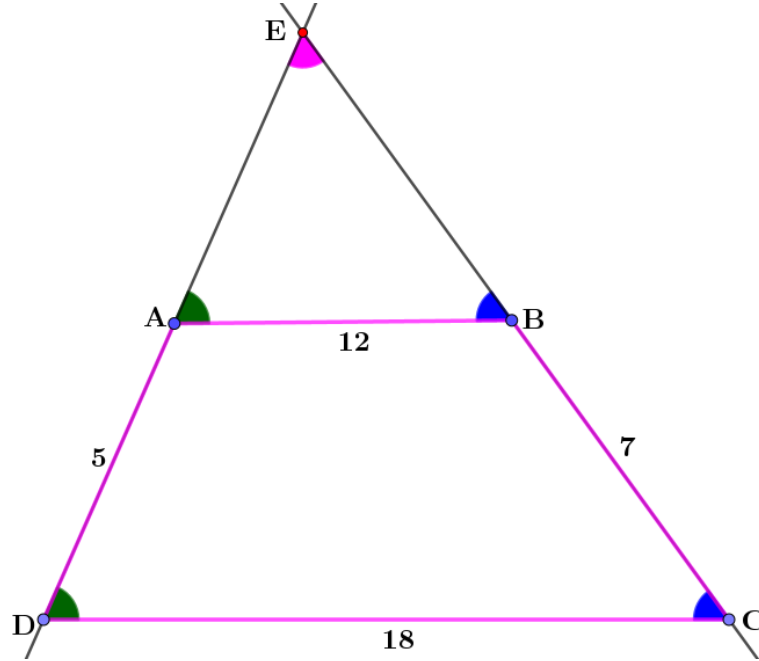
Demonstração. Basta observar que os ângulos das bases de ambos os triângulos são congruentes dois a dois por paralelismo. $\square$

Passemos a resolução de alguns problemas.

1. (Programa Olímpico de Treinamento (POTI)) As bases de um trapézio medem 12 m e 18 m e os lados oblíquos às bases medem 5 m e 7 m. Determine o perímetro do triângulo menor que obtemos ao prolongar os lados oblíquos às bases.

Solução: Seja $ABCD$ o referido trapézio, de modo que $\overline{AB} = 12$, $\overline{CD} = 18$, $\overline{AD} = 5$ e $\overline{BC} = 7$. Seja ainda, E o ponto de interseção das retas AD e DC . Como $AB \parallel CD$ temos $\angle EAB = \angle EDC$ e $\angle EBA = \angle ECD$. Portanto, os triângulos $\triangle EAB$, $\triangle EDC$ são semelhantes. A Figura 12 ilustra com clareza a situação descrita no problema.

Figura 12 – Problema 01 - semelhança de triângulos



Fonte: Produzido pelo autor.

Dessa forma, temos

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \implies \frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \quad (2.38)$$

Daí

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{2}{3} \implies \frac{\overline{EA}}{\overline{EA} + 5} = \frac{2}{3} \implies \overline{EA} = 10. \quad (2.39)$$

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{2}{3} \implies \frac{\overline{EB}}{\overline{EB} + 7} = \frac{2}{3} \implies \overline{EB} = 14. \quad (2.40)$$

Portanto, o perímetro do triângulo $\triangle EAB$ é $12 + 10 + 14 = 36m$.

Poderíamos ter resolvido esse problema de outra forma, relacionando a razão de semelhança com a razão entre os perímetros. A seguir, trataremos dessas relações, incluindo também área. Vale ressaltar que os resultados apresentados a seguir são válidos para quaisquer par de objetos semelhantes. Todavia, mostraremos apenas a validade para triângulos.

Consequências do Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos

Antes de partirmos para a exibição e demonstração de importantes resultados que decorrem do Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos, convém apresentar um Lema que facilitará as demonstrações.

Lema 2.15. *Sejam $a, b, c, d, e, f, k \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$, $d \neq 0$, $f \neq 0$ e $b + d + f \neq 0$. Se $k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, então $\frac{a+c+e}{b+d+f} = k$.*

Demonstração. Se $k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, então $a = b \cdot k$, $c = d \cdot k$ e $e = f \cdot k$. Assim

$$a + c + e = b \cdot k + d \cdot k + f \cdot k \implies a + c + e = k \cdot (b + d + f) \implies \frac{a + c + e}{b + d + f} = k.$$

□

Proposição 2.16. *Se dois triângulos são semelhantes da razão k então a razão entre seus perímetros, na mesma ordem, é k .*

Demonstração. Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ semelhantes, de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k. \quad (2.41)$$

Segue de (2.41) e do Lema 2.15, que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}}{\overline{DE} + \overline{DF} + \overline{EF}} = k. \quad (2.42)$$

O que finaliza nossa demonstração.

□

Proposição 2.17. *Se dois triângulos são semelhantes da razão k então a razão entre suas alturas, na mesma ordem, é k .*

Demonstração. Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ semelhantes, de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k. \quad (2.43)$$

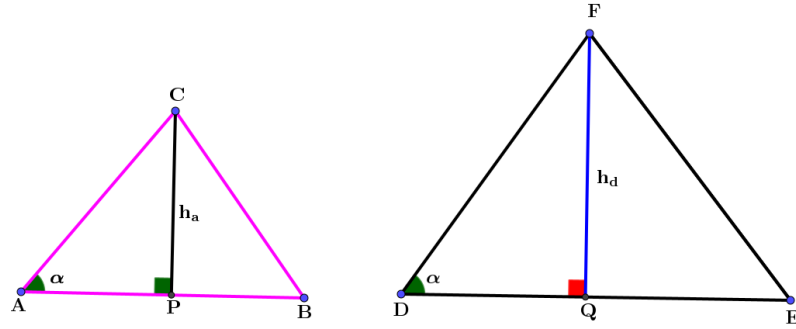
Sejam h_a, h_d as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ respectivamente. Sejam P e Q os pés das alturas h_a e h_d , respectivamente. É imediato concluir que os triângulos (retângulos) $\triangle APC$ e $\triangle DQF$ são semelhantes. De modo que,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{h_a}{h_d} = k. \quad (2.44)$$

Prosseguindo de modo análogo, mostramos o resultado em relação as demais alturas. $\square$

A Figura 13 propicia uma melhor compreensão da demonstração da Proposição 2.17.

Figura 13 – Triângulos retângulos semelhantes



Fonte: Produzido pelo Autor.

Proposição 2.18. *Se dois triângulos são semelhantes da razão k então a razão entre suas áreas, na mesma ordem, é k^2 .*

Demonstração. Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ semelhantes, de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k. \quad (2.45)$$

Assim, segue de (2.45) que

$$\overline{AB} = k \cdot \overline{DE} \quad (2.46)$$

$$\overline{AC} = k \cdot \overline{DF} \quad (2.47)$$

$$\overline{BC} = k \cdot \overline{EF} \quad (2.48)$$

Sendo h_a, h_d as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ respectivamente, temos

$$h_a = k \cdot h_d \quad (2.49)$$

Daí, obtemos

$$[ABC] = \frac{\overline{AB} \cdot h_a}{2} = \frac{k \cdot \overline{DE} \cdot k \cdot h_d}{2} = \frac{\overline{DE} \cdot h_d \cdot k^2}{2} \quad (2.50)$$

e

$$[DEF] = \frac{\overline{DE} \cdot h_d}{2} \quad (2.51)$$

Portanto,

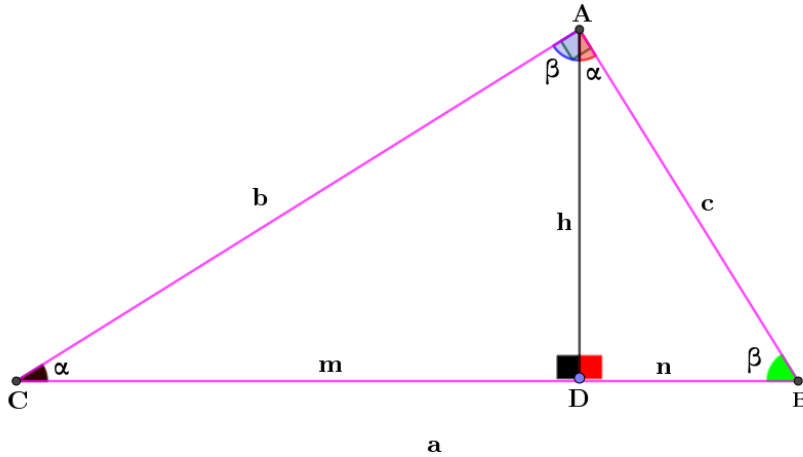
$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = k^2. \quad (2.52)$$

O que finaliza nossa demonstração. $\square$

2.3.1 Relações métricas no triângulo retângulo

De posse do exposto sobre semelhança de triângulos, faremos uma aplicação de tal abordagem, realizando a dedução de importantes relações em triângulos retângulos. Para tanto, considere a Figura 14 em que temos um triângulo $\triangle ABC$ retângulo em A . Nessa figura, traçamos a altura AD relativa a hipotenusa BC . Sendo $\angle ACB = \alpha$ e $\angle ABC = \beta$, segue imediatamente do fato da soma dos ângulos internos de um triângulo plano ser 180° que $\alpha + \beta = 90^\circ$. Daí, temos $\angle CAD = \beta$ e $\angle BAD = \alpha$. Assim, os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ e $\triangle ABD$, possuem os mesmos ângulos, e portanto, são semelhantes dois a dois.

Figura 14 – Figura base para as relações métricas



Fonte: Produzido pelo autor.

Considere ainda que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = h$, $\overline{CD} = m$, $\overline{BD} = n$. Novamente, ressaltamos que essas informam podem ser visualizadas na Figura 14.

Passemos a dedução das relações métricas. Para tanto, separemos em casos. Da semelhança dos triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle ABD$, temos

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \implies h^2 = m \cdot n \quad (2.53)$$

Da semelhança dos triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle ABC$, segue

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \implies b^2 = m \cdot a \quad (2.54)$$

Da semelhança dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$, segue

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \implies c^2 = n \cdot a \quad (2.55)$$

Observe que de 2.54 e 2.55 decorre o *Teorema de Pitágoras*. Com efeito, somando membro a membro 2.54 com 2.55 obtemos

$$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n) = a \cdot a \implies a^2 = b^2 + c^2. \quad (2.56)$$

Evidentemente, podemos deduzir outras relevantes relações, mas para o corpo desse texto, as acima são suficientes.

2.3.2 Relações métricas na circunferência

Também utilizando **semelhança de triângulos** provaremos a seguir importantes relações envolvendo circunferências.

Relação entre cordas

Definição 2.19. Uma **corda** de uma circunferência é um segmento de reta com extremos em dois pontos distintos quaisquer pertencentes a tal circunferência.

Na Figura 15 exibimos um exemplo de uma corda AB de uma circunferência τ de centro C .

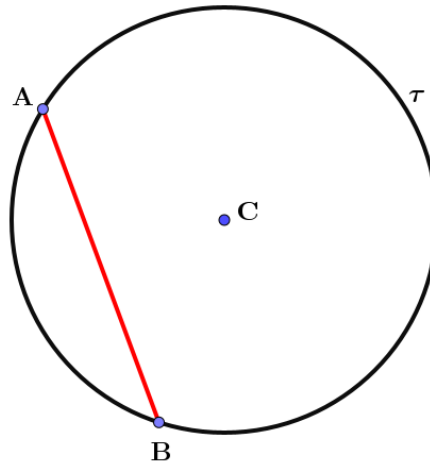
Proposição 2.20. *Seja τ uma circunferência de raio r e centro O . Sendo $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ cordas de τ de modo que $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{P\}$, temos*

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}. \quad (2.57)$$

Como ilustração da Proposição 2.20 veja a Figura 16. Passemos a demonstração.

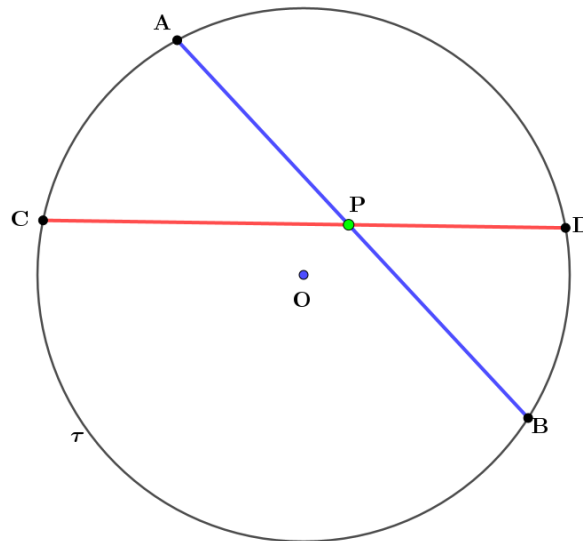
Demonstração. Considere os triângulos $\triangle APC$ e $\triangle BPD$. Observe que $\angle APC = \angle BPD$. Além disso, os ângulos $\angle CAP$ e $\angle BDP$ são inscritos em relação ao mesmo arco BC que não contém A . Assim $\angle CAP = \angle BDP$. Analogamente $\angle PCA = \angle PBD$. Assim os triângulos $\triangle APC, \triangle BPD$ são semelhantes. Portanto

Figura 15 – Exemplo de uma Corda.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Figura 16 – Relação entre cordas.



Fonte: Produzido pelo autor.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{BP}} \implies \overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}. \quad (2.58)$$

□

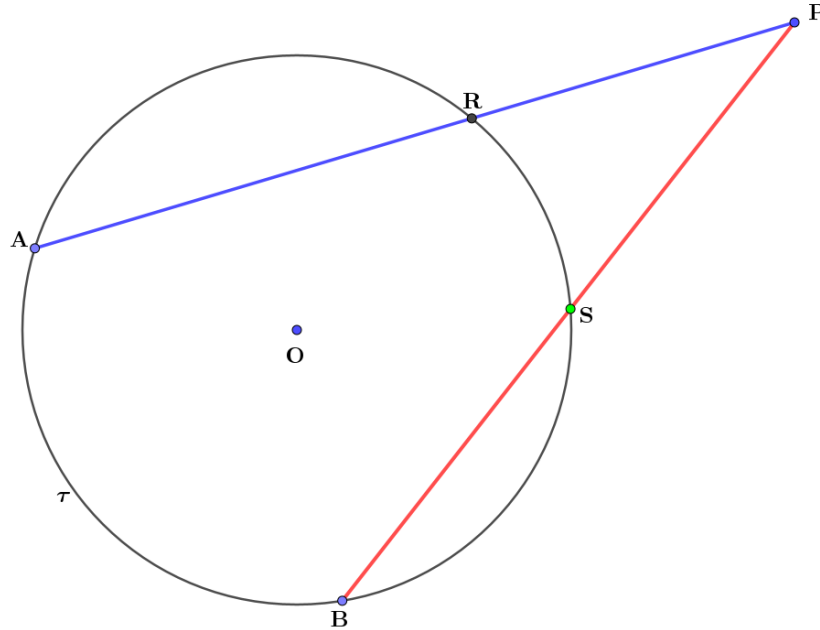
Relação segmentos secantes

Proposição 2.21. Considere τ uma circunferência de raio r e centro O . Sejam $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ segmentos secantes a τ de modo que $\overline{PA} \cap \tau = \{A, R\}$, $\overline{PB} \cap \tau = \{B, S\}$, com $R \neq S$. Temos

$$\overline{PA} \cdot \overline{PR} = \overline{PB} \cdot \overline{PS}. \quad (2.59)$$

Como ilustração da proposição anterior, veja a Figura 17. Passemos a demonstração.

Figura 17 – Relação entre segmentos secantes.



Fonte: Produzido pelo autor.

Demonstração. Basta ver que os triângulos $\triangle PAS$, $\triangle PBR$ são semelhantes. Com efeito, note que os ângulos $\angle PAS$ e $\angle PBR$ são inscritos em relação ao mesmo arco RS que não contém A . Assim, $\angle PAS = \angle PBR$. Além disso, $\angle APS = \angle BPR$. Portanto, os referidos triângulos são semelhantes. Assim,

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \implies \overline{PA} \cdot \overline{PR} = \overline{PB} \cdot \overline{PS}. \quad (2.60)$$

□

Relação entre um segmento secante e um segmento tangente

Proposição 2.22. *Considere τ uma circunferência de raio r e centro O . Sejam $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ segmentos secante e tangente a τ respectivamente, com $P \notin \tau$ de modo que $\overline{PA} \cap \tau = \{A, R\}$ e $\overline{PB} \cap \tau = \{B\}$. Temos*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PR} = \overline{PB}^2. \quad (2.61)$$

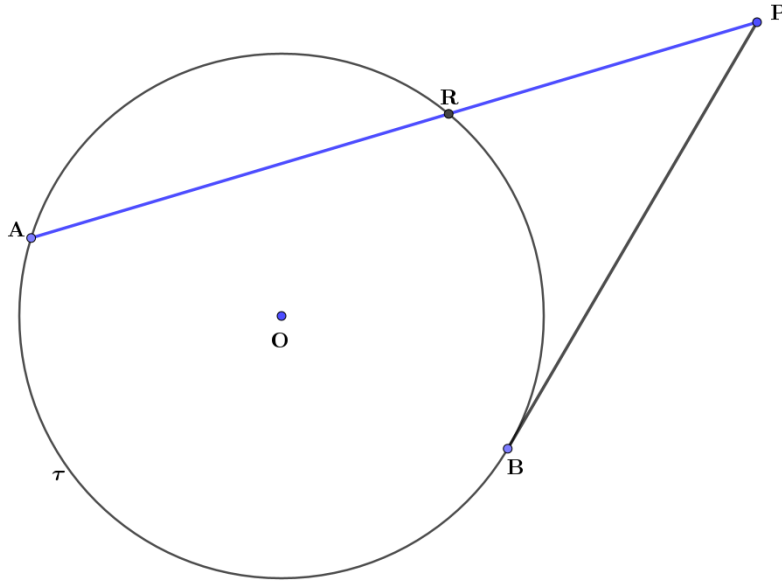
Demonstração. Basta ver que os triângulos $\triangle PAB$, $\triangle PBR$ são semelhantes. Com efeito, note que $\angle PBR = \angle PAB$, visto que ambos são inscritos ao mesmo arco BR que não contém A . Além disso, $\angle APB = \angle RPB$. Logo

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \implies \overline{PA} \cdot \overline{PR} = \overline{PB}^2. \quad (2.62)$$

□

Como ilustração da Proposição 2.22, veja a Figura 18.

Figura 18 – Relação entre segmentos secante e tangente a uma circunferência.



Fonte: Produzido pelo autor.

2.3.3 Potência de ponto e Eixo radical

Para a escrita dessa subseção, seguiremos com embasamento teórico as referências (7, 8).

Definição 2.23 (Potência de ponto). Seja τ uma circunferência de raio R e centro O . Sendo P um ponto arbitrário, no mesmo plano que τ . Definimos a potência de P com relação a τ como

$$Pot_{\tau}^P = (\overline{OP})^2 - R^2 \quad (2.63)$$

É imediato concluir que

- se $P \in \tau$ então $Pot_{\tau}^P = 0$;
- se P é um ponto interior a τ então $Pot_{\tau}^P < 0$;
- se P é um ponto exterior a τ então $Pot_{\tau}^P > 0$;

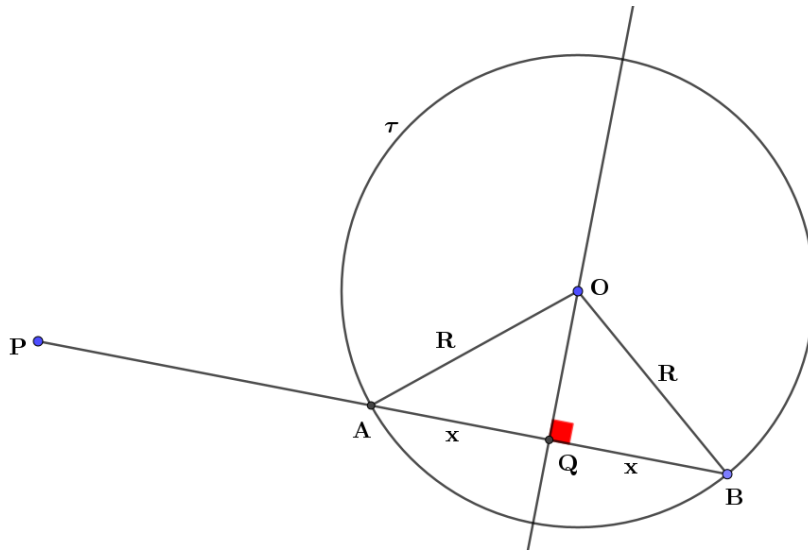
Teorema 2.24. *Seja P um ponto e τ uma circunferência de raio R . Seja r uma reta que passa por P intersecta τ nos pontos A e B , então o produto $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \text{Pot}_\tau^P$ é constante.*

Observação 2.25. Pelo Teorema 2.24, $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ é constante em relação à escolha da reta r e consequentemente aos pontos A e B .

Demonstração. Para a demonstração desse teorema, vamos analisar caso a caso, considerando a posição relativa entre P e a circunferência. Assim,

- Caso 01: P é um ponto exterior a τ . Seja OQ a mediatriz do segmento AB conforme a Figura 19. Observe que nessa figura, chamamos $\overline{AQ} = \overline{BQ} = x$.

Figura 19 – Potência de ponto - Caso 01



Fonte: Produzido pelo autor.

Assim

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (\overline{PQ} - x) \cdot (\overline{PQ} + x) = \overline{PQ}^2 - x^2. \quad (2.64)$$

Isso implica

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (\overline{PQ})^2 + (\overline{OQ})^2 - ((\overline{OQ})^2 + x^2). \quad (2.65)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle POQ$, $\triangle AQO$ observamos que

$$(\overline{PO})^2 = (\overline{PQ})^2 + (\overline{OQ})^2 \quad (2.66)$$

$$R^2 = (\overline{OQ})^2 + x^2 \quad (2.67)$$

Substituindo 2.66 e 2.67 em 2.65 obtemos

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (\overline{PO})^2 - R^2 = Pot_{\tau}^P \quad (2.68)$$

Note ainda, que se os pontos A e B coincidem, isto é, se a reta r é tangente a τ em $A = B$ temos

$$(\overline{PO})^2 = (\overline{PA})^2 + R^2 \implies (\overline{PA})^2 = (\overline{PO})^2 - R^2 = Pot_{\tau}^P \quad (2.69)$$

Como em (2.69) temos $A = B$ segue que $(\overline{PA})^2 = (\overline{PA}) \cdot (\overline{PB})$. E o resultado segue como antes.

- Caso 02: P é um ponto interior a τ . A demonstração segue de maneira análoga ao caso anterior.

□

Eixo radical

Definição 2.26. Eixo radical é o lugar geométrico dos pontos que possuem a mesma potência com relação a duas circunferências dadas.

