UFRPE
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Luiz Henrique Bernardo da Silva

Um estudo acerca da interseção entre Os Elementos de Euclides e a Base Nacional Comum Curricular com foco na Aritmética

RECIFE
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Luiz Henrique Bernardo da Silva

Um estudo acerca da interseção entre Os Elementos de Euclides e a Base Nacional Comum Curricular com foco na Aritmética

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Severino Barros de Melo

RECIFE
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

S586e Silva, Luiz Henrique Bernardo da.

Um estudo acerca da interseção entre os Elementos de Euclides e a Base Nacional Comum Curricular com foco na aritmética / Luiz Henrique Bernardo da Silva. – Recife, 2025.

128 f.; il.

Orientador(a): Severino Barros de Melo.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Euclides, Elementos de. 2. Aritmética. 3. Base Nacional Comum Curricular. 4. Matemática - Estudo e ensino I. Melo, Severino Barros de, orient. II. Título

CDD 510

LUIZ HENRIQUE BERNARDO DA SILVA

"Um estudo acerca da interseção entre Os Elementos de Euclides e a Base Nacional Comum Curricular com foco na Aritmética"

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 17/03/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Severino Barros de Melo (Orientador) – UFRPE

Profa. Dra. Josinalva Estácio Menezes – UFPE

Prof. Dr. Elizângela Bastos de Melo Espíndola – PROFMAT/UFRPE

Dedico este trabalho à minha família, ao meu orientador, aos meus amigos do mestrado, aos meus colegas de trabalho e aos meus alunos.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela minha vida, por Sua presença, que me guiou em todos os momentos desta jornada acadêmica, pela sabedoria e pelas forças concedidas a mim para que eu chegasse até aqui.

Estendo os meus agradecimentos à minha esposa Tallyta, que, com todo o seu amor, esteve constantemente ao meu lado dando o seu apoio, além de, com muita paciência e confiança, ter sido uma excelente incentivadora e conselheira, principalmente nos dias mais dificultosos.

Sou infinitamente grato à minha mãe Rosemary e ao meu pai Luiz Bernardo pelo amor, pelas orações, pela dedicação, pelo cuidado e pelos conselhos dados, haja vista que dentre as maiores dádivas que me deram estão a educação e a vontade de construir um futuro melhor.

Agradeço aos meus familiares, inclusive à minha irmã, Laiz Priscila, e ao meu sobrinho, João Lucas, pelas palavras de incentivo e por acreditarem em mim. Incluo, também, os meus cunhados, Alex e Fillyp, e sogros, Fátima e Geraldo, que sempre torceram por mim.

Não poderia deixar de agradecer à coordenação e ao corpo docente do PROFMAT pelos esclarecimentos e contribuições dadas à minha formação. Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Severino de Barros Melo, que com dedicação e paciência, desde o início, realizou com excelência as suas atribuições e me deu todo o suporte necessário para o desenvolvimento deste trabalho, com intervenções seguras e precisas, com observações claras e construtivas, sempre agregando valiosas colaborações.

Aos estimados colegas de curso, cuja companhia, ao longo desses dois anos, foi marcada pelo apoio mútuo, agradeço pela parceria e pelo espírito de cooperação, com especial reconhecimento a Douglas de Souza, pelo incentivo constante, motivação incansável e valiosa troca de experiências durante os estudos, as revisões e a preparação para o Exame Nacional de Qualificação.

Por fim, agradeço aos meus colegas de trabalho pelas palavras de encorajamento, aos meus alunos pelas frases de incentivo e às minhas gestoras, Girselha Queiroz, Maria Betânia e Tarciana Mendes, por toda cooperação na logística que foi necessária.

"O principal é a sabedoria; adquire, pois, a sabedoria,
e com tudo o que possuis adquire o entendimento.
(Bíblia Sagrada, Provérbios 4.7)

Resumo

O presente estudo tem como objetivo investigar a interseção entre a Aritmética presente em Os Elementos de Euclides e como este conteúdo é abordado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), procurando identificar aspectos positivos e fragilidades em relação a esta interseção. Do ponto de vista metodológico, trata-se de uma pesquisa bibliográfica e documental, tendo como referência prioritária Os Elementos, a BNCC e o material correlato. Como conclusão, mesmo levando em consideração o contexto atual para o ensino da matemática, foi constatado que a supressão dos conteúdos de Aritmética abordados em Os Elementos, acarreta um empobrecimento relevante no que concerne à formação matemática dos estudantes da Educação Básica. Ao final, são apresentadas alternativas para a superação das fragilidades identificadas na pesquisa, bem como uma proposta de enriquecimento da BNCC numa eventual revisão do seu texto, tendo em vista a importância dos aspectos da Aritmética de Euclides não abordados neste documento oficial.

Palavras-chave: Elementos de Euclides. Aritmética. BNCC. Ensino de Matemática.

Abstract

This study aims to investigate the intersection between the arithmetic present in Euclid's Elements and how this content is approached in the National Common Core Curriculum (BNCC), seeking to identify positive aspects and weaknesses in relation to this intersection. From a methodological point of view, this is a bibliographical and documentary study, with priority reference to The Elements, the BNCC and related material. In conclusion, even taking into account the current context for the teaching of mathematics, it was found that the suppression of the arithmetic content covered in The Elements leads to a significant impoverishment in terms of the mathematical education of primary school students. At the end, alternatives are presented for overcoming the weaknesses identified in the research, as well as a proposal for enriching the BNCC in a possible revision of its text, in view of the importance of the aspects of Euclid's Arithmetic not covered in this official document.

Keywords: Elements of Euclid. Arithmetic. BNCC. Teaching Mathematics.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

1. Justificativa

É indiscutível que a matemática sempre foi peça fundamental na sociedade. Além de impulsionar o desenvolvimento do pensamento lógico e abstrato, contribuiu para o avanço tecnológico e científico. A evolução da matemática também proporcionou contribuições à diversas áreas científicas, viabilizando suas ampliações e progressos. No cerne desse desenvolvimento está a *Aritmética*: campo da matemática que alicerçou avanços da *Geometria*, da *Álgebra*, do estudo das *Grandezas*, das *Medidas* e de outros ramos das ciências naturais e humanas, cujo estudo sistematizado remonta à Antiguidade e aos nomes de vários matemáticos, especialmente às colaborações de Euclides de Alexandria.

A *história da matemática* registra diversos tratados que marcaram os progressos matemáticos ao longo dos séculos. Dentre esses tratados, *Os Elementos* de Euclides se destaca como uma das obras mais imponentes e influentes, em consequência de ter consolidado o pensamento matemático à época na qual foi elaborada e influenciado o desenvolvimento matemático de séculos posteriores.

Trabalhos como os de Berlinghoff e Gouvêa (2010) e Nascimento e Feitosa (2013) salientam a importância de *Os Elementos* como coleção que reúne as principais descobertas da matemática grega.

Não obstante a ser amplamente reconhecida por sua abordagem geométrica, tal obra dedica três livros (VII, VIII e IX) à apresentação de um conjunto de conceitos basilares da *Aritmética* por intermédio de uma estrutura teórica baseada no método axiomático euclidiano, sobre o qual as relações das deduções lógicas são diligentemente explicadas. Em meio a esses conceitos, encontram-se temas como *teoria das proporções* e *infinitude dos números primos.*

Produções como as de Boyer e Merzbach (2012), Cajori (2007), Eves (2011), Kline (1992), Pastor e Babini (1985), Roque (2012), Struik (1992), dentre outros, evidenciam os consideráveis atributos de Euclides enquanto referência intelectual de sua geração e do mundo hodierno, salientam o relevante repertório teórico que compõe *Os Elementos* e destacam a sua importância como fonte histórica de uma *Aritmética* fundamental, que progrediu e alcançou a atualidade.

Por outro lado, a Base Nacional Comum Curricular, documento normativo que orienta a Educação Básica do Brasil, propõe que no processo de ensino e aprendizagem a *história da matemática* seja apresentada como recurso capaz de despertar nos estudantes interesse pelo aprendizado dentro de um contexto significativo, visto que eles necessitam aprender por meio de relações e significados, com o intuito de saber aplicar os conhecimentos em outros contextos.

2. O problema de pesquisa

Diante da influência histórica da obra de Euclides e de sua relevância para construção dos currículos da Educação Básica, enquanto um acervo referencial de conteúdos, este trabalho se propôs a investigar a presença da *Aritmética* em *Os Elementos* e na Base Nacional Comum Curricular.

O contexto anteriormente mencionado e as decorrentes reflexões sobre a importância dos trabalhos relativos aos aspectos históricos da matemática − inclusive os registrados em *Os Elementos* − nos instigaram a apresentar este estudo, em forma de dissertação, ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Instituição Associada Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), como trabalho de conclusão de curso.

Além disso, este estudo, desenvolvido junto ao grupo de pesquisa do Laboratório Científico de Aprendizagem, Pesquisa e Ensino (LACAPE) da UFRPE, foi estimulado mediante à constatação da ausência, no banco de dissertações do PROFMAT, de trabalhos desenvolvidos sobre *Aritmética* associada à BNCC. Contudo, é imprescindível que haja contribuições para a propagação e desenvolvimento do conhecimento da *Aritmética* nas orientações curriculares da Educação Básica, em virtude de a análise e a revisão da BNCC, com foco nos conteúdos fundamentalmente aritméticos, se revelar como ação inovadora na área da Matemática, o que confirma a importância e a autenticidade do nosso trabalho.

O problema de pesquisa que norteia este estudo foi formulado da seguinte maneira: *qual a interseção entre a Aritmética de Os Elementos e da Base Nacional Comum Curricular?*

3. Objetivos

Procurando responder a essa indagação, estabelecemos como *objetivo geral* identificar a interseção entre a *Aritmética* de *Os Elementos* e da Base Nacional Comum Curricular.

Quanto aos *objetivos específicos*, nos propusemos a:

1) Pesquisar os aspectos relevantes da biografia de Euclides, com ênfase em seu contexto histórico, principais influenciadores e contribuições à matemática por meio de suas obras.

2) Identificar os conteúdos abordados em cada um dos três livros aritméticos de *Os*

Elementos.

3) Examinar a Base Nacional Comum Curricular e a *Aritmética* nela presente.

4) Identificar os conteúdos fundamentalmente de *Aritmética* que constam na interseção entre *Os Elementos* e a BNCC.

4. Metodologia

Considerando os objetivos apresentados, nos propusemos, quanto à *metodologia*, a realizar uma pesquisa *bibliográfica* e *documental*. Para a parte *bibliográfica*, tivemos como referência prioritária *Os Elementos* de Euclides e obras complementares como as de Berlinghoff e Gouvêa (2010), Bicudo (2009), Boyer e Merzbach (2012), Brandão (1968), Cajori (2007), Dangerfield et al. (2020), Eves (2011), Hefez (2022), Kline (1992), Pastor e Babini (1985), Roque (2012) e Struik (1992). Para a parte *documental*, foram consultados os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) e materiais correlatos.

5. Síntese do trabalho

Este trabalho encontra-se estruturado em quatro capítulos. O primeiro apresenta um breve aceno da biografia de Euclides, sob a ótica de diversos historiadores da matemática, e elenca as suas principais obras, destacando os conteúdos abordados em cada um dos treze livros de sua mais importante obra: *Os Elementos*.

O segundo é destinado a apresentar, com mais detalhes, os conteúdos presentes nos livros aritméticos de *Os Elementos*, com transcrições de *definições* e *proposições* acompanhadas, quando julgou-se necessário, de enunciados com versões atualizadas e exemplificações.

No terceiro capítulo, além de abordarmos algumas concepções curriculares no Brasil, a formulação e a estrutura da Base Nacional Comum Curricular, apresentamos como a Matemática está inserida neste documento, dando ênfase à distribuição da *Aritmética*.

No quarto capítulo, interseccionamos *Os Elementos* e a BNCC com a finalidade de exibir os conteúdos fundamentalmente aritméticos que são abordados na obra euclidiana e na BNCC, identificando, também, fragilidades em relação a essa interseção.

Como conclusão, constatamos que dos conteúdos de *Aritmética* da *unidade temática Números* da BNCC, a maioria está presente em *Os Elementos*. Contudo, alguns não aparecem nesta obra pelo fato de serem conteúdos que não estavam devidamente presentes no desenvolvimento da matemática na época de Euclides.

Também verificamos que dos conteúdos aritméticos de *Os Elementos*, quase todos estão na BNCC e apenas três não aparecem neste documento, o que acarretou um empobrecimento significativo no que diz respeito à elaboração dos currículos da Educação Básica.

Como contribuição, apresentamos a inclusão de novos *objetos de conhecimento* e *habilidades* numa eventual reelaboração da Base Nacional Comum Curricular. Além disso, desenvolvemos um conjunto de *sequências didáticas*, a fim de contribuir com o enriquecimento da BNCC em relação aos aspectos relevantes da *Aritmética* de *Os Elementos*.

1 Euclides: aceno biográfico e suas obras

1.1 Considerações iniciais

A história de uma ciência pode ser entendida como o conjunto de informações que justificam e dão sentido à sua própria existência e ao seu desenvolvimento. Semelhantemente, a história da Matemática se caracteriza pelas diversas e significativas contribuições dadas pela humanidade à própria humanidade, em diferentes contextos temporais, culturais, sociais e históricos.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), a história da Matemática é regida por etapas recorrentes, ou seja, no desenvolvimento matemático, cada fase é construída com base naquilo que veio antes. As pessoas que contribuem são imbuídas de pontos de vista, culturas e passados distintos. Esses são elementos críticos que implicam diretamente na diversidade das maneiras de como e por que pensaram em determinadas contribuições.

Figura 1 – Euclides de Alexandria

Fonte: <https://picryl.com/media/euklid-von-alexandria-1-f31406>

Do icônico universo dos que contribuíram com o desenvolvimento da Matemática, destaca-se Euclides – representado na figura 1 – que, sob a perspectiva de Struik (1992), é considerado um dos mais influentes matemáticos de todos os tempos. Seu nome atravessou séculos, é reconhecido no cenário acadêmico pelos seus trabalhos no âmbito da Matemática e também da Física. Na Matemática, destaca-se *Os Elementos*. Incontestavelmente, é a sua produção mais conhecida e, além disso, é, provavelmente, a obra matemática mais consultada ao longo dos séculos.

1.2 Aceno biográfico

A quantidade de informações sobre a vida de Euclides é limitada; os registros que fazem menção ao fato não contemplam nada além de poucos dados. Em relação ao seu nascimento, o local e a data são desconhecidos. Ao mencionarem Euclides, Boyer e Merzbach (2012, p. 87) afirmam: "Ele foi tão obscuro que nenhum lugar de nascimento é associado a seu nome". Além disso, diante da escassez do quanto se sabe sobre a vida de Euclides, não é difícil perceber a evidência desse fato em materiais históricos. Ao lado das verdades conhecidas a respeito dele há as incertezas dos detalhes; isso fica explícito quando Struik (1992, p. 90), ao mencionar Euclides, faz uso da seguinte frase: "[...] sobre cuja vida nada é verdadeiramente conhecido [...]".

Parte da vida de Euclides ocorreu em Alexandria, no Egito, por volta do ano 300 a.C., na época em que a cidade integrava o culturalmente mundo rico grego. Mas também, seus momentos de reconhecimento tiverem início anos antes. Supõe-se que Euclides tenha estudado com os discípulos de Platão e há quem presuma que ele tenha sido aluno na própria Academia, isto é, que a sua formação matemática se deu na escola platônica de Atenas. Kline (1992, p. 88) dá luz aos fatos supracitados quando afirma: "[...] Euclides viveu e ensinou em Alexandria em torno do terceiro século antes de Cristo, provavelmente estudou na Academia de Platão; e isso é tudo quanto conhecemos de sua vida".

Quando o rei Ptolomeu I Sóter (323-285 a.C.) recorreu a Atenas com o objetivo de formar um grupo de intelectuais conceituados no que hoje seria a universidade da cidade, o discípulo de Aristóteles, Demétrio de Faleros, então cidadão de Antenas, foi convidado a dirigir a grande biblioteca. Na ocasião, acredita-se que Euclides tenha vindo para chefiar o que atualmente denominamos Departamento de Matemática.

> Neste período surgiram os cientistas profissionais, homens que dedicavam a sua vida à procura do conhecimento e que recebiam por isso um salário. Alguns dos representantes mais importantes deste grupo viviam em Alexandria, onde os Ptolomeus tinham construído um grande centro de estudo, no chamado Museu, com a sua famosa Biblioteca. Aqui, a herança grega em relação à ciência e à literatura foi preservada e desenvolvida. O sucesso desta empresa foi considerável. Entre os primeiros sábios associados a Alexandria destaca-se Euclides, um dos matemáticos mais influentes de todos os tempos (STRUIK, 1992, p. 90).

Ainda sobre a vida de Euclides, vale destacar que ele foi representado no quadro Escola de Atenas[1]. Paterlini e Furuya (2002) garantem que, com base em evidências históricas, é possível identificar, nessa obra, sábios cujos nomes estão ligados ao desenvolvimento da Matemática, são eles: Pitágoras, Sócrates, Platão, Aristóteles e Euclides. Este é retratado

[1] A obra Escola de Atenas é uma das mais admiradas pinturas de Rafael Sanzio, renomado pintor italiano do período do Renascimento.

na parte inferior direita da obra Escola de Atenas manuseando um compasso e cercado por seus alunos.

Figura 2 – Quadro Escola de Atenas

Fonte: <https://picryl.com/media/escola-de-atenas-vaticano-2-668668>

No recorte da tela original posto na figura 3, Euclides é representado com vestes avermelhadas, riscando numa lousa com um compasso, enquanto os seus alunos, à sua volta, estão atentos aos movimentos.

Figura 3 – Recorte do quadro Escola de Atenas

Fonte: <https://picryl.com/media/escola-de-atenas-vaticano-2-668668>

No século V, Proclo, filósofo grego, escreveu que Euclides ensinou em Alexandria no reinado de Ptolomeu I. A contribuição de Euclides para a Matemática foi inestimavelmente significativa, pois além de ter sido um dos membros da escola duradoura em Alexandria, ele, conforme Cajori (2007), sistematizou os conhecimentos matemáticos, assim como consta em *Os Elementos*, livro bastante estudado e que influencia a produção de materiais e livros didáticos até os dias atuais.

Quase nada se sabe da personalidade do homem que nomeia um sistema axiomático que revolucionou o desenvolvimento de demonstrações matemáticas, definindo os axiomas como noções comuns assumidas universalmente verdadeiras, e os postulados como declarações sobre geometria assumidas como verdadeiras, dos quais todos os teoremas são derivados.

Euclides mostra como pensar logicamente sobre qualquer coisa, e não apenas sobre Matemática. Talvez a sua personalidade regesse sua forma de como tratar o pensamento lógico. Não era da personalidade de Euclides demonstrar vaidade ao seu próprio valor ou até mesmo sobre as suas realizações e descobertas científicas. É o que se pode inferir de Eves (2011, p. 167) em: "Muitos anos mais tarde, ao comparar Euclides com Apolônio, de maneira desfavorável a este último, Papus elogiou Euclides por sua modéstia e consideração para com os outros". Noutras palavras, Euclides de Alexandria era visto como um homem respeitado, educado e bondoso. Segundo Cajori (2007, p. 62), "Pappus afirma que Euclides se distinguira por sua educação esmerada, delicadeza e atenta disposição, particularmente para com aqueles que poderiam promover o avanço das ciências matemáticas".

Conta-se que certa vez Euclides foi interrogado por um de seus alunos sobre a importância prática da matéria que estava sendo ensinada. Tal fato, suspeitosamente, evidencia que Euclides não priorizava as aplicações práticas dos conhecimentos adquiridos e ensinados. Acerca dessa característica na matemática de Euclides, Pastor e Babini (1985, p. 67) destacam:

> Assim, em suas quase quinhentas proposições, não há uma única aplicação prática, nem um único exemplo numérico. Embora três livros dos Elementos tratem de aritmética, neles os números aparecem disfarçados de segmentos e as propriedades numéricas são demonstradas operando com esses segmentos.

Em outro momento, Ptolomeu indagou a Euclides se era possível dominar a geometria por intermédio de processos mais fáceis do que os presentes em *Os Elementos*, e Euclides responde que para a geometria não existe caminho fácil.

A escrita de Euclides carregava em si a herança de matemáticos gregos que o antecederam. Platão, Tales de Mileto e Hipócrates, dentre outros, se aproximaram da perspectiva euclidiana, ou seja, o universo da prova. Segundo Pastor e Babini (1985), Euclides teve ao seu favor uma alavanca que lhe proporcionou construir uma estrutura de escrita comparada a um edifício de tamanha solidez capaz de resistir, sem se deteriorar, aos ataques dos críticos por centenas de anos, para a qual a lógica aristotélica serviu de argamassa. O alexandrino, com essa construção, firmou um método adjetivado de axiomático, que até hoje é classificado como *método científico por excelência*. Isso faz de Euclides um matemático muito especial. Seus escritos são os exemplos mais antigos que se conservaram de uma Matemática totalmente axiomatizada. Sobre esse fato, Dangerfield et al. (2020, p. 55) sustentam que:

> Ele identificou certos fatos básicos e avançou a partir daí para declarações que são deduções lógicas sólidas (proposições). Euclides também conseguiu juntar todo o conhecimento matemático da época e organizá-lo numa estrutura em que as relações lógicas entre as várias proposições são cuidadosamente explicadas.

Em consonância com Struik (1992), afirmamos que as obras de Euclides possuem um poder vivificante. Euclides enfrentou uma árdua tarefa de sistematizar a matemática que existia antes. E, como consequência, produziu um novo modo de fazer matemática que influenciou o pensamento científico mais do que talvez qualquer outro texto no mundo.

1.3 Principais obras de Euclides

A história da Matemática é um campo de estudos baseado, também, em resgates e consultas de informações registradas há séculos e, até mesmo, milênios. Diante disso, não é raro encontrar registros − principalmente os mais antigos − incompletos, não datados, sem autores ou locais identificados e danificados, como consequência da má conservação e das longas datas que eles existem.

Conforme Berlinghoff e Gouvêa (2010), antes da criação do papel, a maioria dos registros era feito em bambu, cascas de árvores, papiros, dentre outros materiais; de maneira que seus escritos estavam bastante sujeitos à decomposição. Até mesmo os primeiros livros confeccionados em papel eram dificilmente preservados para as futuras gerações. Era comum haver cópias desses livros, o que implicava, diretamente, alterações nas anotações e perda de detalhes.

1.3.1 Obras existentes

Apesar da vulnerabilidade ocasionada pelas diversas cópias e traduções realizadas ao logo dos séculos, várias obras, trabalhos e escritos de Euclides chegaram ao século XXI e fomentaram novos estudos de matemáticos, filósofos e historiadores. A quantidade de obras euclidianas que duram até hoje é cinco: *Os Fenômenos*, *Óptica*, *Divisão de Figuras*, *Os Dados* e *Os Elementos*.

As obras de Euclides versam sobre duas grandes áreas: a *Matemática Geral* e a *Geometria Elementar*. Em seus trabalhos, ele escreveu sobre temas como *astronomia matemática, teoria dos números, geometria esférica, seções cônicas* e *perspectivas.*

O que se aborda na obra *Os Fenômenos* permeia o universo das demonstrações geométricas cujas proposições emergem das observações e análises dos fenômenos celestes, como por exemplo: o nascimento e o poente das estrelas. O alexandrino se apoiava na obra sobre *esferas em movimento*, de Autolycus (Autólico de Pitane). Nota-se que Euclides, em *Os Fenômenos*, menciona várias vezes trechos dessa obra, todavia, não cita o nome do seu autor; há indícios dessas consultas quando comparados os escritos das duas obras. Sobre isso, Bicudo (2009, p. 62) considera: "[...] a proposição I de Autolycus é citada na quinta de Euclides, a segunda, nas quarta e sexta, e a décima, na segunda".

Conforme exposto por Kline (1992), ainda sobre a obra *Os Fenômenos*, há dezoito proposições sobre geometria esférica e outras que retratam aspectos associados à teoria de esferas em rotação uniforme e, além disso, a Terra é tratada como uma esfera. É relevante destacar que na fundamentação para a elaboração de *Os Fenômenos*, Euclides aproveitou um trabalho sobre geometria esférica *(Sphaerica)*, cujo autor é desconhecido. Tal fato é destacado por Bicudo (2009, p. 62):

> Assim, no prefácio, faz alusão ao fato de que, se sobre uma esfera dois círculos se bissectem, são ambos grandes círculos, e, na demonstração, supõe frequentemente que o leitor conheça outros teoremas do tipo. Quando o trabalho de Euclides é comparado com a obra posterior, Spherica, de Theodosius, vê-se terem ambos recorrido ao mesmo original ancestral que, conjectura-se, teria sido escrito por Eudoxo.

Outra obra Euclidiana é *Óptica*, na qual aparece um dos teoremas mais utilizados na antiguidade, o qual diz: Sejam α e β dois arcos, tais que, se $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, então $\dfrac{tg(\alpha)}{tg(\beta)} < \dfrac{\alpha}{\beta}$.

No contexto histórico da obra, havia um embate com os epicuristas, seguidores de Epicuro de Samos (341 a.C. - 270 a.C.), filósofo grego; e um dos objetivos da *Óptica* era impugnar a difusão da ideia epicurista de que um objeto é exatamente do tamanho que aparenta, excluindo a necessidade de se fazer concessões à diminuição de dimensão sugerida pela perspectiva. Na visão de Boyer e Merzbach (2012, p. 88),

> Óptica de Euclides é digna de nota por adotar uma teoria de “emissão” para a visão, segundo o qual o olho envia raios que vão até o objeto, em contraste com uma doutrina rival de Aristóteles, na qual uma atividade em um meio caminha em linha reta do objeto para o olho. Deve-se observar que a matemática da perspectiva (em contraposição à descrição física) é a mesma em qualquer das duas teorias.

O manuscrito de *Óptica* mais antigo em conservação é datado do século X e está escrito em grego. A figura 4 exibe uma página dessa obra, de uma publicação de 1573.

Figura 4 – Imagem do exemplar Óptica


LA
PROSPETTIVA
DI EVCLIDE,
Nella quale si tratta di quelle cose, che per raggi diritti si veggono: & di quelle, che con raggi reflessi nelli SPECCHI *appariscono.*
Tradotta dal R. P. M. Egnatio Danti Cosmografo del Seren. Gran Duca di Toscana. Con alcune sue Annotationi de' luoghi piu importanti.
INSIEME CON LA PROSPETTIVA DI
Eliodoro Larisseo
Cauata della Libreria Vaticana, e tradotta dal medesimo nuouamente data in luce.
IN FIORENZA.
Nella Stamperia de' Giunti.
M D L X X I I I.
Con licenzia & Priuilegio.

