UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Tárcio Botelho de Siqueira Alves e Silva

Propostas para diversificação das estratégias didáticas no ensino da função afim.

RECIFE
2025

UFRPE

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Tárcio Botelho de Siqueira Alves e Silva

Propostas para diversificação das estratégias didáticas no ensino da função afim.

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Clessius Silva
Coorientadora: Prof. Dr. Tarciana M. S. da Silva

RECIFE
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

S586p Silva, Tárcio Botelho de Siqueira Alves e.
Propostas para diversificação das estratégias didáticas no ensino da função afim. / Tárcio Botelho de Siqueira Alves e Silva. – Recife, 2025.
121 f.; il.

Orientador(a): Clessius Silva.
Co-orientador(a): Tarciana Maria Santos da Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências e anexo(s).

1. Funções (Matemática). 2. Metodologia. 3. Didática. 4. Matemática - Estudo e ensino I. Silva, Clessius, orient. II. Silva, Tarciana Maria Santos da, coorient. III. Título

CDD 510

TÁRCIO BOTELHO DE SIQUEIRA ALVES E SILVA

"Propostas para diversificação das estratégias didáticas no ensino da função afim"

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 25/03/2025

BANCA EXAMINADORA

Clessius Silva

Prof. Dr. Clessius Silva (Orientador) – UFRPE

Eudes Naziazeno Galvão

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão – UFPE

Fabiano Barbosa Mendes da Silva

Prof. Dr. Fabiano Barbosa Mendes da Silva – PROFMAT/UFRPE

À minha família

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que tornaram possível a conclusão deste curso. Em especial, agradeço à minha mãe Márcia de Siqueira Alves e Silva (in memoriam), cujos ensinamentos foram fundamentais para minha formação pessoal e acadêmica. Agradeço também ao meu pai Luiz Adolpho Alves e Silva, e ao meu irmão Thales de Siqueira Alves e Silva, ambos professores, que sempre foram referências e fontes de inspiração na minha jornada profissional.

Minha esposa, Camila Pereira Palácio, merece um agradecimento especial pelo amor, compreensão e apoio incondicional ao longo de todo o curso. Agradeço também à minha tia Suyene de Siqueira Cavalcanti, pelo carinho, cuidado e suporte nos momentos mais difíceis da minha trajetória.

Aos meus amigos do mestrado, que me incentivaram a persistir nos momentos desafiadores, especialmente a Douglas de Souza, Felipe Basante e Robson Fernandes, agradeço pelos ensinamentos e pela troca de experiências em nosso grupo de estudo.

Agradeço também aos professores do PROFMAT-UFRPE pelos valiosos ensinamentos ao longo desses dois anos. Um agradecimento especial ao meu orientador, Dr. Clessius Silva, pela paciência, dedicação e pelas orientações fundamentais para a realização desta dissertação. Por fim, agradeço à professora Dra. Tarciana Maria Santos da Silva pelas contribuições na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, que foram extremamente importantes para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

"Ensinar não é transferir conhecimento,
mas criar as possibilidades para a sua
própria produção ou a sua construção."
(Paulo Freire, 1996)

Resumo

Considerando as dificuldades de aprendizagem dos alunos da educação básica no estudo das funções, este trabalho tem como objetivo apresentar e discutir a aplicação de uma sequência didática voltada para o ensino da função afim. A proposta busca promover o desenvolvimento das competências e habilidades estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e no Currículo de Pernambuco, por meio da utilização de metodologias ativas de aprendizagem. A sequência didática irá propor e explorar diversas estratégias para diversificar o ensino da função afim, como: sala de aula invertida, aprendizagem baseada em problemas, aprendizagem baseada em jogos, aprendizagem por investigação, rotação por estações, mapas mentais e o uso de softwares e aplicativos.

Palavras-chave: Função afim. Metodologias ativas. Sequência didática.

Abstract

Considering the learning difficulties of high school students in the study of functions, this dissertation aims to present and discuss the implementation of a didactic sequence focused on teaching the affine function. The proposal seeks to promote the development of the knowledge and skills established in the Base Nacional Comum Curricular (BNCC) and the Pernambuco Curriculum, through the use of active learning methodologies. The didactic sequence will propose and explore various strategies to diversify the teaching of the affine function, such as: flipped classroom, problem-based learning, game-based learning, inquiry-based learning, station rotation, mind maps, and the use of software and applications.

Keywords: Affine function. Active methodologies. Didactic sequence.

Lista de ilustrações

Figura 1 – População residente no Brasil ao longo do tempo: Série Histórica. . . . 19
Figura 2 – Círculo de raio r. 22
Figura 3 – Função de A em B 23
Figura 4 – Diagrama do Exemplo 1.7. 24
Figura 5 – Diagrama do Exemplo 1.8. 25
Figura 6 – Diagrama do Exemplo 1.9. 26
Figura 7 – Diagrama do Exemplo 1.10. 26
Figura 8 – Domínio, contradomío e imagem da função. 27
Figura 9 – Plano cartesiano 29
Figura 10 – Representação de pontos no plano cartesiano 30
Figura 11 – Produto cartesiano $A \times B$ do Exemplo 1.14. 31
Figura 12 – Produto cartesiano $B \times A$ do Exemplo 1.14. 31
Figura 13 – Produto cartesiano $A \times B$ do Exemplo 1.15 32
Figura 14 – Produto cartesiano $B \times A$ do Exemplo 1.15 32
Figura 15 – Diagrama de flechas do Exemplo 1.18 33
Figura 16 – Gráfico do Exemplo 1.18. 34
Figura 17 – Gráfico do Exemplo 1.24 35
Figura 18 – Gráfico do Exemplo 1.25 36
Figura 19 – Gráfico do Exemplo 1.26 36
Figura 20 – Gráfico do Exemplo 1.27 37
Figura 21 – Gráfio do Exemplo 1.28 37
Figura 22 – Domínio e imagem no gráfico da função f 38
Figura 23 – Domínio e imagem no gráfico da função g 39
Figura 24 – Gráfico da função $f : [-2, 7] \to \mathbb{R}$ 40
Figura 25 – Gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 41
Figura 26 – Gráfico da função bijetiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 42
Figura 27 – Gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não injetiva e não sobrejetiva. 43
Figura 28 – Gráfico auxiliar para a demonstração do Teorema 1.55 48
Figura 29 – Coeficientes angular e linear da reta r 49
Figura 30 – Gráfico do Exemplo 1.57 50
Figura 31 – Estudo do sinal da função afim crescente $(a > 0)$ 53
Figura 32 – Estudo do sinal da função afim decrescente $(a < 0)$ 54
Figura 33 – Gráfico do Exemplo 1.61 55
Figura 34 – Interseção entre as retas concorrentes r e s 56
Figura 35 – Gráfico da função I. 58
Figura 36 – Representação geométrica da situação problema 77

Figura 37 – Imagem da questão desafio: Lei da oferta e da procura. 78
Figura 38 – Venda de feijão a granel da DaquiÓ 81
Figura 39 – Atletas competindo em uma corrida. 82
Figura 40 – Gráfico do problema proposto pelo Grupo 6 83
Figura 41 – Jogo do Grupo 1: Batalha no Plano Cartesiano 85
Figura 42 – Jogo do Grupo 2: O Caminho das Funções 86
Figura 43 – Jogo do Grupo 3: Família das Funções 87
Figura 44 – Jogo do Grupo 4: Enigma das Funções 88
Figura 45 – Jogo do Grupo 5: Quiz da Função afim 89
Figura 46 – Jogo da Memória das Equações do 1° Grau. 90
Figura 47 – Questão 1: Pré-teste x pós-teste. 91
Figura 48 – Comparação do percentual de acertos da Questão 1: Pré-teste x pós-teste 92
Figura 49 – Questão 2: Pré-teste x pós-teste. 93
Figura 50 – Comparação do percentual de acertos da Questão 2: Pré-teste x pós-teste 93
Figura 51 – Questão 3: Pré-teste x pós-teste. 94
Figura 52 – Comparação do percentual de acertos da Questão 3: Pré-teste x pós-teste 95
Figura 53 – Questão 4: Pré-teste x pós-teste. 95
Figura 54 – Comparação do percentual de acertos da Questão 4: Pré-teste x pós-teste 96
Figura 55 – Questão 5: Pré-teste x pós-teste. 97
Figura 56 – Comparação do percentual de acertos da Questão 5: Pré-teste x pós-teste 98
Figura 57 – Questão 6: Pré-teste x pós-teste. 98
Figura 58 – Comparação do percentual de acertos da Questão 6: Pré-teste x pós-teste 99
Figura 59 – Imagem da Questão desafio: Lei da oferta e da procura. 110
Figura 60 – Venda de feijão a granel da DaquiÓ 114
Figura 61 – Atletas competindo em uma corrida 116

Lista de abreviaturas e siglas

SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

Sumário

Introdução 14

1 FUNÇÃO AFIM 16
1.1 Análise da BNCC 16
1.2 Estudo introdutório de funções 18
1.2.1 A noção intuitiva de função 18
1.2.2 A definição de função. 23
1.2.3 Domínio, contradomínio e imagem de uma função. 27
1.2.4 Domínios de funções reais de uma variável real. 28
1.2.5 O plano cartesiano. 28
1.2.6 Produto cartesiano 30
1.2.7 Relação binária e função 33
1.2.8 Gráficos de funções. 35
1.2.9 Domínio e imagem no gráfico de uma função. 38
1.2.10 Monotonicidade, estudo dos sinais e zeros da função. 39
1.2.10.1 Monotonicidade de uma função. 39
1.2.10.2 Estudo dos sinais e zeros da função. 40
1.2.11 Função injetiva, bijetiva e sobrejetiva. 41
1.3 A função afim 43
1.3.1 Valor inicial e taxa de variação de uma função afim. 44
1.3.2 Gráfico da função afim. 46
1.3.3 Coeficientes angular e linear da reta. 49
1.3.4 Zero de uma função afim. 51
1.3.5 Crescimento e decrescimento da função afim. 51
1.3.6 Estudo do sinal da função afim 52
1.3.7 Interseção entre retas concorrentes 55
1.3.8 Função linear e proporcionalidade. 56
1.3.9 Funções definidas por mais de uma sentença 57

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 60
2.1 Caracterização da pesquisa 60
2.2 Público participante 60
2.3 Coleta e análise de dados 60
2.4 Pré-teste 61
2.5 Sequência Didática 61
2.5.1 Informações gerais 62

2.5.2 Conteúdos prévios à implementação da sequência didática . . 62
2.5.3 Conteúdos trabalhados na sequência didática. 62
2.5.4 Habilidades da BNCC. 63
2.5.5 Objetivos de aprendizagem. 63
2.5.6 Recursos educacionais. 63
2.5.7 Descrição do curso ministrado 64
2.5.7.1 Encontro 1: Aplicação do pré-teste 64
2.5.7.2 Encontro 2: Sala de aula invertida 66
2.5.7.3 Encontro 3: Resolução de exercícios 67
2.5.7.4 Encontro 4: Dinâmica de rotação por estações 67
2.5.7.5 Encontro 5: Criação de situações-problema a partir de imagens motivadoras 68
2.5.7.6 Encontros 6, 7 e 8: Oficina de Jogos Matemáticos. 69
2.5.7.7 Encontro 9: Realização do pós-teste individual 71
2.5.8 Avaliação. 71
2.6 Pós-teste 72

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES 73
3.1 Dinâmica de rotação por estações. 73
3.2 Criação de situações-problema a partir de imagens motivadoras. 80
3.2.1 Relação quantidade x preço na compra de feijão a granel . . . 81
3.2.2 Relação tempo x posição no movimento retilíneo uniforme. . 82
3.3 Oficina de jogos matemáticos 84
3.4 Resultados do pré-teste e pós-teste 91
3.4.1 Considerações finais 99

REFERÊNCIAS 100

ANEXO A – PRÉ-TESTE 102

ANEXO B – FICHA DE EXERCÍCIOS 106

ANEXO C – DESAFIO DA DINÂMICA DE ROTAÇÃO POR ESTAÇÕES E ATIVIDADES PROPOSTAS EM CADA ESTAÇÃO. 110

ANEXO D – IMAGENS MOTIVADORAS E SITUAÇÕES-PROBLEMA, REFERENTES AO ENCONTRO 5. 114

ANEXO E – PÓS-TESTE. 117

Introdução

A matemática é uma disciplina fundamental para o desenvolvimento do pensamento abstrato e do raciocínio lógico dos alunos da educação básica. No entanto, o aprendizado dessa matéria tem sido historicamente um dos maiores desafios para os estudantes. Fatores como a utilização exclusiva de métodos tradicionais de ensino, a preocupação dos professores em cumprir o conteúdo programático em detrimento do nível de aprendizagem dos alunos, e a dependência de recursos como quadro branco e marcador para ensinar o conteúdo, contribuem para a dificuldade e a rejeição de muitos alunos pela disciplina.

A sociedade atual, em constante transformação, exige que o ensino acompanhe essas mudanças. O professor precisa se adaptar à nova realidade, adotando ferramentas inovadoras que despertem o interesse dos alunos. Como aponta Silva, Nascimento e Muniz (2017), o educador moderno deve utilizar novas metodologias e planejar abordagens criativas para engajar seus alunos. O ensino tradicional da matemática, centrado na aplicação de algoritmos, muitas vezes limita o potencial criativo e investigativo dos estudantes, que se veem distantes de uma aprendizagem mais reflexiva e aplicada.

De acordo com D'Ambrósio (1989), quando o aluno supervaloriza a matemática formal e os procedimentos algorítmicos, ele perde a confiança em sua intuição matemática e sua capacidade de resolução criativa de problemas. Isso limita sua capacidade de aplicar o conhecimento adquirido de maneira prática. Nesse sentido, é fundamental que o ensino da matemática possibilite aos alunos a construção e consolidação de seu conhecimento por meio de atividades que estimulem o potencial investigativo e criativo, preparando-os não apenas para problemas tradicionais, mas para enfrentar os desafios de uma sociedade dinâmica, que exige habilidades cada vez mais complexas:

> "[...] Na sociedade em que vivemos, designada por alguns como a sociedade da informação ou a sociedade do conhecimento, novas habilidades passam a ser exigidas não só no mercado de trabalho como, também, na vida social dos cidadãos. Efeito disso, a capacidade de resolver problemas, utilizar a imaginação e a criatividade passam a ser requisitos cada vez mais indispensáveis. Enquanto a capacidade de memorização, repetição e mecanização se tornam insuficientes frente à eficácia do computador e das máquinas em geral". (LARA, 2004, p.2)

Dentro deste contexto, diversos autores têm discutido a necessidade de adotar metodologias alternativas para o ensino da matemática (LUIZ, 2013). As metodologias ativas de aprendizagem surgem como uma alternativa promissora, capazes de romper as barreiras do ensino tradicional e formar alunos críticos, investigativos e criativos, protagonistas de seu próprio aprendizado.

Para este trabalho, optamos por abordar o ensino da função afim, pois além de ser um tópico que apresenta considerável dificuldade para os alunos, desempenha um papel fundamental no currículo de matemática do 1º ano do Ensino Médio. Esse conteúdo também é de grande importância para o desempenho dos estudantes em exames como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e outras avaliações externas, devido à sua presença recorrente nessas provas. Diante disso, propomos a apresentação e discussão de uma sequência didática sobre o ensino da função afim, com o objetivo de promover o desenvolvimento das competências e habilidades específicas estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) relacionadas a esse tema, utilizando metodologias ativas de aprendizagem.

Esta pesquisa está organizada em três capítulos, conforme descrito a seguir: O primeiro capítulo, intitulado "Função Afim", está subdividido em três seções. A primeira seção, nomeada "Análise da BNCC", aborda a Base Nacional Comum Curricular, documento normativo que determina as aprendizagens fundamentais que devem ser desenvolvidas pelos estudantes da educação básica. Nesta seção, avaliamos as contribuições que a BNCC traz no que se refere às estratégias didáticas para uma aprendizagem que possibilite o desenvolvimento esperado dos estudantes em cada etapa de ensino. Além disso, identificamos no documento as habilidades relacionadas ao tema proposto, com o objetivo de orientar a sequência didática que será apresentada posteriormente. Já a segunda e a terceira seções, nomeadas "Estudo introdutório de funções" e "A função afim", respectivamente, apresentam uma revisão bibliográfica sobre o tema, com foco nas habilidades fundamentais para a aplicação da sequência didática.

No segundo capítulo, intitulado "Metodologia", são apresentados o público-alvo, os procedimentos adotados para a pesquisa e a sequência didática que será implementada na ação pedagógica.

O terceiro capítulo, "Resultados e Discussões", analisa os resultados dos testes diagnósticos aplicados antes e depois da sequência didática. Serão comparados os resultados desses testes para verificar se a sequência atendeu às expectativas e ajudou no desenvolvimento das habilidades dos alunos.

1 Função Afim

Neste capítulo será apresentado o referencial teórico da pesquisa, que está dividido em três seções. Na primeira seção, investigaremos como o tema estudado é apresentado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que determina as aprendizagens fundamentais que devem ser desenvolvidas pelos estudantes da educação básica. Na segunda e terceira seções, apresentaremos uma revisão bibliográfica relativa ao estudo introdutório das funções e função afim, fornecendo a base teórica para os assuntos que serão abordados na sequência didática.

1.1 Análise da BNCC

Com o intuito de demonstrar a importância do tema dessa pesquisa para a educação básica, iremos avaliar as contribuições que a BNCC traz no que se refere às estratégias didáticas para uma aprendizagem que possibilite o desenvolvimento esperado dos estudantes em cada etapa de ensino. Também vamos investigar de que maneira a BNCC direciona o trabalho pedagógico para o estudo da função afim no Ensino Médio, com base nas habilidades específicas que são apresentadas nesse documento.

No tópico "A área de Matemática e suas Tecnologias" (BRASIL, 2018), destaca-se a necessidade de incentivar os estudantes a desenvolver habilidades relacionadas aos processos de construção de modelos e resolução de problemas, através de uma aprendizagem autônoma e participativa. O documento também ressalta a importância da utilização de aplicativos e recursos tecnológicos digitais para a investigação matemática e para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Desse modo, os estudantes são motivados a desenvolver o seu modo próprio de raciocínio, argumentação e representação. Esse documento ainda indica que:

> "[...] para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado." (BRASIL, 2018, p.529)

Portanto, fica evidente a relevância do tema desse trabalho para a educação básica, já que a busca por novas estratégias e ferramentas que favoreçam a participação, a autonomia e a criatividade dos estudantes é fundamental para o desenvolvimento das competências e habilidades previstas na BNCC.

Além disso, o ensino da função afim possui uma presença notável nesse documento, sendo um dos assuntos essenciais da matemática estudada no 1° ano do Ensino Médio. Esse conteúdo também é extremamente importante para o sucesso dos estudantes no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e outras avaliações externas, considerando o aparecimento recorrente nessas provas.

A seguir apresentaremos as habilidades da BNCC referentes ao estudo da função afim no Ensino Médio, que serão extremamente importantes para o desenvolvimento e aplicação desta pesquisa.

HABILIDADES DA BNCC

- (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- (EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representálos no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
- (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais

É importante enfatizar que os conteúdos e habilidades trabalhadas na sequência didática que será apresentada no próximo capítulo estão de acordo com as recomendações da BNCC.

1.2 Estudo introdutório de funções

Com o intuito de discutir os conteúdos matemáticos necessários para a aplicação da sequência didática, apresentaremos as definições e conceitos mais relevantes para essa pesquisa sobre o estudo introdutório das funções e função afim, buscando possibilitar uma compreensão mais abrangente e significativa do tema estudado. Para isto, realizaremos uma revisão bibliográfica fundamentada nas obras de Gelson et al. (2016), Iezzi (2013), Lima et al. (1997), Neto (2015), Roberto (2016) e Stewart (2009).

1.2.1 A noção intuitiva de função

O conceito de função possui uma grande importância não só para a matemática mas também para a física, biologia, economia, finanças, engenharia, dentre outras áreas do conhecimento. Para obtermos uma melhor compreensão de certos fenômenos, buscamos identificar e relacionar grandezas que auxiliem na descrição e caracterização do objeto de estudo, muitas vezes utilizamos funções para expressar tais relações.

No nosso cotidiano observamos diversas situações em que as quantidades de uma grandeza dependem de determinadas quantidades de uma outra grandeza. Por exemplo, o valor de uma corrida de táxi depende de uma tarifa fixa (bandeirada) e outra que é cobrada por quilômetro rodado, o número da população brasileira depende do tempo (em anos), a distância percorrida por um motociclista em movimento uniforme depende do tempo, a precipitação mensal em certa localidade depende do mês, a área de um círculo depende do seu raio, dentre outras situações.

Nos casos em que cada valor de uma das grandezas envolvidas corresponde a um único valor da outra grandeza, utilizamos o termo função para descrever a dependência dos valores de uma grandeza com relação à outra. Observe os exemplos a seguir:

Exemplo 1.1. Quilômetros rodados e preço da corrida de taxi.

Na Região Metropolitana do Recife, o valor da bandeirada da corrida de táxi custa R$ 5,00 enquanto o preço cobrado por quilômetro rodado é de R$ 2,50. O valor pago pela corrida e a quantidade de quilômetros rodados podem ser relacionados por meio da tabela abaixo:

Tabela 1 – Preço da corrida em função da distância

Quilômetros rodados(km)	Preço da corrida (reais)
0	5
1	7,5
2	10
3	12,5
$\vdots$	$\vdots$
10	30
$\vdots$	$\vdots$

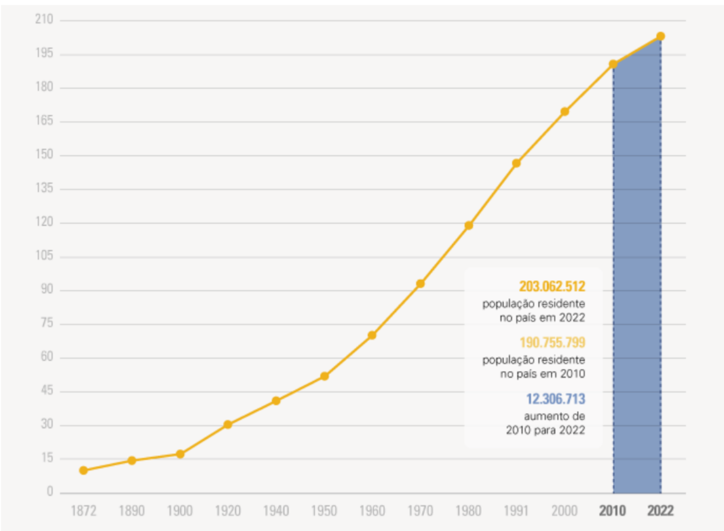
Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 1 é possível perceber que, para cada quantidade de quilômetros rodados (x) temos um único preço (y) correspondente, ou seja, **o preço pago na corrida de táxi é uma função da quantidade de quilômetros rodados**. Além disso, a fórmula ou lei de formação que relaciona essas duas grandezas é: $y = 2,5 \cdot x + 5$, em que y é dado em reais e x em quilômetros.

Exemplo 1.2. A população residente no Brasil ao longo dos anos.

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), orgão responsável por realizar o levantamento de diversas informações estatísticas sobre a população brasileira, disponibiliza periodicamente através do censo demográfico dados populacionais extremamente relevantes para a caracterização socioeconômica do Brasil. Essas informações possibilitam o direcionamento dos investimentos e a criação de políticas públicas necessárias para a melhoria da vida dos brasileiros, como mostra a figura a seguir.

Figura 1 – População residente no Brasil ao longo do tempo: Série Histórica.



Fonte: (IBGE, 2022)

O gráfico da Figura 1 relaciona duas grandezas: a população residente no Brasil (em milhões) e o tempo (em anos). Nesse caso, **a população residente no Brasil é uma função do tempo**, já que para cada ano corresponde um único valor da população. Note que a quantidade de pessoas que residem no Brasil aumentou ao longo dos anos em que foram realizadas as pesquisas. Além disso, podemos observar em quais períodos o crescimento foi mais ou menos "abrupto".

É importante perceber que mesmo quando não conseguimos determinar uma lei ou fórmula precisa para descrever uma função, ainda podemos representá-la de outras maneiras, como através de um gráfico, por exemplo.

Exemplo 1.3. Tempo e distância percorrida.

Em uma rodovia, um motociclista mantém uma velocidade constante de 80 km/h. A Tabela 2, abaixo, relaciona o tempo x (em horas) e a distância percorrida y (em quilômetros).

Tabela 2 – Distância em função do tempo

Tempo (em horas)	Distância (em quilômetros)
0,5	40
1	80
1,5	120
2	160
$\vdots$	$\vdots$
10	800
$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Autoria própria.

A partir da Tabela 2 podemos notar que, a cada tempo (x) considerado temos uma única distância percorrida (y) correspondente. Ou seja, **a distância percorrida é função do tempo**. Além disso, a fórmula ou lei de formação que relaciona essas duas grandezas é: $y = 80 \cdot x$, em que y é dado em quilômetros e x em horas.

Exemplo 1.4. Tempo e precipitação mensal.

A Agência Pernambucana de Águas e Clima (APAC) é o órgão responsável por realizar o monitoramento das chuvas e da temperatura no estado de Pernambuco. Esse gerenciamento é extremamente importante para a previsão de eventos climáticos e meteorológicos adversos, como por exemplo: riscos de alagamento, desastres em decorrência das chuvas fortes ou escassez de água em regiões secas. Além disso, o estudo do clima e do tempo é essencial para o desenvolvimento de diversas atividades humanas como a agricultura, a economia e o comércio.

Os dados que serão apresentados a seguir foram divulgados pela APAC, e representam a climatologia mensal (média) na Região Metropolitana do Recife, considerando os dados de uma série histórica de trinta anos. A Tabela 3, a seguir, apresenta como a precipitação média (em milímetros) variou ao longo do tempo (em meses) na Região Metropolitana do Recife.

Tabela 3 – Precipitação média mensal na RMR.

Tempo (mês)	Precipitação média na RMR (mm)
Jan	100,9
Fev	122,9
Mar	212,2
Abr	269,2
Mai	294,3
Jun	337,6
Jul	314,0
Ago	176,9
Set	102,1
Out	49,7
Nov	38,7
Dez	56,2
ANUAL	2074,7

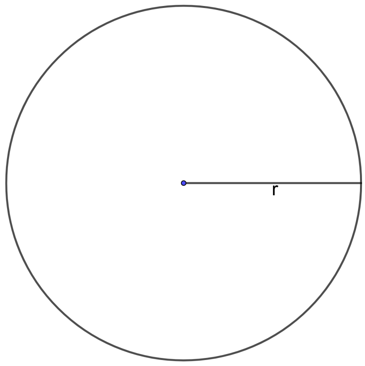
Fonte: (APAC, 2024)

Nesse caso, dizemos que a **precipitação média mensal é função do tempo**, visto que as grandezas precipitação e tempo se relacionam de modo que a cada mês corresponde um único valor de precipitação. Além disso, apesar de provavelmente não conseguirmos determinar uma lei ou fórmula que relacione cada valor de precipitação com o mês correspondente, podemos representar essa função através de tabelas, gráficos, dentre outros meios.

Exemplo 1.5. Raio e área de um círculo

Para calcular a área de um círculo, multiplicamos o número irracional π pelo quadrado do raio do círculo. Esse cálculo pode ser representado pela fórmula $A = \pi{\cdot}r^2$, em que A e r são números reais positivos que representam a área e o raio do círculo, respectivamente. Note que essa fórmula estabelece uma correspondência entre a área de um círculo e a medida do seu raio, de modo que cada valor do raio corresponde a uma única área. Ou seja, **a área do círculo é uma função do seu raio**.

Figura 2 – Círculo de raio r.



Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 4, apresentada abaixo, são observadas algumas áreas de um círculo em função do seu respectivo raio.

Tabela 4 – Área de um círculo em função do seu raio.

raio (cm)	Área (cm^2)
0,5	$0,25 \cdot \pi$
1	π
2	$4 \cdot \pi$
3	$9 \cdot \pi$
4	$16 \cdot \pi$
$\vdots$	$\vdots$
10	$100 \cdot \pi$
$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Autoria própria.