Teorema 2.27. *O conjunto dos pontos que possuem a mesma potência com relação a duas circunferências dadas é uma reta perpendicular à reta que contém os centros.*

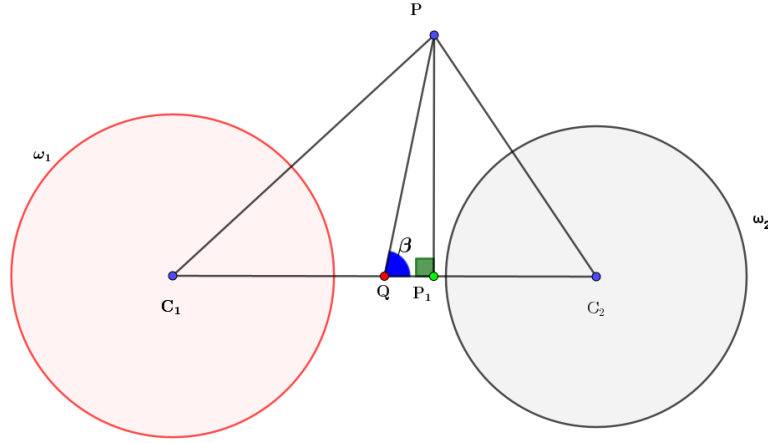
Demonstração. Considere as circunferências ω_1 e ω_2 de centro C_1 e C_2 e raios R_1 e R_2 respectivamente. Seja P um ponto que possui a mesma potência em relação a ω_1 e ω_2 . Assim,

$$\begin{aligned} Pot_{\omega_1}^P &= Pot_{\omega_2}^P \iff \\ (\overline{PC_1})^2 - R_1^2 &= (\overline{PC_2})^2 - R_2^2 \iff \\ (\overline{PC_1})^2 - (\overline{PC_2})^2 &= R_1^2 - R_2^2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Sejam Q o ponto médio do segmento $\overline{C_1C_2}$, P_1 a projeção ortogonal de P sobre a o segmento $\overline{C_1C_2}$ e $\angle PQP_1 = \beta$. Como ilustração veja a Figura 20.

Mais adiante, no corpo desse texto, abordaremos alguns resultados importantes do campo da trigonometria. Mas sem dano nenhum ao leitor, que pode consultar a próxima

Figura 20 – Demonstração - Eixos Radicais



Fonte: Produzido pelo autor.

seção, faremos uso de alguns desses resultados nessa demonstração. Com efeito, recorde que se $\alpha + \beta = 180^\circ$ então

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \quad (2.71)$$

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta) \quad (2.72)$$

De posse desse resultado, observe que os pontos C_1, Q, C_2 são colineares. De modo que, $\angle PQC_1 + \beta = 180^\circ$. Assim sendo, obtemos $\cos(\angle PQC_1) = -\cos(\beta)$. Agora, vamos aplicar O Teorema 2.28 nos triângulos $\triangle C_1QP, \triangle C_2QP$. Assim temos

$$(\overline{PC_1})^2 = (\overline{C_1Q})^2 + (\overline{PQ})^2 - 2 \cdot \overline{C_1Q} \cdot \overline{PQ} \cdot \cos(\angle PQC_1) \quad (2.73)$$

$$(\overline{PC_2})^2 = (\overline{C_2Q})^2 + (\overline{PQ})^2 - 2 \cdot \overline{C_2Q} \cdot \overline{PQ} \cdot \cos(\beta) \quad (2.74)$$

Observe ainda que a Equação (2.73) pode ser reescrita como

$$(\overline{PC_1})^2 = (\overline{C_1Q})^2 + (\overline{PQ})^2 + 2 \cdot \overline{C_1Q} \cdot \overline{PQ} \cdot \cos(\beta) \quad (2.75)$$

Subtraindo membro a membro as Equações (2.75) e (2.74) nessa ordem, e lembrando que $C_1Q = C_2Q$, obtemos

$$(\overline{PC_1})^2 - (\overline{PC_2})^2 = 2 \cdot (\overline{C_1Q} + \overline{C_2Q}) \cdot \overline{PQ} \cdot \cos(\beta) = 2 \cdot \overline{C_1C_2} \cdot \overline{PQ} \cdot \cos(\beta) \quad (2.76)$$

Da Equação (2.76) segue

$$\overline{PQ} \cdot \cos(\beta) = \frac{(\overline{PC_1})^2 - (\overline{PC_2})^2}{2 \cdot \overline{C_1C_2}} \quad (2.77)$$

Mas, considerando o triângulo $\triangle PQP_1$ temos

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{QP_1}}{\overline{PQ}} \implies \overline{QP_1} = \overline{PQ} \cdot \cos(\beta) \quad (2.78)$$

Substituindo (2.78) em (2.77) obtemos

$$\overline{QP_1} = \frac{(\overline{PC_1})^2 - (\overline{PC_2})^2}{2 \cdot \overline{C_1C_2}} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot \overline{C_1C_2}} \quad (2.79)$$

Portanto, $\overline{QP_1}$ é uma constante em relação à escolha do ponto P .

Logo, o lugar geométrico dos pontos P se configura como a reta perpendicular a C_1C_2 passando por P_1 .

Para finalizar nossa demonstração, considere um ponto M na reta PP_1 . Provemos que M possui a mesma potência em relação as circunferências ω_1 e ω_2 . Com efeito, aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle MC_1P_1$ e $\triangle MC_2P_1$ obtemos

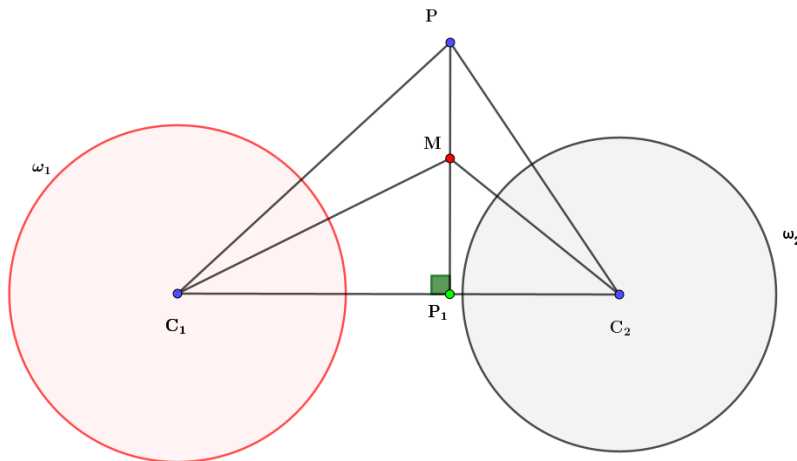
$$(\overline{MC_1})^2 = (\overline{C_1P_1})^2 + (\overline{MP_1})^2 \quad (2.80)$$

e

$$(\overline{MC_2})^2 = (\overline{C_2P_1})^2 + (\overline{MP_1})^2 \quad (2.81)$$

Para ajudar na compreensão do passo a passo anterior, veja a Figura 21.

Figura 21 – Finalizando a demonstração



Fonte: Produzido pelo autor.

Agora, vamos subtrair a Equação (2.81) da Equação (2.80). De modo que obtemos

$$(\overline{MC_1})^2 - (\overline{MC_2})^2 = (\overline{C_1P_1})^2 - (\overline{C_2P_1})^2 \quad (2.82)$$

Temos ainda que

$$(\overline{PC_1})^2 = (\overline{C_1P_1})^2 + (\overline{PP_1})^2 \quad (2.83)$$

$$(\overline{PC_2})^2 = (\overline{C_2P_1})^2 + (\overline{PP_1})^2 \quad (2.84)$$

Subtraindo as equações (2.83) e (2.84) membro a membro obtemos

$$(\overline{PC_1})^2 - (\overline{PC_2})^2 = (\overline{C_1P_1})^2 - (\overline{C_2P_1})^2 \quad (2.85)$$

Mas sabemos que $Pot_{\omega_1}^P = Pot_{\omega_2}^P$. O que acarreta em

$$(\overline{PC_1})^2 - (\overline{PC_2})^2 = R_1^2 - R_2^2 \quad (2.86)$$

Assim, de (2.82), (2.85) e (2.86) segue que

$$Pot_{\omega_1}^M = Pot_{\omega_2}^M. \quad (2.87)$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

2.4 Resultados elementares de Trigonometria

Nesta seção trataremos de alguns resultados básicos do ramo da Trigonometria que são de extrema importância na resolução de problemas.

2.4.1 Relações trigonométricas no Triângulo retângulo

Sejam $\triangle ABC$, retângulo em B, dado pela Figura 22 e $\alpha = \angle ACB$. Definimos as seguintes relações:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (2.88)$$

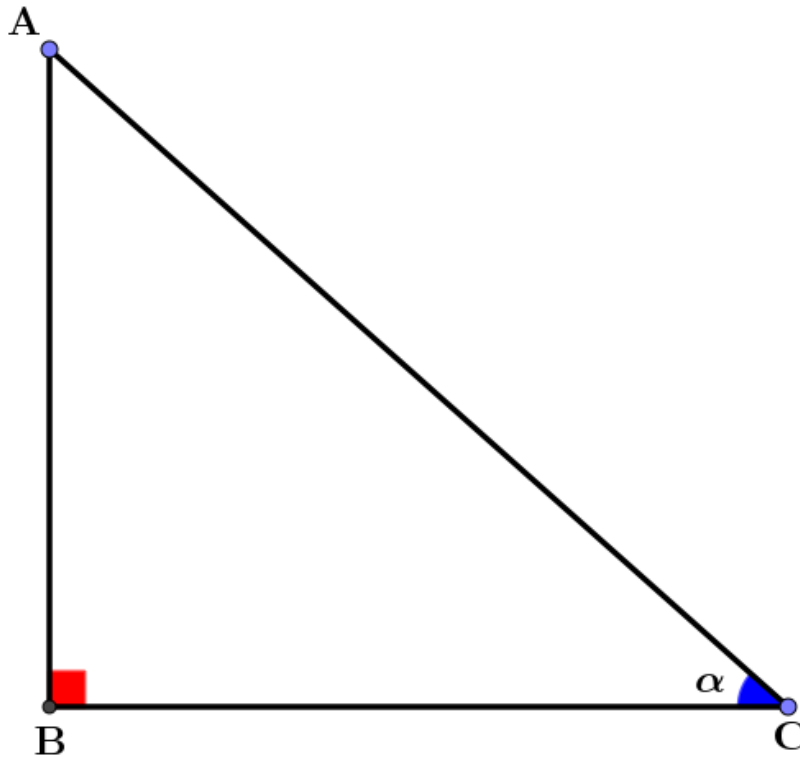
$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad (2.89)$$

$$\text{tan}(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad (2.90)$$

Em que $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$, $\text{tan}(\alpha)$, denotam, respectivamente, o Seno, o Cosseno e a Tangente do referido ângulo.

De posse desse resultado, passemos agora a dedução dos valores do Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos 30° , 45° , 60° . Tais ângulos são conhecidos como **ângulos notáveis**.

Figura 22 – Triângulo retângulo.



Fonte: Produzido pelo autor.

Considere um triângulo equilátero de lado $k > 0$. Traçando a altura relativa a um dos lados desse triângulo e lembrando que em um triângulo equilátero, a altura coincide com bissetriz interna e com a mediana (relativas a mesmo lado), chegamos na seguinte Figura 23.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle DFP$ temos

$$k^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 + h^2 \implies h = \frac{k\sqrt{3}}{2}$$

Desse modo, olhando novamente para o triângulo $\triangle DFP$, temos

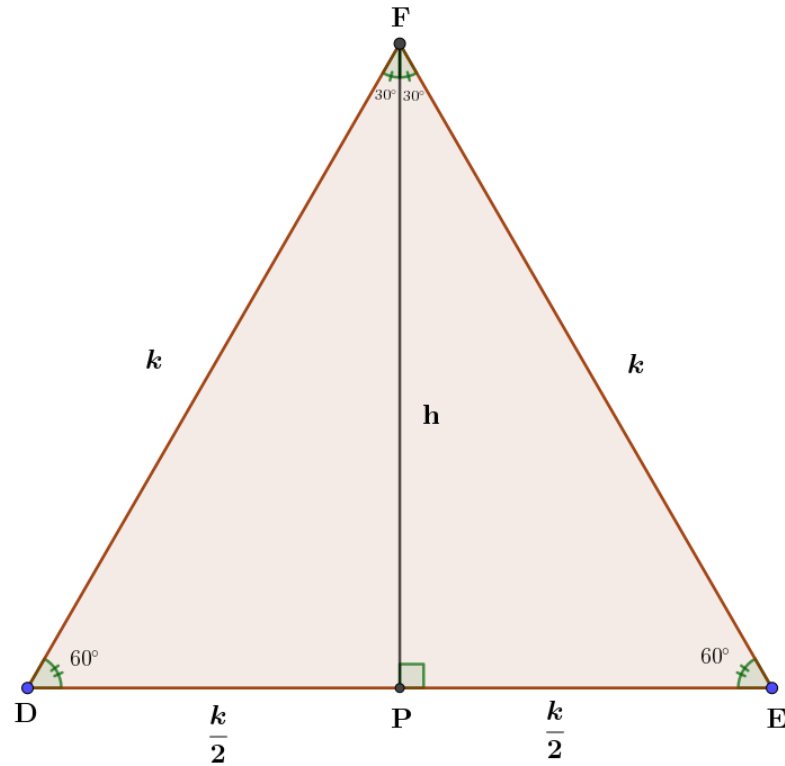
$$\sin(60^\circ) = \frac{h}{k} = \frac{\frac{k\sqrt{3}}{2}}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.91)$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{\frac{k}{2}}{k} = \frac{1}{2} \quad (2.92)$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{h}{\frac{k}{2}} = \frac{\frac{k\sqrt{3}}{2}}{\frac{k}{2}} = \sqrt{3} \quad (2.93)$$

Repetindo os mesmos passos em relação ao ângulo de 30° chegaremos que

Figura 23 – Triângulo com altura traçada.



Fonte: Produzido pelo autor.

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \quad (2.94)$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.95)$$

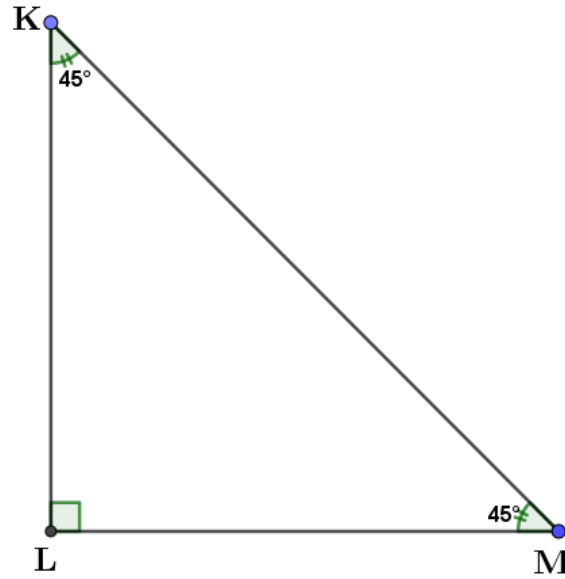
$$\tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2.96)$$

Vamos a dedução dos valores trigonométricos para o ângulo de 45° . Seja agora um triângulo $\triangle KLM$ isósceles e retângulo em L, conforme a Figura 24. Seja $x = \overline{LM} = \overline{LK}$ e $a = \overline{KM}$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$a^2 = x^2 + x^2 \implies a = x\sqrt{2}. \quad (2.97)$$

Desse modo,

Figura 24 – Triângulo retângulo isósceles.



Fonte: Produzido pelo autor.

$$\sin(45^\circ) = \frac{\overline{LK}}{\overline{KM}} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.98)$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{\overline{LM}}{\overline{KM}} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.99)$$

$$\tan(45^\circ) = \frac{\overline{LK}}{\overline{LM}} = \frac{x}{x} = 1 \quad (2.100)$$

De modo que podemos construir a tão famosa Tabela "Trigonométrica" dos ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

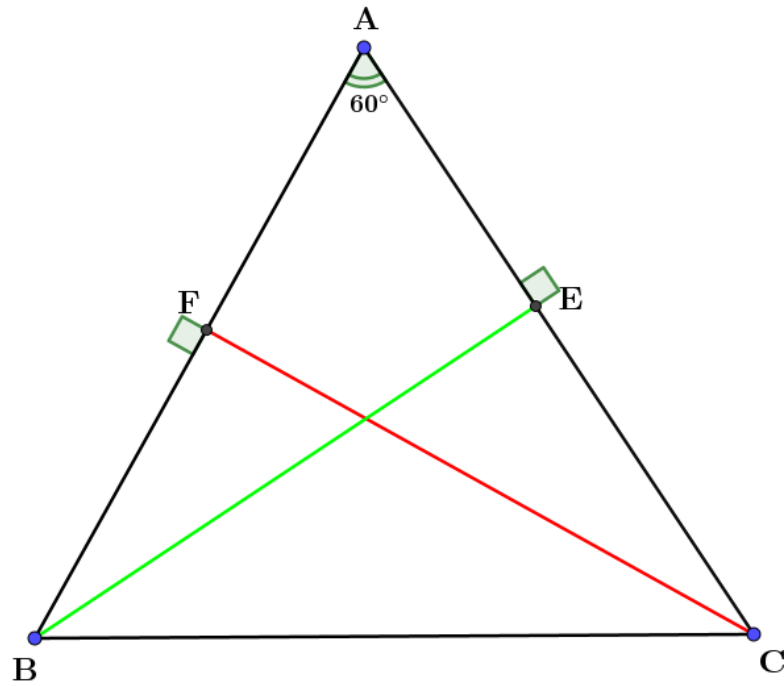
De posse desses simples resultados, passemos a resolução de um problema interessante.

1. (4ª Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2017.) Seja ABC um triângulo acutângulo com ângulo em A de 60°. Sejam E e F os pés das alturas por B e C, respectivamente. Provar que:

$$\overline{CE} - \overline{BF} = \frac{3}{2} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}).$$

Solução: o fato do $\triangle ABC$ ser acutângulo (ou seja, todos os seus ângulos são agudos) garante que as alturas relativas aos seus respectivos lados são internas a região da figura. Em particular, temos que o Ortocentro (ponto de encontro das alturas de um triângulo) é interno a referida figura. Desse modo, podemos ilustrar o problema, sem perda de generalidade, via a Figura 25.

Figura 25 – Ilustração do problema.



Fonte: Produzido pelo autor.

Assim, considerando o triângulo retângulo $\triangle BEA$ temos

$$\cos(60^\circ) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{2} \quad (2.101)$$

Analogamente, considerando o triângulo retângulo $\triangle CFA$ temos

$$\cos(60^\circ) = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AF} = \frac{\overline{AC}}{2} \quad (2.102)$$

Como $\overline{BF} = \overline{AB} - \overline{AF}$ e $\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{AE}$. Obtemos, junto com as equações (2.101) e (2.102) que

$$\overline{BF} = \overline{AB} - \frac{\overline{AC}}{2} \quad (2.103)$$

$$\overline{CE} = \overline{AC} - \frac{\overline{AB}}{2} \quad (2.104)$$

Daí

$$\begin{aligned}\overline{CE} - \overline{BF} &= \left(\overline{AC} - \frac{\overline{AB}}{2} \right) - \left(\overline{AB} - \frac{\overline{AC}}{2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{CE} - \overline{BF} &= \frac{3}{2} \cdot \overline{AC} - \frac{3}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{3}{2} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB})\end{aligned}$$

O que finaliza o problema.

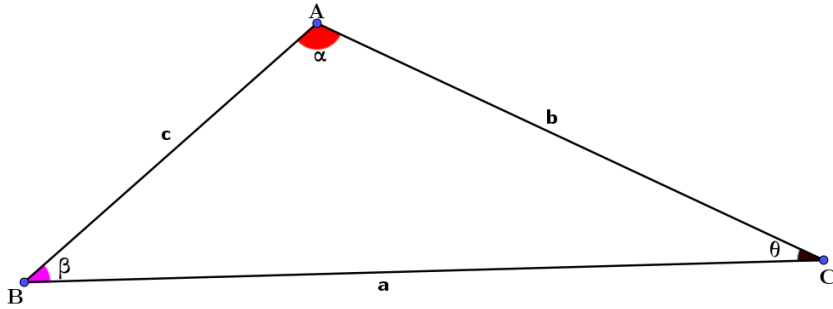
2.4.2 Relações trigonométricas em Triângulos quaisquer

Teorema 2.28 (Lei dos Cossenos). *Seja o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Considere também $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \theta$, temos*

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)\end{aligned}$$

Como ilustração observe a Figura 26.

Figura 26 – Lei dos Cossenos



Fonte: Produzido pelo autor.

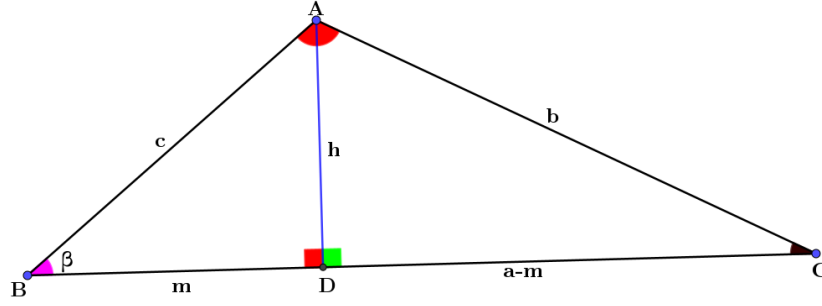
Demonstração. Mostraremos o teorema considerando o ângulo β como referência, sendo os demais casos inteiramente análogos.

1. O triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em B , isto é, $\beta = 90^\circ$.

Nesse caso, basta ver que

$$b^2 = a^2 + c^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(90^\circ).$$

Uma vez que, $\cos(90^\circ) = 0$.

Figura 27 – Caso β agudo.

Fonte: Produzido pelo autor.

2. O triângulo $\triangle ABC$ é acutângulo. Assim β é agudo. Desse modo, podemos ilustrar a situação via a Figura 27.

No triângulo $\triangle ABD$ temos

$$\cos(\beta) = \frac{m}{c} \implies m = c \cdot \cos(\beta). \quad (2.105)$$

Assim, $\overline{BD} = c \cdot \cos(\beta)$. Donde $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = a - m$. Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no mesmo triângulo obtemos

$$c^2 = h^2 + m^2 \implies h^2 = c^2 - m^2$$

Por fim, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle ACD$ temos

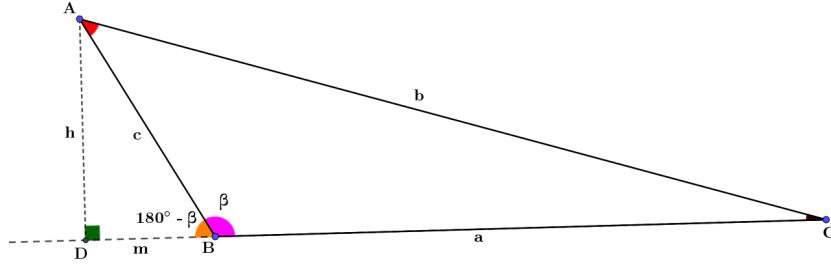
$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + (a - m)^2 \\ \implies b^2 &= c^2 - m^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot m + m^2 \\ \implies b^2 &= c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \end{aligned}$$

Como queríamos.

3. O triângulo $\triangle ABC$ é obtusângulo em B , isto é, β é obtuso. Seguiremos os mesmos passos do caso anterior. Antes disso, observe a Figura 28.

Como antes, tracemos a altura relativa ao lado BC . Evidentemente, como β é obtuso, a altura relativa ao vértice A é externa a região triangular. Seja $\overline{AD} = h$ tal altura. Observe que os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ABD$ são suplementares. De modo que, podemos escrever $\angle ABD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \beta$. Recorde que ângulos suplementares possuem cossenos simétricos, isto é,

$$\beta + \alpha = 180^\circ \implies \cos(\beta) = -\cos(\alpha). \quad (2.106)$$

Figura 28 – Caso β obtuso.

Fonte: Produzido pelo autor.

Sendo assim, $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos(\beta)$. Assim, no triângulo $\triangle ABD$ temos

$$\cos(180^\circ - \beta) = \frac{m}{c} \implies m = c \cdot \cos(180^\circ - \beta) = -c \cdot \cos(\beta)$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras com relação a esse mesmo triângulo temos

$$c^2 = h^2 + m^2 \implies h^2 = c^2 - m^2.$$

Agora, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle ACD$ e fazer as devidas substituições. Assim, temos

$$\begin{aligned} (\overline{AC})^2 &= (\overline{AD})^2 + (\overline{BD})^2 \\ \implies b^2 &= h^2 + (m + a)^2 \\ \implies b^2 &= c^2 - m^2 + m^2 + 2 \cdot a \cdot m + a^2 \\ \implies b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta). \end{aligned}$$

O que finaliza nossa demonstração.

