UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Marcílio Barbosa de Oliveira Santos

Matrizes e Geometria Analítica: Matrizes Ortogonais 2x2 e suas ações nas rotações e reflexões no plano

RECIFE
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Marcílio Barbosa de Oliveira Santos

Matrizes e Geometria Analítica: Matrizes Ortogonais 2x2 e suas ações nas rotações e reflexões no plano

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio José Ferreira Gomes Junior

RECIFE
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

S237m Santos, Marcílio Barbosa de Oliveira.
Matrizes e geometria analítica: matrizes ortogonais 2x2 e suas ações nas rotações e reflexões no plano / Marcílio Barbosa de Oliveira Santos. – Recife, 2025.
92 f.; il.

Orientador(a): Antônio José Ferreira Gomes Junior.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Matrizes (Matemática). 2. Geometria analítica. 3. Matemática (Ensino médio). 4. Álgebra linear 5. Determinantes (Matemática). I. Junior, Antônio José Ferreira Gomes, orient. II. Título

CDD 510

MARCÍLIO BARBOSA DE OLIVEIRA SANTOS

"Matrizes e Geometria Analítica: Matrizes Ortogonais 2X2 e suas Ações nas Rotações e Reflexões no Plano"

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior (Orientador) – UFRPE

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo – UFPB

Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves – PROFMAT/UFRPE

Dedico este trabalho às pessoas que fizeram parte da minha vida e da minha caminhada. Ao meu pai, Milton Santos, e à minha mãe, Lenira Barbosa, que sempre me apoiaram. À minha esposa, Simone Barbosa, e ao meu filho, Mateus Santos, companheiros de todas as horas. Aos meus amigos de infância e aos que conquistei ao longo do tempo, por estarem sempre presentes. Aos meus tios e tias, sejam eles próximos ou distantes, pelo carinho e memória que guardo. Aos meus primos e primas, sobrinhos e sobrinhas, e também aos meus avós, que fazem parte da minha história.

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Antônio Ferreira Gomes, pela compreensão e paciência ao longo de todas as etapas deste trabalho. Durante este último ano, o professor Antônio foi sempre muito atencioso e dedicado, participando ativamente das reuniões e orientações.

Também agradeço à professora Taciana Maria pelas aulas em duas disciplinas que foram fundamentais para o desenvolvimento da dissertação.

Ao coordenador Fabiano Barbosa, meu reconhecimento pela constante disponibilidade e atenção às nossas solicitações.

Sou grato a todos os colegas da turma, especialmente a Wellington Martinho, Diandra Dalila e Douglas de Souza, que contribuíram significativamente na digitação do trabalho e sempre me trataram com muito carinho.

Agradeço ainda aos amigos André, Tárcio, Felipe, Robson, Aline, Nélio e Cícero, pelo incentivo constante, muitas vezes compartilhando longas noites de estudo.

Em nome da história e da troca de conhecimento, agradeço aos meus professores e colegas de trabalho da área de Matemática — Agostinho Meirelles, Clóvis Cordeiro, José Ribamar de Souza Neves e Severino Barros — por terem me proporcionado tantas conversas enriquecedoras sobre os diversos aspectos da ciência.

À minha esposa, Simone Barbosa, e ao meu filho, Mateus Barbosa, meu muito obrigado pelo amor e pela compreensão, sabendo que essa conquista foi um esforço de todos nós.

Aos meus irmãos Milton, Alexandre e Luciana, agradeço por sempre entenderem a importância desta etapa em minha vida.

Também não posso deixar de agradecer aos meus amigos, antigos e atuais, que me incentivaram a manter o foco nos estudos, mesmo diante das inúmeras tentações do lazer.

Agradeço ao diretor da escola onde trabalho, professor Luiz Soares, pela prontidão e apoio na emissão dos documentos necessários para o ingresso no mestrado.

Por fim, meu mais sincero agradecimento à minha mãe, Lenira Barbosa, e ao meu pai, Milton Santos, pelo amor e carinho que me acompanham desde o começo desta trajetória, desde o ventre materno.

Somos o que fazemos,
mas somos, principalmente,
o que fazemos para mudar o que somos.
(Eduardo Galeano)

Resumo

Esta dissertação propõe um aprofundamento no estudo de matrizes e geometria analítica, com foco especial nas matrizes ortogonais 2×2 e suas aplicações em rotações e reflexões no plano cartesiano. Ao longo do trabalho, buscou-se apresentar não apenas definições e operações com matrizes, mas também resgatar sua origem histórica, destacando sua utilidade prática no ensino da matemática. Foram abordados temas como sistemas lineares, determinantes, autovalores e autovetores, construindo uma ponte entre a álgebra matricial e a geometria analítica. A dissertação também explora a classificação das matrizes ortogonais 2×2, mostrando como elas podem ser utilizadas para representar transformações geométricas, como rotações e reflexões. A proposta foi pensada para o contexto do ensino médio, trazendo contribuições didáticas e metodológicas que favorecem uma aprendizagem significativa, conectada com a realidade dos estudantes.

Palavras-chave: matrizes; geometria analítica; matrizes ortogonais; rotações e reflexões.

Abstract

This dissertation proposes an in-depth study of matrices and analytic geometry, with a special focus on 2×2 orthogonal matrices and their applications in rotations and reflections in the Cartesian plane. Throughout the work, the goal was not only to present definitions and operations involving matrices, but also to recover their historical origin, highlighting their practical usefulness in mathematics education. Topics such as linear systems, determinants, eigenvalues, and eigenvectors are addressed, building a bridge between matrix algebra and analytic geometry. The dissertation also explores the classification of 2×2 orthogonal matrices, demonstrating how they can be used to represent geometric transformations such as rotations and reflections. The proposal was designed for the high school context, offering didactic and methodological contributions that promote meaningful learning, connected to students' real-world experiences.

Keywords: matrices; analytic geometry; orthogonal matrices; rotations and reflections.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

Sumário

Introdução

O conteúdo de matrizes costuma ser um ponto de dificuldade para muitos alunos do ensino médio. Quando se deparam com esse tema, não são raras as perguntas sobre sua origem, função e relevância. Tais questionamentos evidenciam uma lacuna na forma como o assunto é geralmente apresentado: de maneira técnica, abstrata e pouco conectada com o cotidiano dos estudantes. Este trabalho nasce, portanto, da intenção de tornar o estudo de matrizes mais significativo, explorando suas conexões com a geometria analítica, especialmente por meio das matrizes ortogonais 2×2.

Justificativa

O presente trabalho justifica-se pela necessidade de tornar o ensino de matrizes mais atrativo e compreensível para os alunos do ensino médio. Ao buscar aproximar esse conteúdo da realidade dos estudantes, propõe-se uma abordagem que valoriza tanto os aspectos históricos quanto as aplicações geométricas das matrizes. Além disso, as matrizes, mesmo não estando explicitamente previstas como conteúdo obrigatório na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), continuam presentes em avaliações externas, olimpíadas de matemática e contextos acadêmicos. Dessa forma, compreendê-las é essencial não apenas para o desenvolvimento do raciocínio algébrico, mas também para a formação matemática crítica e aplicada.

Objetivos

O objetivo geral desta dissertação é propor uma abordagem integrada para o estudo de matrizes e geometria analítica, com ênfase nas matrizes ortogonais 2×2 e suas ações nas rotações e reflexões no plano cartesiano.

Os objetivos específicos incluem:

- apresentar a origem histórica e o desenvolvimento do conceito de matriz;
- discutir definições e operações fundamentais envolvendo matrizes;
- abordar a resolução de sistemas lineares por meio de matrizes e determinantes;
- estabelecer conexões entre matrizes e conceitos da geometria analítica;
- analisar a estrutura e a classificação das matrizes ortogonais 2×2;

- aplicar essas matrizes às transformações geométricas no plano, como rotações e reflexões.

Estrutura do Trabalho

A organização desta dissertação foi pensada de modo a acompanhar o desenvolvimento lógico e progressivo dos conceitos.

No Capítulo 1, procuramos trazer, no referencial teórico, uma pequena história do professor Cláudio Possani sobre a origem das matrizes. Esse capítulo também contextualiza a importância do tema no ensino de matemática, apontando suas possibilidades didáticas e suas aplicações em sala de aula.

No Capítulo 2, evidenciamos a definição de matrizes e suas operações. Além disso, definimos e exploramos os conceitos de matriz transposta, matriz inversa, matriz simétrica e suas respectivas propriedades, estabelecendo uma base sólida para os capítulos seguintes.

No Capítulo 3, tratamos de definir, classificar e resolver sistemas lineares, abordando também suas relações com os determinantes. A Regra de Cramer é apresentada e utilizada como ferramenta para a resolução desses sistemas.

No Capítulo 4, observamos as relações entre matrizes e geometria analítica, discutindo a representação de vetores, projeções, ângulos entre vetores e transformações no plano. Esses conteúdos são de grande utilidade para o desenvolvimento das ideias apresentadas no capítulo final.

Por fim, no Capítulo 5, conhecemos as matrizes ortogonais, demonstramos alguns teoremas fundamentais e verificamos, em particular, a ação dessas matrizes nas rotações e reflexões de cônicas no plano cartesiano. Apresentamos ainda a classificação das matrizes ortogonais 2×2 e discutimos suas implicações geométricas no contexto do ensino médio.

1 Referencial Teórico

Este trabalho propõe um aprofundamento no estudo de matrizes e geometria analítica no contexto do ensino médio, com foco específico nas matrizes ortogonais. A abordagem adotada busca resgatar o contexto histórico do desenvolvimento desses conceitos, destacar suas aplicações práticas e apresentar estratégias didáticas inovadoras, com o objetivo de tornar o tema mais acessível, atrativo e significativo para os estudantes.

Apesar de não constarem de forma explícita na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como conteúdos obrigatórios, as matrizes continuam sendo componentes fundamentais na formação matemática dos alunos do ensino médio. Sua relevância se manifesta não apenas em contextos acadêmicos, mas também em avaliações externas e olimpíadas de matemática, como a OPEMAT (Olimpíada Pernambucana de Matemática), cujo edital de 2024 inclui explicitamente esse conteúdo entre os tópicos cobrados nas provas da categoria ensino médio.

Essa permanência e valorização do tema também é defendida por diversos autores da área da educação matemática. Facchini, por exemplo, reforça a importância das matrizes como ferramentas essenciais para a modelagem matemática em sala de aula. Já Iezzi e Hazzan, exploram seu uso de forma progressiva e prática, com foco na resolução de problemas contextualizados e aplicáveis à realidade do estudante.

Desse modo, mesmo que não estejam no centro das diretrizes da BNCC, as matrizes seguem como conteúdos estratégicos para uma formação matemática robusta, crítica e aplicável, funcionando como ponte entre a matemática escolar e a matemática acadêmica e profissional. Defendê-las como conteúdo a ser mantido, mesmo que de forma transversal e contextualizada, é um passo importante para garantir uma formação coerente com os desafios contemporâneos.

Entretanto, o ensino das matrizes também impõe desafios. Há dificuldades tanto de ordem conceitual quanto pedagógica que precisam ser consideradas:

- **Abstração e falta de aplicações simples**: As matrizes são frequentemente percebidas como estruturas abstratas, e sua ausência em situações do cotidiano escolar pode dificultar o processo de assimilação.

- **Produto de matrizes não é intuitivo**: A operação de multiplicação de matrizes exige uma lógica diferente daquela usada em operações numéricas convencionais, tornando-se pouco intuitiva para os alunos.

Diante dessas dificuldades, é necessário adotar estratégias pedagógicas que combinem teoria e prática, contextualizando os conceitos e valorizando a resolução de problemas reais.

O surgimento das matrizes como conceito matemático foi impulsionado pela necessidade de tornar compreensível e aplicável a operação de multiplicação entre tabelas numéricas, especialmente na resolução de sistemas lineares.

Embora a BNCC não mencione as matrizes como unidade autônoma, seu uso está implícito em várias habilidades e competências ligadas ao pensamento algébrico e à resolução de sistemas de equações lineares e à modelagem de situações-problema.

- **Resolução de sistemas de equações**: A BNCC para o ensino médio inclui a competência de resolver e interpretar sistemas de equações lineares, que estão diretamente relacionados ao uso de matrizes. Dessa forma, a utilização de matrizes se torna uma ferramenta natural no ensino da álgebra, podendo ser introduzida como parte das técnicas para resolver sistemas lineares.

O ensino das matrizes envolve o desenvolvimento de diversas competências, fundamentais para a compreensão e aplicação desse conceito no contexto matemático e nas suas múltiplas aplicações. As principais competências incluem:

- **Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas**: Os alunos devem entender o que são matrizes, como elas são estruturadas e como as operações, como a adição, subtração e multiplicação, são realizadas entre elas.
- **Entender as matrizes como instrumento facilitador para resolver sistemas de equações**: As matrizes são ferramentas poderosas para a resolução de sistemas lineares, sendo uma parte essencial do estudo de álgebra. Os estudantes devem entender como elas simplificam a resolução de sistemas de equações, além de desenvolver a capacidade de usar métodos computacionais para resolver esses sistemas.

As habilidades específicas a serem desenvolvidas no ensino de matrizes envolvem a aplicação prática dos conceitos aprendidos, com ênfase na resolução de problemas e na aplicação de matrizes em diversos contextos. As principais habilidades incluem:

- **Compreender o conceito de determinante de uma matriz**: O determinante é uma propriedade fundamental das matrizes, especialmente em relação à solução de sistemas lineares. Os alunos devem entender o que o determinante representa e como ele se relaciona com o comportamento das soluções de um sistema.
- **Calcular o determinante de uma matriz**: Além de compreender o conceito, os alunos devem ser capazes de calcular o determinante de matrizes de diferentes ordens, utilizando as fórmulas apropriadas.