Além das situações descritas acima, podemos apresentar outros exemplos de funções: o preço da conta de energia elétrica é função da quantidade de energia consumida, a temperatura em determinada região é função do tempo, o preço para o envio de mercadorias pelo correios é função do peso do produto, o número de bactérias em determinada cultura é função do tempo, o perímetro de um quadrado é função do comprimento do seu lado, a altura de uma determinada pessoa é função da idade, o imposto de renda depende do valor do salário, dentre tantos outros exemplos. Alguns desses exemplos são discutidos por Stewart (2009).

No nosso trabalho vamos nos ater a estudar os casos de funções que são expressas por meio de uma determinada fórmula (ou lei de formação), a fim de avaliar os conceitos matemáticos mais importantes relacionados a essa representação. Nos Exemplos 1.1, 1.3 e 1.5 representamos explicitamente a fórmula que relaciona as grandezas analisadas, enquanto que nos casos dos Exemplos 1.2 e 1.4 as leis de correspondências existentes entre as grandezas não foram representadas por uma expressão matemática.

Uma maneira interessante de interpretar a lei de formação de uma função, é a de pensar em uma máquina que transforma a matéria-prima em um produto final. Por exemplo, no caso do Exemplo 1.5, temos uma máquina que transforma o raio do círculo na sua respectiva área.

1.2.2 A definição de função.

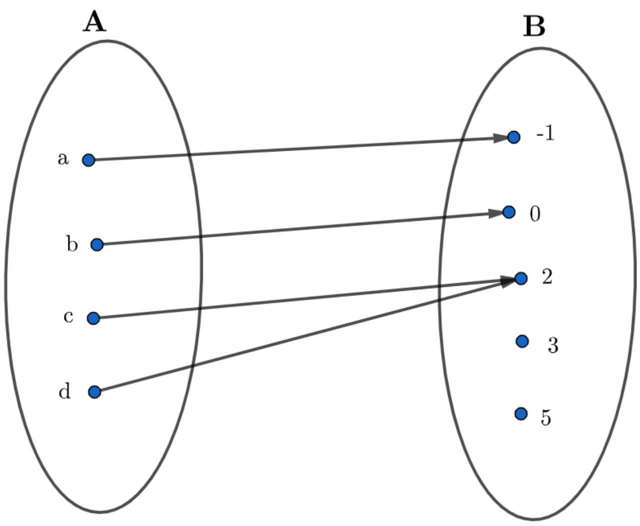
Para um tratamento mais preciso do conceito de função, vamos recorrer às representações por meio de conjuntos.

Definição 1.6. Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ será denominada função de A em B.

Utilizamos a notação $f : A \longrightarrow B$, para indicar que f é uma função de A em B. Além disso, quando $x \in A$ está associado a $y \in B$ por meio da função f, dizemos que $y \in B$ é a imagem de $x \in A$ pela função f, e denotamos $y = f(x)$.

Muitas vezes é conveniente utilizarmos um diagrama de flechas para representarmos as correspondências dos elementos dos dois conjuntos por meio da função f de A em B. As setas indicam que cada $x \in A$ está associado a um único elemento $y \in B$, como podemos ver na Figura 3.

Figura 3 – Função de A em B



Fonte: Autoria própria.

A Definição 1.6 permite que, no diagrama correspondente, elementos $y \in B$ não estejam associados a nenhum $x \in A$ (não recebam nenhuma seta) ou, que um ou mais elementos $y \in B$ estejam associados a mais de um $x \in A$ (recebam mais de uma seta), conforme discute Neto (2015). Além disso, para se caracterizar uma função de A em B, a partir do diagrama de flechas, devemos garantir que de todo $x \in A$ parta uma única flecha para o seu correspondente $y \in B$. Desse modo, qualquer diagrama que ferir essa determinação não caracteriza uma função de A em B.

No diagrama da Figura 3 temos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$ e $f(a) = -1$, $f(b) = 0$, $f(c) = 2$, $f(d) = 2$. Desse modo, -1 é a imagem de a pela função f, 0 é a imagem de b pela função f, e 2 é a imagem de c e d pela função f.

A seguir serão apresentados alguns exemplos:

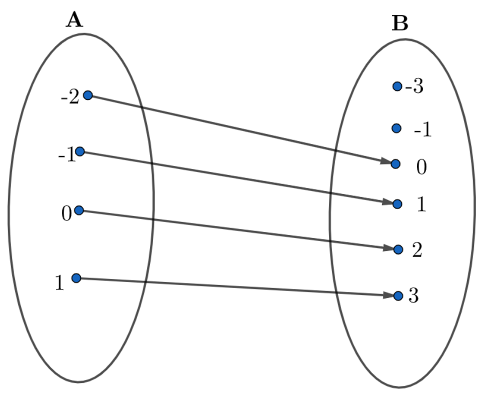
Exemplo 1.7. Sejam $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $B = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$ dois conjuntos. Associaremos a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x + 2$. A Tabela 5 e a Figura 4, apresentadas abaixo, ilustram o exemplo discutido .

Tabela 5 – Exemplo 1.7.

$x \in A$	$y \in B$
-2	0
-1	1
0	2
1	3

Fonte: Autoria própria.

Figura 4 – Diagrama do Exemplo 1.7.



Fonte: Autoria própria.

Nesse exemplo, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ de modo que y é o correspondente de x. Portanto, essa relação **é uma função de** A **em** B. É importante enfatizar que, conforme discutido anteriormente, a definição de função permite que elementos $y \in B$ não estejam associados a nenhum $x \in A$ (não recebam nenhuma seta).

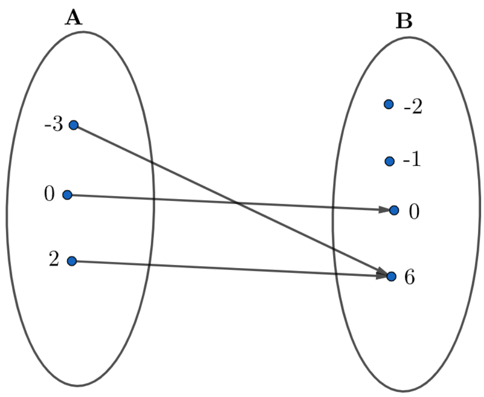
Exemplo 1.8. Sejam $A = \{-3, 0, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 6\}$ dois conjuntos. Associaremos a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x^2 + x$. A Tabela 6 e a Figura 5, apresentadas abaixo, ilustram o exemplo discutido.

Tabela 6 – Exemplo 1.8

$x \in A$	$y \in B$
-3	6
0	0
2	6

Fonte: Autoria própria.

Figura 5 – Diagrama do Exemplo 1.8.



Fonte: Autoria própria.

Novamente, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ de modo que y é o correspondente de x. Portanto, temos **uma função de A em B**. É importante enfatizar que, conforme discutido anteriormente, a definição de função permite que um ou mais elementos $y \in B$ estejam associados a mais de um $x \in A$ (recebam mais de uma seta).

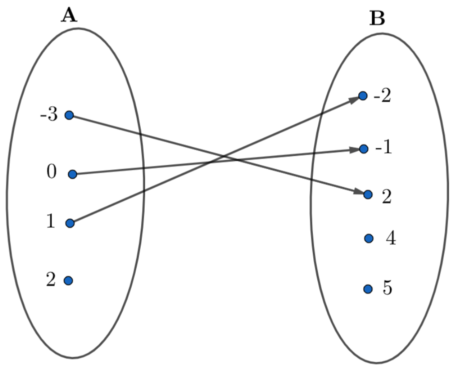
Exemplo 1.9. Considere os conjuntos $A = \{-3, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 2, 4, 5\}$. Associaremos a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = -x - 1$. A Tabela 7 e a Figura 6, apresentadas a seguir, ilustram o exemplo discutido.

Tabela 7 – Exemplo 1.9.

$x \in A$	$y \in B$
-3	2
0	-1
1	-2

Fonte: Autoria própria.

Figura 6 – Diagrama do Exemplo 1.9.



Fonte: Autoria própria.

Nesse caso, para o elemento $2 \in A$ não existe correspondente $y \in B$. Portanto, essa relação **não é uma função de A em B**.

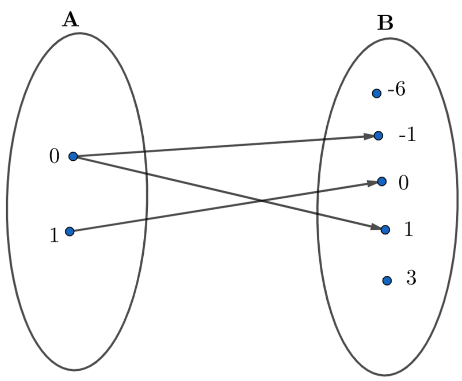
Exemplo 1.10. Sejam $A = \{0, 1\}$ e $B = \{-6, -1, 0, 1, 3\}$ dois conjuntos. Associaremos a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y^2 = -x^2 + 1$. A Tabela 8 e a Figura 7, apresentadas a seguir, ilustram o exemplo discutido.

Tabela 8 – Exemplo 1.10

$x \in A$	$y \in B$
0	± 1
1	0

Fonte: Autoria própria.

Figura 7 – Diagrama do Exemplo 1.10.



Fonte: Autoria própria.

Nesse caso, para o elemento $0 \in A$ existem dois elementos correspondentes em B: o 1 e o -1. Portanto, essa relação **não é uma função de A em B**.

1.2.3 Domínio, contradomínio e imagem de uma função.

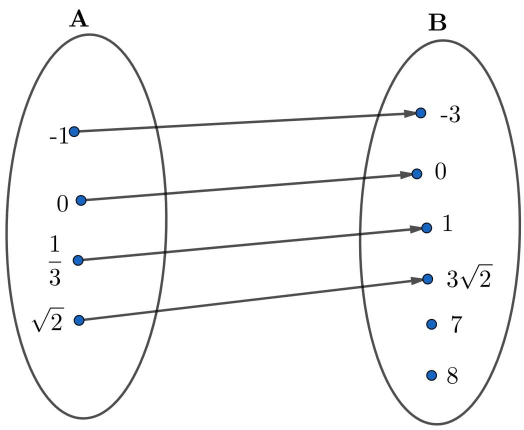
Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. O conjunto A é denominado domínio de f (indicaremos por $D(f)$), e o conjunto B é denominado contradomío de f (indicaremos por $CD(f)$). Desse modo, temos $D(f) = A$ e $CD(f) = B$.

Além disso, chamamos de conjunto imagem de f e indicamos por Im(f), o subconjunto do contradomínio ($Im(f) \subset B$) formado pelos elementos $y \in B$ tais que $y = f(x)$, com $x \in A$. Em linguagem simbólica, $Im(f) = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$.

Exemplo 1.11. Sejam $A = \{-1, 0, \frac{1}{3}, \sqrt{2}\}$ e $B = \{-3, 0, 1, 3\sqrt{2}, 7, 8\}$ conjuntos. A função $f : A \longrightarrow B$, tal que $y = 3x$ (ou $f(x) = 3x$), possui domínio $D(f) = A = \{-1, 0, \frac{1}{3}, \sqrt{2}\}$ e contradomínio $CD(f) = B = \{-3, 0, 1, 3\sqrt{2}, 7, 8\}$.

Para determinar o conjunto imagem da função f, calcularemos as imagens de cada $x \in A$, utilizando a lei de formação $f(x) = 3x$. Desse modo, temos $f(-1) = 3 \cdot (-1) = -3$, $f(0) = 3 \cdot 0 = 0$, $f(\frac{1}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ e $f(\sqrt{2}) = 3 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Assim, $Im(f) = \{-3, 0, 1, 3\sqrt{2}\}$. É importante observar que a imagem pode ser diferente do contradomínio, pois podem existir elementos do contradomínio que não estão relacionados a nenhum elemento do domínio (não recebem nenhuma seta), como podemos observar no diagrama a seguir representado na Figura 8:

Figura 8 – Domínio, contradomío e imagem da função.



Fonte: Autoria própria.

1.2.4 Domínios de funções reais de uma variável real.

No nosso trabalho daremos ênfase ao estudo das funções reais de uma variável real, ou seja, funções do tipo $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas pela lei de formação $y = f(x)$, com $A \subset \mathbb{R}$ (o domínio de f é um subconjunto dos números reais) e cujos valores de $f(x)$, para todo $x \in A$, são números reais.

Muitas vezes essas funções são expressas apenas pela sua lei de formação. Nessas situações, fica subentendido que o domínio da função é o conjunto de todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x)$ é um número real.

É importante destacar que uma função é formada por três componentes: domínio, contradomínio e lei de correspondência. Desse modo, mesmo ao nos referirmos apenas como “a função f”, subentendem-se seu domínio A e seu contradomínio B. Se esses componentes não forem especificados não existe a função, conforme discute Lima (2013). “Assim sendo, uma pergunta do tipo “Qual o domínio da função $f(x) = \frac{1}{x}$?”, estritamente falando não faz sentido. A pergunta correta seria: “Qual o maior subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que a fórmula $f(x) = \frac{1}{x}$ define uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$?.” Novamente, a pergunta incorreta é mais simples de formular. Se for feita assim, é preciso saber seu significado. ” (LIMA, 2013, p.37)

Além disso, dizemos que as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : C \longrightarrow D$ são iguais se, e somente se, $A = C$; $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplo 1.12. Sejam as fórmulas $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \sqrt{(x + 2)}$. Nesses casos, quais os maiores subconjuntos (no sentido de inclusão) $A \subset \mathbb{R}$ e $C \subset \mathbb{R}$ tais que as fórmulas apresentadas anteriormente definem as funções $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : C \longrightarrow \mathbb{R}$, respectivamente?

Observa-se que $f(x)$ não assume um valor real quando $x = 0$ (já que não definimos uma expressão numérica com denominador igual a 0), assim $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$. Além disso, $g(x)$ não assume um valor real quando $x + 2$ for negativo (já que a raiz quadrada de números negativos não é um número real), então $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\}$.

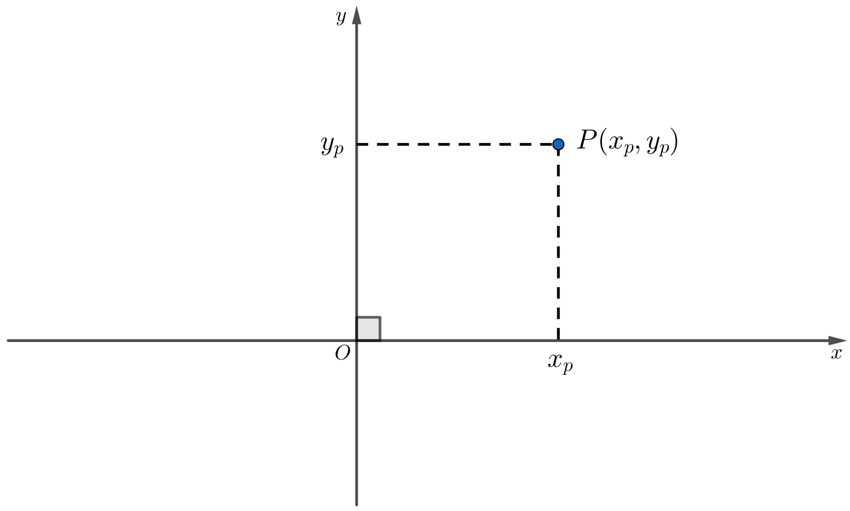
Desse modo, definimos as funções $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : C \longrightarrow \mathbb{R}$, em que:

- $D(f) = A$, $CD(f) = \mathbb{R}$ e a lei de formação é $f(x) = \frac{1}{x}$.
- $D(g) = C$, $CD(g) = \mathbb{R}$ e a lei de formação é $g(x) = \sqrt{(x + 2)}$.

1.2.5 O plano cartesiano.

O plano cartesiano é o plano determinado por dois eixos x e y que são perpendiculares em um ponto O. Os eixos x e y são chamados, respectivamente, de eixo das abscissas (ou Ox) e eixo das ordenadas (ou Oy), e o ponto O é denominado origem do sistema de eixos cartesiano ortogonal xOy.

Figura 9 – Plano cartesiano



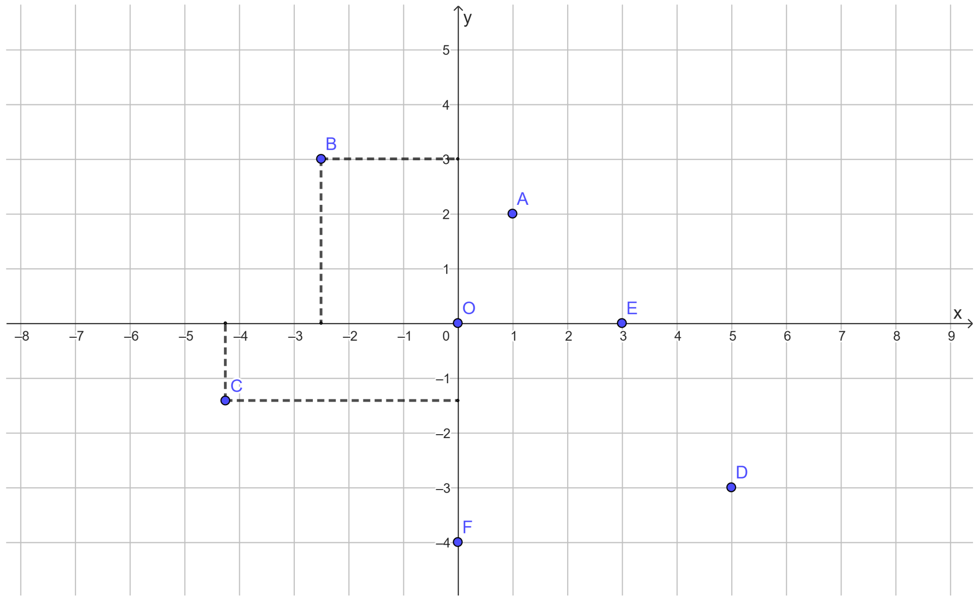
Fonte: Autoria própria.

Consideremos um ponto P do plano cartesiano. Agora, determinemos as retas s e t que passam por P e são paralelas respectivamente aos eixos x e y. Desse modo, a reta t interceptará o eixo x em um ponto Q e a reta s interceptará o eixo y em um ponto R. Com isto, definiremos a abscissa de P como sendo o número real x_p, cujo valor absoluto é igual à medida do segmento $\overline{OQ}$, e consideramos x_p positivo caso Q esteja à direita de O, e negativo caso Q esteja à esquerda de O. Analogamente, a ordenada de P é o número real y_p, cujo valor absoluto corresponde à medida do segmento $\overline{OR}$, e consideramos y_p positivo caso R esteja acima de O, e negativo no caso que R esteja abaixo de O. Desse modo, utilizaremos a representação de par ordenado $P(x_p, y_p)$ para indicar as coordenadas x_p e y_p do ponto P.

Também é importante saber que o plano cartesiano é dividido pelos eixos das abcissas e das ordenadas em quatro regiões, denominadas quadrantes, que são caracterizadas a partir dos sinas das coordenadas dos seus pontos. No primeiro quadrante temos $x_p \geq 0$ e $y_p \geq 0$, no segundo quadrante temos $x_p \leq 0$ e $y_p \geq 0$, no terceiro quadrante $x_p \leq 0$ e $y_p \leq 0$ e no quarto quadrante, $x_p \geq 0$ e $y_p \leq 0$, conforme discute Lima et al. (1997).

Podemos representar os pontos $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(-\frac{5}{2},3)$, $C(-\frac{17}{4},-\sqrt{2})$, $D(5,-3)$, $E(3,0)$ e $F(0,-4)$ no plano cartesiano, conforme ilustrado na Figura 10. Em cada par ordenado o primeiro número representa a abscissa do ponto, enquanto o segundo número representa a ordenada do ponto.

Figura 10 – Representação de pontos no plano cartesiano



Fonte: Autoria própria.

A partir das definições apresentadas anteriormente, é possível demonstrar que "entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_p, y_p) de números reais existe uma correspondência biunívoca" (IEZZI, 2013, p.66). Ou seja, cada ponto do plano cartesiano pode ser representado por um único par ordenado de números reais e, cada par ordenado de números reais pode ser identificado por um único ponto do plano cartesiano.

Para ampliarmos a nossa discussão apresentaremos a seguir o conceito de produto cartesiano de dois conjuntos.

1.2.6 Produto cartesiano

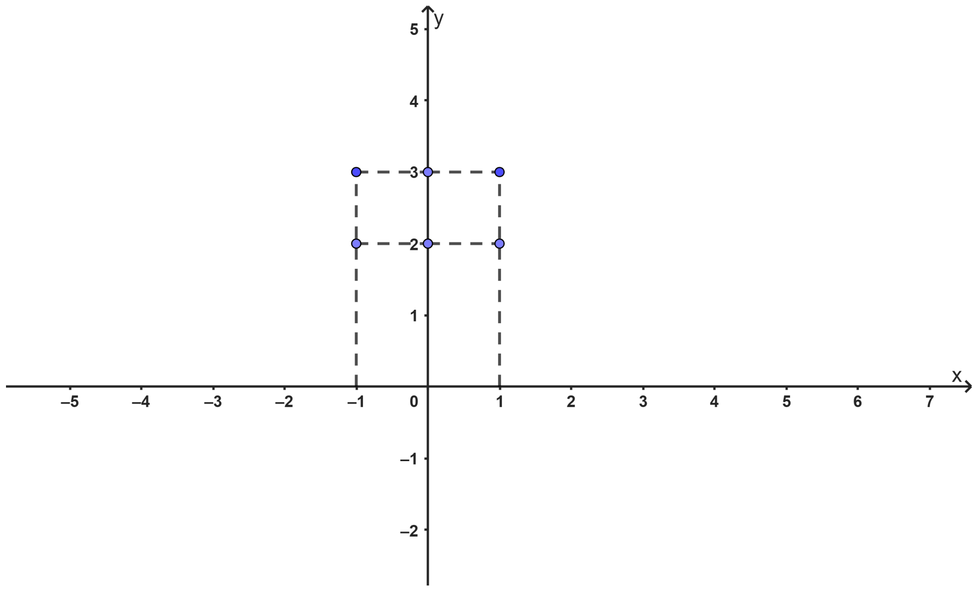
Antes de apresentarmos a definição de produto cartesiano de dois conjuntos, é importante recordar que um par ordenado $P(x, y)$ é formado pelo objeto x denominado primeira coordenada de P e pelo objeto y chamado de segunda coordenada de P. Além disso, dois pares ordenados (x, y) e (z, w) são iguais se, e somente se, $x = z$ e $y = w$. Também é importante dizer que o par ordenado (x, y) é diferente do conjunto $\{x, y\}$, pois sempre $\{x, y\} = \{y, x\}$, mas $(x, y) = (y, x)$ apenas quando $x = y$, conforme discute Lima et al. (1997). Por exemplo, o par ordenado $(2, 3)$ é diferente do par $(3, 2)$. Feita essa observação, podemos definir o produto cartesiano entre dois conjuntos não vazios A e B da seguinte maneira:

Definição 1.13. O produto cartesiano de dois conjuntos não vazios A e B, representado por $A \times B$, é o conjunto dos pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Em linguagem simbólica, temos $A \times B = \{(x, y) |\ x \in A \text{ e } y \in B\}$.

A seguir serão apresentados alguns exemplos:

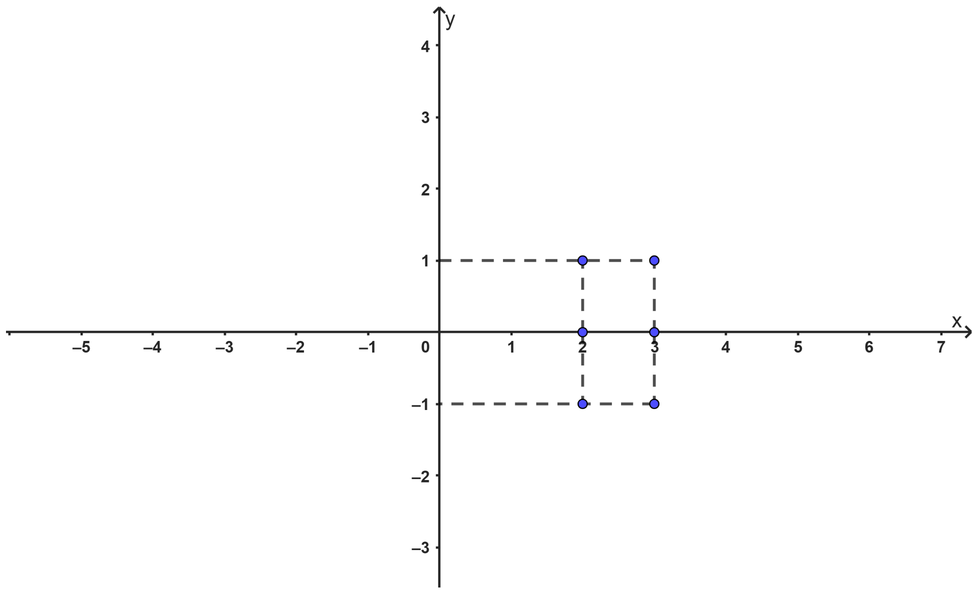
Exemplo 1.14. Sejam $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{2, 3\}$ conjuntos. Pela Definição 1.13, temos $A \times B$=$\{(-1, 2), (-1, 3), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\}$ e $B \times A$=$\{(2, -1), (2, 0), (2, 1),$ $(3, -1), (3, 0), (3, 1)\}$. Esses produtos cartesianos estão representados nas Figuras 11 e 12.

Figura 11 – Produto cartesiano $A \times B$ do Exemplo 1.14.



Fonte: Autoria própria.

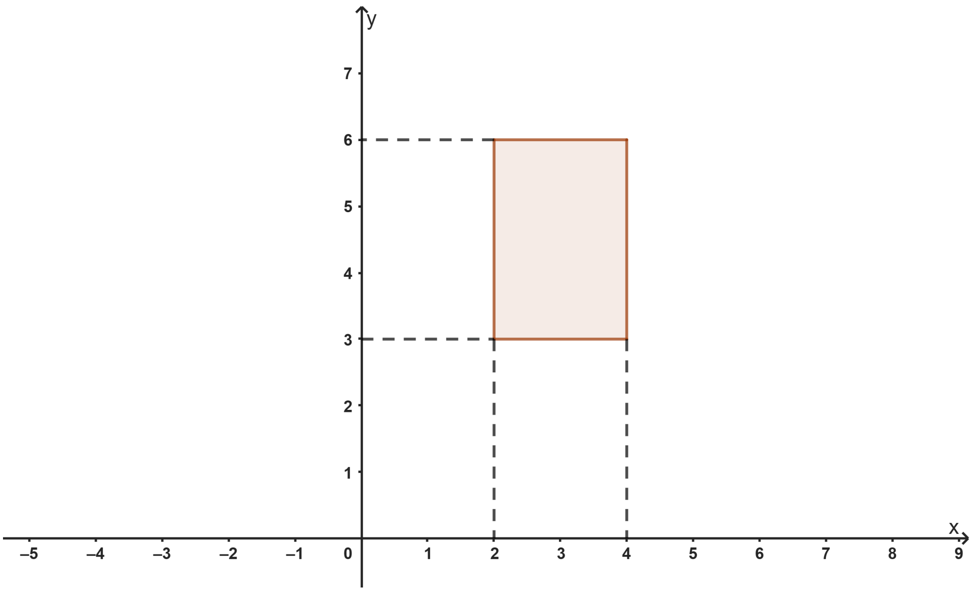
Figura 12 – Produto cartesiano $B \times A$ do Exemplo 1.14.



Fonte: Autoria própria.