□

Um consequência direta da Lei dos Cossenos é a famosa Relação de Stewart.

Proposição 2.29 (Relação de Stewart). *Seja o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Sendo AD uma ceviana desse triângulo que divide o lado BC em dois segmentos de medidas m e n . Se $x = \overline{AD}$ então*

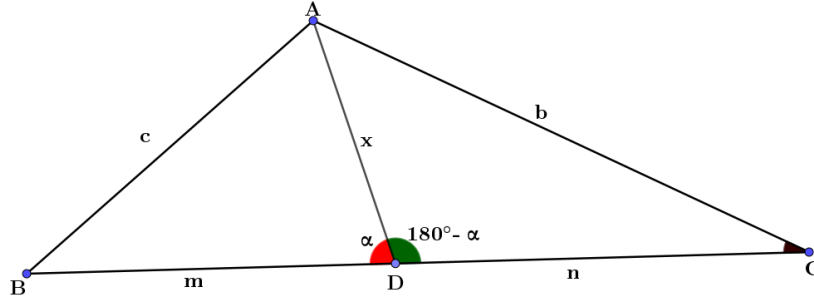
$$b^2 \cdot m + c^2 \cdot n = x^2 \cdot a + m \cdot n \cdot a. \quad (2.107)$$

Como ilustração, veja a Figura 29.

Demonstração. Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo $\triangle ABD$ temos

$$c^2 = m^2 + x^2 - 2 \cdot m \cdot x \cdot \cos(\alpha). \quad (2.108)$$

Figura 29 – Relação de Stewart.



Fonte: Produzido pelo autor.

Analogamente no $\triangle ACD$ temos

$$b^2 = x^2 + n^2 - 2 \cdot x \cdot n \cdot \cos(180 - \alpha) \implies b^2 = x^2 + n^2 + 2 \cdot x \cdot n \cdot \cos(\alpha). \quad (2.109)$$

Daí multiplicando ambos os membros da Equação 2.108 por n e ambos os membros da Equação 2.109 por m obtemos

$$c^2 \cdot n = m^2 \cdot n + x^2 \cdot n - 2 \cdot m \cdot x \cdot \cos(\alpha) \cdot n \quad (2.110)$$

$$b^2 \cdot m = x^2 \cdot m + n^2 \cdot m + 2 \cdot x \cdot n \cdot \cos(\alpha) \cdot m. \quad (2.111)$$

Somando essas duas últimas equações, temos

$$b^2 \cdot m + c^2 \cdot n = x^2 \cdot (m + n) + mn \cdot (m + n) \implies b^2 \cdot m + c^2 \cdot n = x^2 \cdot a + m \cdot n \cdot a. \quad (2.112)$$

□

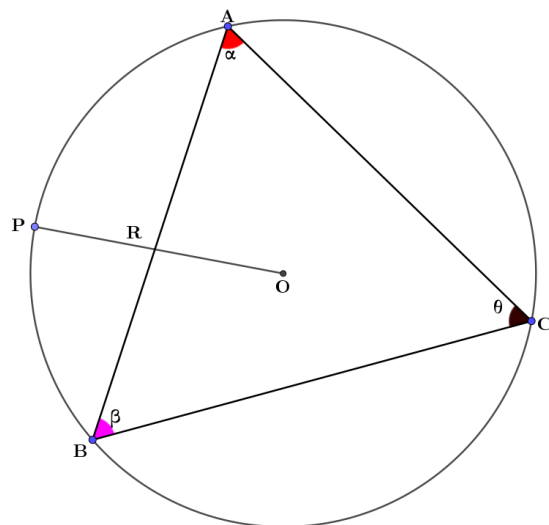
Teorema 2.30 (Lei dos Senos). *Seja o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Considere também $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \theta$, e seja γ o círculo de centro O e raio R que circunscreve esse triângulo. Temos*

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\theta)} = 2R.$$

Como ilustração, veja a Figura 30.

Demonstração. Inicialmente tracemos um diâmetro AQ . Observamos que o triângulo $\triangle ACQ$ é retângulo em C visto que o ângulo $\angle ACQ$ que é inscrito enxerga a corda AQ que é um diâmetro. Além disso, observe que os ângulos $\angle ABC$ e $\angle AQC$ enxergam o mesmo arco AC (o que não contém B) e são ambos inscritos. Portanto, $\angle ABC = \angle AQC = \beta$. Agora, triângulo $\triangle ACQ$ temos

Figura 30 – Lei dos Senos

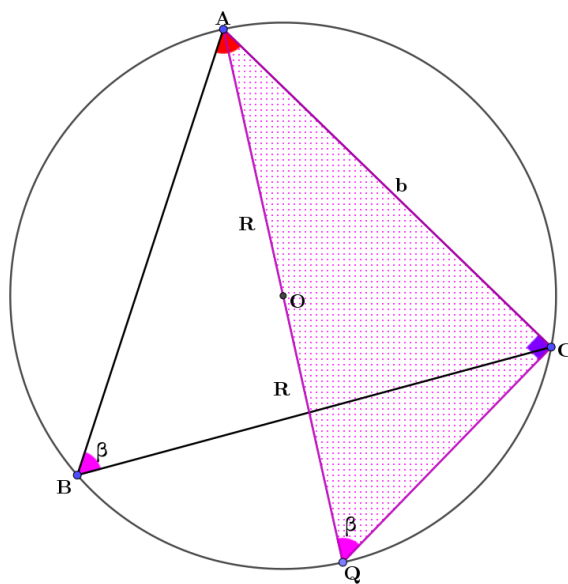


Fonte: Produzido pelo autor.

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} = \frac{b}{2R} \implies \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = 2R. \quad (2.113)$$

Veja a Figura 31.

Figura 31 – Demonstração da Lei dos Senos.



Fonte: Produzido pelo autor.

Procedendo de forma análoga em relação aos vértices B e C chegaremos que

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2R. \quad (2.114)$$

$$\frac{c}{\sin(\theta)} = 2R. \quad (2.115)$$

Assim,

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\theta)} = 2R. \quad (2.116)$$

Como queríamos.

□

2.5 Teorema de Menelaus

Para a escrita dessa seção, nos baseamos na referência (9).

Teorema 2.31 (Teorema de Menelaus). *Sejam um triângulo ABC e X , Y e Z pontos (diferentes de A , B e C) sobre as retas BC , CA e AB , respectivamente. Então os pontos X , Y e Z são colineares se, e somente se,*

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1 \quad (2.117)$$

Como ilustração, veja a Figura 32.

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que os pontos X, Y, Z sejam colineares. Vamos demonstrar que isso implica em

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1. \quad (2.118)$$

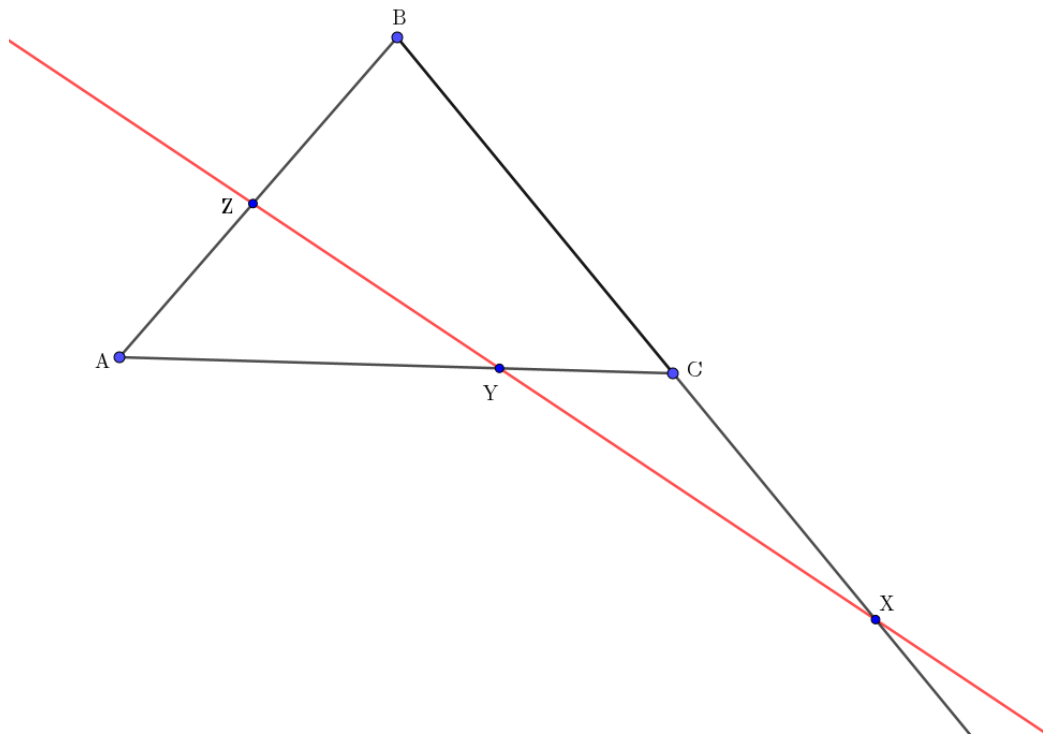
Trace por B a reta r paralela à reta de Menelaus (reta que contém os pontos X, Y, Z). Seja P o ponto de interseção da reta r com a reta AC . A reta r e a reta de Menelaus, determinam sobre AB e AC segmentos proporcionais (Teorema de Tales). De modo que,

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{YP}} \quad (2.119)$$

Logo,

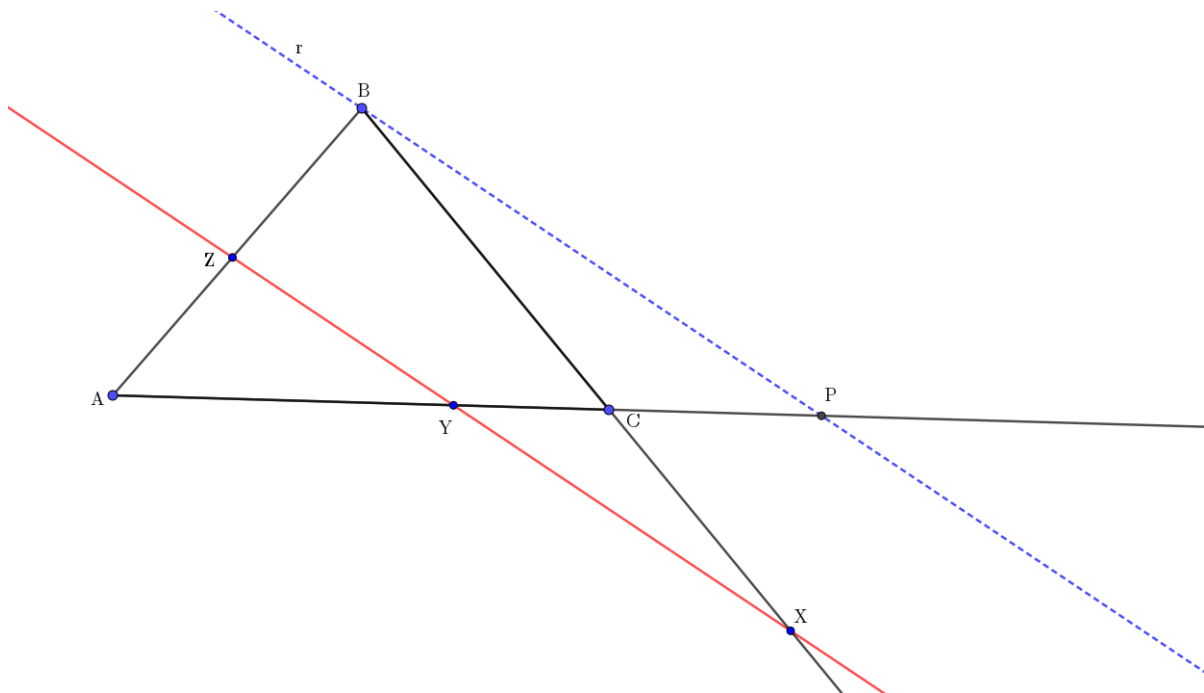
$$\frac{\overline{AZ} \cdot \overline{YP}}{\overline{ZB} \cdot \overline{YA}} = 1 \quad (2.120)$$

Figura 32 – Teorema de Menelaus.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 33 – Demonstração do Teorema de Menelaus



Fonte: Produzido pelo autor.

Também pelo Teorema de Tales, temos (considerando as transversais BX e YP)

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{BC}} \implies \frac{\overline{CP}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CX}} \implies \frac{\overline{CY} + \overline{CP}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{CX} + \overline{BC}}{\overline{CX}}$$

Portanto

$$\frac{\overline{YP}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \quad (2.121)$$

Logo,

$$\frac{\overline{BX} \cdot \overline{CY}}{\overline{YP} \cdot \overline{CX}} = 1 \quad (2.122)$$

Multiplicando membro a membro as Equações (2.120) e (2.122) temos

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1 \quad (2.123)$$

Reciprocamente, suponha que

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$$

e que a reta que contém os pontos Z e Y intersecta a reta BC em um ponto Q . Provemos que só pode ser $Q = P$. Pelo o que acabamos de demonstrar, sendo Q, Y, Z colineares, vale

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1 \quad (2.124)$$

Das Equações (2.123) e (2.124)

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} \implies X = Q. \quad (2.125)$$

Evidentemente, a última implicação acima sempre é válida, visto que dado um segmento $\overline{BC}$ e um número real $k > 0$, existe um único ponto $X \in \overline{BC}$ tal que $\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = k$.

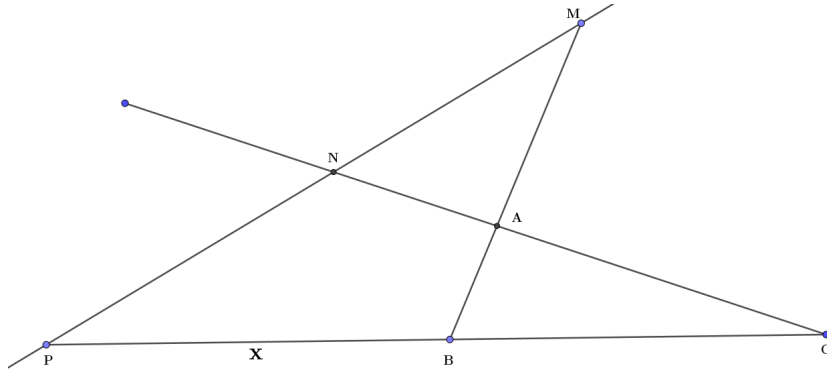
□

De posse desse teorema, vamos a resolução de dois problemas.

1. (Livro do Morgado - Geometria II) Calcule x na Figura 34, sendo: $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 10$, $\overline{MA} = 6$, $\overline{NA} = 2$ e $\overline{PB} = x$.

a) 10

Figura 34 – Problema 1 sobre o Teorema de Menelaus.



Fonte: Livro do Morgado.

- b) 20/3
- c) 25/3
- d) 15
- e) N.R.A

Solução: Este exercício é uma aplicação direta do Teorema de Menelaus. Aplicando o Teorema com relação ao triângulo $\triangle PNC$, visto que os pontos B, A, M são colineares, temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{PM}{NM} \cdot \frac{NA}{AC} \cdot \frac{CB}{BP} = 1 \\
 \Rightarrow & \frac{(PN + NM)}{NM} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{10}{x} = 1 \\
 \Rightarrow & \left(\frac{PN}{NM} + 1 \right) \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{10}{x} = 1
 \end{aligned} \tag{2.126}$$

Agora aplicando o Teorema com relação ao triângulo $\triangle PMB$ temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{PC}{BC} \cdot \frac{BA}{AM} \cdot \frac{MN}{NP} = 1 \\
 \Rightarrow & \frac{(x + 10)}{10} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{MN}{NP} = 1 \\
 \Rightarrow & \frac{(x + 10)}{10} \cdot \frac{MN}{NP} = 1 \\
 \Rightarrow & \frac{NP}{MN} = \frac{(x + 10)}{10}
 \end{aligned} \tag{2.127}$$

Assim, substituindo (2.127) em (2.126) temos

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(x+10)}{10} + 1 \right) \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{10}{x} = 1 \\
& \implies \frac{x+20}{10} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{10}{x} = 1 \\
& \implies \frac{x+20}{4x} = 1 \\
& \implies x = \frac{20}{3}
\end{aligned} \tag{2.128}$$

Portanto, o gabarito é letra B.

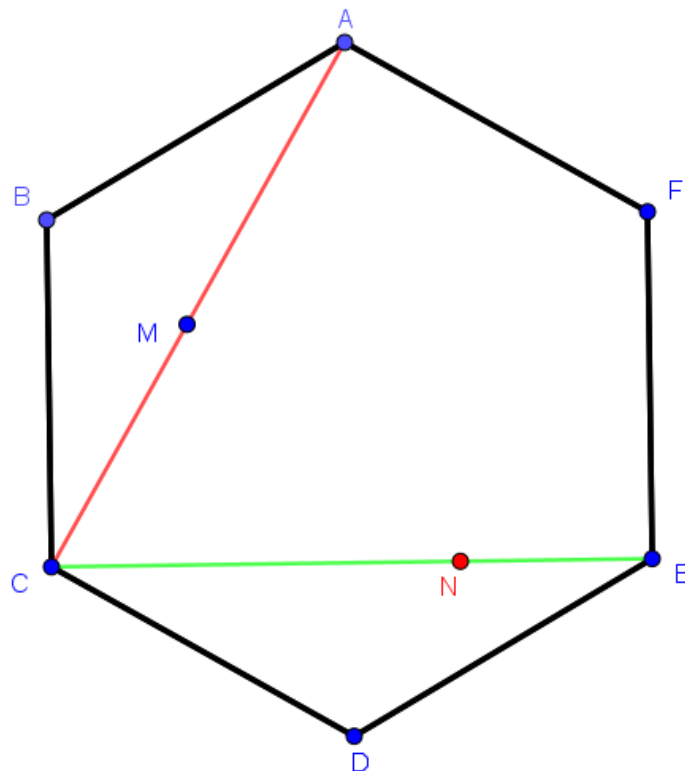
2. (IMO/1982) As diagonais AC e CE de um hexágono regular ABCDEF são divididas internamente pelos pontos M e N, respectivamente, na razão

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = r$$

Encontre o valor r uma vez que B, M e N são pontos colineares.

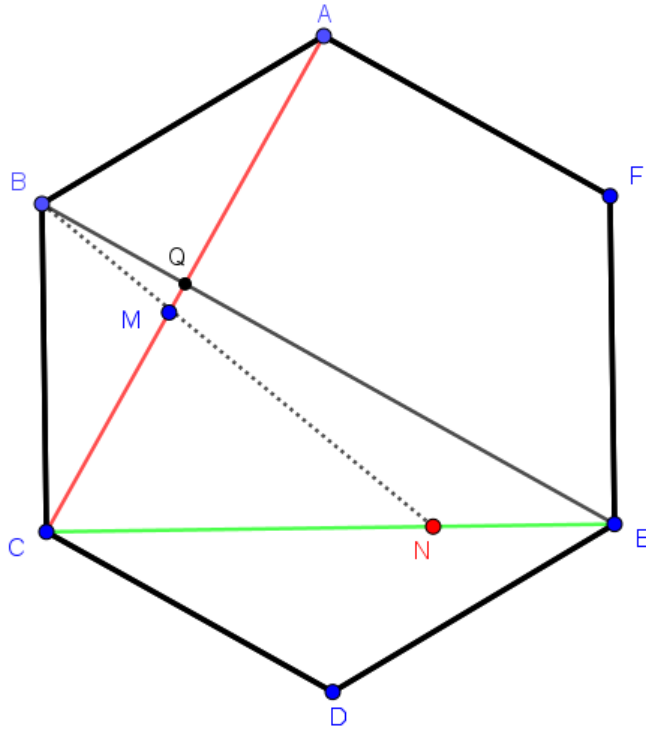
Solução: Inicialmente, vamos construir uma figura para ilustrar a situação descrita no problema.

Figura 35 – Ilustração do problema da IMO 1982



Fonte: IMO 1982.

Figura 36 – Resolvendo o problema.



Fonte: IMO 1982.

Traçando a diagonal BE do hexágono, seja Q o ponto de interseção de BE com AC . Ver Figura 36.

Por hipótese (do enunciado) os pontos B, M e N são colineares. Dessa forma, podemos aplicar o Teorema de Menelaus 2.31 referente ao triângulo CQE . Assim, temos

$$\frac{EN}{NC} \cdot \frac{CM}{MQ} \cdot \frac{QB}{BE} = 1 \quad (2.129)$$

Agora, resta encontrar cada razão que compõe a Equação (2.129). Do enunciado, temos que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = r.$$

Assim, note que

$$\frac{EN}{NC} = \frac{CE - CN}{CN} = \frac{CE}{CN} - 1 = \frac{1}{r} - 1 = \frac{1 - r}{r} \quad (2.130)$$

$$\frac{CM}{MQ} = \frac{AC - AM}{AM - AQ} = \frac{AC - AM}{AM - \frac{AC}{2}} = \frac{2 \cdot (AC - AM)}{2 \cdot AM - AC} = \frac{2 - \frac{2 \cdot AM}{AC}}{\frac{2 \cdot AM}{AC} - 1} = \frac{2 - 2r}{2r - 1} \quad (2.131)$$

Por último, vamos determinar a razão $\frac{QB}{BE}$. Como o hexágono $ABCDEF$ é regular, a medida de seu ângulo interno equivale a 120° . Além disso, todos os seus lados congruentes. Assim, o triângulo BCA é isósceles de base AC . Como, $\hat{CBA} = 120^\circ$, é imediato concluir (haja vista que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo plano é 180°) que $\hat{BCA} = \hat{BAC} = 30^\circ$. Por raciocínio completamente análogo, encontramos que $\hat{DCE} = 30^\circ$. Portanto, o triângulo BCE é reto em B . De modo que, $\hat{CBE} = 60^\circ$. Assim, temos no triângulo BCE

$$\cos 60^\circ = \frac{BC}{BE} \implies \frac{1}{2} = \frac{BC}{BE} \implies BE = 2 \cdot BC \quad (2.132)$$

Observe ainda, que o triângulo CQE é reto em Q , visto que, $\hat{BEC} = 30^\circ$ e $\hat{QCE} = 60^\circ$. Portanto, temos em tal triângulo que

$$\sin 60^\circ = \frac{QE}{CE} \implies \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{QE}{CE} \implies QE = \frac{EC \cdot \sqrt{3}}{2} \quad (2.133)$$

Aplicando a lei dos cossenos no $\triangle CDE$ e lembrando que $\hat{CDE} = 120^\circ$, $CD = DE = BC$ temos

$$\begin{aligned} (EC)^2 &= (CD)^2 + (DE)^2 - 2 \cdot CD \cdot DE \cdot \cos 120^\circ \\ \implies (EC)^2 &= (BC)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (BC)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \implies EC &= BC \cdot \sqrt{3} \end{aligned} \quad (2.134)$$

Assim, temos de 2.133 e 2.134

$$QE = \frac{3 \cdot BC}{2}$$

Por fim, obtemos

$$\frac{QB}{BE} = \frac{BE - QE}{2 \cdot CD} = \frac{2 \cdot BC - \frac{3 \cdot BC}{2}}{2 \cdot BC} = \frac{2 - \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{4} \quad (2.135)$$

Substituindo as equações 2.130, 2.131 e 2.135 em 2.129 temos

$$\frac{1-r}{r} \cdot \frac{2-2r}{2r-1} \cdot \frac{1}{4} = 1 \quad (2.136)$$

Organizando a Equação 2.136 temos

$$3r^2 = 1 \implies r^2 = \frac{1}{3} \implies r = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2.137)$$

2.6 Teorema de Ceva

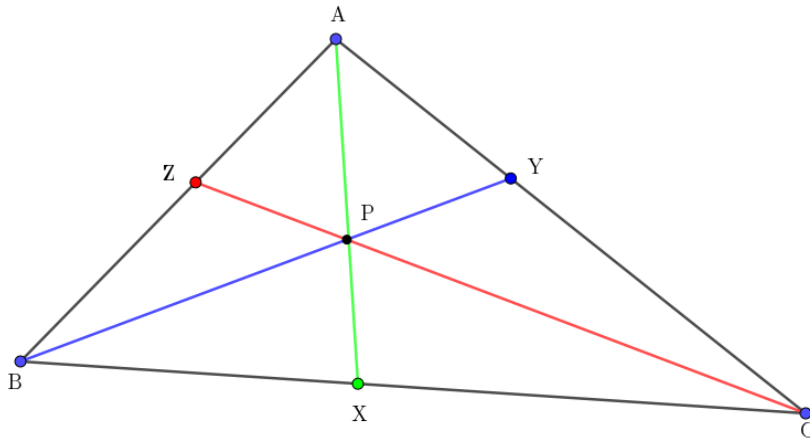
Para a escrita dessa seção, nos baseamos na referência (9). Antes de partirmos para o resultado central dessa seção, vamos definir um importante objeto.