- **Saber que a matriz é uma tabela de números e o determinante é um número**: É essencial que os estudantes compreendam que uma matriz é uma estrutura de números organizados em linhas e colunas e que o determinante, embora esteja relacionado à matriz, é um número que resume certas propriedades dessa estrutura, como a invertibilidade e a solução de sistemas.

O estudo das matrizes tem como objetivo fundamental proporcionar aos alunos uma compreensão profunda desse conceito matemático e suas aplicações. Os objetivos específicos incluem:

- **Apresentar as principais matrizes e suas definições**: O primeiro passo é familiarizar os alunos com as diferentes tipos de matrizes (como matrizes quadradas, diagonais, simétricas, etc.) e suas definições essenciais, como a identidade, inversa e a transposta, que são fundamentais para a manipulação e resolução de problemas matemáticos.
- **Conceituar o determinante de uma matriz**: O determinante é uma propriedade importante das matrizes, especialmente no estudo de sistemas lineares. Um dos objetivos é introduzir e esclarecer o conceito de determinante, destacando seu papel na análise de sistemas e na compreensão da invertibilidade de uma matriz.
- **Lidar com os principais métodos de cálculo de um determinante**: O estudo do determinante envolve não apenas a compreensão do conceito, mas também a aplicação dos principais métodos de cálculo, como a regra de Laplace para matrizes 3x3 ou de maior ordem.
- **Explorar as principais propriedades dos determinantes**: Além de aprender a calcular o determinante, os alunos também deverão entender suas propriedades mais importantes, como a relação com a invertibilidade das matrizes, o efeito de operações elementares sobre o determinante e o papel do determinante na resolução de sistemas de equações.

A metodologia a ser utilizada neste estudo visa proporcionar aos alunos uma compreensão aprofundada das matrizes, contextualizando-as historicamente e apresentando suas aplicações práticas. A seguir, estão os principais passos metodológicos a serem seguidos:

1. **Apresentar o contexto histórico das matrizes com base nas transformações geométricas**: Inicialmente, será explorado o desenvolvimento histórico das matrizes, com ênfase nas transformações geométricas que motivaram sua criação. A ideia é mostrar como as matrizes surgiram como uma ferramenta para representar transformações no plano, como rotações e reflexões.

2. **Estudar sobre elipses, reflexões e rotações de eixos**: O estudo sobre as elipses, as reflexões e as rotações de eixos ajudará os alunos a compreender a importância histórica das matrizes nas transformações geométricas. A introdução do conceito de matriz no estudo das elipses é um exemplo de como os matemáticos de diferentes épocas buscaram representar operações geométricas de maneira eficiente.

Este estudo é direcionado a alunos da rede pública de ensino, com idade a partir dos 15 anos, que estão no ensino médio e possuem uma base de conhecimento prévio em álgebra.

O objetivo é garantir que os conceitos de matrizes seja acessíveis a todos, utilizando recursos visuais que facilitem a compreensão do conteúdo. Além disso, a contextualização histórica das matrizes proporcionarão uma aprendizagem mais significativa e conectada com o mundo real.

1.1 Introdução às Matrizes e ao Ensino de Matemática

O ensino de matrizes tem evoluído significativamente ao longo do tempo, refletindo a busca por uma conexão maior entre os conceitos teóricos e suas aplicações práticas no cotidiano. Durante décadas, o estudo de matrizes no ensino médio era caracterizado por uma abordagem desconexa, na qual os conceitos, propriedades e operações eram apresentados de maneira isolada e descontextualizada. Os alunos aprendiam a manipular matrizes sem compreender sua relevância histórica ou utilidade prática, o que tornava o aprendizado fragmentado e pouco motivador.

1.2 História das Matrizes e o Desenvolvimento do Conceito

A história das matrizes remonta ao século XIX, com destaque para a contribuição de Arthur Cayley, que utilizou matrizes para descrever transformações geométricas. Notavelmente, o produto de matrizes antecedeu a formalização do conceito de matriz, o que evidencia a influência das aplicações práticas na construção teórica. Essa evolução histórica mostra como a matemática se desenvolve de forma pragmática, com os conceitos muitas vezes sendo moldados por desafios reais.

Cayley, ao estudar as cônicas, introduziu uma notação que permitia simplificar a manipulação algébrica dessas formas geométricas. Sua abordagem utilizava composições de transformações no plano, cujos coeficientes eram organizados em tabelas retangulares, formando as bases do que hoje denominamos matrizes. Este contexto histórico destaca o caráter utilitário das matrizes, reforçando a necessidade de abordar o tema no ensino médio a partir de uma perspectiva prática e interdisciplinar.

O desenvolvimento histórico das matrizes está relacionado à necessidade de resolver problemas práticos em geometria. O matemático Arthur Cayley, por exemplo, utilizou matrizes ao estudar transformações geométricas no plano, incluindo a tentativa de escrever cônicas em outros sistemas de eixos. Esse uso de matrizes para simplificar operações geométricas abriu portas para outras aplicações, como a análise de sistemas lineares e a resolução de equações diferenciais.

Além disso, destacamos os seguintes momentos históricos, que ilustram a evolução do pensamento matemático ao longo do tempo:

- **50.000 a.C.**: Início da civilização e desenvolvimento da contagem.
- **5.000 A.C.**: Desenhos geométricos utilizados em diversas culturas antigas.
- **3.000 a.C.**: Numerais no Egito, fundamentais para a contabilidade e registros.
- **2.400 A.C.**: Mesopotâmia – Desenvolvimento de astronomia e contabilidade.
- **585 A.C.**: Tales – Desenvolvimento da geometria na Grécia Antiga.
- **300 A.C.**: Euclides – Desenvolvimento dos 13 volumes dos "Elementos", fundamentais para a geometria.
- **140 D.C.**: Avanços em trigonometria.
- **830 D.C.**: Introdução da álgebra durante a Idade Média.
- **1200 D.C.**: Sequência de Fibonacci, importante para a matemática e a natureza.
- **1614 D.C.**: Introdução dos logaritmos, uma ferramenta essencial para cálculos complexos.
- **1640 D.C.**: René Descartes e o desenvolvimento da geometria analítica.
- **1680 D.C.**: Avanços em cálculo por Newton e Leibniz.
- **1720 D.C.**: Introdução da teoria das probabilidades.
- **1800 D.C.**: Avanços no estudo dos números complexos e suas funções.
- **1850 D.C.**: Formalização das matrizes por Arthur Cayley, contribuindo para o desenvolvimento de álgebra linear.

Esses marcos históricos não apenas destacam o progresso das ideias matemáticas, mas também mostram como a matemática se desenvolveu em resposta a necessidades práticas de diferentes culturas e períodos históricos.

Para mais detalhes sobre o tema, recomendo assistir à videoaula do Professor Possani através do link: <https://www.youtube.com/watch?v=hLaGcL-i7Ew>, que explora o desenvolvimento das matrizes de forma prática e detalhada, oferecendo uma perspectiva adicional sobre o uso das matrizes em diversos contextos históricos e contemporâneos.

Encerrada a discussão teórica que fundamenta o estudo da Álgebra Linear e suas aplicações, passamos agora à análise de um dos seus conceitos centrais: as matrizes. As matrizes constituem o ponto de partida para a representação e manipulação de sistemas lineares, transformações e operações fundamentais no contexto matemático e físico. Nesse sentido, o próximo capítulo dedica-se à compreensão de suas propriedades, operações elementares e importância como ferramenta de organização e modelagem de informações numéricas.

2 Matrizes

As matrizes são estruturas matemáticas representadas por tabelas organizadas em linhas e colunas, utilizadas para armazenar e manipular dados de maneira eficiente.

2.1 Definições

Matriz

Uma matriz A de ordem $m \times n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ com $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$ representa o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna respectivamente. Quando $m = n$ diremos apenas que A é de ordem m.

Elas são amplamente empregadas em diversas áreas da matemática, como álgebra linear, geometria analítica, estatística e computação.

Em uma matriz os elementos a_{ij}, tais que $i = j$ formam o que chamamos de diagonal principal dessa matriz.

Exemplo 2.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Note que 1 e 4 são os elementos da diagonal principal da matriz A.

Matriz Linha

É uma matriz que possui apenas uma linha. Seu formato é $1 \times n$, onde n representa o número de colunas.

$$A = [a_{11}a_{12} \dots a_{1n}],$$

os elementos estão dispostos em uma única linha.

Exemplo 2.2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Matriz Coluna

É uma matriz que possui apenas uma coluna. Seu formato é $n \times 1$, onde n representa o número de linhas.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}.$$

Essa matriz representa os elementos organizados em uma única coluna.

Exemplo 2.3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Matriz Quadrada

Uma matriz é considerada quadrada quando o número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, a matriz tem formato $n \times n$.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}.$$

Matriz Diagonal

Uma matriz diagonal é aquela em que todos os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.5.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matriz Identidade

A matriz identidade de n linhas e n colunas, denotada por I_n, é um caso específico de matriz diagonal, em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.6. para $n = 4$:

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz Simétrica

Uma matriz é simétrica se seus elementos satisfazem a condição $a_{ij} = a_{ji}$, para todos os i, j. Ou seja, os elementos da matriz são iguais àqueles simetricamente opostos em relação à diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.7.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matriz Transposta

A transposta de uma matriz é obtida trocando suas linhas por colunas de forma ordenada, ou seja 1ª linha da matriz A seja a 1ª coluna da matriz transposta, 2ª linha da matriz A seja a 2ª coluna da matriz transposta e etc. Se A é uma matriz $m \times n$, então a transposta de A, denotada A^T, será uma matriz $n \times m$. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

então

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.8.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

2.2 Operações com Matrizes

As operações com matrizes, como soma, multiplicação de uma matriz por um escalar e multiplicação, são ferramentas essenciais no estudo da álgebra linear, sendo fundamentais para a resolução de sistemas lineares e transformações geométricas. Cada operação possui regras específicas e aplicações que tornam as matrizes ferramentas poderosas na modelagem de problemas matemáticos e científicos.

Soma de Matrizes

Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$, a **soma** $A + B$ é uma matriz C também de ordem $m \times n$, obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B.

Isto é, se $C = A+B$ temos que $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 2.9. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 3+0 \\ 4+(-1) & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação de uma Matriz por um Escalar

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$, e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um número real (escalar). A **multiplicação de** A **pelo escalar** λ é a matriz $B = \lambda A$, também de ordem $m \times n$, cujos elementos são obtidos multiplicando cada elemento de A por λ:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.10. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e o escalar} \quad \lambda = 4.$$

Temos:

$$4A = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 0 & 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Observação 2.11. A multiplicação por um escalar preserva a ordem da matriz original e é uma operação distributiva em relação à adição de matrizes,

$$C = \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

Proposição 2.12. *Sejam* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *duas matrizes de mesma ordem* $m \times n$*, e seja* $\lambda \in \mathbb{R}$ *um escalar.*

A soma $A + B$ *é definida por:*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Multiplicando essa matriz por um escalar λ*, temos:*

$$\lambda(A + B) = \lambda[a_{ij} + b_{ij}] = [\lambda(a_{ij} + b_{ij})].$$

Se denotarmos $C = \lambda(A + B)$*, então:*

$$C = [c_{ij}] = [\lambda(a_{ij} + b_{ij})].$$

Logo, para todo i e j, temos:

$$c_{ij} = \lambda(a_{ij} + b_{ij})$$

C.Q.D.

Multiplicação de Matrizes

Sejam A uma matriz de ordem $m \times p$ e B uma matriz de ordem $p \times n$. O **produto** $C = A \cdot B$ é uma matriz de ordem $m \times n$, cujos elementos c_{ij} são:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \text{para } i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 2.13. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(ordem } 2 \times 3\text{)}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}. \quad \text{(ordem } 3 \times 2\text{)}$$

O produto $C = A \cdot B$ será uma matriz de ordem 2×2 com elementos:

$$c_{11} = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 = 7 + 18 + 33 = 58$$

$$c_{12} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 8 + 20 + 36 = 64$$

$$c_{21} = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 = 28 + 45 + 66 = 139$$

$$c_{22} = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 = 32 + 50 + 72 = 154$$

Assim,

$$C = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}.$$

Observações:

1. Nem sempre é possível fazer o produto entre duas matrizes.

   Exemplo 2.14. Considere as matrizes:

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(matriz } 2 \times 3)$$

   $$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{(matriz } 4 \times 2)$$

   Note que no produto AB o número de colunas de A é 3, enquanto o número de linhas de B é 4. Como $3 \neq 4$, o produto AB **não é definido**, para o produto BA, temos que o número de colunas de B é 2 e o número de linhas de A também é 2. Logo, o produto BA **é possível** e resultará em uma matriz 4×3.

2. A multiplicação de matrizes não é, em geral, comutativa, isto é, $A \cdot B \neq B \cdot A$, mesmo quando ambos os produtos estão definidos.