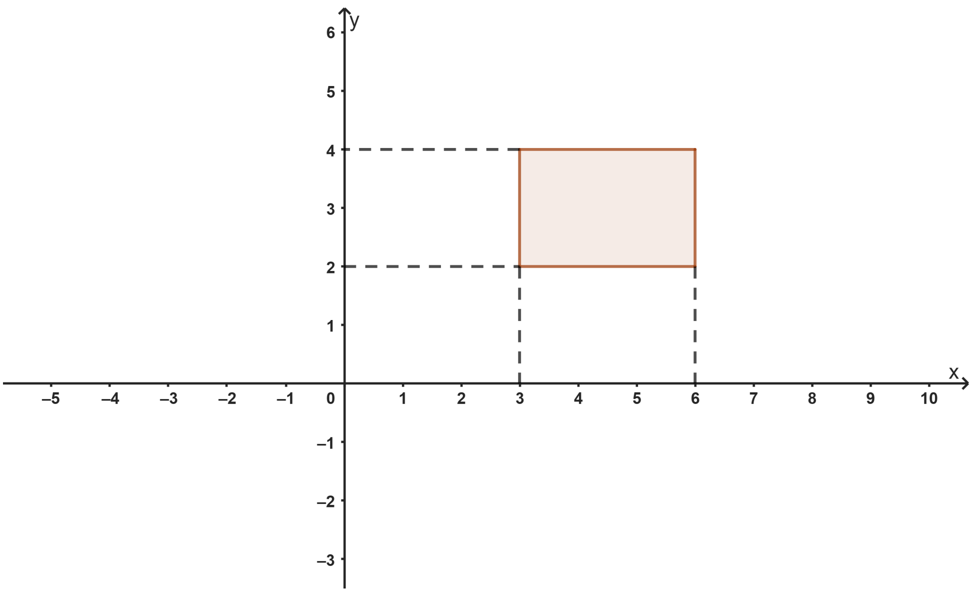
Exemplo 1.15. Considere os intervalos de números reais $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$. Desse modo, temos $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4$ e $3 \leq y \leq 6\}$ que é representado graficamente no plano cartesiano pelo conjunto de pontos de um retângulo. Perceba que $B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6$ e $2 \leq y \leq 4\}$ é representado por um retângulo diferente do anterior, como será mostrado a seguir nas Figuras 13 e 14.

Figura 13 – Produto cartesiano $A \times B$ do Exemplo 1.15



Fonte: Autoria própria.

Figura 14 – Produto cartesiano $B \times A$ do Exemplo 1.15



Fonte: Autoria própria.

Observação 1.16. Consideremos as seguintes propriedades do produto cartesiano:

- Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$. Ou seja, o produto cartesiano de dois conjuntos não possui a propriedade de comutatividade.
- Considerando dois conjuntos finitos A e B com m e n elementos respectivamente, $A \times B$ também será um conjunto finito e será composto por $m \cdot n$ elementos. Esse fato é justificado por Lima et al. (1997).
  Além disso, "se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio, então $A \times B$ é um conjunto infinito" (IEZZI, 2013, p.69).

1.2.7 Relação binária e função

.

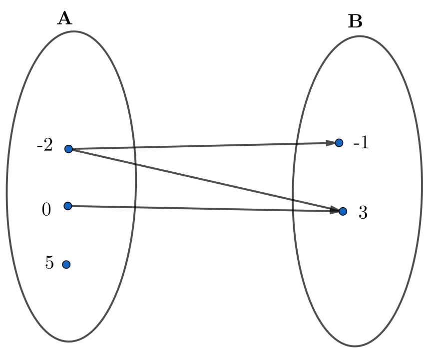
Definição 1.17. Dados dois conjuntos não vazios A e B, chamamos de relação binária R de A em B qualquer subconjunto de $A \times B$.

Desse modo, o conjunto $R \subset A \times B$ é formado pelos pares ordenados (x, y), em que o elemento $x \in A$ está associado ao elemento $y \in B$ por meio de um determinado critério de correspondência. A seguir apresentaremos um exemplo.

Exemplo 1.18. Sejam $A = \{-2, 0, 5\}$ e $B = \{-1, 3\}$ conjuntos. O conjunto $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$ é a relação R de A em B dada por $R = \{(-2, -1), (-2, 3), (0, 3)\}$. Esses são os únicos pares ordenados (x, y), com $x \in \{-2, 0, 5\}$ e $y \in \{-1, 3\}$, tais que $x < y$.

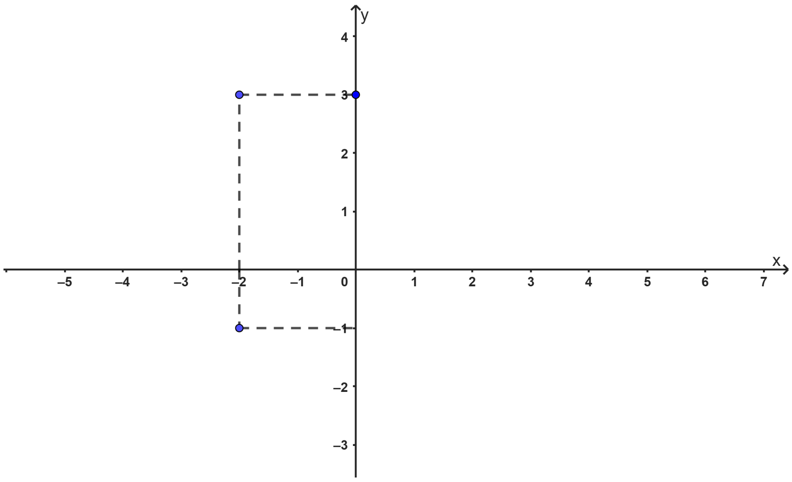
Além disso, para um par ordenado $(x, y) \in A \times B$, pode ocorrer que $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \notin R$. No exemplo anterior, $(0, 3) \in R$, mas $(5, -1) \notin R$, visto que $5 \in A$ não é menor que $-1 \in B$.

Figura 15 – Diagrama de flechas do Exemplo 1.18



Fonte: Autoria própria.

Figura 16 – Gráfico do Exemplo 1.18.



Fonte: Autoria própria.

De uma perspectiva mais rigorosa em termos matemáticos, **uma função é um caso particular de relação binária entre dois conjuntos**, conforme veremos a seguir.

Definição 1.19. Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação f de A em B recebe o nome de função de A em B quando para todo x de A existe um único y de B tal que $(x, y) \in f$.

Desse modo, “toda função é uma relação binária de A em B; portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados” (IEZZI, 2013, p.84). Ou seja, uma função f pode ser vista como um conjunto dos pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$, tais que y está associado a x por meio da função f.

Utilizaremos a notação $f : A \to B$ para dizer que f é uma função de A em B. Além disso, se $x \in A$ está associado a $y \in B$ por meio da função f, diremos que $y \in B$ é a imagem de $x \in A$ por meio da função f, e indicaremos $y = f(x)$.

Na seção 1.2.2 desse trabalho, apresentamos quatro exemplos de relações entre dois conjuntos finitos A e B, destacando os casos em que essas relações são funções de A em B. Além disso, o Exemplo 1.18, apresentado anteriormente nesta seção, não representa uma função de A em B, pois não atende às condições da Definição 1.19.

Vejamos alguns exemplos de funções:

Exemplo 1.20. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é uma função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ um único $y \in \mathbb{R}$ de modo que $y = x$. Chamamos essa f de função identidade.

Exemplo 1.21. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^3$ é uma função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ um único $y \in \mathbb{R}$ de modo que $y = x^3$.

Exemplo 1.22. $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 2^x$ é uma função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ um único $y \in \mathbb{R}$ de modo que $y = 2^x$.

1.2.8 Gráficos de funções.

A partir dos conceitos discutidos nos tópicos anteriores, definiremos agora o gráfico de uma função.

Definição 1.23. O gráfico que representa uma função $f : A \to B$, é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado por todos os pares ordenados (x, y) em que $x \in A$ e $y = f(x)$, com $y \in B$. Ou seja: $G(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$.

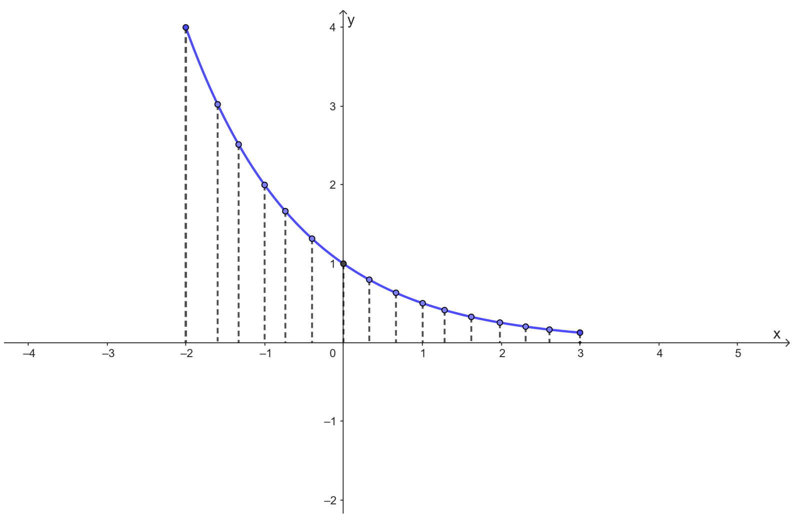
Pela definição anterior, nem todo subconjunto do produto cartesiano é o gráfico de uma função. Dizemos que $G(f) \subset A \times B$ é o gráfico de uma função f de A em B se, e somente se, para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in G(f)$, conforme discute Lima et al. (1997).

Com isto, para que a representação gráfica $G(R)$ de uma relação binária R de $A \subset \mathbb{R}$ em $B \subset \mathbb{R}$ no plano cartesiano seja a de uma função, precisamos garantir que toda reta paralela ao eixo y e que passa pelo ponto $(x, 0)$, com $x \in A$, sempre intersecte $G(R)$ em um único ponto.

A seguir serão apresentados alguns exemplos:

Exemplo 1.24. A relação f de A em $\mathbb{R}$, com $A = [-2, 3]$, representada na Figura 17, **é uma função**. Isso porque toda reta paralela ao eixo y e que passa pelo ponto $(x, 0)$, com $x \in [-2, 3]$, sempre intersecta $G(f)$ em um único ponto.

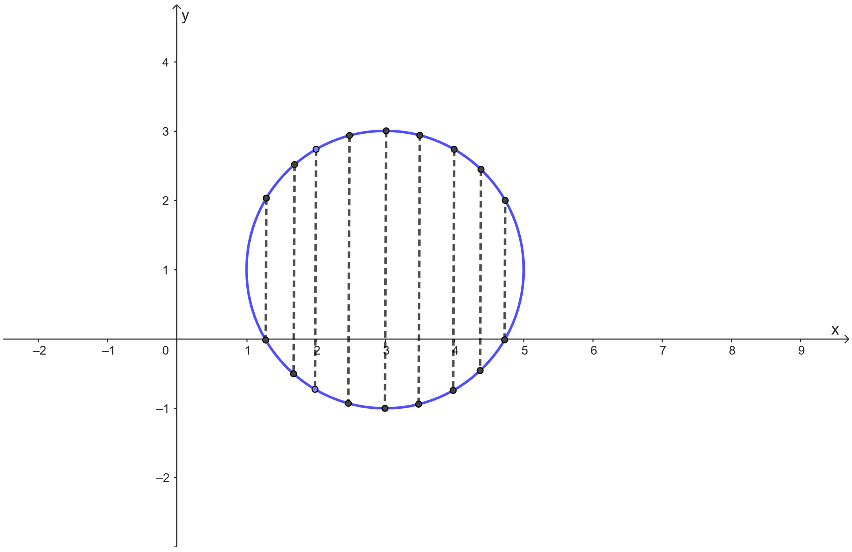
Figura 17 – Gráfico do Exemplo 1.24



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 1.25. A relação f de A em $\mathbb{R}$, com $A = [1, 5]$, representada na Figura 18, **não é uma função**, pois existem retas paralelas ao eixo y que intersectam $G(f)$ em dois pontos.

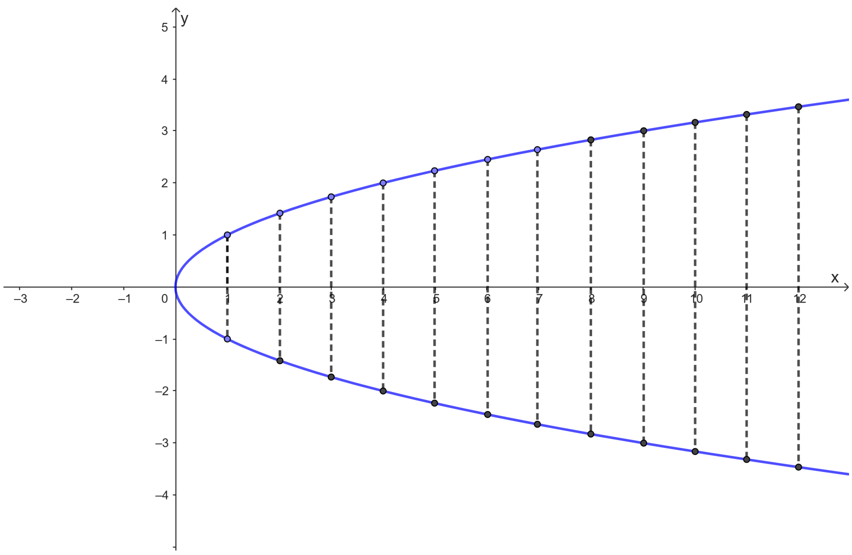
Figura 18 – Gráfico do Exemplo 1.25



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 1.26. A relação f de A em $\mathbb{R}$, com $A = [0, +\infty)$, representada na Figura 19, **não é uma função**, pois existem retas paralelas ao eixo y que intersectam $G(f)$ em dois pontos.

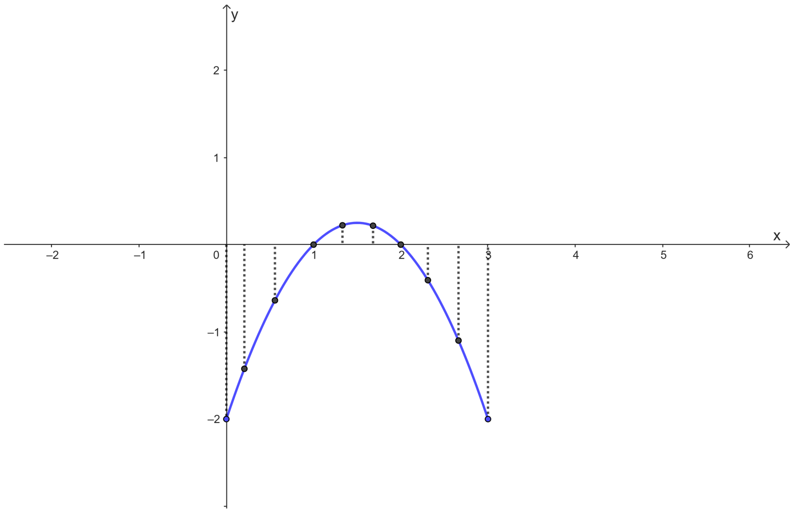
Figura 19 – Gráfico do Exemplo 1.26



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 1.27. A relação f de A em $\mathbb{R}$, com $A = [0, 3]$, representada na Figura 20, **é uma função**, pois toda reta paralela ao eixo y e que passa pelo ponto $(x, 0)$, com $x \in [0, 3]$, sempre intersecta $G(f)$ em um único ponto.

Figura 20 – Gráfico do Exemplo 1.27

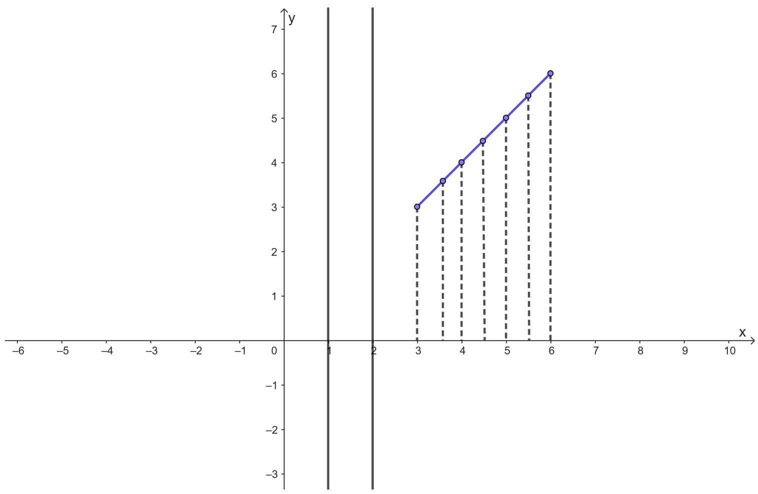


Fonte: Autoria própria.

Exemplo 1.28. A relação f de A em $\mathbb{R}$, com $A = [0, 6]$, representada na Figura 21, **não é uma função de** $A = [0, 6]$ **em** $\mathbb{R}$, pois há uma infinidade de retas verticais do tipo $x = k$, com $k \in [0, 3) \subset A$, que não intersectam o gráfico de f. As retas verticais $x = 1$ e $x = 2$ são alguns exemplos dessas retas.

Podemos observar que, considerando esse mesmo gráfico, a relação f de B em $\mathbb{R}$, com $B = [3, 6]$, é uma função de $B = [3, 6]$ em $\mathbb{R}$.

Figura 21 – Gráfio do Exemplo 1.28



Fonte: Autoria própria.

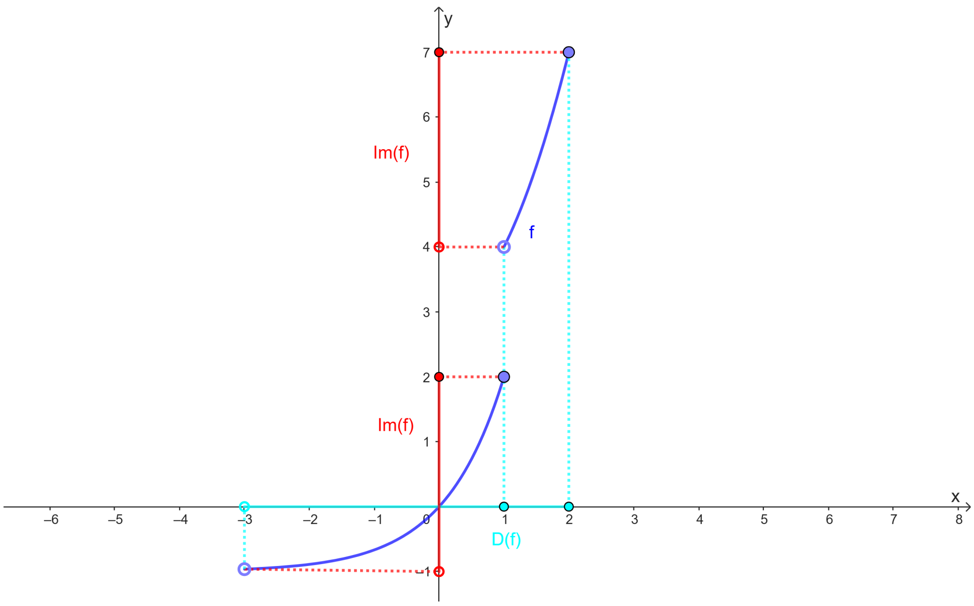
1.2.9 Domínio e imagem no gráfico de uma função.

Dado o gráfico $G(f)$ da função $f : A \to B$, o domínio de f é o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos $P(x_P, y_P) \in G(f)$. Analogamente, o conjunto imagem da função f é o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos $P(x_P, y_P) \in G(f)$.

Vejamos a seguir alguns exemplos:

Exemplo 1.29. Considere o gráfico representado na Figura 22. Projetando ortogonalmente todos os pontos $P(x_P, y_P) \in G(f)$ sobre o eixo x exibimos o conjunto $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$. Analogamente, projetando ortogonalmente todos os pontos $P(x_P, y_P) \in G(f)$ sobre o eixo y determinamos o conjunto $Im(f)$= $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2$ ou $4 < x \leq 7\}$.

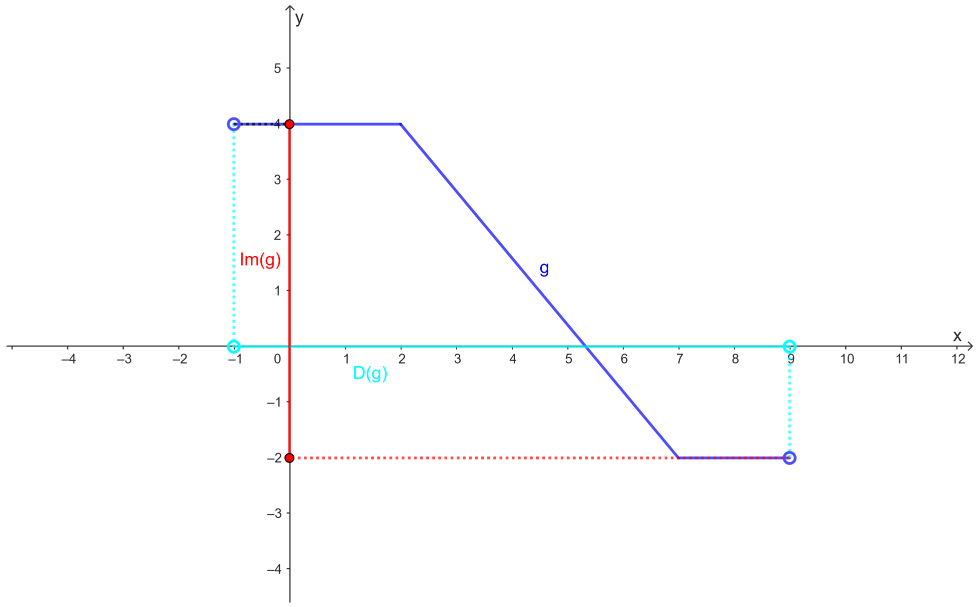
Figura 22 – Domínio e imagem no gráfico da função f



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 1.30. Observe o gráfico representado na Figura 23. Projetando ortogonalmente todos os pontos $P(x_P, y_P) \in G(g)$ sobre o eixo x exibimos o conjunto $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 9\}$, ou seja, $D(g) = (-1, 9)$. Analogamente, projetando ortogonalmente todos os pontos $P(x_P, y_P) \in G(g)$ sobre o eixo y determinamos o conjunto $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 4\}$, ou seja, $Im(g) = [-2, 4]$.

Figura 23 – Domínio e imagem no gráfico da função g



Fonte: Autoria própria.

1.2.10 Monotonicidade, estudo dos sinais e zeros da função.

1.2.10.1 Monotonicidade de uma função.

Definição 1.31. Dizemos que uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, é **crescente** em um intervalo $I \subset A$ quando, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todos $x_1, x_2 \in I$. Analogamente, dizemos que uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, é **decrescente** em um intervalo $I \subset \mathbb{A}$ quando, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, para todos $x_1, x_2 \in I$.

Também podemos definir uma função como monótona não decrescente ou monótona não crescente em um determinado intervalo, conforme veremos a seguir.

Definição 1.32. Dizemos que uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, é **monótona não decrescente** em um intervalo $I \subset A$ quando, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, para todos $x_1, x_2 \in I$. Além disso, dizemos que uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, é **monótona não crescente** em um intervalo $I \subset \mathbb{A}$ quando, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, para todos $x_1, x_2 \in I$.

Uma função f de A em $\mathbb{R}$ é dita **monótona** em um intervalo $I \subset \mathbb{A}$, quando f é crescente, ou decrescente, ou monótona não crescente ou monótona não decrescente no intervalo I, conforme discute Lima et al. (1997). Alguns exemplos serão apresentados no que segue.

1.2.10.2 Estudo dos sinais e zeros da função.

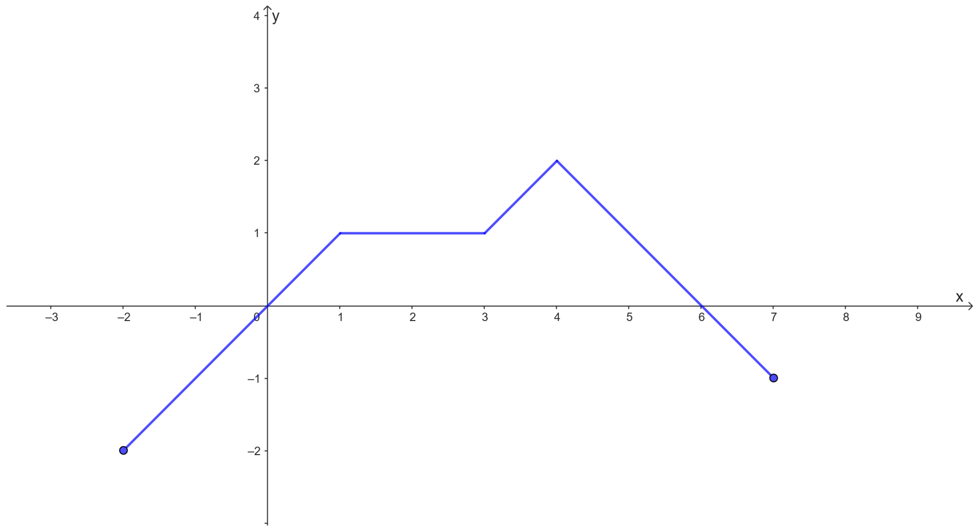
Definição 1.33. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, é **positiva** em um intervalo $I \subset A$, se $f(x) > 0$ para todo $x \in I$. Analogamente, uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, é **negativa** em um intervalo intervalo $I \subset \mathbb{A}$, se $f(x) < 0$ para todo $x \in I$. Quando $f(x_0) = 0$, para um dado $x_0 \in A$, dizemos que x_0 é um **zero** da função f.

Nesse contexto, estudar os sinais da função f consiste em determinar os intervalos em que a função f é positiva ($f(x) > 0$), e os intervalos em que a função é negativa ($f(x) < 0$).

Vejamos a seguir alguns exemplos:

Exemplo 1.34. Considere o gráfico da função $f : [-2, 7] \to \mathbb{R}$, representado na Figura 24. A função f é **crescente** nos intervalos $[-2, 1]$ e $[3, 4]$, e é **decrescente** no intervalo $[4, 7]$. Além disso, f é **monótona não decrescente** no intervalo $[-2, 4]$.

Figura 24 – Gráfico da função $f : [-2, 7] \to \mathbb{R}$



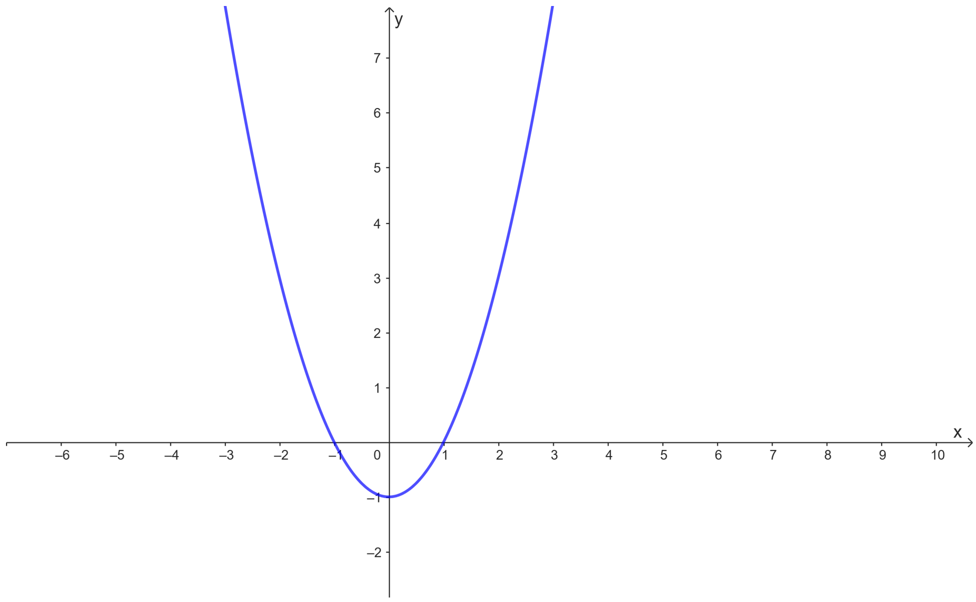
Fonte: Autoria própria.

Com relação ao estudo do sinal de f, temos $f(x) > 0$ no intervalo $(0, 6)$. E, $f(x) < 0$ em $[-2, 0) \cup (6, 7]$. Além disso, os zeros da função f são $x = 0$ e $x = 6$, pois esses são os valores de $x \in [-2, 7]$ tais que $f(x) = 0$.