Definição 2.32 (Ceviana). Chama-se *Ceviana* de um triângulo, qualquer segmento de reta que possui uma das extremidades num dos vértices do triângulo e a outra sobre a reta suporte do lado oposto ao vértice considerado.

Teorema 2.33 (Teorema de Ceva). *Sejam um triângulo ABC e X , Y e Z pontos (diferentes de A, B, C) sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente. As cevianas AX , BY e CZ se intersectam em um ponto P se, e somente se,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1 \quad (2.138)$$

Figura 37 – Cevianas concorrentes.



Fonte: Produzido pelo autor.

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que as cevianas intersectam em um ponto P e provemos que isso implica em

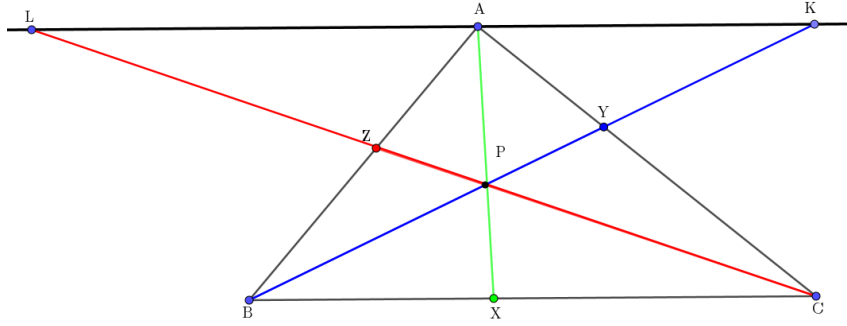
$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Para tanto, tracemos pelo vértice A a reta paralela a BC . Veja a Figura 38.

Como as retas LK e BC são paralelas, temos que os ângulos $\angle ALZ = \angle ZCB$, $\angle BZC = \angle LZA$, de modo que os triângulo $\triangle LAZ$ e $\triangle CBZ$ são semelhantes. Assim, decorre que

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{AL}{BC} \quad (2.139)$$

Figura 38 – Construção auxiliar para provar o Teorema de Ceva.



Fonte: Produzido pelo autor.

Por raciocínio inteiramente análogo, envolvendo o paralelismo entre as retas LK e BC mostramos que os triângulos $\triangle AYK$ e $\triangle CYB$ são semelhantes. Da semelhança entre $\triangle AYK$ e $\triangle CYB$ temos

$$\frac{YC}{YA} = \frac{CB}{AK} \quad (2.140)$$

Do mesmo modo, mostramos que os triângulos $\triangle PBX$ e $\triangle PKA$ são semelhantes, donde

$$\frac{PX}{PA} = \frac{BX}{AK} \quad (2.141)$$

Também são semelhantes os triângulos $\triangle PLA$ e $\triangle PCX$. Donde, temos

$$\frac{PX}{PA} = \frac{CX}{LA} \quad (2.142)$$

Das Equações (2.141) e (2.142) obtemos

$$\frac{BX}{CX} = \frac{AK}{LA} \quad (2.143)$$

Por fim, multiplicando membro a membro as Equações (2.139), (2.140) e (2.143) obtemos

$$\frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{BX}{CX} = \frac{AL}{BC} \cdot \frac{CB}{AK} \cdot \frac{AK}{LA} = 1 \quad (2.144)$$

Assim,

$$\frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{BX}{CX} = 1 \implies \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1 \quad (2.145)$$

Para a recíproca, seja P o ponto de interseção das cevianas AX e BY . Seja T o ponto formado ao traçarmos ceviana do vértice C ao lado AB . Pela primeira parte do teorema, que já foi demonstrada, temos

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AT}{TB} = 1 \quad (2.146)$$

Mas por hipótese temos

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1 \quad (2.147)$$

Portanto, das Equações 2.146 e 2.147 obtemos

$$\frac{AT}{TB} = \frac{AZ}{ZB} \implies T = Z. \quad (2.148)$$

Logo, as cevianas AX , BY e CZ são concorrentes em P .

□

De posse desse teorema, passemos a resolução de um problema.

1. (Livro - Challenging Problems In Geometry Alfred Posamentier) No triângulo retângulo ABC , P e Q estão sobre BC e AC , respectivamente, tais que $CP = CQ = 2$. Pelo ponto de interseção R de AP e BQ , uma reta é desenhada passando também por C e cortando AB em S . O prolongamento de PQ corta AB em T . Se a hipotenusa $AB = 10$ e $AC = 8$, encontre TS .

Solução: Inicialmente, aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$ temos

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 \implies 10^2 = 8^2 + (\overline{BC})^2 \implies \overline{BC} = 6. \quad (2.149)$$

Além disso, a Figura 39 ilustra com clareza a situação descrita no problema.

É imediato observar que as cevianas CS , BQ , AP são concorrentes em R . De modo que podemos aplicar o teorema de Ceva. Assim, sendo, $\overline{BS} = x$ temos

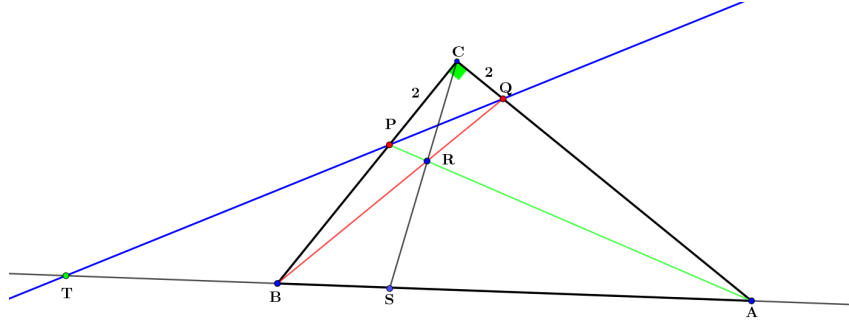
$$\frac{\overline{BS}}{\overline{SA}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} = 1 \implies \quad (2.150)$$

$$\frac{x}{10-x} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{4} = 1 \implies \quad (2.151)$$

$$\frac{x}{10-x} \cdot \frac{3}{2} = 1 \implies \quad (2.152)$$

$$3 \cdot x = 20 - 2 \cdot x \implies x = 4. \quad (2.153)$$

Figura 39 – Utilizando os Teoremas de Ceva e Menelaus.



Fonte: Produzido pelo autor.

Além disso, observe que os pontos T, P, Q são colineares. Assim, podemos aplicar o Teorema de Menelaus. Sendo $\overline{TB} = y$ obtemos

$$\frac{\overline{TB}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} = 1 \implies \quad (2.154)$$

$$\frac{y}{y+10} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{4} = 1 \implies \quad (2.155)$$

$$\frac{3y}{2y+20} = 1 \implies y = 20. \quad (2.156)$$

Portanto, $\overline{TS} = \overline{TB} + \overline{BS} = y + x = 20 + 4 = 24$.

2.7 Quadriláteros Cíclicos

Antes de passarmos a discussão principal dessa seção, convém apresentar dois resultados de grande importância, tanto para a resolução de problemas adiante, como para as demonstrações dessa seção.

Definição 2.34 (Ângulo central em uma circunferência). Ângulo central de uma circunferência é o ângulo que tem o vértice coincidente com o centro da referida circunferência.

Definição 2.35 (Ângulo inscrito em uma circunferência). Ângulo inscrito em uma circunferência é o ângulo que tem o vértice pertencente a circunferência.

Proposição 2.36 (Ângulo inscrito e Ângulo Central). *A medida de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente.*

A demonstração desse resultado bem como outros detalhes podem ser vistos na referência (6).

Proposição 2.37 (Teorema do ângulo externo). *Em todo triângulo (plano), a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ de modo que

$$\alpha + \angle ABC = 180^\circ, \quad (2.157)$$

isto é, α é um dos ângulos externos desse triângulo. Vamos provar que $\alpha = \angle ACB + \angle BAC$. Como efeito, sendo o triângulo $\triangle ABC$ plano, sabemos que a soma das medidas dos seus ângulos internos é igual a 180° . Assim,

$$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ \quad (2.158)$$

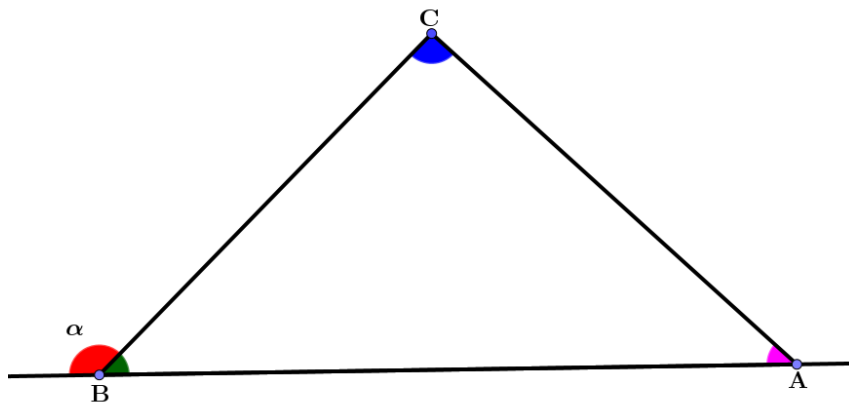
Das Equações (2.157) e (2.158) segue imediatamente que

$$\alpha = \angle ACB + \angle BAC. \quad (2.159)$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

Como ilustração veja a Figura 40.

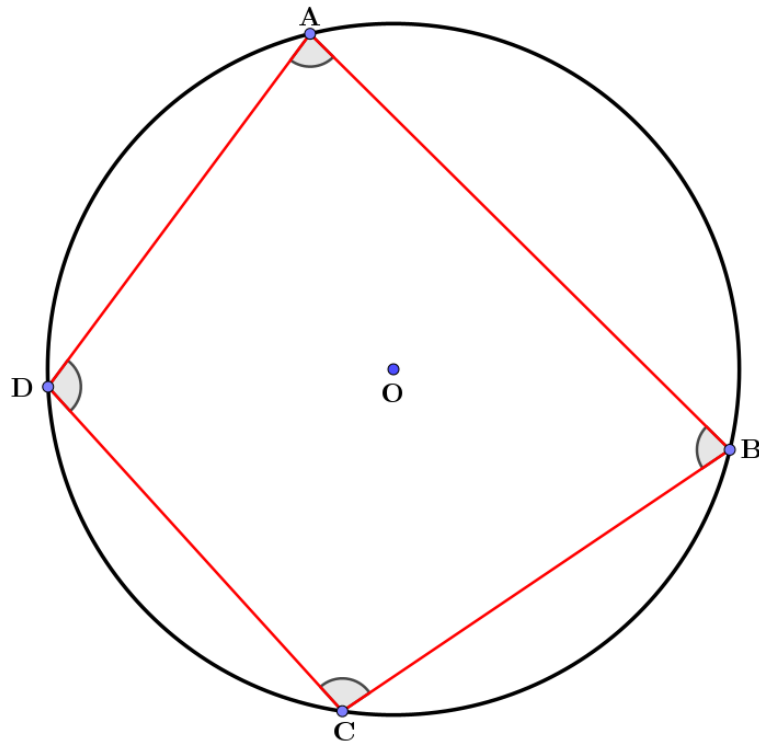
Figura 40 – O Teorema do ângulo externo.



Fonte: Produzido pelo Autor.

Definição 2.38 (Quadrilátero Cíclico). Um quadrilátero é dito cíclico ou inscritível, quando todos os seus vértices pertencem a uma mesma circunferência.

Figura 41 – Quadriláteros cíclicos.



Fonte: Produzido pelo autor.

Como ilustração, observe a Figura 41 a seguir.

A seguir, apresentaremos dois Teoremas que podem ser vistos como critérios para determinação e caracterização de um quadrilátero cíclico.

Teorema 2.39 (1° Critério). *Um quadrilátero $ABCD$ é Cíclico se, e somente se, os ângulos (internos) opostos são suplementares.*

Para ilustrar os passos da demonstração desse Teorema, utilizaremos a Figura 41.

Demonstração. Inicialmente, recorde que um ângulo inscrito em uma circunferência, tem medida igual a metade da medida do seu ângulo central correspondente. Por sua vez, a medida angular de um ângulo central equivale a medida angular do arco determinado por esse ângulo. Assim, podemos dizer que um ângulo inscrito tem medida igual a metade da medida do arco ao qual esse ângulo determina.

Seja $ABCD$ um quadrilátero Cíclico. Provemos que

$$\angle ADC + \angle ABC = \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Seja 2α e 2β as medidas dos arcos ABC e ADC respectivamente. Logo, $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$. Além disso,

$$\angle ADC = \alpha \text{ e } \angle ABC = \beta,$$

Portanto

$$\alpha + \beta = 180^\circ,$$

ou seja,

$$\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ.$$

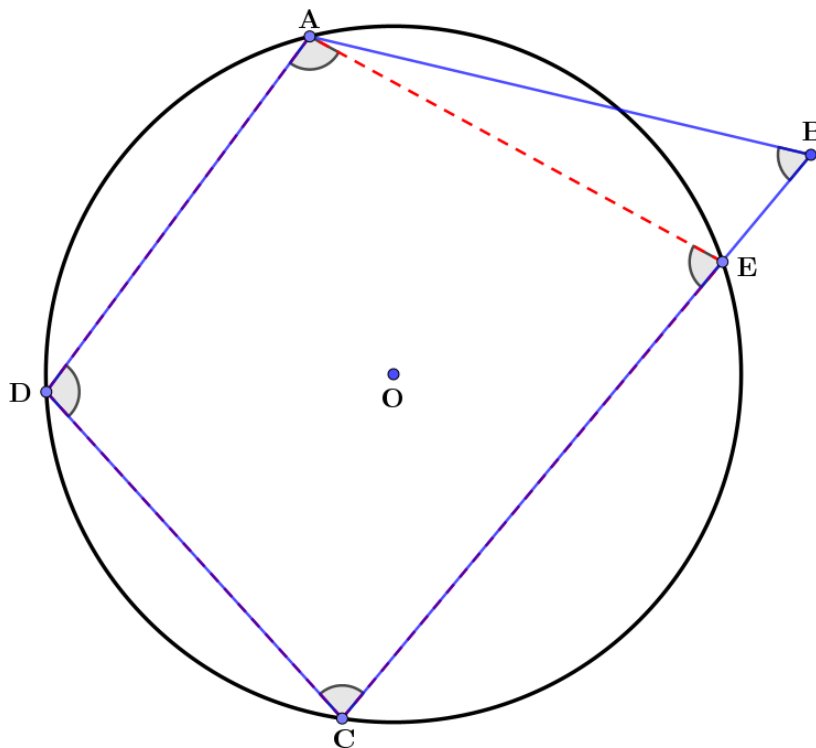
Analogamente, mostra-se que

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Reciprocamente, provemos que se os ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares, então ele é cíclico. Faremos a demonstração por contradição.

Suponha que o quadrilátero $ABCD$ não é cíclico e seja B externo ao círculo de centro O . Como ilustração, observe a Figura 42.

Figura 42 – Auxílio para a demonstração.



Fonte: Produzido pelo autor.

Seja E o ponto de interseção da reta BC com o a circunferência. Temos que o quadrilátero $AECD$ é cíclico, por construção. Assim, pela primeira parte do Teorema, temos

$$\angle ADC + \angle AEC = 180^\circ.$$

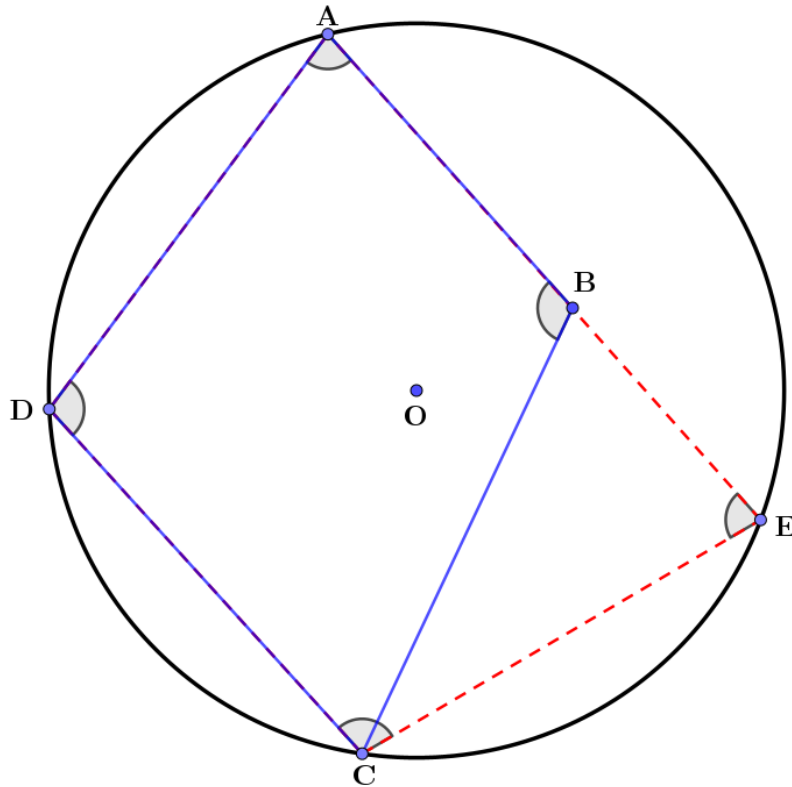
Mas por hipótese $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$. Donde $\angle AEC = \angle ABC$. Mas pelo teorema do ângulo externo, referente ao $\triangle ABE$ em relação ao ângulo externo em E, temos

$$\angle AEC = \angle ABE + \angle BAE = \angle ABC + \angle BAE \implies \angle AEC > \angle ABC.$$

Contradição.

Por fim, analisemos o caso em que B é um ponto interno ao círculo de centro O . Como ilustração temos a Figura 43.

Figura 43 – Caso em que o ponto B é interno ao quadrilátero.



Fonte: Produzido pelo autor.

Como antes, seja E o ponto de interseção da reta AB com o a circunferência. Assim, o quadrilátero $AECD$ é cíclico, por construção. Novamente, pela primeira parte do Teorema

$$\angle ADC + \angle AEC = 180^\circ.$$

Mas por hipótese $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$. Donde $\angle AEC = \angle ABC$. Pelo teorema do ângulo externo, referente ao $\triangle BCE$ em relação ao ângulo externo em B, temos

$$\angle ABC = \angle BEC + \angle BCE = \angle AEC + \angle BCE \implies \angle ABC > \angle BEC.$$

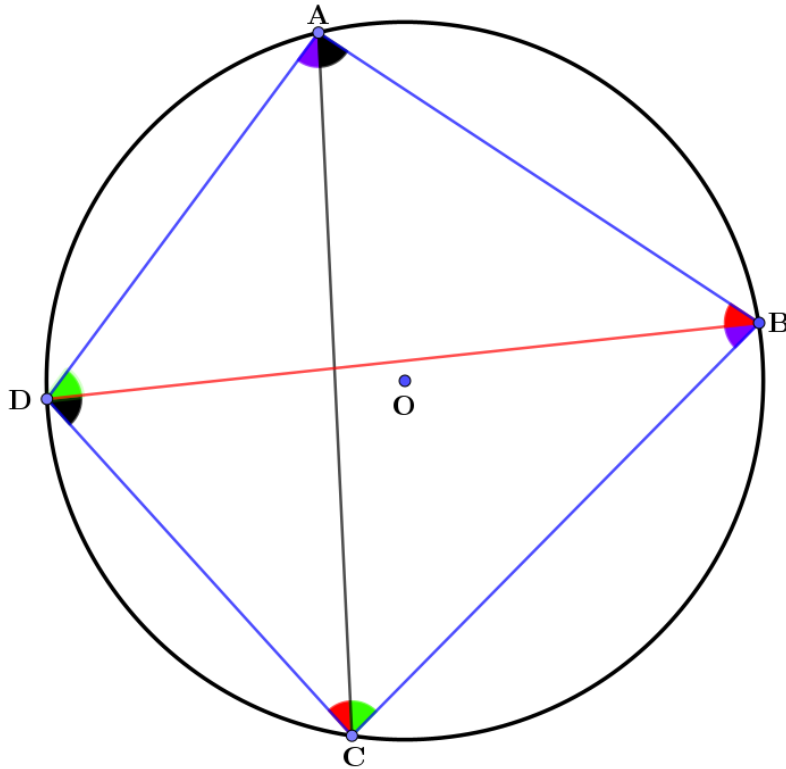
Contradição. Portanto, se os ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares, então ele é cíclico.

□

Teorema 2.40 (2º Critério). *Um quadrilátero é Cíclico se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.*

Demonstração. Como ilustração, observe a Figura 44.

Figura 44 – Ilustração do critério 2 para determinação de um quadrilátero cíclico.



Fonte: Produzido pelo autor.

Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. É imediato concluir que os ângulos $\angle ABD$ e $\angle ACD$ são congruentes, visto que ambos são ângulos inscritos em uma mesma circunferência e enxergam o mesmo arco AD que não contém B . Analogamente, temos $\angle CAD = \angle CBD$; $\angle BAC = \angle BDC$; $\angle ADB = \angle ACB$. Portanto, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.

Reciprocamente, se o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal, provemos que tal quadrilátero é cíclico. Suponha que

o quadrilátero não é inscrito. Seja B um ponto externo ao círculo. Vide ilustração na Figura 45. Por hipótese, temos no quadrilátero $ABCD$

$$\angle ABD = \angle ACD \text{ e } \angle CBD = \angle CAD.$$

Seja E o ponto de interseção da reta AB com o círculo. Evidentemente, o quadrilátero $AECD$ é inscrito, por construção. Assim, vale a primeira parte desse teorema, isto é,

$$\angle AED = \angle ACD \text{ e } \angle CED = \angle CAD.$$

Assim, $\angle AEC = \angle AED + \angle CED = \angle ACD + \angle CAD = \angle ABD + \angle CBD = \angle ABC$.

Mas, considerando o $\triangle BCE$ temos pelo teorema do ângulo externo, referente a $\angle AEC$ que

$$\angle AEC = \angle ABC + \angle BCE.$$

Contradição.

O caso em que B é interno ao círculo é análogo. Assim, se o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal, provemos que tal quadrilátero é cíclico.