Fonte: Cultura (2022)

Já o trabalho de Euclides intitulado *Divisão de Figuras* não se perdeu graças ao zelo dos sábios árabes. Não se pode dizer o mesmo do original grego. Uma tradução árabe havia sido feita antes da extinção das versões gregas e nessa tradução não se preservou a integridade das informações contidas no grego, devido às omissões de demonstrações presentes nos originais por terem sido consideradas fáceis. Mais tarde, a versão árabe foi traduzida para o latim e para as línguas modernas, conforme Boyer e Merzbach (2012). No entanto, tal fato não é visto como algo excepcional quando se trata de obras antigas.

Quanto à estrutura dessa obra, vale salientar que ela é composta de trinta e seis proposições sobre a divisão de figuras planas.

> Por exemplo, a Proposição 1 pede a construção de uma reta que seja paralela à base de um triângulo e que divida o triângulo em duas áreas iguais. A Proposição 4 pede a bissecção de um trapézio por uma reta paralela às bases;[...] Outras proposições requerem a divisão de um paralelogramo em duas partes iguais por uma reta traçada por um ponto dado em um dos lados (Proposição 6) ou por um ponto dado fora do paralelogramo (Proposição 10). A proposição final pede a divisão de um

> quadrilátero em uma razão dada, por uma reta passando por um ponto sobre um dos lados do quadrilátero (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 88).

Uma outra obra de Euclides, quanto ao objetivo e à natureza, semelhante à *Divisão de Figuras*, é a chamada *Os Dados*. Essa última chegou aos dias atuais em árabe e em grego. Assemelha-se a um manual composto de tabelas que complementa algum livro-texto. Acredita-se que foi escrita para ser utilizada na que hoje seria a universidade de Alexandria, servindo de complemento para os seis primeiros livros de *Os Elementos*. Sobre esse fato, Eves (2011, p. 180) afirma que

> Euclides escreveu vários outros tratados, além dos Elementos, alguns dos quais sobreviveram até nossos dias. Um dos últimos, chamado Os Dados, diz respeito ao material dos seis primeiros livros dos Elementos. Pode-se definir um dado como um conjunto tal de partes ou relações de uma figura que, tendo-se todas, menos uma delas, então a restante está determinada.

O livro *Os Dados* inicia abordando grandezas e lugares geométricos por meio de quinze definições. O texto está estruturado com noventa e cinco enunciados acerca das condições e grandezas que podem ser encontradas em um problema. Boyer e Merzbach (2012) destacam que os dois primeiros enunciados da obra elucidam que uma vez dadas duas grandezas, sua razão também é dada e que se uma grandeza é conhecida e é dada a sua razão para uma segunda grandeza, então a segunda grandeza está dada. Esse trabalho de Euclides ainda traz um conjunto de vinte e quatro enunciados parecidos que abordam regras e fórmulas algébricas, outro conjunto de regras geométricas simples sobre retas paralelas e grandezas proporcionais e há outros enunciados que são tratados como equivalentes geométricos do processo de resolução de equações quadráticas. Uma curiosidade está presente nos enunciados 84 e 85 de *Os Dados*, já que eles são equivalentes geométricos do grupo de soluções algébricas babilônicas[2] dos sistemas $x \pm y = a$ e $xy = b^2$.

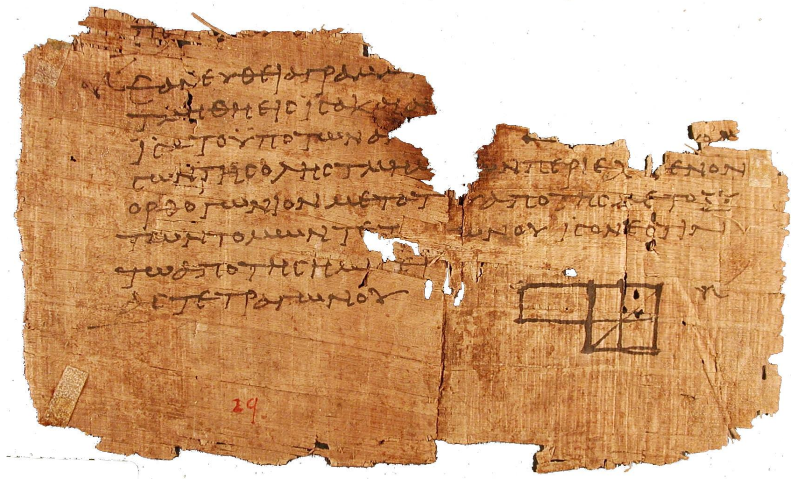
A apresentação da estrutura, da organização e dos conteúdos da obra *Os Elementos* será abordada no presente capítulo desse estudo, precisamente no tópico 1.4.

1.3.2 Obras perdidas

Além das obras citadas em 1.3.1, há outras obras de Euclides, estas, porém, foram perdidas. As que chegaram até hoje são apenas cópias, uma vez que os trabalhos originais eram produzidos em rolos de papiro, material de deterioração rápida. Infelizmente, os escritos originais, em quase sua totalidade, se perderam, de acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2010). Poucos registros foram recuperados e reaproveitados, como é o caso da figura 5 que expõe um antigo fragmento do livro II de *Os Elementos*, datado de 100 d.C..

[2] Referem-se ao jeito algébrico de se pensar.

Figura 5 – Fragmento do segundo livro da obra *Os Elementos*



Fonte: <https://www.worldhistory.org/image/1280/fragment-of-euclids-elements/>

Boyer e Merzbach (2012) apontam que mais da metade das obras escritas por Euclides se perdeu. Essa perda não ficou restrita às obras menos relevantes, engloba obras de destaque, a exemplo de quatro volumes de um tratado sobre cônicas. Uma abrangência de materiais dotados de ricas informações produzidas por Euclides poderiam ainda mais enriquecer o conhecimento matemático, se não tivessem desaparecido. Dentre elas, destaca-se *Porismas*, cuja perda é lamentável.

A obra *Porismas* foi definida como uma proposição que relaciona quantidades conhecidas e variáveis, talvez uma roupagem antiga do conceito de função, segundo afirmam Boyer e Merzbach (2012). Não há como negar que se trata de uma obra um tanto curiosa.

Segundo Kline:

> Acredita-se, com base nos comentários de Pappus e Proclo, que aqueles Porismas trataram essencialmente sobre a construção de objetos geométricos cuja existência já estava assegurada. Assim, poderiam ser considerados como problemas intermediários entre teoremas puros e as construções pelas quais alguma figura existia, entre as quais a localização do centro de um círculo que atende a certas condições dado (KLINE, 1992, p. 128).

Ademais, Pastor e Babini (1985) destacam que a obra *Porismas* continha numerosas conjecturas, além de 38 lemas e 171 teoremas; enfatizam que ela era apontada como uma engenhosa coleção de elementos úteis para resolver problemas difíceis.

Como fecho dessa seção, ressalta-se a afirmação de Boyer e Merzbach (2012) quando asseguram que outras obras perdidas de Euclides são as intituladas: *Lugares geométricos de superfície*, da qual nada se sabe e *Pseudaria*, ou o livro das falácias geométricas. Eles acrescentam que as obras e as referências são tão antigas que, até hoje, não se sabe ao certo que tipo de assunto e quais conteúdos estavam inseridos nesses trabalhos. Esses escritos perdidos só se fizeram conhecidos mediante à menções posteriores, como é o caso da obra *Cônicas*, que anos depois foi ampliada e completada por Apolônio.

1.4 Os Elementos: uma visão geral e organização da obra

Os Elementos é a mais importante dentre as obras de Euclides. Dangerfield et al. (2020) a colocam como forte candidata à obra matemática mais influente de todos os tempos, sustentando que ela tem clareado as ideias de número e forma por mais de 2 milênios. Struik (1992) classifica *Os Elementos* como o mais famoso e o mais avançado dos textos de Euclides, e aponta dois aspectos para justificar essa afirmação. O primeiro, quando constata que a obra, depois da Bíblia, é o texto mais editado, lido e estudado no mundo ocidental, sendo o livro que mais embasa a maior parte dos conteúdos de geometria estudados nas escolas. O segundo aspecto quando menciona que a estrutura lógica utilizada por Euclides, quando escreveu *Os Elementos*, influenciou, mais do que qualquer outra obra, todo o pensamento científico. Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 159) confirmam esse ponto de vista:

> Há cerca de 2300 anos, em Alexandria, uma cidade grega perto da embocadura do Nilo, no Egito, um professor chamado Euclides escreveu o sistema axiomático mais famoso do mundo. Seu sistema foi estudado por acadêmicos gregos e romanos por mil anos, depois foi traduzido para o árabe em cerca de 800 d.C. e estudado pelos seus acadêmicos. Tornou-se o padrão para o pensamento lógico por toda a Europa medieval.

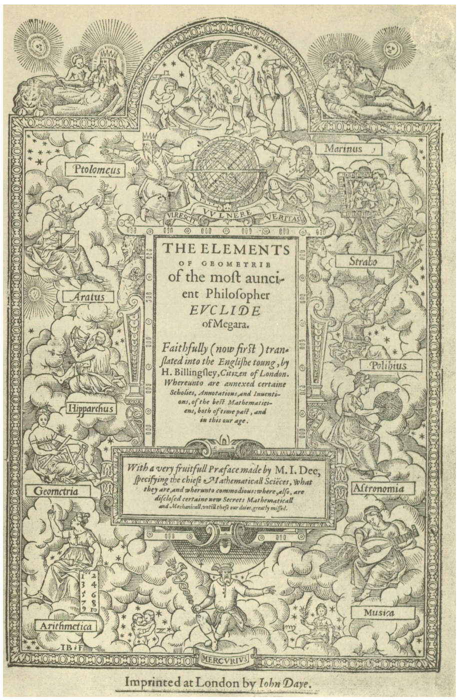
Na visão de Pastor e Babini (1985), por maiores que tenham sido as contribuições dos matemáticos que antecederam Euclides, fica sempre para ele o mérito de ter estruturado sistematicamente, de forma ordenada e orgânica, um grande número de conhecimentos matemáticos, sem abandonar a matemática essencialmente abstrata.

É curioso o fato de que em algumas edições da obra *Os Elementos* conste a identificação do autor como "Euclides de Megara", uma vez que esse último e Euclides de Alexandria não são a mesma pessoa. Borges Filho (2005, p. 11) esclarece que

> Durante a Idade Média muitos tradutores e editores chamavam Euclides de Euclides de Megara. Esse engano nasceu da confusão entre Euclides e o filósofo Euclides de Megara, que viveu por volta de 400 a.C.. A primeira referência a Euclides como Euclides de Megara ocorre no século XIV com Theodorus Metochita, que chamou "Euclides de Megara, filósofo socrático, contemporâneo de Platão" como autor de tratados de geometria.

Ainda segundo Borges Filho (2005), o equívoco continuou a ser cometido em outras traduções da obra *Os Elementos*, ocorrendo na edição impressa de Campanus, publicada na cidade de Veneza em 1482 (figura 9), na de Bartolomeo Zamberto, publicada em Paris em 1516, na de Tartaglia, lançada também em Veneza no ano de 1565, na de Candalla, em Paris, no ano de 1566, e na de Billingsley, em Londres, 1570. Nessa última (figura 6), observa-se, claramente no centro da página, a menção a Euclides de Megara.

Figura 6 – Frontispício da primeira versão de *Os Elementos* em inglês



Fonte: <https://www.worldhistory.org/uploads/images/1434.jpg?v=1706638263-0>

Finalmente, somente com o advento da tradução de *Os Elementos* para o latim, feita por Commandinus de Urbino, ficou evidenciado o erro de autoria da obra que induziu diversas pessoas a acreditarem que Euclides de Alexandria era o mesmo que o Euclides de Megara. Essa tradução ganhou destaque por ser a primeira a informar o autor do livro corretamente, conforme Borges Filho (2005).

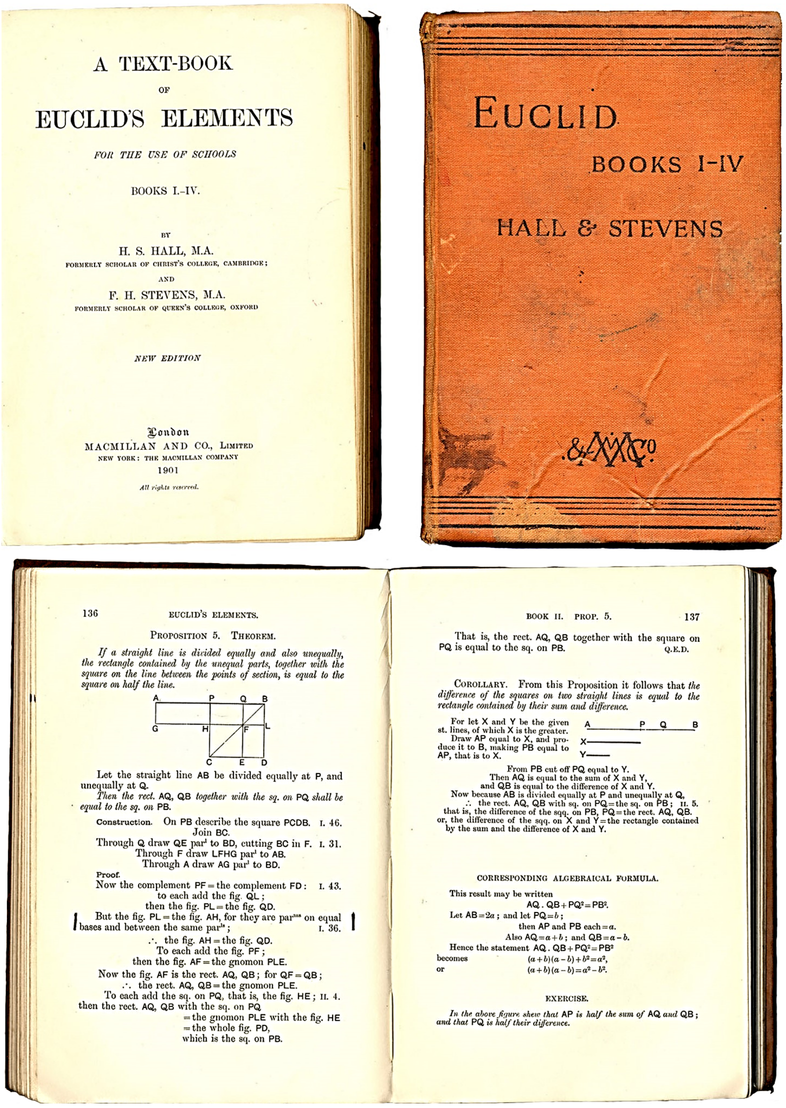
Diversos textos precedentes a *Os Elementos* de Euclides tinham também esse nome. De fato, um dos significados da palavra "elementos" é aquilo que se faz necessário para informar ou subsidiar algo. Portanto, é um nome que se aplica a várias obras anteriores. Por exemplo, Hipócrates de Quios escreveu uma obra intitulada *Elementos*.

Na visão de Eves:

> Parece que esse trabalho notável imediata e completamente superou todos os Elementos precedentes; de fato, nenhum vestígio restou de esforços anteriores. Tão logo o trabalho apareceu, ganhou o mais alto respeito e, dos sucessores de Euclides até os tempos modernos, a mera citação do número de um livro e o de uma proposição de sua obra-prima é suficiente para identificar um teorema ou construção particular (EVES, 2011, p. 167).

Ao longo de muitos anos, *Os Elementos* foi usado como livro didático. Por exemplo, a figura 7 exibe algumas páginas e a capa de uma edição dessa obra com tal finalidade.

Figura 7 – *Os Elementos* como livro escolar inglês, no ano de 1901



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclid-POxy.jpg?uselang=pt-br>

Vale ressaltar que uma ideia equivocada e bastante difundida é a de que Euclides tenha concentrado apenas conteúdos de cunho geométrico nos *Elementos*. Essa é uma concepção que brota da falta de conhecimento daquilo que está contido na obra. Sobre esse fato, Boyer e Merzbach (2012), Cajori (2007), Eves (2011), Kline (1992) e Pastor e Babini (1985) esclarecem que *Os Elementos* não trata exclusivamente de geometria, eles afirmam que a obra contém um vasto e denso fundamento de *álgebra elementar* e de *aritmética* (teoria dos números), que estão distribuídos numa coletânea de treze livros ou capítulos que agregam um total de 465 proposições, das quais 372 são teoremas e 93 são problemas.

Em síntese, Cajori (2007) elenca que os quatro livros iniciais discorrem sobre geometria plana, enquanto que o quinto livro alude sobre a teoria da proporção aplicada às magnitudes em geral. Antecedidos pelo sexto livro que desenvolve a geometria de figuras semelhantes, o sétimo, o oitavo e o nono abordam a teoria dos números ou, simplesmente, aritmética. Ainda no nono livro é encontrada a prova do teorema sobre a infinidade do conjunto dos números primos. E, sucedidos pelo décimo livro que trata da teoria dos incomensuráveis, os três últimos livros explanam acerca da estereometria[3]. Expandindo aos três livros seguintes, ver-se que os teoremas mais elementares estão inseridos no livro XI, e que o livro XII trata das relações métricas do prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera. No livro XIII são encontradas abordagens sobre os polígonos regulares, principalmente triângulo e pentágono, tomando-os como as faces dos cinco sólidos regulares: o tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Por outro lado, Kline (1992) traz à tona que algumas edições da obra contêm, além dos treze, outros dois livros alegando que, provavelmente, são de autores desconhecidos, enquanto que Pastor e Babini (1985) acrescentam que, ao conjunto dos treze livros de *Os Elementos*, dois outros são apócrifos, ambos relacionados com poliedros regulares, foram adicionados por editores antigos, sendo a autoria do livro XIV dada a um importante matemático do século II a.C., Hipsicles de Alexandria, e a autoria do livro XV atribuída a um dos discípulos de Isidoro de Mileto, matemático que viveu entre os séculos V e VI. Também, Cajori (2007, p. 44) evidencia que: "Os décimo quarto e décimo quinto livros, que tratam de geometria sólida, são apócrifos".

Até hoje não foi descoberta nenhuma cópia de *Os Elementos* que corresponda à data da época do seu autor. Pelo que se conhece, suas edições mais modernas foram elaboradas com base em revisões do comentador grego Téon de Alexandria[4], o qual viveu aproximadamente sete séculos após Euclides. O trabalho conhecido como Elementos de Euclides tem perdurado até os dias atuais através desse manuscrito redigido por Téon, no século IV. Esse texto, provavelmente, foi finalizado posteriormente com base em papiros e manuscritos antigos, alguns datando de antes de Téon. Apesar de ser considerado bastante completo e revisado, vale lembrar que ele foi escrito seis séculos após o texto original, o que possibilitou a introdução de várias modificações e inserções ao longo desse período, de acordo com Pastor e Babini (1985).

Essa revisão de Téon, até o início do século XIX, era a mais antiga edição conhecida, todavia, Eves (2011) destaca que Napoleão Buonaparte, em 1808, ao tomar posse dos manuscritos de valor das bibliotecas italianas, encontrou, na biblioteca do Vaticano, uma reprodução do século X de uma edição da obra antecessora à revisão de Téon. Fazendo menção a essa edição, Eves (2011, p. 168) detalha que:

> Um estudo dessa edição mais antiga e uma triagem cuidadosa de citações e notas feitas por comentadores antigos indicam que o material introdutório do tratado original de Euclides indubitavelmente sofreu al-

[3] Parte da geometria que trata da medição dos volumes dos sólidos.
[4] Viveu em 365 d.C. e "foi responsável por uma importante edição de *Os elementos* que se preservou; é lembrado também como o pai de Hipatia", conforme Boyer e Merzbach (2012, p. 140).

> terações nas revisões que se seguiram, mas os teoremas e demonstrações, salvo acréscimos e supressões pequenas, permaneceram em essência como Euclides os escreveu.

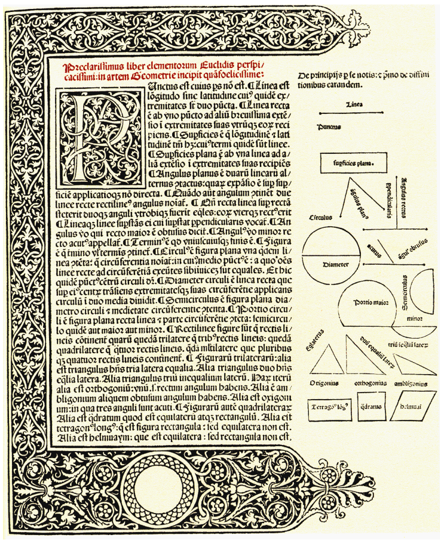
No que concerne à longevidade, *Os Elementos* é o mais antigo dos tratados da Grécia que chegou até os dias atuais. Quanto ao objetivo, Euclides desejava reunir, em uma obra, a tríplice descoberta: a teoria de Teeteto sobre os irracionais, a teoria das proporções de Eudoxo e a teoria dos cinco sólidos regulares, também chamados "poliedros de Platão".

Figura 8 – Registro da primeira edição em latim impressa por Erhard Ratdolt, em 1482

Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclide,_Elementa_geometriae,_1482.jpg?uselang=pt-br>

A figura 9 apresenta a imagem de uma das páginas dessa primeira edição[5], na qual é possível perceber ilustrações com tarjas e figuras geométricas.

Figura 9 – Página da primeira edição impressa



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclid3a.gif?uselang=pt-br>

[5] Autoria da fotografia: Zitema. Registro de domínio público, conforme: <https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.pt-br>.

Ao que concerne à estrutura da obra, apresentaremos a seguir – de forma mais detalhada – a organização de *Os Elementos*, considerando os conteúdos abordados em cada um dos treze livros.

1.4.1 Livro I

O livro I inicia com vinte e três definições basilares que sustentam a construção das proposições que são exibidas no decorrer da obra e, dentre elas, são encontradas definições e conceitos de ponto, linha, reta, linha reta, superfície plana, ângulo plano, tipos de ângulos e, além disso, é encontrada a definição de círculo e circunferência e as suas diferenças. O livro I traz as definições de centro e diâmetro do círculo, de semicírculo e de figuras retilíneas, que podem ser classificadas como: triláteras, quadriláteras e multiláteras. Nesta seção da obra, ainda ocorre a definição de triângulo acutângulo, obtusângulo, retângulo, escaleno, isósceles e equilátero; quanto aos quadriláteros, são definidos também: o quadrado, o retângulo, o losango e os trapézios.

Logo depois, são enunciados cinco postulados que dizem respeito à marcação de uma reta a partir de dois pontos fixados, à infinitude de uma reta, à construção de um círculo, à equivalência dos ângulos retos e à caracterização de retas paralelas. Em seguida, nove axiomas (ou noções comuns) são apresentados com a finalidade de, juntos aos postulados mencionados, gerar um conjunto de princípios essenciais para subsidiar demonstrações posteriores.

Ao todo, são quarenta e oito proposições que compõem esse primeiro livro. Proposições que tratam da construção de um triângulo equilátero sobre um segmento de reta, da relação entre as medidas dos ângulos da base e das medidas dos lados de um triângulo isósceles, da relação entre as medidas dos lados opostos a ângulos que possuem a mesma medida em um triângulo, da divisão de ângulo em ângulos de mesmo tamanho e da divisão de segmentos em partes iguais, isto é, do que é mediana, altura, bissetriz e mediatriz. Dentre essas proposições, vale ressaltar as que abordam as demonstrações dos casos de congruência de triângulos (lado-lado-lado, lado-ângulo-lado, ângulo-lado-ângulo), da desigualdade triangular, dos casos de paralelismo e de perpendicularismo entre retas, da soma de dois ângulos de qualquer triângulo ser sempre menor do que dois ângulos retos e das relações entre as medidas dos ângulos obtidos a partir de retas transversais.

Ainda nesse conjunto de proposições, Euclides versa sobre, além de o paralelogramo ter as suas diagonais o dividindo em triângulos congruentes, o paralelogramo possuir lados opostos com medidas iguais e ângulos opostos com as medidas congruentes. Ele compara polígonos com relação ao valor das suas áreas, traz uma demonstração do teorema de Pitágoras, aborda a demonstração sobre a existência única da reta paralela à outra reta dada e que passa por ponto fora dessa reta e apresenta o teorema do ângulo externo de um triângulo.

1.4.2 Livro II

O segundo livro é conhecido como o da *álgebra geométrica* pelo motivo de explorar a aplicação de conceitos geométricos com a finalidade de resolver problemas que hoje são estudados nos cursos de álgebra.

O livro II é iniciado com duas definições: uma sobre paralelogramo retangular e a outra sobre áreas relacionadas a paralelogramos. Essas definições embasam quatorze proposições sobre equivalência entre entes geométricos e algébricos. Vale destacar que nele são abordados: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos, uma generalização do teorema de Pitágoras para triângulos retângulos e obtusângulos, conhecida atualmente como "Lei dos Cossenos", e métodos para resolução de equações quadráticas.

1.4.3 Livro III

O livro III contém onze definições e trinta e sete proposições. Suas definições descrevem quais são os elementos geométricos que tornam dois círculos iguais, o que é uma reta tangente a um círculo dado, o que são círculos tangentes, o que é ângulo de segmento e o que é setor circular. Em síntese, a geometria do círculo é o assunto principal.

Nesse livro, os conteúdos são relacionados à maneira de localizar o centro de um círculo dado, às propriedades do círculo e da circunferência, aos teoremas e propriedades das cordas, dos segmentos tangentes e secantes, dos ângulos centrais, dos ângulos inscritos, dos ângulos de segmento e da congruência de arcos.

1.4.4 Livro IV

O quatro livro, que é introduzido por sete definições que precedem dezesseis proposições, trata, também, da geometria do círculo e contém teoremas cujos enunciados têm pouca diferença dos encontrados nos textos atuais.

É dedicado à construção de polígonos regulares com três, quatro, cinco, seis e quinze lados, por meio do uso de régua e compasso, além de tratar da inscrição e circunscrição desses polígonos num círculo dado. Curiosamente, esse livro não faz alusão aos polígonos regulares de sete, nove, onze e treze lados, já que não podem ser construídos com régua e compasso.

Sobre a parte final desse quarto livro, Kline (1992, p. 102-103) elucida que: "a última proposição, que mostra como inscrever um polígono regular de 15 lados em um determinado círculo, parece ter sido usada na astronomia", pois, até a época de Eratóstenes aceitava-se que o ângulo da eclíptica[6] era 24°, 1/15 de 360°.

[6] Lugar geométrico formado pelo plano equatorial da Terra e o plano de sua órbita ao redor do Sol.

1.4.5 Livro V

Quanto à sua organização e estrutura, o quinto livro é composto de vinte e cinco teoremas que são antecedidos por dezoito definições que discorrem sobre o que são: grandezas (comensuráveis, incomensuráveis, diretamente e inversamente proporcionais), parte, razão e proporção. Kline (1992) afirma que o termo "parte" faz alusão à "submúltiplo", exemplificando que 2 é submúltiplo de 6 enquanto que 4 não é submúltiplo de 6. Com relação à definição 2, ele sustenta que a palavra "múltiplo" significa "múltiplo inteiro".

As proposições desse livro discorrem sobre assuntos ligados à teoria das proporções ou teoria geométrica da proporcionalidade. No início, é observada a propriedade distributiva à direita e à esquerda da multiplicação em relação à adição, bem como a distributiva à esquerda do produto em relação à subtração e a propriedade associativa da multiplicação. Além disso, são expostas as regras sobre o uso do "maior que" e "menor que".