   Exemplo 2.15. Sejam as matrizes

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Calculando o produto $A \cdot B$:

   $$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4) & (1 \cdot 0 + 2 \cdot 1) \\ (0 \cdot 3 + 1 \cdot 4) & (0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Agora, calculando o produto $B \cdot A$:

   $$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \cdot 1 + 0 \cdot 0) & (3 \cdot 2 + 0 \cdot 1) \\ (4 \cdot 1 + 1 \cdot 0) & (4 \cdot 2 + 1 \cdot 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Propriedade Importante:

Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Então

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Então

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Primeiro calculamos o produto AB:

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Tomando a transposta:

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} ae + bg & ce + dg \\ af + bh & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Agora calculamos separadamente B^t e A^t:

$$B^t = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

O produto $B^t A^t$ é

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + gb & ec + gd \\ fa + hb & fc + hd \end{pmatrix}.$$

Como a multiplicação de escalares comuta ($ae = ea$, $bg = gb$, etc.), podemos reescrever

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} ae + bg & ce + dg \\ af + bh & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Comparando com a expressão encontrada para $(AB)^t$, vemos que são iguais. Portanto,

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

A partir do produto de matrizes podemos definir matrizes inversas:

Matriz Inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é **invertível** (ou **não singular**) se existir uma matriz A^{-1} tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Exemplo 2.16.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vamos verificar que A e B são inversas, calculando os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Analogamente,

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ -3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & -3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Portanto, A e B são matrizes inversas, pois seus produtos em ambas as ordens resultam na matriz identidade I_2.

Exemplo 2.17. Uma empresa fabrica dois produtos: A e B. A quantidade produzida de cada um em um dia é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 30 & 20 \end{bmatrix}$$

Os custos unitários (em reais) de produção são representados pela matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \end{bmatrix}$$

O custo total de produção é obtido pela multiplicação:

$$P \cdot C = \begin{bmatrix} 30 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \end{bmatrix} = 30 \cdot 50 + 20 \cdot 80 = 1500 + 1600 = 3100$$

Exemplo 2.18. Uma cervejaria produz dois tipos de cerveja: Pilsen (P) e IPA (I). Os ingredientes principais e suas quantidades (em kg por lote) são dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

onde as linhas correspondem a: Malte, Lúpulo e Levedura, respectivamente.

Durante a semana, foram produzidos:

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

O total de ingredientes utilizados é:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10 + 7 \cdot 6 \\ 1 \cdot 10 + 3 \cdot 6 \\ 0.2 \cdot 10 + 0.3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92 \\ 28 \\ 3.8 \end{bmatrix}$$

Uma vez compreendida a estrutura e o comportamento das matrizes, torna-se natural explorar uma de suas aplicações mais diretas: a resolução de sistemas lineares. As operações matriciais permitem expressar sistemas de equações de maneira compacta e eficiente, favorecendo tanto a análise teórica quanto o tratamento computacional dos problemas. Neste contexto, o estudo dos determinantes surge como um complemento essencial, fornecendo critérios de existência e unicidade de soluções, além de permitir o cálculo explícito por meio da Regra de Cramer e outros métodos equivalentes.

3 Sistemas Lineares e Determinantes

Vamos estudar os sistemas lineares de n equações e n incógnitas e suas relações com matrizes e determinantes. Além disso, veremos a regra de Cramer para encontrar a solução desses sistemas.

3.1 Sistemas Lineares e Matrizes

Um **sistema linear com n equações e n incógnitas** é um conjunto de equações da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

onde:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas do sistema;
- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ são os coeficientes reais associados às incógnitas;
- $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ são os termos independentes.

Forma Matricial

Esse sistema pode ser representado na forma matricial como:

$$A \cdot X = B$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Nomeamos A como matriz dos coeficientes, X como matriz das incógnitas e B como matriz dos termos independentes.

Solução do Sistema

A solução desse sistema linear com n equações e n incógnitas é uma n-úpla ordenada

$$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

que satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema. Em outras palavras, ao substituir cada x_i^0 nas equações, todas as igualdades devem ser verdadeiras.

Sistemas Equivalentes

Definição 3.1. Dois sistemas lineares são chamados de *equivalentes* quando possuem exatamente o mesmo conjunto solução. Ou seja, toda solução de um sistema também é solução do outro, e vice-versa. Isso se deve ao fato de que as soluções de um sistema de equações homogêneo (b=0) lineares determinam um subespaço de R^n.

Para transformar um sistema em outro equivalente, podemos utilizar as chamadas **operações elementares**, que não alteram seu conjunto solução. Essas operações são:

1. **Trocar duas equações de lugar**: a ordem das equações não interfere no conjunto solução.
2. **Multiplicar uma equação por um escalar não nulo**: todos os termos da equação podem ser multiplicados por um número real diferente de zero, sem alterar sua validade.
3. **Somar (ou subtrair) a uma equação um múltiplo de outra equação**: permite eliminar incógnitas e simplificar o sistema, mantendo o conjunto solução inalterado.

Exemplo 3.2. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 4 \quad (1) \\ 2x - y = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Agora, troquemos a ordem das equações:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \quad (2) \\ x + y = 4 \quad (1) \end{cases}$$

O novo sistema é equivalente ao anterior, pois a troca de posição das equações **não altera o conjunto solução**. Ambos os sistemas têm a mesma solução.

3.2 Determinante e Regra de Cramer

Com o objetivo de determinar a solução desses sistemas faremos um estudo de casos:

Caso $n = 1$

O sistema possui 1 equação e 1 incógnita, ou seja,

$$a_{11} \cdot x_1 = b_1. \tag{3.1}$$

- Se $a_{11} = 0$, temos duas possibilidades para b_1:

  i. $b_1 = 0$:
  Note que nesse caso x_1 pode ser qualquer número real, tendo **infinitas soluções** para a equação.

  ii. $b_1 \neq 0$:
  Nesta situação **não teremos solução**, pois $0 \cdot x_1 = 0 \neq b_1$.

- Se $a_{11} \neq 0$:

  – Dividindo ambos os membros da equação 3.1 por a_{11}, obtendo **uma única solução**:
  $$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Nesse caso a_{11} determina se a equação (sistema) terá infinitas soluções, nenhuma solução ou uma única solução.

O sistema pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}_{1\times1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix}_{1\times1} = \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix}_{1\times1} \tag{3.2}$$

Pela importância do coeficiente a_{11}, vamos definir $det(A) = a_{11}$ ou ainda $|A| = a_{11}$ como sendo o determinante da matriz dos coeficientes.

Caso $n = 2$

O sistema possui 2 equações e 2 incógnitas, ou seja

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

Note que esse sistema pode ser escrito através do produto matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

A fim de simplificar a notação, o sistema 3.3 pode ser escrito como:

$$\begin{cases} ax + by = k & \text{I} \\ cx + dy = m & \text{II} \end{cases} \tag{3.4}$$

e sua forma matricial passa a ser:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

- Se $a = b = c = d = 0$, temos duas possibilidades:

Possibilidade I: $k = m = 0$

Neste caso todo par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ será solução solução do sistema.

Possibilidade II: $k \neq 0$ ou $m \neq 0$

Neste caso, o sistema não tem solução, pois tudo que esta à esquerda da igualdade é nulo e o que esta à direita é diferente de zero, gerando uma contradição.

- Se pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d for diferente de zero.

  Vamos supor, sem perda de generalidade que $a \neq 0$ senão podemos obter um sistema equivalente (trocando a ordem das equações ou as colunas das incógnitas), de forma que $a \neq 0$

  Sendo $a \neq 0$, podemos dividir a equação I do sistema 3.4 por a. Fazendo assim teremos:

$$\begin{aligned} ax + by = k \Rightarrow ax = k - by \quad (\div a) \\ \Rightarrow x = \frac{k - by}{a} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Efetuando a substituição da equação 3.6 na equação II do sistema 3.4, resulta:

$$cx + dy = m \Rightarrow$$
$$c \cdot (\frac{k - by}{a}) + dy = m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{ck - bcy}{a} + dy = m \Rightarrow ck - bcy + ady = am$$

$$\Rightarrow y(ad - bc) = am - ck \tag{3.7}$$

Se $ad - bc = 0$ e $am - ck \neq 0$, a equação não tem solução, pois $ad - bc$ sendo nulo multiplicado por qualquer fator y, a resultante $am - ck$ será nula também.

Se $ad - bc = 0$ e $am - ck = 0$, teremos infinitas soluções, pois $ad - bc = 0$ multiplicado por qualquer fator y, a resultante será nula e as soluções serão:

$$\left(\frac{k - by}{a},\ y\right), \quad y \in \mathbb{R}$$

Se $ad - bc \neq 0$, podemos dividir a equação 3.7 por $ad - bc$ e obter o valor de y como sendo:

$$\Rightarrow y = \frac{am - ck}{ad - bc} \tag{3.8}$$

Substituindo a equação 3.8 em 3.6 obtemos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{k - b \cdot \left(\frac{am-ck}{ad-bc}\right)}{a} \\
&= \frac{1}{a}\left[k - \frac{b(am - ck)}{ad - bc}\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{k(ad - bc) - b(am - ck)}{ad - bc}\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{kad - kbc - amb + bck}{ad - bc}\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{kad - amb}{ad - bc}\right] \\
&= \frac{adk - amb}{a(ad - bc)} \\
&= \frac{a(dk - mb)}{a(ad - bc)} \\
&= \frac{dk - mb}{ad - bc}
\end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema em função de a, b, c, d, k, m é:

$$\Rightarrow \left(\frac{dk - mb}{ad - bc}, \frac{am - ck}{ad - bc}\right) \tag{3.9}$$

Observe a importância de $ad - bc$ no sistema, ele <u>determina</u> se o sistema terá uma única solução, não terá solução, ou terá infinitas soluções. Vamos definir $det(A) = ad - bc$, ou ainda $|A| = ad - bc$, como sendo o determinante da matriz dos coeficientes. Por isso, o nome Determinante é bem colocado.

Note que ao denotarmos D_x como sendo determinante da matriz trocando a coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes, D_y como sendo determinante da matriz trocando a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes e D como o determinante da matriz dos coeficientes, ou seja, $D = ad - bc$ temos que a solução 3.9 pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) \tag{3.10}$$

Ou seja,

$$x = \frac{D_x}{D} \quad e \quad y = \frac{D_y}{D} \tag{3.11}$$

É a solução desse sistema linear.

Exemplo 3.3. Devido à importância do sistema linear no caso $n = 2$ para esse trabalho, vejamos um exemplo da aplicação dessa ideia para fixação.

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$$

Seja D o determinante da matriz dos coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (3)(5) = -2 - 15 = -17$$

Agora, calculamos D_x, substituindo a coluna dos coeficientes de x pelos termos independentes:

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = (8)(-1) - (3)(7) = -8 - 21 = -29$$

E calculamos D_y, substituindo a coluna dos coeficientes de y pelos termos independentes:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (2)(7) - (8)(5) = 14 - 40 = -26$$

Portanto a solução do sistema é:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-29}{-17} = \frac{29}{17}, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-17} = \frac{26}{17}$$

Caso n = 3

O sistema possui 3 equações e 3 incógnitas, ou seja

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Procedendo de forma análoga ao caso 2 encontraremos o determinante da matriz A desse sistema como $\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$.

Consideramos o caso $n = 2$ como elemento fundamental para a compreensão deste trabalho, razão pela qual ele foi explorado com maior cuidado e precisão. O caso $n = 3$ foi mencionado como sugestão para trabalhos futuros, mas nesse caso é possível concluir que se $D \neq 0$ a solução desse sistema será:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

Onde D é o determinante da matriz dos coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Além disso:

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Este método, que funciona para qualquer sistema $n \times n$, ficou amplamente conhecido como **regra de Cramer**, desenvolvida por Gabriel Cramer no século XVIII, essa regra permite resolver sistemas lineares com o mesmo número de equações e incógnitas. Utilizando determinantes. A ideia central é expressar cada incógnita como o quociente entre dois determinantes: o determinante da matriz dos coeficientes e o determinante obtido ao substituir uma coluna dessa matriz pelos termos independentes.

Exemplo 3.4. Devido a sua popularidade e facilidade em encontrar a solução de sistemas de equações com poucas equações, vejamos um exemplo da aplicação da regra de Cramer para um sistema com $n = 3$.

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante principal $D = \det(A)$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot ((-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 2) - 1 \cdot (2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) + 1 \cdot (2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1)$$

$$D = 1(1 - 6) - 1(-2 - 3) + 1(4 + 1) = -5 + 5 + 5 = 5.$$

Agora, substituímos a 1ª coluna de A pelos termos independentes para obter D_x:

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6((-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 2) - 1(14 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2)) + 1(14 \cdot 2 - (-1) \cdot -2)$$

$$D_x = 6(1 - 6) - (-14 + 6) + (28 - 2) = 6(-5) - (-8) + 26 = -30 + 8 + 26 = 4$$

Substituímos a 2ª coluna de A pelos termos independentes para obter D_y:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1(14 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2)) - 6(2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) + 1(2 \cdot (-2) - 14 \cdot 1)$$

$$D_y = 1(-14 + 6) - 6(-2 - 3) + 1(-4 - 14) = -8 + 30 - 18 = 4$$

Substituímos a 3ª coluna de A pelos termos independentes para obter D_z:

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 14 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1((-1) \cdot (-2) - 14 \cdot 2) - 1(2 \cdot (-2) - 14 \cdot 1) + 6(2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1)$$

$$D_z = 1(2-28) - (-4-14) + 6(4+1) = -26 + 18 + 30 = 22$$

Aplicando a Regra de Cramer:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{4}{5}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{4}{5}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{22}{5}$$

Regra de Laplace

Definição 3.5. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. A **Regra de Laplace** permite calcular o determinante de A por meio do desenvolvimento ao longo de qualquer linha ou coluna. O determinante de A é dado por:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \tag{3.12}$$

se o desenvolvimento for feito ao longo da linha i, ou:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \tag{3.13}$$

se o desenvolvimento for feito ao longo da coluna j.

Onde: a_{ij} é o elemento da matriz na i-ésima linha e j-ésima coluna e A_{ij} é a *matriz complementar* (ou menor complementar) obtida eliminando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A.