□

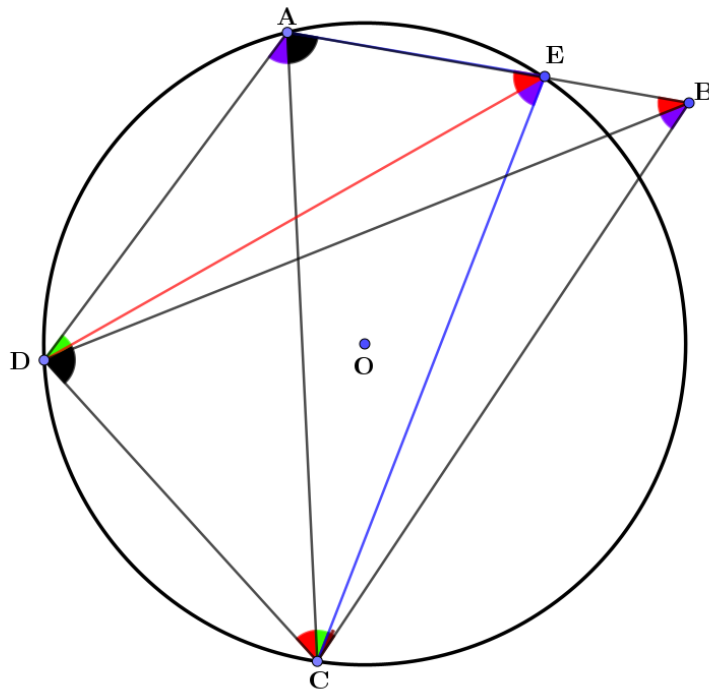
De posse da teoria exposta até o momento, passemos a resolução de um bom problema.

1. (POTI – 2012) Em um triângulo ABC , $\angle BAC = 100^\circ$ e $AB = AC$. Seja BD a bissetriz de $\angle ABC$, com D sobre o lado AC . Prove que $AD + BD = BC$.

Solução: Como $\overline{AB} = \overline{AC}$ temos que o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$. Desse modo, $\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$. Sendo BD a bissetriz interna do ângulo ABC temos $\angle ABD = \angle CBD = 20^\circ$. A Figura 46 ilustra essa situação.

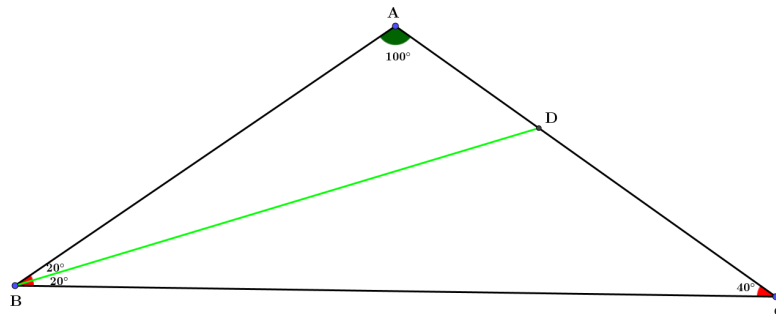
Seja P um ponto pertencente ao lado $\overline{BC}$ de modo que $\overline{BD} = \overline{BP}$. Basta provar que $\overline{PC} = \overline{AD}$. O triângulo $\triangle BDP$ também é isósceles de base $\overline{DP}$. Sendo $\angle CBD = \angle PBD = 20^\circ$ temos que $\angle DPB = \angle PDB = 80^\circ$. Portanto, $\angle DPC = 100^\circ$. Logo, $\angle PDC = 40^\circ$. Sendo assim, o triângulo $\triangle PDC$ é isósceles de base $\overline{CD}$. Onde $\overline{PD} = \overline{PC}$. Agora, observe que $\angle BAD + \angle BPD = 100^\circ + 80^\circ = 180^\circ$. Logo, o quadrilátero $ABPD$ é cíclico. A Figura 47 indica a situação atual do problema.

Figura 45 – Recíproca da demonstração do critério 2 para determinação de um quadrilátero cíclico.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 46 – Quadriláteros cíclicos - um bom problema.



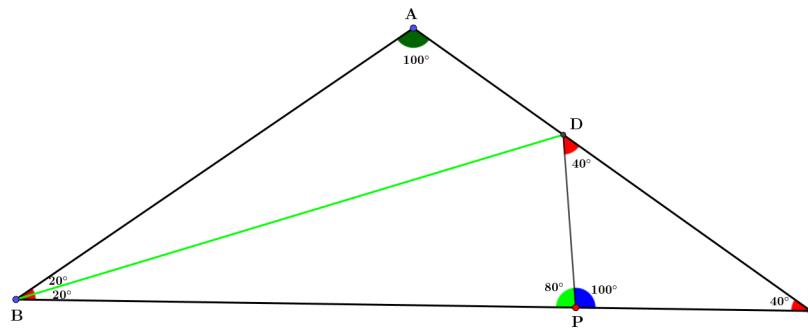
Fonte: Produzido pelo autor.

Agora, usando o fato do quadrilátero $ABPD$ ser cíclico, temos que $\angle PBD = \angle DAP = 20^\circ$. Como $\angle ADP = 140^\circ$ segue que $\angle APD = 20^\circ$. Logo, $\overline{AD} = \overline{PD}$. E como já tínhamos $\overline{PD} = \overline{PC}$ segue $\overline{PC} = \overline{AD}$. O que finaliza nossa demonstração.

2.7.1 Teorema de Ptolomeu

Teorema 2.41 (Teorema de Ptolomeu). *Em um quadrilátero inscritível $ABCD$ o produto dos comprimentos das diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados*

Figura 47 – Quadrilátero cíclicos - parte final



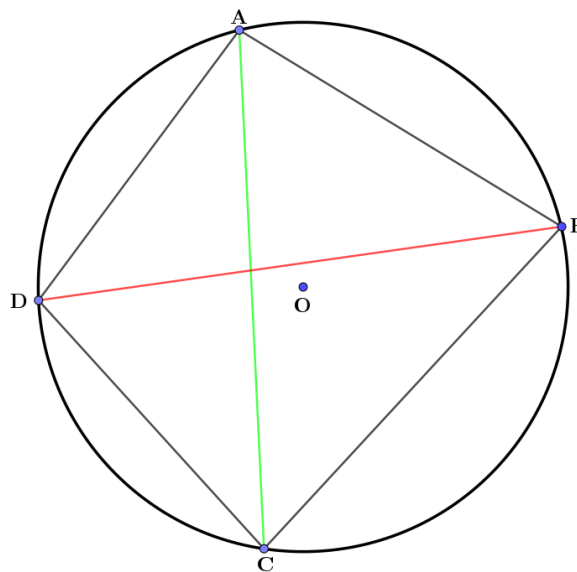
Fonte: Produzido pelo autor.

opostos. Ou seja, vale

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Como ilustração, veja a Figura 48.

Figura 48 – Teorema de Ptolomeu.

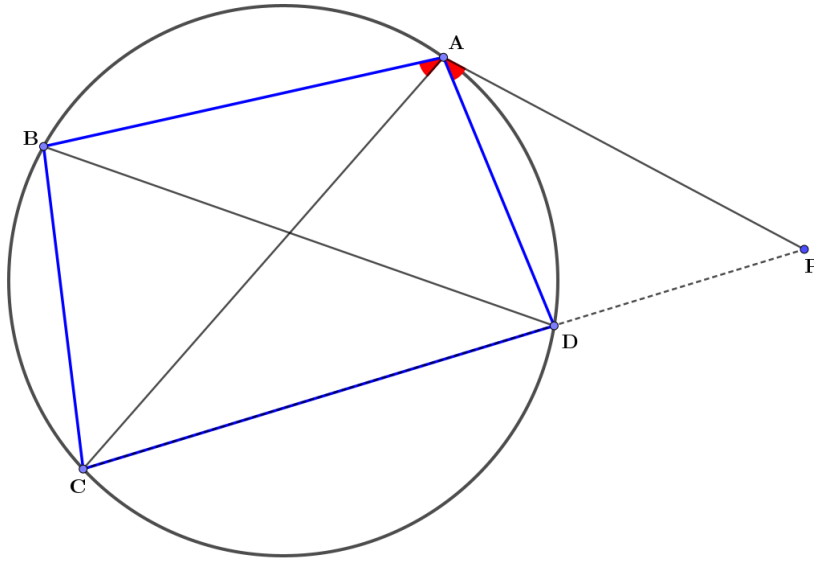


Fonte: Produzido pelo autor.

Demonstração. Por construção, tome um ponto P no prolongamento do lado CD de modo que $\angle PAD = \angle CAB$. Veja a Figura 49.

Como o quadrilátero $ABCD$ é cíclico, temos que $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. Mas, $\angle ADC + \angle ADP = 180^\circ$. Portanto, $\angle ABC = \angle ADP$. Dessa forma, os triângulos $\triangle CAB, \triangle PAD$ são semelhantes. Assim

Figura 49 – Demonstração do Teorema de Ptolomeu.



Fonte: Produzido pelo autor.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BC}}, \text{ logo } \overline{DP} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} \quad (2.160)$$

Evidentemente, da semelhança dos triângulos acima, temos ainda

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} \quad (2.161)$$

Agora, observe que é imediato concluir que $\angle BAD = \angle CAP$. Juntando esse fato, com a Equação 2.161 obtemos que os triângulos $\triangle ABD, \triangle ACP$ são semelhantes. Onde, decorre

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \implies \overline{CP} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} \quad (2.162)$$

Contudo, temos $\overline{CP} = \overline{CD} + \overline{DP}$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} &= \overline{CD} + \overline{DP} \\ \implies \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} &= \overline{CD} + \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} \\ \implies \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} \\ \implies \overline{BD} \cdot \overline{AC} &= \overline{CD} \cdot \overline{AB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \end{aligned}$$

O que finaliza nossa demonstração. □

Observação 2.42. Destacamos ainda que vale a recíproca do Teorema de Ptolomeu.

De posse Teorema, provemos como consequência imediata, a conhecida Relação de Hiparco.

Proposição 2.43 (Relação de Hiparco). *Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Temos*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{AD}} \quad (2.163)$$

Demonstração. Sejam P e Q pontos da circunferência a qual o quadrilátero $ABCD$ está inscrito, de modo que $\widehat{CP} = \widehat{AD}$ e $\widehat{DQ} = \widehat{BC}$. Evidentemente, isso implica

$$\overline{CP} = \overline{AD} \quad (2.164)$$

$$\overline{DQ} = \overline{BC} \quad (2.165)$$

$$\overline{BP} = \overline{AQ} \quad (2.166)$$

$$\overline{PA} = \overline{BQ} = \overline{CD} \quad (2.167)$$

Agora, aplicaremos o Teorema de Ptolomeu nos quadriláteros $PABC$ e $QDAB$ que são cíclicos. Assim

$$\overline{PB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{CP} + \overline{BC} \cdot \overline{PA} \quad (2.168)$$

$$\overline{BD} \cdot \overline{QA} = \overline{AB} \cdot \overline{DQ} + \overline{BQ} \cdot \overline{AD} \quad (2.169)$$

Por fim, dividindo membro a membro a Equação 2.168 pela Equação 2.169 obtemos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{AD}} \quad (2.170)$$

O que finaliza nossa demonstração.

□

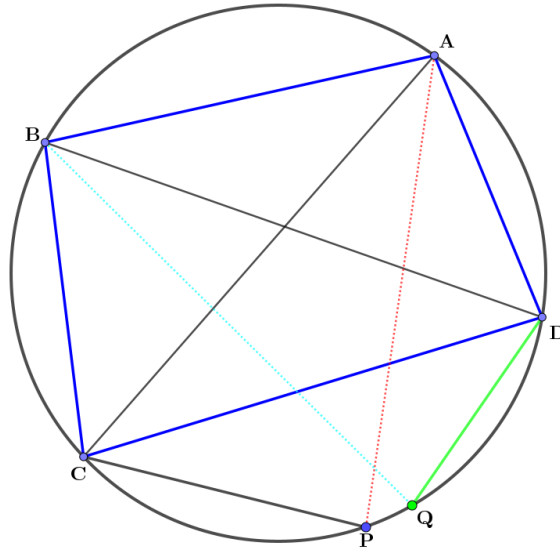
Uma outra forma de demonstrar o Relação de Hiparco, é via utilização de área de triângulos. Faremos isso no Capítulo 3.

2.7.2 Desigualdade de Ptolomeu

Para a escrita desse tópico, utilizamos a referência (10).

O próximo resultado, denominado *Desigualdade de Ptolomeu* generaliza o teorema anterior. Antes porém, precisamos de uma importante definição.

Figura 50 – Demonstração via Teorema de Ptolomeu.



Fonte: Produzido pelo autor.

Definição 2.44 (Quadrilátero Convexo). Um quadrilátero $ABCD$ é convexo se cada um de seus lados está contido em um dos semiplanos determinado pela reta que contém o lado oposto a ele.

Teorema 2.45 (Desigualdade de Ptolomeu). *Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo (não necessariamente inscritível) o produto dos comprimentos das diagonais é menor ou igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos. Ou seja,*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} \leq \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \quad (2.171)$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $ABCD$ é um quadrilátero cíclico.

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer. Tome um ponto E de modo que $\angle AEB = \angle ACD$ e $\angle ABE = \angle ADC$. A Figura 51 ilustra bem a situação inicial de nossa demonstração.

Portanto, os triângulos $\triangle ABE$, $\triangle ADC$ são semelhantes. Onde

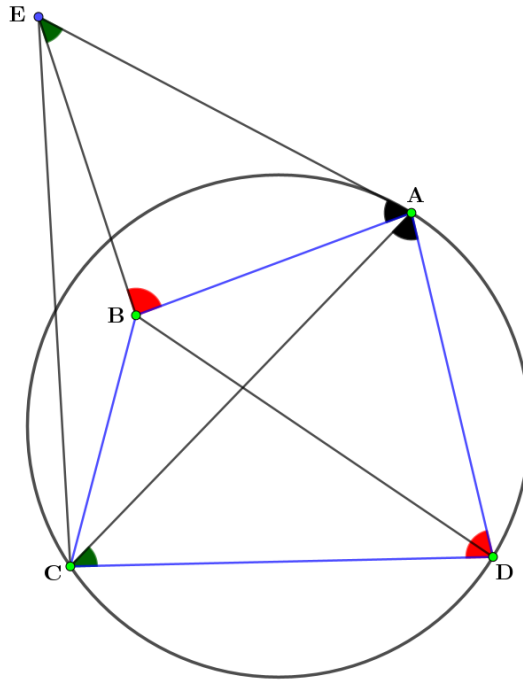
$$\frac{\overline{EB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \quad (2.172)$$

Assim

$$\overline{EB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AD}} \text{ e } \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \quad (2.173)$$

Agora, observe que $\angle BAD = \angle EAC$. Desse fato e de (2.173) temos que os triângulos $\triangle BAD$, $\triangle EAC$ são semelhantes. Portanto, $\angle AEC = \angle ABD$ e $\angle ACE = \angle ADB$.

Figura 51 – Demonstração da Desigualdade de Ptolomeu via semelhança de triângulos.



Fonte: Produzido pelo autor.

Daí

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{EC}} \Rightarrow \overline{EC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD}} \quad (2.174)$$

No triângulo $\triangle EBC$ assim como em qualquer triângulo, vale a desigualdade triangular, isto é,

$$\overline{EC} \leq \overline{BC} + \overline{EB} \quad (2.175)$$

Por fim, substituindo (2.174) em (2.175) temos

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD}} \leq \overline{BC} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AD}}, \quad (2.176)$$

logo

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} \leq \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \quad (2.177)$$

O que finaliza nossa demonstração.

□

Observação 2.46. Não trataremos no corpo desse texto, mas vale destacar que a Desigualdade de Ptolomeu continua válida para quadriláteros não convexos.

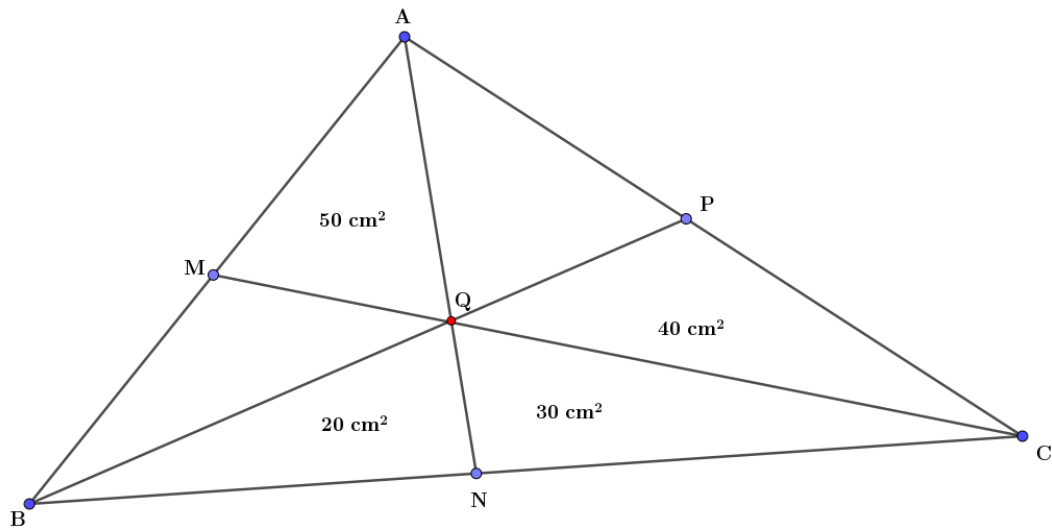
3 Resolução de problemas olímpicos

Neste capítulo trataremos da resolução de problemas presentes em Olimpíadas de Matemática, em provas nacionais ou internacionais de notória importância, bem como questões elaboradas pelo autor. Vale ressaltar, que o campo de **Resolução de problemas** é de suma importância para o desenvolvimento dos estudos em diversos aspectos. Pode-se dizer, que tal campo é o coração do aprendizado matemático, bem como do aprimoramento e desenrolar dessa ciência (11).

3.1 Problemas

1. (Adaptada pelo autor) Na figura a seguir, temos $[AMQ] = 50\text{cm}^2$, $[BNQ] = 20\text{cm}^2$, $[CNQ] = 30\text{cm}^2$ e $[CQP] = 40\text{cm}^2$. Sendo assim, determine a área do triângulo $\triangle ABC$.

Figura 52 – Problema sobre áreas determinadas pela concorrência de três cevianas.



Fonte: Produzido pelo autor.

Solução: Observe que os triângulos $\triangle BNQ$ e $\triangle CNQ$ possuem a mesma altura. Sendo assim, temos pelo Corolário 2.4 que a razão entre suas áreas equivale a razão entre as medidas de suas bases. De modo que

$$\frac{[BNQ]}{[CNQ]} = \frac{20}{30} = \frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \implies \frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} = \frac{2}{3} \quad (3.1)$$

Sejam $x = [BMQ]$ e $y = [APQ]$. Seguindo o mesmo raciocínio anterior, temos

$$\frac{[ABN]}{[ACN]} = \frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} = \frac{2}{3} \implies \frac{x + 50 + 20}{y + 40 + 30} = \frac{2}{3} \implies 2y - 3x = 70 \quad (3.2)$$

Analogamente, temos que

$$\frac{[ABP]}{[BCP]} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \frac{[APQ]}{[CQP]} \implies \frac{[ABP]}{[BCP]} = \frac{[APQ]}{[CQP]} \quad (3.3)$$

Daí

$$\frac{x + y + 50}{20 + 30 + 40} = \frac{y}{40} \implies 5y - 4x = 200 \quad (3.4)$$

Portanto, resolvendo o sistema composto pelas Equações 3.2 e 3.4 obtemos

$$x = \frac{50}{7} \text{ e } y = \frac{320}{7} \quad (3.5)$$

Dessa forma, a área do triângulo $\triangle ABC$ é dada por

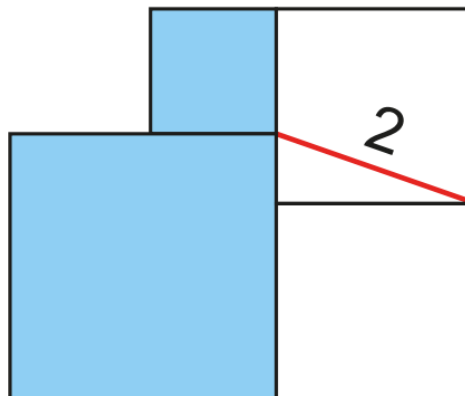
$$[ABC] = [BNQ] + [CNQ] + [CQP] + [APQ] + [AMQ] + [BMQ] \quad (3.6)$$

$$\implies [ABC] = 20 + 30 + 40 + y + 50 + x \quad (3.7)$$

$$\implies [ABC] = 140 + \frac{320}{7} + \frac{50}{7} = \frac{1350}{7} \text{ cm}^2 \quad (3.8)$$

2. (OBMEP - Nível 03 - 1º Fase - 2023) A figura a seguir é formada por quatro quadrados. A medida do segmento destacado em vermelho é 2. Qual é a soma das áreas dos quadrados azuis?

Figura 53 – Questão da OBMEP



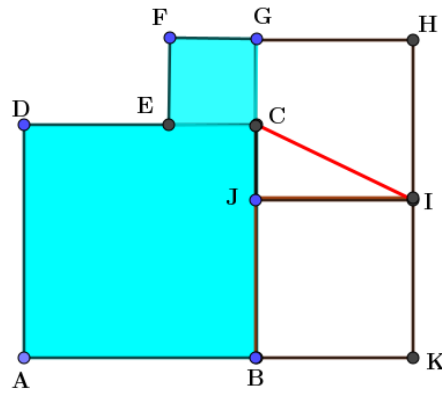
Fonte: OBMEP.

a) 2

- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 10

Solução: para a resolução dessa questão faremos uso de uma figura auxiliar, Figura 54, em que nomeamos os vértices dos quadrados para melhorar a visualização dos passos executados.

Figura 54 – Resolvendo a questão da OBMEP 2023.



Fonte: Produzido pelo autor.

Seja $\overline{CJ} = x$; $\overline{CG} = y$. Então, o lado do quadrado $GHIJ$ equivale a $x + y$. Evidentemente, o triângulo $\triangle CJI$ é retângulo em J . Aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos

$$(\overline{CI})^2 = (\overline{CJ})^2 + (\overline{JI})^2 \implies 2^2 = x^2 + (x + y)^2 \implies 4 = x^2 + x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$$

Assim, temos

$$2x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 = 4. \quad (3.9)$$

Como desejamos encontrar as áreas dos quadrados azuis, isto é,

$$[ABCD] + [CEFG]$$

Basta observar que o lado do quadrado $ABCD$ equivale a $\overline{CJ} + \overline{BJ} = 2x + y$, enquanto que o lado do quadrado $CEFG$ equivale a $\overline{CG} = y$.

Portanto

$$[ABCD] + [CEFG] = (2x + y)^2 + y^2 = 4x^2 + 4xy + 2y^2 = 2 \cdot (2x^2 + 2xy + y^2) \quad (3.10)$$

Assim, substituindo (3.9) em (3.10) obtemos

$$[ABCD] + [CEFG] = 2 \cdot 4 = 8 \quad (3.11)$$

Portanto, o gabarito é letra D.