No livro V, a "proporção" é definida como uma igualdade entre "razões". Também são encontradas demonstrações de teoremas relacionados às proporções e às suas propriedades.

1.4.6 Livro VI

O sexto livro começa com cinco definições e contém, ao todo, trinta e três proposições que abordam a teoria de polígonos semelhantes. A primeira delas refere-se à definição de polígonos semelhantes ao considerar as respectivas características dos ângulos e dos lados correspondentes de dois ou mais polígonos, enquanto que, na definição 4, verifica-se o conceito de altura do polígono relativa a um dado lado, como é apresentado até os dias atuais.

A teoria abordada no livro VI decorre dos conteúdos do livro V. Teoremas alusivos à razões e proporções, a paralelogramos, a triângulos e a outros polígonos foram desenvolvidos por Euclides ao longo desse livro que, por sua vez, contém: uma generalização do teorema de Pitágoras (na qual são traçadas, em vez de quadrados, três figuras semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo) e uma apresentação do método de aplicação de áreas construídas sobre catetos e hipotenusa, fazendo uma substituição dos retângulos por paralelogramos.

Eves (2011, p. 173) afirma que "o livro VI aplica a teoria das proporções eudoxiana à geometria plana", dado que no livro constam os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos, a proposição que declara que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em segmentos proporcionais aos dois outros lados do triângulos, as construções de médias proporcionais e a resolução geométrica de equações quadráticas. Ademais, são encontradas as proposições sobre divisões de grandezas em partes diretamente e inversamente proporcionais, e as relações direta e inversa entre grandezas proporcionais, o que hoje é denominado "regra de três".

Vale salientar, que o livro VI aborda, também, figuras retilíneas, razões entre áreas de figuras planas, trata da relação entre as áreas de figuras semelhantes, fala sobre médias proporcionais, e chega a demonstrar que o comprimento da diagonal de um retângulo é obtido por meio da média proporcional entre as medidas dos seus lados.

1.4.7 Livro VII

No sétimo livro, Euclides apresenta vinte e três definições referentes ao que é número, números pares e ímpares e suas propriedades, primos e compostos, quadrados e cúbicos, planos e sólidos e suas respectivas semelhanças, números perfeitos e números em proporção. Além disso, são enunciados os conceitos e algumas propriedades de divisores, múltiplos, submúltiplos e números primos e compostos entre si, respectivamente.

As trinta e nove proposições do livro VII discorrem sobre máximo divisor comum (MDC), mínimo múltiplo comum (MMC) e o atualmente considerado "algoritmo de Euclides", usado para determinar o MDC de dois ou mais números, pelo método das divisões sucessivas, e para verificar se dois números são primos entre si. Nesse livro, ainda são encontradas várias propriedades numéricas básicas e a teoria das proporções numéricas ou pitagóricas. O livro encerra com a apresentação de um método para encontrar o mínimo múltiplo comum de vários números.

O próximo capítulo abordará, com maior profundidade, os tópicos listados nesta seção.

1.4.8 Livro VIII

No livro VIII, Euclides apresenta vinte e sete proposições que se referem, principalmente, aos números em proporções contínuas, que satisfazem o que, atualmente, define-se por progressão geométrica.

Ademais, o oitavo livro aborda as propriedades simples de potências quadradas e cúbicas, como também as semelhanças entre números quadrados, as semelhanças entre números cúbicos e as razões proporcionais.

O capítulo seguinte abordará os conteúdos desse livro com mais detalhes.

1.4.9 Livro IX

Segundo Kline (1992), o livro IX conclui a tarefa sobre a teoria dos números. Nesse livro, Euclides expõe trinta e seis proposições dentre as quais há teoremas sobre os números quadrados e cúbicos, a infinitude dos números primos e as proporções contínuas.

O livro contém um processo que determina a soma dos n números ou termos de uma progressão geométrica, estabelece um método para obter números perfeitos e, conforme

Eves (2011), enuncia uma proposição equivalente ao denominado, atualmente, teorema fundamental da aritmética, o qual afirma que todo número inteiro composto, maior do que "1", pode ser decomposto, de maneira única, como produto de números primos.

Esse livro, inclusive, aborda a ideia de extração das raízes quadradas de números inteiros, a determinação de números cúbicos a partir de outros números cúbicos, as relações de números primos entre si, as relações entre números ímpares e primos, e a adição, subtração, multiplicação e divisão de números pares e ímpares.

O capítulo sucedente abordará os conteúdos listados acima com maior aprofundamento.

1.4.10 Livro X

Segundo Boyer e Merzbach (2012), os livros V e X são os mais admiráveis. No décimo, Euclides enuncia cento e quinze proposições alusivas a alguns entes geométricos que, atualmente, são conhecidos na aritmética como a raiz quadrada de um número real; esse livro é a seção da obra euclidiana majoritariamente dedicada aos comprimentos de reta incomensuráveis, ou seja, ao que hoje se entende pela representação geométrica dos números irracionais.

No livro, os números racionais são apresentados como frações de numeradores e denominadores inteiros e primos entre si. A adição, a subtração, a multiplicação e a divisão de números racionais e irracionais, assim como as propriedades operatórias dos números reais e as demonstrações relacionadas à relação entre as grandezas de proporção, são temáticas abordadas nas proposições desse livro.

Esse livro, também, aborda métodos de racionalização de denominadores de frações, fórmulas que determinam ternos de números pitagóricos, representação do número irracional e construções geométricas (triângulos, quadriláteros e outros polígonos regulares) que envolvem segmentos e áreas com medidas incomensuráveis.

1.4.11 Livro XI

O décimo primeiro livro é dedicado à geometria tridimensional. As vinte e oito definições, acompanhadas de trinta e nove proposições, explanam sobre os elementos e as propriedades dos sólidos geométricos.

Também são observados os conceitos e as definições de sólidos convexos, sólidos semelhantes, planos paralelos, ângulos entre as faces de sólidos, prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro e sólidos regulares. Vale ressaltar que as definições de esfera, cilindro e cone decorrem da rotação de um semicírculo em torno do seu diâmetro, de um retângulo em torno de um dos seus lados e de um triângulo em torno de um dos seus lados, respectivamente.

Além disso, Euclides enuncia e demonstra proposições relacionadas à proporção entre as áreas das superfícies e os volumes de sólidos semelhantes.

1.4.12 Livro XII

O livro XII versa sobre as medidas de figuras. Ao todo, Euclides enuncia 18 teoremas sobre áreas das superfícies dos sólidos e volumes dos sólidos.

O décimo segundo livro inicia com uma minuciosa demonstração do teorema: a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre os quadrados dos seus respectivos diâmetros. Na ocasião, o autor usa o processo de *redução ao absurdo* com a finalidade de determinar o volume do cone, do cilindro, da esfera e da pirâmide.

1.4.13 Livro XIII

As propriedades dos cinco sólidos regulares é o foco principal do décimo terceiro livro que, por sua vez, contém 18 proposições.

É nesse livro onde se desenvolve toda a teoria de construções que validam a inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera, ou seja, de encontrar a razão entre uma aresta do sólido inscrito e o raio da esfera. Nesta parte da obra, ocorre a demonstração do seguinte teorema: "um triângulo cujos lados são respectivamente lados do pentágono regular, hexágono regular e decágono regular inscritos em um mesmo círculo, é retângulo".

O autor demonstra que não há poliedros regulares além dos seguintes: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro; inclusive, é apresentado o processo de construção desses sólidos.

Além desse fato, Euclides evidencia proposições relacionadas às faces, arestas e vértices desses sólidos, explora as propriedades e as relações dos sólidos circunscritos e inscritos em esferas e analisa as proporções entre os volumes desses sólidos; em várias proposições, também são abordadas as inscrições do tetraedro e do octaedro no cubo, e do icosaedro no dodecaedro, além de abordar a ideia do que viria a ser chamado "planificação de um sólido geométrico".

1.4.14 Panorama dos conteúdos abordados

Por meio de cada livro de sua obra, Euclides sistematiza conceitos fundamentais de *geometria* e *aritmética*, abordando desde axiomas e postulados até proposições mais elaboradas. Com o objetivo de evidenciar tais conceitos euclidianos, representamos, a seguir, um quadro-síntese (tabela 1) dos conteúdos presentes em cada um dos treze livros de *Os Elementos*.

Tabela 1 – Conteúdos abordados na obra *Os Elementos*

Livros	**Conteúdos**
Livro I	– Definição de: ponto, linha, reta, superfície plana, ângulo no plano, círculo, circunferência, centro e diâmetro de círculo, semicírculo, figuras retilíneas, retas paralelas e retas perpendiculares. – Definição, classificação e propriedades dos triângulos. – Casos de congruência de triângulos. – Definição, classificação e propriedades dos quadriláteros.
Livro II	– Propriedades algébricas dos paralelogramos. – Produtos notáveis, teorema de Pitágoras e lei dos cossenos.
Livro III	– Elementos e propriedades do círculo (cordas, ângulos etc.).
Livro IV	– Polígonos regulares inscritos e circunscritos ao círculo.
Livro V	– Grandezas comensuráveis e incomensuráveis. – Grandezas diretamente e inversamente proporcionais. – Razão e proporção.
Livro VI	– Semelhança de polígonos (triângulos, quadriláteros etc.). – Médias proporcionais. – Divisões diretamente e inversamente proporcionais.
Livro VII	– Conceito de número. – Números pares, ímpares, primos, compostos, perfeitos, planos, sólidos, quadrados, cúbicos e em proporção. – Múltiplos e divisores. – Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.
Livro VIII	– Progressões geométricas. – Potências quadradas e cúbicas. – Razões proporcionais.
Livro IX	– Infinitude dos números primos. – Soma dos n termos de uma progressão geométrica. – Teorema fundamental da aritmética. – Raiz quadrada de um número natural. – Operações entre números pares e ímpares. – Propriedades dos números primos.
Livro X	– Números racionais e irracionais. – Operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com números racionais e irracionais. – Racionalização de denominadores de frações.
Livro XI	– Definições e propriedades de sólidos geométricos.
Livro XII	– Área da superfície e volume dos sólidos geométricos.
Livro XIII	– Existência, elementos (vértices, arestas e faces) e volume dos Poliedros regulares. – Poliedros inscritos na esfera e suas propriedades.

Fonte: Elaborada pelo autor.

2 A Presença da Aritmética em Os Elementos de Euclides

Neste capítulo, apresentaremos os conteúdos de *aritmética* abordados em *Os Elementos*, especificamente nos três livros que dizem respeito à *teoria dos números.*

2.1 Visão panorâmica da Aritmética euclidiana sob o olhar de historiadores da matemática

Em uma visão panorâmica de *Os Elementos*, identificamos a presença da *Aritmética* nos livros sete, oito e nove. Acerca desses livros, historiadores da matemática como Bicudo (2009), Boyer e Merzbach (2012), Cajori (2007), Eves (2011), Kline (1992) e Pastor e Babini (1985) teceram diversas opiniões, sob a quais nos fundamentamos.

Boyer e Merzbach (2012) e Pastor e Babini (1985) afirmam que o livro VII faz a distinção entre vários tipos de números (pares, ímpares, compostos, primos, planos, sólidos e perfeitos) e, além disso, contém o, atualmente, denominado *algoritmo de Euclides* – usado na obtenção do *máximo divisor comum* de dois números, por meio das divisões sucessivas – e, também, uma regra que auxilia na determinação do *mínimo múltiplo comum* de dois ou mais números. Nas palavras de Cajori (2007, p. 64):

> O livro VII explica o cálculo do máximo divisor comum de dois números pelo processo da divisão (o chamado 'algoritmo de Euclides'). A teoria de números proporcionais (números racionais) é então desenvolvida com base na definição, 'números são proporcionais quando o primeiro é o mesmo múltiplo, parte, ou partes do segundo assim como o terceiro é do quarto'. Esta é tida como a mais velha teoria de proporção devida aos pitagóricos.

Nesse sentido, Eves (2011) destaca que o supracitado *algoritmo* se apresenta como método para verificar se dois números são ou não primos entre si e que as *teorias das proporções numéricas* e algumas *propriedades numéricas* são abordadas no mesmo livro.

Como mencionado por Kline (1992, p. 169), "o livro VIII continua com a teoria dos números, sem incorporar novas definições. Trata-se principalmente de progressões geométricas, que para Euclides são conjuntos de números em proporção contínua", isto é, um modelo de proporção que satisfaz a definição de *progressão geométrica* devido à razão entre cada termo e o seu sucessor ser constante. Outrossim, Eves (2011) evidencia a dedicação de Euclides em abordar essas progressões geométricas relacionadas às *proporções contínuas*, enquanto Boyer e Merzbach (2012), além de ressaltar que o livro também aborda propriedades simples de quadrados e cubos, chegam a classificá-lo como o menos interessante da obra.

No que diz respeito ao livro IX, Eves (2011) e Kline (1992) afirmam que Euclides conclui a teoria dos números e traz uma prova da expressão matemática que determina a soma dos termos de uma progressão geométrica. O livro, inclusive, enuncia várias proposições, e a vigésima delas aborda a infinidade dos números primos. Sobre isso, Boyer e Merzbach (2012, p. 96) apontam:

> O livro IX, o último dos três sobre teoria dos números, contém vários teoremas interessantes. Desses, o mais célebre é a Proposição 20: "números primos são mais do que qualquer quantidade fixada de números primos." Isto é, Euclides dá aqui a demonstração elementar bem conhecida do fato que há infinitos números primos.

Segundo Eves (2011), o nono livro conta com várias proposições significativas no campo da *aritmética* e, dentre elas, é possível destacar a décima quarta, que é equivalente ao atual Teorema Fundamental da Aritmética. No final da apresentação dos teoremas elencados, o autor apresenta uma fórmula que permite encontrar *números perfeitos*, conforme Boyer e Merzbach (2012) e Eves (2011).

Entretanto, não seria um equívoco pensar nos conteúdos aritméticos contidos nesses três livros como pilares de uma teoria mais elaborada. Essa teoria diz respeito aos *irracionais*, uma vez que Cajori (2007, p. 64) elucida: "a interpolação dos livros aritméticos VII $-$ IX é explicada como uma preparação para um tratamento mais profundo do irracional no livro X".

A seguir, iremos abordar os conteúdos específicos de cada livro e vamos adotar, nessa abordagem, os enunciados que aparecem na tradução de Bicudo (2009). Paralelamente e com intuito pedagógico, quando considerarmos oportuno, apresentaremos alguns desse enunciados de forma atualizada, sem perda de conteúdo e rigor, uma vez que há expressões que podem dificultar a compreensão dos enunciados.

2.2 Uma imersão nos conteúdos do livro VII

Em forma de tópicos, apresentaremos os conteúdos presentes no livro, exibiremos os enunciados correspondentes a tais conteúdos e, quando necessário, uma versão atualizada dos mesmos. Além disso, vale ressaltar que esta apresentação foi estruturada com as *definições* e as *proposições* distribuídas de acordo com os conteúdos indicados em cada tópico, ou seja, não necessariamente seguindo a ordem que são apresentadas no livro de Bicudo (2009).

2.2.1 Unidade e número

Duas definições formalizam os conceitos de *unidade* e *número*:

- *Definição 1:* Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma.
- *Definição 2:* E número é a quantidade composta de unidades.

2.2.2 Divisores, múltiplos e suas propriedades

Estas são as definições de *divisores* e *múltiplos*:

- *Definição 3:* Um número é uma parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior.

  Versão atualizada: Um número é uma parte de outro maior quando ele o divide exatamente, sem deixar resto.

  Exemplo: O número 3 é parte de 12, pois $12 = 3 \cdot 4 + 0$, ou seja, $12 \div 3 = 4$.

- *Definição 4:* E partes, quando não meça exatamente.

  Versão atualizada: Se não o divide de forma exata, ele é chamado de parte não exata.

  Exemplo: O número 2 não é parte de 5, pois $5 = 2 \cdot 2 + 1$.

- *Definição 5:* E o maior é um múltiplo do menor, quando seja medido exatamente pelo menor.

  Versão atualizada: O número maior é um múltiplo do menor quando pode ser dividido exatamente por ele.

  Exemplo: O número 12 é múltiplo de 3, pois $12 \div 3 = 4$.

- *Definição 16:* Um número é dito multiplicar um número, quando, quantas são as unidades nele tantas vezes o multiplicado seja adicionado, e algum seja produzido.

  Versão atualizada: Dizemos que um número n multiplica um número m se o produto entre eles é o resultado da soma de n parcelas de m.

  Exemplo: Se $5 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$, temos 5 multiplicando 4.

- *Proposição 35:* Caso dois números meçam algum número, também o menor medido por eles o medirá.

  Versão atualizada: Se dois números são divisores de outro número, então o menor número divisível por esses dois números também divide esse mesmo número.

  Exemplo: Como 2 e 5 são divisores de 20, então 10, que é o menor número divisível por 2 e 5, também é divisor de 20.

- *Proposição 37:* Caso um número seja medido por algum número, o medido terá uma parte homônima com o que mede.

  Versão atualizada: Se um número a é divisível por outro número, b, então o número a é composto de múltiplas partes iguais a b, ou seja, $a = k \cdot b$, com $k \in \mathbf{N}$.

  Exemplo: Como 39 é divisível por 3, então 39 é composto de $k = 13$ partes iguais a 3, isto é, $39 \div 3 = 13 \iff 39 = 13 \cdot 3$. Em outras palavras, podemos afirmar que 3 cabe, exatamente, 13 vezes em 39.

- *Proposição 38:* Caso um número tenha uma parte, qualquer que seja, será medido por um número homônimo com a parte.

  Versão atualizada: Se dividirmos um número a em n partes iguais, cada uma dessas partes será um número c, e a será múltiplo de c.

  Exemplo: Dividindo-se o 28 em 7 partes iguais, teremos todas essas partes iguais a 4 e o 28 será múltiplo de 4.

2.2.3 Números pares, ímpares e suas propriedades

A formalização dos conceitos de números *pares* e *ímpares* ocorre nas seguintes definições:

- *Definição 6:* Um número par é o que é dividido em dois.

- *Definição 7:* E um número ímpar é o que não é dividido em dois, ou [o] que difere de um número par por uma unidade.

- *Definição 8:* Um número par, um número par de vezes, é o medido por um número par, segundo um número par.

  Versão atualizada: O produto entre dois números pares é divisível por um número par, mediante ao resultado ser um número par.

  Exemplo: Tomando os números pares 4 e 6, temos $24 = 4 \cdot 6$, que ao ser dividido por 2 resultada em 12.

- *Definição 9:* E um número ímpar, um número par de vezes, é o medido por um número par, segundo um número ímpar.

  Versão atualizada: Um número ímpar, multiplicado por um número par, é divisível por um número par, mediante ao resultado ser um número ímpar.

  Exemplo: Tomando $12 \cdot 3 = 36$, temos $36 \div 4 = 9$.

- *Definição 10:* Um par, um número ímpar de vezes, é o medido por um número ímpar, segundo um número par.

Versão atualizada: Um número par, multiplicado por um número ímpar, é divisível por um número ímpar, mediante ao resultado ser um número par.

Exemplo: Tomando $8+8+8+8+8+8+8+8+8 = 9 \cdot 8 = 72$, temos $72 \div 9 = 8$, ou até mesmo $72 \div 3 = 24$.

- *Definição 11:* E um número ímpar, um número ímpar de vezes, é o medido por um número ímpar, segundo um número ímpar.

  Versão atualizada: Um número ímpar, multiplicado por um número ímpar, é divisível por um número ímpar, mediante ao resultado ser um número ímpar.

  Exemplo: Tomando $9 \cdot 15 = 135$, temos $135 \div 45 = 3$.

2.2.4 Números primos, primos entre si, compostos e compostos entre si

As próximas quatro definições elucidam sobre o significado de *números primos*, *compostos* e suas respectivas relações.

Antes de enunciar e escrever uma versão atualizada da *definição 12*, vale a pena ressaltar o que afirma a *proposição 38*: "Se dividirmos um número a em n partes iguais, cada uma dessas partes será um número c, e a será múltiplo de c". Baseando-se nessa proposição, enunciamos e apresentamos uma versão atualizada da *definição 12* da seguinte maneira:

- *Definição 12:* Um número primo é o medido por uma unidade só.

  Versão atualizada: Um número primo é aquele que só pode ser dividido por 1 e por ele mesmo.

Note que se dividirmos um primo p em 1 parte, então essa parte será o próprio número p, e, de acordo com a *proposição 38*, p será múltiplo de p, isto é, $p = 1 \cdot p \Longleftrightarrow p \div p = 1$.

- *Definição 13:* Números primos entre si são os medidos por uma unidade só como medida comum.

  Versão atualizada: Números primos entre si são aqueles que têm apenas o número 1 como divisor comum.

  Exemplo: Os números 4 e 5 são primos entre si, pois o número 1 é o único divisor comum entre eles.

- *Definição 14:* Um número composto é o medido por algum número.

Versão atualizada: Um número composto é aquele que pode ser dividido por outros números além de 1 e ele mesmo.

Exemplo: O número 105 é composto, pois ele é divisível por 1, 3, 5, entre outros.

- *Definição 15:* E números compostos entre si são os medidos por algum número como medida comum.

  Versão atualizada: Números compostos entre si são aqueles que têm um divisor comum além de 1.

  Exemplo: Os números 6 e 8 são compostos entre si, visto que 1 e 2 são seus divisores comuns.

Vale salientar que as proposições de 21 a 30 têm como foco principal as propriedades de *números primos entre si*. Dentre essas dez proposições sobre coprimos, levando-se em consideração à sua abrangência, destacamos:

- *Proposição 21:* Os números primos entre si são os menores dos que têm a mesma razão com eles.

  Versão atualizada: Dois números são primos entre si quando formam uma razão irredutível.

  Exemplo: A razão entre 6 e 10 é igual a razão entre 3 e 5. Porém, 6 e 10 não são primos entre si, enquanto que 3 e 5 são.

- *Proposição 28:* Caso dois números sejam primos entre si, também um, conjuntamente com o outro, será primo com cada um deles; e caso um, conjuntamente com o outro, seja primo com algum deles, também os números do princípio serão primos entre si.

  Versão atualizada: Os números a e b são coprimos se, e somente se, $a + b$ é primo com a e com b, respectivamente.

  Exemplo: Considere os números 8 e 15, coprimos. Note que 23 (8+15) é primo com 8 e, também, é primo com 15. Por outro lado, considere 18 que, além de ser primo com 13, é primo com 5. Perceba que 13 e 5 são coprimos.

- *Proposição 29:* Todo número primo é primo com todo número que não mede.

  Versão atualizada: Seja a um número primo não divisor do número b. Então, os números a e b são coprimos.

  Exemplo: O número 7, que é primo, é coprimo de 10, visto que 7 não é divisor de 10.

- *Proposição 30:* Caso dois números, sendo multiplicados entre si, façam algum, e algum número primo meça o produzido deles, medirá também um dos do princípio.

  Exemplo: Note que $6 \cdot 8 = 48$ e que 3 (primo e divisor de 48) é divisor de 6.

As duas proposições a seguir abordam o conceito-chave para a prova do Teorema Fundamental da Aritmética.

- *Proposição 31:* Todo número composto é medido por algum número primo.

  Versão atualizada: Todo número composto é divisível por pelo menos um número primo.

  Exemplo: $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ é um número composto e é divisível pelos primos 2, 3, 5 e 7.

- *Proposição 32:* Todo número ou é primo ou é medido por algum número primo.

  Versão atualizada: Todo número é ou primo ou divisível por outro número primo.

  Exemplo: O número 13, que é primo, é divisível apenas por 1 e 13, e o número 14, que não é primo, é divisível por 2 e 7.

2.2.5 Números planos, sólidos e suas propriedades

As ideias de *números planos e sólidos* estão apresentadas nas seguintes definições:

- *Definição 17:* E quando dois números, tendo sido multiplicados entre si, façam algum, o produzido é dito plano, e lados dele, os números que foram multiplicados entre si.

  Versão atualizada: Quando dois números são multiplicados entre si, o resultado é chamado de produto, e os números originais são chamados de fatores.

  Exemplo: Na multiplicação $7 \cdot 8 = 56$, 56 é chamado produto, enquanto o 7 e 8 são os fatores.

Em relação à última definição, é importante destacar que Euclides atribui aos números uma visão geométrica, o que justifica o fato de ele identificar como "lado" o que, hoje, denominamos "fator", e como "plano" e "sólido", o que, atualmente, chamamos "produto".

- *Definição 18:* E quando três números, tendo sido multiplicados entre si, façam algum, o produzido é sólido, e lados dele, os números que foram multiplicados entre si.

  Versão atualizada: Quando três números são multiplicados entre si, o resultado é chamado de produto, e os números originais são chamados de fatores.

  Exemplo: Na multiplicação $2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$, 48 é denominado produto, e 2, 3 e 8 são os fatores.

- *Definição 22:* Números planos e sólidos semelhantes são os que têm os lados em proporção.

  Versão atualizada: Os produtos de dois ou de três fatores são chamados semelhantes quando seus fatores são proporcionais.

  Exemplo: O número $6 = 2 \cdot 3$ é semelhante a $96 = 8 \cdot 12$, um vez que $8 \div 2 = 12 \div 3 = 4$. Analogamente, $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ é semelhante a $480 = 6 \cdot 8 \cdot 10$, visto que os fatores 6, 8 e 10 são o dobro de 3, 4 e 5, respectivamente.

2.2.6 Números quadrados e cúbicos

Os *números quadrados e os cúbicos* são conceituados nas duas definições a seguir:

- *Definição 19:* Um número quadrado é o igual o mesmo número de vezes ou [o] contido por dois números iguais.

  Versão atualizada: Um número quadrado é aquele que resulta da multiplicação de um número por ele mesmo.

  Exemplo: O número 16 é quadrado, pois $16 = 4 \cdot 4$.

- *Definição 20:* E um cubo é o igual um número igual de vezes, um número igual de vezes, ou [o] contido por três números iguais.

  Versão atualizada: Um número cúbico é o mesmo que três números iguais multiplicados.

  Exemplo: O número 8 é cúbico, pois $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.

2.2.7 Números em proporção e números perfeitos

As definições de *números em proporção* e de *números perfeitos* ocorrem, respectivamente, em:

- *Definição 21:* Números estão em proporção, quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes.

  Versão atualizada: Números estão em proporção quando a razão entre o primeiro e o segundo é igual à razão entre o terceiro e o quarto.

  Exemplo: Os números 2, 9, 8 e 36 estão em proporção, visto que $\dfrac{2}{9} = \dfrac{8}{36}$.

- *Definição 23:* Um número perfeito é o que é igual às suas próprias partes.

  Versão atualizada: Um número perfeito é aquele que é igual à soma de seus divisores próprios.