Exemplo 3.6. Vamos calcular o determinante da matriz A abaixo, utilizando a **segunda linha**, que possui três zeros:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que a segunda linha tem apenas um elemento diferente de zero, o $a_{23} = 5$. Aplicando a Regra de Laplace na segunda linha:

$$\det(A) = (-1)^{2+3} \cdot 5 \cdot \det(A_{23})$$

$$\det(A) = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Agora, calculamos o determinante da matriz 3×3:

$$\det(A_{23}) = 1 \cdot (7 \cdot 1 - 9 \cdot 0) - 2 \cdot (6 \cdot 1 - 9 \cdot 1) + 4 \cdot (6 \cdot 0 - 7 \cdot 1)$$

$$\det(A_{23}) = 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-7) = 7 + 6 - 28 = -15$$

Logo:

$$\det(A) = -5 \cdot (-15) = 75$$

Portanto o determinante da matriz A é $\boxed{75}$.

3.3 Uma Aplicação Importante de Determinante na Classificação de Sistemas Lineares $n \times n$.

Para entender melhor essa aplicação, é importante saber como os sistemas lineares podem ser classificados.

Classificação de um sistema linear

A classificação de um sistema linear quanto à existência e unicidade da solução está diretamente relacionada à estrutura das equações e ao **determinante** da matriz dos coeficientes, especialmente no caso de sistemas quadrados (n equações e n incógnitas) que são os objetos de estudo deste trabalho.

Um sistema linear pode ser classificado em três tipos, com base na análise das suas equações e na relação entre elas:

Sistema Possível e Determinado

Esse tipo de sistema ocorre quando: **a solução é única**.

No caso de sistemas quadrados, isso acontece quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero, ou seja, $\det(A) \neq 0$, pois $\det(A)$ aparece nos denominadores das frações em 3.9. Logo, para que a solução exista, ele precisa ser diferente de zero.

Exemplo 3.7.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = (1)(-1) - (2)(1) = -3 \neq 0.$$

Portanto, o sistema é possível e determinado.

Sistema Possível e Indeterminado

Possui infinitas soluções. Esse tipo de sistema ocorre quando $\det(A) = 0$ e $D_x = D_y = 0$.

Exemplo 3.8. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz dos coeficientes é:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2 - 2 = 0.$$

Como $\det(A) = 0$, a Regra de Cramer não pode ser aplicada diretamente. Ainda assim, vamos calcular os determinantes:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0.$$

Como $D = D_x = D_y = 0$, o sistema é **possível e indeterminado**, ou seja, possui infinitas soluções.

Sistema Impossível

Não possui solução. Esse tipo de sistema ocorre quando $\det(A) = 0$ e $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$.

Exemplo 3.9. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz dos coeficientes é:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$$

Determinante D_x:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = -2.$$

Determinante D_y:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2.$$

Como $\det(A) = 0$ e D_x, D_y são diferentes de zero, o sistema é **impossível**, ou seja, não possui solução. Note que nesse exemplo tanto D_x quanto D_y são diferentes de zero, mas pela definição basta que um deles seja diferente de zero para que o sistema seja impossível.

3.4 Propriedades dos Determinantes

Muitos cálculos com determinantes podem ser simplificados quando estamos munidos de algumas propriedades fundamentais. Essas propriedades tornam o raciocínio lógico-matemático mais ágil e permitem que cheguemos a conclusões mais seguras sobre os resultados obtidos.

Neste tópico, abordaremos algumas dessas propriedades importantes.

Propriedade 1:

Se a matriz $A_{n\times n}$ tiver uma linha múltipla de outra teremos $det(A) = 0$.
Demonstração:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) \quad = \quad akb - bka = 0.$$

Logo, o determinante é nulo.

Exemplo 3.10. Considere a matriz A definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Como a segunda linha é o dobro da primeira o determinante é zero.

Propriedade 2:

Se trocarmos 2 linhas ou colunas de uma matriz, o determinante muda de sinal.

Demonstração:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow det(A) = ad - bc$$

$$A' = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \Rightarrow det(A') = cb - ad = -(ad - bc).$$

Exemplo 3.11. Sejam as matrizes A e B tais que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Como a matriz B é a matriz A com as linhas trocas então $\det(B) = -\det(A)$.

Propriedade 3:

Se multiplicarmos uma linha ou coluna por um número k real, o determinante é multiplicado por k.

Demonstração:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A') = kad - kbc = k(ad - bc) = k \cdot \det A$$

Exemplo 3.12. Sejam as matrizes A e B tais que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz B é a matriz A com a primeira linha multiplicada por 5 então $\det(B) = 5 \cdot \det(A)$.

Propriedade 4 (Regra de Cauchy dos Cofatores):

Sejam as matrizes A e B então $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}.$$

Calculamos o produto AB:

$$AB = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix},$$

O determinante de AB é:

$$\det(AB) = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg),$$

Expandindo os termos:

$$\begin{aligned} \det(AB) = (ae)(cf) + (ae)(dh) + (bg)(cf) + (bg)(dh) \\ - \left[(af)(ce) + (af)(dg) + (bh)(ce) + (bh)(dg)\right] \end{aligned}$$

$$= aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg.$$

Agrupando os termos, temos:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= ac(ef - fe) + ad(eh - fg) + bc(gf - he) + bd(gh - hg) \\ &= ad(eh - fg) + bc(gf - he). \end{aligned}$$

Note que

$$gf - he = -(eh - fg).$$

Assim,

$$\det(AB) = ad(eh - fg) - bc(eh - fg) = (ad - bc)(eh - fg).$$

Reconhecendo os determinantes das matrizes A e B:

$$\det(A) = ad - bc, \quad \det(B) = eh - fg.$$

Logo,

$$\boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}.$$

Exemplo 3.13. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2, \quad \det(B) = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 7 = -2, \quad \det(AB) = 19 \cdot 50 - 22 \cdot 43 = 4,$$

$$\det(A) \cdot \det(B) = (-2) \cdot (-2) = 4 \Rightarrow \boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}.$$

Propriedade 5:

Seja a matriz $A_{n \times n}$, então A é invertível $\iff$ $\det(A) \neq 0$:

($\iff$) Sendo $A \neq 0$, temos

$$A \cdot A^{-1} = I \iff \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1$$

Pela propriedade 4 temos que $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$. Assim:

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \iff \det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})} \iff \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Portanto, $\det(A) \neq 0$.

Exemplo 1: Matriz Invertível

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante:

$$\det(A) = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2 \neq 0.$$

Portanto, A é uma matriz invertível.

Exemplo 2: Matriz Não Invertível

Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante:

$$\det(B) = (1)(4) - (2)(2) = 4 - 4 = 0.$$

Como o determinante é zero, B não é invertível.

3.5 Matriz Inversa: Um Importante uso dos Sistemas Lineares

Para encontrar a inversa de uma matriz quadrada A de ordem n, podemos utilizar sistemas lineares da forma matricial. A matriz inversa A^{-1} satisfaz

$$AA^{-1} = I_n, \tag{3.14}$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Sejam as incógnitas da matriz inversa representadas por $X = [x_{ij}]$, com $i, j = 1, \ldots, n$. A equação acima pode ser escrita como o sistema matricial

$$AX = I_n, \tag{3.15}$$

ou seja, devemos encontrar a matriz X que satisfaça essa igualdade.

Exemplo 3.14. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Queremos encontrar X tal que

$$AX = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto equivale a resolver o sistema matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, os dois sistemas lineares a resolver são:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cálculo do determinante de A:

$$\det(A) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1 \neq 0,$$

portanto, A é invertível e podemos aplicar a Regra de Cramer.

Resolução do primeiro sistema com Regra de Cramer:

O sistema é

$$\begin{cases} 2x_{11} + 1x_{21} = 1, \\ 3x_{11} + 2x_{21} = 0. \end{cases}$$

As matrizes para encontrar x_{11} e x_{21} são:

$$\det(A) = 1,$$

$$\det(A_{x_{11}}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 2,$$

$$\det(A_{x_{21}}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3.$$

Assim,

$$x_{11} = \frac{\det(A_{x_{11}})}{\det(A)} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$x_{21} = \frac{\det(A_{x_{21}})}{\det(A)} = \frac{-3}{1} = -3.$$

Resolução do segundo sistema com Regra de Cramer:

O sistema é

$$\begin{cases} 2x_{12} + 1x_{22} = 0, \\ 3x_{12} + 2x_{22} = 1. \end{cases}$$

As matrizes para encontrar x_{12} e x_{22} são:

$$\det(A) = 1,$$

$$\det(A_{x_{12}}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -1,$$

$$\det(A_{x_{22}}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 2.$$

Assim,

$$x_{12} = \frac{\det(A_{x_{12}})}{\det(A)} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$x_{22} = \frac{\det(A_{x_{22}})}{\det(A)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Portanto, a matriz inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

De forma mais geral, os sistemas lineares nos permitem determinar um método para calcular a matriz inversa de matrizes 2x2 por meio de determinantes. Vejamos:

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e sua inversa} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

Sabemos que:

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando as matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix}.$$

Igualando à matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resultando no sistema:

$$\begin{cases} (1) \quad ax + bz = 1 \\ (2) \quad ay + bw = 0 \\ (3) \quad cx + dz = 0 \\ (4) \quad cy + dw = 1 \end{cases}$$

Parte 1: Determinar x e z pelas equações (1) e (3):

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}$$

Esse sistema pode ser escrito na forma matricial:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Aplicando o **método de Cramer**, temos:

- $\det(A)$: determinante da matriz dos coeficientes:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- $\det(A_x)$: substituindo a primeira coluna de A pelo vetor dos termos independentes $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 1 \cdot d - b \cdot 0 = d.$$

- $\det(A_z)$: substituindo a segunda coluna de A pelo vetor dos termos independentes:

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} = a \cdot 0 - 1 \cdot c = -c.$$

Portanto, as soluções são:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{d}{ad - bc}, \quad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-c}{ad - bc}.$$

Parte 2: Determinar y e w pelas equações (2) e (4):

$$\begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

Esse sistema pode ser escrito na forma matricial:

$$A \cdot \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Aplicando o **método de Cramer**, temos:

- $\det(A)$: determinante da matriz dos coeficientes:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- $\det(A_y)$: substituindo a primeira coluna de A pelo vetor dos termos independentes $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} = 0 \cdot d - b \cdot 1 = -b.$$

- $\det(A_w)$: substituindo a segunda coluna de A pelo vetor dos termos independentes:

$$\det(A_w) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 - 0 \cdot c = a.$$

Logo, as soluções são:

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-b}{ad-bc}, \quad w = \frac{\det(A_w)}{\det(A)} = \frac{a}{ad-bc}$$

Portanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

A utilidade das matrizes ultrapassa o campo puramente algébrico, estendendo-se à representação de fenômenos geométricos e transformações no espaço. Compreendidos os conceitos de sistemas lineares e determinantes, é possível aplicá-los ao estudo da Geometria Analítica, em que as matrizes assumem papel central na descrição de transformações lineares, mudanças de base e rotações de eixos. O próximo capítulo explora essas conexões, evidenciando como a linguagem matricial facilita a interpretação geométrica de operações algébricas.

4 As Matrizes na Geometria Analítica

4.1 Matrizes e Vetores

Note que podemos associar uma matriz coluna

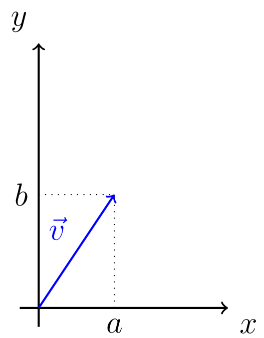
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

com um vetor $\vec{v} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) \in \mathbb{R}^n$. Como nosso foco será no $\mathbb{R}^2$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ associada ao } \quad \vec{v} = (a, b).$$

Na Geometria Analítica podemos visualizar o vetor $\vec{v}$ conforme imagem 1.

Figura 1 – Vetor $\vec{v} = (a, b)$



Fonte: próprio autor.

Note que se multiplicarmos um número real $k \neq 0$ pela matriz A então o vetor $\vec{v}$ também será multiplicado por k, ou seja

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix} \Rightarrow k \cdot \vec{v} = (ka, kb).$$

Vamos provar que $(0, 0)$, (a, b) e (ka, kb) estão alinhados.

Proposição 4.1. *Seja s a reta que passa pelos pontos $(0,0)$ e (a,b). Assim tomando o ponto $(0,0)$ na equação fundamental da reta temos:*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 0 = m(x - 0)$$
$$y = m \cdot x. \tag{4.1}$$

Tomando agora o ponto (a,b) na equação 4.1 teremos:

$$b = ma \Rightarrow m = \frac{b}{a},\ a \neq 0.$$

Logo a reta s tem a seguinte equação:

$$y = \frac{b}{a} \cdot x \tag{4.2}$$

fazendo $x = ka$ na equação 4.2 teremos:

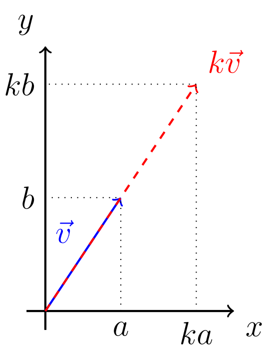
$$y = \frac{b}{a} \cdot ka$$

$$y = kb.$$

Portanto o ponto $(k_a, k_b) \in s$.

Além disso, como os pontos $(0,0)$, (a,b) e (ka,kb) são colineares, temos que para $k > 0$, o vetor $k\vec{v}$ tem o mesmo espaço e o mesmo sentido de $\vec{v}$(figura 2) e para $k < 0$, o vetor $k\vec{v}$ tem a mesma direção e sentido contrário de $\vec{v}$.