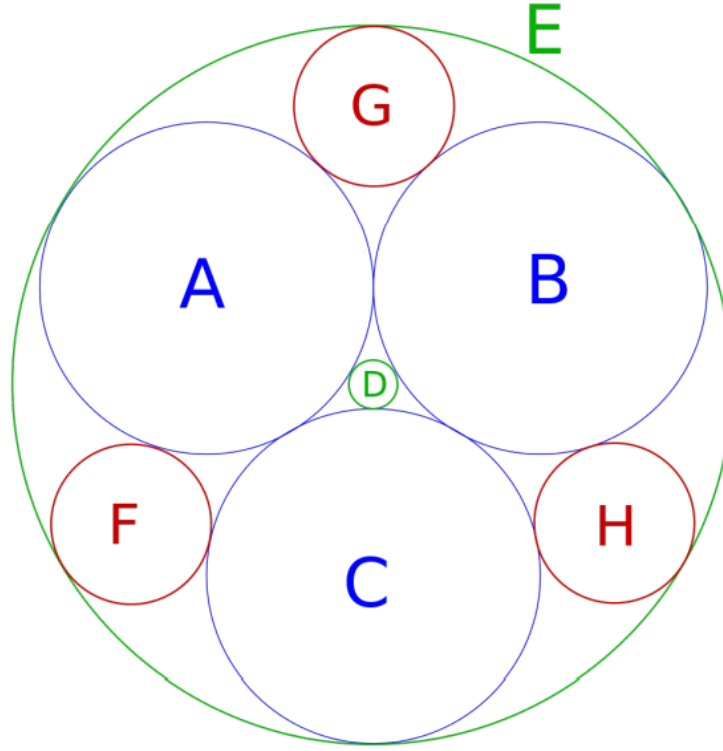
3. (OPEMAT - 2023 - nível 03 - 1º fase) (Círculos de Apolônio) Considere três circunferências A, B e C todas com raio r mutuamente tangentes. O matemático grego Apolônio de Perga que viveu por volta de III a.C, descobriu que existem duas circunferências D e E, onde o raio de E é maior que o raio de D, tangentes às três anteriores (na verdade Apolônio mostrou que isto é verdade mesmo se os raios de A, B e C são distintos). As circunferências D e E são chamadas círculos de Apolônio. Se consideramos agora as circunferências A, B e E, elas próprias possuem seus círculos de Apolônio que são G e C conforme a figura. Fazendo o mesmo para as ternas A, C, E e C, B, E, encontramos as circunferências F e H. Esse processo recursivo leva a um fractal chamado Tamiz de Apolônio. Com base na figura, o raio de D em termos de r é

- a) $2r$
- b) $2r\sqrt{3}$
- c) $r \left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{3} \right)$
- d) $\frac{r^2\sqrt{2}}{2}$
- e) $2r \left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{3} \right)$

Solução: Sejam A_1, B_1, C_1 os centros das circunferências A, B, C. Considere o triângulo de vértices A_1, B_1, C_1 . Evidentemente esse triângulo é equilátero, cujo lado mede $2r$. É imediato que o centro da circunferência D coincide com o baricentro do nosso triângulo. Sobre o baricentro de um triângulo qualquer, recorde que tal ponto divide cada mediana em dois segmentos, de modo que o segmento com extremos no baricentro e no vértice tem medida equivalente ao segmento com extremos no baricentro e no lado do triângulo (6).

Seja K tal baricentro e x o raio da circunferência D. O segmento $\overline{KB_1} = x + r$. Em um triângulo equilátero, temos que a altura, bissetriz interna e mediana são segmentos coincidentes. Já sabemos que para o cálculo da altura de um triângulo

Figura 55 – Questão da OPEMAT 2023 sobre áreas e círculos.



Fonte: OPEMAT.

equilátero temos diversas possibilidades, como: utilizar o teorema de Pitágoras, fazer o uso de trigonometria, ou adiantar a solução por meio da fórmula:

$$h = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}$$

em que h representa a altura do triângulo e l a medida de seu lado.

Sendo assim, a altura do triângulo $\triangle A_1B_1C_1$ é dada por

$$h = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{2r \cdot \sqrt{3}}{2} = r \cdot \sqrt{3}.$$

Seja P o pé da altura baixada de B_1 ao lado $\overline{A_1C_1}$. Temos então $\overline{B_1P} = r \cdot \sqrt{3}$. Mas $\overline{B_1P}$ é também uma mediana do triângulo $\triangle A_1B_1C_1$. Sendo assim, o segmento

$$\overline{KB_1} = \frac{2}{3} \cdot \overline{B_1P} = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \sqrt{3} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Mas

$$\overline{KB_1} = x + r.$$

Assim,

$$x + r = \frac{2r\sqrt{3}}{3} \implies x = \frac{2r\sqrt{3}}{3} - r = r \cdot \left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{3} \right).$$

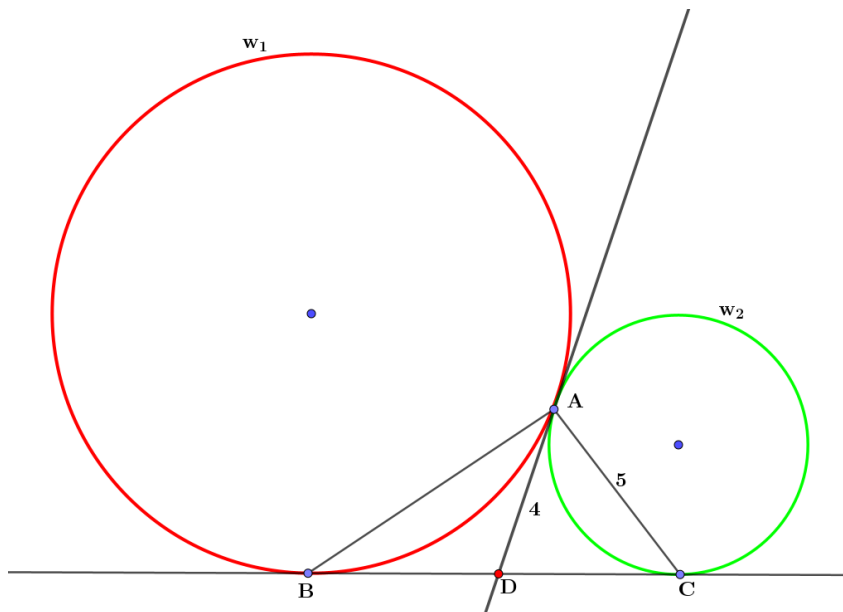
Portanto, o gabarito é letra C.

4. (OPEMAT - 2023 - nível 03 - 1ª fase) Dois círculos w_1 e w_2 são tangentes externamente no ponto A. Sejam B e C os pontos de contato de w_1 e w_2 com uma reta tangente comum aos dois círculos, respectivamente. A reta tangente aos dois círculos que passa pelo ponto A, corta o segmento BC no ponto D. Determine a medida da corda AB, sabendo que $AC = 5$ e $AD = 4$.

- a) 5
- b) 6
- c) $\sqrt{39}$
- d) $3\sqrt{5}$
- e) $4\sqrt{3}$

Solução: Inicialmente, considere a Figura 56 que bem ilustra o problema.

Figura 56 – Ilustração do problema



Fonte: Produzido pelo autor.

Vamos determinar o comprimento da corda AB . Recorde que dois segmentos concorrentes e tangentes a uma mesma circunferência são congruentes (6). Sendo assim, temos com relação a circunferência w_1 que $\overline{AD} = \overline{BD}$. Assim, obtemos $\overline{BD} = 4$. Analogamente, com relação a circunferência w_2 temos $\overline{AD} = \overline{CD} = 4$.

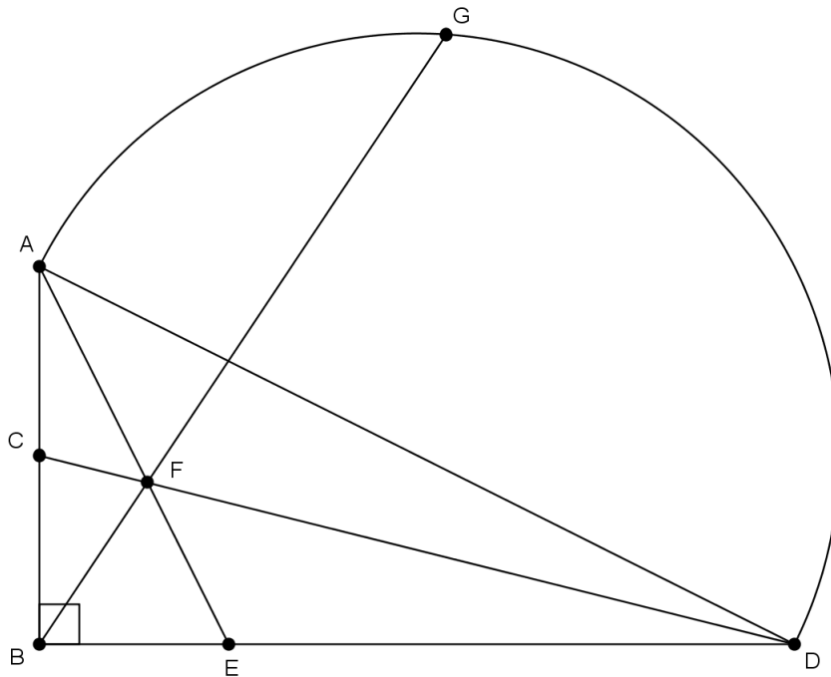
Agora, lembre também que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo tem medida equivalente a metade da medida da hipotenusa (6). Desse modo, no triângulo $\triangle ABC$ a mediana AD relativa ao lado BC mede 4 enquanto que $\overline{BC} = 8$. Assim, a mediana relativa a BC mede metade desse segmento. Mas isso só ocorre em triângulos retângulos. Donde, o $\triangle ABC$ é retângulo em A . Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, temos

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 \implies 8^2 = (\overline{AB})^2 + 5^2 \implies \overline{AB} = \sqrt{39}.$$

Logo, o gabarito é letra C.

5. (2º Fase da OBM - 2016) Na figura abaixo, $AB = 4$, $BD = 8$, $CB = BE = 2$ e AGD é um semicírculo de diâmetro AD . Sendo $AG/GD = p/q$, com p e q inteiros positivos primos entre si, calcule p^q .

Figura 57 – Auxílio para a resolução do problema.



Fonte: 2ª Fase da OBM - 2016

Solução: Seja N o ponto de interseção entre os segmentos BG e AD . Pelo Teorema de Ceva, em decorrência da concorrência das cevianas AE , BN , DC em F temos

$$\frac{AC}{CB} \cdot \frac{BE}{ED} \cdot \frac{DN}{NA} = 1 \quad (3.12)$$

Mas, $AB = 4$, $BD = 8$, $CB = BE = 2$, logo $AC = 2$, $ED = 6$. Substituindo em 3.12 obtemos

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{DN}{NA} = 1 \implies \frac{DN}{NA} = 3 \implies DN = 3 \cdot NA. \quad (3.13)$$

Mas

$$\frac{ED}{BE} = \frac{6}{2} = 3 \implies ED = 3 \cdot BE.$$

Assim, das Equações (3.12) e (3.13) temos $AD = 4 \cdot NA$ e $BD = 4 \cdot BE$ o que nos diz

$$\frac{BD}{ED} = \frac{AD}{DN} = \frac{4}{3}. \quad (3.14)$$

Além disso, temos $\angle ADB = \angle NDE$. Portanto, os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle NDE$ são semelhantes pelo caso Lado-Ângulo-Lado.

Assim, decorre imediatamente que

$$\frac{AB}{NE} = \frac{BD}{ED} = \frac{4}{3} \implies \frac{4}{NE} = \frac{4}{3} \implies NE = 3.$$

Observe, agora, que os ângulos $\angle GAD$ e $\angle GBD$ são inscritos ao mesmo arco GD (o menor deles), logo $\angle GAD = \angle GBD$. Sendo AD o diâmetro de tal círculo, temos $\triangle GAD$ retângulo em G . Assim,

$$\tan(\angle GAD) = \frac{GD}{GA}$$

e

$$\tan(\angle GBD) = \frac{NE}{BE} = \frac{3}{2}$$

Mas $\angle GAD = \angle GBD$. Portanto

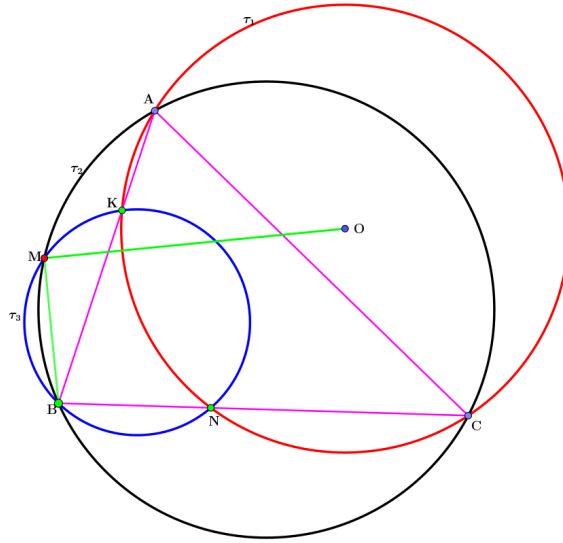
$$\tan(\angle GAD) = \tan(\angle GBD) \implies \frac{3}{2} = \frac{GD}{GA} = \frac{q}{p}.$$

Como p e q são primos entre si, segue $p = 2$ e $q = 3$. Portanto,

$$p^q = 2^3 = 8.$$

6. (IMO 1985) Um círculo de centro O passa pelos vértices A e C de um triângulo $\triangle ABC$ e intersecta os segmentos AB e BC novamente em pontos distintos K e N , respectivamente. Os círculos circunscritos aos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle KBN$ se intersectam em exatamente 2 pontos distintos B e M . Provar que $\angle OMB = 90^\circ$.

Figura 58 – Ilustração do problema da IMO 1985.



Fonte: Produzido pelo autor.

Solução: Seja τ_1 o círculo de centro O que passa pelos vértices A e C do $\triangle ABC$. Sejam ainda τ_2 e τ_3 os círculos circunscritos aos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle KBN$, respectivamente. A Figura 58 ilustra a situação inicial do problema.

Seja O_1 O_2 os centros dos círculos τ_2 e τ_3 respectivamente. É imediato concluir que os triângulos $\triangle OAC$ e $\triangle O_1AC$ são isósceles de mesma base $\overline{AC}$. Sendo assim, $OO_1 \perp AC$. Portanto, a reta AC é o eixo radical das circunferências τ_1 e τ_2 . Analogamente, mostra-se que as retas KN , BM são eixos radicais das circunferências $(\tau_1$ e $\tau_3)$ e $(\tau_2$ e $\tau_3)$, respectivamente. Seja P o ponto de interseção das retas AC , KN , BM , isto é, o ponto de encontro dos eixos radicais das circunferências em questão. Chamamos tal ponto P de centro radical das circunferências τ_1 , τ_2 e τ_3 . A Figura 59 com clareza essa situação.

Observe que os quadriláteros $BNKM$ e $NCAK$ são cíclicos. Onde

$$\angle MBN + \angle MKN = \angle BMK + \angle BNK = 180^\circ \quad (3.15)$$

$$\angle NCA + \angle NKA = \angle CAK + \angle CNK = 180^\circ \quad (3.16)$$

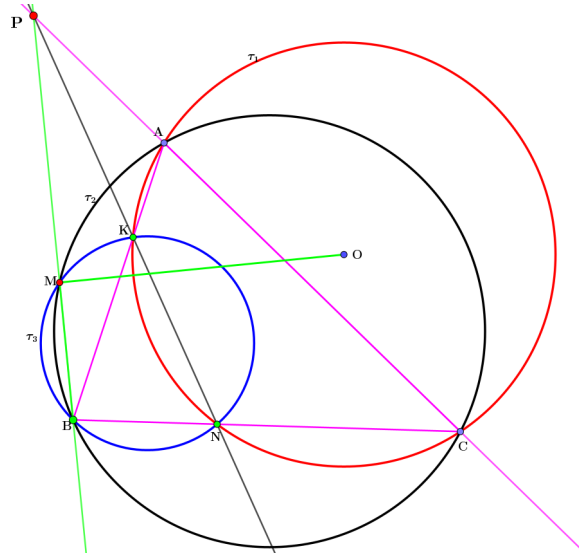
Provemos que o quadrilátero $PMKA$ também é cíclico. De fato, observe que

$$\angle BMK + \angle PMK = 180^\circ \quad (3.17)$$

$$\angle PAK + \angle CAK = 180^\circ \quad (3.18)$$

$$\angle BNK + \angle CNK = 180^\circ \quad (3.19)$$

Figura 59 – Ilustração do problema com eixos radicais.



Fonte: Produzido pelo autor.

Somando membro a membro as Equações 3.17, 3.18, 3.19 e usando substituindo em seguida as Equações 3.15, 3.16 temos

$$\angle BMK + \angle PMK + \angle PAK + \angle CAK + \angle BNK + \angle CNK = 540^\circ \implies \quad (3.20)$$

$$\implies \angle PMK + \angle PAK = 180^\circ \quad (3.21)$$

Logo, de fato o quadrilátero $PMKA$ também cíclico.

Seja agora, Q o ponto de interseção da reta MA com a circunferência τ_1 de modo que $A \neq Q$. Sendo assim, o quadrilátero $KNQA$ também é cíclico. Veja a Figura 60.

Do quadrilátero $KNQA$ ser cíclico, decorre

$$\angle MQN = \angle AQN = \angle AKP = \angle AMP \quad (3.22)$$

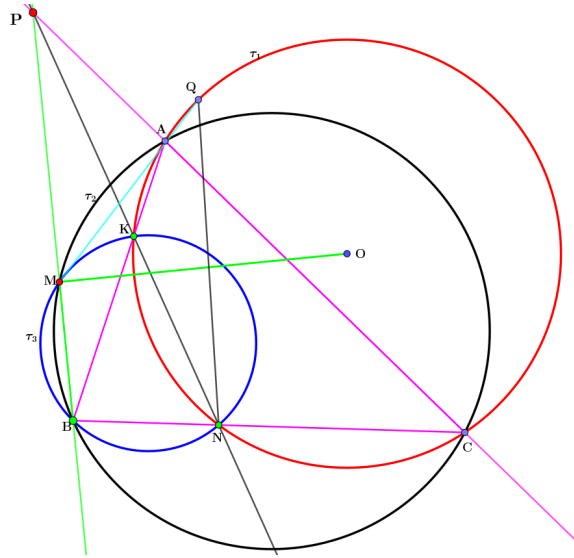
Assim, $MP \parallel NQ$. Evidentemente, como $\overline{MP} \subseteq \overline{BP}$. Donde $BP \parallel NQ$. Logo, é suficiente mostrar que $OM \perp QN$.

Observe ainda, que

$$\angle MNQ = \angle BMN = \angle BKN = \angle MQN. \quad (3.23)$$

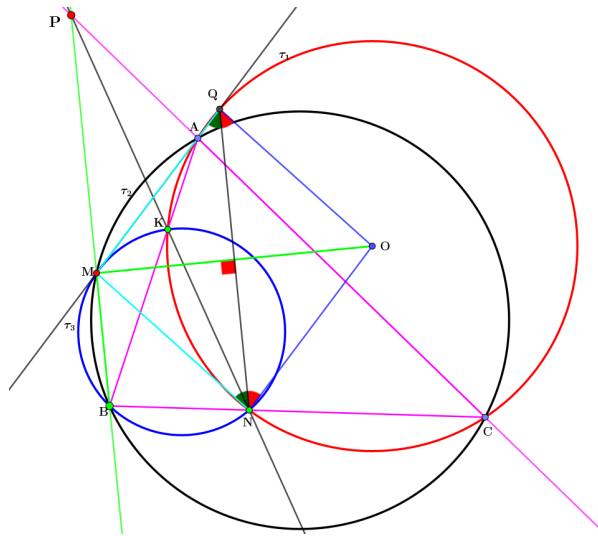
Portanto, os triângulos $\triangle MQN$ e $\triangle OQN$ são isósceles, compartilhando a mesma base $\overline{QN}$. Desse modo, $\overline{MQ} = \overline{MN}$ e $\overline{OQ} = \overline{ON}$. Donde os pontos OM é a mediatriz do segmento $\overline{QN}$. Sendo assim, concluímos que $OM \perp QN$. Logo, provamos que $\angle OMB = 90^\circ$. Veja a Figura 61.

Figura 60 – Com a interseção Q.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 61 – Final da resolução.



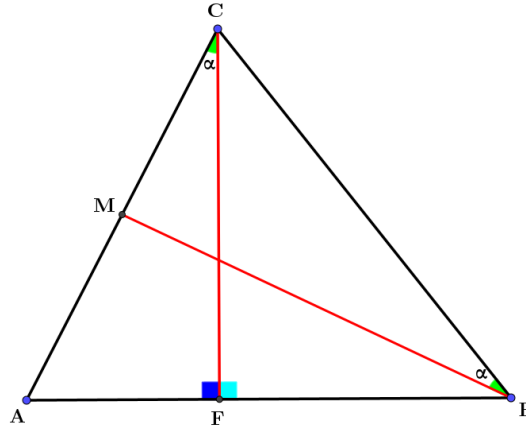
Fonte: Produzido pelo autor.

7. (Inglaterra) No triângulo acutângulo $\triangle ABC$, CF é altura, com F em AB e BM é mediana, com M em CA . Se $BM = CF$ e $\angle MBC = \angle FCA$ prove que o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero.

Solução: A Figura 62 descreve bem a situação do problema. Observe que nessa figura, chamamos $\angle MBC = \angle FCA = \alpha$.

Inicialmente, recordemos que em um triângulo retângulo, a medida da hipotenusa, é o dobro da medida da mediana relativa a ela (6). Sendo assim, considerando o triângulo $\triangle AFC$ que é retângulo em F obtemos $\overline{FM} = \frac{\overline{AC}}{2} = \overline{AM} = \overline{CM}$. Sendo

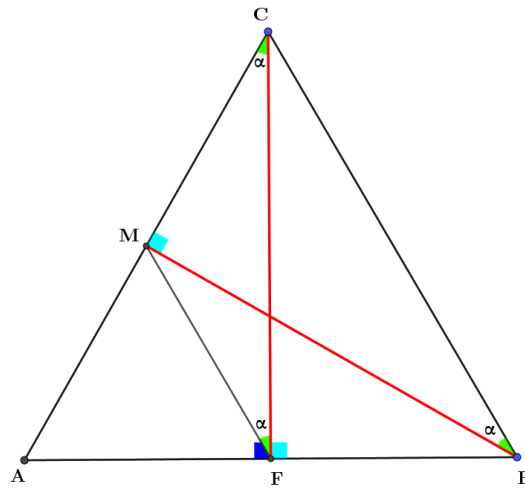
Figura 62 – Situação inicial do problema.



Fonte: Produzido pelo autor.

assim, o triângulo $\triangle CFM$ é isósceles, de base FC . Portanto, $\angle FCA = \angle MFC$. Portanto, temos imediatamente que o quadrilátero $BCMF$ é cíclico de acordo com o Teorema 2.40. Desse modo, $\angle BMC = \angle BFC = 90^\circ$. A Figura 63 ilustra com clareza essa etapa da solução.

Figura 63 – Situação atual do problema.



Fonte: Produzido pelo autor.

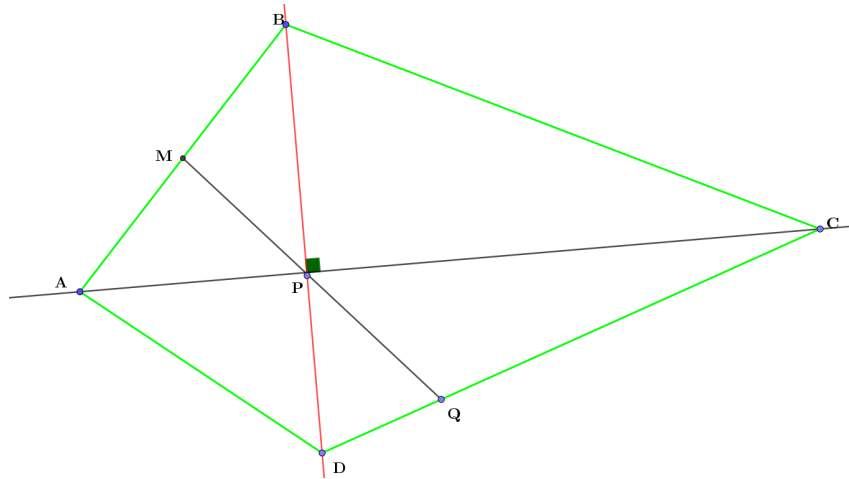
É imediato concluir que os triângulos $\triangle BMC, \triangle BMA$ são congruentes pelo caso *L.A.L* visto que $\overline{CM} = \overline{AM}$ e $\overline{BM}$ é comum e que $\angle BMC = \angle BMA = 90^\circ$. Portanto, temos $\overline{BC} = \overline{AB}$. Segue também que os triângulos $\triangle BMC$ e $\triangle BFC$ são congruentes por *A.L.A*. Portanto, temos $\angle BCM = \angle CBF$. Donde, $\overline{AC} = \overline{AB}$. Logo, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$. Isto é, o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero.