Exemplo: O número 6 é perfeito, pois $6 = 1 + 2 + 3$; e 28 também é perfeito, uma vez que $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

2.2.8 Máximo divisor comum (MDC)

As proposições a seguir abordam processos para se obter o MDC entre dois ou três números e embasam o que hoje chamamos "algoritmo de Euclides": método das divisões sucessivas para determinação do MDC e verificação se dois números são primos entre si. A partir dos exemplos deste tópico, assumiremos a notação (a, b) para representar o MDC entre os números a e b.

- *Proposição 1:* Sendo expostos dois números desiguais, e sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, caso o que restou nunca meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade, os números do princípio serão primos entre si.

  Exemplo: Dados os números 13 e 30, temos $(13, 30) \rightarrow (13, 30 - 13) = (13, 17) \rightarrow (13, 17-13) = (13, 4) \rightarrow (13-4, 4) = (9, 4) \rightarrow (9-4, 4) = (5, 4) \rightarrow (5-4, 4) = (1, 4)$. Como um dos restos corresponde a 1, então 13 e 30 são primos entre si.

- *Proposição 2:* Sendo dados dois números não primos entre si, achar a maior medida comum deles.

  Exemplo: Considerando os números 8 e 12 e utilizando o método apresentado no exemplo anterior, temos $(8, 12) \rightarrow (8, 12 - 8) = (8, 4) \rightarrow (8 - 4, 4) = (4, 4) \rightarrow (4 - 4, 4) = (0, 4)$. Neste caso, $4 = (4, 0)$, equivalentemente, ele é o MDC de 8 e 12.

- *Proposição 3:* Dados três números não primos entre si, achar a maior medida comum deles.

  Exemplo: Vamos determinar o MDC entre 4, 12 e 18. Inicialmente, obteremos o $x = (4, 12)$. Em seguida, determinaremos o $(x, 18)$: $x = (4, 12) \rightarrow (4, 12 - 4) = (4, 8) \rightarrow (4, 8 - 4) = (4, 4) \rightarrow (4 - 4, 4) = (0, 4) = 4 = x$. Agora, temos: $(4, 18) \rightarrow (4, 18 - 4) = (4, 14) \rightarrow (4, 14 - 4) = (4, 10) \rightarrow (4, 10 - 4) = (4, 6) \rightarrow (4, 6 - 4) = (4, 2) \rightarrow (4 - 2, 2) = (2, 2) \rightarrow (2 - 2, 2) = (0, 2) = 2$. Portanto, o MDC procurado é 2.

As duas proposições acima podem ser reescritas da seguinte maneira: *Dados dois (três) números que não são primos entre si, encontrar o maior divisor comum entre eles.*

2.2.9 Mínimo múltiplo comum (MMC)

De agora em diante, assumiremos a notação $[a, b]$ para denotar o MMC entre os números a e b, e $M(x)$ para representar a sequência de múltiplos do número x. O MMC entre dois ou três números são enunciados nas seguintes proposições:

- *Proposição 34:* Dados dois números, achar o menor número que eles medem.

  Versão atualizada: Dados dois números, encontre o menor número que é divisível por ambos, ou seja, mínimo múltiplo comum entre eles.

  Exemplo: Dados os números 3 e 4, note que $M(3) = (3, 6, 9, 12, 15, ...)$ e $M(4) = (4, 8, 12, 16, 20, ...)$. Com isso, temos $[3, 4] = 12$.

- *Proposição 36:* Dados três números, achar o menor número que eles medem.

  Exemplo: Dados os números 2, 3 e 4, $M(2) = (2, 4, 6, 8, 10, 12, ...)$, $M(3) = (3, 6, 9, 12, 15, ...)$ e $M(4) = (4, 8, 12, 16, ...)$, concluímos que $[2, 3, 4] = 12$.

- *Proposição 39:* Achar um número que é o menor dos que terão as partes dadas.

  Versão atualizada: Determinar o menor número que pode ser dividido pelos números dados, ou seja, dado um conjunto $D = \{d_1, d_2, d_3, ...\}$ de divisores, encontrar o menor número $N \in \mathbf{N}$ tal que d_i divide N para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Esse número N é denominado o MMC dos elementos de D.

  Exemplo: Seja $D = \{2, 4, 5\}$ um dado conjunto de divisores. Note que 2 é divisor dos números da sequência $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...)$, 4 é divisor dos números da sequência $(4, 8, 12, 16, 20, ...)$ e 5 é divisor dos números da sequência $(5, 10, 15, 20, 25, ...)$. O menor número a ser encontrado tal que 2, 4 e 5 sejam divisores dele, simultaneamente, é o 20.

2.2.10 Teoria das proporções numéricas

A *teoria das proporções numéricas* é apresentada da proposição 4 até a 20. Antes de enunciar enunciá-las, vale ressaltar que se quatro números a, b, c e d estão em proporção, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então essa proporção pode ser representada na forma $a \div b = c \div d$, de maneira que a e d são chamados *extremos*, enquanto b e c são denominados *meios*.

- *Proposição 5:* Caso um número seja uma parte de um número, e um outro seja a mesma parte de um outro, também um e o outro juntos serão a mesma parte de um e o outro juntos, a que o um é do um.

  Versão atualizada: Se a divide b em k partes, e c divide d, também, em k partes, então $a + c$ divide $b + d$ em k partes.

  Exemplo: Note que 2 divide 10 e que 8 divide 40 em cinco partes. Logo, $2+8$ divide $10 + 40$, também, em cinco partes.

- *Proposição 8:* Caso um número seja partes de um número, as que um subtraído é de um subtraído, também o resto será as mesmas partes do resto, as que o todo é do todo.

Versão atualizada: Considerando-se dois números tais que o menor não divida o maior, se subtrairmos de cada um desses números a mesma fração proporcional a ambos os números, então a proporção entre os restos continua a mesma.

Exemplo: Consideremos 10 e 6, uma vez que 6 não é divisor de 10. Escolhendo-se a constante $k = \frac{1}{2}$, temos $10 - \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ e $6 - \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$, isto é, $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

- *Proposição 12:* Caso números, quantos quer que sejam, estejam em proporção, como um dos antecedentes estará para um dos consequentes, assim todos os antecedentes para todos os consequentes.

  Versão atualizada: Sejam $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ..., a_n, a_{n+1}, ...$ números em proporção, então é verdade que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_5}{a_6} = ... = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = ...$

  Exemplo: Considere os números em proporção $2, 3, 4, 6, 6, 9, 8, 12, ...$ Note que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = ...$

- *Proposição 13:* Caso quatro números estejam em proporção, também estarão alternadamente em proporção.

  Exemplo: Se $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, então são válidas as seguintes proporções: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ e $\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$.

- *Proposição 17:* Caso um número, depois de multiplicado por dois números, faça alguns, os produzidos deles terão a mesma razão que os que foram multiplicados.

  Exemplo: Multiplicando 5 por 6 e 5 por 8, obtemos, respectivamente, os produtos 30 e 40; daí, note que $\frac{6}{8} = \frac{30}{40}$.

Os resultados apresentados na próxima proposição são justificados pela seguinte verificação: se multiplicarmos ambos os membros da proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ pelo produto $b \cdot d$, obtemos $\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d \iff a \cdot d = b \cdot c$, que é a *Propriedade Fundamental das Proporções*, a qual nos permite afirmar que *produto dos meios é igual ao produto dos extremos*.

- *Proposição 19:* Caso quatro números estejam em proporção, o número produzido do primeiro e quarto será igual ao número produzido do segundo e terceiro; e caso o número produzido do primeiro e quarto seja igual ao do segundo e terceiro, os quatro números estarão em proporção.

  Versão atualizada: Se quatro números estão em proporção, então o produto dos *meios* é igual ao produto dos *extremos*. Por outro lado, se o produto dos *meios* é igual ao produto dos *extremos*, então esses quatro números estão em proporção.

  Exemplo: $\frac{12}{8} = \frac{9}{6}$ se, e somente se, $12 \cdot 6 = 8 \cdot 9$.

2.3 Uma imersão nos conteúdos do livro VIII

O oitavo livro, além de abordar teoremas sobre *potências quadradas*, *cúbicas* e *razões proporcionais*, apresenta teoremas relacionados às *proporções contínuas*. As *proporções contínuas*, conforme alguns historiadores matemáticos, atendem à definição de *progressão geométrica*, embora Bicudo (2009) não as descreva dessa forma. Com base nessas considerações, exibiremos, a seguir, as proposições do presente livro.

2.3.1 Números em proporções contínuas

Inicialmente, vale ressaltar que Boyer e Merzbach (2012) e Eves (2011) classificam as *proporções contínuas* como *progressões geométricas*, pelo fato de tais proporções atenderem à definição de progressão geométrica. Sobre isso, Kline (1992, p. 169) afirma: "Tais proporções contínuas satisfazem nossa definição de progressão geométrica, uma vez que nelas a razão entre cada termo e o próximo é constante". Adiante, apresentaremos alguns dos enunciados que abordam tais conteúdos.

Antes de apresentarmos as proposições, vamos definir *proporção contínua* como a que possui os *meios* ou os *extremos* iguais (BRANDÃO, 1968). As proporções $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ e $\frac{8}{4} = \frac{16}{8}$ são dois exemplos de *proporções contínuas*.

- *Proposição 1:* Caso números, em uma quantidade qualquer, estejam em proporção continuada, e os extremos deles sejam primos entre si, são os menores dos que têm a mesma razão com eles.

- *Proposição 3:* Caso números, em uma quantidade qualquer, em proporção continuada sejam os menores dos que têm a mesma razão com eles, os extremos deles são primos entre si.

  Exemplo: Considere a proporção contínua $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$. Note que seus extremos são coprimos e os menores dos que formam essa razão com o 6.

- *Proposição 6:* Caso números, em uma quantidade qualquer, estejam em proporção continuada, e o primeiro não meça o segundo, nenhum outro medirá nenhum.

  Versão atualizada: Se uma sequência de números está em proporção contínua e o primeiro número não divide o segundo, então nenhum dos outros números dividirá nenhum outro.

  Exemplo: Se considerarmos a proporção contínua $\frac{6}{9} = \frac{4}{6}$ na qual 6 não divide 9, então 4 não divide 6, nem 6 divide 4.

- *Proposição 9:* Caso dois números sejam primos entre si, e números caiam, segundo a proporção continuada, entre eles, quantos números caem, segundo a proporção continuada, entre eles, tantos também cairão, segundo a proporção continuada, entre cada um deles e uma unidade.

Versão atualizada: Se a e b são números primos entre si, e existe uma sequência $(x_1, x_2, ..., x_n)$, tal que, $(a, x_1, x_2, ..., x_n, b)$ seja uma proporção contínua, então haverá uma sequência de números $(y_1, y_2, ..., y_n)$ e $(z_1, z_2, ..., z_n)$, tal que, $(a, y_1, y_2, ..., y_n, 1)$ e $(b, z_1, z_2, ..., z_n, 1)$ formam, também, proporções contínuas.

Exemplo: Tomemos 4 e 9 coprimos e 6, tais que formem a proporção contínua $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$. Note que as sequências 4, 2, 2 e 1 e 9, 3, 3 e 1, formam, também, proporções contínuas.

É evidente o fato de que algumas dessas proposições nos remetem a outros conteúdos identificados no livro anterior, como é o caso da *proposição 9* que, além de fazer alusão às *proporções contínuas*, aborda *números primos entre si.*

2.3.2 Potências quadradas, cúbicas e suas propriedades

Há treze proposições que apresentam os *números quadrados* e os *números cúbicos* acompanhados de suas propriedades. São teoremas que detalham as relações entre os *números quadrados*, que são os resultados da multiplicação de um número por si mesmo, e os *números cúbicos*, que são os produtos de um número multiplicado por si mesmo duas vezes. A seguir, destacamos algumas dessas proposições.

- *Proposição 11:* Existe um número médio em proporção entre dois números quadrados, e o quadrado tem para o quadrado uma razão dupla da que o lado, para o lado.

  Versão atualizada: Dados dois números quadrados $a = x^2$ e $b = y^2$, existe um número médio m em proporção entre a e b, de modo que $\frac{a}{b} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$

  Exemplo: Sejam $a = 4$ e $b = 25$, de maneira que $a = x^2$ e $b = y^2$. Tomando-se $m = x \cdot y$, temos: (1) $\frac{a}{m} = \frac{x}{y}$ e (2) $\frac{m}{b} = \frac{x}{y}$, o seja, $\frac{a}{m} = \frac{m}{b} \iff m^2 = a \cdot b \iff m^2 = 4 \cdot 25 \iff m = 10$. Note que se multiplicarmos (1) e (2) membro a membro, obteremos $\frac{a}{b} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$, isto é, $\frac{4}{25} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$.

- *Proposição 14:* Caso um quadrado meça um quadrado, também o lado medirá o lado; e caso o lado meça o lado, também o quadrado medirá o quadrado.

  Versão atualizada: Se a^2 é divisor de b^2, então a é divisor de b. E, se a é divisor de b, então a^2 é divisor de b^2.

  Exemplo: O número 25 é divisor de 100 se, e somente se, 5 é divisor de 10.

- *Proposição 22:* Caso três números estejam em proporção continuada, e o primeiro seja um quadrado, também o terceiro será um quadrado.

  Versão atualizada: Se três números a, b e c estão em proporção contínua, isto é $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, e a seja um quadrado, então c também será um quadrado.

  Exemplo: Se $\frac{25}{20} = \frac{20}{x}$, então $25x = 400 \iff x = 16$.

- *Proposição 24:* Caso dois números tenham uma razão entre si, a qual um número quadrado, para um número quadrado, e o primeiro seja um quadrado, também o segundo será um quadrado.

  Versão atualizada: Se dois números a e b estão em uma razão que é igual à razão entre dois números quadrados, e a é um quadrado perfeito, então o segundo número b também será um quadrado perfeito.

  Exemplo: Consideremos os números 16 e 144, de modo que $\frac{16}{144} = \frac{1}{9}$. Por outro lado, tomando a proporção $\frac{25}{x} = \frac{1}{9}$, note que $x = 225 = 15^2$.

- *Proposição 15:* Caso um número cubo meça um número cubo, também o lado medirá o lado; e, caso o lado meça o lado, também o cubo medirá o cubo.

  Versão atualizada: Se a^3 é divisor de b^3, então a é divisor de b. E, se a é divisor de b, então a^3 é divisor de b^3.

  Exemplo: O número 8 é divisor de 512 se, e somente se, 2 é divisor de 8.

- *Proposição 23:* Caso quatro números estejam em proporção continuada, e o primeiro seja um cubo, também o quarto será um cubo.

  Versão atualizada: Sejam a, b, c e d quatro números que estão em proporção contínua, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Se a é cúbico, então d é cúbico.

  Exemplo: Consideremos o caso em que $a = 512 = 8^3$ e suponhamos $b = 64$ e $c = 4096$. Dessa maneira, $\frac{512}{64} = \frac{4096}{512} = \frac{32768}{d} \iff d = 4096 = 16^3$.

- *Proposição 25:* Caso dois números tenham uma razão entre si, a qual um número cubo, para um número cubo, e o primeiro seja um cubo, também o segundo será um cubo.

  Exemplo: Consideremos os números 64 e 1000, tais que $\frac{64}{1000} = \frac{8}{125}$. Por outro lado, tomando a proporção $\frac{512}{x} = \frac{8}{125}$, note que $x = 8000 = 20^3$.

2.3.3 Razões proporcionais

Sobre as proposições que abordam as *razões proporcionais*, identificamos cinco.

- *Proposição 5:* Os números planos têm entre si a razão composta das dos lados.

  Versão atualizada: A razão entre os produtos de dois números é composta pelas razões entre seus fatores.

  Exemplo: Sendo $20 = 4 \cdot 5$ e $30 = 3 \cdot 10$, temos $\dfrac{20}{30} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{5}{10}$.

- *Proposição 18:* Existe um número médio em proporção entre dois números planos semelhantes; e o plano tem para o plano uma razão dupla da que o lado homólogo para o lado homólogo.

  Versão atualizada: Sejam a e b dois produtos semelhantes, cada qual de dois fatores. Existe um número m, tal que, a razão entre esses números é igual ao quadrado da razão entre os seus fatores.

  Exemplo: Sejam $a = 3 \cdot 8$ e $b = 6 \cdot 16$ dois produtos semelhantes. Note, primeiramente, que existe um número $m = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{24 \cdot 96} = \sqrt{2304} = 48$, que a razão entre seus fatores é $\dfrac{3}{6} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$ e que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

- *Proposição 19:* Dois números médios em proporção caem entre dois números sólidos semelhantes; e o sólido tem para o sólido semelhante uma razão tripla da que o lado homólogo para o lado homólogo.

  Versão atualizada: Sejam m e n números que entre a e b, dois produtos semelhantes de três fatores, estão em proporção. A razão entre a e b é o cubo da razão entre seus fatores semelhantes.

  Exemplo: Sejam $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ e $b = 4 \cdot 6 \cdot 10 = 240$ dois produtos semelhantes gerados por três fatores. Note que existem dois números médios $m = 60$ e $n = 120$ em proporção com a e b, ou seja, 30, 60, 120 e 240; perceba que a razão entre seus fatores homólogos corresponde a $\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ e que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{30}{240} = \dfrac{1}{8} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$.

- *Proposição 20:* Caso um número médio em proporção caia entre dois números, os números serão planos semelhantes.

  Versão atualizada: Se existe um número médio que mantém a proporção entre dois produtos, então esses são produtos de dois fatores semelhantes.

  Exemplo: Seja 90 o número médio entre 10 e 810, de modo que $\dfrac{10}{90} = \dfrac{90}{810}$. Desse modo 10 e 810 são produtos semelhantes, cada qual de dois fatores, isto é, $10 = 1 \cdot 10$ e $810 = 9 \cdot 90$.

- *Proposição 21:* Caso dois números médios em proporção caiam entre dois números, os números serão sólidos semelhantes.

  Versão atualizada: Se existem dois números médios que mantêm a proporção entre dois produtos, então esses são produtos de três fatores semelhantes.

Exemplo: Tomando-se 12 e 24 como números médios entre 6 e 48, temos $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ e $48 = 2 \cdot 4 \cdot 6$ produtos semelhantes.

2.4 Uma imersão nos conteúdos do livro IX

Neste tópico serão apresentadas as proposições que se referem aos *números quadrados, cúbicos, compostos, primos, pares, ímpares* e *perfeitos*, além das que tratam da ideia do que hoje é conhecida como *soma dos termos de uma progressão geométrica.*

2.4.1 Proposições sobre números quadrados

- *Proposição 1:* Caso dois números planos semelhantes, tendo um multiplicado o outro, façam algum, o produzido será um quadrado.

  Exemplo: Se considerarmos os produtos semelhantes de dois fatores $3 \cdot 4 = 12$ e $9 \cdot 12 = 108$, e multiplicá-los, obteremos $12 \cdot 108 = 1296 = 36^2$.

- *Proposição 2:* Caso dois números, tendo um multiplicado o outro, façam um quadrado, são números planos semelhantes.

  Exemplo: Se multiplicarmos 3 por 48, obteremos 144, que é um quadrado. Agora, note que $3 = 1 \cdot 3$ e que $48 = 4 \cdot 12$, ou seja, 3 e 48 são produtos semelhantes de dois fatores.

2.4.2 Proposições sobre números cúbicos

- *Proposição 3:* Caso um número cubo, tendo multiplicado a si mesmo, faça algum, o produzido será um cubo.

  Exemplo: Ao multiplicarmos o número cúbico $8 = 2^3$ por ele mesmo, obtemos $64 = 4^3$.

- *Proposição 4:* Caso um número cubo, tendo multiplicado um número cubo, faça algum, o produzido será um cubo.

  Exemplo: Ao efetuarmos o produto entre $27 = 3^3$ e $125 = 5^3$, obtemos $3375 = 15^3$.

- *Proposição 5:* Caso um número cubo, tendo multiplicado algum número, faça um cubo, também o que foi multiplicado será um cubo.

  Exemplo: Se considerarmos os números cúbicos 8 e 512, de modo que $8 \cdot x = 512$, teremos $x = \dfrac{512}{8} = 64 = 4^3$.

- *Proposição 6:* Caso um número, tendo multiplicado a si mesmo, faça um cubo, também ele será um cubo.

Exemplo: Tomemos número n, tal que, $n^2 = 729 = 9^3 \Longrightarrow n = 27 = 3^3$.

2.4.3 Proposição sobre números compostos

- *Proposição 7:* Caso um número composto, tendo multiplicado algum número, faça algum, o produzido será um sólido.

  Versão atualizada: O produto entre um número composto e qualquer outro número corresponde a um produto de três fatores.

  Exemplo: Multiplicando-se o número composto 6 pelo número 5, obtemos o produto 30, que corresponde a um produto de três fatores, ou seja, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. É importante salientar que esses fatores não necessitam ser primos.

2.4.4 Teoremas sobre números em proporção contínua relacionados aos números quadrados e cúbicos

- *Proposição 8:* Caso números, quantos quer que sejam, a partir da unidade, estejam em proporção continuada, por um lado, o terceiro a partir da unidade será um quadrado, e os que deixam um no intervalo entre, e, por outro lado, o quarto, um cubo, e todos os que deixam dois no intervalo entre, enquanto o sétimo, ao mesmo tempo, um cubo e um quadrado, e todos os que deixam cinco no intervalo entre.

  Versão atualizada: Quaisquer que sejam os números começando do 1 e em proporção contínua, o terceiro número será um quadrado, o quarto será um cubo, e assim por diante. O sétimo número será tanto um cubo quanto um quadrado, e isso se repete a cada cinco números.

  Exemplo: $\frac{1}{5} = \frac{5}{25} = \frac{25}{125} = \frac{125}{625} = \frac{625}{3125} = \frac{3125}{15625} = ...$

- *Proposição 9:* Caso números, quantos quer que sejam, a partir da unidade, estejam, sucessivamente, em proporção continuada, e o depois da unidade seja um quadrado, também todos os restantes serão quadrados. E, caso o depois da unidade seja um cubo, também todos os restantes serão cubos.

  Exemplos: $\frac{1}{4} = \frac{4}{16} = \frac{16}{64} = \frac{64}{256} = \frac{256}{1024} = \frac{1024}{4096} = ...$ e $\frac{1}{8} = \frac{8}{64} = \frac{64}{512} = \frac{512}{4096} = ...$

- *Proposição 10:* Caso números, quantos quer que sejam, a partir da unidade, estejam em proporção [continuada], e o depois da unidade não seja um quadrado, nem nenhum outro será um quadrado, exceto o terceiro a partir da unidade e todos os que deixam um no intervalo[1] entre. E, caso o depois da unidade não seja um cubo,

[1] "Intervalo" não faz referência a intervalo de números reais. Aqui, o sentido consiste na posição do número na proporção.

nem nenhum outro será um cubo, exceto o quarto a partir da unidade e todos os que deixam dois no intervalo entre.

Versão atualizada: Se uma sequência de números em proporção contínua começa em 1 e o segundo número não for um quadrado perfeito, então apenas o terceiro, e os que seguem com um intervalo de um número, serão quadrados. Da mesma forma, se o segundo número não for um cubo perfeito, então apenas o quarto, e os que seguem com um intervalo de dois números, serão cubos.

Exemplo: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} = \frac{32}{64} = \frac{64}{128} = \frac{128}{256} = \frac{256}{512} = ...$

- *Proposição 11:* Caso números, quantos quer que sejam, a partir da unidade, estejam em proporção continuada, o menor mede o maior, segundo algum dos existentes realmente nos números em proporção.

  Exemplo: Considerando os números da proporção contínua $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32}...$, note que o quociente entre qualquer um deles e outro número menor (da proporção), será sempre um número da própria proporção.

2.4.5 Teoremas sobre números em proporção contínua relacionados aos números primos e compostos

- *Proposição 12:* Caso números, quantos quer que sejam, a partir da unidade, estejam em proporção continuada, por quantos números primos o último seja medido, pelos mesmos também o próximo à unidade será medido.

  Versão atualizada: Quaisquer que sejam os números começando do 1 e em proporção contínua, o último número será divisível pelos mesmos números primos que o segundo número da sequência também é divisível.

  Exemplo: Note que em $\frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{36}{216}$, o número 216 é divisível por 2 e 3, divisores primos de 6.

- *Proposição 13:* Caso números, quantos quer que sejam, a partir da unidade, estejam em proporção continuada, e o depois da unidade seja primo, o maior por nenhum [outro] será medido, além dos existentes realmente nos números em proporção.

  Versão atualizada: Quaisquer que sejam os números começando do 1 e em proporção contínua, e o segundo número for primo, o maior número só será divisível pelos números da sequência.

  Exemplo: Se dos números da proporção $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$ escolhermos o 27 (o maior), perceba que ele só é divisível por 1, 3, 9 e 27.

- *Proposição 15:* Caso três números, em proporção continuada, sejam os menores dos que têm a mesma razão com eles, dois, quaisquer que sejam, tendo sido compostos, são primos com o restante.

  Versão atualizada: Se três números estão em proporção contínua e são os menores que possuem essa mesma razão, então, se dois desses números forem compostos (não primos), eles serão primos entre si (não terão divisores comuns além do 1) em relação ao terceiro número.

  Exemplo: Os números 1, 5 e 25 estão em proporção contínua e são os menores dos que possuem essa razão, $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$. Note que 6 e 36 são compostos e são primos em relação ao número 1, ou seja, $(6, 1) = 1$ e $(36, 1) = 1$.

2.4.6 Proposições sobre números primos e primos entre si

Iniciaremos pela proposição 14, a qual, segundo Eves (2011), é equivalente ao atual Teorema Fundamental da Aritmética.

- *Proposição 14:* Caso um número seja o menor medido por números primos, será medido por nenhum outro número primo além dos que medem no princípio.

  Versão atualizada: Se um número for o menor divisível por números primos, ele só será divisível por esses mesmos números primos.

  Exemplo: Perceba que $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ é o menor número divisível pelos números primos 2, 3, 5 e 11 e que ele não é divisível por nenhum outro número primo.

- *Proposição 16:* Caso dois números sejam primos entre si, como o primeiro para o segundo, assim o segundo não estará para algum outro.

  Versão atualizada: Se dois números forem primos entre si, a relação entre o primeiro e o segundo não se repetirá com nenhum outro número.

  Exemplo: 3 e 4 são coprimos, então não existem x e y, coprimos, tais que $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$.

- *Proposição 17:* Caso números, quantos quer que sejam, estejam em proporção continuada, e os extremos deles sejam primos entre si, como o primeiro para o segundo, assim o último não estará para algum outro.

  Exemplo: Na proporção contínua $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$, a razão entre o 9 e nenhum outro não é igual à razão entre 4 e 6.

2.4.7 Infinitude dos números primos

A proposição seguinte diz respeito aos *números primos* serem infinitos. Para demonstrá-la, Euclides utilizou o método indireto intitulado *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo); curiosamente, Eves (2011, p. 175) afirma que essa prova "é considerada universalmente pelos matemáticos como um modelo de elegância matemática".

- *Proposição 20:* Os números primos são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos.

2.4.8 Relação entre números ímpares e primos

- *Proposição 31:* Caso um número ímpar seja primo com algum número, também será primo com o dobro dele.

