



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Robson Fernandes Araújo de Oliveira

**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ANÁLISE
COMBINATÓRIA COM FOCO NOS PRINCÍPIOS ADITIVO E
MULTIPLICATIVO PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

RECIFE
2025



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Robson Fernandes Araújo de Oliveira

**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ANÁLISE
COMBINATÓRIA COM FOCO NOS PRINCÍPIOS ADITIVO E
MULTIPLICATIVO PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Barbosa Mendes da Silva

RECIFE
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecária Suely Manzi – CRB/4 - 809

O48p
nos

Oliveira, Robson Fernandes Araújo de
Uma proposta para o ensino de análise combinatória com foco
princípios aditivo e multiplicativo para a resolução de problemas /
Robson Fernandes Araújo de Oliveira. – 2025.
100 f.: il.

Orientador: Fabiano Barbosa Mendes da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –
Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, Recife, BR-PE, 2025.
Inclui bibliografia e apêndice(s).

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Análise combinatória
3. Lógica - Problemas, questões, exercícios 4. Raciocínio –
Problemas, questões, exercícios 5. Jogos educativos 6. Prática de
ensino 7. Didática 8. Professores – Formação 9. Educação básica
10. Exame Nacional do Ensino Médio (Brasil) I. Silva, Fabiano
Barbosa Mendes da, orient. II. Título

CDD 510

Trocar essa página pela Folha de Aprovação

À minha família

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, a Deus por tudo o que Ele tem feito na minha vida.

Agradeço à minha esposa, Amanda Oliveira, por todo o apoio, o cuidado especial e o amor ao longo de todo o curso, sem os quais essa conquista não teria sido possível. Aos meus filhos, Miguel Oliveira e Giovanna Oliveira, por todo o carinho e amor; e aos meus pais, Cláudia Araújo e Vandir Oliveira, pelos ensinamentos e valores transmitidos ao longo da vida.

Agradeço também à minha avó, Anicete, por todo o amor e carinho, e ao meu irmão, Gabriel Fernandes, pelo companheirismo e amizade. Ao meu orientador, Dr. Fabiano Barbosa, sou profundamente grato pelos ensinamentos e pelas orientações fundamentais para a realização deste trabalho. Agradeço à professora Dra. Tarciana Maria Santos da Silva pelas aulas das disciplinas voltadas à escrita da dissertação, que foram de grande importância para a conclusão deste trabalho.

Aos colegas de turma, agradeço pelos momentos em que nos apoiamos e nos ajudamos mutuamente. Em especial, deixo meu reconhecimento a Douglas de Souza, Felipe Basante e Tércio Botelho, que foram os amigos mais próximos com quem compartilhei a caminhada durante o curso.

Agradeço ainda aos professores do PROFMAT-UFRPE pelos ensinamentos e conselhos ao longo da formação, que foram essenciais para que eu pudesse chegar até aqui.

Por fim, quero agradecer a todos que tornaram possível a realização de um sonho: concluir minha formação no PROFMAT.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)*

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal propor uma abordagem mais criativa e significativa para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio, com foco no desenvolvimento do raciocínio matemático e da capacidade de resolução de problemas, em contraposição à tradicional memorização de fórmulas. Trata-se de um relato de experiência docente vivenciada por um professor da rede pública estadual de Pernambuco, realizado com uma turma do Ensino Médio em uma escola pública. A metodologia adotada baseou-se em uma sequência didática composta por seis encontros, nos quais foram utilizados jogos didáticos, atividades investigativas e questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) como elementos centrais para a construção dos conceitos combinatórios. O referencial teórico abrange os principais tópicos de Análise Combinatória em nível médio, como os princípios aditivo e multiplicativo, permutações, arranjos e combinações, além da análise de como esses conteúdos são abordados em avaliações externas, especialmente no ENEM.

A sequência didática foi desenvolvida com momentos de resolução coletiva de problemas, discussões em grupo e atividades lúdicas, buscando estimular a participação ativa dos estudantes. Ao final do processo, foi aplicada uma atividade avaliativa composta por seis questões do ENEM, cuidadosamente selecionadas para representar diferentes níveis de complexidade e categorias de análise. Os resultados indicaram uma melhora significativa na capacidade dos alunos de interpretar e resolver problemas combinatórios, evidenciando avanços tanto no domínio conceitual quanto na autonomia de pensamento matemático.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Análise Combinatória. Raciocínio lógico. Jogos didáticos. ENEM. Sequência didática.

Abstract

This study primarily aims to propose a more creative and meaningful approach to teaching Combinatorial Analysis in High School, focusing on the development of mathematical reasoning and problem-solving skills, as opposed to the traditional memorization of formulas. It is a report of experience carried out by a teacher in the public school system of Pernambuco, Brazil, conducted with a High School class in a public school. The methodology adopted was based on a didactic sequence comprising six sessions, during which educational games, investigative activities, and questions from the National High School Exam (ENEM) were used as central elements for constructing combinatorial concepts. The theoretical framework covers the main topics of Combinatorial Analysis at the High School level, such as the additive and multiplicative principles, permutations, arrangements, and combinations, as well as an analysis of how these topics are addressed in external assessments, particularly the ENEM.

The didactic sequence included moments of collective problem-solving, group discussions, and playful activities, aiming to stimulate active student participation. At the end of the process, an assessment activity composed of six ENEM questions was administered, carefully selected to represent different levels of complexity and categories of analysis. The results indicated a significant improvement in students' ability to interpret and solve combinatorial problems, demonstrating progress in both conceptual mastery and autonomy in mathematical thinking.

Keywords: Teaching Mathematics. Combinatorial Analysis. Logical reasoning. Educational games. ENEM. Didactic sequence.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Jogo senha	47
Figura 2 – Jogo Tsoro Yamatatu	60
Figura 3 – Distribuição das respostas dos estudantes para a Pergunta 1.	77
Figura 4 – Distribuição das respostas dos estudantes para a Pergunta 2.	78
Figura 5 – Distribuição das respostas dos estudantes para a Pergunta 3.	78
Figura 6 – Distribuição das respostas dos estudantes para a Pergunta 4.	79
Figura 7 – Distribuição das respostas dos estudantes para a Pergunta 5.	79
Figura 8 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 1	84
Figura 9 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 2	85
Figura 10 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 3	86
Figura 11 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 4	88
Figura 12 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 5	89
Figura 13 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 6	91
Figura 14 – Código em blocos. Fonte: (KODULAR...,)	93

Lista de abreviaturas e siglas

SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Justificativa	14
1.2	Objetivos	15
1.3	Metodologia	16
2	ANÁLISE COMBINATÓRIA	18
2.1	Principais Conceitos de Análise Combinatória	19
2.1.1	Princípio Fundamental da Contagem	19
2.1.2	Permutação simples	21
2.1.3	Permutação com repetição	22
2.1.4	Permutação Circular	25
2.1.5	Permutação Caótica	26
2.1.6	Combinação simples	30
2.1.7	Combinação completa	31
2.1.8	Princípio das Gavetas de Dirichlet	33
2.1.9	Uma breve análise sobre questões selecionadas do ENEM.	35
3	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	44
3.1	Sequência didática voltada para o estudo da análise combinatória	45
3.1.1	Descrição dos encontros da sequência didática	46
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	76
4.1	Aplicação do jogo Senha	76
4.1.1	Descrição e impressões do primeiro encontro	76
4.1.2	Descrição e impressões do segundo encontro.	79
4.1.3	Discussões sobre a aplicação do jogo Senha	80
4.2	Aplicação do jogo Tsoro Yamatatu	81
4.2.1	Descrição e impressões do terceiro e quarto encontros	81
4.2.2	Análise sobre a aplicação do jogo Tsoro Yamatatu	82
4.3	Discussões sobre o teste realizado ao final da sequência didática	82
4.3.1	Análise das Estratégias de Resolução dos Estudantes.	83
4.3.2	Introdução de temas matemáticos por meio da programação no Kodular.	92
4.3.3	Desenvolver um curso de preparação olímpica na escola.	95
	REFERÊNCIAS	96

1 Introdução

Uma das dificuldades dos estudantes do ensino médio no estudo de análise combinatória é a tendência de encaixar uma fórmula específica em um problema para tentar chegar à solução. No entanto, a falta de interpretação adequada do texto e a ausência de prática suficiente com diferentes tipos de questões dificultam esse processo.

Como já é do senso comum devido a inúmeras notícias ao longo dos anos, os estudantes brasileiros dos ensinos fundamental e médio apresentam muitas dificuldades na interpretação de textos, o que se aprofunda ainda mais em se tratando de textos matemáticos, pois uma simples variação na forma de apresentação dos problemas ou exercícios clássicos pode elevar o nível de dificuldade de interpretação, principalmente nos alunos que preferem memorizar apenas algumas fórmulas acreditando que podem utilizá-las em qualquer contexto.

Além disso, a resolução de exercícios (e de problemas) limitados a uma forma específica, sem muita variedade no que concerne à sua natureza, reforça essa dificuldade, tornando o aprendizado pouco significativo e desestimulante para os alunos. Para superar essas barreiras, é essencial estimular o raciocínio lógico e a resolução de problemas de forma contextualizada e diversificada, promovendo a compreensão conceitual ao invés da simples memorização (PAIVA, 2020).

Diante dessa problemática surge a seguinte questão: A vivência de uma sequência didática que estimule o uso dos conceitos aditivo e multiplicativo, em conjunto com diferentes estratégias de resolução de problemas, contando com o apoio de jogos matemáticos, pode contribuir para a aprendizagem de análise combinatória no ensino básico, sobretudo em estudantes do ensino médio?

Em resposta, este trabalho propõe a utilização de uma sequência didática que tem como objetivo central a realização do estudo dos principais conteúdos de análise combinatória de forma mais natural e lúdica, utilizando os princípios aditivo e multiplicativo e aplicações de jogos matemáticos para a o estudo e resolução de problemas desses conteúdos, baseados em questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Desse modo, a proposta em problemas dos mais variados tipos e complexidades, de modo a estimular a elaboração de estratégias para determinar as soluções evitando o uso de fórmulas.

Nesse sentido, o estudante é considerado parte central da dinâmica de aprendizagem e ensino, buscando-se com isso um melhor aproveitamento durante as aulas. Sendo assim, ao ser confrontado com problemas variados de contagem, espera-se que o aluno alcance a resolução de modo natural, abrindo espaço para o desenvolvimento de sua criatividade, bem como para a posterior formalização do conteúdo.

Adicionalmente, e reforçando as ideias acima apresentadas, considera-se também a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), que recomenda que um estudante do ensino médio seja capaz de resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como por exemplo, o diagrama de árvore (BRASIL, 2018).

Este estudo objetiva ainda trazer à luz os conceitos fundamentais da análise combinatória e apresentar alguns problemas advindos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que versam sobre a temática destacada. Para tanto, o trabalho foi estruturado em capítulos da seguinte maneira:

Capítulo 2: Análise Combinatória

Este capítulo apresenta um referencial teórico sobre análise combinatória, explorando seus conceitos fundamentais e fornecendo exemplos detalhados com questões resolvidas para auxiliar na compreensão dos estudantes. A abordagem adotada busca não apenas expor definições e propriedades, mas também ilustrar, por meio da resolução passo a passo de problemas, a aplicabilidade dos conceitos em diferentes contextos.

Os temas abordados incluem os princípios aditivo e multiplicativo, que são a base para a contagem de possibilidades em diferentes situações. Além disso, são estudadas as permutações simples e com repetição, permitindo a compreensão de diferentes formas de organizar elementos em sequências. A combinação simples e a combinação com repetição (também conhecida como combinação completa) são exploradas para destacar a diferença entre agrupamentos ordenados e não ordenados. Por fim, é apresentado o princípio de Dirichlet, também chamado de princípio das gavetas, que tem aplicações importantes na resolução de problemas de existência e contagem.

Capítulo 3: Sequência Didática

No Capítulo 3 é apresentada uma sequência didática composta por seis encontros, cada um com duração de 1 hora e 40 minutos, voltada para o ensino de análise combinatória a alunos do terceiro ano do ensino médio. A organização desses encontros segue uma estrutura progressiva, permitindo que os estudantes desenvolvam gradualmente sua compreensão sobre os conceitos abordados.

Para Zabala (1998), sequência didática é um conjunto de ações pedagógicas planejadas e estruturadas de forma sequencial, visando atingir metas educacionais específicas. Essas atividades possuem um percurso bem definido, com início e conclusão compreendidos por todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Com base nessa perspectiva, a proposta busca abordar o tema de maneira mais intuitiva e lúdica, visando promover uma aprendizagem mais significativa e motivadora.

A abordagem adotada utiliza os princípios aditivo e multiplicativo como base para a construção do conhecimento, permitindo que os alunos compreendam a lógica por trás das contagens. Além disso, a sequência didática inclui a utilização de jogos com finalidade pedagógica, incentivando a experimentação e o raciocínio lógico na resolução de problemas. Os exercícios selecionados abrangem diferentes níveis de dificuldade, incluindo questões contextualizadas e problemas extraídos do ENEM, possibilitando uma conexão entre o conteúdo trabalhado e sua aplicação em avaliações externas.

Capítulo 4: Resultados e Discussões

Neste capítulo é apresentada uma análise detalhada das atividades desenvolvidas na sequência didática, com destaque para a aplicação dos jogos Senha e Tsoro Yamatatu. Além disso, busca-se discutir os resultados dos encontros que abordaram os conceitos básicos de análise combinatória por meio dos princípios aditivo e multiplicativo, incluindo a resolução de diversas questões de maneira mais intuitiva, evitando o uso excessivo de fórmulas. São discutidos os resultados obtidos, os desafios enfrentados e o progresso dos alunos na compreensão dos conceitos abordados, suas dificuldades e estratégias utilizadas nas tarefas propostas.

Também são abordados os feedbacks dos estudantes durante os encontros e como essas informações podem contribuir para ajustes e melhorias em futuras aplicações. Além disso, são exploradas as possibilidades dos jogos como ferramentas pedagógicas e as oportunidades de ampliar a sequência didática para futuras intervenções educativas, incluindo o uso da programação em blocos por meio da plataforma Kodular.

1.1 Justificativa

Um dos principais impulsos para a realização deste estudo foi a observação da presença recorrente de questões de Análise Combinatória no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que avalia o desempenho dos estudantes ao final da educação básica. Criado em 1998, o ENEM tinha inicialmente o objetivo de ser uma ferramenta de avaliação, mas desde 2009 tornou-se o principal meio de acesso ao ensino superior em universidades públicas e privadas [Oliveira \(2016\)](#), além de ser a porta de entrada para programas como o Sistema de Seleção Unificada (SISU) e o Programa Universidade Para Todos (PROUNI). Composto por questões objetivas e uma redação, o exame abrange diversas áreas do conhecimento, sendo um importante termômetro para a preparação dos estudantes.

Além do ENEM tradicional, mencionado anteriormente, existe o ENEM PPL, voltado para Pessoas Privadas de Liberdade. Essa modalidade permite que indivíduos em privação de liberdade ou jovens em cumprimento de medidas socioeducativas realizem o exame. O ENEM PPL possui o mesmo nível de dificuldade que o ENEM regular, já

que as questões são retiradas do mesmo banco de dados. No entanto, sua aplicação ocorre exclusivamente em unidades prisionais e instituições socioeducativas, garantindo a inclusão educacional desse público. Cada edição dos exames (tradicional ou PPL) conta com 45 questões de matemática, incluindo algumas relacionadas à Análise Combinatória.

Apesar da importância desse conteúdo, muitos estudantes enfrentam dificuldades na resolução de problemas de Análise Combinatória no ENEM. Essas dificuldades podem estar relacionadas à falta de compreensão dos conceitos básicos, à dificuldade em identificar o tipo de problema e à aplicação inadequada das técnicas de contagem ([Educação Eu Apoio, 2023](#)).

Na minha experiência como professor da rede pública estadual de Pernambuco, tenho observado que, em geral, os estudantes possuem muita dificuldade em resolver problemas de Análise Combinatória por estarem ligados à cultura de decorar fórmulas. Essa abordagem mecânica limita a capacidade dos alunos de compreenderem profundamente os conceitos e de aplicá-los em situações contextualizadas, como as apresentadas no ENEM.

Diante desse cenário, esta dissertação propõe a aplicação de uma sequência didática que visa promover a compreensão conceitual da Análise Combinatória, utilizando estratégias pedagógicas diversificadas, como jogos didáticos, resolução de questões contextualizadas (incluindo itens do ENEM) e atividades que incentivem o raciocínio lógico, evitando a simples memorização de fórmulas. Acredita-se que, por meio dessa abordagem, os estudantes poderão desenvolver uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos de Análise Combinatória, melhorando seu desempenho nas avaliações e sua capacidade de aplicar o conhecimento em diferentes contextos.

1.2 Objetivos

Nesta seção, apresentaremos os objetivos desta pesquisa, os quais visam guiar a análise e a aplicação da sequência didática voltada ao ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio. A seguir, serão delineados os objetivos gerais e específicos que orientam a investigação, com foco no desenvolvimento de estratégias pedagógicas.

Geral

Investigar e analisar os efeitos de uma sequência didática voltada para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio, com ênfase na compreensão conceitual dos Princípios aditivo e multiplicativo e no desenvolvimento do raciocínio lógico, utilizando estratégias como jogos didáticos, resolução de questões contextualizadas (incluindo itens do Enem) e atividades que evitem o uso mecânico de fórmulas.

Específicos

- Elaborar e aplicar uma sequência didática para o ensino de Análise Combinatória, combinando diferentes estratégias pedagógicas como aulas expositivas, jogos e resolução de questões.
- Utilizar jogos didáticos (Senha e Tsoro Yematatu), confeccionados com materiais simples, como recurso para explorar conceitos combinatórios de forma lúdica e significativa.
- Propor e discutir estratégias de resolução que priorizem o raciocínio lógico-combinatório em detrimento da aplicação direta de fórmulas.
- Estimular nos estudantes a leitura e interpretação de enunciados complexos, especialmente em questões do Enem, como parte do processo de construção de sentido matemático.
- Analisar as contribuições da sequência didática para a aprendizagem dos estudantes, com base em registros de aula, atividades desenvolvidas e desempenho em uma avaliação final.
- Refletir sobre os desafios e potencialidades do uso de metodologias ativas e contextualizadas no ensino da Matemática, a partir da experiência prática vivenciada pelo professor-pesquisador.

1.3 Metodologia

A presente dissertação constitui-se também como um relato de experiência, desenvolvido a partir da atuação do autor como professor-pesquisador em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino do estado de Pernambuco. Adota-se uma abordagem qualitativa, de natureza aplicada, voltada para a investigação e reflexão sobre práticas pedagógicas no ensino da Análise Combinatória.

O estudo tem como base a aplicação de uma sequência didática elaborada pelo próprio autor, cujo objetivo foi promover uma aprendizagem significativa dos conceitos centrais de Análise Combinatória, com ênfase na construção do raciocínio lógico e na compreensão conceitual, evitando a utilização mecânica e descontextualizada de fórmulas. Para isso, a sequência combinou diferentes estratégias metodológicas, como aulas expositivas dialogadas, resolução de questões introdutórias e de questões retiradas de provas do Enem, atividades lúdicas com jogos didáticos e, ao final, a aplicação de um teste composto por itens do Enem, com o propósito de avaliar a aprendizagem dos estudantes e a efetividade da proposta.

Dois jogos didáticos foram utilizados em momentos-chave da sequência: o jogo Senha e o jogo Tsoro Yematatu, ambos construídos com materiais simples e acessíveis, visando à praticidade e à possibilidade de replicação em outros contextos escolares. O jogo Senha foi utilizado para introduzir o princípio multiplicativo e estimular o raciocínio sobre possibilidades e restrições. Já o jogo Tsoro Yematatu, de origem africana, foi adaptado pedagogicamente para explorar ideias de organização e contagem de combinações possíveis, de modo lúdico e envolvente.

Ao longo dos encontros, os estudantes participaram ativamente da resolução de questões relacionadas ao conteúdo trabalhado em cada aula, com destaque para itens do Enem, cuja abordagem contextualizada exige leitura atenta e aplicação adequada dos conceitos combinatórios. Essa estratégia buscou fortalecer não apenas o domínio do conteúdo matemático, mas também as competências de interpretação e argumentação exigidas pelas avaliações externas.

A prática docente foi acompanhada de registros sistemáticos das aulas, incluindo observações, produções dos estudantes, comentários orais, resoluções escritas e anotações feitas pelo professor. Esses dados foram analisados com o objetivo de compreender os impactos da proposta didática na aprendizagem dos alunos e refletir sobre os desafios e potencialidades do uso de metodologias ativas no ensino da Matemática. A metodologia adotada, portanto, reforça a articulação entre teoria e prática, contribuindo para a formação de um professor mais crítico, reflexivo e comprometido com a qualidade do ensino.