Exemplo 1.35. É apresentado o gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, representado na Figura 1.37. A função g é **decrescente** no intervalo $(-\infty, 0]$, e é **crescente** no intervalo $[0, +\infty)$.

Com relação ao estudo do sinal de g, temos $g(x) > 0$ nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$. E, $g(x) < 0$ no intervalo $(-1, 1)$. Além disso, os zeros da função g são $x = -1$ e $x = 1$, pois esses são os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $g(x) = 0$.

Figura 25 – Gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Fonte: Autoria própria.

1.2.11 Função injetiva, bijetiva e sobrejetiva.

Definição 1.36. Dizemos que uma função $f : A \to B$ é **injetiva** quando, para todos $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

De modo equivalente, f é **injetiva** quando, para todos $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Exemplo 1.37. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = x^2$. Perceba que a função f é injetiva, pois:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -2x_1 + 1 = -2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

para todos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Já a função g não é injetiva, pois tomando $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, observamos que $g(1) = 1^2 = 1$ e $g(-1) = (-1)^2 = 1$. Ou seja, $g(1) = g(-1) = 1$.

É importante destacar que podemos verificar se uma função $f : A \to B$ é injetiva por meio do seu gráfico cartesiano $G(f)$. De acordo com a Definição 1.36, elementos distintos do domínio possuem imagens distintas no conjunto imagem. Sendo assim, para garantir que a função f é injetiva, basta traçar as retas horizontais da forma $y = k$, com $k \in Im(f)$, e verificar que cada uma dessas retas corta $G(f)$ em um único ponto. O Exemplo 1.40, que será apresentado abaixo, mostra como podemos avaliar a injetividade de uma função representada pelo seu gráfico cartesiano.

Definição 1.38. Dizemos que uma função $f : A \to B$ é **sobrejetiva** quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Em outras palavras, f é sobrejetiva quando $Im(f) = CD(f) = B$.

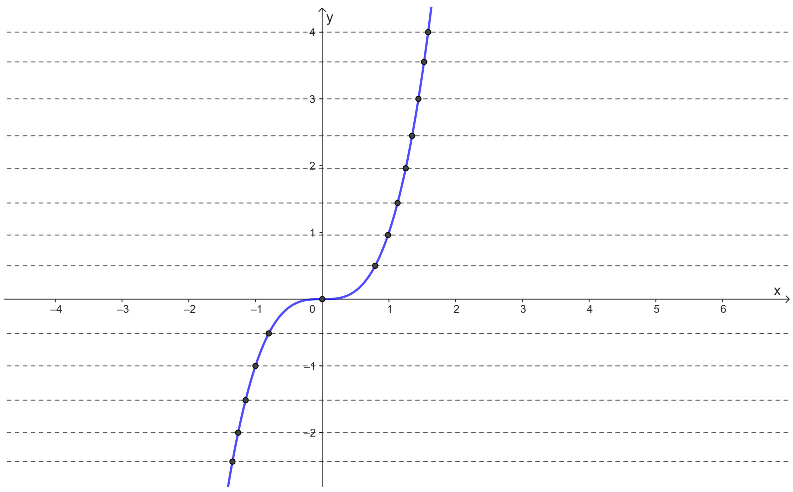
Exemplo 1.39. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções cujas leis de formação são dadas por $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 1$. A função f é sobrejetiva, pois para todo $y \in B$, existe $x = \frac{-y+1}{2} \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = y$. Ou seja, $Im(f) = CD(f) = \mathbb{R}$. Já a função g não é sobrejetiva, pois considerando $y = -1$, por exemplo, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = -1$, visto que $x^2 + 1 \geq 1$ para todo x real.

Além disso, uma função $f : A \to B$ é dita **bijetiva** quando é simultaneamente injetiva e sobrejetiva. Conforme vimos nos Exemplos 1.37 e 1.39, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2x + 1$ é bijetiva, pois é simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Vejamos a seguir alguns exemplos de como avaliar a injetividade e sobrejetividade de uma função $f : A \to B$ representada pelo seu gráfico cartesiano $G(f)$.

Exemplo 1.40. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função representada pelo gráfico cartesiano da Figura 26. Inicialmente, podemos determinar o conjunto imagem de f projetando ortogonalmente seu gráfico no eixo y, o que nos leva a concluir que $Im(f) = \mathbb{R}$. Desse modo, f é sobrejetiva, já que $Im(f) = CD(f) = \mathbb{R}$. Além disso, note que f também é injetiva, já que cada uma das retas horizontais $y = k$, com $k \in Im(f)$, corta $G(f)$ em um único ponto. Portanto, f é uma função bijetiva.

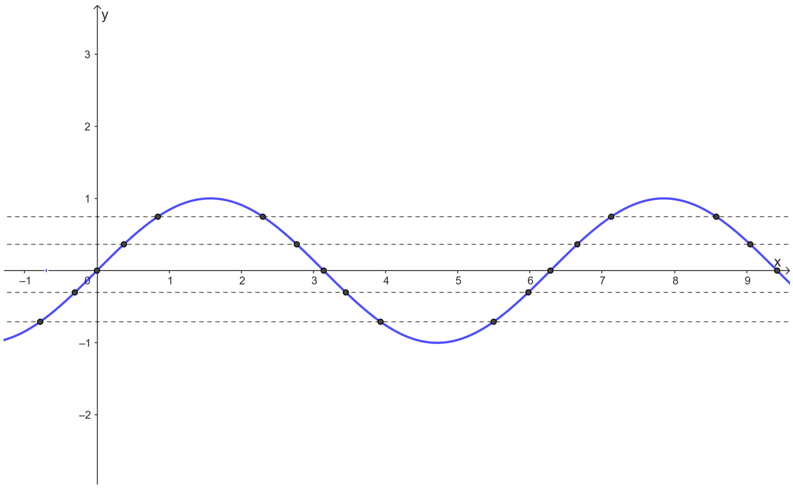
Figura 26 – Gráfico da função bijetiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 1.41. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico cartesiano está representado na Figura 27. Inicialmente note que g não é sobrejetiva, pois $Im(g) = [-1, 1]$ e $CD(g) = \mathbb{R}$. Ou seja, $Im(g) \neq CD(g)$. Além disso, g não é injetiva, já que existem retas horizontais do tipo $y = k$, $k \in Im(g)$, que intersectam o gráfico de g em mais de um ponto.

Figura 27 – Gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não injetiva e não sobrejetiva.



Fonte: Autoria própria.

1.3 A função afim

Esta seção é dedicada ao estudo das funções afins, que são fundamentais no contexto da matemática e possuem importantes aplicações no primeiro ano do Ensino Médio. Tais funções podem ser representadas por uma reta no plano cartesiano, e a simplicidade de suas propriedades facilita a compreensão de conceitos importantes, como crescimento e proporcionalidade (no caso das funções lineares), amplamente utilizados na modelagem de situações do cotidiano.

Definição 1.42. Chamamos de **função afim**, qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é dada por $f(x) = ax + b$, com a e b números reais dados e $a \neq 0$.

Exemplo 1.43. Vejamos a seguir alguns exemplos.

- $f(x) = x - 2$, em que $a = 1$ e $b = -2$;
- $g(x) = -2x + \frac{1}{2}$, em que $a = -2$ e $b = \frac{1}{2}$;
- $h(x) = -\frac{x}{3} + \sqrt{2}$, em que $a = -\frac{1}{3}$ e $b = \sqrt{2}$;
- $t(x) = \sqrt{3}x$, em que $a = \sqrt{3}$ e $b = 0$.

Vale destacar que quando o coeficiente $b = 0$, a função afim assume a forma $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, e recebe o nome de **função linear**. Ou seja, a função linear é um caso particular de função afim.

Além disso, para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, se o coeficiente $a = 0$, não estamos tratando de uma função afim, mas sim de outro tipo de função chamada de **função constante**. Mais precisamente, chamamos de função constante qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = b$ para todo x real, em que $b \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Valor inicial e taxa de variação de uma função afim.

Antes de definir os conceitos de valor inicial e taxa de variação de uma função afim, vamos introduzir a ideia de valor numérico dessa função.

O **valor numérico da função afim** $f(x) = ax + b$ para $x = x_0$, ou imagem da função afim f para $x = x_0$, é o número real expresso por $f(x_0) = ax_0 + b$.

Exemplo 1.44. Seja f uma função afim dada por $f(x) = -x + 1$. Vamos determinar o valor de $f(-1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$ e $f(\sqrt{2})$.

- $f(-1) = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$. Ou seja, $f(-1) = 2$.
- $f(0) = -0 + 1 = 1$. Daí, $f(0) = 1$.
- $f(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2}) + 1 = (\frac{-1+2}{2}) = \frac{1}{2}$. Portanto, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
- $f(1) = -1 + 1 = 0$. Daí, $f(1) = 0$.
- $f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}) + 1 = -\sqrt{2} + 1$. Logo, $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 1$.

Após a apresentação da ideia de valor numérico de uma função afim, definiremos os conceitos de valor inicial e taxa de variação para esse tipo de função.

Definição 1.45. Denominamos de **valor inicial de uma função afim**, $f(x) = ax + b$, o número real $b = f(0)$.

Podemos observar que, quando $x = 0$, $f(0) = a \cdot 0 + b = b$. Ou seja, de fato, o valor inicial da função f é dado por $b = f(0)$.

Exemplo 1.46. Sejam as funções afins $f(x) = -x - 1$, $g(x) = \frac{x}{2}$ e $h(x) = 3x + 2$. No caso da função f o valor inicial é -1, visto que $f(0) = -0 - 1 = -1$. Já para a função g, o valor inicial é 0, pois $g(0) = \frac{0}{2} = 0$. Finalmente, no caso da função h, o valor inicial é 2, já que $h(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$.

Definição 1.47. Para qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamamos de **taxa de variação média** da função f no intervalo $[x_1, x_2]$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 \neq x_2$, o número real dado por $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Exemplo 1.48. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é dada por $f(x) = x^2$. Perceba que no intervalo $[-1, 1]$ temos a taxa de variação média dada por $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1^2-(-1)^2}{1+1} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$. Já no intervalo $[0, 2]$, por exemplo, a taxa de variação média é dada por $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{2^2-0^2}{2} = \frac{4-0}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Ou seja, nesse caso a taxa de variação média pode mudar de acordo com o intervalo escolhido.

Exemplo 1.49. Agora, considere a função afim cuja lei de formação é dada por $f(x) = 2x + 1$. Seja $[x_1, x_2]$ um intervalo, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 \neq x_2$. Nesse caso, a taxa de variação média no intervalo é dada por $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{2x_2+1-(2x_1+1)}{x_2-x_1} = \frac{2x_2+1-2x_1-1}{x_2-x_2} = \frac{2\cdot(x_2-x_1)}{x_2-x_2} = 2$. Ou seja, a taxa de variação média é constante para qualquer intervalo $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$. Esse fato é verdadeiro para qualquer função afim, conforme veremos a seguir no Teorema 1.50.

Teorema 1.50. *A taxa de variação de uma função afim $f(x) = ax + b$ é constante para qualquer intervalo $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ e corresponde ao número real $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 < x_2$.*

Demonstração. Considere a função afim $f(x) = ax + b$ e $[x_1, x_2]$ um intervalo de números reais, com $x_1 < x_2$. A taxa de variação da função afim f no intervalo $[x_1, x_2]$ é dada por:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a \qquad \square$$

Vejamos alguns exemplos de como determinar a taxa de variação de funções afins.

Exemplo 1.51. Considere as funções afins $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -x + 3$. A taxa de variação da função f é igual a 2. Já no caso da função g, a taxa de variação é -1. Obviamente, em ambos os casos a taxa de variação corresponde ao coeficiente a da lei de formação $f(x) = ax + b$, conforme discutido anteriormente.

Exemplo 1.52. Também podemos determinar a taxa de variação da função afim $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = ax + b$, com $h(0) = 3$ e $h(-1) = 4$. Nesse caso, basta lembrar que a taxa de variação de uma função afim é dada por $a = \dfrac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{h(-1) - h(0)}{-1 - 0} = \dfrac{4 - 3}{-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$. Ou seja, a taxa de variação da função h é igual a -1.

Além disso, é importante destacar que a recíproca do Teorema 1.50 é verdadeira, conforme veremos a seguir. Isto é, se uma função real possui taxa de variação constante, então essa função é afim. Dessa forma, ter taxa de variação constante é uma caracterização das funções afins.

Teorema 1.53. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função com taxa de variação constante, então f é uma função afim.*

Demonstração. Seja x real com $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Note que, como a taxa de variação de f é constante, então:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Logo,

$$(f(x) - f(0))(x - 1) = x(f(x) - f(1)).$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, temos

$$f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$$

Sendo assim, pondo $a = f(1) - f(0)$ e $b = f(0)$, obtemos $f(x) = ax + b$, para $x \neq 0$ e $x \neq 1$.

Além disso, resolvendo $\begin{cases} a = f(1) - f(0) \\ b = f(0) \end{cases}$, concluímos que:

$$f(1) = a + b = a \cdot 1 + b$$

e

$$f(0) = b = a \cdot 0 + b.$$

Ou seja, a lei de formação também vale para os casos $x = 1$ e $x = 0$.

Portanto, f é uma função afim.

□

1.3.2 Gráfico da função afim.

Nesta seção vamos mostrar que o gráfico de uma função afim é uma reta. Para isso, começaremos demonstrando que toda função afim é injetiva.

Teorema 1.54. *Toda função afim é injetiva.*

Demonstração. De fato, consideremos a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, daí:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Portanto, toda função afim é injetiva.

□

Teorema 1.55. *O gráfico de uma função afim* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = ax + b$, *com* $a \neq 0$, *é uma reta oblíqua aos eixos* x *e* y.

Demonstração. De fato, sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ três pontos distintos pertencentes ao gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$, ou seja, x_A, x_B e x_C são números reais distintos. Como toda função afim é injetiva, podemos concluir que $f(x_A)$, $f(x_B)$ e $f(x_C)$ são distintos.

Já que A, B, C pertencem à $G(f)$, então:

$$f(x_A) = y_A = ax_A + b \tag{1.1}$$

$$f(x_B) = y_B = ax_B + b \tag{1.2}$$

$$f(x_C) = y_C = ax_C + b \tag{1.3}$$

Subtraindo a equação 1.1 da equação 1.2:

$$y_B - y_A = a(x_B - x_A) \tag{1.4}$$

Subtraindo a equação 1.2 da equação 1.3:

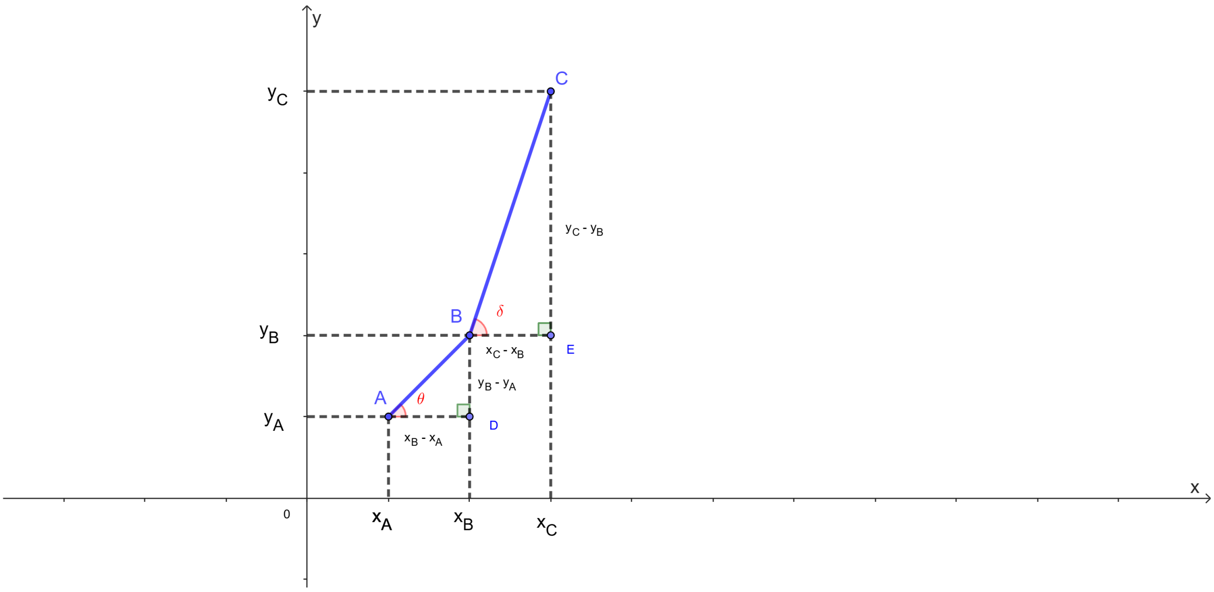
$$y_C - y_B = a(x_C - x_B) \tag{1.5}$$

Dividindo a equação 1.4 pela equação 1.5, obtemos:

$$\frac{y_B - y_A}{y_C - y_B} = \frac{(x_B - x_A)}{(x_C - x_B)} \tag{1.6}$$

Agora, vamos considerar os ângulos θ e δ formados pelas retas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e o eixo x, como representado a seguir na Figura 28.

Figura 28 – Gráfico auxiliar para a demonstração do Teorema 1.55



Fonte: Autoria própria.

Podemos observar que os triângulos retângulos ADB e BEC são semelhantes pelo critério LAL, pois:

- $\hat{D} = \hat{E} = 90°$
- $\frac{CE}{BD} = \frac{BE}{AD}$, já que pela equação 1.6 temos $\frac{y_B - y_A}{y_C - y_B} = \frac{(x_B - x_A)}{(x_C - x_B)}$.

  Uma vez que os triângulos ADB e BEC são semelhantes, podemos concluir que θ $= \delta$. Sendo assim, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são retas paralelas que passam por B, logo são iguais. Por conseguinte, A, B e C são pontos colineares. Isso conclui a demonstração que o gráfico de uma função afim é uma reta.

  Considerando quaisquer dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ da função afim f, temos que $x_A \neq x_B$. Observe que, se $x_A = x_B$ para dois pontos A e B arbitrários e distintos do plano, a reta formada seria vertical, o que violaria a definição de função. Além disso, como a função afim f é injetiva, temos $y_A \neq y_B$. Portanto, o gráfico da função afim é uma reta não paralela a nenhum dos eixos x e y.

  Observação 1.56. É possível demonstrar que a recíproca do Teorema 1.55 é verdadeira, ou seja, toda reta não paralela aos eixos é o gráfico de uma função afim. Essa discussão é apresentada em Lima et al. (1997, p.91).

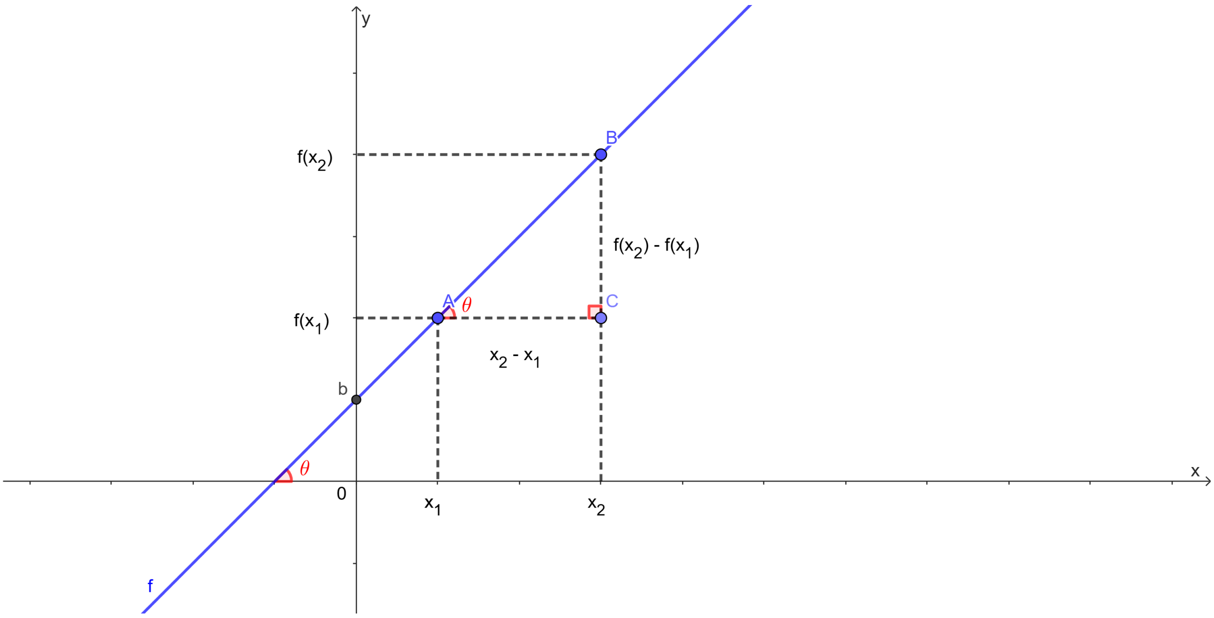
□

1.3.3 Coeficientes angular e linear da reta.

Conforme vimos na seção 1.3.1, a taxa de variação da função afim $f(x) = ax + b$ é dada pelo coeficiente a. Esse coeficiente também é chamado de coeficiente angular ou declividade da reta r que representa o gráfico da função afim f, e está associado à inclinação dessa reta com relação ao eixo x.

Pelo triângulo ABC da Figura 29, representada abaixo, temos $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = tg\ \theta$. Em que θ é o ângulo formado entre a reta r e o eixo x (ou qualquer reta paralela a ele), medido a partir do eixo x no sentido anti-horário. Denominamos o ângulo θ de inclinação da reta r.

Figura 29 – Coeficientes angular e linear da reta r

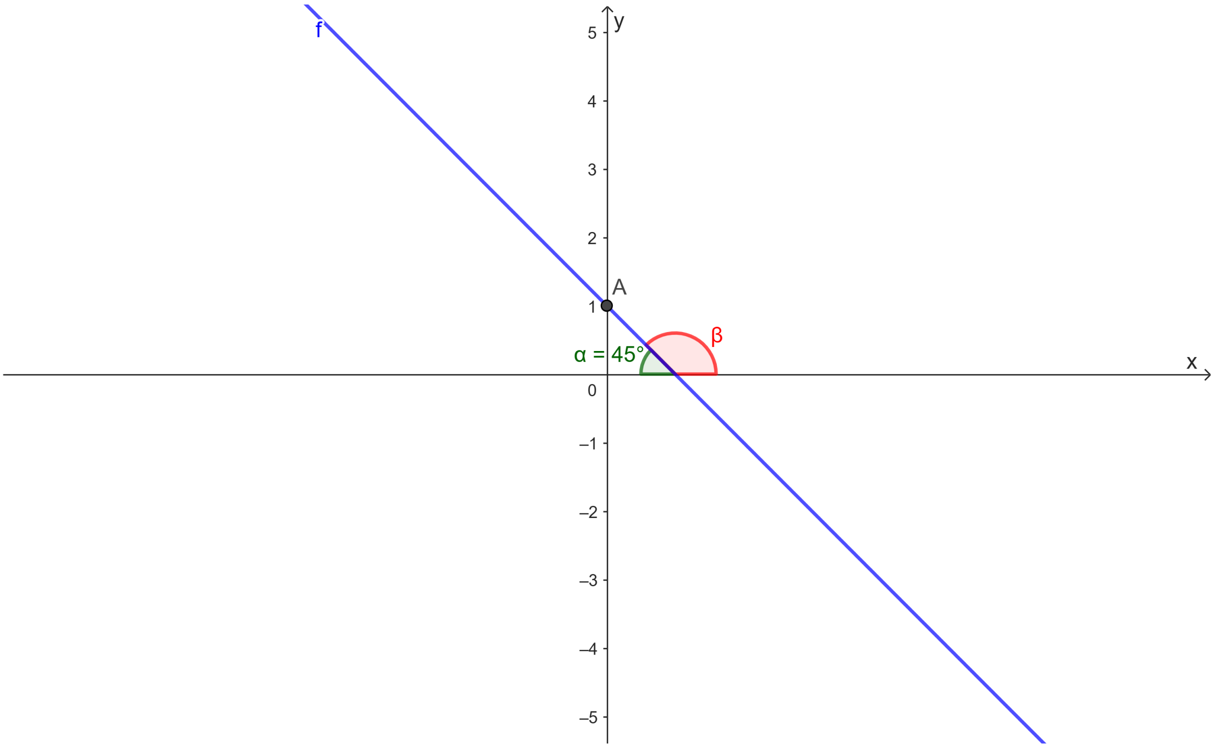


Fonte: Autoria própria.

Já o coeficiente b da função afim $f(x) = ax + b$ é chamado de coeficiente linear da reta r, e corresponde à ordenada do ponto que essa reta corta o eixo y, visto que $f(0) = a \cdot 0 + b = b$.

Exemplo 1.57. Considere uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, cujo gráfico está representado na Figura 30.

Figura 30 – Gráfico do Exemplo 1.57



Fonte: Autoria própria.

Qual é a inclinação da reta que representa o gráfico da função f? Qual é a lei de formação dessa função?

Inicialmente, podemos perceber que β é a inclinação da reta que representa o gráfico de f, pois é o ângulo formado entre a reta e o eixo x, medido a partir do eixo x no sentido anti-horário. Além disso, já que α e β são ângulos suplementares, e $\alpha = 45°$, segue que $\beta = 135°$.

Daí, determinaremos o coeficiente angular da reta:

$$a = tg135° = -tg45° = -1.$$

Para determinação do coeficiente linear, observamos que $G(f)$ corta o eixo y no ponto $A = (0, 1)$. Assim, temos $b = 1$. Essa conclusão é imediata, visto que $f(0) = a \cdot 0 + b = 1$.

Ou seja, o coeficiente angular é $a = -1$ e o coeficiente linear é $b = 1$. Assim, a lei de formação da função f é dada por $f(x) = -x + 1$.

1.3.4 Zero de uma função afim.

Definição 1.58. Considere uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que $f(x) = ax + b$ com a e b números reais e $a \neq 0$. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x_0) = 0$, então x_0 é chamado de zero da função afim f.

Sendo x_0 o zero de uma função afim, ou seja, $f(x_0) = 0$, então $ax_0 + b = 0$, donde concluímos que $x_0 = -\frac{b}{a}$. Reciprocamente, se $x_0 = -\frac{b}{a}$, verificamos facilmente que x_0 é o zero da função afim f.

Ou seja, toda função afim tem um único zero que é dado pelo número real $x_0 = -\frac{b}{a}$. Geometricamente, o zero da função afim corresponde à abscissa do ponto $(-\frac{b}{a}, 0)$, em que o gráfico da função f corta o eixo x.

Para determinar o zero da função afim, basta resolver a equação do primeiro grau dada por $f(x) = 0$. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.59. Vamos determinar os zeros reais das funções afins abaixo.

- $f(x) = -x + 1$.

  Note que, $f(x) = 0 \Rightarrow -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Ou seja, $x = 1$ é o zero da função f.

- $g(x) = 2x + 3$

  Observe que, $g(x) = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$. Ou seja, $x = -\frac{3}{2}$ é o zero da função g.

- $h(x) = -\frac{5x}{2} + 3$

  Perceba que, $h(x) = 0 \Rightarrow -\frac{5x}{2} + 3 = 0 \Rightarrow 3 = \frac{5x}{2} \Rightarrow 6 = 5x \Rightarrow \frac{6}{5} = x$. Ou seja, $x = \frac{6}{5}$ é o zero da função h.

- $t(x) = 3x + \frac{\sqrt{3}}{4}$

  Observe que, $t(x) = 0 \Rightarrow 3x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \Rightarrow 3x = -\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{12}$. Ou seja, $x = -\frac{\sqrt{3}}{12}$ é o zero da função t.