Figura 2 – Vetores $\vec{v} = (a,b)$ e $\vec{kv} = (k_a, k_b)$



Fonte: próprio autor.

Definição: Quando um vetor é múltiplo escalar de outro, dizemos que são paralelos.

Exemplo 4.2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que:

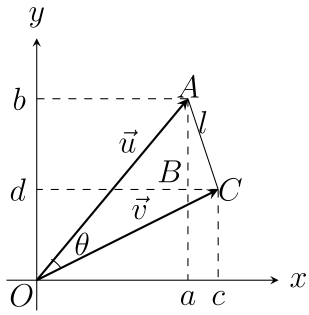
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, pois $\vec{u} = 2\vec{v}$.

4.2 Ângulo entre vetores

Sejam os vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ não paralelos.

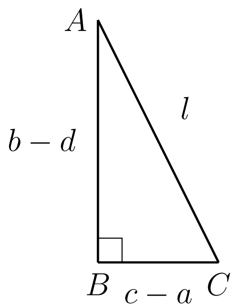
Figura 3 – Representação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com ângulo θ entre eles.



Fonte: próprio autor.

Vamos observar o triângulo $A(a, b)$, $B(a, d)$ e $C(c, d)$, retângulo em $\hat{B}$.

Figura 4 – Triângulo retângulo ABC



Fonte: próprio autor.

Assim, pelo teorema de Pitágoras, vem:

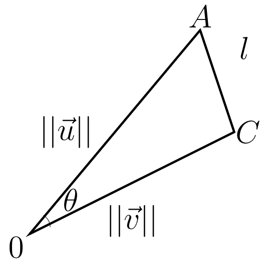
$$l^2 = (b - d)^2 + (c - a)^2. \tag{4.3}$$

Agora observe o triângulo OAC.

Como $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $||\vec{v}|| = \sqrt{c^2 + d^2}$, pela lei dos cossenos temos:

$$l^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{c^2 + d^2}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \cos(\theta). \tag{4.4}$$

Figura 5 – Triângulo OAC



Fonte: próprio autor.

Assim pelas equações 4.3 e 4.4 temos:

$$(b-d)^2 + (c-a)^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\cos(\theta) \Rightarrow$$

$$d^2 - 2bd + b^2 + c^2 - 2ac + a^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\cos(\theta) \Rightarrow$$

$$-2(ac+bd) = -2\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\cos(\theta) = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}.$$

Onde $ac+bd$ é definido como produto interno e usamos a notação $\langle\vec{u}\cdot\vec{v}\rangle$. Mais geralmente, se $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ então denotamos o produto interno ente u e v por:

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Assim,

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}, 0 < \theta < \pi \tag{4.5}$$

Exemplo 4.3. Sejam os vetores:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}.$$

- Produto interno:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = 3 + 2 = 5.$$

- Norma dos vetores:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}.$$

- Cálculo do cosseno do ângulo:

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Logo:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ.$$

4.3 Um importante teorema usado em álgebra linear

Teorema 4.4. *Sejam as matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad e \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

onde $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *são vetores associados as matrizes* X *e* Y*, respectivamente, então*

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^t v\rangle$$

Como nosso foco é em $\mathbb{R}^2$, provaremos o seguinte caso particular do teorema 4.4:

Proposição 4.5. *Sejam as matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

onde os vetores $\vec{u} = (x_1, x_2)$ *e* $\vec{v} = (y_1, y_2)$ *são associados as matrizes* X *e* Y *respectivamente. Então*

$$\langle A\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, A^t\vec{v}\rangle$$

Demonstração: Vamos calcular ambos os lados da igualdade.

Produto $A\vec{u}$:

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}.$$

Produto interno $\langle A\vec{u}, \vec{v}\rangle$:

$$\langle A\vec{u}, \vec{v}\rangle = (ax_1 + bx_2)y_1 + (cx_1 + dx_2)y_2 = x_1(ay_1 + cy_2) + x_2(by_1 + dy_2).$$

Produto $A^t\vec{v}$:

$$A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad A^t\vec{v} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ay_1 + cy_2 \\ by_1 + dy_2 \end{bmatrix}.$$

Produto interno $\langle \vec{u}, A^t\vec{v}\rangle$:

$$\langle \vec{u}, A^t\vec{v}\rangle = x_1(ay_1 + cy_2) + x_2(by_1 + dy_2).$$

Conclusão:

$$\langle A\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, A^t\vec{v}\rangle.$$

Provamos que tal teorema é válido para matrizes 2×2. Vejamos, por meio de um exemplo, sua validade para matrizes 3×3.

Exemplo 4.6. Sejam A uma matriz de ordem três e $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vetores dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calculamos o produto $A\vec{u}$:

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

O produto interno entre $A\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

$$\langle A\vec{u}, \vec{v}\rangle = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-4) \cdot 0 = 2 - 2 + 0 = 0.$$

Agora, calculemos A^t e o vetor $A^t\vec{v}$:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^t\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O produto interno entre $\vec{u}$ e $A^t\vec{v}$ é:

$$\langle \vec{u}, A^t\vec{v}\rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 7 + (-1) \cdot 1 = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Portanto, temos:

$$\langle A\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, A^t\vec{v}\rangle = 0$$

Verificando, assim, a validade do teorema para este exemplo com matrizes 3×3.

4.4 Autovalor e autovetor de uma matriz

Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad e \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o vetor associado a matriz X. Dizemos que x é um autovetor de A com autovalor λ se

$$A \cdot X = \lambda \cdot X = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.7. Se $A = I_{n\times n}$ então:

$$A \cdot x = I \cdot x = x = 1 \cdot x.$$

Assim podemos afirmar que toda matriz coluna é autovetor da matriz identidade com o autovalor 1.

A fim de determinar autovalores e autovetores de uma matriz $A_{n\times n}$ precisamos encontrar x e λ tais que

$$A \cdot x = \lambda \cdot x.$$

$$\text{Como} \quad \lambda \cdot x = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}, \quad \text{temos que}$$

$$A \cdot x = \lambda \cdot I \cdot x$$

Somando $-\lambda I x$ em ambos os lados, temos

$$A \cdot x - \lambda I x = \mathbf{0}_{n\times n}.$$

pela distributividade da multiplicação de matrizes temos

$$(A_{n\times n} - \lambda I_{n\times n}) \cdot x_{n\times 1} = \mathbf{0}_{n\times n}.$$

Observação:

Se

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{então}$$

λ pode ser qualquer real, ou seja,

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

é autovetor de qualquer matriz com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Queremos autovetores não nulos, para isso devemos ter que

$$\det(A_{n\times n} - \lambda I) = 0.$$

Fazendo isso, encontramos uma equação de grau n cuja incógnita é λ. Resolvendo essa equação, encontramos os autovalores.

Para encontrarmos os autovetores correspondentes a cada autovalor, substituímos cada λ em

$$(A - \lambda I)x = 0$$

e resolvemos um sistema que terá infinitas soluções que serão autovetores com respeito ao autovalor λ.

Definição 4.8. A identidade gerada pela igualdade determinante anterior é chamado de **polinômio característico** da matriz.

Exemplo 4.9. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) - \sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2 - 6$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Via Bhaskara,

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4$$

são os autovalores.

Para $\lambda = -1$, temos

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora resolver

$$(A - \lambda I) \cdot X = 0,$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I) $2x_1 + \sqrt{6}x_2 = 0$.

II) $\sqrt{6}x_1 + 3x_2 = 0$.

De I: $2x_1 = -\sqrt{6}x_2 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-\sqrt{6}x_2}{2}$

De II: $\sqrt{6}x_1 = -3x_2 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-3x_2}{\sqrt{6}}$

Racionalizando,

$$x_1 = \frac{-3x_2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{-3\sqrt{6}x_2}{6} = \frac{-\sqrt{6}x_2}{2}$$

Logo, o sistema tem infinitas soluções.

Então, os autovetores de A associados a $\lambda = -1$ são descritos por:

$$v_{\lambda_1} = \left(\frac{-\sqrt{6}x_2}{2},\ x_2 \right),$$

um autovetor explícito é dado por

$$v_{\lambda_1} = \left(\frac{-\sqrt{6}}{2},\ 1\right) \cdot x_2.$$

Para $\lambda_2 = 4$, temos

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o que implica

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

equivalentemente,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -2 \end{bmatrix}.$$

$$(A - \lambda I) \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-3x_1 + \sqrt{6}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{6}x_2}{3}$$
$$\sqrt{6}x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2x_2}{\sqrt{6}}$$

Racionalizando:

$$x_1 = \frac{2x_2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}x_2}{3}.$$

Ou seja, os autovetores de A associados a $\lambda = 4 são o dados por:$

$$\left(\frac{\sqrt{6}x_2}{3},\ x_2\right) = x_2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3},\ 1\right).$$

Entre as transformações lineares mais relevantes na Geometria Analítica, destacam-se aquelas que preservam comprimentos e ângulos — as transformações ortogonais. As matrizes ortogonais são a expressão algébrica dessas transformações, desempenhando papel fundamental na descrição de rotações e reflexões em planos e espaços tridimensionais. Assim, o último capítulo aprofunda o estudo dessas matrizes especiais, destacando suas propriedades, condições de ortogonalidade e implicações geométricas.

5 Matrizes Ortogonais e Classificação de Matrizes Ortogonais 2x2

5.1 Matrizes Ortogonais

Essas matrizes estão sendo estudadas por terem a natureza de preservarem tanto a norma quanto o ângulo entre vetores.

Definição 5.1. Uma matriz $A_{n\times n}$ é dita ortogonal quando $A^t = A^{-1}$,
isto é, $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_{n\times n}$.

Definição 5.2. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ se:

$$v_i \neq v_j, \forall i \neq j, \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0.$$

Definição 5.3. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ se:

1. $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \ldots = \|\vec{v}_n\| = 1$,
2. $v_i \neq v_j$, $\forall i \neq j$ $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$.

Teorema 5.4. *$A_{n\times n}$ é ortogonal, se e somente se, as linhas e as colunas de A determinam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{j1} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{j2} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{jn} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então, A é ortogonal se, somente se,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{j1} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{j2} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{jn} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $A \cdot A^t = C = I$

Então, para $i = j$ temos por exemplo,

$$c_{11} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2 = 1$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$c_j = a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + \ldots + a_{jn}^2 = 1$$

$\forall j = 1, \ldots, n.$

Isso mostra que todos os vetores correspondentes as linhas de A têm norma igual a 1.

Se $i \neq j$ então $c_{ij} = 0$ assim,

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot a_{j1} + a_{i2} \cdot a_{j2} + \ldots + a_{in} \cdot a_{jn} = 0.$$

o que mostra que $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \Rightarrow v_i \perp v_j$, mostrando ainda que as linhas formam uma base ortonormal.

Teorema 5.5. *Se $A_{n \times n}$ é ortogonal, então $\|Av\| = \|v\|$, para $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ onde $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Demonstração do Teorema:

Vamos mostrar que $\|Av\|^2 = \|v\|^2$, que é o mesmo que mostrar que $\|Av\| = \|v\|$, uma vez que $\|Av\|$ e $\|v\|$ são maiores ou iguais a zero. Sabemos que

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle.$$

Pela Teorema 4.4 temos $\langle Av, Av \rangle = \langle v, A^t(Av) \rangle$ assim

$$\|Av\|^2 = \langle v, A^t(Av) \rangle = \langle v, (A^t \cdot A) \cdot v \rangle = \langle v, I \cdot v \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2.$$

Teorema 5.6. *Se $A_{n \times n}$ for uma matriz ortogonal e $\vec{u}$, $\vec{v}$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, então o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o mesmo ângulo entre $A\vec{u}$ e $A\vec{v}$.*

Demonstração:
Sabemos que o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Então $\cos\theta$ entre $A\vec{u}$ e $A\vec{v}$ e dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle A\vec{u}, A\vec{v}\rangle}{\|A\vec{u}\| \cdot \|A\vec{v}\|} = \frac{\langle u, A^t(Av)\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Portanto o ângulo entre $A\vec{u}$ e $A\vec{v}$ é o mesmo que o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Teorema 5.7. *Se $A_{n\times n}$ é ortogonal, então* $\det(A) = \pm 1$.

Demonstração:
Como A é ortogonal, temos

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= I \\ \Rightarrow \det(A \cdot A^t) &= \det(I) \\ \Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^t) &= 1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Observação 5.8. $\det(A) = \det(A^t)$.

Prova: seja A uma matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{logo} \quad A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Assim $\det(A) = ad - bc$ e $\det(A^t) = ad - bc$. Portanto $\det(A) = \det(A^t)$.

Da implicação 5.1 e da observação acima temos

$$\det(A) \cdot \det(A) = 1$$

$$\Rightarrow [\det(A)]^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

Teorema 5.9. *Se $A_{n\times n}$ é ortogonal, então seus autovalores são* 1 *ou* -1.

Demonstração:

Suponha que λ seja um autovalor com respeito ao autovetor $\vec{v}$, isto é

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \text{para} \quad v \neq 0. \tag{5.2}$$

Vamos provar que $\lambda = \pm 1$. Multiplicando pela esquerda amplos os lados da equação 5.2 por A temos

$$A^2\vec{v} = A(\lambda\vec{v})$$
$$\Rightarrow \lambda(A\vec{v}) = \lambda(\lambda\vec{v}) = \lambda^2\vec{v}.$$

Por outro lado,
$\langle Av, Av\rangle = \|Av\|^2 = \|v\|^2 \Rightarrow \|v\|^2 = \lambda^2\|v\|^2 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)\|v\|^2 = 0,$
como $\|v\| \neq 0$, temos $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

5.2 Classificação de Matrizes Ortogonais 2x2

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz ortogonal.