2 Análise Combinatória

A Análise Combinatória tem seus primeiros registros relacionados com o desenvolvimento do Binômio de Newton $(1 + x)^n$ que para $n = 2$ já estava presente na obra *Elementos de Euclides* (300 a.C.). Segundo [Morgado et al. \(1991\)](#), o Triângulo de Pascal era conhecido por Chu Shih-Chieh (1300 d.c) na China e previamente por hindus e árabes. Bháskara (1114-1185) e Al-Karaji (século X) contribuíram para os conceitos de combinações, arranjos e relações recursivas. Levi Ben Gerson (1288-1344) explorou aspectos relacionados ao 5º Postulado de Euclides. Michael Stifel (1486-1567) introduziu o termo “coeficiente binomial” e ampliou o estudo do binômio e mostrou como calcular $(1 + x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1 + x)^n - 1$. O matemático árabe Al-karaji conhecia a lei de formação dos elementos do triângulo de Pascal.

Atualmente, conforme define [Morgado et al. \(1991\)](#), a Análise Combinatória é uma área da Matemática voltada para o estudo de estruturas e relações discretas. Seus principais problemas envolvem a existência e a contagem de subconjuntos de elementos de um conjunto finito que atendam a determinadas condições.

De acordo com [Lima et al. \(1997\)](#), algumas estratégias podem ser adotadas para resolver problemas de Análise Combinatória. Primeiro, é importante colocar-se no lugar da pessoa que deve realizar a ação solicitada pelo problema. Além disso, sempre que possível, o problema deve ser dividido em etapas mais simples, facilitando sua compreensão e a busca por uma solução. Por fim, dificuldades não devem ser adiadas; se uma decisão apresenta maior restrição, ela deve ser enfrentada primeiro, pois problemas iniciais podem se tornar mais complexos posteriormente.

No ensino de problemas combinatórios, deve-se evitar começar a resolução perguntando aos alunos se o exercício se enquadra em arranjos, combinações ou permutações. Essa abordagem pode ser prejudicial, pois muitos problemas não se classificam imediatamente nesses tipos, o que pode confundir os alunos. Além disso, o foco exclusivo na aplicação de fórmulas específicas pode limitar o desenvolvimento do pensamento matemático criativo e crítico, desmotivando os estudantes e reforçando a ideia de que a matemática é uma disciplina mecânica e desinteressante ([CARVALHO; MORGADO, 2015](#)).

Nessa perspectiva, a BNCC traz a habilidade (EM13MAT310): Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

A análise combinatória desempenha um papel fundamental no ensino médio ao desenvolver o raciocínio lógico e a habilidade de resolver problemas. Ela permite que os

estudantes compreendam como organizar, contar e avaliar situações de maneira sistemática, competências essenciais não apenas em matemática, mas em diversas áreas do conhecimento, como ciência da computação, biologia e economia. Além disso, conceitos como permutações, combinações e o princípio multiplicativo proporcionam uma base sólida para estudos avançados de probabilidade e estatística.

Ao aprender análise combinatória, os alunos também desenvolvem criatividade e pensamento crítico, habilidades essenciais para enfrentar desafios no cotidiano e no mercado de trabalho. Essa área da matemática conecta teoria e prática, tornando-a indispensável na formação de cidadãos críticos.

2.1 Principais Conceitos de Análise Combinatória

Os conceitos, definições e exemplos apresentados nesta seção advêm das seguintes referências: [Morgado et al. \(1991\)](#), [Lima et al. \(1997\)](#), [Carvalho e Morgado \(2015\)](#), [FOMIM, GENKIN e ITEMBERG \(2012\)](#) e [Lima et al. \(2005\)](#).

Inicialmente, no que se segue, foram abordados os Princípios Multiplicativo e Aditivo. Em seguida, foram introduzidos os conceitos de permutações simples, com repetição e permutações circulares. Posteriormente, foram tratadas as combinações simples e com repetição. Por fim, foi apresentado um tema simples e elegante, mas com grande importância na resolução de diversos problemas: o Princípio das Gavetas de Dirichlet. Em todos os casos, a teoria foi acompanhada de alguns exemplos resolvidos, com diferentes níveis de dificuldade, ilustrando as ideias abordadas.

2.1.1 Princípio Fundamental da Contagem

Serão apresentados o Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e o Princípio Aditivo, com o objetivo de proporcionar uma melhor compreensão dos resultados que serão discutidos.

Princípio Multiplicativo

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão D_1 , a decisão D_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões D_1 e D_2 é xy .

Exemplo 2.1. (Saepe 2018) Um estudante de gastronomia está participando de um concurso culinário no qual deverá criar um prato. Para isso, ele dispõe de 3 tipos de massas, 4 tipos de molhos e 6 tipos de carne. De quantas formas distintas ele poderá montar um prato utilizando uma massa, um molho e uma carne?

- A) 3
- B) 6
- C) 13
- D) 25
- E) 72

Resolução:

A situação descrita envolve a contagem do número de combinações possíveis entre elementos de três categorias distintas: massas, molhos e carnes. Cada prato será formado por exatamente um item de cada uma dessas categorias, sem repetições dentro da mesma categoria, e não há nenhuma restrição adicional além da escolha de um item por grupo.

Neste caso, aplica-se diretamente o Princípio Multiplicativo da Contagem, que estabelece que, se uma tarefa é composta por etapas independentes, e se cada etapa pode ser realizada de um certo número de maneiras, então o total de maneiras de realizar a tarefa completa é dado pelo produto desses números.

Assim, para formar um prato:

- Há 3 escolhas possíveis para o tipo de massa;
- Para cada escolha de massa, há 4 escolhas possíveis de molho;
- Para cada combinação de massa e molho, há 6 escolhas possíveis de carne.

Logo, o número total de pratos distintos que podem ser formados é dado por:

$$3 \times 4 \times 6 = 72$$

Portanto, existem 72 formas distintas de montar o prato utilizando uma massa, um molho e uma carne.

Exemplo 2.2. De quantos modos é possível pintar um tabuleiro 1×4 usando apenas 3 cores, sem que casas vizinhas fiquem com a mesma cor?

Resolução: Há 3 cores disponíveis para pintar a primeira casa. Para a segunda casa, restam 2 cores, já que não se pode repetir a cor utilizada na primeira. A terceira casa também pode ser pintada com 2 cores, pois é necessário evitar a cor usada na segunda casa. Da mesma forma, para a última casa, há novamente 2 cores disponíveis, uma vez que não se deve repetir a cor da terceira casa. Portanto, tem-se:

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$$

maneiras de pintar o tabuleiro.

Exemplo 2.3. De quantas maneiras podemos escolher quatro cartas de naipes diferentes e valores diferentes em um baralho com 52 cartas? (FOMIM; GENKIN; ITEMBERG, 2012).

Resolução: Deve-se selecionar uma carta de cada naipe, sendo que a carta de espadas pode ser escolhida de 13 maneiras. A carta de paus deve ter valor diferente da escolhida para espadas, restando, assim, 12 possibilidades. Para a carta de ouros, há 11 opções, pois não pode repetir o valor das duas anteriores. Finalmente, para a carta de copas, restam 10 possibilidades distintas. A ordem em que os naipes são considerados não interfere no resultado da contagem. Portanto, a resposta é:

$$13 \times 12 \times 11 \times 10 = 17160$$

Princípio Aditivo

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de x maneiras e uma decisão D_2 pode ser tomada de y maneiras, e se as duas decisões são mutuamente exclusivas, então o número total de maneiras de tomar D_1 ou D_2 é dada por $x + y$.

Exemplo 2.4. Em uma escola, os estudantes podem escolher entre duas atividades extracurriculares. Há 5 opções de esportes e 3 opções de clubes culturais. De quantas maneiras diferentes um estudante pode escolher uma única atividade, sabendo que ele só pode participar de uma delas?

Resolução:

- O número de maneiras de escolher uma atividade esportiva (D_1) é $x = 5$.
- O número de maneiras de escolher uma atividade cultural (D_2) é $y = 3$.

Como as decisões são mutuamente excludentes (esporte ou clube, mas não ambos), o número total de maneiras de fazer uma escolha é dado pelo princípio aditivo:

$$\text{Total de maneiras} = x + y = 5 + 3 = 8.$$

Portanto, existem 8 maneiras diferentes de escolher uma única atividade.

2.1.2 Permutação simples

Definição 2.5. O fatorial de um número natural n é o produto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 1$.

Simbolicamente, o fatorial de um número natural n é representado por $n!$. Assim, tem-se:

$$n! = n \cdot (n-1)! \tag{2.1}$$

Tomando $n = 1$ tem-se: $1! = 0!$. Portanto, para manter a consistência dessa definição é posto por convenção da comunidade matemática que $0! = 1$.

Com base no exposto, será formalizado o conceito de permutação, acompanhado ainda de algumas aplicações.

De quantas maneiras é possível ordenar em fila n objetos distintos?

Para organizar uma fila de n objetos, são n maneiras de escolher o primeiro objeto, $n - 1$ maneiras de escolher o segundo, $n - 2$ maneiras de escolher o terceiro, e assim por diante, até restar apenas um objeto para ocupar o último lugar na fila. Aplicando o PFC, o número total de maneiras de organizar os n objetos é dado por:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 1 = n! \quad (2.2)$$

Cada ordenação dos n objetos é chamada uma permutação simples de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n e como foi visto acima:

$$P_n = n! \quad (2.3)$$

Exemplo 2.6. Quantos são os anagramas da palavra ALUNO?

Resolução: Cada anagrama de aluno é uma ordenação das letras A,L,U,N,O. Assim o número de anagramas de ALUNO é $P_5 = 120$.

Exemplo 2.7. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos? (MORGADO et al., 1991).

Resolução: Inicialmente, escolhe-se a ordem das matérias, o que pode ser feito de $3!$ modos. Em seguida, para cada matéria, determina-se a ordem de apresentação dos livros, resultando em $P_5 = 5!$, $P_3 = 3!$ e $P_2 = 2!$ possibilidades para as permutações dos livros de matemática, física e estatística, respectivamente. Portanto, aplicando o princípio multiplicativo, a resposta é:

$$3! \times 5! \times 3! \times 2! = 6 \times 120 \times 6 \times 2 = 8640$$

2.1.3 Permutação com repetição

Na permutação com repetição representada por $P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r}$, onde n = número de elementos, $k_1, k_2, \dots, k_r$ é a quantidade de repetições de cada elemento, calcula-se o fatorial do número total de elementos a serem permutados, como ocorre na permutação simples. No entanto, devido à presença de elementos repetidos, é necessário eliminar os casos redundantes. Isso é feito dividindo o fatorial do total de elementos pelo produto dos fatoriais das quantidades de cada grupo de elementos repetidos. Por exemplo, considere a

palavra “BANANA”, que possui 6 letras no total, mas com repetições: 3 letras “A” e 2 letras “N”. Nesse caso, o número de permutações distintas é dado por:

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{720}{12} = 60.$$

Assim, existem 60 permutações distintas para a palavra “BANANA”.

Para a próxima demonstração é preciso saber o seguinte:

O número de combinações simples de p objetos de um conjunto com n objetos é representado por:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (2.4)$$

em que:

- n : total de elementos disponíveis no conjunto;
- p : número de elementos escolhidos.

Proposição 2.8. (*MORGADO et al., 1991*) O número de permutações de n objetos dos quais α são iguais a a , β iguais a b , ..., λ iguais a l e $(\alpha + \beta + \dots + \lambda = n)$ é

$$P = \frac{n!}{\alpha! \times \beta! \times \dots \times \lambda!}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} P_n^{\alpha, \beta, \dots, k, \lambda} &= C_n^\alpha \cdot C_{n-\alpha}^\beta \cdots C_{n-\alpha-\beta-\dots-k}^\lambda \\ &= \frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!} \cdot \frac{(n-\alpha)!}{\beta!(n-\alpha-\beta)!} \cdots \frac{(n-\alpha-\beta-\dots-k)!}{\lambda!(n-\alpha-\beta-\dots-k-\lambda)!} \\ &= \frac{n!}{\alpha!\beta! \dots \lambda! \times 0!} = \frac{n!}{\alpha!\beta! \dots \lambda!} \end{aligned}$$

Exemplo 2.9. Quantos anagramas possui a palavra MATEMÁTICA?

Resolução: Para determinar o número de anagramas da palavra “MATEMÁTICA”, é preciso considerar todas as permutações possíveis das letras e, em seguida, remover os casos equivalentes causados pelas letras repetidas. A palavra contém 10 letras no total, sendo: 2 “M”, 2 “T” e 3 “A”. Assim, o número total de anagramas é dado por:

$$\frac{10!}{2! \times 2! \times 3!}$$

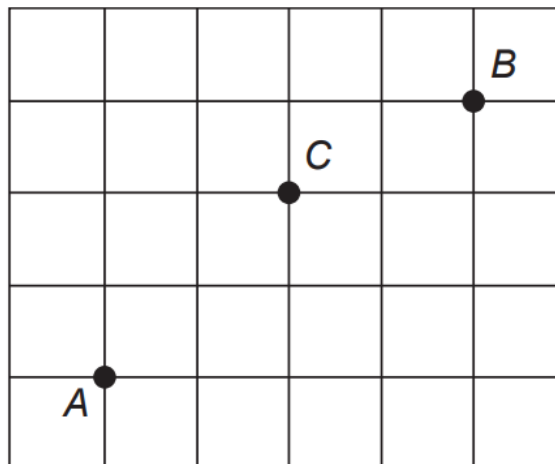
Exemplo 2.10. Uma urna contém 3 bolas azuis, 2 bolas brancas e 4 bolas cinzas que são extraídas sem reposição. Quantas sequências de cores podem ser observadas ao retirar todas as bolas?

Resolução: Como todas as 9 bolas vão ser retiradas podemos modelar esse problema da seguinte maneira, pois se trata também de uma permutação com repetição como a questão anterior:

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = 1260$$

Portanto, há 1.260 sequências de cores possíveis.

Exemplo 2.11. (ENEM 2020) Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.



André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita ($\rightarrow$) ou para cima ($\uparrow$), segundo o esquema da figura.

O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é

- A) 4
- B) 14
- C) 17
- D) 35
- E) 48

Resolução: Para chegar à casa de Carlos, André precisa ir duas vezes para a direita e duas vezes para cima. Portanto, essa etapa se resume a calcular as permutações

de $(\rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \uparrow)$ e o número de maneiras diferentes de realizar isso é:

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

Ao chegar à casa de Carlos, o número de caminhos possíveis até a casa de Bernardo é igual a 3, já que André só pode seguir para a direita e para cima. Aplicando o princípio multiplicativo, a quantidade total de percursos possíveis é:

$$6 \times 3 = 18$$

2.1.4 Permutação Circular

Permutação circular é um tipo de permutação em que um ou mais conjuntos estão dispostos em um círculo. Nesse caso, as posições relativas importam, mas rotações são consideradas equivalentes.

Proposição 2.12. (*MORGADO et al., 1991*). A quantidade de permutações circulares possíveis para n objetos é dada por

$$(PC)_n = (n - 1)! \quad (2.5)$$

Prova: Em uma disposição circular, o primeiro objeto pode ser fixado, já que as rotações são consideradas equivalentes. Para o segundo objeto, há 1 posição possível, ao lado do primeiro. Para o terceiro, existem 2 opções: ao lado do primeiro ou logo após o segundo, e assim por diante. Aplicando o Princípio Multiplicativo, resulta em exatamente $(n - 1)!$ permutações circulares distintas.

Exemplo 2.13. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas? (*MORGADO et al., 1991*).

Resolução: Primeiro será calculada a quantidade de modos de formar uma ciranda com apenas 5 crianças que não tem restrições, o que pode ser feito de $(5 - 1)! = 24$ modos. Em seguida, a sexta criança é posicionada, o que pode ser feito de 5 modos. Por fim, a sétima criança é colocada na ciranda, com 4 possibilidades, já que não pode ficar ao lado da sexta criança. Aplicando o princípio multiplicativo, segue que o total de maneiras de organizar essa ciranda é igual a: $4! \times 5 \times 4 = 480$.

Exemplo 2.14. Em uma festa, oito pessoas sentam-se ao redor de uma mesa circular. Quantas formas diferentes existem para organizá-las, considerando que duas disposições são iguais se uma puder ser obtida por rotação da outra?

Resolução: O problema envolve pessoas em uma mesa circular e nesse caso a permutação circular deve ser usada, pois as disposições que podem ser obtidas por rotação

são equivalentes. Para eliminar essas redundâncias, fixa-se uma das pessoas como referência, como, por exemplo, a primeira. Com uma pessoa fixa, as outras 7 pessoas podem ser organizadas de $(7!)$ formas. Portanto, o número total de disposições distintas é dado por:

$$PC = (n - 1)! = 7! = 5040.$$

Assim, existem 5040 formas distintas de organizar as 8 pessoas ao redor da mesa circular.

2.1.5 Permutação Caótica

Uma Permutação Caótica (D_n ou $!n$), também chamada de Desarranjo, ocorre quando um conjunto é reorganizado de modo que nenhum elemento permaneça na posição original. Em outras palavras, se houver n elementos e for realizada uma troca de posições, nenhum deles pode ficar no lugar em que estava antes.

Para calcular o número D_n de permutações caóticas de $(1, 2, \dots, n)$, defina-se $A_i =$ conjuntos das permutações de $(1, 2, \dots, n)$ em que o número i ocupa o i -ésimo lugar, $i \in (1, 2, \dots, n)$.

Deve-se calcular o número de elementos do conjunto Ω das permutações de $(1, 2, \dots, n)$ que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, sendo S_k representa a soma das interseções de k conjuntos distintos A_i , do total de n conjuntos. Tem-se:

$$S_0 = \#(\Omega) = n!$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \#(A_i) = \sum_{i=1}^n (n-1)! = n(n-1)! = n!$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = \binom{n}{2} (n-2)! = \frac{n!}{2!}$$

$$S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (n-3)! = \binom{n}{3} (n-3)! = \frac{n!}{3!}$$

$\vdots$

$$S_n = \binom{n}{n} (n-n)! = \frac{n!}{n!}$$

O número de elementos de Ω que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é:

$$a_0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} S_{0+k}$$

Como $S_0 = n!$, tem-se:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n \\ &= n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right] \end{aligned}$$

Logo, o número de permutações caóticas de $(1, 2, \dots, n)$ é:

$$D_n = n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right] \quad (2.6)$$

Definição 2.15. A função “maior inteiro” é a que associa a cada real x o maior inteiro menor do que ou igual a x . Denotamos esse valor por $\lfloor x \rfloor$. Ou também:

$$\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}, \quad \text{com } x \in \mathbb{R}.$$

Outra maneira de calcular D_n . Tem-se:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

Logo, para valores grandes de n , obtém-se:

$$D_n = n! \cdot \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) \approx \frac{n!}{e}$$

Portanto:

$$D_n \approx \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor \approx \left\lfloor \frac{n!}{2,718} \right\rfloor \quad (2.7)$$

na qual 2,718 é o valor do número e , que aparece naturalmente em cálculos de probabilidade e crescimento exponencial. A resposta exata será o número inteiro mais próximo do resultado dessa divisão.

Exemplo 2.16. (ENEM cancelado 2009)

Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50, que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R\$ 1,00 de desconto.

Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia R\$ 2,00 de desconto.

Qual é a probabilidade de um consumidor não ganhar qualquer desconto?

- A) $\frac{1}{24}$
- B) $\frac{3}{24}$
- C) $\frac{1}{3}$
- D) $\frac{1}{4}$
- E) $\frac{1}{2}$

Resolução: O problema é sobre calcular a probabilidade do consumidor não acertar nenhum número na posição correta. Esse é um caso de permutação caótica e representado por D_n .

Como são 4 números, tem-se:

$$D_4 = 4! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right)$$

Calculando:

$$D_4 = 24 \times \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right)$$

$$D_4 = \frac{24}{2} - \frac{24}{6} + \frac{24}{24}$$

$$D_4 = 12 - 4 + 1 = 9$$

O total de permutações possíveis é $4! = 24$, então a probabilidade de não ganhar desconto é:

$$P = \frac{D_4}{4!} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Nenhuma das opções apresentadas na questão contém $\frac{3}{8}$, indicando um erro na formulação das alternativas.

Exemplo 2.17. Determine o número de permutações caóticas de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ nas quais os números 1, 2, 3, 4, 5 ocupam, em alguma ordem, os cinco primeiros lugares (MORGADO et al., 1991).

Resolução: Note que se 1, 2, 3, 4, 5 ocupam as cinco primeiras casas, então 6, 7, 8, 9, 10 ocupam as 5 últimas casas. Serão calculadas duas permutações caóticas e depois será aplicado o princípio multiplicativo.

1. Calcular a permutação dos cinco primeiros números e a quantidade de maneiras de fazer isto é igual a:

$$D_5 = 5! \times \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right)$$

Calculando:

$$D_5 = \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!} = 60 - 20 + 5 - 1 = 46$$

2. De forma análoga achamos a quantidade de permutações caóticas dos últimos cinco números.

Portanto, aplicando o princípio multiplicativo a quantidade total de permutações é:

$$D_5 \times D_5 = 46 \times 46 = 2116$$

Exemplo 2.18. Lucas, Marina, Felipe, Carolina e André brincam entre si de amigo-secreto. Cada nome é escrito em um pedaço de papel e colocado em uma urna. Em seguida, cada participante sorteia um nome ao acaso. A probabilidade de que nenhum deles retire o próprio nome é:

Resolução: Usando as letras iniciais dos nome para representá-los, a sequência L, M, F, C, A é uma sequência possível de retirada dos papéis, ou M, F, C, A, L , então o número total de permutações dessa forma é:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

E o número de sequências em que cada participante não tirar o próprio nome é uma permutação caótica dos 5 elementos das possíveis sequências, e isto pode ser calculado da seguinte maneira:

$$D_5 = 5! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right)$$

Calculando:

$$D_5 = \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!} = 60 - 20 + 5 - 1 = 46$$

Portanto a probabilidade de nenhum participante retirar o próprio nome é:

$$P(A) = \frac{46}{120} = \frac{23}{60}$$

Exemplo 2.19. Dois médicos devem examinar, durante uma mesma hora, 6 pacientes, gastando 10 minutos com cada paciente. Cada um dos 6 pacientes deve ser examinado pelos dois médicos. De quantos modos pode ser feito um horário compatível (MORGADO et al., 1991).