  Exemplo: Os números 7 e 10 são primos entre si, logo os números 7 e 20 também são coprimos.

2.4.9 Operações entre números pares e ímpares

As proposições a seguir apresentam situações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre números *pares* e *ímpares*, e, para cada uma dessas proposições, apresentaremos uma generalização na respectiva versão atualizada. Nessas generalizações, os números pares serão representados por $2n_i$ e os ímpares, por $2n_j - 1$ ou, quando conveniente, por $2n_j + 1$, com $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ e $i, j \in \{1, 2, 3, ..., k, ...\}$.

- *Proposição 21:* Caso números pares, quantos quer que sejam, sejam compostos, o todo é par.

  Versão atualizada: Somando-se qualquer quantidade de números pares, o resultado sempre será um número par. Note que:

  $$2n_1 + 2n_2 + ... + 2n_k = 2(n_1 + n_2 + ... + n_k) = 2n.$$

  Exemplo: A soma $2 + 10 + 16 = 28$ é par.

- *Proposição 22:* Caso números ímpares, quantos quer que sejam, sejam compostos, e a quantidade deles seja par, o todo será par.

  Versão atualizada: Somando-se qualquer quantidade par de números ímpares, o resultado será um número par, isto é

  $$(2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + ... + (2n_{2k} - 1) \Longleftrightarrow 2(n_1 + n_2 + ... + n_{2k}) - 1 \cdot 2k$$

  $$\Longleftrightarrow 2(n_1 + n_2 + ... + n_{2k} - k) = 2n.$$

  Exemplo: A soma $3 + 7 + 11 + 39 = 60$.

- *Proposição 23:* Caso números ímpares, quantos quer que sejam, sejam compostos, e a quantidade deles seja ímpar, também o todo será ímpar.

  Versão atualizada: Somando-se qualquer quantidade ímpar de números ímpares, o resultado será um número ímpar. Com efeito,

  $$(2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + ... + (2n_{2k-1} - 1) \iff 2(n_1 + n_2 + ... + n_{2k-1}) - 1 \cdot (2k - 1)$$

  $$\iff 2(n_1 + n_2 + ... + n_{2k-1} - k) + 1 = 2n + 1.$$

  Exemplo: A soma $13 + 21 + 25$ é igual a 59, que é ímpar.

- *Proposição 24:* Caso de um número par um par seja subtraído, o restante será par.

  Versão atualizada: Subtraindo-se um número par de outro número par, o resultado será sempre um número par. Tomando $2n_2 - 2n_1$ definida em $\mathbf{N}$, isto é, $n_2 - n_1 > 0$, temos $2n_2 - 2n_1 = 2(n_2 - n_1) = 2n$.

  Exemplo: Subtraindo-se 34 de 50, o resultado obtido será 16.

- *Proposição 25:* Caso de um número par um ímpar seja subtraído, o restante será ímpar.

  Versão atualizada: Subtraindo-se um número ímpar de um número par, o resultado será sempre um número ímpar. Considerando $2n_2 - (2n_1 - 1)$ em $\mathbf{N}$, ou seja, $n_2 \geqslant n_1$, temos $2(n_2 - n_1) + 1 = 2n + 1$.

  Exemplo: Subtraindo-se 11 de 18, o resultado será 7.

- *Proposição 26:* Caso de um número ímpar um ímpar seja subtraído, o restante será par.

  Versão atualizada: Subtraindo-se um número ímpar de outro número ímpar, o resultado será um número par. Ao assumirmos $(2n_2 - 1) - (2n_1 - 1) \in \mathbf{N}$, obtemos $2n_2 - 2n_1 - 1 + 1 = 2n_2 - 2n_1 = 2(n_2 - n_1) = 2n$.

  Exemplo: Subtraindo-se 11 de 17, o resto será 6.

- *Proposição 27:* Caso de um número ímpar um par seja subtraído, o restante será ímpar.

  Versão atualizada: Subtraindo-se um número par de um número ímpar, o resultado será um número ímpar. Tomando-se $(2n_2 - 1) - (2n_1) \in \mathbf{N}$, obtém-se $2n_2 - 2n_1 - 1 = 2(n_2 - n_1) - 1 = 2n - 1$.

  Exemplo: Subtraindo-se 8 de 23, o resto obtido é 15.

- *Proposição 28:* Caso um número ímpar, tendo multiplicado um par, faça algum, o produzido será par.

Versão atualizada: Multiplicando-se um número ímpar por um número par, o resultado será um número par. O produto $(2n_1 - 1) \cdot 2n_2$ é equivalente a $4n_1n_2 - 2n_2 = 2(2n_1n_2 - n_2) = 2n$.

Exemplo: Ao multiplicarmos 3 por 4, obtemos 12 como resultado, que é par.

- *Proposição 29:* Caso um número ímpar, tendo multiplicado um número ímpar, faça algum, o produzido será ímpar.

  Versão atualizada: Multiplicando-se um número ímpar por outro número ímpar, o resultado será um número ímpar. O produto $(2n_1 - 1) \cdot (2n_2 - 1)$ é equivalente a $4n_1n_2 - 2n_1 - 2n_2 + 1 = 2(2n_1n_2 - n_1 - n_2) + 1 = 2n + 1$.

  Exemplo: Ao multiplicarmos 3 por 5, obtemos 15 como produto, que é ímpar.

A partir dos resultados das proposições acima, apresentaremos, a seguir, a tabela 2 que relaciona a paridade de dois ou três números com as suas respectivas operações e, além disso, a paridade de cada resultado obtido.

Tabela 2 – Adição, subtração e multiplicação entre números pares e ímpares

Número	**Operação**	**Número**	**Operação**	**Número**	**Resultado**
Par	$+$	Par			Par
Par	$+$	Par	$+$	Par	Par
Ímpar	$+$	Ímpar			Par
Ímpar	$+$	Ímpar	$+$	Ímpar	Ímpar
Par	$-$	Par			Par
Par	$-$	Ímpar			Ímpar
Ímpar	$-$	Ímpar			Par
Ímpar	$-$	Par			Ímpar
Par	$\times$	Par			Par
Ímpar	$\times$	Par			Par
Ímpar	$\times$	Ímpar			Ímpar

Fonte: Elaborada pelo autor.

No que concerne à divisibilidade de um número *par* por um número *ímpar*, apresentamos o seguinte resultado:

- *Proposição 30:* Caso um número ímpar meça um número par, também medirá a metade dele.

  Versão atualizada: Se um número ímpar for divisor de um número par, ele também será divisor da metade desse número par. Seja $(2n_1 - 1)$ divisor de $2n_2$, então $2n_2 = (2n_1 - 1)k$ com $k \in \mathbf{N}$. Note que k é par, pois o produto entre k e o número ímpar $(2n_1 - 1)$ é o par $2n_2$. Daí, podemos concluir que $\frac{k}{2} \in \mathbf{N}$ e, com efeito, $n_2 = (2n_1 - 1)\frac{k}{2}$, ou seja, o $(2n_1 - 1)$ divide n_2.

Exemplo: O número 7 é divisor de 42 e, também, divisor de 21.

Antes de finalizarmos a presente subseção do nosso estudo, é importante enfatizarmos o significado da palavra *díade* empregada nas proposições 32 e 34, uma vez que as demonstrações dessas duas proposições evidenciam que o seu uso descreve o número formado por um *par de unidade*, noutras palavras, *díade* se refere ao número 2.

- *Proposição 32:* Cada um dos números que são dobrados a partir de uma díade é um número par de vezes par somente.

  Versão atualizada: Se dobrarmos o número 2 sucessivas vezes, o resultado será descrito, apenas, como uma potência de base 2. Note que, ao dobrarmos n vezes o número 2, obtemos uma potência de 2, ou seja, $2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$, um número par multiplicado por outro número par, apenas.

  Exemplo: Dobrando-se o número 2 quatro vezes, obtemos $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, que corresponde a 2^5.

- *Proposição 33:* Caso um número tenha a metade ímpar, é um número par de vezes ímpar somente.

  Versão atualizada: Se um número n tem a sua metade ímpar, então n é o produto entre um número par e um número ímpar, apenas.

  Exemplo: A metade de 14 é 7, que é ímpar, logo $14 = 2 \cdot 7$.

- *Proposição 34:* Caso um número nem seja dos que são dobrados a partir de uma díade nem tenha a metade ímpar, é tanto um número par de vezes par quanto um número par de vezes ímpar.

  Versão atualizada: Se um número não for potência de base 2 e, além disso, não tenha a sua metade ímpar, então esse número tanto é um produto de dois números pares quanto é um produto de um número par com um número ímpar.

  Exemplo: O número 12 não é uma potência de 2, nem sua metade é impar; perceba que $12 = 2 \cdot 6$ e $12 = 3 \cdot 4$.

2.4.10 Ideia da soma dos termos de uma progressão geométrica

De acordo com Boyer e Merzbach (2012, p. 96), "a proposição 35 desse livro contém uma fórmula para a soma de números em progressão geométrica, expressa em termos elegantes, mas pouco usuais". Embora o nono livro não trate diretamente das *progressões geométricas*, essa proposição apresenta propriedades dos números em *proporção contínua* que são semelhantes às da *soma dos termos de uma progressão geométrica.* Vejamos como essa proposição é apresentada:

- *Proposição 35:* Caso números, quantos quer que sejam, estejam em proporção continuada, e sejam subtraídos tanto do segundo quanto do último iguais ao primeiro, como o excesso do segundo estará para o primeiro, assim o excesso do último para todos os antes dele mesmo.

  Exemplo: Considerando a proporção contínua $\frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{18}{54}$, se subtraímos o primeiro do segundo e do último, isto é, $6 - 2 = 4$ e $54 - 2 = 52$, dessa forma, ocorre o que está descrito na proposição: $\frac{4}{2} = \frac{52}{(2+6+18)} \iff \frac{4}{2} = \frac{52}{26}$.

2.4.11 Método para obter números perfeitos

Sobre essa proposição, Kline (1992, p. 172) afirma que "é um teorema famoso sobre números perfeitos" e o enuncia da seguinte forma: "se a soma dos termos da progressão geométrica é primo, o produto dessa soma vezes o último termo é um número perfeito". Entretanto, Bicudo (2009) o apresenta com as seguintes palavras:

- *Proposição 36:* Caso números, quantos quer que sejam, a partir da unidade, sejam expostos, continuadamente, na proporção duplicada, até que o que foi composto todo junto se torne primo, e o todo junto, tendo sido multiplicado pelo último, faça algum, o produzido será perfeito.

  Versão atualizada: Se os números de uma proporção contínua, iniciada pelo número 1, correspondem ao dobro do seu respectivo termo antecessor e têm como soma um número primo, então o produto entre esse primo e o último número da proporção é um número perfeito.

  Exemplo: Tomemos a proporção contínua $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, na qual a soma $1 + 2 + 4$ é igual a 7 (primo). Ao multiplicarmos o resultado dessa soma com o último termo da proporção, obtemos: $7 \cdot 4 = 28$, que é um *número perfeito*, pois a soma do seus divisores próprios $(1 + 2 + 4 + 7 + 14)$ corresponde a 28.

  Exemplo: Agora, consideremos a proporção contínua $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$, note que a soma $1+2+4+8+16 = 31$ é um número primo. O produto entre 16 e 31 corresponde a 496, que é um número perfeito, uma vez que $496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248$.

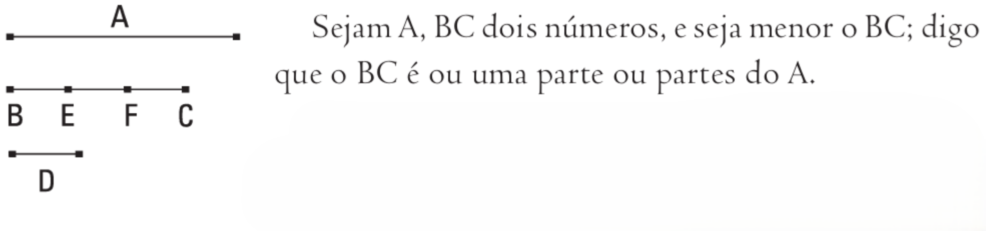
2.5 O tratamento dos números na Aritmética euclidiana

Os livros que abordam *Aritmética*[2] em *Os Elementos* conferem aos *números* um tratamento distinto do tratamento que os demais livros atribuem às *grandezas*, embora as

[2] O substantivo grego que designava *número*, *arithmós*, surgiu do verbo *árthmo*, "unir-se, conjuntar-se". Da arte de juntar os números, que os gregos sabiam fazer tão bem, surgiu a palavra *arithmetiké*. Disponível em: <https://www.dicionarioetimologico.com.br/aritmetica/>. Acesso em: 16 dez. 2024.

grandezas e os *números* sejam representados por segmentos de reta, conforme podemos observar na figura 10, que retrata o início da demonstração da quarta proposição do sétimo livro.

Figura 10 – Representação numérica por meio de segmentos de reta



Fonte: Bicudo (2009, p. 273)

Nesses três livros, é possível identificar que os números são apresentados como agrupamentos de unidades indivisíveis desde as definições introdutórias do livro VII. Acerca disso, Roque (2012, p. 189) assegura "que um número menor é uma parte de outro número maior quando pode medi-lo, ou seja, os números são considerados segmentos de reta com medida inteira". Portanto, é indispensável salientar que a construção aritmética abordada no presente estudo está consolidada nesse conceito de número.

3 A Presença da Aritmética na Base Nacional Comum Curricular

Este capítulo tem como principal objetivo apresentar um estudo da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com a finalidade de identificar os conteúdos de *Aritmética* presentes neste documento oficial da educação básica brasileira. Porém, inicialmente, buscar-se-á trazer à tona uma sucinta exposição sobre as concepções curriculares no Brasil, a formulação e a organização da BNCC, bem como esta aborda a Matemática.

3.1 Concepções curriculares no Brasil

No âmbito nacional, está sendo vivenciado um período de inúmeras discussões inerentes às mudanças fundamentais no campo da educação, principalmente as que dizem respeito à reformulação do Novo Ensino Médio. Na última década, muito se debateu sobre o Plano Nacional de Educação (PNE) e, além disso, houve a criação da BNCC pelo Ministério da Educação (MEC) após uma série de debates na esfera dos conhecimentos, competências e habilidades que se esperam dos estudantes brasileiros. Em decorrência de sua criação, a BNCC provocou, em todos os estados e municípios do Brasil, um processo de revisão curricular.

É indispensável conhecer e compreender sobre a definição e o propósito de um *currículo*, a fim de que se perceba as necessidades de seus ajustes e de mudanças. A Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (UNESCO) entende que o desenvolvimento curricular deve ser compreendido como "um ciclo abrangente de desenvolvimento, implementação, avaliação e revisão, a fim de assegurar que o currículo seja atualizado e relevante" (UNESCO-IBE, 2017, p. 36). Esse desenvolvimento precisa valorizar a contribuição das partes interessadas mediante a um processo planejado e sistemático, para que o resultado seja um currículo de qualidade.

No geral, a definição de *currículo* converge para o ideal de sociedade que se planeja gerar por meio do conhecimento adquirido. Nessa perspectiva, Moder (2019, p. 8) afirma que:

> A definição de currículo, em seu sentido amplo, nos indica a necessidade e a importância das negociações do currículo que desenhará, ao final, o ideal de sociedade que se pretende desenvolver por meio dos objetivos de aprendizagem. No limite, trata-se do conteúdo da formação dos futuros cidadãos que se coloca em discussão.

Para alcançar tal objetivo, o currículo precisa ser entendido de forma mais ampla, indo além de uma simples organização de componentes curriculares, ementas e planos de aula. Ele deve ser percebido como o produto de um processo que busca identificar as competências essenciais, os conhecimentos indispensáveis e os valores fundamentais que devem orientar as experiências educacionais, promovendo uma abordagem integral da formação coerente com o meio social no qual está inserido.

Nessa perspectiva de conceito curricular, pensar em *currículo*, a nível de Brasil, é sinônimo de encontrar desafios constantes oriundos das diferenças socioculturais presentes em cada canto do Brasil. Diante desse panorama nacional, emergiu a necessidade de haver uma nova base fundamental capaz de reger e integrar as matrizes curriculares de todas as regiões do país, ou seja, como estratégia básica que, além de ser desenvolvida e revisada periodicamente, sirva para solidificar princípios, objetivos, metas e diretrizes na comunidade escolar; sendo essa base, atualmente, a BNCC.

3.2 A formulação da BNCC

Desde a redemocratização, processo iniciado na década de 1970, o Brasil tem produzido uma série de normativas voltadas ao sistema curricular educacional. Com a promulgação da Constituição de 1988, que reforçou o modelo federativo do país, foram criadas, dentre outras, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) em 1996, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1997 e as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) em 2011. Esses documentos direcionaram, de diferentes maneiras, a formulação dos currículos dos Ensinos Fundamental e Médio, cada um com suas particularidades.

Em 2014, quando a elaboração de uma Base Nacional Comum Curricular ficou definida pelo Plano Nacional de Educação (PNE), projetava-se que a BNCC fosse de caráter obrigatório e abrangesse os currículos de todas as escolas das redes pública e privada do país. No ano seguinte, o MEC apresentou, para discussão, a proposta de uma nova base curricular, visando estabelecer nesse campo uma diretriz curricular comum para o país. Neste mesmo ano, o MEC iniciou, juntamente com um vasto grupo de profissionais da Educação Básica e Superior das mais diversas áreas, uma sucessão de estudos voltados à elaboração da primeira versão da BNCC. Posteriormente, entre os anos de 2015 e 2016, essa primeira versão foi disponibilizada para consulta pública, por meio da internet, a qual

> Segundo dados do MEC, houve mais de 12 milhões de contribuições ao texto, com a participação de cerca de 300 mil pessoas e instituições. Contou, também, com pareceres de especialistas brasileiros e estrangeiros, associações científicas e membros da comunidade acadêmica. As contribuições foram sistematizadas por profissionais da Universidade de Brasília (UnB) e da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ), e subsidiaram o MEC na elaboração da “segunda versão” (AGUIAR; DOURADO, 2018, p. 11).

Após esse período, uma segunda versão do documento da Base Nacional Comum Curricular foi divulgada e submetida à análise de, aproximadamente, nove mil educadores em eventos realizados pela União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (Undime) e pelo Conselho Nacional de Secretários de Educação (Consed). As discussões ocorreram em ambientes distinguíveis por áreas de estudos e componentes curriculares. Democraticamente, os especialistas, diante dos moderadores que apresentavam os objetivos e os conteúdos, apontavam suas opiniões de concordância ou discordância por meio de respostas objetivas e, quando necessário, indicavam as propostas de mudanças. Posteriormente, a Undime e o Consed

> elaboraram um relatório com as contribuições advindas dos seminários e o encaminharam para o Comitê Gestor do MEC. Importante observar que o Comitê Gestor foi o responsável pelas definições e diretrizes que orientaram a revisão da "segunda versão" e que deu origem à "terceira versão", encaminhada ao CNE, em abril de 2017, focalizando a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, sem a devida argumentação sobre o não atendimento legal ao excluir, dessa versão, o Ensino Médio (AGUIAR; DOURADO, 2018, p. 11).

Mediante à conclusão de todos os debates, discussões e análises sistematizadas e coordenadas, e demais trâmites necessários, em abril de 2017 o Conselho Nacional de Educação (CNE) recebeu do MEC a versão final da BNCC, e logo deu início aos encaminhamentos do processo de formação dos educadores do país e ao alinhamento dos currículos escolares a esse documento proposto como diretriz. Em 20 de dezembro de 2017, o então ministro da Educação, Mendonça Filho, homologou a Base Nacional Comum Curricular. Vale a pena ressaltar que, na ocasião, o documento homologado correspondia somente à Educação Infantil e ao Ensino Fundamental, sendo a versão do Ensino Médio homologada no dia 14 de dezembro de 2018, pelo ministro Rossieli Soares.

Há muitas críticas que giram em torno da elaboração de uma orientação curricular homogeneizadora. Uma delas diz respeito à tentativa de estabelecer *competências* e *habilidades* que sejam desenvolvidas e praticadas por todos, concepção vista por Moura (2021) como negação da pluralidade de contextos e culturas que integram o Brasil. No mesmo sentido, Aguiar e Dourado (2018, p. 56) argumentam que a BNCC

> é um documento fadado ao fracasso, tanto em virtude de sua afiliação teórica antiquada quanto em razão de resultados conhecidos de experiências internacionais, muitas já em processo de revogação, depois de evidenciada a impossibilidade de se produzir melhoria de qualidade da escola, do ensino e das aprendizagens por meio desse tipo de medida.

Para esses especialistas, a BNCC é refém de um conteudismo ultrapassado e, além disso, prevê, equivocadamente, que a base curricular única é capaz de melhorar a qualidade das aprendizagens dos estudantes de um país com dimensões continentais, submetido às avaliações de larga escala e material didático padronizado, e condicionado a um sistema de bônus e ônus sobre os gestores, docentes e estudantes. Entretanto, por se tratar da base curricular oficial educacional vigente no Brasil, a BNCC precisa ser bem interpretada para que não se transforme num documento que contribua ainda mais para a exclusão social, conforme Moretto (2020).

Entendemos que a BNCC, diante de suas limitações, precisa ser constantemente analisada, avaliada e ajustada, a fim de enriquecer as orientações dos currículos nacionais.

3.3 A estrutura da BNCC

A Base Nacional Comum Curricular está estruturada sobre fundamentos pedagógicos que convergem para as *competências* que os estudantes devem desenvolver ao longo de toda Educação Básica. Ao todo, são dez *competências* que precisam ser desenvolvidas em cada etapa da escolaridade. Além disso, a BNCC esclarece como cada uma dessas etapas organiza as aprendizagens que, por sua vez, são identificadas por meio de códigos alfanuméricos.

Na BNCC, a Educação Básica está estruturada em três etapas: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. São nessas três etapas que devem ser abordadas as dez *Competências Gerais da Educação Básica.*

Na Educação Infantil, são assegurados seis *direitos de aprendizagem e desenvolvimento*, e cinco *campos de experiências.* Os *direitos* elencados são: conviver, brincar, participar, explorar, expressar e conhecer-se. Por outro lado, nos *campos de experiências* são definidos os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento, por faixa etária, nos seis primeiros anos do estudante.

O Ensino Fundamental, segunda etapa da Educação Básica, está organizado em cinco Áreas do Conhecimento, que favorecem a comunicação entre os diferentes saberes dos componentes curriculares. As Áreas do Conhecimento dessa etapa são: Linguagens (Língua Portuguesa, Arte, Educação Física e Língua Inglesa), Matemática, Ciências da Natureza (Ciências), Ciências Humanas (Geografia e História) e Ensino Religioso. Embora cada uma dessas áreas tenha suas especificidades, todas elas se intersectam na formação dos estudantes. As *competências específicas de área*, os *componentes curriculares* e as *competências específicas de componente* são outros elementos que integram essa etapa.

No que tange a essas propostas e objetivos, a BNCC elucida que *as competências específicas de área* e as *competências específicas de componente* são estabelecidas em cada *área do conhecimento* e explicam como as *dez competências gerais* atuam nessas áreas. Nessa conjuntura, as *competências específicas* (de área e de componente) viabilizam tanto a articulação horizontal entre as *áreas* e entre os *componentes curriculares*, quanto a conexão vertical entre as fases do Ensino Fundamental: Anos Iniciais e Anos Finais.

Nos Anos Iniciais e nos Anos Finais, as *competências específicas* são segmentadas em: *unidades temáticas*, *objetos de conhecimento* (entendidos como conteúdos, conceitos e processos) e *habilidades*, conforme a figura 11. Com isso, a BNCC apresenta que um conjunto de *habilidades* sempre está relacionado a diferentes *objetos de conhecimento* que, por sua vez, estão classificados em *unidades temáticas*.

Figura 11 – Segmentos das competências específicas do Ensino Fundamental

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Notação científica	**(EF08MA01)** Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
	Potenciação e radiciação	**(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
	O princípio multiplicativo da contagem	**(EF08MA03)** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
	Porcentagens	**(EF08MA04)** Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
	Dízimas periódicas: fração geratriz	**(EF08MA05)** Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
Álgebra	Valor numérico de expressões algébricas	**(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	**(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Fonte: BRASIL (2018, p. 312-313)

A etapa do Ensino Médio está organizada em quatro Áreas do Conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Da primeira e da segunda área, respectivamente, tem-se que os componentes curriculares de Língua Portuguesa e Matemática devem ser oferecidos nas três séries dessa etapa, mas sem a indicação de seriação para as *habilidades específicas* de cada componente. No geral, sobre as áreas do conhecimento, a BNCC afirma que:

> As áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Biologia, Física e Química), Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (História, Geografia, Sociologia e Filosofia) e Matemática e suas Tecnologias (Matemática) seguem uma mesma estrutura: definição de competências específicas de área e habilidades que lhes correspondem. Na área de Linguagens e suas Tecnologias (Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa), além da apresentação das competências específicas e suas habilidades, são definidas habilidades para Língua Portuguesa (BRASIL, 2018, p. 33).

Ainda em relação à terceira etapa, é necessário salientar que "a organização das habilidades do Ensino Médio na BNCC tem como objetivo definir claramente às aprendizagens essenciais a ser garantidas aos estudantes..." (BRASIL, 2018, p. 34), para que haja um direcionamento pedagógico eficiente, que facilite a articulação entre as áreas de conhecimento, a fim de promover uma aprendizagem mais integrada e interdisciplinar, assim como nas demais etapas da Educação Básica.

3.4 A matemática na BNCC

O desenvolvimento do pensamento matemático é um processo fundamental para a formação do estudante. Esse pensamento, alinhado a pensamentos de outras áreas do conhecimento, é capaz de proporcionar uma robusta leitura de mundo e uma cosmovisão dos conhecimentos científicos, por intermédio da conversão das informações em objetos de conhecimento. Quanto a isso, a BNCC elege um conjunto de ideias fundamentais − elementos de diferentes campos que compõem a Matemática − que promovem o desenvolvimento do pensamento matemático. Essas ideias são: *equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação* e *aproximação*.

Na perspectiva da BNCC, a Matemática não está restrita somente à quantificação de fenômenos determinísticos ou a técnicas de cálculo que envolvem *número* e *grandezas*, de fato, no estudo da Matemática estão incluídos fenômenos de cunho aleatório e, além disso, esse estudo também propicia criar

> sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contexto (BRASIL, 2018, p. 265).

Independentemente de a Matemática ser uma ciência embasada em hipóteses e deduções, visto que suas demonstrações se baseiam num harmonioso sistema de axiomas e postulados, é, além disso, essencial reconhecer a importância da heurística dos experimentos na aprendizagem da Matemática. Nessa concepção, a BNCC requisita que no Ensino Fundamental os estudantes tenham suporte para relacionar observações empíricas do mundo a representações como esquemas, tabelas e figuras, e, consequentemente, associar essas representações a uma atividade que relacione conceitos, propriedades, induções e conjecturas matemáticas. Adicionalmente, espera-se que os alunos "desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações" (BRASIL, 2018, p. 265).