Assim, pelo que estudamos na seção anterior, a inversa da matriz A é igual a sua transposta. Em símbolos, $A^{-1} = A^t$.

Observação 5.10. Não podemos ter os quatro elementos da matriz A nulos, pois dessa forma A seria uma matriz nula e $\det(A) = 0$, logo A não seria invertível e portanto A não seria ortogonal.

Sejam $\vec{v}_1 = (a, c)$ e $\vec{v}_2 = (b, d)$ vetores de A. Logo, as normas de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{a^2 + c^2} = 1$ (I) e $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{b^2 + d^2} = 1$ (II). O produto interno entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, simbolizado por $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle$, é igual a zero pelo Teorema 5.4, ou seja $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle = ab + cd = 0$.

Para tal analisaremos os seguintes casos:

1. **Alguma das coordenadas de um vetor é nula:** Em $\vec{v}_1$ suponha que $a = 0$, portanto $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{0^2 + c^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{c^2} = 1 \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = 1 \quad ou \quad c = -1$, como $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle = 0 \cdot b + c \cdot d = 0 \Rightarrow d = 0$. Mas como $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{b^2 + d^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{b^2 + 0^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{b^2} = 1 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = 1 \quad ou \quad b = -1$. Então

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Analogamente, temos o mesmo resultado para $d = 0$ em $\vec{v}_2$.

   Em $\vec{v}_2$ suponha que $b = 0$, portanto $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{0^2 + d^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{d^2} = 1 \Rightarrow |d| = 1 \Rightarrow d = 1 \quad ou \quad d = -1$, como $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle = a \cdot 0 + c \cdot d = 0 \Rightarrow c = 0$. Mas como $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{a^2 + c^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 0^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2} = 1 \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = 1 \quad ou \quad a = -1$. Então

   $$A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

   Analogamente, temos o mesmo resultado para $c = 0$ em $\vec{v}_1$.

2. **Não há coordenadas nulas:** Suponha em $\vec{v_1}$ que $a \neq 0$; $b \neq 0$ e em $\vec{v_2}$ que $c \neq 0$; $d \neq 0$.

   Temos: $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, onde

   Pelo que vimos no capítulo anterior, a inversa de A,

   simbolizada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$, onde $ad - bc \neq 0$. Como A é ortogonal,

   $A^t = A^{-1}$,

   logo,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

   Igualando os termos correspondentes das matrizes, temos:

$$a = \frac{d}{ad-bc} \tag{5.3}$$

$$b = \frac{-c}{ad-bc} \tag{5.4}$$

$$c = \frac{-b}{ad-bc} \tag{5.5}$$

$$d = \frac{a}{ad-bc} \tag{5.6}$$

   Dividindo a igualdade 5.3 por d, temos:

$$\boxed{\frac{a}{d} = \frac{1}{ad-bc}}$$

   Dividindo a igualdade 5.5 por $-c$, temos:

$$\boxed{\frac{b}{-c} = \frac{1}{ad-bc}}$$

   Dividindo a igualdade 5.4 por $-b$, temos:

$$\boxed{\frac{c}{-b} = \frac{1}{ad-bc}}$$

Dividindo a igualdade 5.6 por a, temos:

$$\boxed{\frac{d}{a} = \frac{1}{ad - bc}}$$

Note que

$$\frac{1}{ad - bc} = \frac{a}{d} = \frac{d}{a} = \frac{b}{-c} = \frac{-c}{b}.$$

Podemos dizer então que: $\frac{a}{d} = \frac{d}{a}$ e $\frac{b}{-c} = \frac{-c}{b}$.

Daí $a^2 = d^2$ e $b^2 = c^2$.

Como $a^2 = d^2 \Rightarrow a = \pm d$ e $b^2 = c^2 \Rightarrow b = \pm c$.

Daí podemos ter quatro situações:

$\boxed{a = d \text{ e } b = -c}$ $\boxed{a = -d \text{ e } b = c}$ $\boxed{a = d \text{ e } b = c}$ $\boxed{a = -d \text{ e } b = -c}$

Que podemos dividir em três casos:

- **1º caso:** $a = d$ e $b = -c$;
- **2º caso:** $a = -d$ e $b = c$;
- **3º caso:** $(a = d$ e $b = c)$ ou $(a = -d$ e $b = -c)$.

Vejamos o **1º caso:** $a = d$ e $b = -c$.

Na matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, se $a = d$ e $b = -c$, substituiremos d por a e b por $-c$, assim temos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}.$$

Já vimos que as colunas de uma matriz ortogonal $n \times n$ fornam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Como vimos no capítulo anterior, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ se:

1. $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \ldots = \|\vec{v}_n\| = 1$;

2. $\vec{v}_i \neq \vec{v}_j$, para todo $i \neq j$ e $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_i \perp \vec{v}_j$.

Ou seja, em **1**, as normas de cada um dos vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ são iguais a **1** e em **2**, o produto interno de quaisquer dois vetores $\vec{v}_i \neq \vec{v}_j$, representado por $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$, é igual a zero, ou seja, $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$.

Então na matriz A, temos os vetores $\vec{v}_1 = (a, c)$ e $\vec{v}_2 = (-c, a)$ formando a primeira e a segunda coluna, respectivamente.

Note que

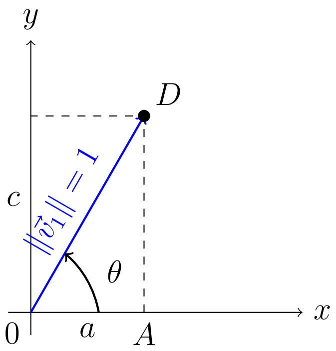
$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = a \cdot (-c) + c \cdot a \implies \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = -ac + ac = 0.$$

E ainda

$$\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \sqrt{a^2 + c^2} = 1. \tag{5.7}$$

Para que as colunas formem uma base ortogonal, podemos representar o vetor $\vec{v}_1$ da seguinte forma:

Figura 6 – Vetor $\vec{v_1}$



Fonte: próprio autor.

Note que o vetor $\vec{v_1}$ forma um ângulo θ com o eixo x no sentido anti-horário (contrário ao sentido dos ponteiros de um relógio).

Assim temos, pela definição de seno e cosseno no triângulo retângulo OAD, retângulo em Â, que $\cos\theta = \frac{a}{\|\vec{v_1}\|}$ e $\sin\theta = \frac{c}{\|\vec{v_1}\|}$.

Logo, $a = \cos\theta$ e $c = \sin\theta$, o que implica que $\vec{v_1} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Perceba que substituindo a por $\cos\theta$ e c por $\sin\theta$, a matriz A será escrita assim:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Vamos provar que a matriz A gira de um ângulo θ um vetor $\vec{v}$ qualquer no sentido anti-horário, ou seja, se $\vec{v} = (x, y)$, vamos demostrar que

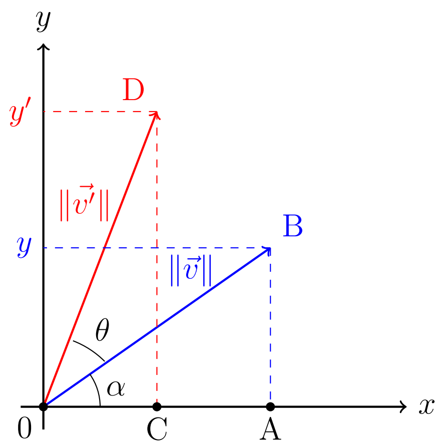
$$A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

é a rotação de $\vec{v} = (x, y)$ de θ graus no sentido anti-horário.

Considere o vetor $\vec{v} = (x, y)$ qualquer e $\vec{v'} = (x', y')$ como sendo a rotação de $\vec{v}$ de θ graus no sentido anti-horário. Temos que provar que:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Figura 7 – Vetor $\vec{v} = (x, y)$ e $\vec{v'} = (x', y')$



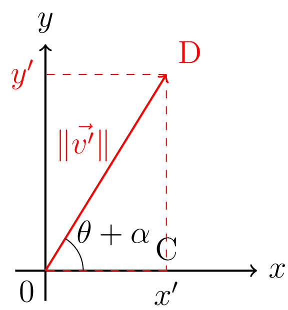
Fonte: próprio autor.

Pela definição de seno e cosseno no triângulo OAB,

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ e } \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Considere o triângulo ODC destacado da figura anterior

Figura 8 – Vetor $\vec{v'}$



Fonte: próprio autor.

Como $\vec{v'}$ é a rotação de $\vec{v}$ de um ângulo θ no sentido anti-horário, temos que a norma de $\|\vec{v'}\|$ é igual à norma de $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Quando rotacionamos um vetor, a sua norma (tamanho) permanece constante.

Pelas definições de seno e cosseno no triângulo retângulo ODC teremos:

$$x' = \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta + \alpha) \text{ e}$$
$$y' = \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta + \alpha).$$

Observação 5.11. $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ e $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$.

Aplicando o cosseno da soma de arcos e substituindo $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ temos:

$$x' = \sqrt{x^2+y^2} \cdot (\cos\theta \cdot \cos\alpha - \sin\theta \cdot \sin\alpha) \Rightarrow$$
$$x' = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \left(\cos\theta \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sin\theta \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Simplificando, temos $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$.

Temos que

$$y' = \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta + \alpha).$$

Aplicando o seno da soma de arcos e substituindo $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ temos

$$y' = \sqrt{x^2+y^2} \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \cos\alpha) \Rightarrow$$
$$y' = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\theta + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sin\theta\right),$$

Simplificando, temos:

$$y' = y \cdot \cos\theta + x \cdot \sin\theta \Rightarrow$$
$$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Definimos

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

como sendo a matriz de rotação de θ no sentido anti-horário.

Note que $R(-\theta)$ é substituir θ por $-\theta$ na matriz $R(\theta)$, então

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

Do fato da função seno ser ímpar e a função cosseno ser par temos:

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Portanto, $R(-\theta) = R^T(\theta)$.

Além disso, como $R(\theta)$ é ortogonal, temos que $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta)$ e como $R(-\theta) = R^T(\theta)$ então $R(-\theta) = R^{-1}(\theta)$.

Note que $R(\theta)$ gira um vetor $\vec{v}$ de θ graus no sentido anti-horário, ou seja, $R(-\theta)$ gira θ graus no sentido horário.

Vejamos o **Caso 2**: $a = -d$ e $b = c$.

Assim:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

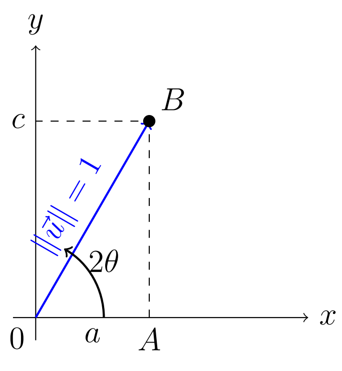
Onde a primeira coluna é o vetor $\vec{v} = (a, c)$ e $a^2 + c^2 = 1$, como já vimos em 5.7.

$$A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

Como A é ortogonal, $A^t = A^{-1}$ e perceba ainda que $A^{-1} = A$, nesse caso dizemos que A é uma matriz involutiva.

Seja $\vec{u}$ um vetor qualquer com norma igual a 1 e que faz um ângulo 2θ com o eixo das abscissas no sentido anti-horário conforme figura **??**.

Figura 8 – Vetor $\vec{u}$



Fonte: próprio autor.

No triângulo OAB, retângulo em A temos pela definição de seno e cosseno que:

$$\cos(2\theta) = \frac{a}{\|\vec{u}\|} \quad \text{e} \quad \sin(2\theta) = \frac{c}{\|\vec{u}\|}.$$

Logo,

$$a = \cos(2\theta) \quad \text{e} \quad c = \sin(2\theta).$$

Substituindo a por $\cos(2\theta)$ e $c = \sin(2\theta)$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

Vamos provar que a matriz A reflete um vetor qualquer $\vec{v} = (x, y)$ em torno da reta r (que passa pelo origem e que faz θ graus com o eixo x no sentido anti-horário).

Ou seja, mostraremos que

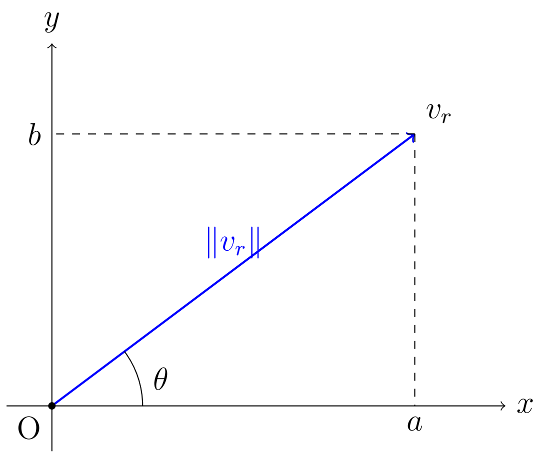
$$A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(2\theta) + y\sin(2\theta) \\ x\sin(2\theta) - y\cos(2\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

é a reflexão do vetor $\vec{v}$ em torno da reta r descrita acima.

Considerando $||\vec{v_r}|| = 1$, note na figura 10 que o triângulo OAB é retângulo e por definição temos

$$a = \cos\theta \quad e \quad b = \sin\theta.$$

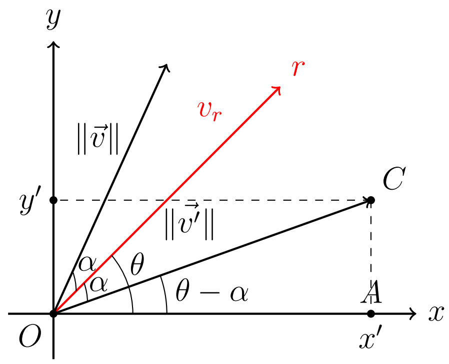
Figura 10 – Vetor $\vec{v_r}$



Fonte: próprio autor.