Resolução: Primeiro, organiza-se o horário de um dos médicos, o que pode ser feito em qualquer ordem dos pacientes. Para definir o horário do segundo médico, é necessário garantir que nenhum paciente seja marcado no mesmo horário em que já está agendado para o primeiro médico. Dessa forma, deve-se calcular uma permutação caótica com $n = 6$, considerando que há seis pacientes. Esse cálculo pode ser realizado da seguinte maneira:

$$D_6 = \left[\frac{6!}{2, 71} \right] = 266$$

As traves indicam que o resultado deve ser arredondado para o número inteiro mais próximo. Assim, há um total de 266 horários possíveis.

2.1.6 Combinação simples

Dado um conjunto A com n elementos de quantas maneiras podemos escolher p elementos distintos de A para formar um subconjunto B ?

Para escolher o primeiro elemento, são n possibilidades. Para a escolha do segundo elemento, restam $n - 1$ possibilidades; para escolher o terceiro elemento, $n - 2$ possibilidades; e assim sucessivamente, até a escolha do p -ésimo termo.

Portanto, o total de maneiras de selecionar p elementos, considerando a ordem, é dado por:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - p + 1).$$

No entanto, como a ordem dos elementos não importa, é necessário eliminar os casos de repetição gerados pela permutação dos p elementos selecionados.

$$\frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - p + 1)}{p \cdot (p - 1) \cdot (p - 2) \cdots 1}$$

Cada subconjunto formado por p elementos é chamado de combinação simples dos elementos de A .

O número de combinações simples de p objetos de um conjunto com n objetos é representado por:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad (2.8)$$

Exemplo 2.20. De quantas maneiras diferentes podemos formar saladas contendo exatamente 3 frutas, escolhidas a partir de um conjunto de 8 frutas disponíveis ?

Resolução: Para a primeira escolha, são 8 opções de frutas. Após selecionar a primeira fruta, restam 7 opções para a segunda escolha e, para a terceira, restam 6 opções. No entanto, como a ordem da escolha das frutas não importa, é preciso eliminar as contagens repetidas. Isso é feito dividindo pelo número de formas de reorganizar 3 itens ($3!$), que é igual a 6. Assim, o número total de combinações será dado por:

$$\frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \times 6}{6} = 56$$

Portanto, há 56 maneiras distintas de formar as saladas com 3 frutas.

Exemplo 2.21. Tem-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R' paralela a R . Quantos quadriláteros convexos com vértices em 4 desses pontos existem?

Resolução: Para formar um quadrilátero convexo, deve-se selecionar dois pontos de cada uma das duas retas R e R' . Primeiro, escolher dois pontos dentre os cinco disponíveis em R . Isso pode ser feito de

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

maneiras diferentes. Em seguida, escolhe-se dois pontos dentre os oito disponíveis em R' . Essa escolha pode ser feita de

$$C_8^2 = \frac{8!}{2! \times 6!} = 28$$

maneiras. Portanto, o número total de quadriláteros convexos que podem ser formados é dado por:

$$10 \times 28 = 280.$$

2.1.7 Combinação completa

Diferentemente do caso de combinações simples discutido na seção anterior, aqui os elementos escolhidos dentre o total disponível podem se repetir. Por isso, é necessário adotar estratégias diferentes para resolver esse tipo de problema.

Considere, por exemplo, a seguinte situação: de quantas maneiras podemos comprar 3 chocolates em uma loja que oferece 10 sabores diferentes? Caso os chocolates escolhidos

não pudessem se repetir, seria suficiente aplicar as técnicas de combinações simples. No entanto, como o problema permite a repetição, trata-se de uma combinação com repetição ou combinação completa. Nesse caso, os sabores escolhidos não precisam ser distintos, ou seja, é possível selecionar o mesmo tipo de chocolate mais de uma vez.

Alguns símbolos, como estrelas e barras, podem ser utilizados para modelar o problema e identificar uma estratégia de resolução adequada para esse tipo de situação.

1. **Modelo com símbolos:** Cada item escolhido pode ser representado com uma *estrela* (*) e são usadas *barras* (|) para separar as categorias. Exemplo: Comprar 3 chocolates de 10 sabores pode ser representado por:

$$** \mid * |||||$$

Aqui: **: 2 chocolates do sabor 1. *: 1 chocolate do sabor 2. As barras (|) separam as categorias de sabores.

2. **Total de símbolos:** Para escolher k chocolates de n tipos distintos: São usados k estrelas (para os chocolates). É preciso $n - 1$ barras (para separar os sabores). No total, são $k + (n - 1) = n + k - 1$ símbolos (estrelas + barras).
3. **Escolha das posições das estrelas ou barras:** O problema se resume a escolher k posições para as estrelas (ou, alternativamente, $n - 1$ posições para as barras) entre os $n + k - 1$ símbolos.

O número de maneiras de fazer isso é dado pela *combinação simples*:

$$\binom{n + k - 1}{k} = \frac{(n + k - 1)!}{k! \cdot (n - 1)!}, \quad (2.9)$$

onde:

- $(n + k - 1)!$: o número total de arranjos possíveis dos $n + k - 1$ símbolos.
- $k!$: ajusta para as permutações internas das estrelas que são idênticas.
- $(n - 1)!$: ajusta para as permutações internas das barras pelo mesmo motivo do ajuste das estrelas.

Portanto, a fórmula da combinação com repetição é derivada ao transformar o problema em um equivalente de distribuir k itens entre n categorias usando o modelo de *estrelas e barras*. A contagem é realizada pela combinação simples dos $n + k - 1$ símbolos, escolhendo k deles para representar as estrelas.

Respondendo o problema inicial:

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \times 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

Portanto, há 220 maneiras diferentes de escolher os chocolates.

Exemplo 2.22. Quantas são as soluções inteiras e não negativas de $x + y + z = 6$?

Resolução: Para resolver esse problema, pode ser utilizada a técnica de estrelas e barras sobre combinação com repetição, vista anteriormente nesse capítulo. As incógnitas (x , y e z) devem somar 6, o que significa que distribuiremos 6 “estrelas” entre os três termos. Para separar as incógnitas, usamos duas “barras”. Assim, no total, temos 6 estrelas e 2 barras, formando uma sequência de 8 elementos. O número de maneiras de organizar esses elementos é determinado por uma permutação com repetição e é calculado da seguinte maneira:

$$\frac{8!}{6! \times 2!} = 28$$

Portanto, há 28 soluções inteiras e não negativas para a equação $x + y + z = 6$.

Exemplo 2.23. Uma bolsinha contém 20 moedas de um centavo, 20 moedas de cinco centavos e 20 moedas de dez centavos. De quantas maneiras podemos escolher 20 moedas entre essas 60? (FOMIM; GENKIN; ITEMBERG, 2012).

Resolução: Cada tipo de moeda pode ser representado por uma incógnita da seguinte forma: as moedas de um centavo são representadas por x , as moedas de cinco centavos por y e as moedas de dez centavos por z . O problema pode ser formulado como

$$x + y + z = 20,$$

e pode ser resolvido por meio de combinação completa.

$$\binom{22}{2} = \frac{22!}{2! \times 20!} = 190$$

2.1.8 Princípio das Gavetas de Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) foi um matemático alemão conhecido por suas contribuições em várias áreas da matemática, incluindo teoria dos números, análise matemática e álgebra. Ele desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da matemática moderna e é lembrado por seu trabalho rigoroso e profundo.

O Princípio das Gavetas de Dirichlet (frequentemente chamado de Princípio das Casas dos Pombos) é de fácil compreensão, mas possui um enorme poder na resolução de problemas em diversas áreas da matemática, incluindo aquelas que, à primeira vista, parecem não ter qualquer relação com esse conceito. Essa característica evidencia a beleza e a profundidade desse princípio fundamental, que será enunciado através da seguinte proposição (MORGADO et al., 1991):

Proposição 2.24. *Se n objetos forem colocados em no máximo, $n - 1$ gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.*

Prova: Demonstração por absurdo. Suponha que cada uma das gavetas contenha no máximo um objeto. O número total de objetos será de, no máximo, $n - 1$, o que é uma contradição.

Exemplo 2.25. Uma floresta tem um milhão de pinheiros. Sabe-se que nenhum pinheiro tem mais de 600.000 espinhos. Mostre que pelo menos dois dos pinheiros na floresta têm que ter o mesmo número de espinhos (FOMIM; GENKIN; ITEMBERG, 2012).

Resolução: Para estabelecer uma correspondência entre os pinheiros e a quantidade de espinhos de cada um, faz-se uso do Princípio das Gavetas. Numera-se as casas de 0 a 600.001 e associa-se cada pinheiro à casa correspondente, de acordo com a quantidade de espinhos que possui. Como há 1.000.000 de pinheiros e apenas 600.002 casas disponíveis, pelo Princípio das Gavetas, conclui-se que pelo menos uma casa deve conter dois ou mais pinheiros, já que o número de elementos (pinheiros) excede o número de categorias (casas) disponíveis.

Exemplo 2.26. Cinco pontos são tomados sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que há dois desses pontos tais que a distância entre eles é menor que ou igual a $\sqrt{2}$ (CARVALHO; MORGADO, 2015).

Resolução: Divida o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado 1, ligando os pontos médios dos lados opostos. Pensando nos pontos como objetos e nos quadrados como gavetas, temos mais objetos do que gavetas. O Princípio das gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, haverá dois pontos no mesmo quadrado de lado 1. A distância entre esses pontos é no máximo igual ao comprimento da diagonal do quadrado, que é $\sqrt{2}$.

Exemplo 2.27. Dados doze inteiros, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11 (FOMIM; GENKIN; ITEMBERG, 2012).

Resolução: Pelo Princípio das Casas dos Pombos (Princípio das Gavetas de Dirichlet), ao considerar os restos possíveis na divisão de um número inteiro por 11, são 11 restos distintos: $0, 1, 2, \dots, 10$. Seleccionando 12 inteiros, pelo menos dois deles devem ter o mesmo resto ao serem divididos por 11. Seja $a = 11k + r$ e $b = 11q + r$ com $k, q \in \mathbb{Z}$, esses dois inteiros. Calculando $a - b$, obtém-se:

$$11k + r - 11q - r = 11k - 11q = 11t; t \in \mathbb{Z}.$$

Logo, essa diferença é divisível por 11.

2.1.9 Uma breve análise sobre questões selecionadas do ENEM.

A seguir, apresenta-se uma análise de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que abordam conteúdos de Análise Combinatória, aplicadas entre os anos de 2020 e 2024. A escolha do Enem como objeto de estudo justifica-se por sua relevância no cenário educacional brasileiro, uma vez que esse exame tem grande impacto nas práticas de ensino e na organização curricular das escolas, além de representar um dos principais instrumentos de avaliação externa no país. O recorte temporal adotado busca contemplar um intervalo recente e representativo, permitindo observar tendências e possíveis mudanças na abordagem desse conteúdo ao longo dos anos.

O objetivo da análise é compreender de que forma os conceitos de Análise Combinatória têm sido explorados nas questões do exame, identificando os conteúdos específicos mais recorrentes, como o princípio multiplicativo, permutações, arranjos e combinações, bem como o nível de complexidade e o tipo de raciocínio exigido dos estudantes.

Para cada questão selecionada, será apresentado um comentário detalhado sobre o processo de resolução, priorizando, sempre que possível, estratégias que dispensem o uso direto de fórmulas, sobretudo utilizando os princípios aditivo e multiplicativo. Essa escolha visa valorizar o raciocínio combinatório e a compreensão conceitual por parte dos estudantes, o que está em consonância com os objetivos de uma prática pedagógica mais significativa e contextualizada.

- 1) **(ENEM 2020)** Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem “TOM MARVOLO RIDDLE” gerou a frase “I AM LORD VOLDEMORT”. Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase “I AM POTTER”, de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras. Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

A) $9!$

B) $4! \times 5!$

C) $2 \times 4! \times 5!$

D) $\frac{9!}{2}$

E) $\frac{4! \times 5!}{2}$

Resolução: Observando as premissas do problema, é possível perceber que o conceito abordado é a permutação com repetição, pois aparecem duas consoantes repetidas que deverão ser consideradas no cálculo dos anagramas. Dadas 4 vogais e 5 consoantes, e considerando que vogais e consoantes devem se alternar, a primeira letra da sequência

deve ser uma consoante. As permutações das vogais e das consoantes são calculadas e, em seguida, os dois valores são multiplicados.

A permutação das vogais será:

1. Pelo princípio multiplicativo:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24.$$

2. Pelo cálculo de permutações simples:

$$P_4 = 4! = 24.$$

Para a permutação das consoantes, é necessário considerar que há 2 repetidas. Assim, deve-se descontar essa repetição ao realizar a permutação das 5 consoantes.

1. Pelo princípio multiplicativo:

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

2. Pela fórmula de permutação com repetição:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60.$$

Portanto, a quantidade total de anagramas que atendem a essas restrições é:

$$\frac{4! \times 5!}{2} = 1440.$$

Resposta E.

2) **(ENEM 2022)** Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

- A) $9 \times \frac{6!}{(6-2)!}$
B) $9 \times \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$
C) $9 \times \frac{4!}{(4-2)! \times 2!}$
D) $9 \times \frac{2!}{(2-2)! \times 2!}$
E) $9 \times \left(\frac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1 \right)$

Esta questão envolve o conceito de combinação e exige do estudante uma boa capacidade de interpretação do enunciado, uma vez que não se trata apenas da aplicação mecânica de uma fórmula, mas da compreensão da situação apresentada. A proposta aqui é resolver o problema sem recorrer inicialmente à fórmula clássica de combinação, de modo a valorizar o raciocínio lógico-combinatório e promover uma abordagem mais conceitual. No entanto, como a alternativa correta está expressa na forma algébrica da fórmula de combinação, ao final do processo será necessário desenvolver o raciocínio até que se chegue à mesma representação simbólica, estabelecendo assim a ponte entre a argumentação lógica e a notação matemática formal.

Resolução: Os apartamentos que atendem às exigências são aqueles cujos números terminam em: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Para a escolha do primeiro apartamento em qualquer andar o cliente tem 6 opções, e, para o segundo, 5 opções. Como a ordem das escolhas não importa, resulta em:

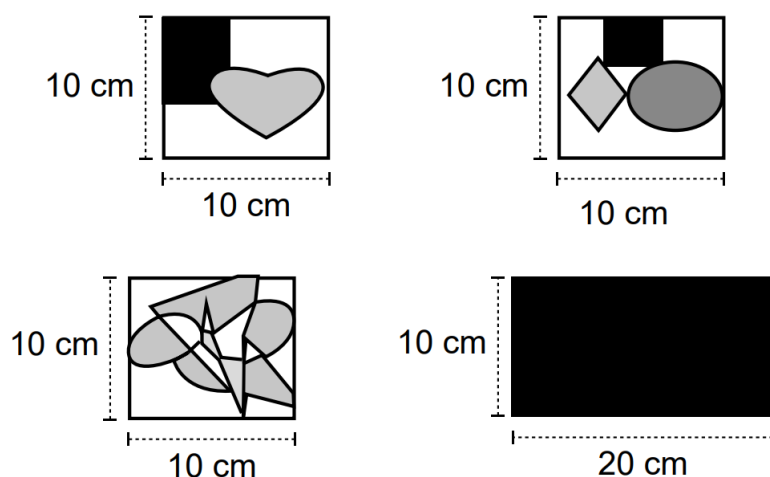
$$\frac{6 \times 5}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$$

Considerando que há nove andares, o total de possibilidades é:

$$9 \times \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$$

Resposta: B.

- 3) (ENEM 2023 PPL. Exame Nacional do Ensino Médio para Pessoas Privadas de Liberdade) Uma costureira tem à sua disposição pelo menos duas unidades de cada um dos quatro tipos de retalhos retangulares com as estampas e os tamanhos apresentados.



Para confeccionar um tapete em formato retangular de $10\text{ cm} \times 50\text{ cm}$, ela utilizará os retalhos, na posição indicada na figura, costurando um lado de um a um lado do outro, sem que haja rotações desses retalhos. O modelo de tapete que pretende confeccionar deverá conter um único retalho de $10\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ e mais três retalhos de formato $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$, sendo que retalhos de mesma estampa não poderão ficar lado a lado.

Quantos modelos diferentes de tapetes poderão ser confeccionados?

- A) 12
- B) 24
- C) 34
- D) 48
- E) 60

Resolução: A solução será dividida em dois casos.

1. Sem repetição de retalhos: Inicialmente, há 4 opções para posicionar o maior retalho, e os outros três podem ser permutados nos espaços restantes. Portanto, o número total de possibilidades de realizar essa disposição é::

$$4 \times 3! = 24$$

2. Com a repetição de um único retalho: Considerando que retalhos iguais não podem estar em posições adjacentes, a posição do maior retalho passa a influenciar a quantidade de possibilidades.
- Quando o maior retalho está em uma das pontas, temos 2 possibilidades de escolha para ele. Após posicioná-lo, há 1 possibilidade de escolha para colocar

o bloco repetido, seguido de 2 escolhas possíveis para o terceiro bloco. Esse processo pode ser realizado repetindo qualquer um dos três blocos menores. Assim, o número total de possibilidades é:

$$2 \times 1 \times 2 \times 3 = 12$$

- Quando o maior retalho está na segunda ou terceira posição, há 2 possibilidades no total para determinar onde posicionar o bloco que se repete. Além disso, existem 2 maneiras de escolher o bloco que não será repetido. Como há três blocos menores no total, o número de maneiras de realizar essa disposição será:

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$$

Aplicando o princípio aditivo, a resposta final é:

$$24 + 12 + 24 = 60$$

Resposta E.

- 4) **(ENEM 2023)** Ao realizar o cadastro em um aplicativo de investimentos, foi solicitado ao usuário que criasse uma senha, sendo permitido o uso somente dos seguintes caracteres:

- algarismos de 0 a 9;
- 26 letras minúsculas do alfabeto;
- 26 letras maiúsculas do alfabeto;
- 6 caracteres especiais !, @, #, \$, *, &.

Três tipos de estruturas para senha foram apresentadas ao usuário:

- tipo I: formada por quaisquer quatro caracteres distintos, escolhidos dentre os permitidos;
- tipo II: formada por cinco caracteres distintos, iniciando por três letras, seguidas por um algarismo e, ao final, um caractere especial;
- tipo III: formada por seis caracteres distintos, iniciando por duas letras, seguidas por dois algarismos e, ao final, dois caracteres especiais.

Considere p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de se descobrirem ao acaso, na primeira tentativa, as senhas dos tipos I, II e III, respectivamente.

Nessas condições, o tipo de senha que apresenta a menor probabilidade de ser descoberta ao acaso, na primeira tentativa, é o

- A) tipo I, pois $p_1 < p_2 < p_3$.

- B) tipo I, pois tem menor quantidade de caracteres.
- C) tipo II, pois tem maior quantidade de letras.
- D) tipo III, pois $p_3 < p_2 < p_1$
- E) tipo III, pois tem maior quantidade de caracteres.

Resolução: A quantidade de possibilidades para cada tipo de senha é calculada utilizando o princípio multiplicativo e, em seguida, são os resultados.

- **Tipo 1.** São 68 caracteres no total dentre todas as possibilidades. Portanto, a quantidade de possibilidades de senha com as regras do tipo 1 é:

$$68 \times 67 \times 66 \times 65$$

- **Tipo 2.** São 52 letras, 10 algarismos e 6 caracteres especiais. Logo, a quantidade de possibilidades para a senha do tipo 2 é:

$$52 \times 51 \times 50 \times 10 \times 6$$

- **Tipo 3.** Novamente fazendo uso do princípio multiplicativo, vamos ter um total de:

$$52 \times 51 \times 50 \times 10 \times 9 \times 6 \times 5$$

Comparando os três tipos:

$$68 \times 67 \times 66 \times 65 > 52 \times 51 \times 50 \times 60 > 52 \times 51 \times 50 \times 9 \times 6 \times 5$$

Observa-se que foram realizadas algumas multiplicações para facilitar a identificação do tipo com maior quantidade. Como as probabilidades, neste caso, são calculadas dividindo 1 pelo total de possibilidades, a resposta final é:

$$p_1 < p_2 < p_3$$

Resposta A.

- 5) **(ENEM 2024)** Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionários. Para executar determinada atividade, a direção desse hospital formará uma equipe com 5 médicos, sendo, pelo menos, 3 cardiologistas.

A expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe é

A) $\frac{7!}{4!} \times \frac{6!}{4!}$

B) $\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}$

- C) $\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{5!}{1! \times 4!}$
- D) $\left(\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!} \right) \times \left(\frac{7!}{4! \times 3!} + \frac{6!}{1! \times 5!} \right) \times \left(\frac{7!}{5! \times 2!} + \frac{6!}{0! \times 6!} \right)$
- E) $\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{1! \times 5!} + \frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{0! \times 6!}$

Resolução: O problema será dividido em três etapas, conforme a sugestão de [Lima et al. \(2005\)](#) para a resolução de problemas dessa natureza.

1. Serão selecionados 3 cardiologistas e 2 neurologistas. Para a escolha do primeiro cardiologista, há 7 opções; para o segundo, 6; e para o terceiro, 5. No caso dos neurologistas, há 6 opções para o primeiro e 5 para o segundo. Aplicando o princípio multiplicativo e dividindo pelo fatorial da quantidade de escolhidos em cada grupo já que a ordem das escolhas não altera a composição do grupo obtém-se:

$$\frac{7 \times 6 \times 5}{3!} \times \frac{6 \times 5}{2!} = \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}$$

2. Agora, devem ser escolhidos 4 cardiologistas e 1 neurologista. Para a escolha do primeiro cardiologista, há 7 opções; para o segundo, 6; para o terceiro, 5; e para o quarto, 4. Para a escolha do único neurologista, há 6 opções. Aplicando novamente o princípio multiplicativo e retirando os casos repetidos quando houver, como feito anteriormente, chega-se a:

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!} \times 6 = \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{1! \times 5!}$$

3. Por fim, forma-se um grupo composto apenas por cardiologistas e, seguindo o mesmo raciocínio dos casos anteriores, isso pode ser feito de:

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5!} = \frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{0! \times 6!}$$

Com base no princípio aditivo, somam-se esses três resultados.

$$\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{1! \times 5!} + \frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{0! \times 6!}$$

Resposta E.

- 6) **(ENEM 2024)** Para abrir a porta de uma empresa, cada funcionário deve cadastrar uma senha utilizando um teclado alfanumérico como o representado na figura.

Por exemplo: a tecla que contém o número 2 traz as letras correlacionadas A, B e C. Cada toque nessa tecla mostra, sequencialmente, os seguintes caracteres: 2, A, B e

1	2 _{ABC}	3 _{DEF}
4 _{GHI}	5 _{JKL}	6 _{MNO}
7 _{PQRS}	8 _{TUV}	9 _{WXYZ}
—	0	—

C. Para os próximos toques, essa sequência se repete. As demais teclas funcionam da mesma maneira.

As senhas a serem cadastradas pelos funcionários devem conter 5 caracteres, sendo 2 algarismos distintos seguidos de 3 letras diferentes, nessa ordem. Um funcionário irá cadastrar a sua primeira senha, podendo escolher entre as teclas que apresentam os números 1, 2, 5, 7 e 0 e as respectivas letras correlacionadas, quando houver.

O número de possibilidades diferentes que esse funcionário tem para cadastrar sua senha é

- A) 11520.
- B) 14400.
- C) 18000.
- D) 312000.
- E) 390000.

Resolução: Este é um típico problema que, se iniciado da maneira correta, torna-se simples de resolver. No entanto, ao seguir caminhos inadequados, pode se tornar bastante complicado e até levar a erros na solução.

Inicialmente, escolhem-se dois algarismos distintos que, pelo princípio multiplicativo, podem ser calculados do seguinte modo:

$$5 \times 4 = 20$$

Em seguida, escolhem-se três letras distintas a partir de um total de 10 letras disponíveis. Assim, tem-se:

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

Aplicando o princípio multiplicativo, obtém-se:

$$20 \times 720 = 14\,400$$

Portanto, existem 14400 possibilidades de senhas distintas.

Resposta B.

3 Sequência Didática

Neste capítulo, será apresentada uma sequência didática estruturada com o objetivo de promover uma compreensão mais significativa dos conceitos de contagem, explorando o raciocínio matemático dos estudantes por meio de atividades diversificadas. A proposta inclui o uso de jogos matemáticos como ferramenta pedagógica para estimular o interesse, favorecer a participação ativa e ampliar a compreensão dos conceitos envolvidos. De acordo com [Grando \(2000\)](#), o jogo, quando inserido de forma planejada e com objetivos claros, pode contribuir significativamente para o desenvolvimento do pensamento matemático, promovendo um ambiente favorável à aprendizagem ativa e reflexiva. Essa abordagem visa contribuir para um melhor desempenho dos alunos em avaliações externas, como o Enem e o Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (Saepe), além de ampliar sua capacidade de interpretar e resolver situações-problema com maior segurança.

A sequência didática é uma estratégia de ensino fundamental para organizar o processo de aprendizagem de forma estruturada e progressiva. Segundo [Zabala \(1998\)](#), ela permite ao professor planejar atividades de ensino que estejam alinhadas aos objetivos pedagógicos, respeitando as necessidades e os conhecimentos prévios dos estudantes. Esse planejamento contribui para que os conteúdos sejam apresentados de maneira gradual, favorecendo a assimilação e a construção de novos saberes.

Além disso, a sequência didática possibilita que os alunos compreendam a relação entre diferentes tópicos de estudo. Para [Dolz, Noverraz e Schneuwly \(2004\)](#), o encadeamento lógico de atividades facilita a aprendizagem porque oferece um percurso claro e orientado, que ajuda os estudantes a avançarem em seus conhecimentos com mais segurança.

Outro aspecto importante é que a sequência didática também permite a diversificação de metodologias. Atividades como debates, aulas expositivas dinâmicas, resolução de problemas e jogos pedagógicos podem ser integradas ao planejamento, tornando o processo mais atrativo e motivador para os estudantes. Assim, o professor pode utilizar diferentes abordagens para atender às necessidades individuais, promovendo a inclusão e o aprendizado de todos.

Nesse contexto, a avaliação contínua é uma peça fundamental na sequência didática, sendo indispensável para acompanhar o progresso dos estudantes e ajustar as práticas pedagógicas de forma eficiente. Isso reforça a importância de um planejamento bem elaborado, que contemple não apenas o ensino dos conteúdos, mas também estratégias de avaliação e acompanhamento.

A seção a seguir apresenta a sequência didática proposta neste estudo, de modo a detalhar cada encontro, seus objetivos, recursos e as estratégias de ensino e avaliação.

3.1 Sequência didática voltada para o estudo da análise combinatória

1. **Etapas de ensino:** Ensino médio.
2. **Área:** Matemática.
3. **Unidade temática básica (BNCC):** Análise Combinatória.
4. **Objetos de Conhecimento:** Fatorial de um número natural, permutação simples, combinação com e sem repetição, princípio multiplicativo e aditivo, permutação caótica e o princípio de Dirichlet.
5. **Habilidades BNCC:** (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
6. **Objetivos pedagógicos:** Desenvolver uma melhor compreensão sobre problemas de contagem; compreender de onde vem as fórmulas mais usadas em análise combinatória; usar o princípio multiplicativo na resolução de problemas.
7. **Duração dos encontros:** 6 encontros, sendo cada encontro de 1h e 40 min, ou seja, duas aulas.
8. **Recursos educacionais:** Data show, quadro branco, piloto, livros, listas de exercícios, materiais impressos, jogos matemáticos, celulares e computadores.
9. **Avaliação:** Avaliações contínuas serão realizadas com observações durante cada encontro, além de uma avaliação final composta por questões do Enem.
10. **Estratégias de ensino:**
 - a) **Atividades lúdicas com jogos matemáticos para introduzir a noção de contagem:** Durante os encontros realizar atividades lúdicas como a apresentação e aplicação do jogo senha que aborda temas de análise combinatória.
 - b) **Exploração do conceito de fatorial como preparação para permutação e combinação:** Antes de apresentar os conceitos de permutação e combinação, vamos definir o que é o fatorial de um número natural e resolver algumas questões envolvendo tal conteúdo.
 - c) **Aulas expositivas e debates:** Nessa etapa vão ser apresentados aos estudantes os principais conceitos da análise combinatória como permutação, combinação e princípio fundamental da contagem.

- d) **Resolução de problemas do Enem:** Nesta fase serão resolvidos diversos problemas do Enem envolvendo permutação e combinação com e sem repetição usando o princípio fundamental da contagem.
- e) **Debates sobre as resoluções dos problemas:** Análise das diferentes respostas encontradas pelos estudantes e debates sobre a linha de raciocínio que levou o estudante a chegar no resultado mesmo se for uma resposta errada.
- f) **Teste final:** Como parte da sequência didática, será aplicado um teste final individual com questões de análise combinatória retiradas de edições anteriores do Enem.

3.1.1 Descrição dos encontros da sequência didática

No que se segue, serão pormenorizados os encontros programados para a execução da sequência didática.

Encontro 1

Tema:

Introdução à análise combinatória de maneira lúdica.

Objetivo:

Aplicação do jogo Senha para trabalhar, de maneira lúdica, os principais conceitos de análise combinatória subjacentes ao jogo.

Apresentação do jogo Senha:

O jogo Senha, também conhecido como *Mastermind*, é um jogo de estratégia criado por Mordecai Meierowitz em 1970, envolve permutações e é ideal para estimular o pensamento dedutivo. Pode ser jogado por duas ou mais pessoas, sendo umas responsáveis por criar a senha e as demais por tentar decifrá-la.

Objetivo do jogo:

O decifrador deve descobrir a senha secreta definida pelo criador, com base em uma sequência de cores ou números (dependendo da versão do jogo), em um número limitado de tentativas.

Regras básicas:

1. **Preparação da Senha:** O criador escolhe uma combinação secreta de 4 cores (ou números) e a esconde do outro jogador. A senha pode ou não conter cores ou números repetidos (dependendo da variante do jogo).
2. **Tentativas de Adivinhação:** O decifrador tenta descobrir a senha fazendo diferentes combinações de peças coloridas (ou números). A cada tentativa, o criador fornece pistas, indicando:
 - Que a peça está na cor correta e na posição correta, ou se o número existe na senha e está na posição correta.
 - Quais cores ou números estão corretos, mas na posição errada.
3. **Limite de Tentativas:** O decifrador tem um número pré-definido de tentativas para adivinhar a senha correta.
4. **Feedback:** Para cada tentativa, o criador utiliza peças menores (ou marcas) para fornecer feedback:
 - Peças pretas indicam que a cor ou o número está correto e na posição certa.
 - Peças brancas indicam que a cor ou o número pertence a senha, mas está na posição errada.

Figura 1 – Jogo senha

TENTATIVAS	DICAS
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○

Cores disponíveis ● ● ● ● ● ● ●
 Legenda das dicas ● cor certa lugar certo × cor certa lugar errado

Fonte: (FLUMINENSE, 2021)

O professor pode imprimir essa imagem, plastificá-la e utilizá-la com canetas hidrocor, facilitando a limpeza e permitindo seu uso repetido.

Descrição geral das atividades:

Separar a turma em alguns grupos. Explicar as regras do jogo para a turma toda. Entregar um jogo senha para cada grupo e deixar um tempo para eles jogarem sem mencionar conceitos de análise combinatória. Após esse primeiro momento, realizar um diálogo com a turma sobre alguns problemas de contagem envolvendo as regras do jogo e debater sobre algumas variações possíveis nas regras, como a repetição ou não das cores na senha.

Orientações para o professor na aplicação do jogo Senha:

1. Não permitir grupos com mais de quatro estudantes; dessa maneira, a interação entre todos será melhor.
2. Nas primeiras rodadas do jogo permitir que joguem em duelos entre duplas, pois os alunos ainda estão aprendendo o jogo.
3. Entregar blocos de notas aos alunos (se possível personalizado para o jogo) para eles irem anotando o desenvolvimento de cada partida. Eles podem anotar, por exemplo, em quantas rodadas a senha foi decifrada ou se a senha criada tinha cores repetidas. Ao término da atividade recolher as anotações dos estudantes para uma futura análise.
4. Fazer perguntas simples, como: “Se houver mais cores repetidas nas senhas as chances do desafiante ganhar mais rápido aumentam ou diminuem”? Após a resposta dos estudantes perguntar o porquê da resposta e incentivar a pensarem um pouco sobre a matemática por trás do jogo, sem falar em um tema específico, pelo menos por enquanto.
5. Analisar junto com os estudantes se os decifradores conseguiram descobrir a senha mais rápido a medida que mais partidas foram acontecendo. E analisar junto com eles a importância das dicas para o jogo ser viável.
6. Formar uma roda de conversa com todos os grupos e incentive-os a refletirem sobre o que aconteceria se não fossem fornecidas dicas, se a quantidade de cores na senha mudasse ou se apenas a variedade de cores disponíveis fosse alterada. Estimular o debate sobre o jogo e suas possíveis variações. Além disso, incentivar os alunos a compartilharem suas impressões sobre o jogo.

Para obter uma melhor impressão sobre o que os alunos acharam do jogo Senha, pode-se utilizar um questionário simples, com perguntas diretas e objetivas.

Questionário sobre o jogo Senha

1) Você gostou de jogar o jogo Senha?

- A) ☐ Sim, gostei muito
- B) ☐ Gostei
- C) ☐ Foi indiferente
- D) ☐ Não gostei

2) Você voltaria a jogar o jogo Senha em outra oportunidade?

- A) ☐ Sim, com certeza
- B) ☐ Talvez
- C) ☐ Não

3) Você acha que o jogo ajudou a desenvolver seu raciocínio lógico e estratégico?

- A) ☐ Sim, bastante
- B) ☐ Um pouco
- C) ☐ Não ajudou

4) Durante o jogo, você percebeu alguma relação com conceitos matemáticos como contagem, combinações ou probabilidade?

- A) ☐ Sim, percebi claramente
- B) ☐ Percebi algumas coisas
- C) ☐ Não percebi

5) O que você mais gostou no jogo Senha?

- A) ☐ Desafiar outros colegas
- B) ☐ Decifrar as combinações
- C) ☐ Criar senhas desafiadoras
- D) ☐ Não gostei de nada
- E) ☐ Outro: _____

Duração do encontro: 1h e 40 min.

Encontro 2

Tema:

Apresentação dos princípios aditivo e multiplicativo.

Objetivos:

Explorar mais profundamente o jogo Senha. Definir formalmente os princípios aditivo e multiplicativo. Resolver problemas de diferentes níveis, principalmente questões do Enem.

Descrição geral das atividades:

Analisar, junto com os alunos, algumas partidas anotadas no encontro 1. Aproveitar esse momento para introduzir formalmente os princípios multiplicativo e aditivo. Em seguida, calcular com os estudantes algumas situações encontradas durante as partidas. Por fim, entregar uma lista de exercícios para fixação.

Orientações para o professor:

1. Calcular, junto com os estudantes, a quantidade de possibilidades de senhas formadas por quatro cores, considerando os casos com e sem repetição, a partir de um total de sete cores disponíveis. Além disso, analisar as possibilidades ao longo do jogo, à medida que o decifrador for acertando as cores.
2. Discutir com os estudantes quais são as melhores estratégias tanto para quem cria a senha quanto para o decifrador.
3. Perguntar aos estudantes sobre a importância das dicas no jogo e se seria viável jogar sem elas.
4. Dividir a turma em duplas e entregar a cada estudante uma ficha de exercícios contendo uma lista de problemas variados, incluindo questões do Enem sobre permutações, acompanhadas de suas respectivas soluções. Circular pela sala para auxiliar as duplas em caso de dúvidas.
5. Nos últimos vinte minutos pedir para os estudantes compartilharem suas soluções e encoragem ele ir ao quadro mostrar para a turma seus métodos de resolução.

Exercícios Introdutórios

1. Miguel tem 5 camisas, 3 calças e 2 tênis para se vestir. Usando uma camisa, uma calça e um tênis de quantas maneiras diferentes Miguel pode se vestir?

Resolução: Como Miguel deve escolher uma camisa, uma calça e um tênis, aplicando o princípio multiplicativo, o total de maneiras de vestir será igual a:

$$5 \times 3 \times 2 = 30$$

2. Giovanna vai a um restaurante e têm 3 opções de entrada, 5 opções de pratos principais e 2 tipos de sobremesas. Escolhendo uma entrada, um prato principal e uma sobremesa, de quantas maneiras diferentes Giovanna pode jantar nesse restaurante?

Resolução: Como Giovanna deve tomar 3 decisões sucessivas e independentes podemos aplicar o princípio multiplicativo.

$$3 \times 5 \times 2 = 30$$

possíveis jantares.

3. Durante uma partida do jogo Senha, Amanda já acertou duas cores das quatro cores da senha, ela sabe que a senha não possui cores repetidas e entre as sete cores inicialmente disponíveis para a criação da senha duas delas não estão presentes na senha. Quantas combinações de cores Amanda tem para escolher as duas últimas, sem dica adicional?

Resolução: Como a senha não pode ter cores repetidas, Amanda tem três opções de cores para pintar o primeiro espaço vago. Após essa escolha, restam apenas duas cores disponíveis para o último espaço. Portanto, o número total de possibilidades é:

$$3 \times 2 = 6$$

.

Questões do ENEM

4. (ENEM 2015 PPL) A bandeira de um estado é formada por cinco faixas: A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura:

A	B
	C
D	
E	

Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores: verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor. O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é

- A) $1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$
- B) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$
- C) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 3$
- D) $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2$
- E) $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Resolução: Conforme ensina [Morgado et al. \(1991\)](#), a resolução do problema deve iniciar-se pela maior restrição, desenvolvendo-se a partir dela o restante da solução.

Assim sendo, para pintar a região A tem-se 3 cores disponíveis, para pintar a região B há 2 cores, para pintar a região C apenas uma cor, pois ela não pode ser igual a cor da região A e nem da região B. Para pintar a região D existe apenas uma opção, pois essa região faz fronteira com as regiões C e A, e para pintar a região E há somente 2 cores disponíveis, pois ela só faz divisa com a região D. Basta agora multiplicar as quantidades de opções disponíveis para pintar cada região.

Dessa forma, o número de maneiras diferentes de pintar essa bandeira é:

$$3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2.$$

Resposta B:

Observação: Nesse tipo de questão o início da resolução é fundamental, pois deve-se sempre analisar primeiro a maior restrição ou o ponto mais crítico do problema, afim de evitar problemas mais complexos desnecessários durante o desenvolvimento da solução.

5. (ENEM 2014 PPL) Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas. Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por:

- A) 100
- B) 90
- C) 80
- D) 25
- E) 20

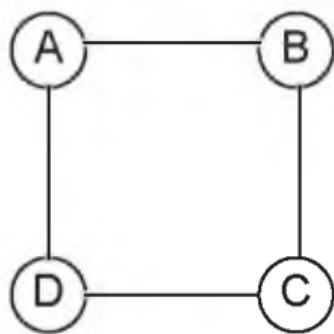
Resolução: É necessário introduzir dois novos caracteres na senha, para cada caracter temos 10 possibilidades de escolha e como são dois, aplicando o princípio multiplicativo o número de senhas ficará multiplicado por:

$$10 \times 10 = 100$$

Essa questão é uma aplicação direta do princípio multiplicativo da contagem.

Resposta A.

6. (ENEM 2016) Para estimular o raciocínio de sua filha, um pai fez o seguinte desenho e o entregou à criança juntamente com três lápis de cores diferentes. Ele deseja que a menina pinte somente os círculos, de modo que aqueles que estejam ligados por um segmento tenham cores diferentes.



De quantas maneiras diferentes a criança pode fazer o que o pai pediu?

- A) 6
- B) 12
- C) 18
- D) 24
- E) 72

Resolução: Como comenta [Lima et al. \(2005\)](#), sempre que possível é recomendável adotar a perspectiva da pessoa que realizará a atividade descrita no problema. Neste caso, trata-se da ação de pintar o objeto, respeitando as restrições apresentadas.

Inicialmente, escolhe-se uma cor entre as três disponíveis para pintar o círculo **A** (a escolha de outro círculo nessa etapa não altera a solução). Em seguida, escolhe-se uma das duas cores restantes para pintar o círculo **B** (a seleção do círculo **D** nesse momento não impacta o resultado; no entanto, se o círculo **C** for escolhido nesta etapa, a solução assume outra configuração).

Na etapa seguinte, ao pintar o terceiro círculo, opta-se pelo círculo **D**, o que permite duas possibilidades para a realização da pintura:

- **Primeira opção:** repetir a cor do círculo B , o que resulta em uma opção para o círculo D e duas opções para o círculo C .
- **Segunda opção:** utilizar a cor do círculo A , o que gera uma única opção para a pintura do círculo C .

Portanto, obtém-se:

$$3 \times 2 \times 1 \times 2 + 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 18$$

possibilidades distintas de pintura. Foram utilizados os princípios aditivo e multiplicativo ao longo da resolução.

Resposta C.

Duração: 1h e 50 min.

Encontro 3

Tema:

Permutação simples

Objetivos:

Definir o fatorial de um número e apresentar o conceito de permutação.

Descrição geral das atividades:

Apresentar o conceito de fatorial de um número, conforme foi definido na 2.5, e introduzir o conceito de permutação simples. Utilizar materiais concretos para que os alunos possam testar hipóteses e verificar resultados com base em experiências práticas. Empregar o diagrama de árvore como recurso visual para ilustrar o processo de tomada de decisões. Responder uma lista de exercício com um grau crescente de dificuldade começando por questões introdutórias e finalizando com questões do enem.