Sob a ótica da BNCC, é essencial que o estudante seja inserido, de forma equilibrada, em um contexto matemático significativo, que não se restrinja necessariamente ao seu cotidiano, mas que também abranja outras áreas do conhecimento e aspectos da história da Matemática. Esses elementos, por sua vez, podem ser utilizados como recursos para despertar o interesse pela aprendizagem do conhecimento matemático, promovendo a compreensão de conceitos e processos matemáticos durante o ensino.

Os campos da Matemática apresentados no Ensino Fundamental são: *Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade.* Além disso, estão distribuídos nas oito

Competências Específicas de Matemática para esta etapa do Ensino Básico. Ainda nesta etapa, a BNCC

> propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização (BRASIL, 2018, p. 268).

As unidades temáticas mencionadas são: *Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.* Cada unidade temática tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento matemático, haja vista que o letramento matemático correlaciona problemas *geométricos* com *grandezas e medidas* e *tratamento algébrico*, além de problemas de *probabilidade* com ferramentas algébricas.

Enquanto, no Ensino Fundamental, a área de Matemática prioriza a "compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos", no Ensino Médio, o foco é

> consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL, 2018, p. 471).

Na etapa do Ensino Médio, a Matemática está presente na Formação Geral Básica (FGB) e nos Itinerários Formativos (IF). Na FGB, as propostas pedagógicas devem garantir as aprendizagens essenciais da área, enquanto que nos IF, os conhecimentos matemáticos devem ser estruturados

> para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino (BRASIL, 2018, p. 477).

Quanto à Matemática e suas Tecnologias, a BNCC apresenta cinco competências que propiciam: o uso de estratégias, procedimentos e conceitos matemáticos na interpretação de situações inseridas em diversos contextos; a investigação de desafios do mundo contemporâneo; a utilização de estratégias, definições e conceitos matemáticos na interpretação e na resolução de problemas; a compreensão e a aplicação de diferentes registros matemáticos na procura de soluções e divulgação de resultados de problemas; e a criação de conjecturas a partir da observação de padrões e experimentações de diferentes recursos tecnológicos.

Ainda em relação ao Ensino Médio, o texto da BNCC flexibiliza a organização curricular das aprendizagens que são propostas no próprio documento. Semelhantemente a etapa anterior, o texto apresenta, no que concerne às *unidades temáticas*, a seguinte organização: *Números e Álgebra, Geometria e Medidas, Probabilidade e Estatística*. Pode-se observar que nesta etapa o reagrupamento sugerido reduz para três a quantidade de *unidades temáticas*, quando comparada à organização do Ensino Fundamental.

Nesta etapa, espera-se que os estudantes desenvolvam habilidades alusivas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tal finalidade, a BNCC sugere que os estudantes

> devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p. 529).

Em linhas gerais, a Base Nacional Comum Curricular defende que o conhecimento da Matemática é fundamental para todos os estudantes que frequentam a Educação Básica, tendo em vista a amplitude de sua aplicação aos diversos aspectos da contemporaneidade e considerando, também, o poder desse conhecimento para a formação de cidadãos e profissionais.

3.5 A Aritmética na BNCC

É importante salientar que a palavra *Aritmética*[1] não intitula nenhuma das *unidades temáticas* da BNCC, porém, é possível observar que os *objetos de conhecimento* e as *habilidades* que apresentam os conteúdos de *Aritmética* estão alocados majoritariamente na *unidade temática Números*, visto que alguns tópicos e aplicações de determinados conteúdos aritméticos também são identificados em outras *unidades temáticas* dos Ensinos Fundamental e Médio. Ademais, enfatizamos que o termo *Aritmética*, quando se faz alusão aos campos da Matemática, ocorre apenas duas vezes na BNCC.

Nessa perspectiva, faz-se necessário trazer à tona que a *unidade temática Números* propõe o desenvolvimento do *pensamento numérico* com base nos diversos modos de quantificação de objetos: por meio de seus atributos e pela compreensão de argumentos baseados em quantidades. Especificamente, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, espera-se que:

[1] A *Aritmética* teve seu principal marco inicial em *Os Elementos*, de Euclides, alcançou o seu apogeu nos trabalhos de Pierre de Fermat e Leonhard Euler, vindo a ser considerada um dos principais pilares da Matemática. A partir do século XIX, a *Aritmética* atingiu um nível de desenvolvimento extraordinário, graças aos trabalhos de Carl Friedrich Gauss, conforme Hefez (2022).

> os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras (BRASIL, 2018, p. 268).

Ainda nessa fase, a expectativa é que as habilidades de leitura, ordenação e escrita de números naturais e racionais, por meio da compreensão do sistema de numeração decimal, sejam desenvolvidas. Além disso, a BNCC sugere que os estudantes sejam colocados diante de atividades que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para realizá-las, indicando a necessidade da utilização dos números racionais.

Quanto aos estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental, o interesse é que mediante ao estudo da *Aritmética*:

> os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. [...] Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais. No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica (BRASIL, 2018, p. 269).

Nesse contexto, os conteúdos fundamentais de *Aritmética* propostos pela BNCC estão na *unidade temática Números*, e são aplicados e ampliados nas demais *unidades temáticas* (Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, além de Probabilidade e Estatística), até mesmo em outros *componentes curriculares*. Vale destacar, sob o olhar da BNCC, que esse panorama é fortalecido no Ensino Médio, uma vez que nessa etapa exige-se que os saberes matemáticos estejam bem fundamentados, com o intuito de assegurar a compreensão de fatos do próprio contexto cultural do estudante e das relações interculturais.

É importante compreender que, na última etapa da Educação Básica, a BNCC flexibiliza a organização curricular das aprendizagens propostas, com a finalidade de proporcionar melhor adequação do currículo mediante às necessidades de ensino. Porém, a própria BNCC sugere uma possível organização na qual *Números e Álgebra* são uma *unidade temática*. Contudo, o foco do nosso estudo nos leva a considerar apenas as *habilidades*, dessa *unidade temática*, que abordam *Aritmética*.

Posto isso, para que haja uma melhor visualização, apresentaremos na tabela 3, em forma de *temas*, os *objetos de conhecimento* que proporcionam o ensino de alguns tópicos de *Aritmética* vinculados à *unidade temática Números*, com as respectivas indicações dos anos do Ensino Fundamental (EF) em que ocorrem. Subsequentemente, de acordo com o Ensino

Médio (EM), apresentaremos as *habilidades* aritméticas da *unidade temática Números e Álgebra* e a tabela 4, que relaciona as *habilidades* listadas aos conteúdos aritméticos correspondentes, tendo em vista que, para essa etapa, a BNCC não elenca *objetos de conhecimento* (OC).

Tabela 3 – Temas aritméticos presentes na unidade temática *Números* do EF

Temas dos OC	**Ensino Fundamental (Anos)**								
	1º	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**7º**	**8º**	**9º**
Técnicas e métodos de contagem	X			X	X			X	
Sistema de numeração decimal	X	X	X	X	X	X			
Composição e decomposição dos naturais	X	X	X	X					
Reta numérica	X		X		X		X		X
Fundamentos da adição, subtração e multiplicação	X	X	X						
Conjunto dos números inteiros							X		
Conjunto dos números racionais				X	X		X		
Conjunto dos números irracionais									X
Conjunto dos números reais									X
Problemas com as quatro operações fundamentais	X	X	X	X	X				
Propriedades da adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação			X	X		X			
Estudo das frações				X		X	X		
Dízimas periódicas								X	
Potenciação e radiciação								X	X
Porcentagem					X	X	X	X	X
Paridade de um número natural						X			
Divisão euclidiana						X			
Múltiplos e divisores						X	X		
Números primos e compostos						X			

Fonte: Elaborada pelo autor.

Listagem das *habilidades* aritméticas de *Números e Álgebra*, conforme BRASIL (2018, p. 543-544):

- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

- (EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

- (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

- (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

- (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

- (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

- (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

- (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
- (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Tabela 4 – Conteúdos aritméticos presentes nas habilidades de *Números e Álgebra* do EM

Habilidades	Conteúdos
(EM13MAT101)	– Relações entre grandezas.
(EM13MAT104)	– Conceito, representação e cálculo de porcentagem.
(EM13MAT203)	– Adição, subtração, multiplicação e divisão. – Cálculo de juros.
(EM13MAT303)	– Porcentagem: aprofundamento por meio do cálculo de juros simples e compostos.
(EM13MAT304) (EM13MAT305) (EM13MAT503)	– Potenciação e suas propriedades. – Variação de grandezas. – Potência quadrada e raiz quadrada. – Matemática financeira.
(EM13MAT401)	– Proporcionalidade.
(EM13MAT402)	– Variáveis diretamente proporcionais.
(EM13MAT507)	– Operações de adição e subtração intrínsecas à definição e às propriedades dos termos de uma progressão aritmética.
(EM13MAT508)	– Operações de multiplicação e divisão inerentes ao conceito e às propriedades das progressões geométricas. – Proporcionalidade entre os termos de uma PG.
(EM13MAT510)	– Variáveis numéricas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

No que concerne aos *objetos de conhecimentos* (OC) correspondentes aos conteúdos de aritmética presentes nas demais *unidades temáticas* (UT) do Ensino Fundamental, apresentaremos, na tabela 5, a indicação dos anos dessa etapa em que os temas desses OC estão presentes. Nesta tabela, utilizaremos as seguintes abreviações: Álgebra (ALG), Geometria (GEO), Grandezas e medidas (GMD), Probabilidade e estatística (PET).

Tabela 5 – Temas aritméticos presentes nas demais unidades temáticas do EF

UT	Temas dos OC	Ensino Fundamental (Anos)								
		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
ALG	Padrões numéricos	X	X	X						

UT	**Temas dos OC**	**Ensino Fundamental (Anos)**								
		1º	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**7º**	**8º**	**9º**
ALG	Sequências recursivas	X	X	X						
GMD	Medidas de comprimento, massa, capacidade e tempo	X	X				X	X		
GMD	Sistema monetário brasileiro	X	X							
ALG	Construção de sequências repetitivas		X							
ALG	Relação de igualdade			X						
ALG	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural				X					
ALG	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero				X					
ALG	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão				X					
ALG	Propriedades da igualdade				X		X			
GMD	Medidas de área e temperatura				X		X			
PET	Variáveis numéricas				X					
ALG	Grandezas diretamente proporcionais					X				
ALG	Divisão proporcional					X	X			
GEO	Ampliação e redução de figuras					X	X			
GMD	Cálculo de área, perímetro e volume					X	X	X	X	X
PET	Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis					X	X	X		X
GEO	Relação de Euler em poliedros						X			
GMD	Medidas de ângulos						X			
GMD	Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado						X			
ALG	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais							X		X
GEO	Triângulo: condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos							X		
GEO	Cálculo das medidas de ângulos internos de polígonos regulares							X		
PET	Média e amplitude de um conjunto de dados							X		
ALG	Valor numérico de expressões algébricas								X	

UT	**Temas dos OC**	**Ensino Fundamental (Anos)**								
		1º	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**7º**	**8º**	**9º**
ALG	Sequências recursivas e não recursivas								X	
ALG	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais								X	
PET	Princípio multiplicativo da contagem								X	
PET	Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral								X	
PET	Medidas de tendência central e de dispersão								X	
ALG	Razão entre grandezas de espécies diferentes									X
GEO	Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal									X
GEO	Semelhança de triângulos: razão de semelhança									X
GEO	Relações métricas no triângulo retângulo									X
GEO	Proporcionalidade entre segmentos de retas paralelas cortadas por transversais									X

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para finalizar este capítulo, listaremos as *habilidades* das outras duas UT (Geometria e Medidas, Probabilidade e Estatística) referentes ao Ensino Médio, seguidas da tabela 6, que relaciona as *habilidades* listadas aos conteúdos de aritmética correspondentes, de acordo com BRASIL (2018, p. 545-546):

1. **Geometria e Medidas (GEM)**

    - (EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
    - (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
- (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
- (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
- (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

2. **Probabilidade e Estatística (PET)**

   - (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
   - (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
   - (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

- (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
- (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
- (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

Tabela 6 – Conteúdos aritméticos presentes nas habilidades de *GEM* e *PET* do EM

UT	Habilidades	Conteúdos
GEM	(EM13MAT103)	– Conversão entre unidades de medidas de grandezas: multiplicação e divisão. – Razão velocidade.
GEM	(EM13MAT201) (EM13MAT307) (EM13MAT309) (EM13MAT504)	– Medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade e de massa.
GEM	(EM13MAT105)	– Homotetia (proporção).
GEM	(EM13MAT308)	– Proporcionalidade: relações métricas no triângulo retângulo e lei do seno. – Potências e raízes quadradas no teorema de Pitágoras e na lei do cosseno. – Semelhança e congruência de triângulos: razão e proporção entre as medidas dos segmentos.
GEM	(EM13MAT314)	– Produto e razão entre grandezas. – Razões: velocidade, densidade demográfica, escala cartográfica etc. – Grandezas proporcionais.
PET	(EM13MAT202) (EM13MAT406)	– Quantificação de elementos informativos após a coleta de dados. – Determinação das frequências absoluta e relativa.
PET	(EM13MAT316)	– Contagem de dados. – Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada.
PET	(EM13MAT310)	– Contagem de agrupamentos. – Adição e multiplicação.
PET	(EM13MAT311) (EM13MAT312)	– Contagem de possibilidades de eventos aleatórios. – Cálculo de probabilidade: divisão entre o número de cada tipo de evento. – Multiplicação entre as probabilidades.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4 Interseção entre a Aritmética de Os Elementos e da BNCC

Este capítulo tem como principais objetivos identificar, analisar e discutir os conteúdos aritméticos presentes, simultaneamente, em *Os Elementos* e na Base Nacional Comum Curricular, com foco na verificação sistematizada do que restou da *Aritmética* euclidiana na BNCC. Como acenamos no decorrer do capítulo 3, para além dos temas explícitos de *Aritmética* (em *Números*, no EF e em *Números e Álgebra*, no EM), ela volta como ferramenta para o desenvolvimento de outras *unidades temáticas* e *habilidades*, entretanto o nosso foco é identificar, especificamente, os conteúdos que na BNCC são fundamentalmente de *Aritmética* (de *Números* no EF e no EM) e não de uma *Aritmética* enquanto ferramenta para trabalhar outros conteúdos.

4.1 Aspecto metodológico

4.1.1 Problema de pesquisa

Considerando a presença da *Aritmética* em *Os* Elementos de Euclides, a pergunta norteadora do nosso trabalho foi: *qual a interseção entre a Aritmética de Os Elementos e da Base Nacional Comum Curricular?*

4.1.2 Objetivos

4.1.2.1 Geral

Neste estudo, estabelecemos como *objetivo geral* identificar a interseção da *Aritmética* de *Os Elementos* e da Base Nacional Comum Curricular.

4.1.2.2 Específicos

Quanto aos *objetivos específicos*, nos propusemos a:

1) Pesquisar os aspectos relevantes da biografia de Euclides, com ênfase em seu contexto histórico, principais influenciadores e contribuições à matemática por meio de suas obras.

2) Identificar os conteúdos abordados em cada um dos três livros aritméticos de *Os Elementos*.

3) Examinar a Base Nacional Comum Curricular e a *Aritmética* nela presente.

4) Identificar os conteúdos fundamentalmente de *Aritmética* que constam na interseção entre *Os Elementos* e a BNCC.

4.1.3 Metodologia

No que concerne à metodologia adotada, fizemos uma pesquisa de caráter *bibliográfico* e *documental*. Essa escolha justifica-se pela afirmação de Fonseca (2002, p.32):

> A pesquisa bibliográfica utiliza fontes constituídas por material já elaborado, constituído basicamente por livros e artigos científicos localizados em bibliotecas. A pesquisa documental recorre a fontes mais diversificadas e dispersas, sem tratamento analítico, tais como: tabelas estatísticas, jornais, revistas, relatórios, documentos oficiais, cartas, filmes, fotografias, pinturas, tapeçarias, relatórios de empresas, vídeos de programas de televisão etc.

No que diz respeito ao material consultado, nos referenciamos, prioritariamente, na tradução de *Os Elementos* de Bicudo (2009) e nas obras dos seguintes autores: Boyer e Merzbach (2012), Cajori (2007), Eves (2011), Kline (1992), Pastor e Babini (1985), Roque (2012) e Struik (1992). Quanto à pesquisa documental, analisamos a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), consultamos a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (BRASIL, 1996) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998). Além disso, nos servimos de imagens disponíveis nas plataformas digitais do *Google imagens*, do *Picryl*, da *Wikimedia Commons* e da *World History Encyclopedia*.

A presente pesquisa está enquadrada numa perspectiva *qualiquantitativa* pelo fato de, ao mesmo tempo em que adotamos análise e discussões que se encaixam no campo da pesquisa qualitativa, não abdicamos de quantificar alguns dentre os aspectos que nos pareceram importantes.

4.2 A presença dos conteúdos de Aritmética em Os Elementos e na BNCC

O interesse em responder o nosso problema de pesquisa nos motivou a realizar um estudo que procurou constatar quais princípios matemáticos fundamentais da *Aritmética* estão, ao mesmo tempo, em *Os Elementos* e na Base Nacional Comum Curricular.

Buscamos obter os seguintes resultados: (i) quais e quantos conteúdos de *Aritmética* são abordados por Euclides em cada um dos livros aritméticos dos *Elementos*; (ii) quais e quantos conteúdos aritméticos da UT *Números* da BNCC ocorrem no Ensino Fundamental (EF) e no Ensino Médio (EM); (iii) quais e quantos desses conteúdos estão presentes na interseção entre a *Aritmética* em *Os Elementos* e na BNCC.

4.2.1 A distribuição dos conteúdos aritméticos em Os Elementos

Com a finalidade de visualizar os conteúdos dos três livros aritméticos de *Os Elementos*, distribuídos conforme ocorrem em cada livro, elaboramos a tabela 7, na qual cada conteúdo identificado durante a pesquisa está elencado e associado ao respectivo livro.

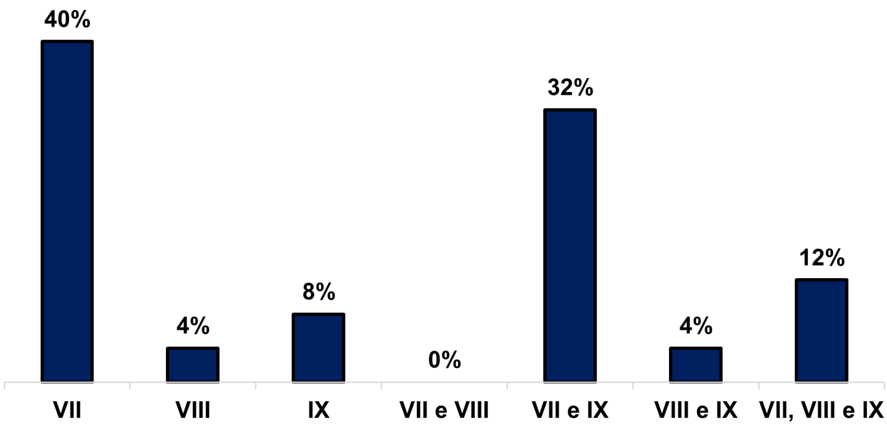
Tabela 7 – Distribuição dos conteúdos nos livros aritméticos dos *Elementos*

Conteúdos Aritméticos	**Livros Aritméticos**		
	VII	**VIII**	**IX**
Conceito de unidade	X		
Conceito de número	X		
Divisores e suas propriedades	X		
Múltiplos e suas propriedades	X		
Números pares	X		X
Números ímpares	X		X
Operações entre números pares e ímpares	X		X
Números primos	X		X
Números primos entre si (coprimos)	X		X
Números compostos	X		X
Números compostos entre si	X		
Números planos	X		
Números sólidos	X		
Números quadrados (Potências quadradas)	X	X	X
Números cúbicos (Potências cúbicas)	X	X	X
Números em proporção	X	X	X
Números perfeitos	X		X
Máximo divisor comum	X		
Mínimo múltiplo comum	X		
Propriedades das proporções	X		
Razões proporcionais		X	
Infinitude dos números primos			X
Números em proporção contínua		X	X
Ideia e soma dos termos de uma progressão geométrica	X		X
Teorema fundamental da aritmética			X

Fonte: Elaborada pelo autor.

A tabela 7 apresenta 25 itens de conteúdos aritméticos, dos quais, 40% são exclusivamente do livro VII, 4% são exclusivamente do livro VIII e 8% são exclusivamente do livro IX. Além disso, nenhum é exclusivamente dos livros VII e VIII, 32% são exclusivamente dos livros VII e IX, 4% são exclusivamente dos livros VIII e IX, e 12% são, ao mesmo tempo, dos três livros. O gráfico da figura 12 ilustra essa distribuição.

Figura 12 – Distribuição dos conteúdos aritméticos nos livros VII, VIII e IX



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2 A distribuição dos conteúdos aritméticos na BNCC

A tabela 8 apresenta a distribuição dos conteúdos de *Números* da BNCC e a indicação das etapas (Ensino Fundamental e Ensino Médio) nas quais estão presentes.

Tabela 8 – Distribuição dos conteúdos de *Números* na BNCC

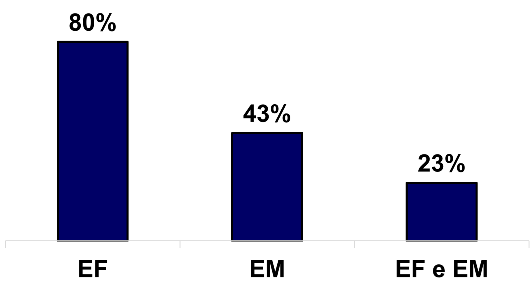
Conteúdos/Temas dos Objetos de Conhecimento	**Etapas**	
	EF	**EM**
Técnicas e métodos de contagem	X	
Sistema de numeração decimal	X	
Composição dos números naturais	X	
Fundamentos da adição, subtração e multiplicação	X	
Conjuntos numéricos	X	
Estudo da reta numérica	X	
Problemas com as quatro operações fundamentais	X	X
Propriedades da adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação	X	X
Estudo das frações	X	
Estudo das dízimas periódicas	X	

Conteúdos/Temas dos Objetos de Conhecimento	**Etapas**	
	EF	**EM**
Potenciação	X	X
Radiciação	X	X
Porcentagem	X	X
Paridade de um número natural	X	
Divisão euclidiana	X	
Múltiplos	X	
Mínimo múltiplo comum	X	
Divisores	X	
Máximo divisor comum	X	
Critérios de divisibilidade	X	
Números primos	X	
Números compostos	X	
Razão entre dois números	X	X
Proporcionalidade numérica e suas propriedades	X	X
Relação e variação entre grandezas		X
Produto e razão entre grandezas		X
Proporcionalidade entre grandezas		X
Juros simples e compostos (Matemática financeira)		X
Progressão aritmética		X
Progressão geométrica		X

Fonte: Elaborada pelo autor.

O gráfico da figura 13 indica que, dos 30 conteúdos aritméticos listados na tabela 8, o EF aborda 80% e o EM, cerca de 43%. Além disso, em torno de 23% desses conteúdos são abordados, simultaneamente, no EF e no EM. Destacamos que no EM tais conteúdos são identificados nas descrições das *habilidades* aritméticas, uma vez que nessa etapa não há indicação de *objetos de conhecimento*.

Figura 13 – Distribuição dos conteúdos de *Números* no EF e no EM da BNCC



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.3 A Aritmética em Os Elementos e na BNCC

Na tabela da figura 14 foram elencados os conteúdos aritméticos da *unidade temática* (UT) *Números* da BNCC e os conteúdos de *Aritmética* dos *Elementos*. As *interseções* foram categorizadas da seguinte maneira: *integral* e *parcial*. Entretanto, quando não identificamos *interseções*, categorizamos da seguinte forma: *presente somente nos Elementos* e *presente somente na BNCC*. Para uma melhor compreensão, consideramos:

- **Integral**: Indica a *interseção* na qual as *habilidades* da BNCC e as *definições/proposições* apresentadas por Euclides se correspondem integralmente.
- **Parcial**: Indica a *interseção* na qual as *habilidades* da BNCC e as *definições/proposições* apresentadas por Euclides se correspondem parcialmente.
- **Presente somente nos Elementos**: Indica o conteúdo que aparece nos *Elementos*, contudo, sem abordagem na BNCC.
- **Presente somente na BNCC**: Indica os conteúdos aritméticos que constam na BNCC, mas, sem abordagem nos *Elementos*.

No que diz respeito aos *critérios* que serão utilizados na análise da tabela da figura 14, diremos que um conteúdo da BNCC está na **interseção**

- **apenas integral**: se ele corresponde a um ou mais conteúdos de *Os Elementos* somente de maneira *integral*.
- **apenas parcial**: se ele corresponde a um ou mais conteúdos de *Os Elementos* somente de maneira *parcial*.
- **integral e parcial**: se ele corresponde a mais de um conteúdo de *Os Elementos*, sendo pelo menos um de maneira *integral* e pelo menos um de maneira *parcial*.

Analogamente, diremos que um conteúdo de *Os Elementos* está na **interseção**

- **apenas integral**: se ele corresponde a um ou mais conteúdos da BNCC somente de maneira *integral*.
- **apenas parcial**: se ele corresponde a um ou mais conteúdos da BNCC somente de maneira *parcial*.
- **integral e parcial**: se ele corresponde a mais de um conteúdo da BNCC, sendo pelo menos um de maneira *integral* e pelo menos um de maneira *parcial*.

Quanto às abreviações utilizadas, entendam-se da seguinte maneira: *integral* (I), *parcial* (P), *presente somente nos Elementos* (PE) e *presente somente na BNCC* (PB).

Os conteúdos indicados foram identificados conforme as suas respectivas nomenclaturas nos *Elementos* e na BNCC. A título de exemplo, utilizamos "números pares" e "números ímpares", de acordo com os *Elementos*, e "paridade de um número natural", conforme a BNCC, para fazer alusão ao mesmo conteúdo.