Seja $\vec{v'} = (x', y')$ a reflexão de $\vec{v} = (x, y)$ em torno de r e α o ângulo entre $\vec{v}$ e a reta r como mostra a figura 11.

Figura 11 – Vetores $\vec{v}, \vec{v'}$ e $\vec{v_r}$

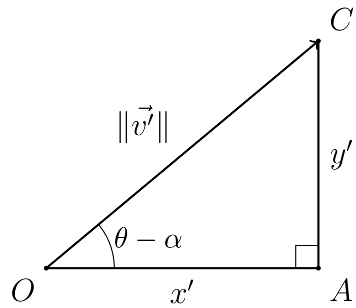


Fonte: próprio autor.

Queremos provar que $x' = x\cos(2\theta) + y\sin(2\theta)$ e $y' = x\sin(2\theta) - y\cos(2\theta)$.

Note que da figura 11 temos o triângulo AOC, retângulo em A conforme a figura 12.

Figura 12 – Triângulo OAC



Fonte: próprio autor.

Como $\vec{v'}$ é a reflexão do vetor $\vec{v}$ em torno de r então $||\vec{v}|| = ||\vec{v'}|| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, logo

$$x' = \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta - \alpha),$$
$$y' = \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta - \alpha).$$

Assim,

$$x' = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (\cos\theta \cdot \cos\alpha + \sin\theta \cdot \sin\alpha).$$
$$y' = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (\sin\theta \cdot \cos\alpha - \sin\theta \cdot \cos\alpha).$$

Observe da figura 11 que α é o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{v}_r$. Temos então por 4.5 que:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_r}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}_r\|}.$$

Como $\vec{v} = (x, y)$, $\vec{v}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\|\vec{v}_r\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$ então:

$$\cos\alpha = \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot 1}.$$

Assim,

$$\cos\alpha = \frac{x\cos\theta + y\cos\theta}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ e}$$
$$x' = \sqrt{x^2+y^2}\cdot(\cos\theta\cdot\cos\alpha + \sin\theta\cdot\sin\alpha).$$

Para obtermos x' em função apenas de θ , precisamos encontrar $\sin\alpha$. Pela relação fundamental da trigonometria(R.F.T) temos $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e, subtraindo $\cos^2\alpha$ em ambos os membros da equação, temos:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha.$$

Logo, extraindo a raiz quadrada:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Logo, substituindo

$$\cos\alpha = \frac{x\cos\theta + y\cos\theta}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{em} \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha},$$

Temos:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1} - \left(\frac{x\cos\theta + y\cos\theta}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}.$$

Aplicando produtos notáveis ao numerador da fração e reduzindo ao mesmo denominador, temos:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta + y^2\sin^2\theta}{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{x^2-x^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta + y^2 - y^2\cos^2\theta}{x^2+y^2}}.$$

Fatorando as duas primeiras e últimas parcelas, temos:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{x^2(1-\cos^2\theta) - 2xy\sin\theta\cos\theta + y^2(1-\sin^2\theta)}{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{x^2\sin^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta + y^2\cos^2\theta}{x^2+y^2}}.$$

Note que o numerador da fração é um trinômio quadrado perfeito da forma $A^2 - 2AB + B^2$, que fatorado resulta em $(A-B)^2$, logo:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(x\sin\theta - y\cos\theta)^2}{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{x\sin\theta - y\cos\theta}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Considerando o sinal positivo, temos:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{x\sin\theta - y\cos\theta}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

Daí,

$$x' = \sqrt{x^2+y^2}\cdot(\cos\theta\cdot\cos\alpha + \sin\theta\cdot\sin\alpha) \Rightarrow$$

$$x' = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(\cos\theta\cdot\frac{(x\cos\theta + y\sin\theta)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sin\theta\cdot\frac{(x\sin\theta - y\cos\theta)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$x' = x\cos^2\theta + y\sin\theta\cos\theta + x\sin^2\theta - y\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow x' = x(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \Rightarrow x' = x.$$

A reflexão é na própria reta r implicando que $\vec{v} = (x, y)$ tem a direção de r.

Considerando o sinal negativo em $\sin\alpha$, temos:

$$\sin\alpha = \frac{y\cos\theta - x\sin\theta}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Assim,

$$x' = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{\cos\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin\theta(y\cos\theta - x\sin\theta)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Simplificando, temos:

$$\Rightarrow x' = x\cos^2\theta + y\sin\theta\cos\theta + y\sin\theta\cos\theta - x\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow x' = x(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2y\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow x' = x(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + y \cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow x' = x\cos(2\theta) + y\sin(2\theta).$$

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cdot\cos\theta + \cos\theta\cdot\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cdot\cos\theta.$$

Vamos encontrar y'.

Sendo

$$\sin\alpha = \frac{x\sin\theta - y\cos\theta}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ temos:}$$

$$y' = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{\sin\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\cos\theta(x\sin\theta - y\cos\theta)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Simplificando, temos:

$$y' = x\sin\theta\cos\theta + y\sin^2\theta - (x\cos\theta\sin\theta - y\cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow y' = y(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = y\cdot 1, \text{ logo}$$

$y' = y$, reflexão na própria reta r implicando que $\vec{v} = (x, y)$ tem a direção de r .

Se

$$\sin\alpha = \frac{y\cos\theta - x\sin\theta}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

$$y' = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{\sin\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\cos\theta(y\cos\theta - x\sin\theta)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Simplificando:

$$\Rightarrow y' = x\sin\theta\cos\theta + y\sin^2\theta - y\cos^2\theta + x\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow y' = x \cdot 2\sin\theta\cos\theta - y(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow y' = x\sin(2\theta) - y\cos(2\theta).$$

Como queríamos demonstrar.

Definimos Ref(θ) como matriz de reflexão de θ graus do vetor $\vec{v}$ em relação a uma reta r que passa pela origem.

Vejamos agora o **Caso 3**:

$$\boxed{a = d \quad \text{e} \quad b = c} \quad \text{ou} \quad \boxed{a = -d \quad \text{e} \quad b = -c}$$

Desde que A tem forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ temos que com as condições deste caso, A se escreve como $a = d \quad \text{e} \quad b = c$, onde temos o produto interno como sendo $(a, b) \cdot (b, a) = ab + ba = 0 \Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

- $a = 0 \Rightarrow c = \pm 1 \Rightarrow b = \pm 1 \quad \text{e} \quad d = 0$, já que (a,b) tem norma 1.
- $d = 0 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow c = \pm 1 \quad \text{e} \quad a = 0$, já que (a,b) tem norma 1.

Assim, a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pode ter as seguintes possibilidades:

$$\textbf{(I)}\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(II)}\ A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(III)}\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(IV)}\ A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note ainda que, de acordo com o que vimos:

- $b = 0 \Rightarrow d = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 1$ e $c = 0$.
- $c = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow d = \pm 1$ e $b = 0$.

Logo, temos mais 4 possibilidades para a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

$$\textbf{(V)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(VI)}\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(VII)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(VIII)}\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Perceba que essas oito matrizes que construímos são casos particulares das matrizes de rotação e reflexão dos **Casos 1 e 2**.

Vejamos que:

(I) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz de reflexão para $\theta = 45°$ será:

$$\text{Ref}(45°) = \begin{bmatrix} \cos(90°) & \sin(90°) \\ \sin(90°) & -\cos(90°) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Ref}(45°) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

(II) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz de reflexão para $\theta = -45°$ será:

$$\text{Ref}(-45°) = \begin{bmatrix} \cos(-90°) & \sin(-90°) \\ \sin(-90°) & -\cos(-90°) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Ref}(-45°) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(III) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz de rotação para $\theta = -90°$ será:

$$\text{Rot}(-90°) = \begin{bmatrix} \cos(-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin(-90°) & \cos(-90°) \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(-90°) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(IV) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz de Rotação para $\theta = 90°$ será:

$$\text{Rot}(90°) = \begin{bmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) \\ \sin(90°) & \cos(90°) \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(90°) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(V) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, a matriz de rotação para $\theta = 0°$ será:

$$\mathrm{Rot}(0°) = \begin{bmatrix} \cos(0°) & -\sin(0°) \\ \sin(0°) & \cos(0°) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rot}(0°) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(VI) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, a matriz de rotação para $\theta = 180°$ será:

$$\mathrm{Rot}(180°) = \begin{bmatrix} \cos(180°) & -\sin(180°) \\ \sin(180°) & \cos(180°) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rot}(180°) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(VII) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, a matriz de reflexão para $\theta = 0°$ será:

$$\mathrm{Ref}(0°) = \begin{bmatrix} \cos(0°) & \sin(0°) \\ \sin(0°) & -\cos(0°) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ref}(0°) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(VIII) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, a matriz de reflexão para $\theta = 90°$ será:

$$\mathrm{Ref}(90°) = \begin{bmatrix} \cos(180°) & \sin(180°) \\ \sin(180°) & -\cos(180°) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ref}(90°) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conclusão: As matrizes ortogonais 2x2 representam reflexões ou rotações no plano.

5.3 Aplicação da matriz de rotação nas cônicas

Sabemos da geometria analítica que a equação geral das cônicas é dada por:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

com a, b, c não todos nulos.

As cônicas são elipses, hipérboles, parábolas, circunferências e suas degenerações (conjunto vazio, ponto, par de retas).

A equação geral das cônicas

Escrita na forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = 0$$

Observação: $\begin{bmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica.

Vamos provar que a forma matricial resulta na equação geral das cônicas.

Multiplicando as matrizes:

$$\begin{bmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ temos}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + \frac{c}{2}y \\ \frac{c}{2}x + by \end{bmatrix} \text{ e multiplicando}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}, \text{ temos } \begin{bmatrix} dx + ey \end{bmatrix}.$$

Logo, a equação matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ax + \frac{c}{2}y \\ \frac{c}{2}x + by \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx + ey \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = 0.$$

Passo 1: Produto dos vetores

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ax + \frac{c}{2}y \\ \frac{c}{2}x + by \end{bmatrix} &= x\left(ax + \frac{c}{2}y\right) + y\left(\frac{c}{2}x + by\right) \\
&= x^2a + x \cdot \frac{c}{2}y + y \cdot \frac{c}{2}x + y^2b \\
&= x^2a + \frac{c}{2}xy + \frac{c}{2}xy + y^2b \\
&= x^2a + cxy + y^2b.
\end{aligned}$$

Passo 2: Soma dos demais termos

$$x^2a + cxy + y^2b + [dx + ey] + [f] = 0.$$

Resultado final:

$$x^2a + cxy + y^2b + dx + ey + f = 0.$$

Aplicação prática: obtenção da equação geral de uma elipse na sua forma canônica rotacionada de $30°$ no sentido anti-horário

Dada a elipse:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Conforme mostrado na figura 13.

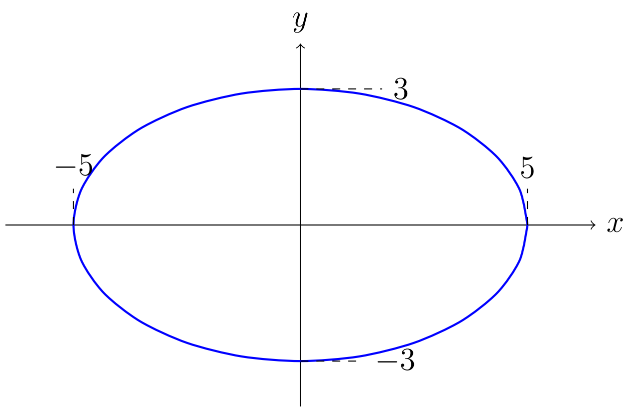


Figura 13 – Elipse

Sabemos que (x, y) é um ponto da elipse:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Precisamos rotacionar o vetor $\vec{v} = (x, y)$ de $30°$ no sentido anti-horário.

Logo, temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Onde

$$R(30°) = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix}$$

é a matriz de rotação $R(30°)$ e $\vec{v}' = (x', y')$ é a rotação de $\vec{v}$ de 30° no sentido anti-horário.

Vimos que:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Multiplicando essa equação pela esquerda por $R^{-1}(30°)$ teremos:

$$R^{-1}(30°) \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R^{-1}(30°) \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30° & \sin 30° \\ -\sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (*)$$

Observe que a matriz:

$$\begin{bmatrix} \cos 30° & \sin 30° \\ -\sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} = R^t(\theta) = R^{-1}(\theta) = R(-\theta).$$

Vamos escrever a elipse dada $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

Temos de (*):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30° & \sin 30° \\ -\sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Onde fazendo a transposta, obteremos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \cos 30° & \sin 30° \\ -\sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix}^t.$$

Isso é verdade pela propriedade $(AB)^t = B^t A^t$ vista no Capítulo de Matrizes.

Assim, temos

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} \quad (**)$$

Assim substituindo na equação:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \quad \text{por} \quad \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{por} \quad \begin{bmatrix} \cos 30° & \sin 30° \\ -\sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Teremos a elipse na forma matricial escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 1.$$

Aqui podemos utilizar a propriedade da associatividade das matrizes.