Orientações para o professor

1. Trabalhar com os estudantes de maneira mais profunda o princípio multiplicativo, deixando um tempo para eles refletirem sobre a definição.
2. Introduzir o conceito de permutação simples usando materiais concretos e até mesmo os estudantes. Mostrar o diagrama de árvore para a turma.

3. Entregar uma lista de exercícios introdutória e pedir aos estudantes que formem duplas para respondê-la. Esta sequência didática inclui uma lista de exercícios sobre o tema.
4. Recolher as primeiras fichas e entregar uma lista com questões do ENEM. Desta vez, incentivar os estudantes a tentarem responder sozinhos, oferecendo ajuda em caso de dúvidas.

Exercícios introdutórios.

1. Numa brincadeira, 6 crianças fizeram uma fila indiana. A quantidade de maneiras que elas podem ficar na fila é:
 - A) 30 maneiras.
 - B) 12 maneiras.
 - C) 36 maneiras.
 - D) 100 maneiras.
 - E) 720 maneiras.

Resolução: Essa questão é um clássico problema de permutação. Para a posição 1 da fila pode-se escolher seis crianças, para a posição 2 da fila 5 crianças e assim por diante até restar apenas uma criança para ocupar a última posição na fila. Aplicando o princípio multiplicativo obtém-se:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

maneiras de organizar essa fila, ou seja, permutação de 6 elementos distintos.

2. Quantas senhas podem ser criadas com 6 algarismos sem repetição?

Resolução: Para escolher o primeiro dígito da senha são 10 possibilidades, para a escolha do segundo 9, para o terceiro 8 opções e assim por diante, até a escolha do sexto dígito com 5 possibilidades. Aplicando o princípio multiplicativo serão obtidas:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$$

senhas possíveis.

3. Quantos números com 4 algarismos existem?

Resolução: Como recomenda [Lima et al. \(2005\)](#) a resolução de um problema de contagem deve iniciar-se pela maior restrição; neste caso, trata-se da escolha do primeiro algarismo, que não pode ser o 0. sendo assim, temos 9 possibilidades para

o primeiro algarismo, 10 para o segundo, 10 para o terceiro e 10 para o quarto, portanto existem

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$$

números.

4. Quantos números pares com 5 algarismos distintos existem?

Resolução: A maior restrição do problema será tratada primeiramente, conforme orienta Lima et al. (2005) e nesta situação é o fato do número ser par, portanto escolher primeiro o último dígito é fundamental, temos 5 possibilidades, pois um número é par quando o seu último dígito é par. O problema será dividido em dois casos para facilitar a sua resolução.

Caso 1: O último dígito é zero, restando, portanto, apenas um possível valor, para o primeiro dígito tem 9 possibilidades, para o segundo 8, para o terceiro 7 e para o quarto 6. Aplicando o princípio multiplicativo, o total de números é:

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1 = 3024$$

Caso 2: O último dígito não é zero e com isso têm 4 possibilidades para a sua escolha, para o primeiro dígito não pode ser escolhido o zero e nem o mesmo algarismo do último dígito do número restando 8 possibilidades de escolha, para o segundo também há 8 possibilidades, pois o zero volta a poder ser escolhido, para o terceiro dígito vão ter 7 possibilidades e para o quarto 6, portanto vão ter um total de números igual a:

$$8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 4 = 10752$$

Por fim, aplicando o princípio aditivo, vão ter:

$$3024 + 10752 = 13776$$

números.

Questões do ENEM

1. **(ENEM 2016)** Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

A) $10^2 \cdot 26^2$

B) $10^2 \cdot 52^2$

C) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$

D) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

E) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

Resolução: Primeiramente, escolhem-se os algarismos. Essa escolha pode ser feita de:

$$10 \times 10 = 10^2$$

maneiras. Para a escolha das letras, tem-se:

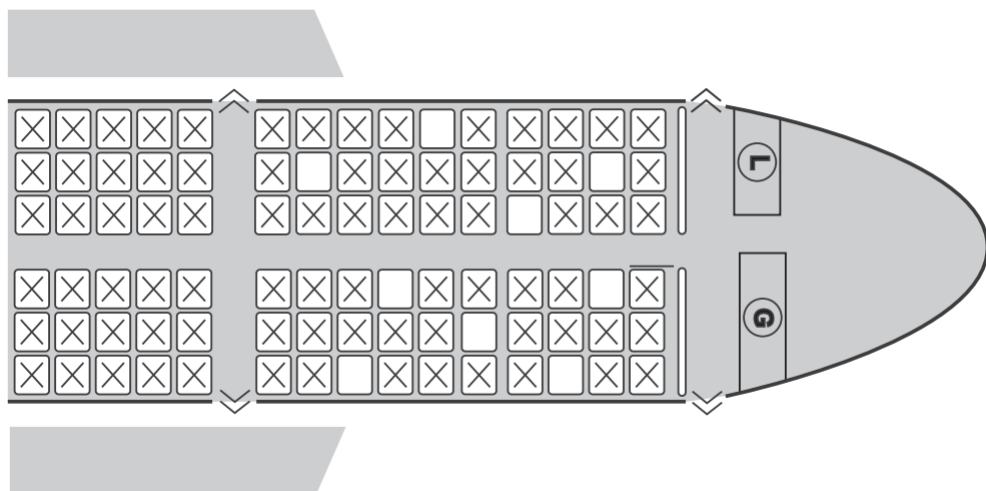
$$26 \times 26 = 26^2$$

Como a ordem dos caracteres não interfere na formação da senha, o total de senhas possíveis é dado por:

$$10^2 \times 26^2$$

Resposta A.

2. (ENEM 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

- A) $\frac{9!}{2!}$
- B) $\frac{9!}{7! \times 2!}$
- C) $7!$
- D) $\frac{5!}{2!} \times 4!$
- E) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

Resolução: Existem 9 poltronas vagas no avião para acomodar as sete pessoas da família. A divisão do problema em partes facilita sua resolução. Primeiro tem 9 lugares para acomodar a primeira pessoa no avião, em seguida restam 8 lugares para a segunda pessoa se sentar, depois 7 para a terceira pessoa e assim sucessivamente até restar 3 cadeiras para a sétima pessoa se sentar. Portanto tem um total de possibilidades igual a:

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 181440$$

Note que:

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{9!}{2!}$$

.

Resposta A.

Observações: Geralmente os estudantes são incentivados a “encaixar” as questões desse tipo em um dos temas da análise combinatória e aplicar a devida fórmula. Essa é uma típica questão de combinação, mas usando apenas o princípio fundamental da contagem é possível chegar a solução sem a necessidade de aplicação da fórmula.

3. **(ENEM 2017 PPL)** Desde 1999 houve uma significativa mudança nas placas dos carros particulares em todo o Brasil. As placas, que antes eram formadas apenas por seis caracteres alfanuméricos, foram acrescidas de uma letra, passando a ser formadas por sete caracteres, sendo que os três primeiros caracteres devem ser letras (dentre as 26 letras do alfabeto) e os quatro últimos devem ser algarismos (de 0 a 9). Essa mudança possibilitou a criação de um cadastro nacional unificado de todos os veículos licenciados e ainda aumentou significativamente a quantidade de combinações possíveis de placas. Não são utilizadas placas em que todos os algarismos sejam iguais a zero.

Nessas condições, a quantidade de placas que podem ser utilizadas é igual a

- A) $26^3 + 9^4$
- B) $26^3 \times 9^4$

C) $26^3 \times (10^4 - 1)$

D) $(26^3 + 10^4) - 1$

E) $(26^3 \times 10^4) - 1$

Resolução: Como existem 26 letras e elas podem se repetir na placa o total de formas de escolher as letras é:

$$26 \times 26 \times 26 = 26^3$$

Para escolher os algarismos só tem uma restrição que é todos os algarismos serem iguais a zero. Calculam-se todas as possibilidades sem restrição e, em seguida, excluem-se aquelas que não são válidas.

$$10 \times 10 \times \times 10 \times 10 - 1 = 10^4 - 1$$

Aplicando o princípio multiplicativo tem um total de placas igual a:

$$26^3 \times (10^4 - 1)$$

Resposta C.

Encontro 4

Tema:

Combinação simples

Objetivos:

Apresentar e aplicar o jogo Tsoro Yamatatu e, a partir dele, desenvolver o conceito de combinação simples por meio do princípio multiplicativo.

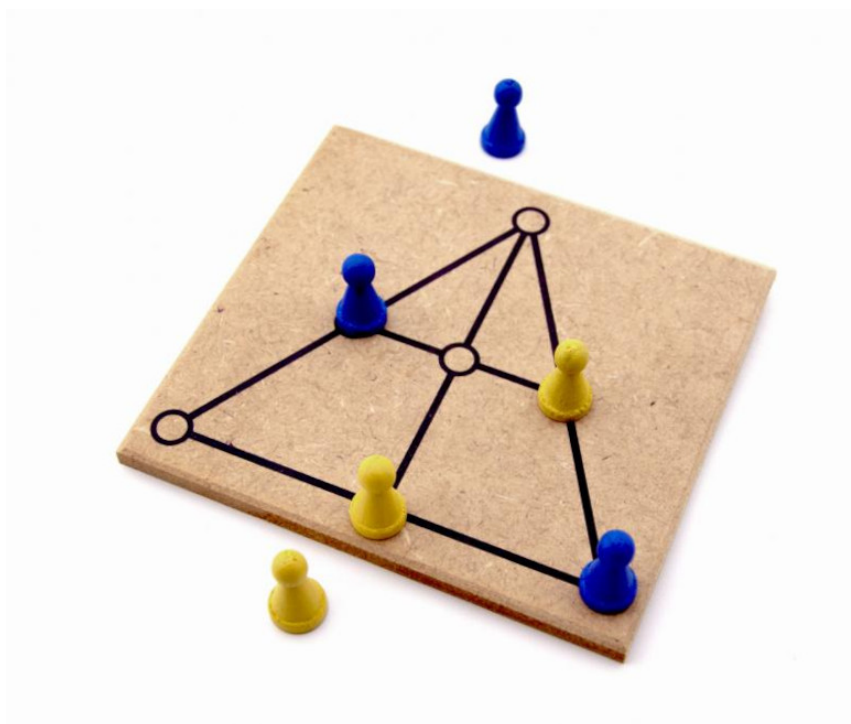
Apresentação do jogo Tsoro Yamatatu:

O jogo Tsoro Yematatu tem origem no Zimbábue, no continente africano, e é considerado uma versão africana do jogo da velha. O nome do jogo significa “jogo de pedras jogado com três”. No apêndice [4.3.3](#), está disponível um tutorial sobre como criar o jogo com materiais simples.

Tabuleiro do jogo:

O tabuleiro do jogo **Tsoro Yamatatu** é formado por 7 círculos dispostos em uma configuração triangular, como mostrado abaixo:

Figura 2 – Jogo Tsoro Yamatatu



Fonte: [Fácil \(2022\)](#)

Estrutura Matemática

O tabuleiro possui as seguintes características:

- **Círculos:** 7 posições para as peças, organizadas em uma estrutura triangular.
- **Arestas:** Conexões entre os círculos formam 6 linhas possíveis:
 - 3 horizontais: base, intermediária e vértice superior.
 - 2 diagonais: conectando vértices opostos do triângulo.
 - 1 vertical: conectando o vértice superior ao centro da base.
- **Linhas de Alinhamento:** O objetivo do jogo é alinhar 3 peças consecutivas em qualquer uma dessas linhas.

Regras do jogo:

- Cada jogador recebe 3 peças da mesma cor (diferente da cor do adversário). Decide-se na sorte quem começa a partida.
- O primeiro jogador escolhe um dos locais para colocar a primeira peça. Os movimentos são alternados. Cada jogador, na sua vez, coloca uma peça em uma casa vazia do tabuleiro.

- Após todas as seis peças serem colocadas, restará apenas uma casa vazia. A partir deste momento, os jogadores podem mover suas peças para casas vizinhas em linha reta.
- Cada jogador, na sua vez, move uma de suas peças para uma casa vizinha e vazia. É permitido saltar sobre uma peça, seja ela sua ou do adversário.
- Vence o jogador que primeiro alinhar suas três peças em uma linha reta formada pelos círculos do tabuleiro.

Orientações para o professor sobre a aplicação do jogo Tsoro Yamatatu.

1. Separar a turma em grupos de quatro estudantes e entregue um jogo para cada grupo. Explique as regras e permita que eles joguem, inicialmente, sem mencionar qualquer relação com a matemática.
2. Fazer perguntas sobre contagem relacionadas ao jogo para os grupos, individualmente. Exemplos de perguntas: quantas opções um jogador tem para distribuir suas peças, caso ele coloque as três peças primeiro? Quantas possibilidades existem para a disposição dos pinos no tabuleiro com todas as peças dos dois jogadores posicionadas? Quantas posições vitoriosas existem, e quais são as variações das posições do perdedor em cada caso?
3. Analisar, junto aos grupos, as possibilidades após cada jogada, introduzindo uma análise matemática das opções disponíveis e os conceitos de combinação.
4. Realizar uma exposição para a turma, respondendo formalmente aos questionamentos levantados durante o jogo e apresentando a definição de combinação simples.
5. Entregar uma lista de exercícios sobre combinação simples para os estudantes resolverem em duplas.
6. Caso seja possível (nem todas as escolas possuem uma boa estrutura para esta atividade), com o objetivo de ajudar os alunos a terem uma melhor compreensão e visualização do jogo, é interessante mostrar o vídeo [VemKajogar \(2025\)](#) sobre o jogo Tsoro Yamatatu no YouTube clicando no link a seguir: [Assista o vídeo aqui](#).

Exercícios Introdutórios

1. Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas a partir de um grupo de 7 pessoas?

Resolução: Para escolher a primeira pessoa da comissão, há 7 opções. Após essa escolha, restam 6 opções para selecionar a segunda pessoa, e, para o terceiro integrante,

restam 5 opções. Como a comissão não possui hierarquia, deve-se desconsiderar as combinações repetidas, ou seja, eliminar as permutações dos 3 integrantes escolhidos. O número de permutações possíveis para os 3 elementos selecionados é dado por $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Assim, o número total de comissões possíveis é:

$$\frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35.$$

Portanto, existem 35 maneiras distintas de formar essa comissão.

2. Uma biblioteca deseja selecionar 4 livros para uma exposição especial a partir de uma coleção de 10 livros raros. Sabendo que a ordem dos livros escolhidos não importa, de quantas maneiras diferentes essa seleção pode ser feita?

Resolução: Para selecionar 4 livros de um conjunto, o primeiro pode ser escolhido de 10 maneiras distintas, o segundo de 9, o terceiro de 8 e o quarto de 7. Assim, aplicando o princípio multiplicativo, o total inicial é:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

maneiras de escolher os livros, considerando a ordem.

No entanto, como a ordem dos livros não importa, é preciso eliminar as combinações repetidas, correspondentes a todas as permutações possíveis dos 4 livros selecionados. O número de permutações é dado por $4! = 24$.

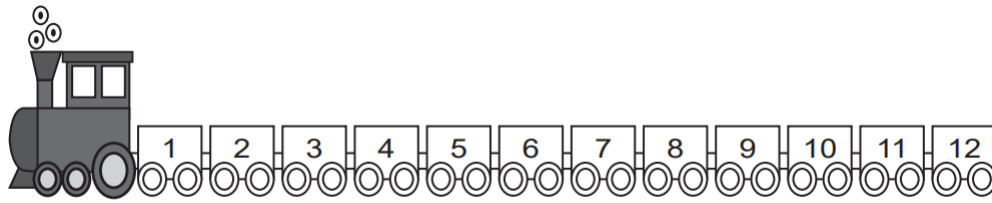
Portanto, o número total de maneiras distintas de selecionar os 4 livros é:

$$\frac{5040}{24} = 210.$$

É possível fazer a seleção de 210 formas diferentes.

Questões do ENEM

3. **(ENEM 2019)** Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

- A) $C_{12}^4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^3 \times C_{12}^2$
- B) $C_{12}^4 + C_8^3 + C_5^3 + C_2^2$
- C) $C_{12}^4 \times 2 \times C_8^3 \times C_5^2$
- D) $C_{12}^4 + 2 \times C_{12}^3 + C_{12}^2$
- E) $C_{12}^4 \times C_8^3 \times C_5^3 \times C_2^2$

Resolução: Inicialmente, selecionam-se os quatro vagões que serão pintados de vermelho. Para a escolha do primeiro vagão, há 12 opções; para o segundo, 11; para o terceiro, 10; e para o quarto, 9. Assim, aplicando o princípio multiplicativo, obtém-se:

$$\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4!}$$

A divisão por $4!$ é necessária porque a ordem dos vagões não altera o resultado, já que todos serão pintados da mesma cor. O valor $4!$ corresponde ao número de maneiras de permutar os quatro vagões entre si.

Agora, para escolher os três vagões que serão pintados de azul, restam 8 opções. Repetindo o processo de escolha dos vagões vermelhos, fica igual a:

$$\frac{8 \times 7 \times 6}{3!}$$

maneiras de pintar os vagões de azul.

Para os vagões pintados de verde, restam 5 opções. Portanto, o número de maneiras de escolher e pintar esses vagões é:

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3!}.$$

Finalmente, para os vagões pintados de amarelo, restam 2 opções. Assim, têm-se:

$$\frac{2 \times 1}{2!}$$

maneiras de pintar os vagões de amarelo.

Portanto, a quantidade total de combinações possíveis para pintar os vagões com essas especificações é:

$$C_{12}^4 \times C_8^3 \times C_5^3 \times C_2^2.$$

Resposta: E.

4. **(ENEM 2022)** Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constata-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

- A) $9 \times \frac{6!}{(6-2)!}$
B) $9 \times \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$
C) $9 \times \frac{4!}{(4-2)! \times 2!}$
D) $9 \times \frac{2!}{(2-2)! \times 2!}$
E) $9 \times \left(\frac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1 \right)$

Resolução: Os apartamentos que atendem às exigências são aqueles cujos números terminam em: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Para a escolha do primeiro apartamento em qualquer

andar, o cliente tem 6 opções, e, para o segundo, 5. Como a ordem das escolhas não importa, tem-se:

$$\frac{6 \times 5}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$$

Considerando que há nove andares, o total de possibilidades é:

$$9 \times \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$$

Resposta: B.

Duração: 1h e 40 min.

Encontro 5

Tema:

Combinação completa.

Objetivos:

Desenvolver o conceito de combinação completa.

Atividades:

Debater sobre a diferença entre combinação simples e combinação completa. Desenvolver estratégias para a resolução de problemas envolvendo combinação completa usando o princípio fundamental da contagem.

A combinação completa (ou combinação com repetição) permite que os elementos sejam repetidos nas seleções. Ela representa o número de maneiras de escolher k elementos de um conjunto de n elementos com reposição, ainda sem importar a ordem dos elementos. Em combinação completa, estamos interessados nas seleções possíveis quando cada elemento pode ser escolhido mais de uma vez. A fórmula para calcular a combinação completa, como vimos sua dedução na parte teórica 2.1.7 deste trabalho usando barras e estrelas e o princípio multiplicativo, de n elementos tomados k a k é dada por:

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k! \times (n-1)!}. \quad (3.1)$$

Ao explorar a combinação completa, é fundamental desenvolver estratégias que facilitem a resolução de problemas e aprofundem a compreensão do conceito. Nesse contexto, o princípio fundamental da contagem (ou princípio multiplicativo) é uma ferramenta essencial, pois permite desdobrar o problema em etapas menores e definir o número total de combinações possíveis em cada etapa.

Para ilustrar essa abordagem, considere um exemplo clássico: o número de maneiras de distribuir indistintamente k objetos em n caixas idênticas. Em tal situação, a combinação completa permite calcular as distribuições possíveis considerando a possibilidade de caixas vazias e múltiplas escolhas de objetos para uma mesma caixa. Desenvolver a habilidade de resolver problemas que envolvem combinação completa amplia a capacidade de modelar situações onde a repetição de elementos é um fator relevante, com aplicações que vão desde a análise de distribuições e alocações até o estudo de sequências e arranjos em contextos de probabilidade e estatística.

Exercícios Introdutórios

1. Em uma sorveteria são oferecidos 4 sabores de milkshake, sendo eles chocolate, morango, amendoim e baunilha. Com esses sabores, de quantas maneiras distintas um cliente pode fazer o pedido de dois milkshakes?
A) 20
B) 15
C) 10
D) 8
E) 5

Resolução:

É possível perceber que este não é um caso de combinação simples, pois os sabores podem ser repetidos. Trata-se, portanto, de uma combinação com repetição.

O problema pode ser modelado utilizando o método de estrelas e barras:

- As duas estrelas representam a quantidade de milkshakes que o cliente deseja escolher.
- As três barras separam essas estrelas nos quatro sabores possíveis (chocolate, morango, amendoim e baunilha).

Assim, o problema se reduz a calcular de quantas maneiras diferentes podemos organizar as duas estrelas e as três barras. Isso equivale a determinar as permutações desses cinco elementos, considerando que há repetições.

O número total de maneiras é dado por:

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

Portanto, existem 10 maneiras distintas de escolher dois milkshakes entre os quatro sabores disponíveis.

2. De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes em uma loja onde há 5 tipos de refrigerantes?(MORGADO et al., 1991).