1.3.5 Crescimento e decrescimento da função afim.

Teorema 1.60. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim com $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Se $a > 0$, então f é crescente. Por outro lado, se $a < 0$, então f é decrescente.*

Demonstração. Sejam x_1, x_2 números reais com $x_1 < x_2$. Pelo Teorema 1.50, a taxa de variação da função afim f é constante e igual a a, dessa forma:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Daí,

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1).$$

Uma vez que $x_1 < x_2$, caso $a > 0$ então $a(x_2 - x_1) > 0$, daí:

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) > 0$$

Logo,

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ou seja, nesse caso f é crescente.

Analogamente, já que $x_1 < x_2$, caso $a < 0$ então $a(x_2 - x_1) < 0$, daí:

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) < 0$$

Logo,

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Ou seja, nesse caso f é decrescente. Isso conclui nossa demonstração.

□

1.3.6 Estudo do sinal da função afim

Nesta seção, faremos o estudo do sinal da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Ou seja, avaliaremos para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ teremos $f(x) < 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) > 0$.

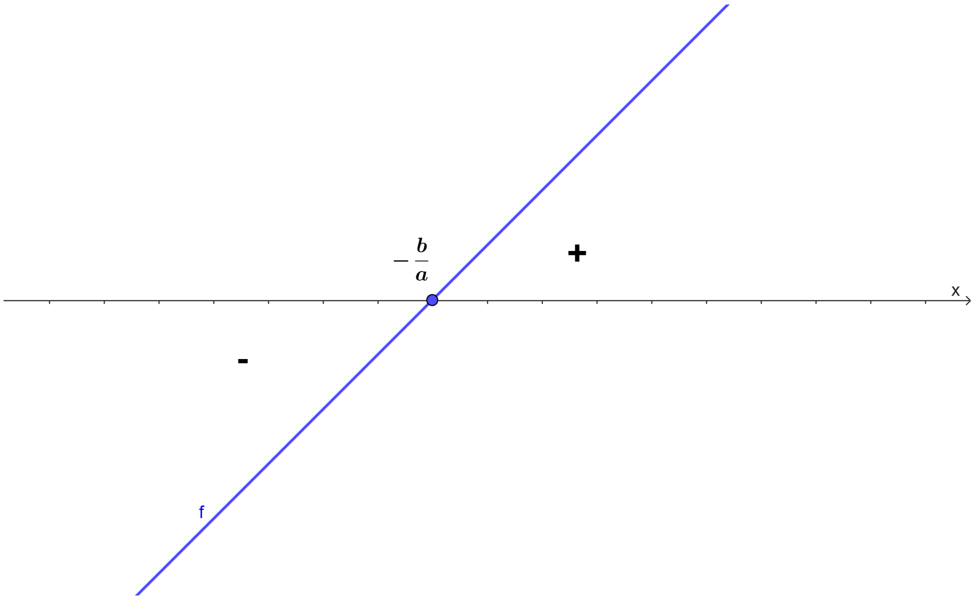
Como já sabemos que $x_0 = -\frac{b}{a}$ é o zero da função afim f, ou seja, é o valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, analisaremos para quais valores reais de x tem-se $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$. Para isso, vamos considerar dois casos, quando f é crescente ($a > 0$), e quando f é decrescente ($a < 0$).

- Caso $a > 0$.

  Pelo Teorema 1.60, se $a > 0$ então a função afim f é crescente. Além disso, sabemos que o número real $x_0 = \frac{-b}{a}$ é o zero da função afim f, e corresponde à abscissa do ponto que a reta corta o eixo x. A partir dessas informações, podemos concluir que, nesse caso, $f(x) < 0$ quando $x < x_0$, e $f(x) > 0$ quando $x > x_0$, com $x \in \mathbb{R}$.

  Graficamente, podemos usar a representação da Figura 31 para facilitar a compreensão desse resultado.

Figura 31 – Estudo do sinal da função afim crescente ($a > 0$)



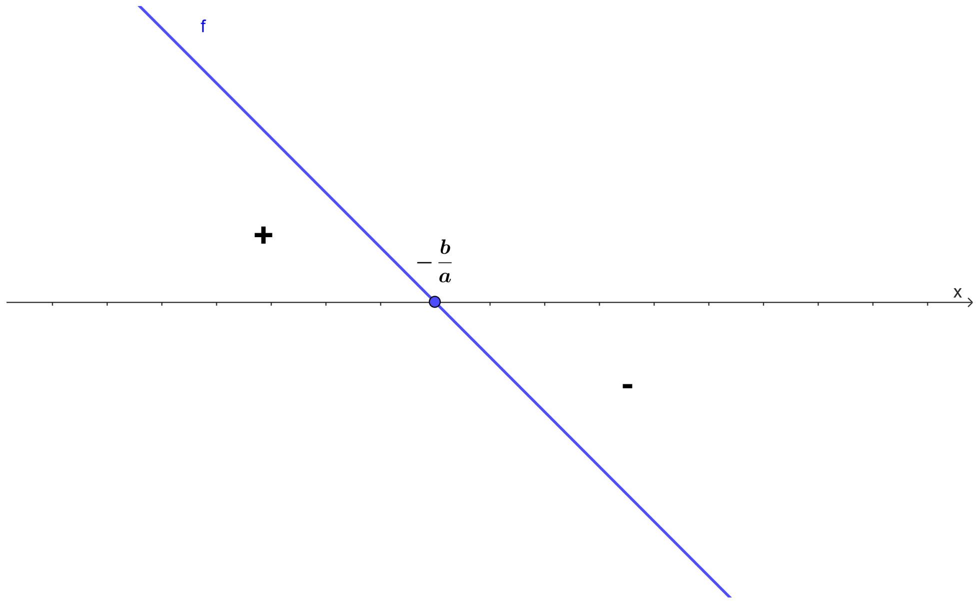
Fonte: Autoria própria.

- Caso $a < 0$.

  Analogamente, pelo Teorema 1.60, se $a <$ a função afim f é decrescente. Além disso, sabemos que o número real $x_0 = \frac{-b}{a}$ é o zero da função afim f, e corresponde à abscissa do ponto que a reta corta o eixo x. A partir dessas informações, podemos concluir que $f(x) > 0$ quando $x < x_0$, e $f(x) < 0$ quando $x > x_0$, com $x \in \mathbb{R}$.

  Graficamente, podemos usar a representação da Figura 32 para facilitar a compreensão desse resultado.

Figura 32 – Estudo do sinal da função afim decrescente ($a < 0$)



Fonte: Autoria própria.

A seguir apresentaremos um exemplo que envolve o estudo do sinal da função afim.

Exemplo 1.61. João gasta 100 reais para produzir 40 sanduíches que ele pretende vender na frente da escola que estuda por 4 reais cada. Quantos sanduíches João terá que vender para ter lucro no fim da venda?

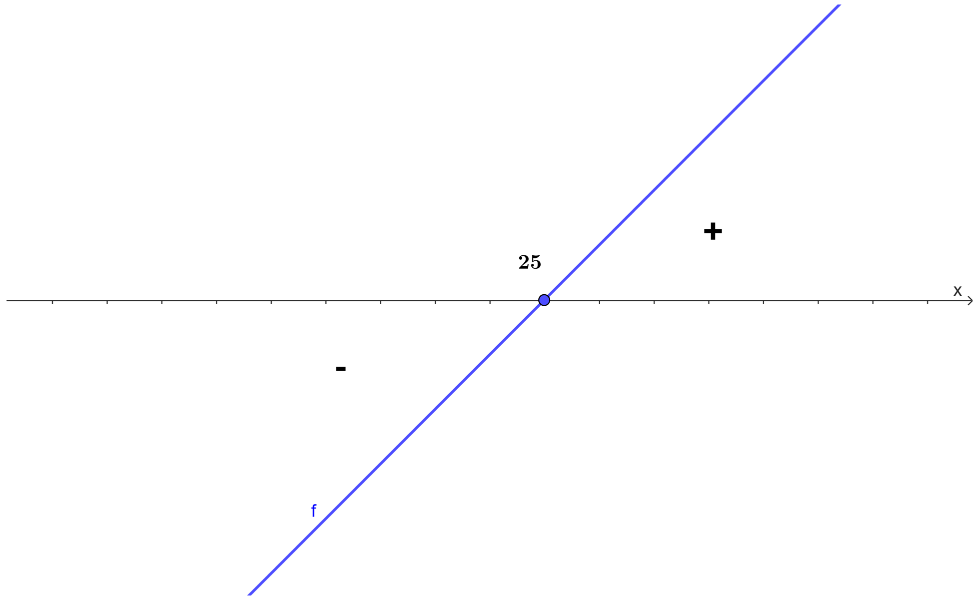
Inicialmente, observamos que o resultado final das vendas é dado pela receita menos o custo. Além disso, o resultado final das vendas é uma função da quantidade x de sanduíches vendidos, e a lei de formação dessa função é $f(x) = 4x - 100$.

Agora, podemos determinar para quais valores de x temos $f(x) < 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) > 0$.

Já que $f(x) = 4x - 100$, temos $a = 4$ e $b = -100$. Daí, como $a > 0$, a função f é crescente. Além disso, sabemos que o zero de f é dado por $x = -\frac{b}{a} = -(\frac{-100}{4}) = 25$. Obviamente, também poderíamos ter determinado o zero de f resolvendo a equação $f(x) = 0$.

Assim, a representação gráfica do problema é ilustrada na Figura 33.

Figura 33 – Gráfico do Exemplo 1.61



Fonte: Autoria própria.

Portanto, temos $f(x) < 0$ quando $x < 25$, nesse caso haverá prejuízo. Além disso, $f(x) = 0$ quando $x = 25$, nesse caso não haverá lucro nem prejuízo. E, $f(x) > 0$ quando $x > 25$, nesse caso haverá lucro.

Sendo assim, para que João tenha lucro, precisa vender mais de 25 sanduíches. Ou seja, o conjunto solução do problema é $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 25\}$.

Evidentemente, de modo equivalente, podemos determinar a solução desse problema resolvendo a inequação $f(x) > 0$ no conjunto dos naturais.

Nesse caso, teríamos:

$$4x - 100 > 0 \Rightarrow 4x > 100 \Rightarrow x > 25$$

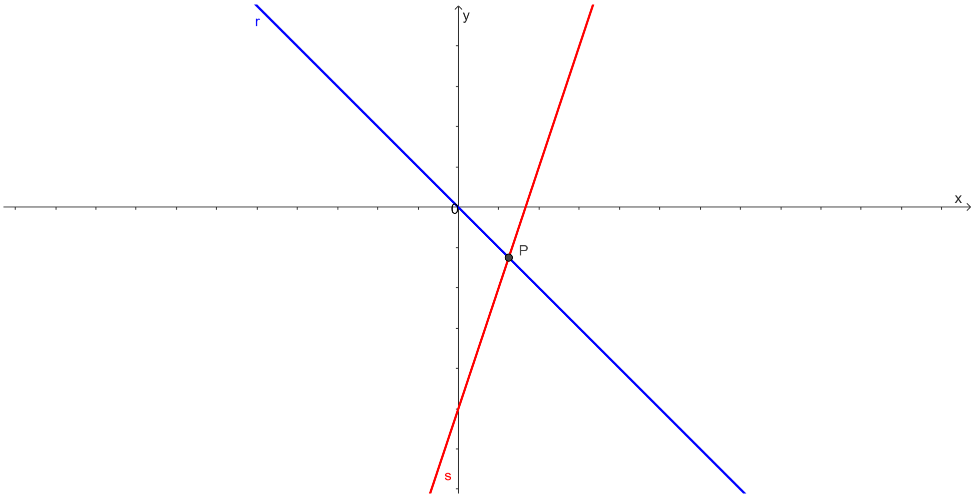
Ou seja, $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 25\}$.

1.3.7 Interseção entre retas concorrentes

Sejam as funções afins f e g, representadas respectivamente pelas retas $r : y = ax+b$ e $s : y = cx + d$ (com $a \neq 0$ e $c \neq 0$), concorrentes em um ponto $P(x_P, y_P)$.

Já que $P(x_p, y_p)$ pertence às retas r e s, suas coordenadas devem satisfazer simultaneamente às equações dessas retas. Sendo assim, de um modo geral, o ponto $P(x_P, y_P)$ é a solução do sistema linear formado pelas equações das retas concorrentes r e s.

Figura 34 – Interseção entre as retas concorrentes r e s



Fonte: Autoria própria.

A seguir, será apresentado um exemplo:

Exemplo 1.62. A solução do sistema formado pelas equações das retas $r : y = -x + 4$ e $s : y = 3x - 8$, fornece as coordenadas do ponto $P(x_P, y_P)$ que é o ponto de interseção dessas retas.

Resolvendo o sistema de equações $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$, temos:

Utilizando o método da comparação, $-x + 4 = 3x - 8 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$.

Substituindo $x = 3$ na equação $y = -x + 4$, temos $y = -3 + 4 = 1$. Ou seja, $y = 1$.

Portanto, a solução do sistema de equações é dada pelo ponto $P(3, 1)$, que é o ponto de interseção das retas r e s.

1.3.8 Função linear e proporcionalidade.

Para explorar a conexão entre função linear e proporcionalidade, vamos retomar o Exemplo 1.3. Esse exemplo mostra a relação entre o tempo x (em horas) e a distância y (em quilômetros) percorrida por um motociclista a 80 km/h, representada pela função $f(x) = 80 \cdot x$. A Tabela 9 apresenta essa relação.

Tabela 9 – Distância em função do tempo

Tempo (em horas)	Distância (em quilômetros)
0,5	40
1	80
1,5	120
2	160
$\vdots$	$\vdots$
x	$80x$
$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Autoria própria.

Podemos observar que, ao dobrarmos o valor de x o valor correspondente de y também dobra. Ao triplicarmos o valor de x, o valor correspondente de y também triplica, e assim por diante. Desse modo, dizemos que as grandezas x e y são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade k é dada pela razão $\frac{y}{x}$, para $x \neq 0$, considerando um par de valores correspondentes.

Conforme indicado na Tabela 9, $k = \frac{40}{0{,}5} = \frac{80}{1} = \frac{120}{1{,}5} = \frac{160}{2} = \ldots = \frac{800}{10} = \ldots = 80$.

De forma geral, uma função linear do tipo $y = ax$, com $a > 0$, serve como modelo matemático para representar a relação entre grandezas diretamente proporcionais. Nesse contexto, as grandezas x e y são consideradas diretamente proporcionais, e o coeficiente a da função linear é dado por $a = \dfrac{y}{x} = k$. Ou seja, o coeficiente a da função linear corresponde à constante de proporcionalidade k.

1.3.9 Funções definidas por mais de uma sentença

Uma função f pode ser expressa por diversas sentenças abertas, sendo que cada uma delas está associada a um domínio D_i contido no domínio de f, conforme discute Iezzi (2013).

Nesta seção iremos analisar a Tabela do Imposto de Renda, que pode ser representada por uma função definida por mais de uma sentença. No nosso estudo identificaremos as formas algébrica e gráfica dessa função, seu domínio de validade, imagem e monotonicidade.

Exemplo 1.63. Considere a Tabela 10, usada para o cálculo do imposto de renda a ser pago pelos contribuintes no mês de março de 2024. Seja x a renda bruta de um contribuinte, o imposto a ser pago é representado pela função $I(x)$. Para calcular o imposto, o contribuinte deve multiplicar sua renda bruta pela alíquota correspondente e subtrair a parcela dedutível do valor obtido. Além disso, a função I deve ser contínua, a fim de evitar que contribuintes em diferentes faixas de renda sejam prejudicados ou beneficiados de forma inadequada, como no caso da transição entre a faixa isenta e a de 7,5 %, onde a dedução de 169,44 reais impede saltos no gráfico.

Tabela 10 – Incidência mensal, a partir de fevereiro de 2024.

Base de Cálculo (R$)	Alíquota (%)	Dedução (R$)
Até 2.259,20	-	-
De 2.259,21 até 2.826,65	7,5	169,44
De 2.826,66 até 3.751,05	15	381,44
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	662,77
Acima de 4.664,68	27,5	896,00

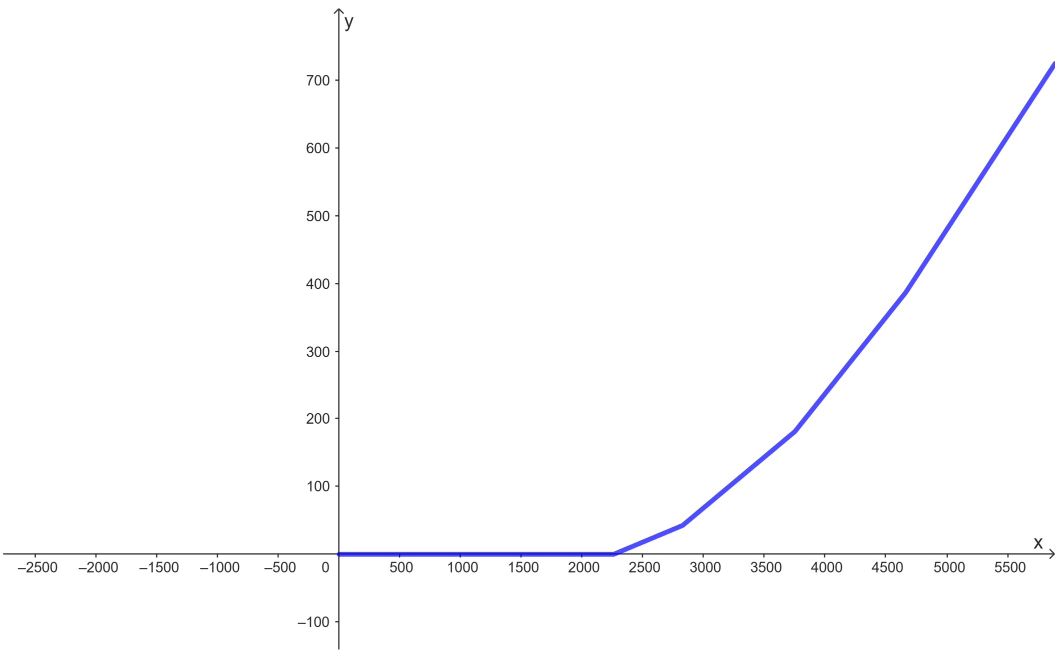
Fonte: (FEDERAL, 2024).

Dessa maneira, temos a função $I : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ representada algebricamente por:

$$I(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 2.259,20 \\ 0,075 \cdot x - 169,44, & \text{se } 2.259,21 \leq x \leq 2.826,65 \\ 0,15 \cdot x - 381,44, & \text{se } 2.826,66 \leq x \leq 3.751,05 \\ 0,225 \cdot x - 662,77, & \text{se } 3.751,06 \leq x \leq 4.664,68 \\ 0,275 \cdot x - 896,00, & \text{se } x > 4.664,68 \end{cases}$$

Apresentaremos a seguir a representação gráfica da função I, conforme ilustrado na Figura 35.

Figura 35 – Gráfico da função I.



Fonte: Autoria própria.

Concluímos identificando o domínio, a imagem e a monotonicidade de I.

Observamos que $D(I) = Im(I) = [0, +\infty)$.

Além disso, com base nas informações fornecidas, é evidente que a função I é monótona não decrescente em todo o seu domínio $D(I)$.

2 Sequência Didática

Neste capítulo iremos definir a metodologia da pesquisa, caracterizando o tipo de pesquisa realizada, o público participante e as etapas da sequência didática que foi aplicada.

2.1 Caracterização da pesquisa

Considerando que esse trabalho de pesquisa consiste na elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática para o ensino da função afim, em que o pesquisador e os participantes estão envolvidos de um modo colaborativo a fim de compreender os impactos positivos da utilização das metodologias ativas no processo de ensino-aprendizagem, o nosso objeto de estudo possui características de uma pesquisa-ação.

A pesquisa-ação é classificada com base nos procedimentos técnicos utilizados e se caracteriza pela interação entre os participantes da situação investigada e os pesquisadores. Além disso, de acordo com Thiollent (2022), esse tipo de pesquisa apresenta uma base empírica que é concebida e realizada em associação com a resolução de um problema coletivo, em que os participantes e os pesquisadores estão envolvidos de maneira colaborativa ou participativa.

2.2 Público participante

A pesquisa foi realizada em uma turma de quarenta e cinco alunos do 1° ano do Ensino Médio, em uma Escola de Referência do Ensino Médio do estado de Pernambuco, localizada no município de Olinda-PE. Essa escola foi escolhida, devido ao fato do pesquisador ser professor dessa instituição e ter o desejo de contribuir com o desenvolvimento e aprimoramento das práticas pedagógicas nesta unidade de ensino.

2.3 Coleta e análise de dados

A coleta e análise de dados dessa pesquisa foram feitas a partir da realização dos questionários e atividades descritos nesse capítulo, a fim de avaliar o engajamento e o desenvolvimento dos alunos durante a aplicação desta sequência didática.

Após a aplicação da sequência didática, foi realizado um estudo comparativo quantitativo dos resultados dos questionários Pré-teste e Pós-teste, com a finalidade de avaliar mudanças nas percepções e conhecimentos dos alunos. Também foram analisados o engajamento, a participação e o desempenho dos alunos na realização das atividades. Nas próximas seções detalharemos a estrutura das etapas que compõe a sequência didática.

2.4 Pré-teste

A aplicação do pré-teste individual, disponível no Anexo A, auxiliou o professor na compreensão do nível de conhecimento dos alunos no início do curso ministrado para um melhor direcionamento do trabalho pedagógico.A partir dessa avaliação, foi possível identificar quais das habilidades abordadas nesse teste os alunos já possuíam, mesmo antes da aplicação da sequência didática.

O Pré-teste é composto por 6 questões de múltipla escolha que foram retiradas do SAEPE e ENEM, e estão disponíveis em CAEd (2024) e INEP (2024) . Cada questão tem o objetivo de verificar se os estudantes apresentam determinadas habilidades, baseadas na BNCC e na Matriz de Referência do SAEPE.

Apresentaremos a seguir quais são as habilidades principais trabalhadas em cada uma das questões que compõe o pré-teste:

- **Questão 1:** investigar relações entre duas grandezas, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de uma função afim.
- **Questão 2:** determinar a representação algébrica de uma função afim a partir do seu gráfico.
- **Questão 3:** reconhecer a expressão algébrica que representa uma função afim a partir de uma tabela.
- **Questão 4:** compreender a relação existente entre o ponto de interseção de duas ou mais retas concorrentes com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.
- **Questão 5:** determinar a representação gráfica de uma função afim a partir da sua forma algébrica.
- **Questão 6:** identificar a lei de formação da função afim apresentada a partir de dois pontos dados

2.5 Sequência Didática

De acordo com (ZABALA, 1998), uma sequência didática é definida como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

Nesse sentido, a organização do trabalho pedagógico por meio de atividades sequenciais planejadas para o desenvolvimento de habilidades específicas possibilita uma melhor intervenção dos professores. Isso permite a criação de diversas estratégias e o uso de recursos didáticos voltados para os diferentes perfis de aprendizagem, ampliando o repertório docente e favorecendo o aprendizado de todos.

Nesta seção, apresentaremos a estrutura de uma sequência didática que foi aplicada a uma turma de quarenta e cinco alunos do primeiro ano do Ensino Médio em uma escola pública de Pernambuco. O objetivo principal é promover o desenvolvimento das habilidades descritas na BNCC e no Currículo de Pernambuco, relacionadas ao estudo da função afim. Além disso, serão propostas estratégias diversificadas de ensino, visando possibilitar uma aprendizagem participativa, criativa e autônoma.

2.5.1 Informações gerais

- Etapa de Ensino: 1° Ano do Ensino Médio.
- Área do Conhecimento: Matemática e suas Tecnologias.
- Unidade temática (BNCC): Números e Álgebra.

2.5.2 Conteúdos prévios à implementação da sequência didática

Os conteúdos descritos a seguir foram trabalhados com os alunos antes da aplicação da sequência didática.

- Noções de conjuntos; conjuntos numéricos; operações e problemas com números reais; revisão sobre equação do primeiro grau e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas.
- Introdução ao estudo das funções: a noção intuitiva de função; definição de função; domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função; estudo do domínio de uma função real; estudo do plano cartesiano; gráfico de uma função; sinais, crescimento/decrescimento e zeros de uma função real; breve revisão sobre os conceitos introdutórios básicos referentes ao estudo da função afim para realização do pré-teste.

2.5.3 Conteúdos trabalhados na sequência didática.

- Estudo da função afim: explorando situações iniciais que envolvem relações entre duas grandezas por meio da função afim; definição de função afim; representação algébrica; valor inicial e taxa de variação de uma função afim; gráfico da função afim; coeficientes angular e linear da reta; crescimento e decrescimento da função afim; zero de uma função afim; interseção entre retas concorrentes; função linear e proporcionalidade.

2.5.4 Habilidades da BNCC.

As habilidades presentes nos códigos (EM13MAT302), (EM13MAT401), (EM13MAT404), (EM13MAT501), (EM13MAT510) e (EM13MAT101) da BNCC, que estão relacionadas a essa sequência didática, foram descritas detalhadamente na Seção 1.1

2.5.5 Objetivos de aprendizagem.

Os objetivos de aprendizagem descritos a seguir foram elaborados com base nas habilidades da BNCC e na Matriz de Referência do SAEPE, referentes ao estudo da função afim.

- Investigar relações entre duas grandezas, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de uma função afim.
- Determinar a representação algébrica de uma função afim a partir do seu gráfico ou vice-versa.
- Interpretar geometricamente os coeficientes angular e linear da função afim.
- Identificar a lei de formação da função afim apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e seu coeficiente angular.
- Reconhecer a expressão algébrica que representa uma função afim a partir de uma tabela.
- Compreender a relação existente entre o ponto de interseção de duas ou mais retas concorrentes com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.
- Entender as relações existentes entre função linear e proporcionalidade.
- Criar e resolver situações-problema envolvendo função afim.

2.5.6 Recursos educacionais.

Quadro branco; marcadores para quadro branco; computador; projetores digitais; livro didático; fichas de exercícios impressas e aplicativos (Canva, Geogebra, Padlet, Wordwall, WhatsApp).

A seguir disponibilizaremos os links de acesso aos softwares e aplicativos utilizados nesta sequência didática.

- Canva: Aplicativo usado para criar posts em mídias sociais, apresentações, dentre outros materiais visuais. No nosso caso, utilizamos para elaboração de mapas mentais.

  <https://www.canva.com/pt_br/>

- GeoGebra: É um software matemático que possibilita a criação de gráficos, figuras geométricas e outros recursos visuais. Ele combina diferentes áreas da matemática em um ambiente de aprendizagem interativo e prático.

  <https://www.geogebra.org/classic?lang=pt>

- Padlet: Plataforma online utilizada para a criação de murais colaborativos.

  <https://padlet.com/>

- Wordwall: É uma plataforma online que facilita a criação de atividades e jogos educativos, oferecendo templates prontos no site, como quizzes, caça-palavras, jogo da memória e outros jogos interativos.

  <https://wordwall.net/pt>

- WhatsApp: Este aplicativo foi utilizado para facilitar a comunicação entre o professor e os alunos por meio da criação de um grupo. Os alunos esclareceram dúvidas nesse ambiente, além de terem trocado informações para a realização das atividades.

  <https://www.whatsapp.com/?lang=pt_BR>

2.5.7 Descrição do curso ministrado

O curso foi composto de nove encontros, cada um deles com duração de 1 hora e 40 minutos.

2.5.7.1 Encontro 1: Aplicação do pré-teste

- Duração: 1 hora e 40 minutos.

Na primeira etapa da aula, foi realizada a aplicação de um pré-teste individual para toda a turma, disponibilizado no Anexo A. Os objetivos e a estrutura desta avaliação estão descritos na Seção 2.4. (50 min).

Proposta de atividade remota

Após a realização da avaliação diagnóstica individual, o professor criou um mural colaborativo no Padlet e disponibilizou materiais teóricos, exercícios e vídeos sobre função afim, para que os alunos estudassem previamente para os próximos encontros. Esses materiais serviram de base para o desenvolvimento das aulas presenciais, otimizando o processo de ensino, que foi focado na discussão dos objetos de aprendizagem estudados, no esclarecimento das dúvidas e na realização de atividades práticas.

Além disso, o professor organizou a turma em grupos de até oito pessoas e apresentou uma atividade remota, que foi disponibilizada no Padlet. Cada grupo elaborou um *mapa mental* no app Canva sobre o estudo da função afim e resolveu as questões indicadas pelo professor.