Logo multiplicando as segunda e terceira matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{50} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{50} & \frac{\sqrt{3}}{18} \end{bmatrix}.$$

Continuando a multiplicação, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{50} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{50} & \frac{\sqrt{3}}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{100} + \frac{1}{36} & \frac{\sqrt{3}}{100} - \frac{\sqrt{3}}{36} \\ \frac{\sqrt{3}}{100} - \frac{\sqrt{3}}{36} & \frac{1}{100} + \frac{3}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27+25}{900} & \frac{(9\sqrt{3}-25\sqrt{3})}{900} \\ \frac{(9\sqrt{3}-25\sqrt{3})}{900} & \frac{9+75}{900} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{26}{450} & -\frac{8\sqrt{3}}{450} \\ -\frac{8\sqrt{3}}{450} & \frac{42}{450} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{26x'}{450} & -\frac{8\sqrt{3}y'}{450} \\ -\frac{8\sqrt{3}x'}{450} & \frac{42y'}{450} \end{bmatrix} = 1.$$

Expandindo:

$$\frac{26}{450}(x')^2 - \frac{8\sqrt{3}}{450}x'y' - \frac{8\sqrt{3}}{450}x'y' + \frac{42}{450}(y')^2 = 1.$$

Multiplicando por 450:

$$26(x')^2 - 16\sqrt{3}x'y' + 42(y')^2 = 450.$$

Dividindo por 2:

$$13(x')^2 - 8\sqrt{3}x'y' + 21(y')^2 - 225 = 0.$$

$$13x^2 + 21y^2 - 8\sqrt{3}xy - 225 = 0. \tag{5.8}$$

É a equação geral da elipse rotacionada de 30° no sentido anti-horário em relação ao eixo x a partir da sua posição canônica como mostrada na figura 14.

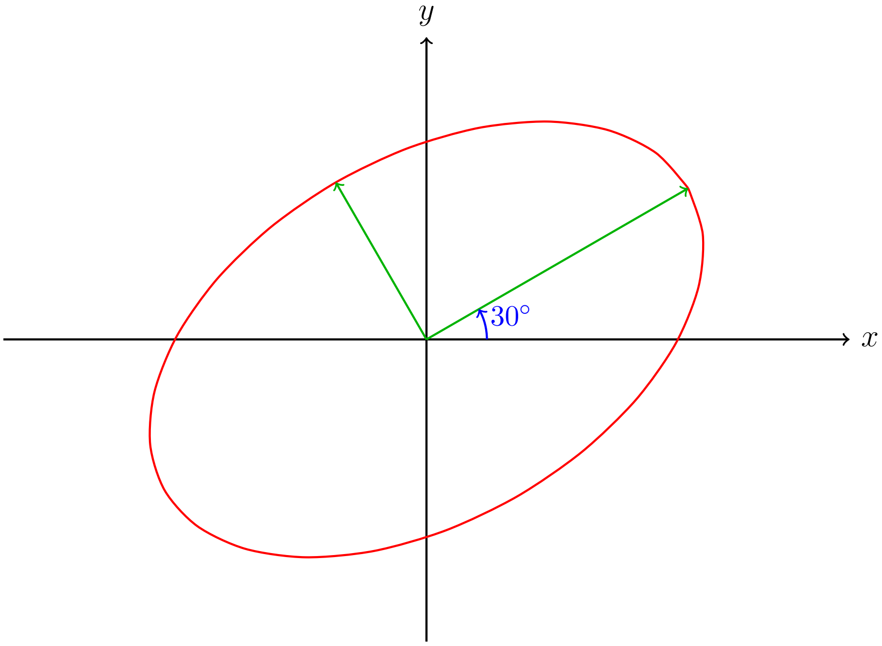


Figura 14 – Elipse rotacionada

Processo Inverso de Rotação:

Observamos a equação:

$$13x^2 + 21y^2 - 8\sqrt{3}yx - 225 = 0$$

que a princípio não sabemos que cônica ela representa, mas que em sua forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0. \tag{5.9}$$

Agora temos que encontrar a matriz de rotação $R(\theta)$ tal que:

$$R^{-1}(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 13 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21 \end{bmatrix} \cdot R(\theta) \text{ seja uma matriz diagonal.}$$

A existência dessa matriz $R(\theta)$ é garantida pelo **Teorema Espectral** (que não é objeto desse trabalho), mas que seu enunciado é o seguinte:

Se $A_{n\times n}$ é uma matriz simétrica, então existe uma matriz ortogonal P tal que

$$P^{-1}AP = D,$$

onde D é uma matriz diagonal formada pelos autovalores de A e as colunas de P são formadas pelos autovetores de P.

Então, vamos a procura dos autovalores e autovetores da matriz. Para esse cálculo, usaremos o que trabalhamos no Capítulo 4.

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21 \end{bmatrix} \quad e \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 13 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13-\lambda & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21-\lambda \end{bmatrix}$$

Para encontrarmos os autovalores, temos:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Logo,

$$(13-\lambda)(21-\lambda) - (-4\sqrt{3})(-4\sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow 273 - 13\lambda - 21\lambda + \lambda^2 - 48 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 34\lambda + 225 = 0.$$

Via Bhaskara, temos:

$$\lambda = 17 \pm \sqrt{289 - 225}$$

$$\Rightarrow \lambda = 17 \pm \sqrt{64} \Rightarrow \lambda = 17 \pm 8.$$

Então $\lambda = 25$ ou $\lambda = 9$.

Para encontrarmos os autovetores associados a esses autovalores encontrados temos para $\lambda = \lambda_1 = 25$

$$\begin{bmatrix} 13-25 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21-25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} -12 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -12x - 4\sqrt{3}y = 0$$
$$\Rightarrow y = \frac{-12x}{4\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{-3x}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = -\sqrt{3}x.$$
$$-4\sqrt{3}x - 4y = 0 \Rightarrow -4y = 4\sqrt{3}x \Rightarrow y = -\sqrt{3}x$$

Para $x = 1$, temos $y = -\sqrt{3}$. Então o autovetor é:

$$\vec{v} = (1, -\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

O vetor $\vec{v}$ normalizado será:

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right).$$

Que chamaremos de $\vec{v}_1$.

Para $\lambda = \lambda_2 = 9$, teremos

$$\begin{bmatrix} 4 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$4x - 4\sqrt{3}y = 0 \Rightarrow 4x = 4\sqrt{3}y \Rightarrow x = \sqrt{3}y$$
$$-4\sqrt{3}x + 12y = 0 \Rightarrow -4\sqrt{3}x = -12y \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{3}}y \Rightarrow x = \sqrt{3}y.$$

Para $y = 1$, temos $x = \sqrt{3}$. Logo, o vetor

$$\vec{v} = (\sqrt{3}, 1),$$

$$\text{cuja norma é } \|\vec{v}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$$

E o vetor $\vec{v}$ normalizado será:

$$\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Que chamaremos de $\vec{v}_2$. Para tal faremos a análise por casos:

- **Caso 1:** As coordenadas de $\vec{v}_1$ na 1ª coluna e as de $\vec{v}_2$ e na 2ª coluna. Assim pelo teorema espectral temos:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

ou seja, implicará que $\theta = -60°$ e

$$R(60°) = \begin{bmatrix} \cos(60°) & \sin(60°) \\ -\sin(60°) & \cos(60°) \end{bmatrix}$$

Daí,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R(60°) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Logo, haverá uma rotação de 60° no sentido anti-horário da elipse de equação 5.8.

Além disso, em 5.9 temos:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0.$$

Vamos trocar $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ por $R(\theta) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, onde

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

E como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

aplicando a transposta na equação matricial e utilizando a propriedade $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, temos:

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)^t = \left(R(\theta) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right)^t \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} R(\theta)^t.$$

Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} R(\theta)^t \begin{bmatrix} 13 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21 \end{bmatrix} R(\theta) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13}{2} + 6 & -2\sqrt{3} - \frac{21\sqrt{3}}{2} \\ \frac{13\sqrt{3}}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{2} & -6 + \frac{21}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{25}{2} & -\frac{25\sqrt{3}}{2} \\ \frac{9\sqrt{3}}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{25}{4} + \frac{75}{4} & 0 \\ 0 & \frac{27}{4} + \frac{9}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 25(x')^2 + 9(y')^2 - 225 = 0 \quad \div 225$$

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{25} = 1.$$

Conforme figura 15.

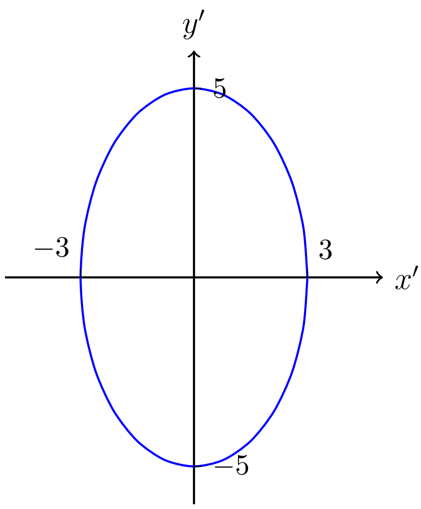


Figura 15 – Elipse rotacionada 60° no sentido anti-horário.

- **Caso 2:** As coordenadas de $\vec{v_1}$ estão na $2^{\underline{a}}$ coluna e as de $\vec{v_2}$ na $1^{\underline{a}}$. Além disso note que $\vec{v_1} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ pode ser escrito como $\vec{v_1} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, pois autovetores podem ser multiplicados por escalares diferentes de zero e ainda continuam sendo autovetores correspondentes ao mesmo autovalor. Assim pelo teorema espectral temos:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

ou seja, implicará que $\theta = 30°$ e

$$R(30°) = \begin{bmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & \cos(30°) \end{bmatrix}.$$

E como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R(30°) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Logo, haverá uma rotação de $30°$ no sentido horário da elipse de equação 5.8.

Além disso, em 5.9 temos:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0$$

Multiplicando as $2^{\underline{a}}$ e $3^{\underline{a}}$ matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13\sqrt{3}}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{2} & -6 + \frac{21}{2} \\ -\frac{13}{2} - 6 & 2\sqrt{3} + \frac{21\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9\sqrt{3}}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{25}{2} & \frac{25\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{27}{4} + \frac{9}{4} & -\frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{4} & \frac{25}{4} + \frac{75}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 225 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 9(x')^2 + 25(y')^2 - 225 = 0 \quad \div 225$$

$$\Rightarrow \frac{(x')^2}{25} + \frac{(y')^2}{9} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x')^2}{25} + \frac{(y')^2}{9} = 1$$

Conforme figura 16.

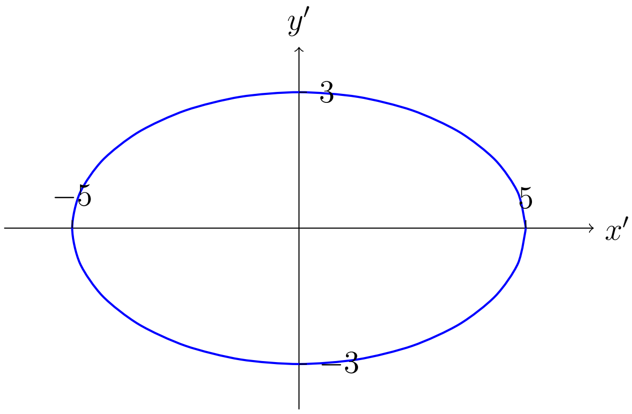


Figura 16 – Elipse rotacionada 30° no sentido horário.

A ordem dos autovetores na matriz ortogonal influenciou diretamente na disposição dos autovalores na matriz diagonal, de acordo com a relação $P^{-1}AP = D$, em que P é a matriz ortogonal formada pelos autovetores, A é a matriz simétrica construída a partir dos coeficientes dos termos quadráticos da equação geral da cônica (incluindo o termo misto Bxy), e D é a matriz diagonal composta pelos autovalores. Como consequência, houve uma alteração na forma canônica da elipse.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, procuramos explorar a relação entre as matrizes ortogonais 2×2 e as transformações geométricas no plano, especialmente as rotações e reflexões.

Nos capítulos, trabalhamos e percorremos desde os fundamentos históricos e conceituais de matrizes, destacando a contribuição de Arthur Cayley até a aplicação concreta dessas estruturas na Geometria Analítica, com foco em situações acessíveis ao ensino médio.

As matrizes ortogonais revelaram-se ferramentas importantes para descrever transformações que preservam distâncias e ângulos, como as rotações e reflexões. Com abordagem didática e sem recorrer a conceitos mais avançados de Álgebra Linear, buscamos tornar esses conteúdos mais acessíveis à realidade escolar.

Por fim, esperamos que o trabalho contribua para ampliar o olhar sobre o papel das matrizes no Ensino da Matemática, mostrando que, mesmo restritas à dimensão 2×2, elas têm muito a oferecer como ponte entre o universo Algébrico e o Geométrico.

Referências

1 ALEIXO, D. M. da S. *Álgebra linear no livro didático do ensino médio: uma discussão por meio da teoria dos registros de representação semiótica*. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2021.

2 BOLDRINI, J. L. *Álgebra linear*. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

3 DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria analítica*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013. (Coleção PROFMAT, 11).

4 BRASIL. *Edital da OPEMAT 2024*. 2024. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1YkhTAN2e_t8mBnb-rkPSZItw8K6Ch0I1/view>. Acesso em: [colocar a data de acesso].

5 FACCHINI, W. *Matemática para a escola de hoje*. São Paulo: FTD, 2006.

6 IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 4: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas*. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2019.

7 MACHADO, A. dos S. *Sistemas lineares e análise combinatória*. São Paulo: Atual, 1986. (Matemática, temas e metas).

8 ROSSO Jr., A. C.; FURTADO, P. I. *Matemática: uma ciência para a vida. Volume 2*. São Paulo: Editora Harbra, 2011.