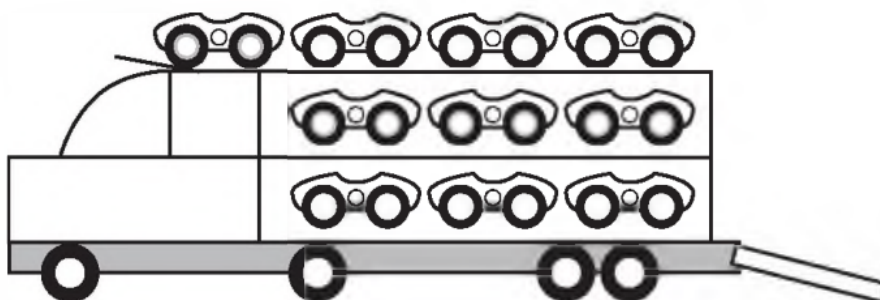
Resolução: Modelando os refrigerantes como estrelas (*) e usando barras para separar os tipos de refrigerantes (|), temos 3 estrelas representando os refrigerantes escolhidos e 4 barras separando os diferentes tipos de refrigerante. Assim, o problema se reduz a determinar de quantas maneiras podemos permutar 3 estrelas e 4 barras, ou seja, calcular:

$$\frac{7!}{3! \times 4!} = 35.$$

Portanto, há 10 maneiras diferentes de escolher os refrigerantes.

Questões do ENEM

3. (ENEM 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

- A) $C_{6,4}$
- B) $C_{9,3}$
- C) $C_{10,4}$
- D) 6^4
- E) 4^6

Resolução: Como já tem quatro carrinhos com cores determinadas, restam seis carrinhos cuja cor precisa ser escolhida. Como a cor de cada um pode se repetir, trata-se de um caso de combinação completa, onde $n = 6$ (número de carrinhos restantes) e $k = 4$ (quantidade de cores disponíveis).

Seguindo o raciocínio desenvolvido anteriormente, conclui-se que:

$$C(n + k - 1, k - 1) = C(6 + 4 - 1, 4 - 1) = C(9, 3)$$

Portanto, há $C_{9,3}$ combinações possíveis.

Resposta B.

Duração: 1h e 40 min.

Encontro 6

Tema:

Teste com questões do ENEM.

Objetivos:

A aplicação do teste ao final da sequência didática teve como principal finalidade verificar o nível de compreensão e consolidação dos conteúdos trabalhados ao longo dos cinco encontros anteriores. Esse momento avaliativo buscou identificar se os estudantes conseguiram assimilar os conceitos fundamentais da Análise Combinatória, com ênfase no Princípio Multiplicativo, e se foram capazes de aplicá-los em diferentes contextos, especialmente em questões de estilo semelhante às que aparecem no ENEM.

Mais do que mensurar o desempenho individual, o teste foi pensado como uma ferramenta diagnóstica para analisar o tipo de raciocínio adotado pelos alunos: se tentaram resolver mecanicamente por fórmulas decoradas, se buscaram compreender a estrutura do problema, ou se conseguiram justificar e construir soluções com base em argumentos matemáticos. A avaliação também permite observar como os conteúdos abordados nos encontros — incluindo atividades lúdicas e problemas em grupo — influenciaram na autonomia e na segurança dos estudantes ao lidar com situações de contagem.

Atividades:

Aplicação de um teste composto por seis questões do ENEM, resolvidas individualmente pelos alunos, com base nos conteúdos trabalhados nos encontros anteriores.

Teste Final

- 1) **(ENEM 2020)** Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem “TOM MARVOLO RIDDLE” gerou a frase “I AM LORD VOLDEMORT”. Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase “I AM POTTER”, de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras. Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

- A) $9!$
B) $4! \times 5!$
C) $2 \times 4! \times 5!$
D) $\frac{9!}{2}$
E) $\frac{4! \times 5!}{2}$

Resolução: Há 4 vogais e 5 consoantes. Como vogais e consoantes devem se alternar, a primeira letra deve ser uma consoante. Calculam-se, então, as permutações possíveis das vogais e das consoantes separadamente e, em seguida, multiplica-se os dois valores.

A permutação das vogais será:

$$P_4 = 4!.$$

Como há 2 consoantes repetidas, então é uma permutação com repetição, dada por:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!}.$$

Portanto, a quantidade total de anagramas que atendem a essas restrições é:

$$\frac{4! \times 5!}{2}.$$

Resposta E.

- 2) **(ENEM 2020)** Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.



Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

- A) $4^5 - 4^4 - 4^3$
- B) $4^5 + 4^4 + 4^3$
- C) $4^5 \times 4^4 \times 4^3$
- D) $(4!)^5$
- E) 4^5

Resolução: Note inicialmente que os dígitos podem se repetir. Então, como recomenda [Lima et al. \(2005\)](#), deve-se dividir o problema em etapas menores para facilitar a compreensão. Cada etapa será resolvida separadamente e, ao final, as soluções serão reunidas para obter a resposta final.

1. Escolhendo 3 dígitos entre os 4 disponíveis, a quantidade de códigos será:

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

2. Agora, selecionando 4 dígitos entre os 4 disponíveis, a quantidade de códigos será:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$$

3. Por fim, escolhendo 5 dígitos entre os 4 disponíveis, o total de códigos distintos igual a:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$$

Finalmente, como as 3 opções não podem ocorrer ao mesmo tempo, deve-se somá-las para se chegar ao resultado final.

$$4^3 + 4^4 + 4^5$$

Resposta B.

- 3) **(ENEM 2022)** Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis. Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

- A) 8
- B) 9
- C) 11
- D) 18
- E) 24

Resolução: Há 7 modelos de carros, 2 tipos de motores e 8 variações de opcionais, incluindo a possibilidade de não selecionar nenhum. Aplicando o princípio multiplicativo:

$$7 \times 2 \times 8 \times z > 1000$$

Onde z é a quantidade de cores. Portanto:

$$z = \frac{1000}{112} = 8,93$$

A empresa deve oferecer pelo menos 9 cores distintas aos clientes.

Resposta B.

- 4) (**ENEM 2023**) Ao realizar o cadastro em um aplicativo de investimentos, foi solicitado ao usuário que criasse uma senha, sendo permitido o uso somente dos seguintes caracteres:

- algarismos de 0 a 9;
- 26 letras minúsculas do alfabeto;
- 26 letras maiúsculas do alfabeto;
- 6 caracteres especiais !, @, #, \$, *, &.

Três tipos de estruturas para senha foram apresentadas ao usuário:

- tipo I: formada por quaisquer quatro caracteres distintos, escolhidos dentre os permitidos;
- tipo II: formada por cinco caracteres distintos, iniciando por três letras, seguidas por um algarismo e, ao final, um caractere especial;
- tipo III: formada por seis caracteres distintos, iniciando por duas letras, seguidas por dois algarismos e, ao final, dois caracteres especiais.

Considere p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de se descobrirem ao acaso, na primeira tentativa, as senhas dos tipos I, II e III, respectivamente.

Nessas condições, o tipo de senha que apresenta a menor probabilidade de ser descoberta ao acaso, na primeira tentativa, é o

- A) tipo I, pois $p_1 < p_2 < p_3$.
- B) tipo I, pois tem menor quantidade de caracteres.
- C) tipo II, pois tem maior quantidade de letras.
- D) tipo III, pois $p_3 < p_2 < p_1$
- E) tipo III, pois tem maior quantidade de caracteres.

Resolução: A quantidade de possibilidades para cada tipo de senha é calculada e, depois, os resultados são comparados.

- **Tipo 1.** São 68 caracteres no total dentre todas as possibilidades. Portanto, a quantidade de possibilidades de senha com as regras do tipo 1 é:

$$68 \times 67 \times 66 \times 65$$

- **Tipo 2.** São 52 letras, 10 algarismos e 6 caracteres especiais. Logo, a quantidade de possibilidades para a senha do tipo 2 é:

$$52 \times 51 \times 50 \times 10 \times 6$$

- **Tipo 3.** Novamente fazendo uso do princípio multiplicativo, vai ter um total de:

$$52 \times 51 \times 10 \times 9 \times 6 \times 5$$

Comparando os três tipos:

$$68 \times 67 \times 66 \times 65 > 52 \times 51 \times 50 \times 60 > 52 \times 51 \times 54 \times 50$$

Nota-se que algumas multiplicações foram feitas para facilitar a identificação do tipo com maior quantidade de possibilidades. Como, neste caso, as probabilidades são calculadas dividindo 1 pelo total de possibilidades, a resposta final é:

$$p1 < p2 < p3$$

Resposta A.

- 5) **(ENEM 2024)** Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionários. Para executar determinada atividade, a direção desse hospital formará uma equipe com 5 médicos, sendo, pelo menos, 3 cardiologistas.

A expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe é

- A) $\frac{7!}{4!} \times \frac{6!}{4!}$
 B) $\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}$
 C) $\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{5!}{1! \times 4!}$
 D) $\left(\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!} \right) \times \left(\frac{7!}{4! \times 3!} + \frac{6!}{1! \times 5!} \right) \times \left(\frac{7!}{5! \times 2!} + \frac{6!}{0! \times 6!} \right)$
 E) $\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{1! \times 5!} + \frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{0! \times 6!}$

Resolução: O problema será dividido em três etapas, conforme sugerido por [Lima et al. \(2005\)](#) para problemas desse tipo.

1. Inicialmente, selecionar 3 cardiologistas e 2 neurologistas. Para escolher o primeiro cardiologista, temos 7 opções; para o segundo, 6; e para o terceiro, 5. Para o primeiro neurologista, há 6 opções, e para o segundo, 5. Aplicando o princípio multiplicativo e dividindo pelo fatorial do total escolhido em cada caso (pois a ordem das escolhas não altera o grupo formado), tem-se:

$$\frac{7 \times 6 \times 5}{3!} \times \frac{6 \times 5}{2!} = \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}$$

2. Agora, escolher 4 cardiologistas e 1 neurologistas. Para escolher o primeiro cardiologista, há 7 opções; para o segundo, 6; para o terceiro, 5; e para o quarto 4. Para a escolha do único neurologista 6 opções. Aplicando novamente o princípio multiplicativo e retirando os casos repetidos quando houver como foi feito anteriormente, vai ficar igual a:

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!} \times 6 = \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{1! \times 5!}$$

3. Por fim, formar um grupo só com cardiologistas e seguindo o mesmo raciocínio dos primeiro casos e isto pode ser feito de:

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5!} = \frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{0! \times 6!}$$

Com base no princípio multiplicativo, esses três resultados devem ser somados.

$$\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{1! \times 5!} + \frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{0! \times 6!}$$

Resposta E.

- 6) (ENEM 2024) Para abrir a porta de uma empresa, cada funcionário deve cadastrar uma senha utilizando um teclado alfanumérico como o representado na figura.



Por exemplo: a tecla que contém o número 2 traz as letras correlacionadas A, B e C. Cada toque nessa tecla mostra, sequencialmente, os seguintes caracteres: 2, A, B e C. Para os próximos toques, essa sequência se repete. As demais teclas funcionam da mesma maneira.

As senhas a serem cadastradas pelos funcionários devem conter 5 caracteres, sendo 2 algarismos distintos seguidos de 3 letras diferentes, nessa ordem. Um funcionário irá cadastrar a sua primeira senha, podendo escolher entre as teclas que apresentam os números 1, 2, 5, 7 e 0 e as respectivas letras correlacionadas, quando houver.

O número de possibilidades diferentes que esse funcionário tem para cadastrar sua senha é

- A) 11 520.
- B) 14 400.
- C) 18 000.
- D) 312 000.
- E) 390 000.

Resolução: Este é um típico problema que, se iniciado da maneira correta, torna-se simples de resolver. No entanto, ao seguir caminhos inadequados, pode se tornar bastante complicado e até levar a erros na solução. O Problema será dividido em algumas etapas.

Primeiro, será realizada a escolha dos dois algarismos distintos, o que pode ser feito de:

$$5 \times 4 = 20$$

Agora, a escolha das letras. O total de letras é igual a 10, e é preciso selecionar 3 letras distintas. Assim, fica igual a:

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

Por fim, aplicando o princípio multiplicativo:

$$20 \times 720 = 14\,400$$

Portanto, existem 14.400 possibilidades de senhas distintas.

Resposta B.

4 Resultados e Discussões

Neste capítulo, será realizada uma análise detalhada das atividades desenvolvidas ao longo da sequência didática, considerando tanto os resultados obtidos quanto os desafios enfrentados durante sua aplicação. Para tal, foi considerado o progresso dos alunos em termos de compreensão dos conceitos abordados, bem como suas dificuldades e estratégias utilizadas nas tarefas propostas.

Serão ainda discutidos as impressões e o *feedback* fornecidos pelos estudantes, analisando como essas informações podem ser usadas para ajustar e aprimorar futuras aplicações da sequência didática. Com base nessa análise, foram concebidas algumas propostas para modificações e inovações pedagógicas que possam tornar o processo de ensino-aprendizagem mais eficaz e envolvente.

4.1 Aplicação do jogo Senha

Esta seção apresenta algumas discussões sobre o desenvolvimento da aplicação do jogo Senha, realizada nos dois primeiros encontros com o objetivo de introduzir de forma lúdica os conceitos iniciais de Análise Combinatória. O desempenho dos estudantes diante das atividades propostas também é objeto das discussões aqui trazidas.

4.1.1 Descrição e impressões do primeiro encontro

De início foi realizada uma breve exposição sobre os conteúdos que os alunos iriam estudar nas próximas semanas e qual seria o objetivo das aulas. Logo após essa introdução foi apresentado o jogo Senha, juntamente com suas regras. Após essa introdução, a turma foi organizada em grupos de quatro estudantes e um jogo foi distribuído para cada equipe. Esse jogo era composto por um tabuleiro impresso (e plastificado) e uma cartela de lápis hidrocor de cores variadas.

Enquanto os estudantes jogavam, o professor levantava algumas questões com o objetivo de estimular o pensamento matemático dos competidores. Essas perguntas buscavam incentivar a reflexão e a aplicação de conceitos introdutórios da análise combinatória, bem como aumentar o engajamento dos estudantes com o jogo. Apresenta-se a seguir alguns exemplos de questionamentos nesse sentido:

1. O jogo seria viável sem as dicas? Por quê?
2. É mais fácil decifrar a senha quando ela tem cores repetidas ou não?

3. Você prefere criar a senha ou tentar decifrá-la?

Após encerrados os jogos, o professor fez uma abordagem no quadro utilizando o princípio multiplicativo para resolver e discutir algumas questões relacionadas ao jogo, relacionando as jogadas ideias que embasam esse conteúdo. Para dar início a essa etapa, foram apresentadas as seguintes perguntas:

1. Quantas senhas podem ser formadas usando sete cores, considerando os casos com e sem repetição?
2. Quais são as chances de acertar a senha na primeira tentativa?
3. Se, em vez de cores, fossem utilizados os 10 algarismos, seria mais fácil ou mais difícil decifrar a senha?

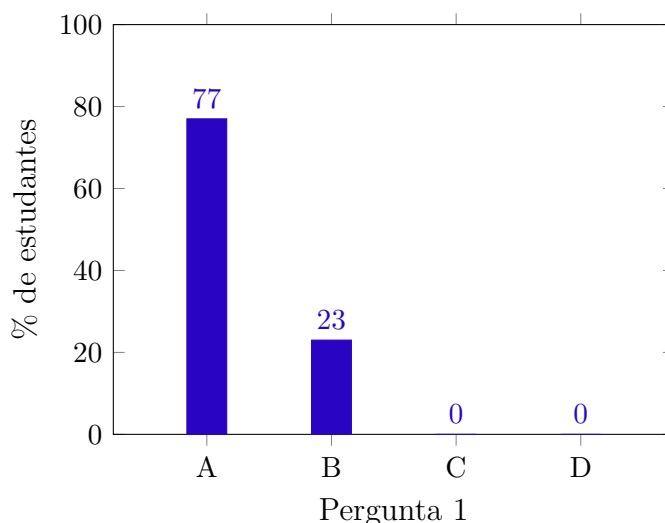
Os alunos participaram de forma coletiva e bastante ativa da resolução das questões apresentadas, inclusive com alguns indo ao quadro para apresentar as suas respostas.

Após essa conversa, foi entregue aos alunos o questionário 3.1.1, referente ao jogo Senha, presente na seção do Encontro 1 da sequência didática, com o objetivo de coletar suas impressões sobre o jogo. A seguir, serão analisadas as respostas dos estudantes.

Frequência das respostas da pesquisa com a participação de 22 alunos.

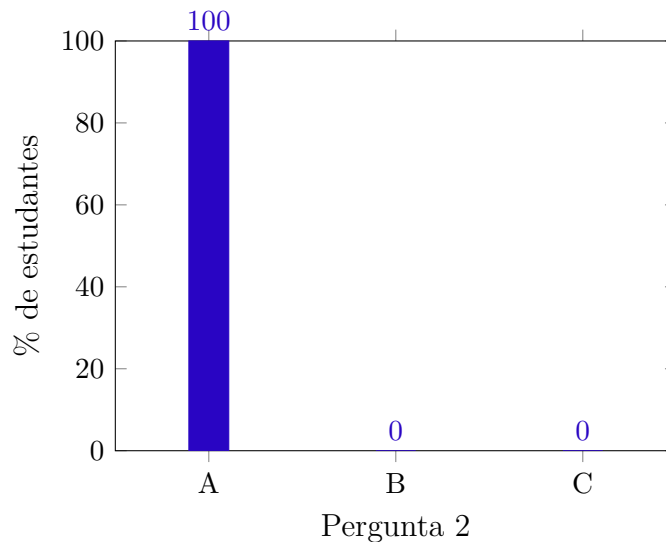
O próximo gráfico (3) mostra que 77% dos estudantes responderam à alternativa “Gostei muito de jogar o jogo Senha”, e 23% marcaram a alternativa que indicava que gostaram. As outras duas opções, “Foi indiferente” e “Não gostei”, receberam 0%. Isso evidencia uma excelente receptividade dos alunos à proposta lúdica apresentada no primeiro encontro.

Figura 3 – Distribuição das respostas dos estudantes para a Pergunta 1.



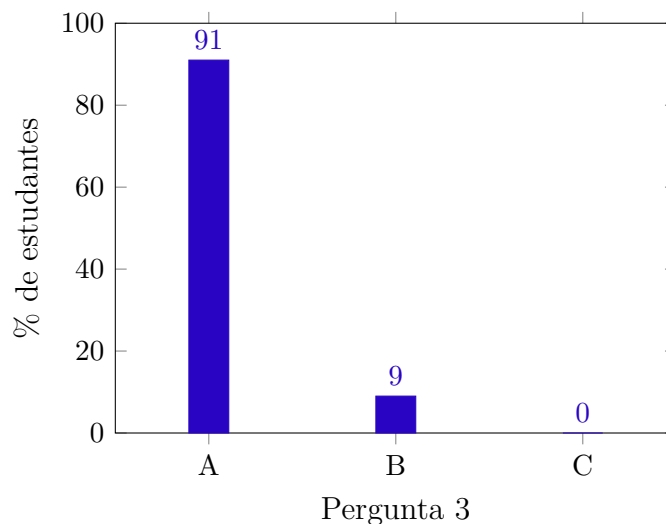
O seguinte gráfico (4), reforça o que foi visto como resposta na primeira pergunta, mostrando que 100% dos estudantes voltaria a jogar o jogo Senha, ou seja, que jogariam por prazer também e não apenas como uma atividade da escola.

Figura 4 – Distribuição das respostas dos estudantes para a Pergunta 2.



A figura (5), a seguir, mostra que a grande maioria dos estudantes 91% acredita que o jogo Senha os ajudou a melhorar o raciocínio lógico e estratégico, enquanto 9% disseram que ajudou um pouco.

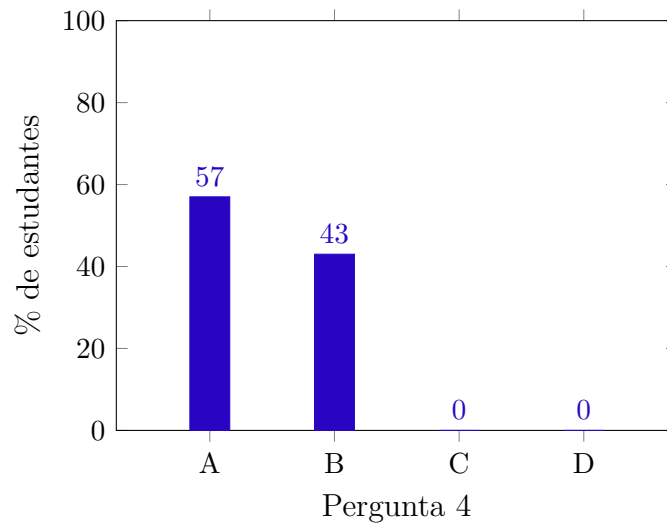
Figura 5 – Distribuição das respostas dos estudantes para a Pergunta 3.