O *mapa mental* é uma técnica utilizada para organizar informações e conceitos de forma visual e hierárquica, auxiliando na compreensão do tema estudado. Essa ferramenta "parte de uma ideia central, conectando ideias secundárias a partir de palavras ou frases curtas, tendo como objetivo desenvolver visualmente o raciocínio sobre determinado assunto" (CAVALCANTI; SILVA, 2023, p.108). O propósito da atividade a seguir é garantir que os estudantes tenham um contato prévio com os materiais selecionados, a fim de possibilitar o bom funcionamento da metodologia ativa conhecida como *sala de aula invertida.*

1. Elabore um mapa mental no aplicativo Canva que aborde os principais tópicos relacionados ao estudo da função afim, com base na leitura dos materiais sugeridos e na visualização dos vídeos.

2. Após a elaboração do mapa mental, resolva o seguinte exercício.

   Seja f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 2x + 4$. Determine:

   a) Os valores dos coeficientes angular e linear da reta que representa o gráfico da função f.

   b) Os valores de $f(-2)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ e $f(2)$.

   c) O zero da função f.

   d) As coordenadas do ponto que o gráfico de f corta o eixo y.

   e) Esboce o gráfico da função f sinalizando os interceptos com os eixos x e y.

Cada grupo foi orientado a modificar a lei de formação da função f, adaptando a atividade de forma específica para cada grupo. Essa abordagem permitiu explorar diferentes funções afins e suas propriedades.

Orientações finais

O final da aula foi reservado para que os alunos pudessem tirar dúvidas referentes à primeira atividade remota sugerida pelo professor e para que iniciassem a leitura dos materiais divulgados no ambiente virtual. (50 minutos)

Observação 2.1. Cada atividade concluída nesta sequência didática foi entregue ao professor para correção, seguida de uma discussão coletiva e feedback, a fim de contribuir para o desenvolvimento dos estudantes.

2.5.7.2 Encontro 2: Sala de aula invertida

- Duração: 1 hora e 40 minutos.

O professor iniciou este encontro discutindo o material que foi disponibilizado previamente aos alunos e esclarecendo as dúvidas. Também foram apresentados exemplos práticos e exercícios relacionados aos tópicos abordados e, em seguida, foi feita a correção coletiva da atividade remota proposta no encontro anterior.

Durante esse encontro, foi utilizado o software GeoGebra para analisar o gráfico da função afim e interpretar geometricamente os coeficientes por meio da ferramenta "controle deslizante". Para mais informações, consulte o vídeo Controles Deslizantes do GeoGebra no Celular, disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=dofJ9421UFM>. (1 hora e 40min)

Observação 2.2. Os alunos foram incentivados a participar ativamente da discussão e do desenvolvimento dos tópicos da aula, em colaboração com o professor. Para facilitar essa interação, serão sugeridas a seguir algumas perguntas que foram utilizadas ao longo da aula, estimulando a participação dos estudantes.

- O que você entende por função afim?
- Você consegue listar exemplos de duas grandezas que se relacionam por meio de uma função afim?
- Qual é a fórmula que representa a lei de formação de uma função afim? Dê exemplos e identifique os coeficientes "a" e "b".
- Qual é o gráfico cartesiano que representa uma função afim? Como você esboçaria o gráfico dessa função?
- Você compreende qual é a interpretação geométrica dos coeficientes "a" e "b" da função afim $f(x) = ax + b$? Utilize o GeoGebra para realizar essa investigação.

2.5.7.3 Encontro 3: Resolução de exercícios

- Duração: 1 hora e 40 minutos.

No início deste encontro, o professor realizou uma correção coletiva das questões do pré-teste no quadro, esclarecendo dúvidas e discutindo diferentes métodos de resolução dos problemas. (50 minutos)

O professor também resolveu com os estudantes uma ficha com seis exercícios sobre função afim, disponibilizada no Anexo B . Além dessas questões, o professor sugeriu atividades do livro didático para serem realizadas em casa, expandindo o leque de problemas propostos. (50 minutos)

2.5.7.4 Encontro 4: Dinâmica de rotação por estações

- Objetivo: Compreender a relação existente entre o ponto de interseção de duas ou mais retas concorrentes com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.
- Duração: 1 hora e 40 minutos.

Esta atividade combina a metodologia de *aprendizagem por investigação* com a estratégia de *rotação por estações*. Os alunos foram desafiados a formular hipóteses, coletar e analisar dados e, por meio desses procedimentos investigativos, desenvolver a capacidade de interpretar e apresentar soluções para o problema proposto, conforme discute Cavalcanti e Silva (2023).

Inicialmente, os alunos foram organizados em grupos de até oito pessoas, podendo ser os mesmos do Encontro 1. Em seguida, o professor instruiu os alunos sobre a dinâmica da aula e apresentou uma situação-problema relacionada ao estudo da função afim (disponibilizada no Anexo C). Foram dados 10 minutos para que os alunos registrassem individualmente os conhecimentos e ideias que já possuíam sobre o problema proposto. (10 minutos)

Com o objetivo de auxiliar na resolução deste desafio, os grupos passaram por 4 estações organizadas pelo professor. Em cada uma dessas estações, os estudantes realizaram uma determinada atividade, criando um circuito em que cada grupo percorreu, passando sucessivamente pelas estações até voltar ao início do percurso.

- Estação 1: Ler as páginas sinalizadas de um livro didático e elencar as informações mais relevantes em tópicos que auxiliem na resolução do problema inicial. (15 minutos)

- Estação 2: Registrar as informações principais sobre o conteúdo de um vídeo que fornece conhecimentos importantes para a resolução da situação-problema proposta no início da aula. (15 minutos)
- Estação 3: Resolver três exercícios elementares relacionados com a habilidade abordada na situação-problema inicial. Nessa estação, os alunos podem consultar o livro didático. (15 minutos)
- Estação 4: Representar geometricamente a situação-problema através do uso do GeoGebra e estabelecer relações com a solução algébrica do desafio proposto. (15 minutos)

Após a finalização do circuito e realização dos registros em cada estação, os grupos tiveram 15 minutos para elaborar uma resposta final para o desafio. (15 minutos)

Nos 15 minutos restantes da aula o professor apresentou uma solução para o desafio proposto. Posteriormente os trabalhos foram corrigidos pelo professor e os alunos receberam um feedback sobre as soluções apresentadas. (15 minutos)

Observação 2.3. O detalhamento das atividades de cada estação encontra-se no Anexo C.

2.5.7.5 Encontro 5: Criação de situações-problema a partir de imagens motivadoras

- Objetivos: Criar e resolver problemas envolvendo função afim; compreender as relações existentes entre função linear e proporcionalidade; explorar a relação entre as grandezas posição e tempo no movimento uniforme por meio da função afim.
- Duração: 1 hora e 40 minutos.

Inicialmente, os alunos se organizaram nos mesmos grupos utilizados no encontro anterior. Cada grupo recebeu uma imagem que serviu de motivação para a criação de uma situação-problema relacionada aos tópicos estudados sobre função afim. Após a criação do problema, cada grupo propôs uma solução e registrou no caderno. Os problemas criados foram apresentados à turma, e o professor realizou as devidas correções das questões propostas.

No final desse processo, o professor apresentou situações-problema que foram criadas por ele a partir das imagens, com o objetivo de trabalhar habilidades da BNCC. As imagens motivadoras e os problemas apresentados pelo professor estão no Anexo D. (1h e 40 minutos)

2.5.7.6 Encontros 6, 7 e 8: Oficina de Jogos Matemáticos.

- Objetivo: Explorar de forma criativa e lúdica conceitos matemáticos relacionados ao estudo da função afim, a partir da utilização de diversos recursos para a criação de jogos matemáticos.
- Duração: três encontros, cada um com 1 hora e 40 minutos.

Nos Encontros 6, 7 e 8, os alunos participaram de uma *oficina para a construção de jogos matemáticos.* Essa abordagem buscou facilitar a compreensão dos alunos e tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo.

A utilização do jogo no ensino da matemática

A importância do jogo como um elemento que possibilita a evolução cognitiva e intelectual do ser humano é algo que se observa durante todo nosso processo de desenvolvimento, seja na forma de brincadeiras durante a infância, ou na forma de jogos idealizados e aplicados com uma finalidade específica na formação escolar. Além disso, a aplicação dos jogos matemáticos na sala de aula surge como uma proposta de inclusão no ambiente escolar, unindo todos os alunos na construção do aprendizado, rejeitando o pensamento de que a matemática é uma disciplina aprendida e utilizada por poucos.

> "Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um 'aprender' mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um 'aprender' que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade". (FIORENTINI; MIORIM et al., 1990, p.4)

Para que o jogo seja praticado com uma finalidade específica no ambiente escolar, como no caso da aprendizagem de conteúdos de matemática, esta atividade deve ser planejada e monitorada para que se consiga atingir o objetivo idealizado. Segundo Godoy e Menegazzi (2011), o professor deve ter a consciência do objetivo que pretende atingir com a utilização deste recurso, deve conhecer bem o jogo antes de aplicá-lo, bem como estabelecer regras e estar atento ao comportamento e desenvolvimento dos alunos durante a atividade. Além disso, deve ser dada preferência a realização de atividades que envolvam dois ou mais alunos, com a finalidade de promover um ambiente de interação social, onde seja respeitada a diferença e a individualidade do outro.

A eficácia da utilização do jogo matemático como elemento facilitador do processo de ensino aprendizagem da matemática é demonstrada por diversos professores e pesquisadores. De acordo com uma pesquisa feita por Melo e Sardinha (2009), realizada durante os estágios do 8º período do Curso de Licenciatura em Matemática, durante a aplicação dos jogos matemáticos na turma de 6ª serie, foi observado que num prazo curto de tempo os alunos conseguiram se apropriar de alguns conceitos matemáticos fundamentais para a compreensão dos conteúdos da disciplina.

A inclusão dessa prática interativa e motivadora no ambiente escolar, além de possibilitar uma aula mais atrativa e dinâmica, desenvolve no aluno a sua capacidade de pensar, criar, arriscar e buscar soluções inovadoras para a resolução de problemas. Nesse contexto, há diversas opções de jogos matemáticos para estudo e aplicação em sala de aula. Alguns autores se dedicam na elaboração de livros didáticos que abordam este tema, como é o caso de Smole et al. (2008), responsável pela criação do livro Cadernos do Mathema: Ensino Médio: Jogos de matemática de 1º a 3º ano.

Na ausência de jogos e materiais prontos específicos para um determinado conteúdo, o professor deve utilizar sua criatividade para elaboração de novos jogos que venham a ser aperfeiçoados com os alunos na sala de aula, promovendo uma atmosfera de aproximação e troca de conhecimentos entre os alunos e o professor.

Encontro 6: Proposta da oficina e definição do jogo

No início deste encontro, o professor apresentou a proposta da oficina, dividiu a turma em grupos e discutiu com os alunos as ideias iniciais para a criação de jogos matemáticos que buscassem desenvolver habilidades específicas relacionadas ao estudo da função afim. Nessa etapa, os grupos consultaram materiais e livros recomendados pelo professor, além de realizarem pesquisas na internet em busca de possibilidades de jogos relacionados ao tema proposto. (50 minutos)

Além disso, cada grupo definiu com o professor o jogo que foi desenvolvido, as regras e os materiais necessários para sua confecção, bem como os objetivos de aprendizagem que foram trabalhados por meio do jogo proposto. (50 minutos)

Observação 2.4. Os objetivos de aprendizagem foram sugeridos pelo professor, e estão descritos na seção 2.5.5. O livro didático recomendado é de autoria de Smole et al. (2008).

Encontro 7: Desenvolvimento do projeto

Nesta etapa, foi realizada a criação das cartas, tabuleiros, dados e outras peças dos jogos. Para a confecção, foram utilizados materiais como papelão, EVA, cartolina, pincéis, tinta guache, itens impressos, entre outros. Além disso, o professor orientou os grupos na elaboração das perguntas relacionadas ao estudo da função afim, que foram utilizadas nos jogos. (1 h e 40 minutos)

É importante destacar que os alunos também criaram jogos virtuais em plataformas digitais, como o *Wordwall*.

Encontro 8: Ajustes finais e apresentação dos trabalhos

Neste encontro, os alunos identificaram os pontos de melhoria, tanto em relação à clareza das regras quanto aos ajustes de confecção e funcionamento do jogo, realizando as adequações necessárias para a finalização dos trabalhos, com a orientação do professor. (40 minutos)

No período final da aula cada grupo apresentou seu jogo, explicando as regras e as habilidades abordadas. Após as apresentações, todos os grupos jogaram os jogos uns dos outros, e o professor realizou uma avaliação das criações. (1 hora)

Para ampliar o alcance deste projeto, sugerimos que todas as turmas do 1° ano do Ensino Médio da escola participassem desta oficina, expandindo o tema para o estudo de funções afins, quadráticas e exponenciais. Além disso, propusemos a realização de uma culminância com a apresentação dos jogos para todos os alunos da escola, através de uma Feira de Jogos Matemáticos

2.5.7.7 Encontro 9: Realização do pós-teste individual

- Duração: 1 hora e 40 minutos.

Na primeira etapa da aula, foi realizada a aplicação de um pós-teste individual para toda a turma, disponível no Anexo E. Os objetivos e a estrutura desta avaliação estão descritos na Seção 2.6. (50 minutos)

Após a finalização do pós-teste individual, o professor sorteou alguns estudantes para apresentarem no quadro as soluções encontradas para os problemas dessa avaliação. Esse momento foi de extrema importância, já que permitiu discutir os possíveis caminhos para a resolução dos problemas propostos, além de possibilitar o desenvolvimento de habilidades essenciais como comunicação, pensamento crítico e criatividade. (50 minutos)

2.5.8 Avaliação.

A avaliação ocorreu durante toda a aplicação da sequência didática. Foram utilizados diferentes instrumentos para avaliar as competências e habilidades desenvolvidas pelos alunos, como a participação nas atividades e discussões, a apresentação de trabalhos em grupo e a realização das tarefas propostas.

Os estudantes também foram avaliados a partir da evolução comparativa dos resultados do pré-teste e do pós-teste, aplicados ao longo desta sequência didática. O pré-teste auxiliou o professor na compreensão do nível de conhecimento dos alunos no início do curso ministrado para um melhor direcionamento do trabalho pedagógico. Já o pós-teste, possibilitou a análise das possíveis lacunas de aprendizagem no período final do curso.

2.6 Pós-teste

Com o intuito de possibilitar uma melhor comparação dos resultados das duas provas, o pós-teste também foi composto por seis questões retiradas do SAEPE e ENEM. Além disso, as questões dessa prova envolveram as mesmas habilidades que foram apresentadas no pré-teste.

A aplicação do pós-teste individual, disponível no Anexo E, possibilitou identificar quais habilidades foram desenvolvidas pelos estudantes após a aplicação da sequência didática. Além disso, o professor pôde analisar as possíveis lacunas de aprendizagem dos estudantes no período final do curso. Essa avaliação também foi importante para a análise comparativa dos resultados dos alunos nas provas, realizada com base no pré-teste e no pós-teste aplicados na sequência didática.

3 Resultados e Discussões

Iniciaremos este capítulo apresentando uma discussão sobre os aspectos mais relevantes observados no desenvolvimento das atividades que constituem a sequência didática. O foco será nas principais atividades fundamentadas em metodologias ativas, nas quais os alunos desempenham o papel de protagonistas de seu próprio processo de aprendizagem.

No final do capítulo, realizaremos uma análise comparativa entre os resultados do pré-teste e pós-teste, aplicados no início e no término desta sequência didática, respectivamente.

3.1 Dinâmica de rotação por estações.

Nesta seção, apresentaremos as soluções dos problemas propostos no Encontro 4 (Seção 2.5.7.4), relacionados à dinâmica de rotação por estações. Além disso, faremos uma análise da aplicação dessa estratégia de aprendizagem ativa, destacando os resultados obtidos, tanto em termos de desempenho quanto de participação dos estudantes.

Inicialmente, os alunos foram organizados em 6 grupos de até 8 pessoas, que também foram utilizados nas demais atividades da sequência didática. Em seguida, o professor instruiu os alunos sobre a dinâmica da aula e apresentou uma situação-problema relacionada ao estudo da função afim.

Para auxiliar na resolução deste desafio, os grupos passaram por 4 estações organizadas pelo professor. Em cada uma dessas estações, os estudantes realizaram uma atividade específica, criando um circuito que cada grupo percorreu, passando sucessivamente pelas estações até retornar ao início do percurso.

Começaremos pela resolução e análise dos resultados das atividades definidas em cada estação.

Atividades propostas em cada estação.

- **Atividade da Estação 01:** Ler a seção sobre a interseção de retas na página 74 do livro Matemática: Ciência e aplicações: Ensino Médio, volume 1, de Gelson et al. (2016), e listar as informações mais relevantes em tópicos que auxiliem na resolução do problema inicial. (15 minutos)

  Resultados: Embora todos os seis grupos tenham conseguido destacar tópicos importantes para a resolução da questão proposta, a correção desta atividade demonstrou que a maioria enfrentou dificuldades ao tentar explicar o conteúdo com suas próprias palavras. Muitos se limitaram a transcrever as informações do texto disponibilizado, sem apresentar exemplos autorais ou uma interpretação mais aprofundada do tema.

- **Atividade da Estação 02:** Registrar as principais informações de um vídeo, que fornece conhecimentos importantes para a resolução da situação-problema proposta no início da aula. (15 minutos)

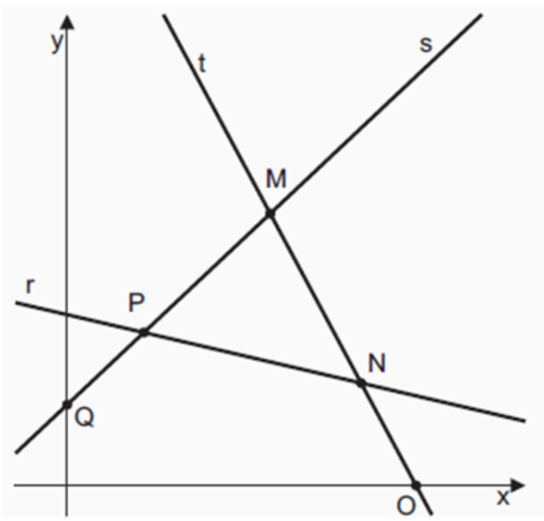
  Vídeo sugerido: <https://www.youtube.com/watch?v=1CBuGGC8CpM>. (LABIM, 2017).

  Resultados: Os Grupos 1 e 4 não conseguiram concluir a atividade devido a dificuldades de conexão com a internet. O Grupo 2, embora tenha abordado um método para determinar a interseção entre duas retas, apresentou um exemplo diferente do utilizado no vídeo e resolveu esse problema de forma incorreta.

  Embora tenham entregue a atividade, os Grupos 3, 5 e 6 deixaram de incluir informações importantes abordadas no vídeo, que eram fundamentais para a resolução da situação-problema proposta. Entre essas informações, destacam-se a descrição do método para determinar o ponto de interseção por meio da resolução do sistema de equações de duas retas concorrentes, além da apresentação de exemplos ilustrativos.

- **Atividade da Estação 03:** Resolver as três questões abaixo, relacionadas com a habilidade abordada na situação problema inicial. Nesta estação os alunos poderão consultar o livro didático. (15 minutos)

1. (SAEPE 2018). Observe, no plano cartesiano abaixo, as retas r, s e t e os pontos M, N, O, P e Q.



   A solução do sistema de equações formado pelas equações das retas s e t está representado nesse plano cartesiano pelo ponto:

a) M.

b) N.

c) O.

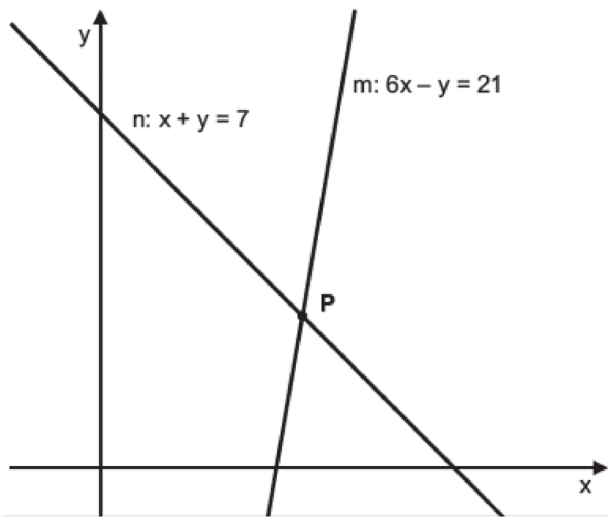
d) P.

e) Q.

Solução: Pelo gráfico apresentado temos que as retas s e t são concorrentes, e seu ponto de interseção é o ponto M. Como $M \in s$ e $M \in t$, temos que as coordenadas do ponto M satisfazem simultaneamente às equações das retas s e t. Com isso, o ponto M representa a solução do sistema de equações formado pelas equações das retas s e t. Resposta alternativa a).

Resultados: Todos os grupos responderam essa questão corretamente. Além disso, apresentaram a justificativa de que o ponto de interseção das retas s e t (ponto M) corresponde à solução do sistema de equações formado pelas equações dessas retas.

2. (SAEPE). No plano cartesiano abaixo estão representados as retas m, n e suas respectivas equações.



As coordenadas do ponto P, intersecção dessas retas, são:

a) $(1, 1)$.

b) $(4, 3)$.

c) $(5, -2)$.

d) $(7, 0)$.

e) $(6, -1)$.

Solução:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 6x - y = 21 \end{cases}$$

Pelo método da adição para resolução de sistemas lineares, temos:

$$7x = 28 \Rightarrow x = 4$$

Substituindo o valor de x na primeira equação do sistema linear, temos:

$$4 + y = 7 \Rightarrow y = 3$$

Logo, o ponto P possui coordenadas $(4, 3)$.

Perceba, que também poderíamos testar as alternativas e verificar que apenas o ponto $(4, 3)$ satisfaz simultaneamente às equações das retas m e n, visto que $4+3 = 7$ e $6 \cdot 4 - 3 = 21$. Resposta alternativa b).

Resultado: Todos os grupos responderam essa questão corretamente. Os Grupos 1, 4, 5 e 6 resolveram esse problema a partir da resolução do sistema de equações formado pelas equações das retas m e n. Já os Grupos 2 e 3 resolveram o problema utilizando o teste de alternativas.

3. Considere duas retas r e s concorrentes no plano cartesiano. As equações dessas retas são, respectivamente, $y = 2x + 1$ e $y = -x + 4$.

   O ponto de interseção dessas retas é:

   a) $(-5, 3)$.
   b) $(1, 3)$.
   c) $(5, -1)$.
   d) $(-2, 8)$.
   e) $(3, 7)$.

Solução:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

Pelo método da comparação para resolução de sistemas lineares:

$$2x + 1 = -x + 4 \Rightarrow 2x + x = 4 - 1 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} \Rightarrow x = 1$$

Substituindo o valor de x na primeira equação do sistema linear, temos:

$$y = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow y = 3$$

Logo, o ponto de interseção das retas r e s possui coordenadas $(1, 3)$.

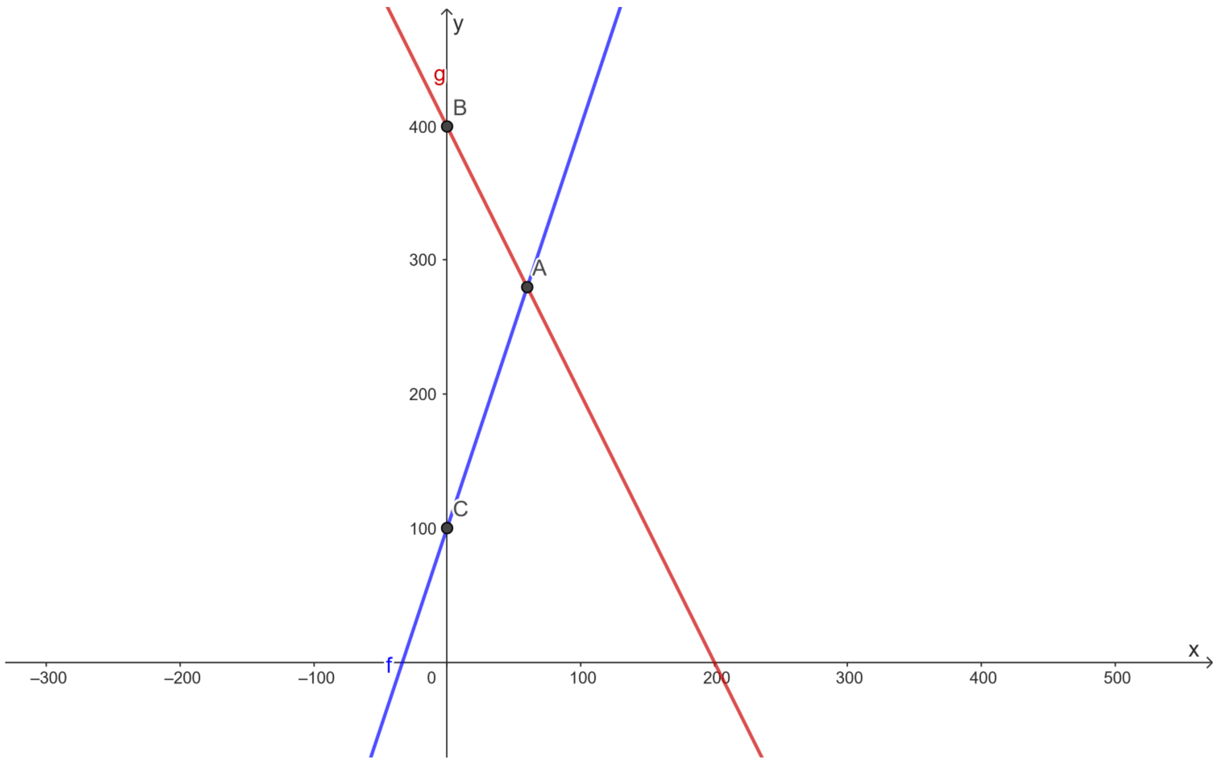
Perceba, que também poderíamos testar as alternativas e verificar que apenas o ponto $(1, 3)$ satisfaz simultaneamente às equações das retas r e s, visto que $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ e $y = -1 + 4 = 3$. Resposta alternativa b).

Resultado: Todos os grupos responderam essa questão corretamente, utilizando o teste de alternativas.

- **Atividade da Estação 04:** Representar geometricamente a situação problema utilizando o GeoGebra e estabelecer conexões com a solução algébrica do desafio proposto. (15 minutos)

  Solução:

Figura 36 – Representação geométrica da situação problema



Fonte: Autoria própria

O ponto A, representado na Figura 36, é o ponto de interseção das retas de oferta e demanda, e suas coordenadas correspondem à solução do sistema de equações dessas retas. A coordenada x desse ponto representa o preço de equilíbrio do mercado, enquanto a coordenada y indica a quantidade comercializada no mercado quando ele estiver em equilíbrio.

Resultado: Todos os grupos conseguiram realizar essa atividade, demonstrando facilidade no uso do software GeoGebra, devido ao contato prévio com o aplicativo. Além disso, destacaram a importante contribuição da atividade proposta na Estação 4 para a resolução da questão desafio.

Agora vamos apresentar a solução e analisar os resultados da questão desafio.

Situação-problema inicial: Questão desafio.

1. (Autoral). Com base na lei da oferta e da demanda, considerada fundamental para o funcionamento sustentável de um mercado, vamos investigar as conexões existentes entre o conceito de equilíbrio de mercado e o ponto de intersecção entre as curvas de oferta e demanda.

   Para isso, é fundamental compreender que as quantidades que vendedores e compradores desejam negociar em função do preço de um produto podem ser ilustradas,respectivamente, pelas curvas de oferta e demanda desse produto. Além disso, o equilíbrio de mercado somente é alcançado quando a quantidade demandada é igual à quantidade ofertada.

   A partir dessas informações, resolva o seguinte problema:

Figura 37 – Imagem da questão desafio: Lei da oferta e da procura.