8. (Cone Sul) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que suas diagonais AC e BD

são perpendiculares. Seja P a intersecção de AC e BD e seja M o ponto médio de AB . Mostre que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, as retas PM e CD são perpendiculares.

Solução: Considere a Figura 64 como estágio inicial do problema. Observe que chamamos de Q o ponto de intersecção entre as retas PM e CD .

Figura 64 – Questão da Olimpíada Cone Sul.



Fonte: Produzido pelo autor.

Se o quadrilátero $ABCD$ é inscritível, então $\angle ABD = \angle ACD$. Mas $\angle ABD = \angle MBP$ e $\angle ACD = \angle PCQ$. Além disso, como M é ponto médio do segmento AB , e o triângulo $\triangle APB$ é retângulo em P temos que o segmento PM é a mediana relativa à hipotenusa AB . De sorte que, $\overline{PM} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Assim, $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{PM}$. Portanto, o triângulo $\triangle PMB$ é isósceles, de base PB . Assim, $\angle MBP = \angle MPB = \angle DPQ = \alpha$. Daí, $\angle CPQ = 90^\circ - \alpha$. Pelo teorema do ângulo externo, referente ao triângulo $\triangle PQC$ temos $\angle PQD = \angle CPQ + \angle PCQ = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$. Portanto, $PM \perp CD$.

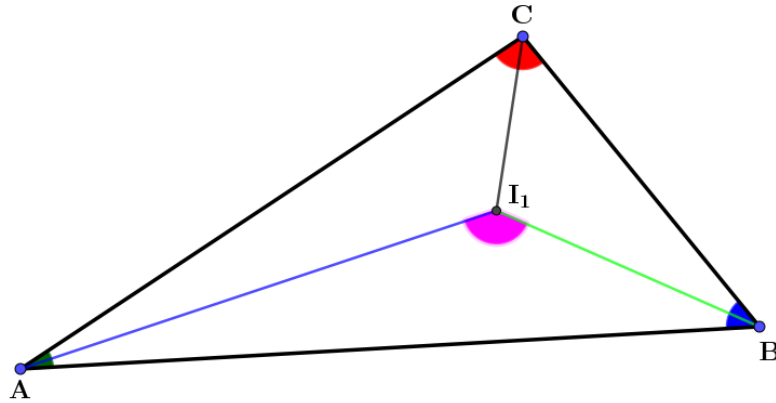
Reciprocamente, se $PM \perp CD$ provemos que o quadrilátero $ABCD$ é cíclico. Observe que no triângulo retângulo $\triangle PMB$ temos $\overline{PM} = \frac{\overline{AB}}{2} \implies \overline{AM} = \overline{MB} = \overline{PM}$. Como já dissemos antes. E isso implica, $\angle CPQ = 90^\circ - \alpha$. Em que $\alpha = \angle MBP = \angle MPB = \angle DPQ$. Como $\angle PQC = 90^\circ$, segue que $\angle PCQ = \alpha$. Mas isso implica, $\angle ABD = \angle ACD$. Logo, o quadrilátero $ABCD$ é cíclico.

9. (Olimpíada Japonesa de Matemática) Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Prove que os incentros dos triângulos $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle ADB$ são os vértices de um retângulo.

Solução: Inicialmente, observe que se I_1 é o incentro do $\triangle ABC$ então $\angle AI_1B = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2}$. A Figura 65 ilustra essa situação.

Enunciemos e provemos esse resultado auxiliar. Antes porém, recorde que o *incentro* de um triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes internas dos seus ângulos.

Figura 65 – Ilustração do lema.



Fonte: Produzido pelo autor.

Lema 3.1. Se I_1 é o incentro do $\triangle ABC$ então $\angle AI_1B = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2}$.

Demonstração. Considerando os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AI_1B$ é imediato que

$$\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ \implies \frac{\angle ACB}{2} + \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2} = 90^\circ \quad (3.24)$$

$$\angle ABI_1 + \angle AI_1B + \angle BAI_1 = 180^\circ \implies \angle AI_1B + \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ABC}{2} = 180^\circ \quad (3.25)$$

Daí, subtraindo membro a membro as equações 3.24 e 3.25 obtemos

$$\angle AI_1B = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2} \quad (3.26)$$

O que finaliza a demonstração do Lema. $\square$

De volta a nosso problema. Sejam I_1, I_2, I_3, I_4 os incentros dos triângulos $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle ADB$, respectivamente. A Figura 66 ilustra essa situação.

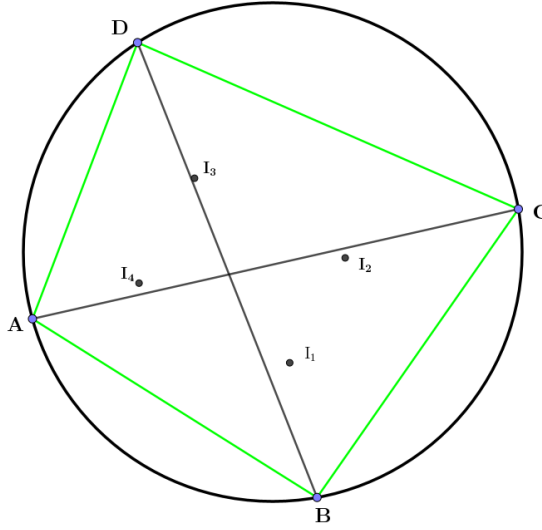
Pelo Lema 3.1 e do fato de I_1, I_4 serem incentros dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADB$ segue que

$$\angle AI_4B = 90^\circ + \frac{\angle ADB}{2} \quad (3.27)$$

$$\angle AI_1B = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2} \quad (3.28)$$

Mas o quadrilátero $ABCD$ é cíclico, donde $\angle ADB = \angle ACB$. Assim, $\angle AI_4B = \angle AI_1B$. Portanto, o quadrilátero ABI_1I_4 é cíclico. Assim, decorre que

Figura 66 – Incentros dos triângulos.



Fonte: Produzido pelo autor.

$$\angle BI_1I_4 + \angle BAI_4 = 180^\circ \implies \angle BI_1I_4 = 180^\circ - \angle BAI_4 = 180^\circ - \frac{\angle BAD}{2} \quad (3.29)$$

Por raciocínio inteiramente análogo ao exposto anteriormente, mostra-se que o quadrilátero BCI_1I_2 também é cíclico. Donde

$$\angle BI_1I_2 = 180^\circ - \frac{\angle BCD}{2} \quad (3.30)$$

Observe que

$$\angle I_4I_1I_2 = 360^\circ - (\angle BI_1I_2 + \angle BI_1I_4) \quad (3.31)$$

Assim, de 3.29, 3.30, 3.31 temos

$$\angle I_4I_1I_2 = 360^\circ - \left(180^\circ - \frac{\angle BCD}{2} + 180^\circ - \frac{\angle BAD}{2} \right) = \frac{\angle BCD + \angle BAD}{2} = 90^\circ. \quad (3.32)$$

Analogamente, mostra-se que $\angle I_1I_2I_3 = \angle I_1I_4I_3 = \angle I_2I_3I_4 = 90^\circ$. Portanto, o quadrilátero $I_1I_2I_3I_4$ é um retângulo.

10. (Relação de Hiparco) Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Mostre que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{AD}} \quad (3.33)$$

Solução: Faremos a solução de problema utilizando a área de um triângulo inscrito em um círculo de raio R em função dos lados e desse raio. Com efeito, seja o triângulo $\triangle ABC$ de lados a, b, c inscrito em um círculo de raio R . Temos que a área desse triângulo pode ser obtida por

$$[ABC] = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}. \quad (3.34)$$

Observe que

$$[ABCD] = [ABC] + [ADC] = [ABD] + [DBC] \quad (3.35)$$

Desse modo, sendo R o raio do círculo a qual o quadrilátero $ABCD$ é inscrito, vamos expressar as áreas dos triângulos $\triangle ABC, \triangle ADC, \triangle ABD, \triangle DBC$, através de 3.34 e em seguida substituir em 3.35. Assim, obtemos

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}}{4R} + \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CD}}{4R} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD}}{4R} + \frac{\overline{DB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BC}}{4R} \Rightarrow \quad (3.36)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} + \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} + \overline{BD} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BC} \Rightarrow \quad (3.37)$$

$$\overline{AC} \cdot (\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AD} \cdot \overline{CD}) = \overline{BD} \cdot (\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{CD} \cdot \overline{BC}) \Rightarrow \quad (3.38)$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{AD}} \quad (3.39)$$

O que finaliza nosso problema.

4 Sequência didática

Neste capítulo é apresentado a estrutura do curso ministrado sobre geometria olímpica, em uma escola da Educação Básica, com estudantes do Ensino Médio, que fazem parte de uma turma olímpica em estágio inicial. Nesse sentido, estruturamos o passo a passo do fazer pedagógico presente na referida atividade, isto é, propõem-se e aplica-se uma sequência didática.

Vale ressaltar que o termo Sequência Didática é empregado desde os anos 90, principalmente nos trabalhos em Didática Matemática que fazem uso de pesquisa experimental (12). Assim sendo, uma Sequência Didática pode ser utilizada no sentido de intervir significativamente na melhoria do ensino (13).

4.1 Estrutura Curricular da Sequência Didática

1. **Etapas de ensino:** Ensino Médio.
2. **Área:** Matemática
3. **Unidade Temática (BNCC):** GEOMETRIA E MEDIDAS
4. **Objetos de Conhecimento:** Áreas de figuras planas; Teorema de Ceva; Teorema de Menelaus; Quadriláteros cíclicos; Teorema de Ptolomeu; Tópicos básicos de trigonometria; Semelhança de triângulos.
5. **Habilidades (BNCC):**
 - a) (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
 - b) (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
 - c) (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

6. **Objetivos/Expectativas de Aprendizagem:** Compreender de modo mais aprofundado tópicos presentes em sua formação básica, como o estudo de áreas de figuras planas; entender e aplicar os Teoremas de Ceva e Menelaus em questões olímpicas. Possibilitar ao estudante da Educação básica, ferramentas e conteúdos suficientes para a sequência de seus estudos; tornar as Olimpíadas de Matemática cada vez mais presentes no cotidiano dos estudantes; reforçar os conhecimentos de Geometria e expandir para tópicos mais avançados.
7. **Duração do curso:** 6 encontros, sendo cada encontro com duração de *2h 30min*.
8. **Recursos educacionais:** quadro branco e pilotos; Televisão e mesa digitalizadora; Materiais impressos.
9. **Avaliação:** será de caráter formativo, buscando observar sempre se as metodologias aplicadas durante o curso, estão de fato sendo válidas no processo de aprendizagem.
10. **Conteúdos trabalhados previamente pelo professor com aluno:** para obter um resultado satisfatório, é de extrema importância o levantamento prévio de conteúdos chaves (pré-requisitos) para o andamento do curso. Sendo assim, é importante saber o nível de entendimento dos estudantes em tópicos como: frações; equação do 1º grau; equação do 2º grau; razão e proporção; noções elementares de geometria, como cálculo de perímetro e áreas.
11. **Estratégias de ensino:**
 - a) **Enfatizar os conteúdos mais básicos:** antes de abordar problemas difíceis, isto é, em nível olímpico, faz-se necessário garantir que os estudantes tenham uma compreensão e domínio dos conceitos fundamentais da geometria elementar, como congruência, semelhança, propriedades dos polígonos, teorema de Pitágoras, dentre outros.
 - b) **Aulas expositivas e dialogadas:** nessa etapa, há de fato a exposição teórica do conteúdo, no intuito de prover base de sustentação aos estudantes. Também é nesse momento que ocorre o diálogo mais próximo da teoria, entre professores e alunos. Dessa forma, é possível construir terreno para experiências e desafios futuros, por parte dos estudantes.
 - c) **Resolução de problemas:** a Geometria Olímpica caracteriza-se, em geral, por problemas que exigem dos estudantes, um nível de criatividade e raciocínio não convencional. Sendo assim, durante o andamento do curso, serão apresentados e resolvidos com os participantes, uma grande variedade de problemas desafiadores, de nível Nacional e Internacional. Basicamente, o intuito é permitir aos alunos, o pleno desenvolvimento de habilidades e a pensar de forma crítica. Portanto,

é imprescindível encorajar os estudantes a resolverem cada vez mais questões, subindo gradativamente o nível das mesmas.

- d) **Discussões em grupo:** neste ponto, a ideia central é que os participantes exponham suas ideias para o grupo como um todo. Nesse sentido, os alunos são convidados a apresentar suas soluções (ou tentativas) para a turma. Evidentemente, tal prática, também possibilita o desenvolvimento de habilidades relacionadas a comunicação, trabalho em equipe, entre outras.

12. **Materiais de apoio:** notas de aula disponibilizadas pelo professor; vídeos gravados pelo professor e disponibilizados aos estudantes; livros sobre geometria olímpica.

4.2 Descrição do Curso ministrado

Cada encontro, com duração de $2h\ 30min$ terá seu tempo dividido em etapas, da seguinte forma:

1. Etapa 01: os estudantes receberão antes de cada encontro, um material teórico acerca do conteúdo a ser trabalhado no encontro seguinte. Dessa forma, espera-se a leitura prévia de tal material. Nesse sentido, faz-se uso da Metodologia Ativa “Sala de Aula Invertida.” Convém enfatizar que em tal prática, tem-se forte mudança no modo tradicional do processo de ensino, uma vez que, o conteúdo passa a ser visto em casa (antes da aula ocorrer de fato), sendo as atividades realizadas no ambiente escolar. Desse modo, os alunos passam a ter uma postura mais ativa em seu processo de aprender, assumindo o papel de protagonista, o que sem dúvidas propicia uma aprendizagem significativa (14).
2. Etapa 02: exposição teórica do conteúdo, com exemplos em nível básico e intermediário. Esta etapa, dura cerca de $30min$.
3. Etapa 03: resolução e discussões de questões olímpicas sobre os conteúdos vivenciados no encontro e em encontros anteriores. Vale ressaltar que todos os problemas realizados nessa etapa, estão presentes no material teórico que os estudantes receberam na Etapa 01. Esta etapa dura cerca de $30min$.
4. Etapa 04: os estudantes recebem uma lista com 5 questões olímpicas para tentarem responder durante $45min$.
5. Etapa 05: esse é o momento final da aula, será nele que os alunos irão expor ao grande grupo as resoluções encontradas para os problemas da etapa anterior. Desse modo, visa-se propiciar a discussão coletiva, bem como desenvolver habilidades múltiplas nos estudantes, que ultrapassem o campo da Matemática, tais como: Comunicação. Esta etapa dura cerca de $45min$.

A seguir, há a descrição dos conteúdos vivenciados em cada encontro.

1. Encontro 01: Estudo de semelhança de figuras planas e consequências obtidas a partir desse estudo.
2. Encontro 02: Áreas de figuras planas.
3. Encontro 03: Teorema de Ceva e Menelaus.
4. Encontro 04: Quadriláteros cíclicos.
5. Encontro 05: Teorema de Ptolomeu.
6. Encontro 06: Este momento será dedicado a resolução de problemas mais avançados, conforme os conteúdos vistos em encontros anteriores. Aqui, também ocorrerá a avaliação final do curso.

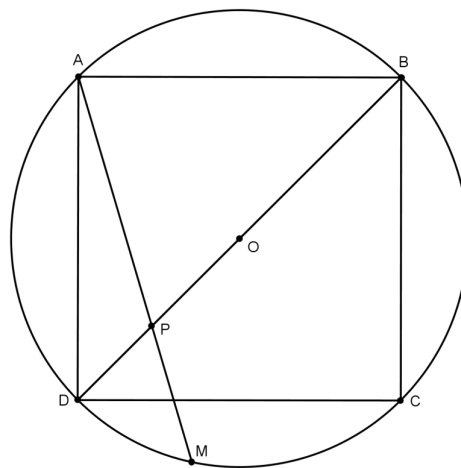
4.3 Questões aplicadas nos Encontros

Nessa seção apresentamos os problemas propostos em cada encontro.

4.3.1 Questões referentes ao encontro 01 - Semelhança de figuras planas

1. (Portal da Matemática - OBMEP) O quadrado $ABCD$ está inscrito em um círculo cujo raio mede 30. A corda AM intercepta a diagonal BD no ponto P . Se o segmento AM mede 50, determine a medida do segmento AP . Ver Figura 67.

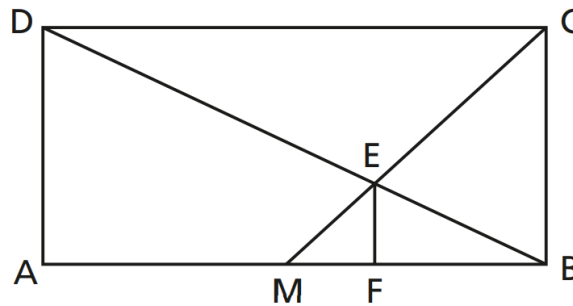
Figura 67 – Portal da OBMEP.



Fonte: Portal da OBMEP.

2. (Produzida pelo Autor) Considere uma peça de madeira, em formato de um triângulo $\triangle ABC$, retângulo em A tal que a hipotenusa mede 25cm, e o cateto $\overline{AB} = 24$ cm. Uma artesão irá produzir uma escultura em forma quadrada, a partir da peça triangular. Ele deseja que um dos vértices do quadrado coincida com A . Nessas condições, qual a área do maior quadrado que é possível obter?
3. (Livro 09 - Fundamentos de Matemática Elementar - página 206) Num retângulo $ABCD$, os lados AB e BC medem 20 cm e 12 cm, respectivamente. Sabendo que M é o ponto médio do lado AB , calcule EF , distância do ponto E ao lado AB , sendo E a interseção da diagonal BD com o segmento CM . Ver Figura 68.

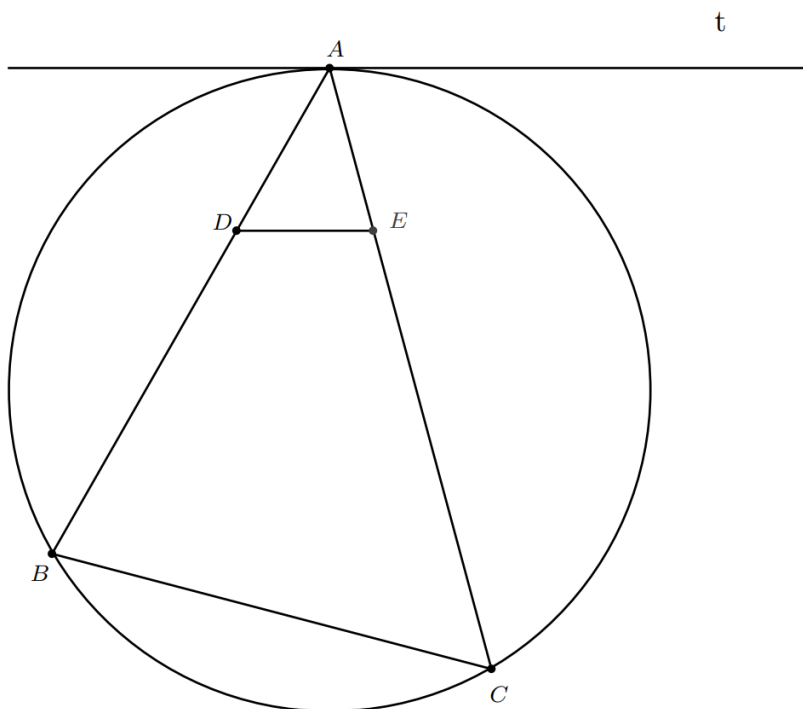
Figura 68 – Fundamentos de Matemática Elementar



Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 09.

4. (OBM 2023 – Nível 03 – Fase única) Seja ABC um triângulo retângulo em B , com altura BT , T sobre a hipotenusa AC . Construa os triângulos equiláteros BTX e BTY de modo que X esteja no mesmo semiplano que A com relação a BT no e Y esteja no mesmo semiplano que C com relação a BT . O ponto P é a interseção de AY e CX . Prove que $PA \cdot BC = PB \cdot CA = PC \cdot AB$.
5. (Questão retirada do Portal da Matemática - OBMEP - POTI) Na figura, a reta t é tangente ao círculo e paralela ao segmento DE . Se $AD = 6$, $AE = 5$ e $CE = 7$, o valor da medida do segmento BD é: (Ver Figura 69).
- a) 3,5
- b) 4
- c) 4,5
- d) 5
- e) 5,5

Figura 69 – POTI - Geometria

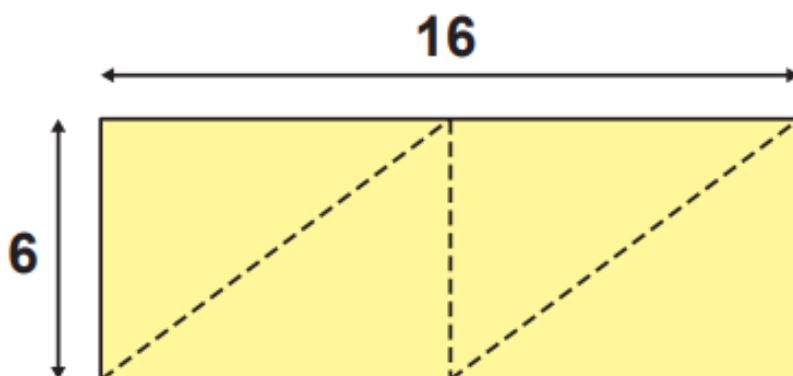


Fonte: POTI - Geometria

4.3.2 Questões referentes ao encontro 02 - Áreas de figuras planas

1. (OBMEP 2022 - 2º fase - Nível 02) Janaína cortou uma cartolina retangular de 16 cm de comprimento e 6 cm de largura em quatro triângulos retângulos iguais, conforme mostra a Figura 70.

Figura 70 – Questão da OBMEP 2022 - 2º fase - Nível 02.

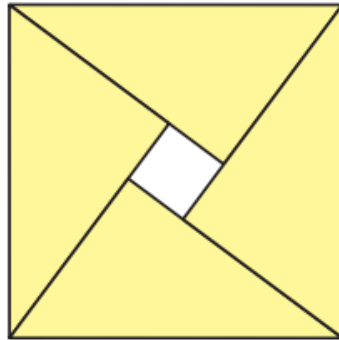


Fonte: OBMEP 2022.

- a) Qual é a área de cada um desses triângulos?

- b) Em seguida, Janaína usou os quatro triângulos para montar um quadrado com um buraco no seu interior, conforme mostrado na figura. Qual é a área do buraco?

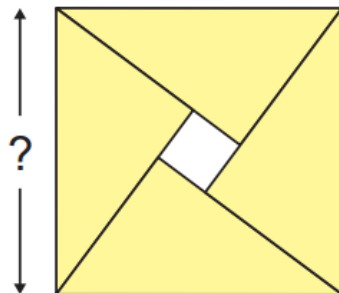
Figura 71 – Questão da OBMEP 2022 - 2º fase - Nível 02 - item b.



Fonte: OBMEP 2022.

- c) Quanto mede o lado do quadrado que Janaína montou?

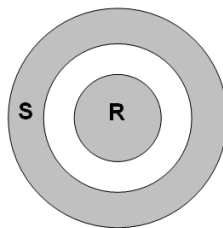
Figura 72 – Questão da OBMEP 2022 - 2º fase - Nível 02 - item c.



Fonte: OBMEP 2022.