O próximo gráfico apresenta as respostas dos estudantes a uma pergunta que avaliava sua capacidade de perceber conceitos matemáticos em uma atividade lúdica, como o jogo Senha. Dos alunos que responderam a essa pergunta, 57% afirmaram ter percebido claramente uma relação entre o jogo e temas como contagem, combinação e

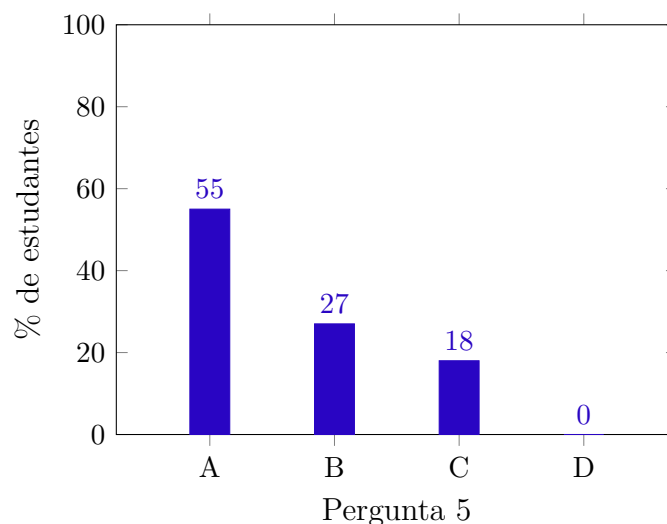
probabilidade, enquanto 43% disseram ter percebido alguns desses elementos. Portanto, todos os alunos que responderam à pergunta estabeleceram alguma relação entre o jogo e conceitos matemáticos.

Figura 6 – Distribuição das respostas dos estudantes para a Pergunta 4.



A última pergunta do questionário 3.1.1 abordou o que os alunos mais gostaram ao jogar o jogo Senha. As respostas foram as seguintes: 55% dos estudantes disseram que gostaram mais de desafiar seus colegas, 27% afirmaram ter preferido decifrar as combinações e 18% relataram que gostaram mais de criar as senhas.

Figura 7 – Distribuição das respostas dos estudantes para a Pergunta 5.



4.1.2 Descrição e impressões do segundo encontro.

Nessa aula foi realizado um aprofundamento sobre os conceitos de análise combinatória presentes no jogo, sobretudo os princípios aditivo e multiplicativo, que foram

abordados de maneira mais formal. Para tal, a discussão sobre o jogo e a resolução de alguns problemas no quadro, de forma expositiva mas com a participação dos estudantes, foram levadas a cabo. Posteriormente, a turma foi dividida em duplas e foi entregue uma lista de exercícios (a lista do segundo encontro presente nesta dissertação) para cada dupla contendo questões introdutórias e questões do Enem.

Resultados: Embora algumas duplas tenham sentido certa dificuldade no início, pois as questões não traziam uma orientação direta sobre qual conceito de análise combinatória utilizar, com a orientação adequada, elas compreenderam que deveriam aplicar os princípios aditivo e multiplicativo.

Análise das respostas às questões do Enem do segundo encontro

- **Enem 2015 PPL (Pessoas Privadas de Liberdade):** A maioria das duplas teve dificuldade em compreender a importância da escolha da primeira linha a ser pintada no início, um aspecto fundamental para a resolução correta da questão. Como consequência, muitos chegaram a respostas equivocadas. No entanto, após uma explicação expositiva no quadro, todos os alunos afirmaram ter compreendido o conceito.
- **Enem 2014 PPL:** Nessa atividade, os estudantes não encontraram maiores dificuldades, pois perceberam que se tratava de uma aplicação direta do princípio multiplicativo. Eles conseguiram identificar os passos necessários para a resolução e aplicaram corretamente o conceito, demonstrando compreensão e fluidez no uso da estratégia, o que facilitou a resolução do problema de forma intuitiva.
- **Enem 2016:** Nesta questão, os alunos tiveram mais dificuldade, pois ela era mais complexa e continha restrições que precisavam ser tratadas com atenção para evitar erros. Para orientá-los, foi feita uma explicação sobre problemas desse tipo, destacando as restrições envolvidas e as possíveis estratégias de solução. Com esse apoio, os alunos puderam compreender melhor a abordagem necessária para resolver a questão.

4.1.3 Discussões sobre a aplicação do jogo Senha

Os jogos matemáticos desempenham um papel fundamental no ensino, pois tornam a aprendizagem mais dinâmica e envolvente. Segundo [Smole, Diniz e Milani \(2007\)](#) os jogos contribuem para o aprendizado da matemática ao apresentar desafios que estimulam o pensamento lógico e a capacidade de tomar decisões de forma estratégica. Além disso, eles incentivam a participação ativa dos alunos, permitindo que explorem conceitos matemáticos de forma lúdica e significativa. Dessa maneira, o uso de jogos em sala de aula contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia na resolução de problemas.

O tema central desses encontros foi o ensino da análise combinatória por meio do jogo Senha, que se mostrou uma ferramenta eficaz para despertar o interesse dos estudantes. Durante as atividades, os alunos demonstraram envolvimento e participação ativa. Além disso, o jogo possibilitou a aplicação prática dos conceitos de análise combinatória, facilitando a compreensão do conteúdo. Foram feitas perguntas envolvendo as regras do jogo e conceitos de combinatória. Além disso, possíveis modificações nas regras foram analisadas por meio da análise combinatória. Os impactos dessas alterações foram apresentados no quadro pelo professor e debatidos em sala de aula.

4.2 Aplicação do jogo Tsoro Yamatatu

Novamente, a turma foi separada em grupos de 4 estudantes. As regras foram explicadas para os grupos e foi deixado um tempo para que jogassem livremente e explorassem o jogo.

4.2.1 Descrição e impressões do terceiro e quarto encontros

Após o primeiro momento, o assunto de combinação foi exposto aos alunos e alguns temas relacionados ao jogo foram debatidos, explorando também possibilidades ao calcular algumas combinações que apareciam no jogo.

Os alunos se mostraram bastante interessados, assim como na aplicação do jogo Senha. Diante disso, os grupos aprenderam rapidamente a dinâmica do jogo e gostaram também por conta da semelhança com o tradicional jogo da velha. Diante disso, foi possível perceber que os estudantes não tiveram maiores dificuldades em compreender a relação entre o jogo e algumas ideias da análise combinatória.

Após a aplicação do jogo Tsoro Yamatatu, foi respondida uma lista de exercícios sobre combinação incluindo questões do Enem.

Análise das respostas das questões do Enem

- **(ENEM 2019)** A maioria dos grupos conseguiu resolver com um pouco de auxílio do professor. Um grupo conseguiu resolver sozinho, enquanto outro apresentou certa dificuldade, principalmente em relacionar seu raciocínio com a forma como a resposta foi apresentada na questão. Questões desse tipo não são tão frequentes no Enem, pois ainda apresentam um certo apelo ao uso de fórmulas prontas de análise combinatória.
- **(ENEM 2022)** Essa questão gerou mais desconforto nos alunos, pois seu enunciado era mais complexo e continha mais informações do que a anterior. Foi necessária uma maior intervenção do professor, e mesmo assim, alguns grupos tiveram dificuldades para entender e estruturar sua resolução. No entanto, após um debate com toda a

turma, eles conseguiram chegar à resposta, compreender melhor o que era solicitado e perceber que a principal dificuldade estava na interpretação inicial, pois a questão em si não era tão difícil.

4.2.2 Análise sobre a aplicação do jogo Tsoro Yamatatu

A turma novamente reagiu bem à aplicação de mais um jogo, que se mostrou dinâmico e adequado ao propósito das aulas. Além do aspecto cultural, o jogo permitiu aos alunos conhecer um pouco mais sobre os jogos matemáticos africanos, incentivando-os a explorar outros jogos do continente. Além disso, sua fácil reprodução e baixo custo fazem dele uma excelente opção para turmas do ensino médio e também do ensino fundamental.

Esse jogo contribuiu para que os alunos compreendessem de forma mais natural o conceito de combinação, além de ter sido importante para motivar a continuidade da participação dos estudantes nos encontros seguintes.

4.3 Discussões sobre o teste realizado ao final da sequência didática

Com o intuito de avaliar a aprendizagem dos estudantes ao final da sequência didática, foi aplicado um teste contendo seis questões de Análise Combinatória extraídas de edições anteriores do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). A escolha por questões do Enem justifica-se pela relevância do exame como parâmetro de avaliação da educação básica e pela presença recorrente de problemas que exigem raciocínio lógico, interpretação de enunciados e domínio conceitual da matemática.

A análise das resoluções dos estudantes foi conduzida com base em três aspectos principais: (i) se o aluno conseguiu resolver corretamente a questão; (ii) se utilizou apenas uma fórmula de forma mecânica, sem apresentar uma justificativa conceitual; e (iii) se foi capaz de desenvolver uma estratégia de resolução baseada no raciocínio lógico-combinatório, mesmo sem recorrer diretamente às fórmulas tradicionais. Essa observação permite identificar não apenas o acerto ou erro, mas também o tipo de abordagem utilizada pelos estudantes diante de problemas contextualizados.

Essa análise qualitativa contribui para avaliar o impacto da sequência didática proposta, especialmente no que se refere ao objetivo central de promover uma compreensão mais significativa da Análise Combinatória, afastando-se apenas da memorização de fórmulas e valorizando o entendimento conceitual e a capacidade de argumentação matemática.

O objetivo desse teste não foi quantificar com precisão o nível de compreensão e a evolução dos estudantes ao longo da aplicação da sequência didática. Em vez disso,

buscou-se avaliar, de forma ampla, possíveis mudanças na maneira como os alunos abordam e interpretam problemas matemáticos, por exemplo, se passaram a usar menos fórmulas em suas respostas e se desenvolveram melhor suas resoluções, demonstrando uma compreensão mais profunda dos problemas.. Mais especificamente, o teste teve a intenção de observar se houve uma transformação na estratégia dos estudantes ao enfrentar desafios relacionados à análise combinatória, analisando seu raciocínio e a forma como estruturam soluções para esse tipo de problema.

As questões do Enem costumam ser acompanhadas de enunciados extensos e contextualizados, o que exige dos estudantes uma leitura atenta e uma sólida capacidade de interpretação, a fim de identificar as informações essenciais para a resolução. Nesse contexto, a simples memorização de fórmulas de Análise Combinatória revela-se insuficiente. Como as questões não se baseiam em aplicações diretas, mas sim em situações-problema contextualizadas, é fundamental que o estudante compreenda os conceitos envolvidos e desenvolva estratégias de resolução que partam da análise do problema, e não apenas da repetição mecânica de procedimentos.

4.3.1 Análise das Estratégias de Resolução dos Estudantes.

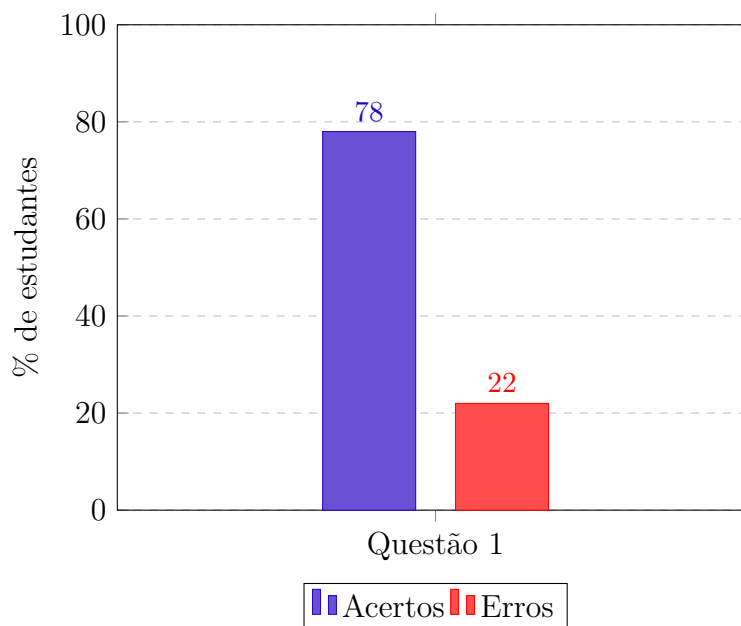
Analisaremos, no que se segue, as estratégias de resoluções e os principais resultados obtidos pelos estudantes nas resoluções das questões do ENEM propostas durante a sequência didática, mostrando ainda os percentuais que indicam o desempenho obtido nessas questões.

Questão 1 – Enem 2020

Conteúdo abordado: Anagramas com restrição, princípio multiplicativo aplicado à formação de anagramas com alternância entre vogais e consoantes (arranjo com restrição de posição).

A Figura 8, a seguir, apresenta um gráfico que evidencia os percentuais de acertos e erros dessa questão. De acordo com a observação e as avaliações realizadas continuamente, é possível ainda destacar algumas impressões sobre o que pode ter causado tais percentuais. Um dos fatos que podem ter influenciado esse resultado foi o fato dos alunos terem praticado com questões parecidas de permutação durante a sequência didática. Mais possíveis causas serão apresentados a seguir.

Figura 8 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 1



Esse gráfico indica que 78% dos estudantes acertaram, enquanto que 22% erraram a Questão 1. De acordo com as correções e discussões realizadas durante o encontro, foi possível destacar os seguintes aspectos:

- 53% dos estudantes acertaram a questão usando o princípio fundamental da contagem (sem uso direto de fórmula).
- 25% acertaram, mas desenvolveram muito as suas justificativas (sem justificar conceitualmente).
- 22% erraram por não conseguirem compreender o enunciado, desconsiderando, por exemplo, a repetição de letras.

Esta questão exigia atenção à condição imposta de alternância entre vogais e consoantes. A maioria dos estudantes (78%) respondeu corretamente, evidenciando boa compreensão do enunciado e aplicação adequada do princípio multiplicativo. Muitos organizaram suas respostas de forma clara, explicando o raciocínio passo a passo e destacando a separação entre vogais e consoantes para garantir o arranjo alternado.

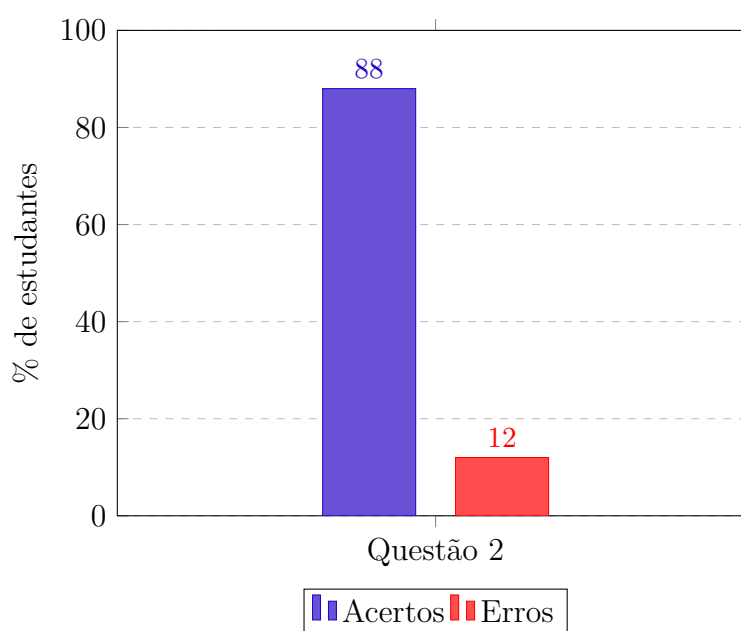
Por outro lado, os alunos que erraram demonstraram dificuldade na leitura do enunciado, desconsiderando, por exemplo, a possibilidade de repetição de letras ou ignorando a exigência de alternância, tratando a questão como se fosse um anagrama simples. Esse tipo de erro reforça a importância da leitura atenta e da interpretação precisa nos problemas de contagem.

Questão 2 – ENEM 2020

Conteúdo abordado: Princípio multiplicativo para contar a quantidade de códigos possíveis formados por toques diferentes e em estilos de senhas diferentes pela quantidade de toques.

O gráfico da Figura 9, apresenta os percentuais de acertos e erros da questão 2. A partir das observações e das avaliações contínuas, é possível perceber alguns fatores que podem ter influenciado esses resultados. A seguir serão apresentados também alguns aspectos sobre as soluções dos estudantes.

Figura 9 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 2



Esse gráfico indica que 88% dos estudantes acertaram, enquanto que 12% erraram a Questão 2. De acordo com as correções e discussões realizadas durante o encontro, foi possível destacar os seguintes aspectos:

- Acertaram usando o princípio fundamental da contagem (sem uso direto de fórmula): 67%
- Acertaram utilizando fórmula diretamente (sem justificar conceitualmente): 21%
- Erraram tentando aplicar fórmula de forma inadequada: 7%
- Erraram por não compreender o enunciado ou não saber por onde começar: 5%

A questão é sobre contagem de possibilidades envolvendo variação na quantidade de toques (3, 4 ou 5), exigindo que o estudante entenda que não há repetição de toques e

que a ordem dos elementos é relevante, caracterizando um problema de arranjos simples de diferentes tamanhos. A maioria dos estudantes (67%) resolveu corretamente utilizando o princípio fundamental da contagem, evidenciando raciocínio estruturado por etapas e compreensão conceitual do problema. Outros 21% também acertaram, mas optaram por aplicar diretamente fórmulas de arranjo, sem explicar o desenvolvimento completo da questão.

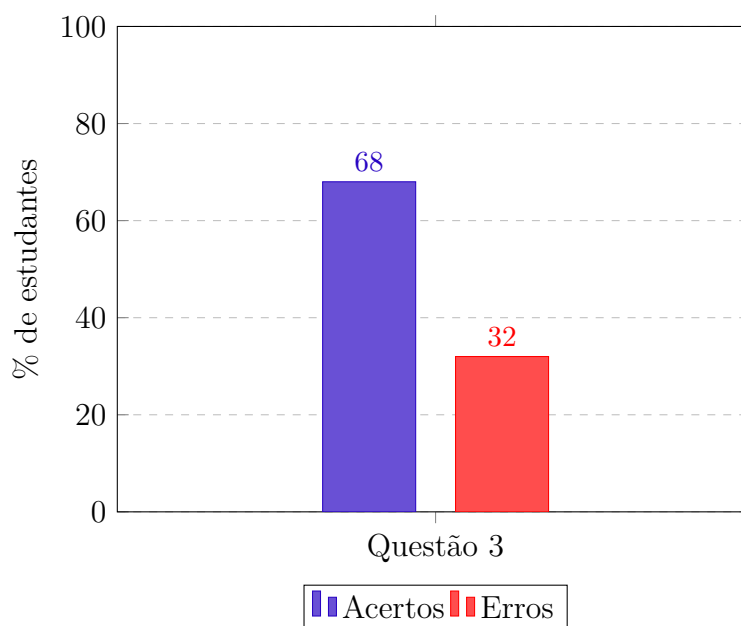
Entre os que erraram, 7% tentaram aplicar fórmulas de forma inadequada, ignorando aspectos essenciais da situação, como a variação na quantidade de toques ou a inexistência de repetição. Já 5% não compreenderam corretamente o enunciado ou não souberam por onde começar. A questão, portanto, favoreceu estudantes com domínio do raciocínio combinatório e do princípio multiplicativo, especialmente aqueles que evitam uma abordagem puramente mecânica baseada em fórmulas.

Questão 3 – ENEM 2022

Conteúdo abordado: Princípio multiplicativo e análise de todas as possibilidades envolvendo escolha de itens opcionais. Compreensão de situações combinatórias que envolvem a soma de subconjuntos e o uso do princípio multiplicativo entre diferentes categorias.

A Figura (10), apresenta um gráfico que mostra os percentuais de acertos e erros relativos a essa questão. Posteriormente, serão apresentados aspectos que podem ter contribuído para este resultado.

Figura 10 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 3



O gráfico apresenta que 68% dos estudantes acertaram, enquanto que 32% erraram a Questão 3. A partir das correções e das conversas realizadas durante o encontro, alguns pontos importantes foram destacados:

- Acertaram usando o princípio fundamental da contagem junto com o bom entendimento da questão. : 68%
- Erraram tentando aplicar fórmula de forma inadequada: 10%
- Erraram por não compreender o enunciado que era bastante longo ou não saber por onde começar: 22%

A resolução correta da questão exigia o bom uso do princípio fundamental da contagem, aliado à compreensão de como diferentes configurações podem ser formadas a partir das opções de itens adicionais. Entre os estudantes, 68% acertaram utilizando o raciocínio combinatório adequado, demonstrando domínio da ideia de variação entre categorias sem recorrer diretamente a fórmulas.

Por outro lado, 10% erraram ao tentar aplicar fórmulas de forma inadequada, sem perceber que as combinações possíveis de opcionais correspondiam aos subconjuntos formados a partir de três elementos, totalizando oito possibilidades distintas. Além disso, 22% dos alunos apresentaram dificuldades na leitura e interpretação do enunciado, que era mais extenso e exigia atenção aos detalhes, ou não souberam como iniciar a resolução.