Fonte: (HENRIQUE, 2015)

Em um certo mercado, as quantidades ofertadas e demandadas de um produto são representadas, respectivamente, pelas funções $Q_O(x) = 3x+100$ e $Q_D(x) = -2x+400$, onde Q_O, Q_D e x representam, nessa ordem, a quantidade ofertada, a quantidade demandada e o preço unitário do produto em reais.

a) **Qual o preço de equilíbrio de mercado?**

Solução: No equilíbrio de mercado, temos $Q_O(x_0) = Q_D(x_0)$, para um determinado x_0 real. Daí:

$$3x_0+100 = -2x_0+400 \Rightarrow 3x_0+2x_0 = 400-100 \Rightarrow 5x_0 = 300 \Rightarrow x_0 = \frac{300}{5} = 60.$$

Resultados: Os Grupos 1, 2, 3, 5 e 6 responderam corretamente à questão ao resolver o sistema de equações das retas de oferta e demanda, identificando a abscissa do ponto de interseção como resposta.

Já o Grupo 4, apesar de elaborar o esboço do gráfico, possivelmente com auxílio do software GeoGebra (Estação 4), não apresentou uma justificativa algébrica adequada nem relacionou claramente o gráfico à resposta dessa questão.

b) **Qual é a quantidade comercializada nesse mercado quando ele estiver em equilíbrio?**

Solução: Sabendo que o preço de equilíbrio é $x_0 = 60$ reais, a quantidade comercializada quando o mercado estiver em equilíbrio será dada por: $Q_O(60) = 3 \cdot 60 + 100 = 280$.

Resultados: Os Grupos 1, 2, 3, 5 e 6 responderam corretamente à questão ao resolver o sistema de equações das retas de oferta e demanda, identificando a ordenada do ponto de interseção como resposta.

Já o Grupo 4, apesar de elaborar o esboço do gráfico, não apresentou uma justificativa algébrica adequada nem relacionou claramente o gráfico à resposta dessa questão.

c) **Quais as coordenadas do ponto de interseção das retas de oferta e demanda?**

Solução: Como as retas que representam as funções Q_O e Q_D são concorrentes, e quando $x_0 = 60$ temos $Q_O(60) = Q_D(60) = 280$, conclui-se que o ponto de interseção das retas de oferta e demanda é $P(60, 280)$.

Resultados: Os Grupos 1, 2, 3, 5 e 6 responderam corretamente à questão. Ou seja, relacionaram a resolução do sistema de equações das retas de oferta e demanda ao ponto de interseção dessas retas concorrentes.

Já o Grupo 4, apesar de elaborar o esboço, não relacionou claramente o gráfico à resposta dessa questão.

d) **Esboce as retas de oferta e demanda deste mercado, e sinalize o ponto de intersecção destas retas.**

Resultado: Todos os grupos conseguiram esboçar as retas de oferta e demanda corretamente, além de sinalizar o ponto de interseção dessas retas. O esboço dessas retas está ilustrado na Figura 36.

Considerações finais

Os grupos demonstraram um excelente engajamento e participação durante essa atividade. O processo de formulação de hipóteses, coleta e análise de dados, junto com a interpretação e resolução dos problemas, motivou os estudantes na busca pela solução da questão desafio. Além disso, todos os grupos conseguiram realizar as atividades propostas, seja parcialmente ou integralmente, comprovando a viabilidade da proposta pedagógica. É importante destacar o papel fundamental do professor nessa dinâmica, tanto na criação e organização das atividades quanto na mediação ao longo da sua execução.

3.2 Criação de situações-problema a partir de imagens motivadoras.

Nesta seção, apresentamos os problemas elaborados e resolvidos pelos alunos sob a orientação do professor, durante o Encontro 5 (Seção 2.5.7.5) da sequência didática. Esse encontro teve como objetivo principal criar e resolver problemas envolvendo a função afim, compreender as relações entre função linear e proporcionalidade, e explorar a relação entre as grandezas posição e tempo no movimento uniforme por meio da função afim.

Inicialmente os alunos foram organizados em 6 grupos de até 8 pessoas. Cada grupo recebeu uma imagem que serviu de motivação para a criação de uma situação-problema relacionada aos tópicos estudados sobre função afim. Após a elaboração do problema, cada grupo propôs uma solução e registrou no caderno. Os problemas criados foram apresentados à turma, e o professor realizou as devidas correções das questões propostas.

No final desse processo, o professor apresentou situações-problema que foram criadas por ele a partir das imagens com o objetivo de trabalhar habilidades específicas da BNCC. As imagens motivadoras e os problemas apresentados pelo professor estão no Anexo D.

A seguir apresentaremos as situações-problema criadas pelos alunos a partir das imagens motivadoras, além das soluções propostas.

3.2.1 Relação quantidade x preço na compra de feijão a granel

Figura 38 – Venda de feijão a granel da DaquiÓ

Fonte: (ALBUQUERQUE, 2024)

Problema proposto pelo Grupo 1

Enunciado: Bete estava na feira e ela queria comprar 18 quilos de feijão. Sabendo que o valor do quilo desse feijão é 6 reais, quanto Bete irá gastar?

Solução: No caso do problema, $f(x) = 6x$. Quando x for igual a 18 kg, o valor pago será igual a $6 \cdot 18 = 108$ reais.

Problema proposto pelo Grupo 2

Enunciado: Luiz foi na mercearia comprar feijão a granel. O feijão que ele irá comprar é o mais caro, custando 9 reais por quilo.

- Qual a lei de formação que relaciona o preço e a quantidade em quilos?

  Solução: $P(x) = 9x$

- Se Luiz comprar 7 kg desse feijão, quanto ele irá pagar?

  Solução: $P(7) = 9 \cdot 7 = 63$ reais

- Se Luiz pagou 23 reais na compra desse tipo de feijão, quantos quilos ele comprou?

  Solução: $23 = 9 \cdot x \Rightarrow x = \frac{23}{9} \approx 2,6kg.$

Problema proposto pelo Grupo 3:

Enunciado: O custo total para vender uma quantidade x (em quilos) de certo tipo de feijão a granel é dado por $C(x) = 10x + 80$, em reais.

- Qual o custo fixo para a venda desse tipo de feijão?

  Solução: Quando $x = 0$, o custo é de 80 reais.

- Qual o custo total para $x = 40$ kg?

  Solução: $10 \cdot 40 + 80 = 480$ reais.

3.2.2 Relação tempo x posição no movimento retilíneo uniforme.

Figura 39 – Atletas competindo em uma corrida.

(PREPARA, 2024)

Problema proposto pelo Grupo 4

Enunciado: Um carro se move com uma velocidade constante de 50 km/h. Ele parte da cidade de Olinda e chega em Caruaru após 3 horas de viagem. Qual seria a distância entre Olinda e Caruaru?

Solução: No caso do problema, $d(t) = v \cdot t = 50 \cdot t$, em que d é a distância percorrida (em quilômetros), t é o tempo (em horas) e v é a velocidade constante (em quilômetros por hora). Daí: $d(3) = 50 \cdot 3 = 150$ km.

Problema proposto pelo Grupo 5

Enunciado: Uma pessoa se movimenta de acordo com a função $s(t) = 10 + 2t$, com $s(t)$ em metros e t em segundos.

- Qual a posição da pessoa em $t = 4$ segundos?

  Solução: $s(t) = 10 + 2 \cdot t \Rightarrow s(4) = 10 + 2 \cdot 4 \Rightarrow s(4) = 18$ m.

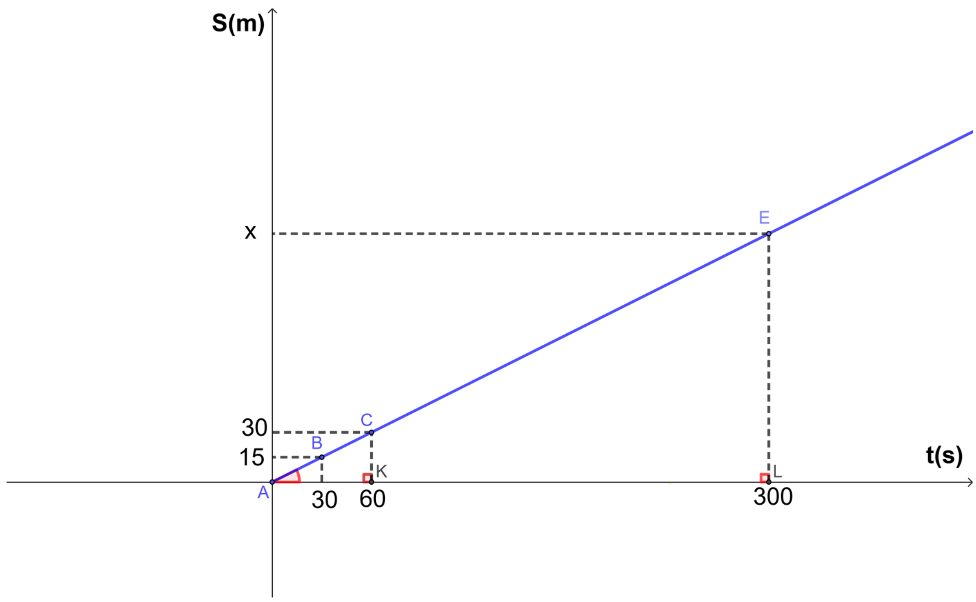
- Se a posição da pessoa for 100 metros, quantos segundos se passaram?

  Solução: $s(t) = 10 + 2 \cdot t \Rightarrow 100 = 10 + 2 \cdot t \Rightarrow 100 - 10 = 2 \cdot t \Rightarrow \frac{90}{2} = t \Rightarrow t = 45$ s.

Problema proposto pelo Grupo 6

Enunciado: André está caminhando no parque e a sua posição está relacionada com o tempo de acordo com o gráfico abaixo. Determine o valor de x, representado nesse gráfico.

Figura 40 – Gráfico do problema proposto pelo Grupo 6



Autoria própria

Solução: De 30 para chegar em 300, multiplicamos por 10. De 15 para chegar em x também multiplicamos por 10. Logo $x = 150$ m.

Considerações finais

Os alunos apresentaram um bom nível de envolvimento e participação durante toda a atividade. Todos os grupos conseguiram elaborar problemas relacionados às imagens motivadoras e apresentaram soluções corretas para cada um deles. A maioria das propostas apresentadas pelos grupos são adaptações de problemas clássicos, provavelmente discutidos em algum momento nas aulas de física ou matemática, e variam em níveis de dificuldade. Outro aspecto observado foi a variação dos níveis de formalidade nas notações e na escrita das soluções apresentadas pelos grupos.

Consideramos que o problema proposto pelo Grupo 6 se destacou pela abordagem simples e criativa ao explorar a relação entre posição e tempo no movimento uniforme. Na solução, o conceito de proporcionalidade é aplicado intuitivamente com uma descrição informal e precisa do problema. Para uma justificativa mais formal, observe que na Figura 40 os triângulos ACK e AEL são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo (AA). Daí, considerando a proporcionalidade dos lados homólogos, segue que $\frac{30}{300} = \frac{15}{x} \Rightarrow 30 \cdot x = 300 \cdot 15 \Rightarrow x = \frac{300 \cdot 15}{30} \Rightarrow x = 150$. Também poderíamos resolver esse problema com base no fato de que o coeficiente angular da reta é constante. Assim, ao calcular o coeficiente angular a partir dos pontos A e B e, em seguida, a partir dos pontos A e E, temos: $a = \frac{15-0}{30-0} = \frac{x-0}{300-0} \Rightarrow \frac{15}{30} = \frac{x}{300} \Rightarrow 30 \cdot x = 300 \cdot 15 \Rightarrow x = \frac{300 \cdot 15}{30} \Rightarrow x = 150$.

Além disso, a apresentação desses problemas para a turma promoveu um ambiente de troca de conhecimentos e valorização das contribuições de cada grupo. O professor também apresentou dois problemas criados por ele a partir das imagens motivadoras, aprofundando a discussão sobre os objetos de aprendizagem propostos para o Encontro 5. Esses problemas podem ser consultados no Anexo D.

3.3 Oficina de jogos matemáticos

Para realização da oficina de jogos matemáticos o professor dividiu a turma em 6 grupos, com no máximo 8 alunos cada. No primeiro encontro foram apresentadas a proposta de oficina para os alunos, seguida pela pesquisa e definição do jogo que foi desenvolvido. Os jogos elaborados pelos grupos, bem como os objetivos de aprendizagem, os materiais utilizados para a confecção e as regras, serão apresentados a seguir.

Jogo do Grupo 1: Batalha no Plano Cartesiano

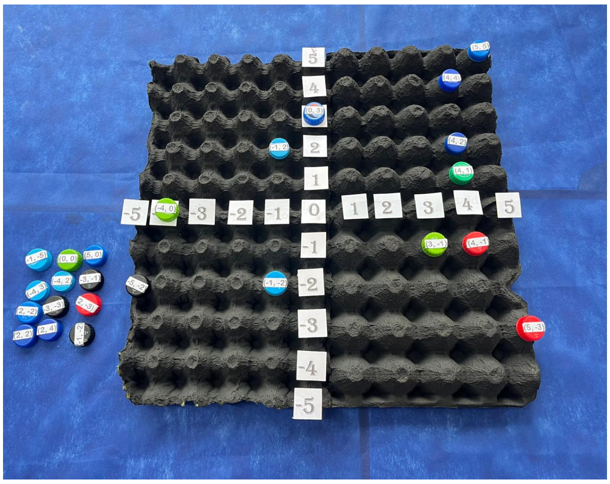
Esse jogo simula um plano cartesiano formado por dois eixos ortogonais com números inteiros de -5 a 5, conforme ilustrado na Figura 41.

- Objetivo de aprendizagem: Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

- Materiais utilizados: Bandeja de papelão, tampas de garrafas plásticas, tesoura, cola quente, tinta guache, papel ofício e impressora.

- Regras: O jogo é disputado por dois jogadores, e cada participante recebe 10 tampas, cada uma com coordenadas específicas para localizar no plano cartesiano. O objetivo é determinar o maior número de pontos corretos dentro de um limite de 2 minutos. Vence o jogador que conseguir identificar a maior quantidade de pontos corretos dentro do tempo estipulado. Esse jogo foi desenvolvido a partir de um vídeo pesquisado pelos alunos, conforme descrito por Veras (2015).

Figura 41 – Jogo do Grupo 1: Batalha no Plano Cartesiano



Fonte: Autoria própria

Jogo do Grupo 2: O Caminho das Funções

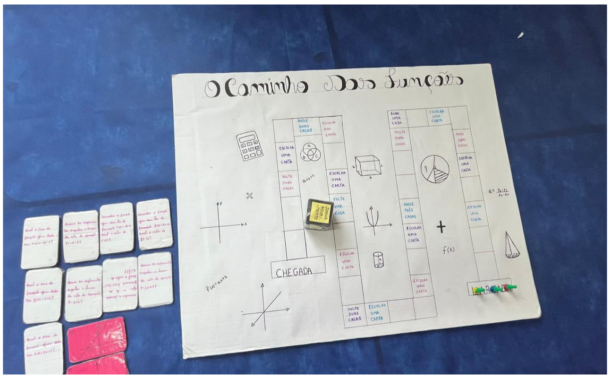
O jogo é composto por um tabuleiro retangular com um caminho dividido em “casas”, um dado de seis faces, três pinos e doze cartas com perguntas relacionadas ao estudo da função afim, conforme ilustrado na Figura 42.

- Objetivo de aprendizagem: Resolver problemas que envolvem funções afins.

- Materiais utilizados: Papelão, cartolina colorida, cola , régua, lápis, piloto e canetas coloridas.

- Regras: Três jogadores participam do jogo, e o objetivo é ser o primeiro a chegar ao final do caminho sinalizado no tabuleiro, realizando desafios sobre funções afins. Para iniciar o jogo, cada jogador lança um dado, e aquele que obtiver o maior resultado inicia. Em cada rodada, o jogador lança o dado para avançar no tabuleiro (o número da face voltada pra cima indica quantas casas o jogador deverá avançar), e a casa em que o jogador parar pode conter instruções, desafios ou estar em branco. Em algumas casas o jogador terá que responder perguntas relacionadas ao estudo da função afim. Ao acertar, o jogador avança novamente (com base na numeração de um novo lançamento do dado), e ao errar, permanece no local e passa a vez para outro jogador. Também existem casas que fazem o jogador avançar ou retroceder sem perguntas. Além disso, nas casas em branco o jogador permanece no local e passa a vez para outro jogador. O vencedor é o primeiro a alcançar a última casa.

Figura 42 – Jogo do Grupo 2: O Caminho das Funções



Fonte: Autoria própria

Jogo do Grupo 3: Família das Funções

O jogo é composto por 20 cartas com leis de formação, esboços de gráficos ou características de funções afins, além de 2 cartas com a palavra "FUNÇÃO", conforme ilustrado na Figura 44. Esse jogo foi adaptado do livro Cadernos do Mathema: Ensino Médio: Jogos de matemática de 1º a 3º ano, de Smole et al. (2008).

- Objetivos de aprendizagem: Reconhecer o gráfico de uma função afim por meio de seus coeficientes; reconhecer a representação algébrica de uma função afim dado o seu gráfico ou vice-versa; analisar se uma função afim é crescente ou decrescente e identificar seu zero a partir do gráfico.

- Materiais utilizados: Papelão, cartolina, papel A4, tesoura, cola, impressão em gráfica, aplicativos Canva e GeoGebra.

- Regras: O jogo é disputado por três jogadores, e o objetivo é formar famílias de quatro cartas, sendo possível criar no máximo cinco famílias. Cada família é composta pela lei de formação de uma função afim, pelo seu gráfico e por outras duas cartas que descrevem propriedades da função. No início do jogo, as cartas são embaralhadas e o baralho é colocado sobre a mesa, virado para baixo. De forma alternada, os jogadores tiram cartas e as colocam na mesa com a face virada para cima. Caso a carta pertença à mesma família de uma já virada, ela é colocada abaixo da correspondente; se isso não ocorrer, é posicionada separadamente. Além disso, se um jogador errar o posicionamento da carta na família, perde a vez, e a carta vai para o final do baralho. Cartas "FUNÇÃO" funcionam como "cartas coringa" e podem ser usadas a qualquer momento do jogo para formar uma família. O jogo é finalizado quando todas as famílias estiverem formadas, e vence o jogador que acumular mais pontos, considerando as seguintes regras: o jogador ganha 1 ponto por carta posicionada corretamente na família, e 5 pontos por completar uma das famílias. Essas regras são discutidas por Smole et al. (2008).

É fundamental que os jogadores sejam orientados por um aluno mediador que tenha um bom entendimento do jogo, a fim de garantir o funcionamento correto da proposta.

Figura 43 – Jogo do Grupo 3: Família das Funções

Fonte: Autoria própria

Jogo do Grupo 4: Enigma das funções

O jogo consiste em três baralhos de cores distintas e é disputado por dois jogadores. Dois desses baralhos contêm 9 cartas cada, apresentando gráficos de funções afins (os dois baralhos possuem os mesmos gráficos). O terceiro baralho é composto por 7 cartas com perguntas sobre função afim, que são importantes para a dinâmica do jogo.

Apesar de ter sido adaptado do livro *Cadernos do Mathema: Ensino Médio: Jogos de matemática de 1º a 3º ano de Smole et al. (2008)*, esse jogo possui uma estrutura diferente do original, tanto no que se refere às regras, quanto à quantidade e tipos de cartas utilizadas.

- Objetivos de aprendizagem: Determinar a representação gráfica de uma função afim por meio dos seus coeficientes; analisar se uma função afim é crescente ou decrescente e identificar seu zero a partir do gráfico; reconhecer a representação algébrica de uma função afim a partir do seu gráfico ou vice-versa.

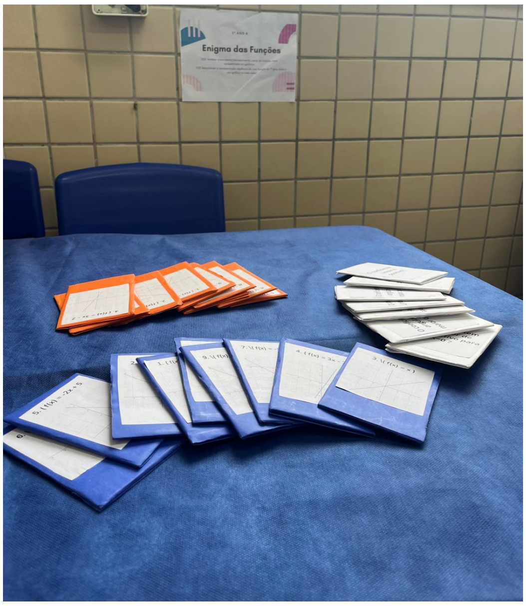
- Materiais utilizados: Papelão, cartolina colorida, cola, régua, tesoura, materiais impressos, aplicativo GeoGebra.

- Regras: Cada jogador recebe um baralho de 9 cartas sobre função afim, que devem ser dispostas e organizadas à sua frente. O baralho com as cartas de perguntas deve ser embaralhado e colocado no centro da mesa, com as cartas voltadas para baixo. Depois disso, cada jogador escolhe uma carta do seu próprio baralho, sem mostrar ao oponente, e registra a lei de formação da função escolhida (pode anotar em um pedaço de papel, por exemplo). Essa escolha deve ser guardada em segredo, já que o objetivo de cada jogador é descobrir qual é a função secreta que o oponente escolheu.

  Os jogadores se alternam; retirando cartas do baralho de perguntas e fazendo os questionamentos propostos ao oponente. O oponente responde "sim" ou "não", e o outro jogador elimina as cartas com funções que não correspondem à resposta. As cartas de perguntas não são devolvidas ao baralho. O objetivo é reduzir as opções de funções afins até restar apenas uma, que é a função secreta do oponente. O jogo acaba quando um jogador adivinha corretamente a função secreta do adversário.

  É importante destacar que os jogadores devem ser instruídos por um aluno mediador que compreende bem o jogo e conhece as respostas das perguntas propostas, garantindo o bom funcionamento do jogo. Além disso, os palpites para adivinhação das cartas devem ser feitos de forma alternada.

Figura 44 – Jogo do Grupo 4: Enigma das Funções



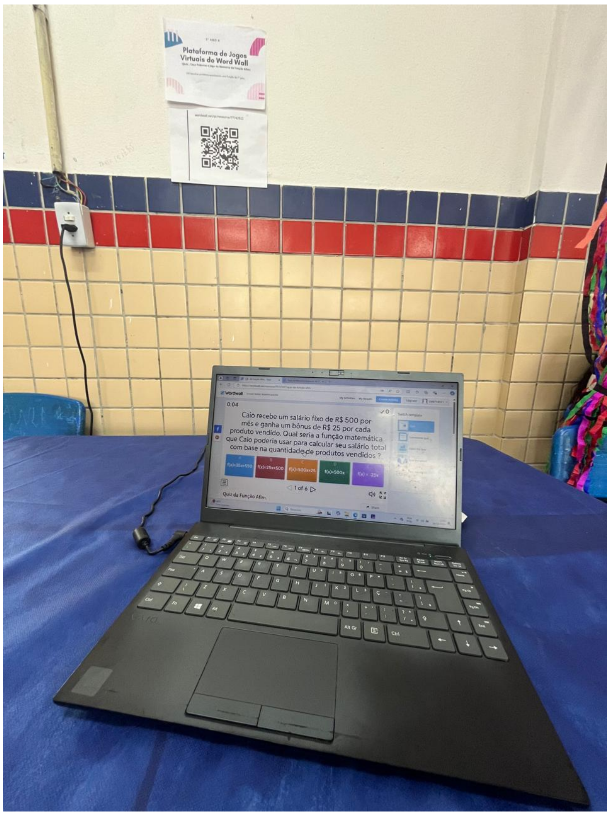
Fonte: Autoria própria

Jogo do Grupo 5: Quiz da Função Afim

- Objetivos de aprendizagem: Resolver problema envolvendo função afim.
- Recursos utilizados: Notebook, celular e internet.

Esse jogo é um questionário sobre função afim, desenvolvido na plataforma Wordwall. O questionário pode ser respondido individualmente tanto no computador quanto no celular. O objetivo do jogo é responder corretamente ao maior número de perguntas possível no menor tempo. Com base nisso, a plataforma gera um ranking de acordo com o desempenho dos jogadores.

Figura 45 – Jogo do Grupo 5: Quiz da Função afim



Fonte: Autoria própria

Jogo do Grupo 6: Jogo da Memória das Equações do 1° Grau

- Objetivos de aprendizagem: Resolver equações do 1° grau.
- Recursos utilizados: Notebook, celular e internet.

O Grupo 6 criou um Jogo da Memória em formato virtual utilizando a plataforma Wordwall. O jogo aborda a habilidade de resolução de equações do primeiro grau, diretamente relacionada ao processo de determinação do zero da função afim. Esse jogo pode ser jogado individualmente pelo computar ou pelo celular. O objetivo é identificar corretamente os pares formados pela equação e sua solução, no menor tempo possível. Com base nisso, a plataforma gera um ranking de acordo com o desempenho dos jogadores.

Figura 46 – Jogo da Memória das Equações do 1° Grau.

Fonte: Autoria própria

Considerações Finais

A participação e o engajamento dos estudantes no desenvolvimento dos jogos matemáticos foram excelentes. Todos os grupos elaboraram jogos que atenderam aos objetivos estabelecidos pelo professor no início da oficina. Posteriormente, esses trabalhos foram apresentados em uma Feira de Jogos Matemáticos, que contou com a visitação de todas as turmas da escola.

Esse projeto foi reconhecido pela comunidade escolar como uma iniciativa que promove o protagonismo estudantil, além de desenvolver habilidades específicas da Base Nacional Comum Curricular e incentivar a participação ativa, a colaboração e a criatividade dos alunos.

3.4 Resultados do pré-teste e pós-teste

O pré-teste e o pós-teste são formados por seis questões cada, extraídas do SAEPE ou do ENEM. Essas avaliações foram aplicados, respectivamente, no Encontro 1 e no Encontro 7 da sequência didática, com o principal objetivo de analisar o desenvolvimento das habilidades específicas descritas na Seção 2.4.

É importante destacar que os objetivos de aprendizagem de cada uma das questões do pré-teste e do pós-teste são os mesmos, e o nível de dificuldade é bastante semelhante, o que permite uma melhor comparação dos resultados. Além disso, antes da aplicação da sequência didática, os alunos trabalharam conteúdos relevantes para o aprendizado dos temas que seriam discutidos e também foram apresentados conceitos iniciais relacionados ao estudo da função afim. O aprofundamento do estudo da função afim, assim como a introdução de técnicas de resolução de problemas, ocorreu durante a aplicação da sequência didática.

A seguir, realizaremos uma análise comparativa das porcentagens de acerto de cada uma das questões do pré-teste e do pós-teste, a fim de entender melhor o impacto da sequência didática sobre o aprendizado dos alunos.

Análise da Questão 1: Pré-teste x pós-teste.

- A partir de uma breve leitura do enunciado da Questão 1, tanto do pré-teste quanto do pós-teste (Figura 47), observamos que ambas as questões têm como objetivo principal aferir se os estudantes possuem a habilidade de investigar relações entre duas grandezas. Isso inclui identificar padrões, criar conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação corresponde a uma função afim.

Figura 47 – Questão 1: Pré-teste x pós-teste.