2. (Clubes de Matemática da OBMEP) Na figura, as três circunferências têm o mesmo centro e seus raios são 8cm , $a\text{ cm}$, 17cm , com $8 < a < 17$. Determine a sabendo as áreas das regiões sombreadas R e S são iguais. Ver Figura 73.

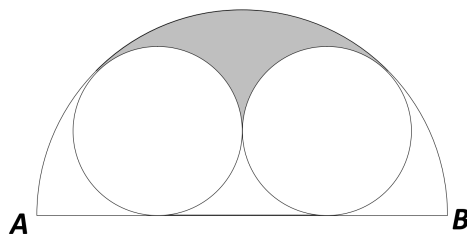
Figura 73 – Questão sobre áreas de círculos - Clubes de Matemática da OBMEP.



Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP.

3. (Prova Nacional - 2013 - PROFMAT) A figura abaixo mostra duas circunferências de raio 1, tangentes entre si e inscritas em uma semicircunferência de diâmetro AB . Calcule a área da região sombreada. Ver Figura 74.

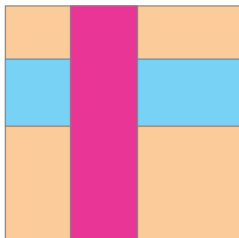
Figura 74 – Prova Nacional - PROFMAT - 2013



Fonte: Prova Nacional - PROFMAT - 2013

4. (OBMEP - 2023 - 2ª Fase - Nível 02 - Questão 03) Marco ganhou dois tapetes retangulares medindo 2 metros de largura por 7 metros de comprimento cada um. Inicialmente, Marco colocou os dois tapetes de modo a encaixá-los exatamente sobre o piso de uma sala quadrada, conforme mostrado na Figura 75.

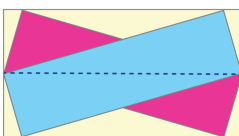
Figura 75 – OBMEP 2023 - Áreas



Fonte: OBMEP 2023.

- a) Qual é a área do piso da sala não coberta pelos tapetes?
- b) Depois, Marco resolveu tirar os tapetes dessa sala e colocá-los em um quarto retangular, conforme indicado na figura. A linha tracejada é uma diagonal comum a ambos os tapetes. Todos os vértices dos tapetes estão sobre o contorno do piso. Qual é a área do piso do quarto? Ver Figura 76.

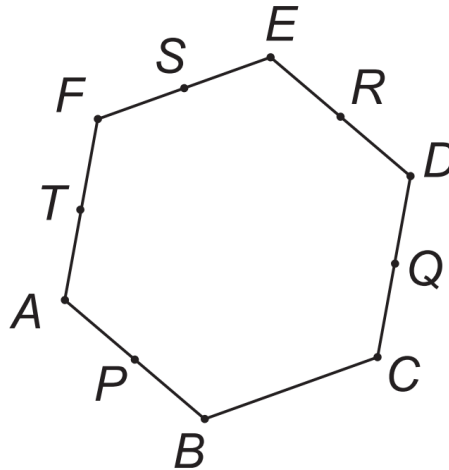
Figura 76 – OBMEP - Áreas - Letra B



Fonte: OBMEP 2023.

- c) Explique por que a área do piso do quarto não coberta pelos tapetes é igual à área da sobreposição dos tapetes.
5. (OBMEP - 2021 - 2ª Fase - Nível 02 - Questão 05) A figura mostra um hexágono regular $ABCDEF$ e os pontos médios P, Q, R, S e T dos lados AB, CD, DE, EF e FA , respectivamente. Ver Figura 77.

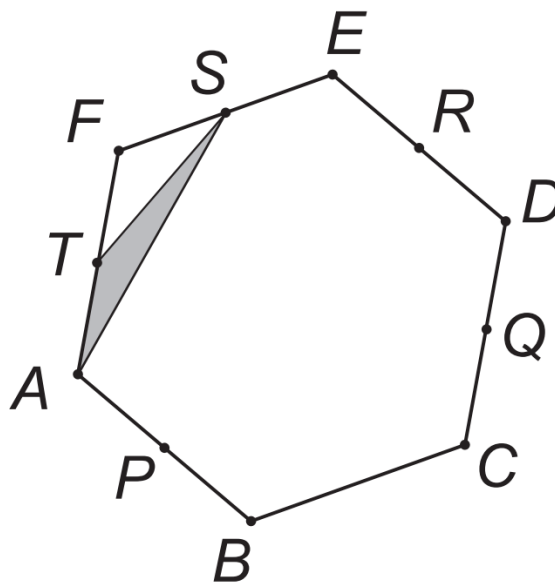
Figura 77 – Áreas de figuras planas - OBMEP 2021.



Fonte: OBMEP 2021.

- a) Se a área do triângulo AST for igual a 1cm^2 , qual será a área do triângulo FTS ? Ver Figura 78.

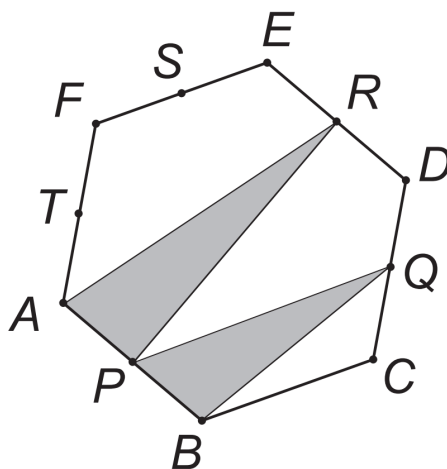
Figura 78 – OBMEP 2021 - item A.



Fonte: OBMEP 2021.

b) Qual é a razão entre as áreas dos triângulos APR e PBQ ? Ver Figura 79.

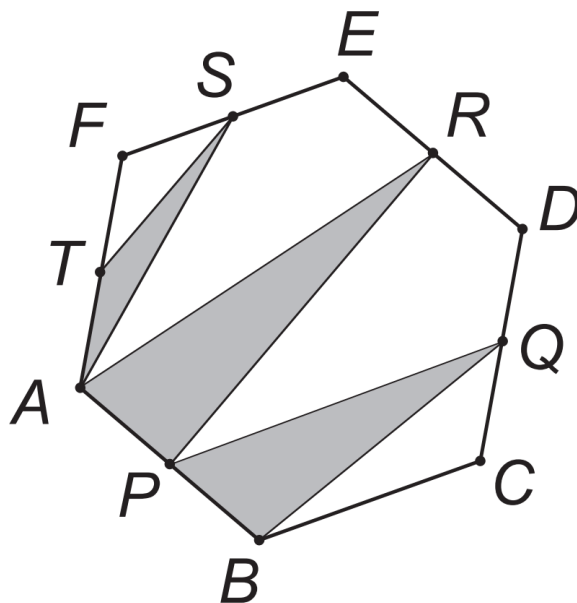
Figura 79 – OBMEP 2021 - item B.



Fonte: OBMEP 2021.

c) Qual é a razão entre as áreas sombreada e não sombreada na figura abaixo? Ver Figura 80.

Figura 80 – OBMEP 2021 -item C.



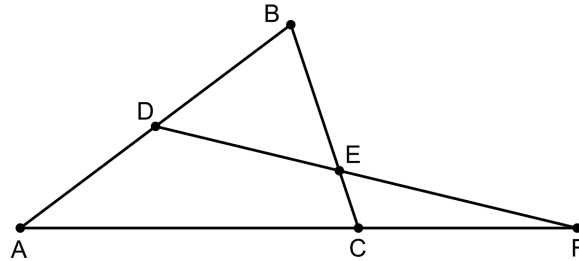
Fonte: OBMEP 2021.

4.3.3 Questões referentes ao encontro 03 - Teorema de Ceva e Menelaus

1. (Questão retirada do Portal da Matemática - OBMEP.) Um segmento intercepta os lados de um triângulo $\triangle ABC$ nos pontos D , E , F , conforme a figura. Se $AD =$

$BD = 6$, $BE = CF = 5$ e $CE = 2$, a medida do lado AC é:

Figura 81 – Teorema de Menelaus - Portal da Matemática OBMEP



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP.

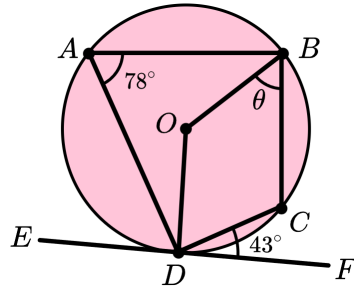
- $\frac{11}{2}$
 - $\frac{13}{2}$
 - $\frac{15}{2}$
 - $\frac{17}{2}$
 - $\frac{19}{2}$
- Mostre que as medianas de um triângulo qualquer se intersectam em um ponto.
 - (Questão retirada do Portal da Matemática - OBMEP) Seja o triângulo $\triangle ABC$ tal que $AB = 6$ e $AC = 8$. Uma reta intercepta os prolongamentos dos lados BC , AB e AC nos pontos P , Q e R respectivamente. Se $BP = 8$, $BQ = 2$ e $CR = 12$, determine BC .
 - Seja $\triangle ABC$ um triângulo e seja τ seu circuncírculo. As tangentes a τ por B e C se intersectam em P , as tangentes a τ por C e A se intersectam em Q e as tangentes a τ por A e B se intersectam em R . Prove que AP , BQ e CR são concorrentes
 - (POTI - Geometria - Nível 2). O lado AB de um quadrado é prolongado no sentido de A para B até o ponto P tal que $BP = 2AB$. Sendo M o ponto médio de CD , desenhe PM intersectando AC em um ponto Q . Sabendo que PQ corta BC em um ponto R , calcule CR/RB .

4.3.4 Questões referentes ao encontro 04 - Quadriláteros cíclicos

- (Questão retirada do Portal da Matemática - OBMEP) Em um triângulo $\triangle ABC$, $\angle BAC = 100^\circ$ e $\overline{AB} = \overline{AC}$. Seja BD a bissetriz de $\angle ABC$, com D sobre o lado AC . Prove que $\overline{AD} + \overline{BD} = \overline{BC}$.

2. (Questão retirada do site cujo link está abaixo) O círculo com centro O contém um quadrilátero cíclico. A reta EF é uma tangente no ponto E onde ângulo $\angle CDF = 43^\circ$. Calcular o tamanho do ângulo $\angle OBC$.

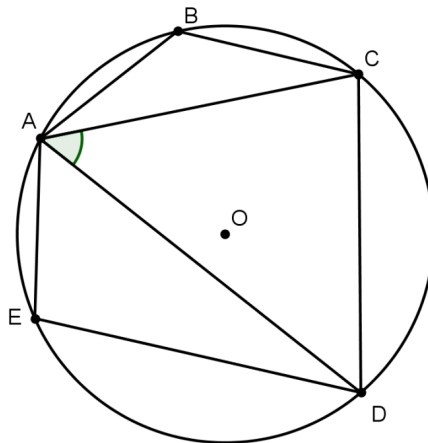
Figura 82 – Questão sobre quadriláteros cíclicos e ângulos na circunferência.



Fonte: Ver (15)

- a) 43°
 b) 55°
 c) 78°
 d) 36°
3. (Olimpíada Irlandesa de Matemática 2016) O ponto D pertence ao lado $\overline{AC}$ do triângulo $\triangle ABC$ tal que $\angle ABC = \angle DAC = 30^\circ$ e $\angle ADB = 45^\circ$. Prove que $\overline{BD} = \overline{DC}$.
4. (Extraído do Banco de Questões OBMEP - 2016) Todos os vértices do pentágono $ABCDE$ estão sobre um mesmo círculo. Se $\angle DAC = 50^\circ$, determine $\angle ABC + \angle AED$.

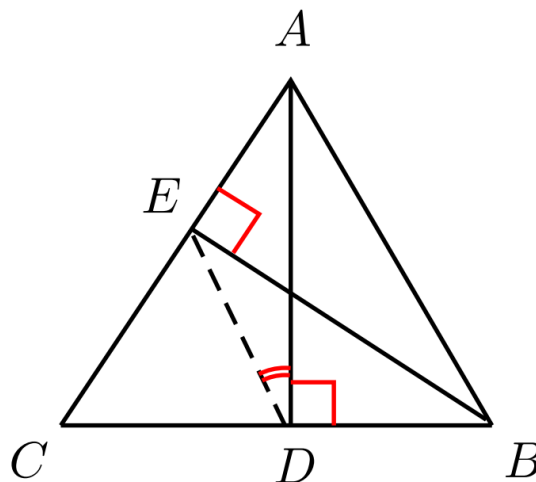
Figura 83 – Banco de Questões da OBMEP - 2016



Fonte: Banco de Questões da OBMEP - 2016.

5. (Questão extraída do Portal da Matemática - OBMEP) No triângulo $\triangle ABC$ da figura abaixo, $\angle BAC = 64^\circ$ e D e E são os pés das alturas relativas aos lados BC e AC , respectivamente, de sorte que $\angle AEB = 90^\circ$ e $\angle ADB = 90^\circ$. Encontre a medida do ângulo $\angle ADE$.

Figura 84 – Portal da Matemática

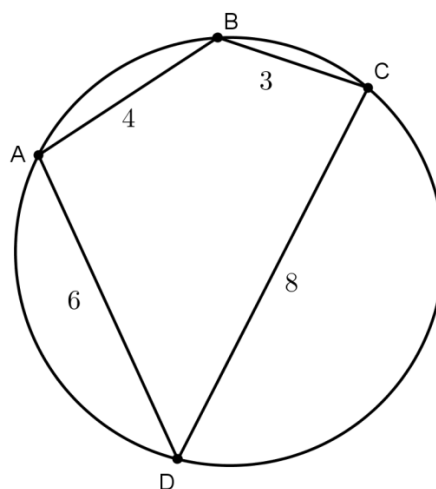


Fonte: Portal da Matemática - OBMEP.

4.3.5 Questões referentes ao encontro 05 - Teorema de Ptolomeu

1. (Questão extraída do Portal da Matemática - OBMEP) Determine o produto das diagonais no quadrilátero inscritível abaixo.

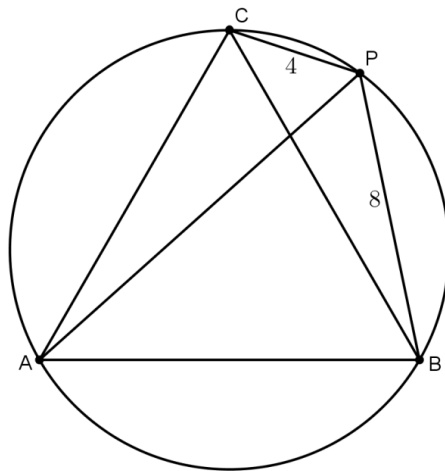
Figura 85 – Aplicação direta do Teorema de Ptolomeu.



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP.

2. (Questão extraída do Portal da Matemática - OBMEP) Seja um triângulo equilátero $\triangle ABC$. Sobre o menor arco BC da circunferência circunscrita ao triângulo, marca-se o ponto P . Se $PB = 8$ e $PC = 4$, determine PA .

Figura 86 – Teorema de Ptolomeu e triângulo equilátero.



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP.

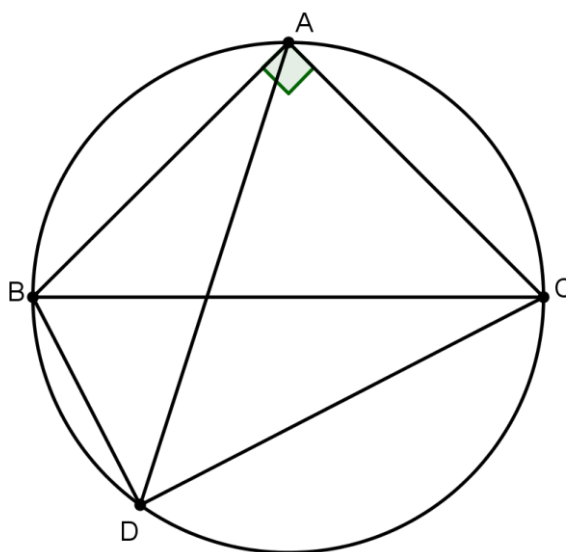
3. (IME – 2018) Seja um heptágono regular de lado l cuja menor diagonal vale d . O valor da maior diagonal satisfaz à qual das expressões?

- a) $\frac{l \cdot d}{d - l}$
- b) $\frac{d^2}{d - l}$
- c) $\frac{l \cdot d}{d + l}$
- d) $\frac{l^2}{d + l}$
- e) $\frac{3 \cdot d}{2}$

4. (Questão extraída do Portal da Matemática - OBMEP) Um triângulo isósceles $\triangle ABC$, retângulo em A , está inscrito em uma circunferência de raio 6. Sobre o arco BC , que não contém A , marca-se um ponto D , tal que $BD + CD = 18$. Determine a medida de AD . Ver Figura 87.

5. (Questão extraída do Portal da Matemática - OBMEP) Seja $ABCD$ um quadrilátero e seja O o ponto de intersecção das diagonais AC e BD . Se $BO = 4$, $OD = 6$, $OC = 3$ e $AB = 6$, determine a medida de AD .

Figura 87 – Excelente questão do Portal da Matemática - OBMEP

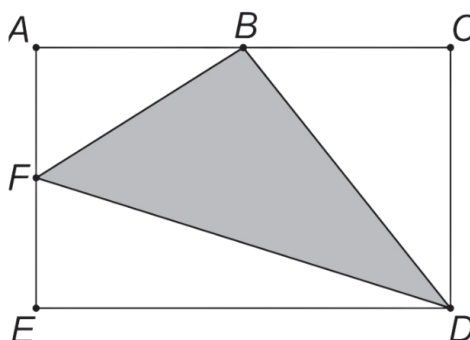


Fonte: Portal da Matemática - OBMEP.

4.3.6 Questões referentes ao encontro 06 - Avaliação final

1. (OBMEP 2015 - Nível 03 - 1ª Fase) O retângulo da figura possui área igual a 640cm^2 . Os pontos B e F são pontos médios dos lados AC e AE , respectivamente. Qual é a área do triângulo $\triangle BDF$?

Figura 88 – OBMEP 2015 - Nível 03 - 1ª Fase

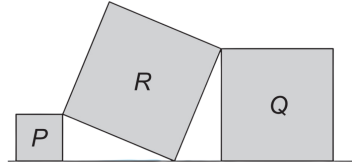


Fonte: OBMEP 2015.

- a) 100cm^2
- b) 120cm^2
- c) 160cm^2
- d) 220cm^2
- e) 240cm^2

2. (OBMEP 2016 - Nível 03 - 1ª Fase) Na figura, as áreas dos quadrados P e R são iguais a 24cm^2 e 168cm^2 , respectivamente. Qual é a área do quadrado Q ?

Figura 89 – Questão da OBMEP 2016 - Nível 03 - 1ª Fase.



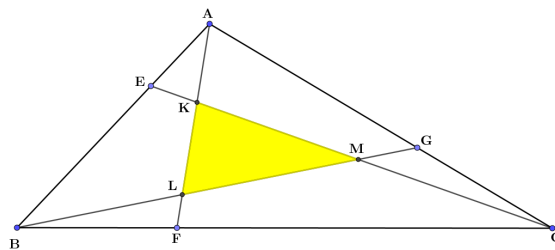
Fonte: OBMEP 2016.

- a) 90cm^2
 b) 100cm^2
 c) 121cm^2
 d) 144cm^2
 e) 156cm^2
3. (POTI – 2012) Em um triângulo ABC , $\angle BAC = 100^\circ$ e $AB = AC$. Seja BD a bissetriz de $\angle ABC$, com D sobre o lado AC . Prove que $AD + BD = BC$.
4. Mostre que as bissetrizes internas de um triângulo qualquer se intersectam em um ponto.
5. (IMO/1998 - Hong Kong Preliminary Selection Contest - Adaptada). Dado um triângulo $\triangle ABC$, sejam E, F e G pontos sobre os lados AB, BC e CA , respectivamente e tais que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GA}} = \frac{1}{3}$$

Considere a Figura 90. Supondo que a área do triângulo $\triangle ABC$ seja 1, encontre a área do triângulo $\triangle KLM$.

Figura 90 – Auxílio para resolução.



Fonte: Produzido pelo autor.

5 Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo principal explorar o ensino da Geometria Plana no contexto das Olimpíadas de Matemática, com ênfase na elaboração de uma sequência didática voltada para alunos da Educação Básica. Ao longo da proposta, buscamos desenvolver habilidades essenciais como o raciocínio lógico Matemático, a criatividade e a resolução de problemas, a partir de questões que historicamente compõem essas competições.

Acreditamos que, por meio de atividades contextualizadas e desafiadoras, conseguimos estimular nos alunos o gosto pela matemática, ao mesmo tempo em que aprofundamos conceitos fundamentais da geometria. A sequência construída e aplicada demonstrou ser uma ferramenta eficaz na preparação para olimpíadas, ao proporcionar não apenas o desenvolvimento de competências matemáticas, mas também o engajamento dos estudantes em práticas investigativas.

É importante destacar que ainda não temos todos os resultados obtidos com a aplicação da proposta, haja vista que muitas das olimpíadas previstas ainda irão ocorrer ao longo do ano letivo. Dessa forma, os dados referentes ao desempenho final dos alunos e ao impacto completo da sequência didática serão analisados posteriormente, quando todas as competições tiverem sido realizadas. Mesmo assim, os primeiros retornos já indicam um avanço significativo na compreensão dos conteúdos geométricos abordados.

Por fim, reforçamos a relevância de iniciativas como esta para o fortalecimento do ensino da matemática, especialmente quando se alia teoria, prática e desafios reais como os das olimpíadas. Esperamos que este material sirva de inspiração e suporte para outros educadores interessados em promover uma aprendizagem mais significativa e motivadora.

Referências

- 1 VIANA, C. S. V.; CALDAS, C. C. S. et al. As olimpíadas brasileiras de matemática das escolas públicas na formação de professores e alunos. *Revista Margens Interdisciplinar*, Universidade Federal do Pará, 2013.
- 2 Instituto de Matemática Pura e Aplicada. *Sobre a IMO*. 2024. Acesso em: 23 out. 2024. Disponível em: <<https://impa.br/acervo/imo2017/sobre-a-imo.html>>.
- 3 Olimpíada Brasileira de Matemática. *Histórico*. 2024. Acesso em: 23 out. 2024. Disponível em: <<https://www.obm.org.br/quem-somos/historico/>>.
- 4 BRASIL, S. *Ministério da Educação. Base nacional comum curricular*. [S.l.]: MEC Brasília, DF, 2018.
- 5 EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. [S.l.]: Gen LTC, 2013.
- 6 DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana*. [S.l.]: Atual, 1993.
- 7 LINARES, J. L. Potência de ponto relativo a uma circunferência: teoria, construções e problemas. 2023.
- 8 LINARES, J. L. *Treinamento de professores e estudantes do ensino fundamental e médio com problemas de olimpíadas de matemática*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2022.
- 9 PROBLEMAS desafiadores em geometria. [S.l.: s.n.].
- 10 LINARES, J. L. et al. Desigualdade de ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional de matemática. v. 2, p. 15–37, 04 2022.
- 11 ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. d. l. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas. *Resolução de problemas: teoria e prática*. Jundiaí: Paco Editorial, n. 35, 2014.
- 12 SOUZA, M. J. A. Sequências no ensino da matemática: retrospectiva histórica de dewey a fedathi. Edições UFC, 2013.
- 13 UGALDE, M. C. P.; ROWEDER, C. Sequência didática: uma proposta metodológica de ensino-aprendizagem. *Educitec-Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico*, v. 6, p. e99220–e99220, 2020.
- 14 JUNIOR, C. R. da S. Sala de aula invertida: por onde começar? 2020.
- 15 LEARNING, T. S. *Cyclic Quadrilateral - GCSE Maths - Steps, Examples & Worksheet*. 2025. Acesso em: 6 abr. 2025. Disponível em: <<https://thirdspacelearning.com/gcse-maths/geometry-and-measure/cyclic-quadrilateral/>>.