Figura 14 – Interseção entre os conteúdos aritméticos dos *Elementos* e da BNCC

	Conteúdos da unidade temática Números da BNCC																
Conteúdos aritméticos presentes nos livros VII, VIII e IX dos Elementos	Técnicas e métodos de contagem	Sistema de numeração decimal	Composição e decomposição dos naturais	Fundamentos da adição, subtração e multiplicação	Conjuntos numéricos	Estudo da reta numérica	Problemas com as quatro operações	Propriedades das 4 operações e da potenciação	Estudo das frações	Estudo das dízimas periódicas	Potenciação	Radiciação	Porcentagem	Paridade de um número natural	Divisão euclidiana	Múltiplos de um número natural	Mínimo múltiplo comum
Conceito de unidade		I	I														
Conceito de número		I	I		I												
Divisores e suas propriedades							P	P	P	P				I	I		
Múltiplos e suas propriedades				P			P	P	P		P					I	P
Números pares														I	I		
Números ímpares														I	P		
Operações com números pares e ímpares											P			I			
Números primos															P	I	
Números primos entre si									P						P		
Números compostos															P	I	
Números compostos entre si									P						P		
Números planos				P												I	
Números sólidos				P												I	
Números quadrados				P				I			I	P				I	
Números cúbicos				P				I			I	P				I	
Números perfeitos																	
Máximo divisor comum															P		
Mínimo múltiplo comum																P	I
Números em proporção									P								
Números em proporção contínua																	
Propriedades das proporções																	
Razões proporcionais									P							P	
Infinitude dos números primos																	
Ideia de uma progressão geométrica																	
Teorema fundamental da aritmética															P	P	P
Presente somente na BNCC	PB					PB							PB				

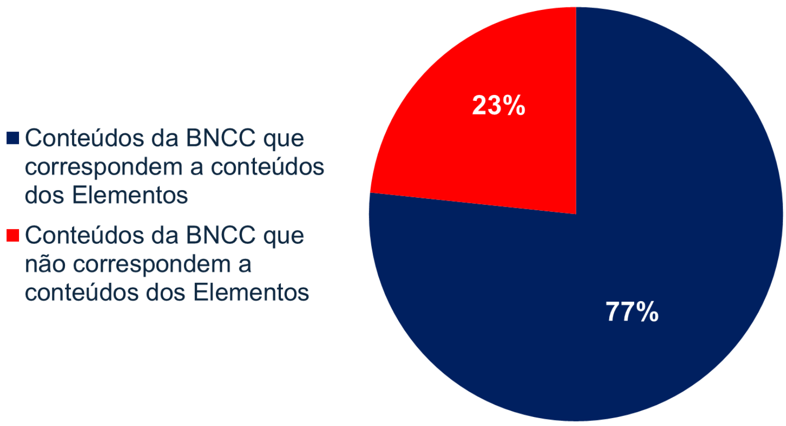
Conteúdos aritméticos presentes nos livros VII, VIII e IX dos Elementos	Conteúdos da unidade temática Números da BNCC: Divisores de um número natural	Máximo divisor comum	Critérios de divisibilidade	Números primos	Razão entre dois números	Proporcionalidade numérica e suas propriedades	Números compostos	Relação e variação entre grandezas	Produto e razão entre grandezas	Proporcionalidade entre grandezas	Juros simples e compostos	Progressão aritmética	Progressão geométrica	Presente somente nos Elementos
Conceito de unidade														
Conceito de número														
Divisores e suas propriedades	I	P	P	P			P							
Múltiplos e suas propriedades			P	P			P							
Números pares	I		P											
Números ímpares	I													
Operações com números pares e ímpares														
Números primos	I			I										
Números primos entre si														
Números compostos	I						I							
Números compostos entre si														
Números planos	I													
Números sólidos	I													
Números quadrados	I													
Números cúbicos	I													
Números perfeitos														PE
Máximo divisor comum	P	I												
Mínimo múltiplo comum														
Números em proporção						I				P				
Números em proporção contínua														PE
Propriedades das proporções						I								
Razões proporcionais					I									
Infinitude dos números primos														PE
Ideia de uma progressão geométrica													P	
Teorema fundamental da aritmética	P	P	P	I			I							
Presente somente na BNCC								PB	PB		PB	PB		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Quanto à interpretação dos dados da tabela da figura 14, elaboramos os próximos cinco gráficos a fim de observar detalhes da *interseção* entre os conteúdos aritméticos de *Os Elementos* e os da UT *Números* BNCC.

Os gráficos das figuras 15 e 16 referem-se aos conteúdos aritméticos da BNCC e o quanto eles estão ou não presentes em *Os Elementos*, considerando as categorias de interseção: *integral* e *parcial*.

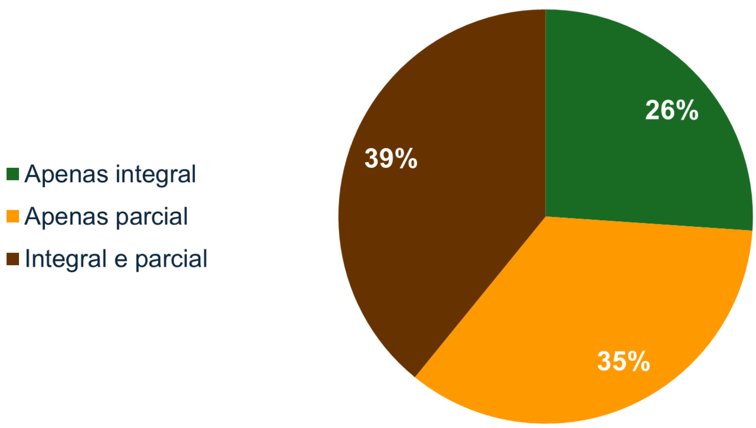
Figura 15 – Gráfico I: conteúdos da BNCC em relação aos Elementos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dos 30 conteúdos da BNCC, observamos que cerca de 77% aparecem em *Os Elementos*, ao passo que cerca de 23% não ocorrem em *Os Elementos*.

Figura 16 – Gráfico II: conteúdos da BNCC em relação aos Elementos

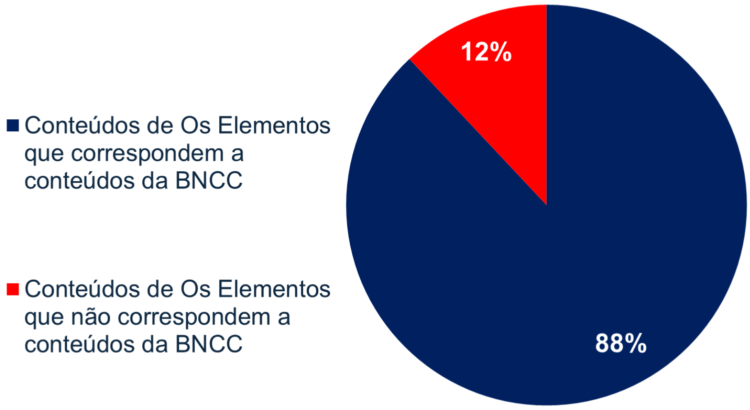


Fonte: Elaborada pelo autor.

Dos 23 conteúdos da BNCC que aparecem e os *Elementos*, observamos que cerca de 26% apresentam *interseção* apenas *integral*, cerca de 35% apenas *parcial* e cerca de 39%, *integral* e *parcial*.

Os gráficos das figuras 17 e 18 referem-se aos conteúdos aritméticos de *Os Elementos* e o quanto eles estão ou não presentes na BNCC, considerando as categorias de interseção: *integral* e *parcial*.

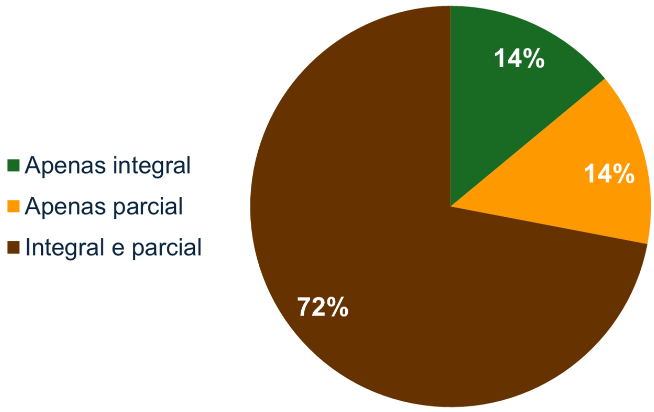
Figura 17 – Gráfico III: conteúdos de Os Elementos em relação à BNCC



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dos 25 conteúdos de *Os Elementos*, observamos que 88% ocorrem na BNCC, enquanto que 12% não estão presentes na BNCC.

Figura 18 – Gráfico IV: conteúdos de Os Elementos em relação à BNCC



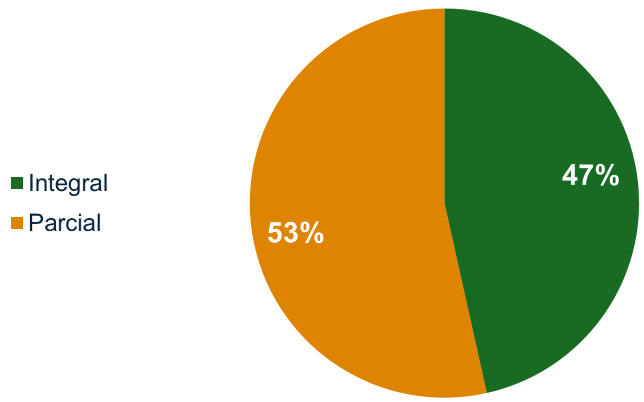
Fonte: Elaborada pelo autor.

Dos 22 conteúdos de *Os Elementos* que ocorrem na BNCC, observamos que 14% apresentam *interseção* apenas *integral*, 14% apenas *parcial* e 72%, *integral* e *parcial*.

O gráfico da figura 19 refere-se ao percentual de interseções *integrais* e *parciais* em relação à quantidade total de *interseções* entre os conteúdos aritméticos presentes em *Os Elementos* e na BNCC.

Ao todo, na figura 14, identificamos 86 *interseções* entre *integrais* e *parciais*. Desse total, 47% ocorrem *integralmente* e 53%, *parcialmente*, conforme ilustrado na figura 19:

Figura 19 – Gráfico V: Interseções integrais e parciais



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3 Tópicos aritméticos da BNCC ausentes em Os Elementos

Verificamos que dos conteúdos abordados na UT *Números* da BNCC, 7 não estão presentes entre os conteúdos dos livros aritméticos dos *Elementos*. Isso não se dá por uma limitação de *Os Elementos*, mas por conta do desenvolvimento da *história da matemática*. De fato, os tópicos ausentes não estavam efetivamente criados ou amadurecidos na Matemática grega.

Esses conteúdos são os seguintes: *Porcentagem, Juros (simples e composto), Relação e Variação entre Grandezas, Produto e Razão entre Grandezas, Estudo da Reta Numérica, Métodos de Contagem* e *Progressão Aritmética*.

4.3.1 Ausência da Porcentagem

No que diz respeito à *Porcentagem*, constatamos que seu estudo se deu num período posterior. Evidencia-se que durante a Idade Média ocorreu uma admissão gradual a título de maiores quantias de dinheiro, e isso levou ao uso do *100* como base computacional. Comumente, alguns manuscritos italianos do século XV apresentam registros que envolvem expressões como: *20 p 100*, *X p cento* e *VI p c°*, para representar o que, atualmente, denotamos por 20%, 10% e 6%, respectivamente. Antes mesmo de a *fração decimal* ser estabelecida, havia a sua necessidade nos cálculos que envolviam *décimos*, *vigésimos* e *centésimos*, a qual motivou a origem ao símbolo %. A partir do século XVI, a *Aritmética Comercial* passou a fazer uso considerável de porcentagens vinculado aos cálculos de juros, lucros e perdas, tal como a *Aritmética Financeira* até os dias atuais (SMITH, 1925).

4.3.2 Ausência dos Juros

No que concerne à ausência da abordagem sobre *Juros* na *Aritmética* de *Os Elementos*, enfatizamos que o estudo dos *Juros* está ligado, diretamente, às cobranças de remuneração sobre pagamentos de dívidas ou empréstimos, câmbios e emissão de títulos, uma prática que se expandiu em feiras e núcleos do período *feudal* e era realizada pelos denominados *cambistas* (BERTOLI JÚNIOR, 2018).

4.3.3 Ausência do estudo das Grandezas

Quanto aos conteúdos *Relação, Variação, Produto e Razão entre Grandezas*, observamos que são apresentados no quinto livro dos *Elementos*, o qual não faz parte do conjunto dos livros aritméticos e, consequentemente, não foi analisado neste estudo.

4.3.4 Ausência da Reta Numérica

No que se refere à *Reta Numérica*, esta surge na matemática alguns séculos depois da elaboração de *Os Elementos* (AMADEO, 2013).

4.3.5 Ausência da Progressão Aritmética

No que tange à ideia de *Progressão Aritmética*, não se trata de um conteúdo com origem após a elaboração de *Os Elementos*, pois, mesmo não havendo precisão sobre os primeiros povos que usaram tal conceito, há indícios de que ocorreu no Egito há cerca de 5 mil anos, quando se estabeleceram padrões característicos do nível das águas do Rio Nilo. Além disso, os registros nos manuscritos do papiro de Rhind (1650 a.C.) deixam evidências de que os egípcios dominavam esse conceito, entretanto, o seu desenvolvimento, conforme é apresentado atualmente, se deu após a elaboração de *Os Elementos* (MASCARENHAS, 2024).

4.3.6 Ausência dos Métodos de Contagem

Relativamente aos *Métodos de Contagem* (permutação, arranjo, combinação etc.), em consonância com às *habilidades* de *Números* da BNCC, não foram abordados nos livros aritméticos, mesmo tendo a origem dos seus estudos atribuída a Arquimedes (MORGADO et al., 2006), embora *contar* remonta a uma antiga prática da humanidade.

4.4 Fragilidades na BNCC em relação à supressão de alguns tópicos aritméticos de Os Elementos

Considerando, ao longo da *história da matemática*, a importância e o desdobramento de alguns conteúdos fundamentalmente aritméticos de *Os Elementos* não identificados na BNCC, percebemos que tal supressão acarretou o empobrecimento na perspectiva da formação matemática dos alunos. Destacamos as supressões dos seguintes conteúdos: *Números Perfeitos, Números em Proporção Contínua* e *Infinitude dos Números Primos*, em virtude de nos *objetos de conhecimento* e nas *habilidades* de *Números* da BNCC não serem feitas alusões a estes conteúdos.

4.4.1 A importância dos Números Perfeitos

Em consonância com Hefez (2022), a definição de *Números Perfeitos* está embasada no conceito de *divisores*, e, ao mesmo tempo, representa um desdobramento do estudo dos *divisores de um número natural*. Destacamos que os *Números Perfeitos* foram objetos de estudo de diversos matemáticos – dentre eles: Nicomachus de Gerasa (60-120), Marin Mersenne (1588-1648) e Leonhard Euler (1707-1783) – e proporcionam uma conexão entre a Matemática elementar e os conceitos aritméticos mais avançados. Estudando esse tema, os alunos poderiam fortalecer as suas habilidades aritméticas, desenvolver o pensamento abstrato e a curiosidade científica, que são competências valorizadas pela BNCC no eixo de resolução de problemas. Atualmente, tal conteúdo aparece em avaliações de vestibulares e concursos, conforme mostra a figura 20.

Figura 20 – Questão do vestibular da PUC-SP e do concurso CRBio - 6ª Região

Questão 46

Um número é chamado "perfeito" se ele for igual à soma de seus divisores, excluindo ele mesmo.

Se $S = 2^n - 1$ é um número primo, então o número $P=2^{n-1}.S$ será um número "perfeito".

Fonte: A Magia dos Números/ Paul Karlson. (Adaptado)

• Sabendo que o número 496 é um número "perfeito", os valores de n e S são, respectivamente

A) 5 e 31.
B) 5 e 29.
C) 3 e 29.
D) 3 e 31.

QUESTÃO 21

Um número será dito perfeito se a metade da soma de seus divisores naturais for igual ao próprio número. Considerando essa informação, assinale a alternativa que apresenta um número perfeito.

(A) 124
(B) 248
(C) 496
(D) 992
(E) 1.984

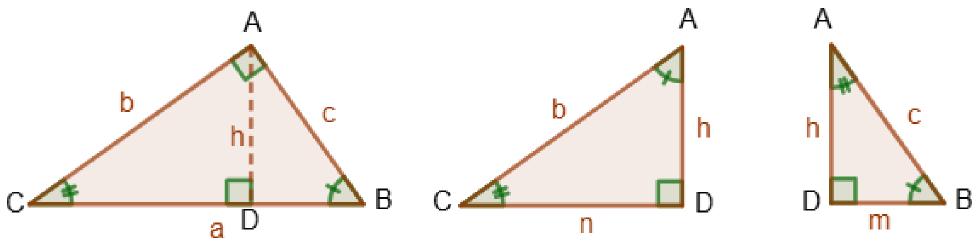
Fontes: PUC-SP (Q.46 - Inverno de 2017) e Instituto Quadrix (Q.21 - 2021)

4.4.2 A importância dos Números em Proporção Contínua

Considerando a relevante abordagem euclidiana sobre os *Números em Proporção Contínua* e as consequências de suas propriedades, entendemos que a sua inserção na BNCC é de fundamental importância, pois os conceitos relacionados a esse conteúdo enriquecem, com as suas peculiaridades, o estudo das *Proporções* e embasam outros *objetos de conhecimento* e *habilidades* matemáticas. O estudo das *Proporções Contínuas* proporciona aos estudantes a oportunidade de assimilar conceitos básicos da *Aritmética* que serão resgatados mediante ao estudo da *Média Geométrica*, *Regras de Sociedade* e das *Progressões Geométricas*, por exemplo. Além disso, as *Proporções Contínuas* embasam aplicações sobre os *Triângulos Semelhantes*, os *Polígonos Áureos* e a *Biologia*.

Um exemplo da *Geometria* relacionado a esse conteúdo diz respeito a três relações métricas no triângulo retângulo. Vamos considerar o triângulo ABC, retângulo em A, de modo que o segmento AD seja a altura relativa à hipotenusa BC, conforme a figura 21.

Figura 21 – Triângulos retângulo ABC, DAC e DBA



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que os triângulos ABC, DAC e DBA são semelhantes pelo critério *ângulo, ângulo, ângulo*. Desse fato, obtemos:

1) $\triangle DAC \sim \triangle DBA$:

$$\frac{n}{h} = \frac{h}{m} \iff h^2 = m \cdot n$$

2) $\triangle ABC \sim \triangle DAC$:

$$\frac{b}{n} = \frac{a}{b} \iff b^2 = a \cdot n$$

3) $\triangle ABC \sim \triangle DBA$:

$$\frac{c}{m} = \frac{a}{c} \iff c^2 = a \cdot m$$

Verificamos que as triplas numéricas das sequências $(n,\ h,\ m)$, $(a,\ b,\ n)$ e $(a,\ c,\ m)$ estão em *proporção contínua*. Além disso, em 1) a medida h é igual à média geométrica das medidas das projeções dos catetos AB e AC sobre a hipotenusa BC; em 2) a medida b é igual à média geométrica das medidas da hipotenusa BC e da projeção do cateto AC sobre a hipotenusa BC; em 3), análogo ao item anterior.

Outra aplicação bastante relevante desse conteúdo na *Geometria* é a *Proporção Áurea*, pois esta, por sua vez, é definida por meio da *proporção contínua* $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$, sendo a e b medidas dos comprimentos de dois segmentos de reta.

Além disso, trata-se de um conteúdo que ocorre em questões de provas de concursos, conforme mostra a figura 22. Nesta questão, é evidente a necessidade de o candidato conhecer o conceito de *proporção contínua*.

Figura 22 – Questão do concurso da Prefeitura Municipal de Rio Claro - SP

12. Em uma proporção contínua, a terceira proporcional dos números 1 e 5 é igual a

(A) 15.
(B) 20.
(C) 25.
(D) 30.
(E) 35.

Fonte: <https://arq.pciconcursos.com.br/provas/13104966/dc9f569f9e43/prova7.pdf>

4.4.3 A importância da Infinitude dos Números Primos

Diversas aplicações podem ser extraídas do que se sabe sobre o conjunto dos *Números Primos*. Além do mais, sua *infinidade* foi demonstrada por Euclides através do método matemático de *redução ao absurdo*. Atualmente, graças ao grande desenvolvimento tecnológico e digital, computadores dotados de um processamento super acelerado têm facilitado a descoberta de novos *números primos*. Vale ressaltar que a *Infinitude dos Números Primos* é condição primária e essencial para o desenvolvimento de sistemas de algoritmo de *criptografia* com maior segurança, como é o caso do algoritmo de chave pública mais usado no mundo, o RSA.

Considerando que a BNCC, no que concerne "a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e valores", sugere o uso de tecnologias digitais e algoritmos aliados ao pensamento computacional, "compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação" (BRASIL, 2018, p. 474), é imprescindível correlacionar essa orientação ao estudo da *Infinitude dos Números Primos* com a inserção de *habilidades* adequadas na UT *Números*.

Conclusão

Diante das análises realizadas neste trabalho, podemos observar que a interseção entre a *Aritmética* em *Os Elementos* de Euclides e na *unidade temática Números* da Base Nacional Comum Curricular apresentou aspectos positivos e algumas fragilidades.

Durante o estudo, constatamos que dos 30 conteúdos da BNCC, 23 aparecem em *Os Elementos*, o que representa cerca de 77% do total. Desses 23 conteúdos que aparecem em *Os Elementos*, observamos que cerca de 26% estão na *interseção* apenas *integral*, cerca de 35% na *interseção* apenas *parcial* e cerca de 39%, na *integral* e *parcial*. Existem, na BNCC, 7 conteúdos aritméticos que não estão em *Os Elementos*, o que representa cerca de 23% do total. Isso se deve ao fato de que no período de sua elaboração, *Os Elementos* sistematizaram toda a Matemática grega anterior ao século III a.C., e esses sete conteúdos da BNCC, que são de *Aritmética*, não estavam devidamente presentes no desenvolvimento da Matemática na época de Euclides.

Dos 25 conteúdos presentes em *Os Elementos*, 88% estão na BNCC, o que representa um total de 22 conteúdos. Desses 22 conteúdos, observamos que 14% estão na *interseção* apenas *integral*, outros 14% na *interseção* apenas *parcial* e 72%, na *integral* e *parcial*. Há, em *Os Elementos*, 3 conteúdos aritméticos que não estão presentes na BNCC, o que representa 12% do total. A supressão desses conteúdos acarretou um empobrecimento expressivo no que se refere à construção dos currículos de formação básica dos estudantes.

Dos materiais estudados, entendemos que os conteúdos de *Os Elementos* que não aparecem na BNCC revelam uma fragilidade desse documento oficial e poderiam ser trabalhados em espaços alternativos: em conversas e atividades de clubes da matemática, em experimentos no laboratório de ensino matemático, em minicursos preparatórios para as olimpíadas de matemática, em competições lúdicas, em gincanas e feiras da matemática, dentre outros. Dessa forma, os estudantes teriam contato com tais conteúdos ainda no Ensino Básico.

Devido à importância dos conteúdos *Números Perfeitos*, *Números em Proporção Contínua* e *Infinitude dos Números Primos*, evidenciada nos tópicos 4.4.1, 4.4.2 e 4.4.3, e como desdobramento da presente pesquisa, propomos a inserção desses conteúdos na BNCC em uma eventual revisão desse documento, a fim de propiciar, aos estudantes, novas experiências de aprendizagem. Em relação às ausências dos conteúdos supracitados, apresentamos, para esta eventual ampliação da BNCC, uma proposta de *objetos de conhecimento* (OC) e *habilidades* da *unidade temática Números*, para o Ensino Fundamental, conforme descrita na tabela 9.

Os códigos identificadores das *habilidades* propostas dão continuidade aos códigos que já constam, por Ano, na BNCC, ou seja, como o último código de Matemática do 6º ano é (EF06MA34), então o primeiro código da *habilidade* proposta que elaboramos é (EF06MA35), ocorrendo nos demais anos de maneira análoga.

Tabela 9 – Proposta de OC e habilidades visando uma ampliação da UT *Números*

Ano	**Objetos de conhecimento**	**Habilidades**
6º	Números perfeitos: relação com os seus divisores próprios e identificação	(EF06MA35) Identificar números perfeitos por meio da soma de seus divisores próprios.
7º	Números perfeitos: identificação por meio de suas decomposições em fatores primos	(EF07MA38) Identificar números perfeitos aplicando a fórmula da soma de todos os divisores de um número natural $n \geq 2$ em função da decomposição desse número natural em fatores primos.
7º	Números em proporção contínua	(EF07MA39) Reconhecer números em proporção contínua, analisando a igualdade entre razões. (EF07MA40) Relacionar proporção contínua à média geométrica. (EF07MA41) Resolver problemas envolvendo números em proporção contínua e média geométrica.
8º	Números em proporção contínua	(EF08MA28) Reconhecer números em proporção contínua, analisando a igualdade entre razões consecutivas. (EF08MA29) Relacionar os números em proporção contínua a outros conceitos: proporção áurea, semelhança de triângulos e termos de uma progressão geométrica.
7º	Infinitude dos números primos	(EF07MA41) Reconhecer a potencialidade das novas tecnologias digitais mediante à infinitude dos números primos e suas implicações na evolução dos algoritmos de criptografia, como o RSA. (EF07MA42) Executar os processos de codificação e de decodificação de mensagem, usando o algoritmo RSA. (EF07MA43) Resolver e elaborar problemas de codificação e decodificação RSA.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Apresentaremos, no apêndice A, uma outra contribuição da presente pesquisa, a qual se refere a cinco propostas de sequências didáticas elaboradas com base nas informações das inserções descritas na tabela acima, cuja finalidade é orientar e subsidiar os professores no desenvolvimento desses novos *objetos de conhecimento* e *habilidades* em turmas do Ensino Fundamental.

Com essa pesquisa, esperamos contribuir, expressivamente, para a ampliação e diversificação dos conteúdos aritméticos presentes na BNCC, com foco na *Aritmética* abordada nos livros VII, VIII e IX de *Os Elementos* de Euclides, além de propiciar novos avanços no âmbito do Ensino de Matemática na Educação Básica.

Referências

AGUIAR, M. A. d. S.; DOURADO, L. F. A bncc na contramão do pne 2014-2024: avaliação e perspectivas. *Recife: Anpae*, p. 28–33, 2018.

AMADEO, M. S. *Desenvolvimento da noção de Reta Numérica e seus contextos de 1708 a 1829*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2013. Disponível em: <https://www.academia.edu/37650062/Desenvolvimento_da_no%C3%A7%C3%A3o_de_reta_num%C3%A9rica_e_seus_contextos_de_1708_a_1829>. Acesso em: 10 fev. 2025.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. São Paulo: Editora Blucher, 2010.

BERTOLI JÚNIOR, J. *Juros por dentro e a matemática financeira no ensino médio*. Dissertação (Dissertação de Mestrado - PROFMAT) — Universidade Federal do Espírito Santos, Vitória, Brasil, 2018. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 10 fev. 2025.

BICUDO, I. *Os elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BORGES FILHO, F. *O desenho e o canteiro no Renascimento Medieval (séculos XII e XIII): indicativos da formação dos arquitetos mestres construtores*. Tese (Doutorado) — (Doutorado em Estruturas Ambientais Urbanas) - Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.16.2005.tde-13102005-115856>. Acesso em: 24 jul. 2024.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. São Paulo: Editora Blucher, 2012. 87 p.

BRANDÃO, M. Matemática conceituação moderna, 7ª série. *São Paulo: Editora*, 1968.

BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional*. Brasília, DF: Diário Oficial da União: seção 1, 1996. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 1 dez. 2024.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2024.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 6 dez. 2024.

CAJORI, F. *Uma história da matemática*. Ciência Moderna, 2007. E-book. Disponível em: <https://www.gutenberg.org/files/31061/31061-pdf.pdf>. Acesso em: 5 jun. 2024.