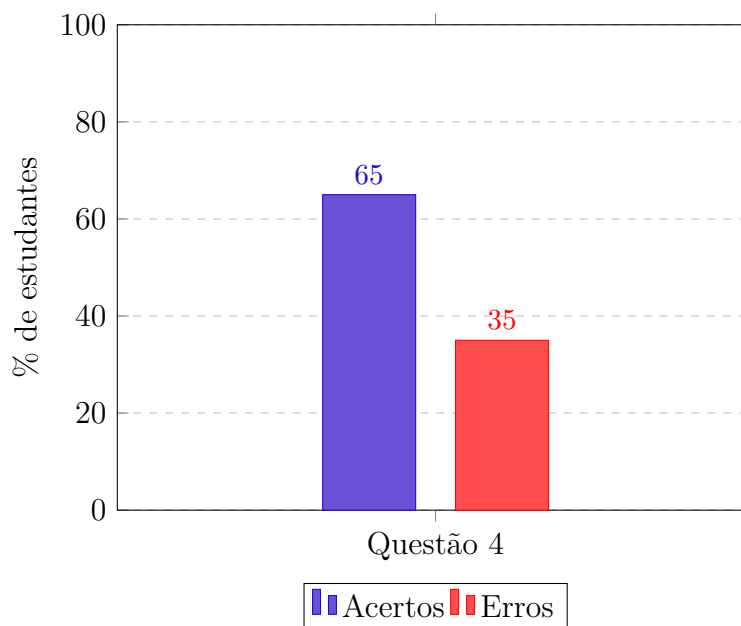
A maior dificuldade observada foi compreender que o número de cores deveria ser ajustado para que o total de combinações superasse mil possibilidades. A questão favoreceu estudantes com bom entendimento conceitual da contagem e habilidade para lidar com informações sobre vários objetos simultaneamente.

Questão 4 – ENEM 2023

Conteúdo abordado: Análise combinatória com diferentes tipos de elementos (letras, números e símbolos), permutações com restrições, comparação de probabilidades e compreensão de proporcionalidade inversa entre número de possibilidades e probabilidade de acerto.

A seguir será apresentado um gráfico (11) que mostra os percentuais de acertos e erros dessa questão. Além disso, será feita uma análise mais detalhada desse resultado.

Figura 11 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 4



Esse gráfico indica que 68% dos estudantes acertaram, enquanto que 32% erraram a Questão 4. De acordo com as correções e discussões realizadas durante o encontro, foi possível destacar os seguintes aspectos:

- Acertaram usando o princípio fundamental da contagem e um bom entendimento da questão : 65%.
- Erraram nos cálculos por falta de atenção e/ou na finalização da questão: 15%.
- Erraram por não compreender o enunciado e se confundir com as categorias de símbolos: 20%.

Essa questão exigiu atenção cuidadosa à leitura e uma boa capacidade de interpretação, pois envolvia diferentes estruturas de senhas, cada uma com regras específicas sobre o uso de letras, números e símbolos. Alguns estudantes tiveram dificuldade em organizar as informações fornecidas no enunciado, especialmente na separação entre as categorias de caracteres e na contagem dos elementos em cada tipo de senha. Foi observado tentativas de aplicação direta de fórmulas de arranjos ou permutações sem uma reflexão mais profunda sobre o objetivo da pergunta, dificuldades em identificar qual estrutura gerava mais possibilidades. Por outro lado, os alunos que resolveram corretamente demonstraram raciocínio matemático consistente, utilizando o princípio multiplicativo de forma consciente e relacionando a quantidade de combinações com a ideia de dificuldade de acerto. A questão, apesar de não exigir cálculos extensos, exigia uma boa observação entre

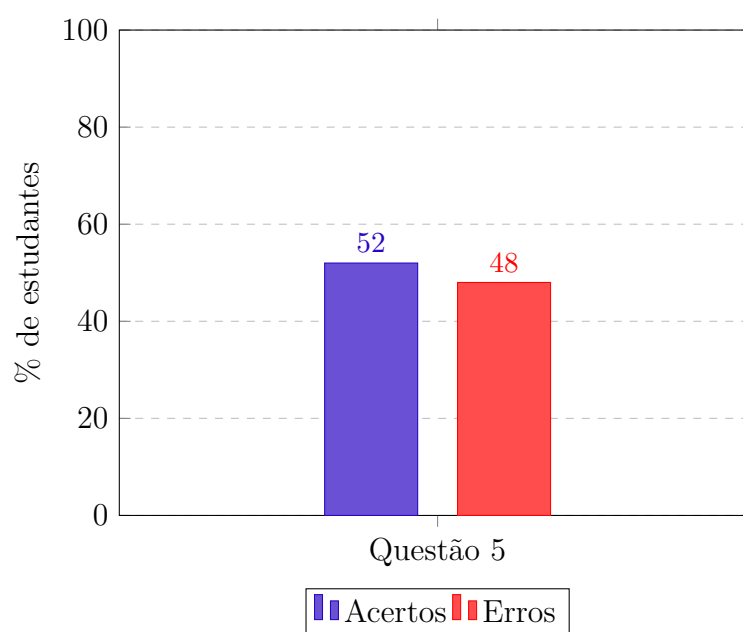
produtos de vários números distintos para ganhar tempo e não precisar de fato realizar as multiplicações e um cuidado para calcular diferentes permutações.

Questão 5 – ENEM 2024

Conteúdo abordado: Combinação com escolha de equipes com quantidade mínima de elementos de um grupo, soma de combinações com diferentes distribuições, e reconhecimento de expressões algébricas fatoriais.

O próximo gráfico (12), mostra os percentuais sobre a questão 5, evidenciando a dificuldade que os estudantes tiveram com essa questão. Mais adiante serão apresentados aspectos sobre a dificuldade enfrentada pelos estudantes e os acertos realizados durante a resolução da questão.

Figura 12 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 5



Esse gráfico indica que 52% dos estudantes acertaram, enquanto que 48% erraram a Questão 5. Foi possível observar os seguintes aspectos, com base nas correções e debates em sala:

- Acertaram usando o princípio fundamental da contagem e conferência de alternativas: 38%
- Aplicaram a fórmula corretamente, mas não justificaram totalmente passo a passo: 14%
- Tentaram usar fórmula de combinação, mas sem considerar a restrição “pelo menos 3 cardiologistas” e/ou não souberam finalizar: 28%

- Tiveram dificuldade na leitura e se confundiram com o formato das alternativas: 20%

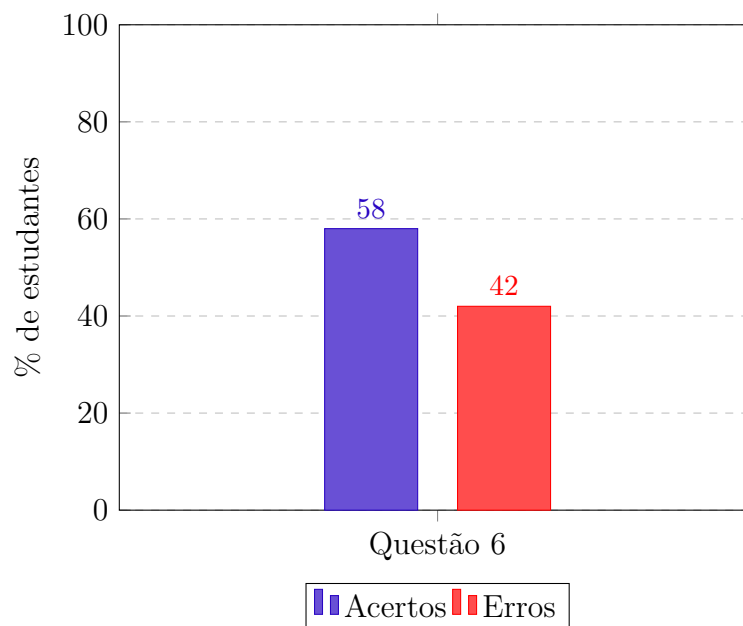
Essa questão apresentou um equilíbrio entre acertos e erros, destacando-se como uma das mais desafiadoras entre as analisadas. Apesar de envolver um raciocínio bastante comum na análise combinatória, a escolha de grupos sob uma restrição mínima, muitos estudantes enfrentaram dificuldades na etapa de organização da solução. A principal barreira não esteve necessariamente no entendimento do problema, mas na montagem correta das expressões, que exigiam o uso combinado de somas e multiplicações para representar todas as possibilidades válidas. Além disso, a forma como as alternativas foram apresentadas, com expressões extensas, cheias de combinações e fatoriais, contribuiu para confundir aqueles com menor familiaridade com esse tipo de linguagem matemática. Mesmo entre os que compreenderam a lógica de considerar as diferentes quantidades possíveis de cardiologistas e seus respectivos neurologistas, muitos não conseguiram identificar corretamente a alternativa que correspondia ao raciocínio desenvolvido. Assim, a maior dificuldade residiu na tradução do pensamento combinatório em uma representação simbólica adequada. Embora seja uma questão do ENEM, ela apresenta um estilo atípico, com alternativas mais focadas na aplicação de fórmulas. Isso a torna um pouco destoante da proposta desta dissertação, que prioriza o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão conceitual. No entanto, foi incluída no teste justamente para expor os estudantes a esse tipo de questão, que embora mais raro, também aparece no exame. Esse formato foi trabalhado pontualmente durante as aulas, ainda que não tenha sido o foco principal da sequência didática.

Questão 6 – ENEM 2024

Conteúdo abordado: Princípio multiplicativo entre diferentes tipos de elementos com quantidades distintas.

A Figura (13), a seguir, apresenta o gráfico que descreve em percentuais os acertos e erros dos estudantes em relação a essa questão. Mostrando um equilíbrio entre acertos e erros, o que demonstra a dificuldade dos estudantes durante a resolução da questão, por diferentes razões melhor analisadas em seguida.

Figura 13 – Gráfico: Acertos x Erros – Questão 6



Esse gráfico indica que 58% dos estudantes acertaram, enquanto que 42% erraram a Questão 6. A seguir serão apresentados alguns aspectos e impressões sobre esse resultado.

- Acertaram usando o princípio fundamental da contagem e com um bom raciocínio lógico: 58%.
- Errou por não considerar as restrições de elementos distintos: 25%.
- Errou por não entender bem a questão: 17%.

Essa questão apresentou um nível de dificuldade elevado para parte dos estudantes. Apesar de o contexto (cadastro de senhas) ser familiar, o enunciado exigia atenção a detalhes importantes como a restrição de uso de algarismos distintos e letras diferentes, além da ordem obrigatória dos caracteres. Alguns estudantes demonstraram domínio ao aplicar corretamente o princípio multiplicativo considerando essas restrições. No entanto, muitos erraram ao contar incorretamente as opções, seja por não compreenderem bem o enunciado, seja por não perceberem a necessidade de utilizar elementos distintos, o que comprometeu a resposta. Questões com muitas etapas, como essa, revelam tanto a capacidade de interpretação quanto de organização lógica do raciocínio dos alunos.

No capítulo a seguir, serão exploradas possibilidades de expansão da sequência didática, incluindo a integração de novas atividades, abordagens interdisciplinares e recursos tecnológicos que contribuam para um ensino mais dinâmico e significativo. Dessa forma, busca-se não apenas avaliar o que foi realizado, mas também, com base na análise deste capítulo, projetar caminhos para futuras intervenções educativas.

Conclusões e Projetos Futuros

Conclusão

O projeto contou com um grande engajamento dos estudantes, evidenciando que, quando os alunos participam de atividades diferenciadas em relação ao ensino tradicional, tendem a se empenhar mais e a buscar, de fato, fazer a diferença em seu aprendizado.

A introdução de alguns assuntos por meio de jogos mostrou-se muito eficaz, pois atraiu significativamente a atenção dos estudantes, aumentando seu interesse e participação nas aulas. Além disso, tornou-os mais propensos a manter o foco mesmo quando o conteúdo se tornou mais teórico.

Por meio das questões realizadas em sala e do teste final, com questões do Enem, foi possível constatar uma evolução significativa dos estudantes. Essa melhoria não se limitou apenas ao aprendizado da análise combinatória, mas também se refletiu em uma maior compreensão sobre estratégias de estudo em matemática e na abordagem de problemas desafiadores.

Esperamos que esse trabalho inspire outros professores a explorar novas metodologias no ensino da análise combinatória, rompendo com o modelo tradicional baseado em “caixinhas” de conteúdos e fórmulas prontas, e proporcionando um aprendizado mais dinâmico e significativo.

Projetos Futuros

4.3.2 Introdução de temas matemáticos por meio da programação no Kodular.

O **Kodular** é uma plataforma online que permite criar aplicativos para Android sem necessidade de programação tradicional. Ele utiliza um sistema de blocos visuais, facilitando o desenvolvimento para iniciantes e entusiastas da programação. Para utilizá-lo gratuitamente, é necessário criar uma conta na plataforma e acessar o editor via navegador. O Kodular oferece recursos básicos sem custo, mas inclui anúncios nos aplicativos gerados. Para remover anúncios e acessar funcionalidades extras, existem planos pagos. Além disso, o usuário deve ter um dispositivo Android ou um emulador para testar os aplicativos desenvolvidos.

Plano de aula

Objetivos: Introduzir a ideia de programação desenvolvendo um aplicativo para calcular o fatorial de um número natural usando o site Kodular de programação em blocos.

Atividades: Criar uma conta para cada aluno no site <https://www.kodular.io/>. Entrar no espaço de criação de apps.



Figura 14 – Código em blocos. Fonte: (KODULAR...,)

Descrição das atividades:

Esse curso deverá ser ministrado em um laboratório de informática. Cada estudante deve criar uma conta no site do Kodular que é gratuito e simples de fazer o cadastro. Eles devem entrar na área de criador e logo em seguida criar um novo projeto atribuindo um nome para o seu projeto, logo em seguida vão entrar na área de blocos e aguardar as orientações do professor.

Atividades específicas

1. Apresentação do site e cadastro dos alunos.
2. Apresentação geral dos comandos e como funciona a programação em blocos.
3. Deixar os estudantes explorarem o site sob sua observação.
4. Orientação para a criação de um aplicativo sobre permutação.

Instruções para Criar um código no Kodular para calcular P_n .

Abaixo está uma sequência de instruções para recriar o código apresentado na imagem usando o ambiente de programação por blocos do Kodular:

1. Criar Variáveis Globais:

- No painel de blocos, vá até a seção de variáveis.

- Crie uma variável global chamada `resultado` e defina seu valor inicial como 1.
- Crie outra variável global chamada `valor` e defina seu valor inicial também como 1.

2. Adicionar Evento de Clique:

- Vá para a seção de blocos do componente Botão1 (ou o botão que deseja usar).
- Arraste o bloco `quando Botão1.Clique` para a área de trabalho. Esse bloco servirá como o gatilho para o código.

3. Ajustar Variáveis `valor` e `resultado` no Evento de Clique:

- Dentro do bloco `Botão1.Clique`, insira o bloco `ajustar global valor para`.
- No campo ao lado de `para`, insira o bloco `inserir -> Texto`, que deve ser obtido da seção de blocos de texto. Isso serve para definir um valor inicial para `global valor`.
- Logo abaixo, adicione outro bloco `ajustar global resultado para` e defina seu valor inicial como 1.

4. Laço de Repetição (Para Cada Número Desde ... Até ... Passo):

- Na seção de blocos de controle, encontre o bloco `para cada número desde... até... passo` e arraste-o para dentro do bloco `Botão1.Clique`.
- Defina a variável `número` para ser usada no laço e ajuste os valores:
 - **Desde:** 1.
 - **Até:** arraste o bloco `obter global valor` para este campo.
 - **Passo:** 1.

5. Multiplicação no Laço de Repetição:

- Dentro do laço, adicione o bloco `ajustar global resultado para`.
- No campo `para`, insira uma operação de multiplicação:
 - Arraste o bloco de multiplicação da seção de blocos de matemática.
 - No primeiro espaço de multiplicação, insira `obter número`.
 - No segundo espaço de multiplicação, insira `obter global resultado`.

6. Atualizar o Resultado em um Campo de Texto:

- Ainda dentro do laço, após a multiplicação, adicione o bloco `ajustar Resultado -> Texto para`.
- No campo `para`, insira o bloco `obter global resultado` para exibir o resultado da multiplicação no campo de texto `Resultado`.

Finalizando: O código agora está completo! Esse código calcula o fatorial do número inserido e exibe o resultado no campo de texto **Resultado**.

Duração: 4 aulas de 1h e 40min cada.

4.3.3 Desenvolver um curso de preparação olímpica na escola.

Na escola onde atuamos, já tivemos estudantes premiados com medalhas nacionais e regionais, além de menções honrosas em olimpíadas de matemática. Para fortalecer ainda mais essa cultura olímpica entre os alunos, pretendemos aproveitar o projeto desenvolvido nesta dissertação como base para a criação de um grupo de estudos voltado para competições como a OBMEP e a OPEMAT. A proposta é oferecer entre duas a quatro aulas por semana, preferencialmente durante horários eletivos ou em disciplinas sem atribuição de nota, como Estudo Orientado. Parte dessas atividades também poderá ocorrer no horário reservado ao professor no contraturno, otimizando a rotina escolar.

O início do curso seguirá a abordagem já apresentada na sequência didática, com a utilização de jogos, resolução colaborativa de problemas e discussão das diferentes estratégias empregadas pelos alunos. A organização do grupo será apoiada por uma sala de aula virtual no Google Classroom, onde serão compartilhados materiais, atividades e desafios. Além disso, utilizaremos plataformas como o site da OBMEP, o POTI (Programa Olimpíadas de Treinamento Intensivo), e conteúdos selecionados de canais do YouTube voltados ao ensino olímpico e à resolução de problemas. O objetivo é tornar o estudo mais dinâmico, acessível e motivador, ampliando o interesse dos alunos pela matemática e pelo raciocínio lógico através de uma vivência mais lúdica e desafiadora.

Referências

- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 13 maio 2025.
- CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. Matemática discreta. *Coleção PROFMAT. Rio*, v. 216, 2015.
- DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. *Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento*. Porto Alegre: Artmed, 2004.
- Educação Eu Apoio. *Análise Combinatória: o que é e como cai no Enem*. 2023. Acesso em: 14 abr. 2025. Disponível em: <<https://enem.educacaoeuapoio.com.br/analise-combinatoria-o-que-e-parte-da-matematica>>.
- FLUMINENSE, U. F. *Catálogo do Jogo Senha*. 2021. Acessado em: 25 out. 2024. Disponível em: <<https://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2021/04/Catalogo-Senha.pdf>>.
- FOMIM, D.; GENKIN, S.; ITEMBERG, I. Círculos matemáticos—a experiência russa. *Tradução de Valéria de Magalhães Iório*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- FÁCIL, M. *Jogos Matemáticos: Continente Africano – Tsoro Yematatu*. 2022. Acesso em: 6 jan. 2025. Disponível em: <<https://www.matematicaefacil.com.br/2022/10/jogos-matematicos-continente-africano-tsoro-yematatu.html>>.
- GRANDO, R. C. *O jogo e a resolução de problemas no ensino da matemática*. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 2000.
- KODULAR Creator. Acesso em 06 de novembro de 2024. Disponível em: <https://creator.kodular.io/?locale=pt_BR#4736433991450624>.
- LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 1.
- LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas elementares*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2005.
- MORGADO, A. C. d. O. et al. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.
- OLIVEIRA, D. A. A reconfiguração do ensino médio e o enem como política indutora. *Educação & Sociedade*, v. 37, n. 135, p. 29–50, jan. 2016. Acesso em: 13 maio 2025. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/es/a/9nTnM8ZBsQ8YZ3K5ZBFc3jS/>>.
- PAIVA, A. *Análise combinatória no ensino médio: Desafios e estratégias*. Revista de Educação Matemática, 2020.
- SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. *Cadernos do Mathema: Ensino Fundamental: Jogos de Matemática de 6º a 9º ano*. [S.l.]: Artmed Editora, 2007. v. 2.

VEMKAJOGAR. *VEJA COMO CONTRUIR E JOGAR ESSE JOGO DE ORIGEM AFRICANA - TSORO YEMATATU*. 2025. Acessado em: 16 de janeiro de 2025. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=AeORvMiWK_Y>.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A

Tsoro Yematatu

Como criar o jogo Tsoro Yematatu com materiais simples

Materiais necessários

- **EVA** ou **cartolina** (para a base do jogo);
- **Tampinhas coloridas** (6 unidades, sendo 3 de uma cor e 3 de outra);
- **Emborrachado** ou **EVA** (para reforçar a base, se necessário);
- **Cola quente** (para fixação dos elementos);
- **Caneta ou marcador** (para desenhar o tabuleiro).

Passo a passo

1. Criar a base do jogo:

- Corte um pedaço de **EVA** ou **cartolina** em forma de quadrado com cerca de 20x20 cm.
- Se desejar uma base mais resistente, cole o EVA ou a cartolina sobre um pedaço de **emborrachado**.

2. Desenhar o tabuleiro:

- Usando uma caneta ou marcador, desenhe um **triângulo isósceles grande** na base.
- Divida o triângulo em **três partes iguais**, conectando os pontos médios de cada lado ao vértice oposto (formando três pequenos triângulos dentro do grande).

3. Preparar as peças do jogo:

- Separe **6 tampinhas coloridas**: 3 de uma cor (representando um jogador) e 3 de outra cor (representando o outro jogador).
- Se as tampinhas não forem coloridas, você pode pintá-las com tinta ou colar pedaços de EVA ou papel colorido sobre elas.

4. Finalizar os detalhes:

-
- Use a cola quente para fixar a cartolina ou EVA no emborrachado, se quiser maior durabilidade.
 - Certifique-se de que o tabuleiro e as peças estejam bem definidos para facilitar o jogo.