CULTURA, B. E. di Informazione e. *Wikimedia Commons*. 2022. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclides_%E2%80%93_La_prospettiua_di_Euclide,_1573_%E2%80%93_BEIC_4254401.jpg>. Acesso em: 21 jul. 2024.

DANGERFIELD, J. et al. *O livro da matemática*. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FONSECA, J. J. S. da. *Apostila de metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: João José Saraiva da Fonseca, 2002.

HEFEZ, A. *Aritmética*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

KLINE, M. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

MASCARENHAS, L. C. *Progressão Aritmética e Progressão Geométrica: Uma Sequência Didática Baseada na Geometria Fractal*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, Brasil, 2024. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 10 fev. 2025.

MODER, M. Estudo sobre concepções curriculares no brasil. UNESCO: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organisation, 2019. EBook, disponível online. Disponível em: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000367818>. Acesso em: 4 dez. 2024.

MORETTO, M. *A Base Nacional Comum Curricular: discussões sobre a nova prescrição curricular*. Jundiaí: Paco e Littera, 2020.

MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade, 10a. edição*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MOURA, J. F. de. *A BNCC no fazer docente: Propostas de trabalho para o ensino de matemática da Educação Infantil ao Ensino Fundamental*. Jundiaí: Paco e Littera, 2021. v. 11.

NASCIMENTO, M. C. do; FEITOSA, H. de A. Elementos da teoria dos números. *UNESP*, p. 1–137, 2013.

PASTOR, J. R.; BABINI, J. *Historia de la Matemática Vol. 1*. Barcelona: Gedisa Editorial, 1985.

PATERLINI, R. R.; FURUYA, Y. K. S. A escola de atenas, de rafael sanzio. *Hipertexto Pitágoras*, 2002. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/hp/hp902/hp902001/hp902001.html>. Acesso em: 21 jul. 2024.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SMITH, D. E. *História da Matemática - Tópicos Especiais da Matemática Elementar, Volume II*. New York: Dover Publications, 1925.

STRUIK, D. J. *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Editora Ciência Aberta - Gradiva, 1992.

UNESCO-IBE. *Glossário de terminologia curricular*. Brasília: UNESCO; Genebra: UNESCO-IBE: UNESCO, 2017. Disponível em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002230/223059por.pdf>. Acesso em: 6 dez. 2024.

APÊNDICE A – Propostas de sequências didáticas

A.0.1 Sequência didática I

Público-alvo: Estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental.

Quantidade de aula e tempo previstos: 1 (uma) aula/50 minutos

Objeto de conhecimento: Números perfeitos: definição, propriedades e relação com números primos.

Habilidade: (EF06MA35) Identificar números perfeitos por meio da soma de seus divisores próprios.

Objetivos:

- Identificar os divisores próprios de números e verificar a soma desses divisores.
- Explicar o que são números perfeitos, destacando a relação entre o número e a soma de seus divisores próprios.
- Analisar exemplos de números perfeitos e mostrar como a soma de seus divisores próprios resulta no próprio número.
- Estimular os alunos a verificar se outros números fornecidos são perfeitos, utilizando o conceito de soma dos divisores próprios.

Recursos: Quadro branco, projetor (ou televisor, ou folhas de papel A4), marcador para quadro branco e apagador.

Desenvolvimento:

a) **Tempo:** 50 minutos

b) **Sugestão ao professor:** Inicie a aula exibindo a tirinha da figura 23 numa projeção, num televisor ou até mesmo impresso, e solicite aos estudantes que a leiam. A seguir, questione: *o que vocês compreenderam dessa tirinha?* Adiante, verifique se entre as respostas dadas algum estudante entendeu o seu contexto. Em seguida, pergunte se alguém sabe o que são *Números Perfeitos*.

Figura 23 – Tirinha sobre números perfeitos

Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/numeros-especiais-numeros-perfeitos/>

Após ouvir as respostas, explique o que são os *Números Perfeitos* e, se possível, faça uma breve exposição do seu contexto histórico. Logo após, resgate o conceito de *divisores de um número natural* e acrescente o conceito de *divisores próprios de um número natural*, a fim de apresentar que os *Números Perfeitos* podem ser identificados por meio da soma dos seus *divisores* ou dos seus *divisores próprios*.

c) **Exemplos:** Resolva alguns exemplos sobre a determinação dos divisores de um número natural n ($D(n)$), fazendo a identificação dos divisores próprios. Exemplo:

1) $D(4) = 1$, 2 e 4. Com 1 e 2 sendo os divisores próprios.

2) $D(10) = 1$, 2, 5 e 10. Com 1, 2 e 5 sendo os divisores próprios.

3) $D(6) = 1$, 2, 3 e 6. Com 1, 2 e 3 sendo os divisores próprios.

De posse dos divisores próprios, compare os números dados com a soma dos seus respectivos divisores próprios, a fim de identificar qual deles é perfeito.

1) Se $4 \neq 1 + 2$, então 4 não é número perfeito.

2) Se $10 \neq 1 + 2 + 5$, então 10 não é número perfeito.

3) Se $6 = 1 + 2 + 3$, então 6 é número perfeito.

d) **Atividade prática para os estudantes:**

1. Os alunos determinam os *divisores próprios* de alguns números naturais indicados.

1.1. $n = 3$

1.2. $n = 8$

1.3. $n = 9$

1.4. $n = 12$

1.5. $n = 15$

2. Os estudantes identificam qual dos números fornecidos é ou não *perfeito*, apresentando justificativa para cada resposta.

14	30	25
19	16	28
24	32	20

Recomenda-se que esta atividade seja anotada no quadro (ou projetada) de modo que os estudantes façam seu registro nos cadernos. Após o tempo determinado para a realização da atividade, sugere-se que o professor convide ao quadro os alunos que desejarem fazer uma exposição de suas respostas.

Discussão: Comente cada resposta com a turma, verificando se todos conseguiram, corretamente, determinar os divisores próprios dos números dados e classificar como *perfeitos* ou não, identificando e corrigindo os erros, quando houver.

A.0.2 Sequência didática II

Público-alvo: Estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental.

Quantidade de aula e tempo previstos: 2 (duas) aulas/1h40

Objeto de conhecimento: Números perfeitos: relação com números primos e aplicações históricas e tecnológicas.

Habilidade: (EF07MA38) Identificar números perfeitos aplicando a fórmula da soma de todos os divisores de um número natural $n \geq 2$ em função da decomposição desse número natural em fatores primos.

Objetivos:

- Resgatar o conceito de números perfeitos e sua relação com a soma de divisores próprios.

- Apresentar a fórmula da soma dos divisores de um número natural $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, que é dada por
$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}$$
na qual $p_1, \cdots, p_r$ são primos e $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ são naturais não nulos.

- Explorar a aplicação da fórmula $S(n)$ para identificar números perfeitos.

Recursos: Quadro branco, marcador para quadro branco, apagador, fita adesiva, folhas de papel A4 em branco e para impressão.

Desenvolvimento da 1ª aula:

a) **Tempo:** 50 minutos

b) **Sugestões ao professor:** Comece a aula perguntando aos alunos o que eles recordam da definição de *Números Perfeitos*, e deixe as respostas fluírem. Esteja atento a fim de perceber se haverá alunos indicando a definição corretamente. Se ocorrer resposta correta, então formalize o conceito oralmente e com registro no quadro. Contudo, não havendo resposta correta, apresente a definição, com detalhes, fazendo registro na lousa e exigindo que os estudantes façam as anotações. Em seguida, introduza alguns exemplos.

c) **Exemplos:** Resolva alguns exemplos sobre a determinação dos divisores $D(n)$ de um número natural n, fazendo a identificação dos divisores próprios. Exemplo:

1) $D(16) = 1, 2, 4, 8$ e 16. Com $1, 2, 4$ e 8 sendo os divisores próprios.

2) $D(20) = 1, 2, 4, 5, 10$ e 20. Com $1, 2, 4, 5$ e 10 sendo os divisores próprios.

3) $D(6) = 1, 2, 3$ e 6. Com $1, 2$ e 3 sendo os divisores próprios.

De posse dos divisores próprios, compare os números dados com a soma dos seus respectivos divisores próprios, a fim de identificar qual é perfeito.

1) Se $16 \neq 1 + 2 + 4 + 8$, então 16 não é número perfeito.

2) Se $20 \neq 1 + 2 + 4 + 5 + 10$, então 20 não é número perfeito.

3) Se $6 = 1 + 2 + 3$, então 6 é número perfeito.

d) **Atividade prática para os estudantes:** Distribua os alunos em 8 equipes com o mesmo número de pessoas, se possível. Crie 8 estações dentro da sala de aula (se o espaço físico da sala não comportar, recomenda-se utilizar um auditório, ou a quadra poliesportiva ou outro ambiente adequado) e, em cada estação, fixe uma folha de papel A4 contendo um dos seguintes números: 28, 70, 100, 144, 150, 340, 410 e 496. É indispensável que cada estação fique com um número distinto. Atividade inicia com cada equipe posicionada em uma estação. Após o início da atividade, cada equipe deve julgar se o número fixado na respectiva estação é o não *perfeito*, anotando a resposta e a justificativa numa folha de papel A4. Passados 2 minutos do início, as equipes devem fazer o revezamento das estações, procedendo da mesma forma até a oitava estação. Concluída essa etapa, cada equipe vai eleger um representante para apresentar a resposta do seu grupo, devidamente justificada, para toda a turma. Antes dessa apresentação deve haver um sorteio da estação que o representante da equipe fará a exposição da resposta em até 2 minutos.

Discussão: Evidencie os acertos e os erros cometidos, destacando o motivo de cada erro e dando sugestões de métodos alternativos para alcançar o acerto. Peça aos alunos que relatem as dificuldades que os levaram ao erro. Em seguida, contabilize o percentual de acertos e a natureza dos erros cometidos por cada equipe, a fim de traçar ações complementares para serem realizadas nas aulas seguintes.

Desenvolvimento da 2ª aula:

a) **Tempo:** 50 minutos

b) **Sugestões ao professor:** Considere $S(n)$ como a representação da soma de todos os divisores naturais de n. Reforce o resultado: um número n é denominado *perfeito* se $S(n) = 2n$, ou seja, se o número n é igual à soma dos seus divisores próprios.

Apresente a fórmula para $S(n)$ em função da decomposição de $n \geq 2$ em fatores primos:

$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

na qual $p_1, \cdots, p_r$ são primos e $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ são naturais não nulos.

c) **Exemplos:** Determinar se um número n é perfeito por meio do uso da fórmula apresentada.

1) $S(3) = \dfrac{3^2 - 1}{3 - 1} = \dfrac{9 - 1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$. Note que 4 não é o dobro de 3. Ou seja, 3 não é *perfeito*.

2) $S(4) = S(2^2) = \dfrac{2^3 - 1}{2 - 1} = \dfrac{8 - 1}{1} = \dfrac{7}{1} = 7$. Note que 7 não é o dobro de 4. Logo, 4 não pe *perfeito*.

3) $S(6) = S(2 \cdot 3) = \dfrac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \dfrac{3^2 - 1}{3 - 1} = \dfrac{4 - 1}{1} \cdot \dfrac{9 - 1}{2} = \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{8}{2} = 3 \cdot 4 = 12$. Note que 12 é o dobro de 6. Dessa forma, 6 é *perfeito*.

d) **Atividade prática para os estudantes:** Em papel impresso, entregue os exercícios, a seguir, à turma ou, simplesmente, anote no quadro branco.

1. Utilizando a fórmula apresentada na aula, faça a identificação de quais dos números elencados a seguir são classificados como *perfeitos* e *não perfeitos*, justificando a sua resposta.

1.1. $n = 8$

1.2. $n = 27$

1.3. $n = 28$

1.4. $n = 1024$

1.5. $n = 8128$

2. Os *divisores próprios* de um número natural são: 1, 2, 3, 4, 6, 8 e 12. Identifique qual é esse número natural e determine se esse número natural é *perfeito*? Justifique sua resposta.

Discussão: Solicite aos alunos que expressem quais foram as maiores dificuldades encontradas durante a resolução da atividade, com a finalidade de reforçar os procedimentos operatórios caso seja necessário. Em seguida, convide 5 estudantes para apresentarem suas respectivas soluções no quadro e, quando for preciso, apresente a solução correta coletivamente. No que diz respeito à primeira questão, analise se os alunos aplicaram a fórmula corretamente. Com relação à segunda questão, verifique, em primeiro lugar, se os alunos identificaram o número natural em questão e,posteriormente, se os alunos utilizaram métodos corretos na resolução do problema.

A.0.3 Sequência didática III

Público-alvo: Estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental.

Quantidade de aula e tempo previstos: 1 (uma) aula/50 minutos

Objeto de conhecimento: Números em proporção contínua: definição, propriedades e relação com média geométrica.

Habilidades: (EF07MA39) Reconhecer números em proporção contínua, analisando a igualdade entre razões. (EF07MA40) Relacionar proporção contínua à média geométrica. (EF07MA41) Resolver problemas envolvendo números em proporção contínua e média geométrica.

Objetivos:

- Definir proporção contínua, apresentando exemplos práticos de situações envolvendo proporções contínuas.
- Definir média geométrica (média proporcional), indicando a sua relação com os números em proporção contínua.
- Resolver exercícios para praticar a identificação de números em proporção contínua e calcular a média geométrica de uma sequência de números.

Recursos: Quadro branco, marcador para quadro branco, folhas de papel A4 para impressão e apagador.

Desenvolvimento:

a) **Tempo:** 50 minutos

b) **Sugestões ao professor:** Defina *proporção contínua*: *Proporção contínua é toda a proporção que apresenta os meios iguais, ou os extremos iguais.* Além disso, apresente como se obter o valor da terceira proporcional a partir de dois números naturais não-nulos a e b dados. Em seguida, faça a conexão entre *números em proporção contínua* e o conceito de *média geométrica.* Por fim, proponha uma listagem de exercícios a fim de verificar se houve ou não assimilação dos conceitos e das práticas apresentadas.

c) **Exemplos:** Utilize os seguintes exemplo ou outros semelhantes aos tais.

   1) Identifique quais das proporções indicadas a seguir são ou não *contínuas.* Apresente uma justificativa para cada resposta.

1.1.) $\dfrac{2}{4} = \dfrac{4}{8}$ 1.2.) $\dfrac{5}{3} = \dfrac{8}{5}$ 1.3.) $\dfrac{5}{10} = \dfrac{10}{20}$ 1.4.) $\dfrac{12}{16} = \dfrac{9}{12}$

2) Considerando que as proporções são *contínuas*, determine o valor da terceira proporcional.

2.1.) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{x}$ 2.2.) $\dfrac{3}{15} = \dfrac{15}{x+1}$ 2.3.) $\dfrac{27}{9} = \dfrac{9}{x-1}$ 2.4.) $\dfrac{x}{20} = \dfrac{20}{80}$

Sugestão de resolução do 2.1.: Igualando o produto dos meios ao produto dos extremos, concluímos que $x \cdot 1 = 3 \cdot 3 \Rightarrow x = 9$ é o valor da terceira proporcional.

3) Determine a *média geométrica* (*média proporcional*) positiva entre:

3.1.) 5 e 20 3.2.) 4 e 9 3.3.) 2 e 32 3.4.) 9 e 36

Sugestão de resolução do 3.1.: Organizando a proporção contínua, temos $\dfrac{5}{x} = \dfrac{x}{20}$, ou seja, $x^2 = 5 \cdot 20 \Rightarrow x = \sqrt{100} \Rightarrow x = 10$ é a média geométrica entre 5 e 20.

4) O problema a seguir aborda uma situação decorrente da definição de números em proporção contínua e é um modelo bastante recorrente em avaliações de vestibulares e concursos públicos.

Suponha que, no fim de maio de 2025, uma funcionária receberá um aumento de 21% *em seu salário* S. *Além disso, considere que, no término do mês seguinte, ela receberá um aumento de* 44% *no salário mês anterior. Qual será o percentual médio dos aumentos salariais dados a essa funcionária nesses dois meses?*

Sugestão de resolução do 4: Com base em alguns aspectos do conhecimento sobre matemática financeira, sabemos que a aplicação desses dois aumentos pode ser representada pela expressão:

$$S \cdot 1,21 \cdot 1,44$$

Dessa forma, consideraremos $y > 0$ o aumento médio correspondente a esses dois aumentos. Logo, a expressão acima é igual a:

$$S \cdot y \cdot y$$

ou seja, como $S \neq 0$, pela lei do corte, temos:

$$1,21 \cdot 1,44 = y \cdot y$$

que é equivalente a *proporção contínua*:

$$\frac{1,21}{y} = \frac{y}{1,44}$$

que, também, é equivalente a:

$$y^2 = \sqrt{1,21 \cdot 1,44} \Rightarrow y = \sqrt{1,7424} \Rightarrow y = 1,32$$

Respondendo à pergunta do problema: o percentual médio dos aumentos é de 32%.

Apresentamos um problema sobre *Média Geométrica* decorrente do conceito de *Proporções Contínuas*.

d) **Atividade prática para os estudantes:** Dando suporte à execução das sugestões fornecidas, com antecedência, elabore uma ficha de aula contendo um resumo da exposição dos conteúdos abordados na aula e uma série de exercícios iguais ou nos modelos dos apresentados a seguir.

1. Elabore 4 (quatro) proporções contínuas distintas dos exemplos apresentados em aula.

2. Sabendo que as proporções a seguir são contínuas, determine o valor correspondente à terceira proporcional.

2.1.) $\frac{1}{5} = \frac{5}{x}$ 2.2.) $\frac{6}{18} = \frac{18}{x-1}$ 2.3.) $\frac{60}{30} = \frac{30}{x+1}$ 2.4.) $\frac{x}{21} = \frac{21}{63}$

3. Calcule a média geométrica positiva entre os seguintes números naturais:

3.1.) 4 e 49 3.2.) 3 e 48 3.3.) 64 e 4 3.4.) 25 e 36

4. Três pessoas formaram uma sociedade e obtiveram um lucro de R$ 6290,00. A primeira pessoa entrou com R$ 900,00, a segunda com R$ 1200,00 e a terceira com uma quantia ainda maior, mas desconhecida. Considerando que as quantias de entrada estão em proporção contínua, qual quantia do lucro será destinada à terceira pessoa?

5. Suponha que, no fim de 2024, um funcionário recebeu um aumento de 21% em seu salário S. Além disso, considere que, no término de 2025, ele receberá um segundo aumento de 69% no salário anterior. Qual será o percentual médio dos aumentos salariais dados a esse funcionário nesse período?

Discussão: Colete as mais frequentes dificuldades enfrentadas pelos alunos durante a realização das questões e, com base nelas, elabore uma nova aula fazendo uso de outra metodologia. Com relação às dificuldades com menor frequência ou pontuais, aproveite o fim da aula para esclarecê-las.

A.0.4 Sequência didática IV

Público-alvo: Estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental.

Quantidade de aula e tempo previstos: 1 (uma) aula/50 minutos

Objeto de conhecimento: Números em proporção contínua: definição, propriedades, relação com as progressões geométricas e aplicações na geometria.

Habilidades: (EF08MA28) Reconhecer números em proporção contínua, analisando a igualdade entre razões consecutivas.(EF08MA29) Relacionar os números em proporção contínua a outros conceitos: proporção áurea, semelhança de triângulos e termos de uma progressão geométrica.

Objetivos:

- Definir e diferenciar *progressão aritmética* e *progressão geométrica.*
- Relacionar o conceito de proporção contínua com a igualdade entre razões consecutivas em uma *progressão geométrica.*

Recursos: Quadro branco, marcador para quadro branco e apagador.

Desenvolvimento:

a) **Tempo:** 50 minutos

b) **Sugestões ao professor:** Faça uma breve exposição sobre sequências numéricas e apresente as definições de *progressões aritmética* e *geométrica.* Analise as propriedades entre os termos de uma *progressão geométrica* a partir da sua definição e evidencie as suas correspondências com as *proporções contínuas.*

c) **Exemplos:** Cada exemplo tem por finalidade abranger os objetivos desta aula.

1) Classifique as sequências numéricas como *progressão aritmética* ou *progressão geométrica.* Quando se tratar de uma *progressão geométrica*, represente seus termos como números de uma proporção contínua.

1.1.) $(1, 2, 4, 8, 16, ...)$

1.2.) $(1, 4, 7, 10, 13, ...)$

1.3.) $(2, 8, 14, 20, ...)$

1.4.) $(5, 20, 80, ...)$

2) Dada a progressão geométrica $(4, 12, 36, ..)$, determine a sua razão q de duas maneiras, conforme a definição, em seguida faça a igualdade entre os dois modos utilizados.

Sugestão de resolução: Podemos obter a razão q dividindo um dos termos pelo termo anterior, isto é,

$$q = \frac{36}{12} \text{ ou } q = \frac{12}{4}$$

Note que as duas razões, se igualadas, formam uma proporção contínua: $\frac{36}{12} = \frac{12}{4}$.

3) Considere as *progressões geométricas* abaixo. Determine os termos de cada lacuna por meio da média proporcional.

3.1.) $(2, \_, 18, ...)$

3.2.) $(72, \_, 8, ...)$

Sugestão de resolução do 3.1.: Seja a o termo médio entre 2 e 18, então temos $\frac{18}{a} = \frac{a}{2}$, ou seja, $a^2 = 2 \cdot 18 \Rightarrow a = \sqrt{36} \Rightarrow a = 6$.

d) **Atividade prática para os estudantes:**

1. Determine a razão de cada progressão geométrica representada a seguir.

1.1. $(2, 12, 72, ...)$

1.2. $(6, 24, 96, ...)$

1.3. $(14, 42, 126, ...)$

1.4. $(120, 60, 30, ...)$

1.5. $(39, 13, 1, ...)$

2. Considere a proporção contínua $\frac{8}{32} = \frac{32}{128}$. Represente duas *progressões geométricas* correspondentes.

3. Considere as progressões geométricas abaixo. Determine os termos de cada lacuna por meio de proporção contínua.

3.1. $(42, \_, 7, ...)$

3.2. $(6, \_, 294, ...)$

Discussão: Revisem as resoluções coletivamente, retirando as dúvidas que surgiram. Se perceber que não ficou claro para o estudante, retome os exemplos, utilize ideias semelhantes algumas vezes, mostre novamente que os termos de uma progressão geométrica estão em proporção contínua.

A.0.5 Sequência didática V

Público-alvo: Estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental.

Quantidade de aula e tempo previstos: 3 (três) aulas/2h30

Objeto de conhecimento: Infinitude dos números primos.

Habilidades: (EF07MA41) Reconhecer a potencialidade das novas tecnologias digitais mediante à infinitude dos números primos e suas implicações na evolução dos algoritmos de criptografia, como o RSA. (EF07MA42) Executar os processos de codificação e de decodificação de mensagem, usando o algoritmo RSA. (EF07MA43) Resolver e elaborar problemas de codificação e decodificação RSA.

Objetivos:

- Explicar como as tecnologias modernas, como algoritmos computacionais, ajudam na descoberta e verificação de números primos em grandes intervalos, possibilitando avanços em áreas como a criptografia.
- Discutir a relação entre a teoria dos números primos e os algoritmos de criptografia, enfatizando a importância dos números primos no desenvolvimento de sistemas seguros de comunicação, como o RSA.
- Explicar o processo de codificação de uma mensagem utilizando o RSA.
- Guiar os alunos na resolução de problemas simples de codificação usando o RSA, aplicando os passos do algoritmo de forma prática.

Recursos: Projetor de slides, quadro branco, marcador para quadro branco e apagador.

Desenvolvimento do 1º momento:

a) **Tempo:** 50 minutos

b) **Sugestões ao professor:** Faça uma exposição oral, se possível, com projeção de imagens e vídeos, sobre a importância dos algoritmos de *criptografia* para a segurança equipamentos e armazenamento de dados. Em seguida, discuta sobre a importância de os *números primos* em relação ao desenvolvimento de sistemas de segurança e como esse desenvolvimento está atrelado aos *números primos* serem *infinitos*, fato este que Euclides demonstrou há mais de 2 mil anos.

c) **Atividade prática para os estudantes:** Solicite aos estudantes que realizem, via internet, uma breve pesquisa sobre nomes e tipos de algoritmos de criptografia e suas características. Observação: caso não seja conveniente a pesquisa ocorrer no âmbito escolar, solicite que a pesquisa seja feita em casa, previamente. Em seguida, por meio de uma roda de conversas, os estudantes devem fazer uma exposição oral sobre as informações obtidas na pesquisa.

Discussão: Faça uma consolidação dos dados apurados e expostos pelos estudantes enfatizando a real necessidade de evolução de algoritmos de *criptografia*.

Desenvolvimento do 2º e 3º momentos:

a) **Tempo:** 100 minutos

b) **Sugestões ao professor:** Apresente sobre a eficiência da criptografia RSA por meio de argumentos concernentes a *infinitude dos números primos*. Informe sobre os processos da criptografia: pré-codificação e a codificação propriamente dita. Em seguida, você deve elencar as etapas de codificação, que serão detalhadas no exemplo.

c) **Exemplo:**

1º passo:

Escolher dois números primos. Neste exemplo, serão escolhidos $p = 3$ e $q = 11$.

2º passo:

Calcular o módulo, o qual indicaremos por n. Ele é o produto entre os primos escolhidos, logo $n = p \cdot q \Rightarrow n = 3 \cdot 11 = 33$.

3º passo:

Obter o valor do totiente de Euler T. Este valor é dado por $T = (p-1) \cdot (q-1)$. Sendo assim, $T = (3-1) \cdot (11-1) = 2 \cdot 10 = 20$.

4º passo:

Escolher o expoente público e. Este número e deve ser primo com T e, além disso, $1 < e < 20$. Neste exemplo, vamos escolher $e = 3$.

5º passo:

Este é o último passo da codificação. Para esse exemplo, que é meramente didático, vamos codificar uma mensagem simples: "2", para facilitar a compreensão do aluno. Consideraremos $M = 2$ como a mensagem original. Se a mensagem original for uma letra, é necessário utilizar, previamente, uma tabela associando cada letra a um número de dois dígitos, preferencialmente. Dessa forma, a mensagem criptografada será igual ao resto da divisão a seguir:

$$M^e \div n$$

ou seja, o resto da divisão $2^3 \div 33$, que corresponde a 8, em virtude de $8 = 33 \cdot 0 + 8$.

d) **Atividade prática para os estudantes:**

1. Com base nos números primos utilizados no exemplo, os estudantes devem codificar as seguintes mensagens:

1.1. $M = 4$

1.2. $M = 10$

1.3. $M = 3$

Discussão: Verifique se as codificações foram realizadas corretamente, verificando cada passo através de correções individuais. Havendo recorrência de erros, realizar novos exemplos a fim de gerar maior assimilação. Enfatize sobre a importância da escolha dos números primos no 1º passo do processo, uma vez que quanto maiores forem os primos escolhidos, mais difícil será decodificar a mensagem codificada. O processo de decodificação deve ser abordado nas aulas subsequentes.