PRÉ- TESTE

1. (ENEM 2023) Para concretar a laje de sua residência, uma pessoa contratou uma construtora. Tal empresa informa que o preço y do concreto bombeado é composto de duas partes: uma fixa, chamada de taxa de bombeamento,e uma variável, que depende do volume x de concreto utilizado. Sabe-se que a taxa de bombeamento custa $R\$$ 500,00 e que o metro cúbico do concreto bombeado é de $R\$$ 250,00.
   A expressão que representa o preço y em função do volume x, em metro cúbico, é:
   a) $y = 250x$
   b) $y = 500x$
   c) $y = 750x$
   d) $y = 250x + 500$
   e) $y = 500x + 250$

PÓS- TESTE

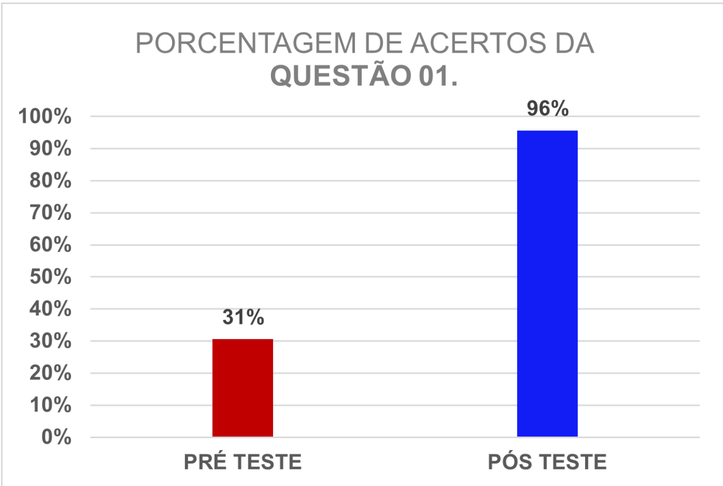
1. O salário de um vendedor é composto por uma parte fixa de $R\$$ 2000,00 mais uma comissão de $R\$$ 50,00 para cada produto vendido. A expressão que representa o salário y (em reais) do vendedor em função da quantidade x de produtos vendidos é:
   a) $y = 50x$
   b) $y = 2000x$
   c) $y = 750x$
   d) $y = 50x + 2000$
   e) $y = 2000x + 50$

Fonte: (INEP, 2024), (CAED, 2024)

Além disso, 31 % das respostas do pré-teste foram corretas, enquanto 96% das respostas do pós-teste estavam certas. Esse resultado demonstra um aumento considerável na porcentagem de acerto do pós-teste em relação ao pré-teste, ambos com o mesmo objetivo de aprendizagem e nível de dificuldade.

A correção do pós-teste mostrou que os alunos compreenderam que uma função afim $f(x) = ax + b$ é composta por uma "parte fixa", correspondente ao coeficiente "b", e por uma "parte variável", que resulta do produto do coeficiente "a" pela variável independente "x". Essa compreensão facilitou a resolução da questão e justifica a expressiva porcentagem de acertos no pós-teste, conforme mostrado na Figura 48.

Figura 48 – Comparação do percentual de acertos da Questão 1: Pré-teste x pós-teste



Fonte: Autoria própria.

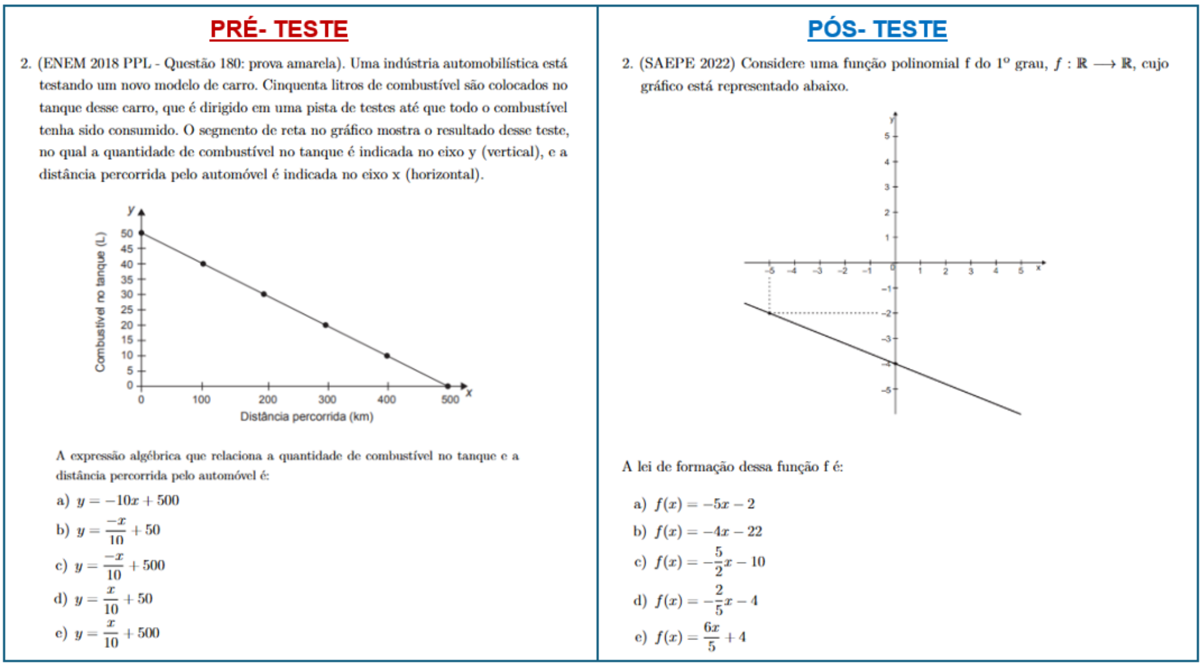
Análise da Questão 2: Pré-teste x pós-teste.

- Ao ler o enunciado da Questão 2, tanto do pré-teste quanto do pós-teste (Figura 49), observamos que ambas as questões têm o objetivo de determinar a representação algébrica de uma função afim a partir do seu gráfico.

  Além disso , 36% das respostas do pré-teste foram corretas, enquanto 52% das respostas do pós-teste estavam certas (Figura 50). Esse resultado demonstra um aumento na porcentagem de acerto do pós-teste em relação ao pré-teste, mas fica evidente a dificuldade dos alunos em interpretar gráficos e a partir deles exibir a lei de formação de uma função afim. É importante destacar que diversas estratégias foram apresentadas aos alunos para a resolução desse problema, como a interpretação geométrica dos coeficientes, diferentes métodos para determinar o valor inicial e a taxa de variação de uma função afim, além do uso do teste de alternativas a partir de pontos do gráfico da função f.

A correção do pós-teste mostrou que a maior parte dos alunos resolveu esse problema utilizando o teste de alternativas, uma minoria determinou o valor inicial e a taxa de variação da função afim a partir da análise do gráfico apresentado.

Figura 49 – Questão 2: Pré-teste x pós-teste.



PRÉ- TESTE

2. (ENEM 2018 PPL - Questão 180: prova amarela). Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).

A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:

a) $y = -10x + 500$

b) $y = \frac{-x}{10} + 50$

c) $y = \frac{-x}{10} + 500$

d) $y = \frac{x}{10} + 50$

e) $y = \frac{x}{10} + 500$

PÓS- TESTE

2. (SAEPE 2022) Considere uma função polinomial f do 1º grau, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cujo gráfico está representado abaixo.

A lei de formação dessa função f é:

a) $f(x) = -5x - 2$

b) $f(x) = -4x - 22$

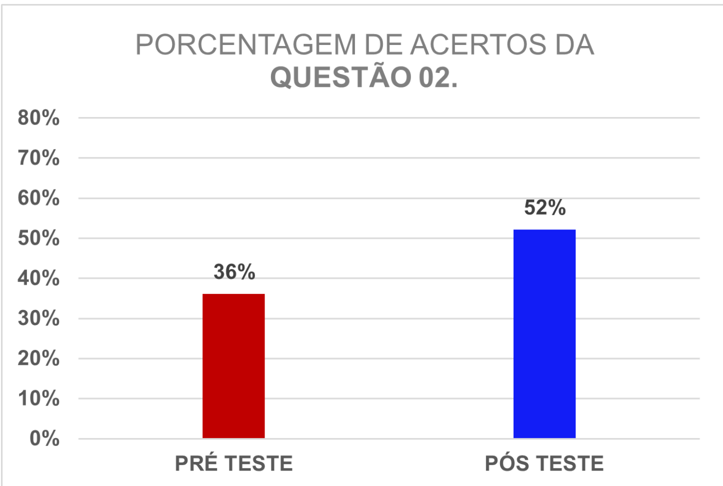
c) $f(x) = -\frac{5}{2}x - 10$

d) $f(x) = -\frac{2}{5}x - 4$

e) $f(x) = \frac{6x}{5} + 4$

Fonte: (INEP, 2024), (CAED, 2024)

Figura 50 – Comparação do percentual de acertos da Questão 2: Pré-teste x pós-teste



Fonte: Autoria própria.

Análise da Questão 3: Pré-teste x pós-teste.

- No caso da Questão 3, tanto do pré-teste quanto do pós-teste, o objetivo é avaliar se os alunos têm a habilidade de reconhecer a expressão algébrica que representa uma função afim a partir de uma tabela, conforme podemos ver na Figura 51.

Figura 51 – Questão 3: Pré-teste x pós-teste.

PRÉ- TESTE

3. (SAEPE 2022) Cássio trabalha como pesquisador e, para a realização de um experimento, anotou as temperaturas registradas por uma estação meteorológica. A tabela abaixo apresenta as anotações do tempo decorrido, em horas, do início da observação dessas temperaturas.

Tempo decorrido (em horas)	Temperatura (°C)
1	12
2	10
3	8
4	6

A partir dos dados dessa tabela, Cássio percebeu que poderia estabelecer uma função polinomial do 1º grau que relaciona o tempo decorrido, em horas, representado por x, e a temperatura, em °C, representada por $f(x)$. A lei de formação dessa função está representada em:

a) $f(x) = -2x + 14$.
b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$
c) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 7$
d) $f(x) = x + 12$.
e) $f(x) = x - 2$.

PÓS- TESTE

3. (SAEB 2007) Um comerciante, preocupado com a procura de um determinado produto por parte dos consumidores, resolveu anotar as quantidades vendidas em função dos preços praticados, em um determinado período de tempo. Considere que a variável x representa os preços, em unidade monetária, e y representa as unidades vendidas, conforme a tabela seguinte:

x($)	3	6	9	12	15
y(unidades)	15	12	9	6	3

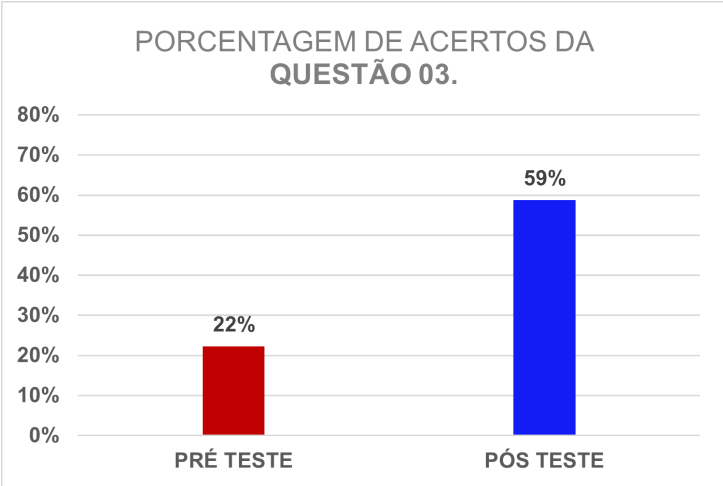
A equação que permite calcular y em função de x é:

a) $y = 6 - x$
b) $y = 9 - x$
c) $y = 12 - x$
d) $y = 15 - x$
e) $y = 18 - x$

Fonte: (CAED, 2024)

Além disso, 22 % das respostas do pré-teste foram corretas, enquanto 59% das respostas do pós-teste estavam certas. (Figura 52) O resultado demonstra um aumento significativo na porcentagem de acerto do pós-teste em relação ao pré-teste. A correção do pós-teste mostrou que a maioria dos alunos compreendeu que, a partir da tabela apresentada, é possível determinar vários pares ordenados e, testando dois deles, resolver o problema com um teste de alternativas. Apenas uma minoria dos alunos utilizou os conceitos de taxa de variação e valor inicial da função afim para resolver a questão.

Figura 52 – Comparação do percentual de acertos da Questão 3: Pré-teste x pós-teste

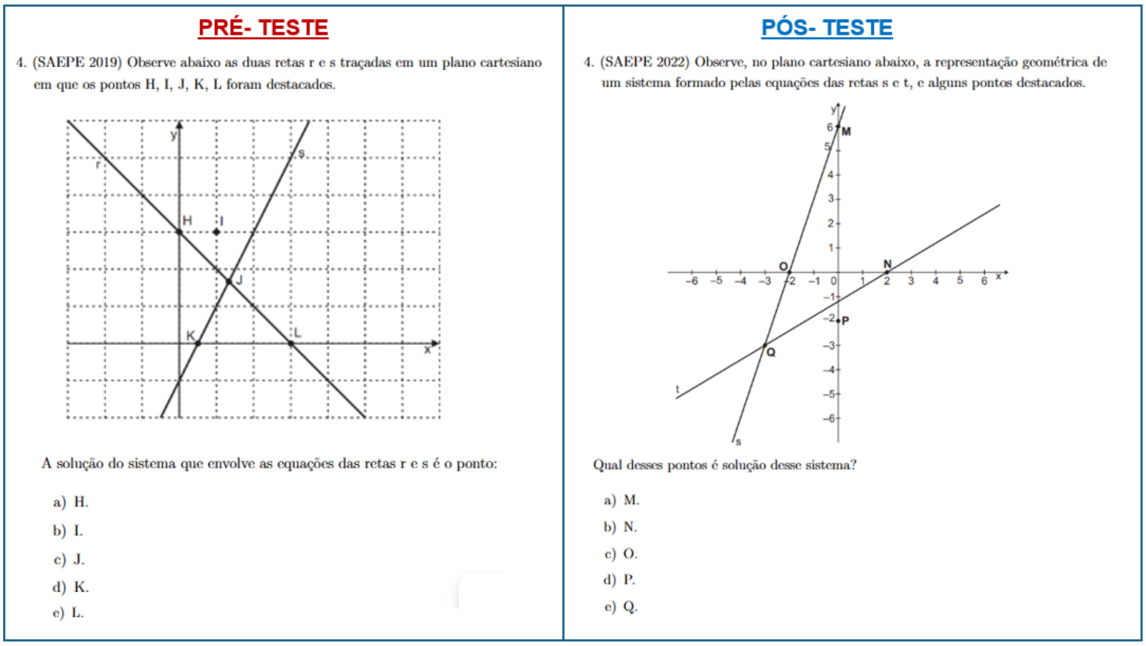


Fonte: Autoria própria.

Análise da Questão 4: Pré-teste x pós-teste.

- No caso da Questão 4, tanto do pré-teste quanto do pós-teste, o objetivo é avaliar se os alunos têm a habilidade de compreender a relação existente entre o ponto de interseção de duas ou mais retas concorrentes com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas, conforme podemos ver na Figura 53.

Figura 53 – Questão 4: Pré-teste x pós-teste.



PRÉ- TESTE

4. (SAEPE 2019) Observe abaixo as duas retas r e s traçadas em um plano cartesiano em que os pontos H, I, J, K, L foram destacados.

A solução do sistema que envolve as equações das retas r e s é o ponto:

a) H.
b) I.
c) J.
d) K.
e) L.

PÓS- TESTE

4. (SAEPE 2022) Observe, no plano cartesiano abaixo, a representação geométrica de um sistema formado pelas equações das retas s e t, e alguns pontos destacados.

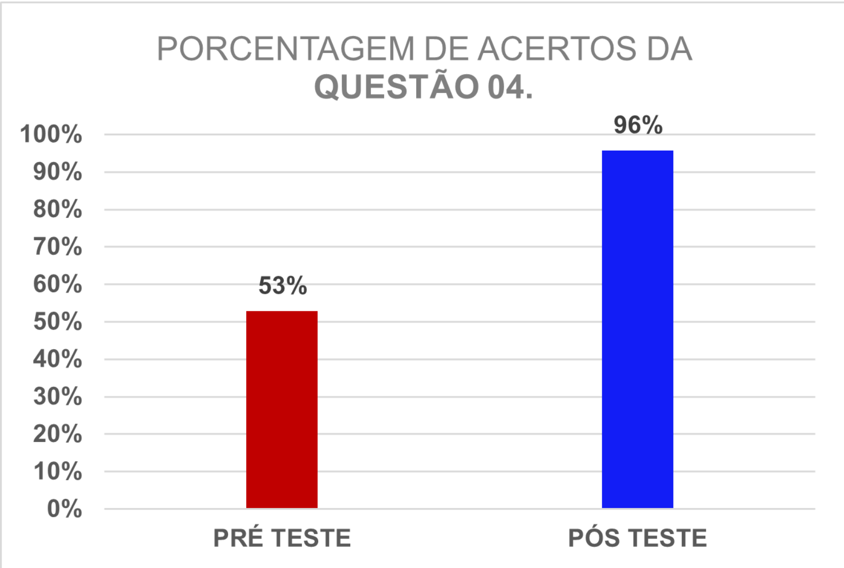
Qual desses pontos é solução desse sistema?

a) M.
b) N.
c) O.
d) P.
e) Q.

Fonte: (CAED, 2024)

Além disso, 53 % das respostas do pré-teste foram corretas, enquanto 96% das respostas do pós-teste estavam certas. (Figura 54) O resultado apresentado demonstra que mesmo antes da aplicação da sequência didática, mais da metade dos alunos já tinham a noção intuitiva de que o ponto de interseção de duas ou mais retas concorrentes está relacionado à resolução de um sistema de equações com duas incógnita. Após a implementação da sequência didática essa percentagem aumentou de maneira expressiva, atingindo 96% de acertos. O êxito da dinâmica de rotação por estações, realizada no Encontro 4 (a habilidade que estamos avaliando foi abordada durante esse encontro), juntamente com o fato da resolução dessa questão não exigir a realização de cálculos, provavelmente justifica o alto percentual de acertos dessa questão no pós-teste.

Figura 54 – Comparação do percentual de acertos da Questão 4: Pré-teste x pós-teste

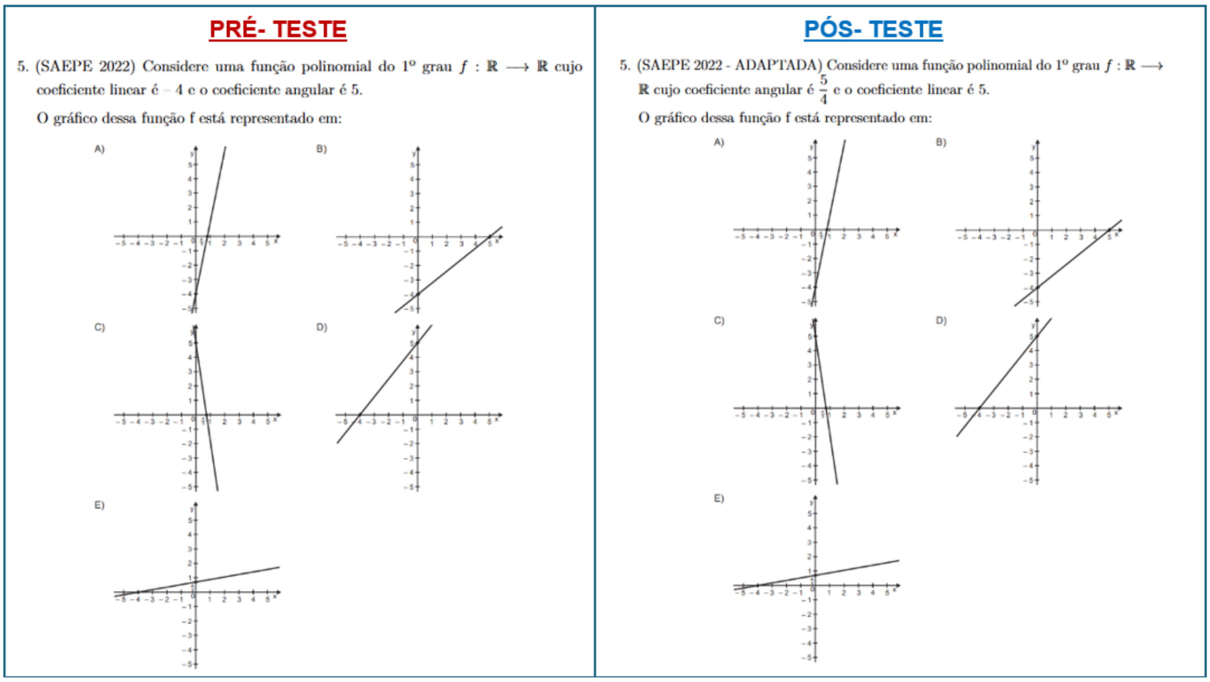


Fonte: Autoria própria.

Análise da Questão 5: Pré-teste x pós-teste.

- No caso da Questão 5, tanto do pré-teste quanto do pós-teste, o objetivo é avaliar se os alunos têm a habilidade de determinar a representação gráfica de uma função afim a partir da sua forma algébrica. (Figura 55) .

Figura 55 – Questão 5: Pré-teste x pós-teste.

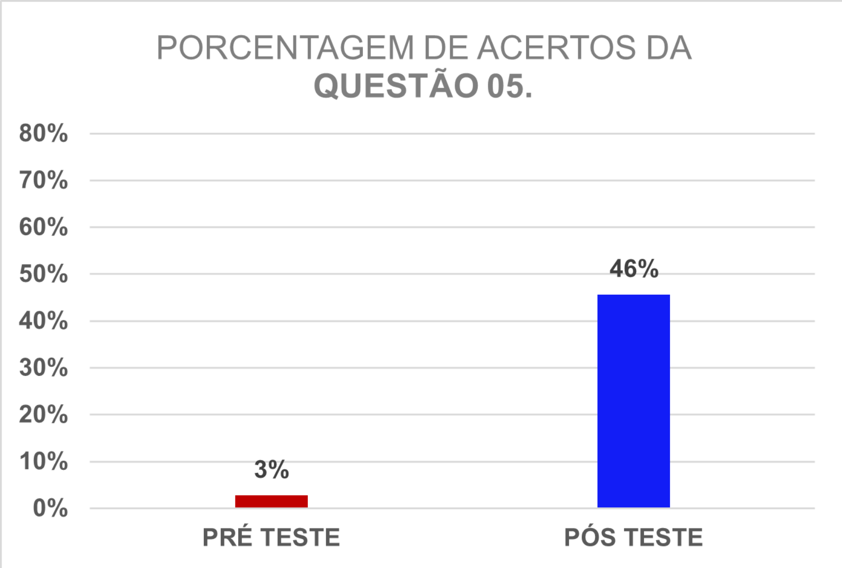


Fonte: (CAED, 2024)

A Figura 56 nos mostra que 3 % das respostas do pré-teste foram corretas, enquanto 46% das respostas do pós-teste estavam certas. Apesar desse resultado demonstrar um aumento significa na porcentagem de acerto do pós-teste em relação ao pré-teste, essa foi a questão que os alunos tiveram mais dificuldades de resolver nas avaliações. Provavelmente, isso se deve à necessidade de os alunos associarem o nome "coeficiente angular" ao coeficiente "a" e "coeficiente linear" ao coeficiente "b", mas também à dificuldade em aplicar esses conceitos para escrever a lei de formação da função $f(x) = ax + b$ e identificar qual gráfico corresponde a essa função. Essa identificação poderia ter sido feita de diversas maneiras: realizando a interpretação geométrica dos coeficientes, determinando os interceptos de f com os eixos x e y, ou fazendo um teste de alternativas. Ou seja, apesar de terem sido apresentadas durante as aulas diversas estratégias para a resolução desse problema, trata-se de um problema que exige dos alunos o conhecimento de diferentes conceitos e atenção no momento da resolução.

A maioria dos alunos que acertou a Questão 5 do pós-teste realizou a interpretação geométrica dos coeficientes "a" e "b". Ou seja, ao identificar que $a = \frac{5}{4} > 0$, eles reconheceram que a função é crescente. Além disso, como $b = 5$, entenderam que a reta intercepta o eixo y no ponto (0,5). Com essas informações, conseguiram determinar a resposta correta.

Figura 56 – Comparação do percentual de acertos da Questão 5: Pré-teste x pós-teste

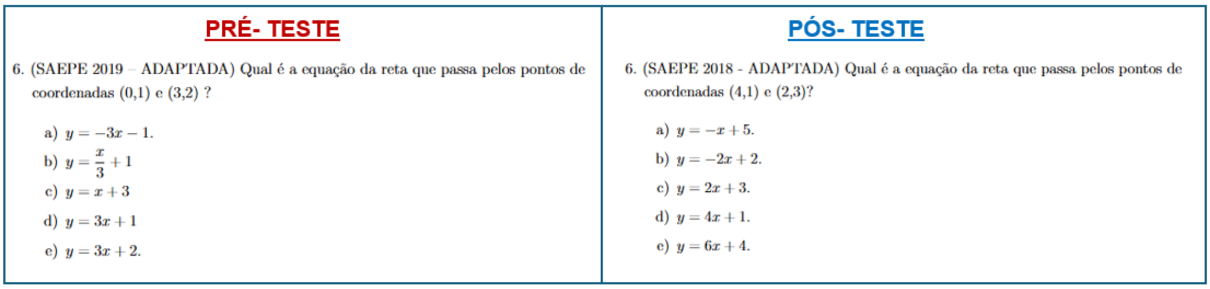


Fonte: Autoria própria.

Análise da Questão 6: Pré-teste x pós-teste.

- No caso da Questão 6, tanto do pré-teste quanto do pós-teste, o objetivo é avaliar se os alunos têm a habilidade de identificar a lei de formação da função afim apresentada a partir de dois pontos dados (Figura 57). Além disso, 11 % das respostas do pré-teste foram corretas, enquanto 52% das respostas do pós-teste estavam certas. (Figura 58)

Figura 57 – Questão 6: Pré-teste x pós-teste.



PRÉ- TESTE

6. (SAEPE 2019 – ADAPTADA) Qual é a equação da reta que passa pelos pontos de coordenadas (0,1) e (3,2) ?

a) $y = -3x - 1.$
b) $y = \frac{x}{3} + 1$
c) $y = x + 3$
d) $y = 3x + 1$
e) $y = 3x + 2.$

PÓS- TESTE

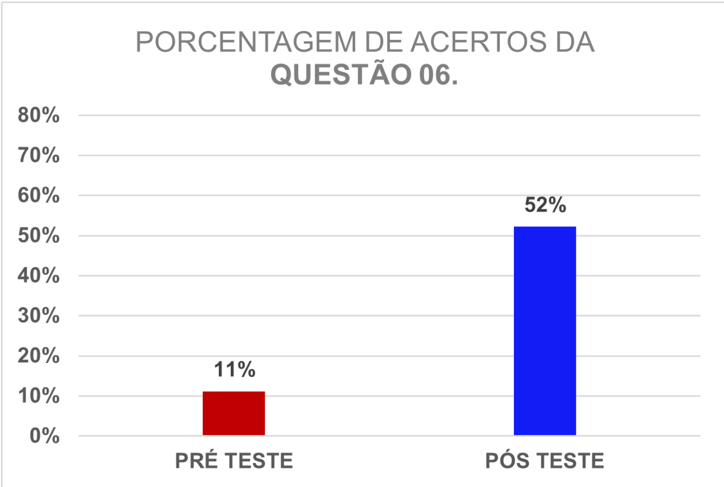
6. (SAEPE 2018 - ADAPTADA) Qual é a equação da reta que passa pelos pontos de coordenadas (4,1) e (2,3)?

a) $y = -x + 5.$
b) $y = -2x + 2.$
c) $y = 2x + 3.$
d) $y = 4x + 1.$
e) $y = 6x + 4.$

Fonte: (CAED, 2024)

Embora esse resultado demonstre um aumento significativo na porcentagem de acerto do pós-teste em relação ao pré-teste, esperava-se um índice ainda maior, considerando o nível de dificuldade da questão e as diversas estratégias apresentadas em aula para a resolução do problema. Entre essas estratégias estavam: a determinação dos coeficientes $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e b, a partir dos pontos fornecidos para obter a lei de formação $f(x) = ax + b$ da função; a resolução de um sistema de equações utilizando a lei de formação de f e os dois pontos dados para determinar a e b; ou o teste de alternativas com base nos dois pontos, já que, dados dois pontos distintos do plano existe uma única reta que passa por eles.

Figura 58 – Comparação do percentual de acertos da Questão 6: Pré-teste x pós-teste



Fonte: Autoria própria.

3.4.1 Considerações finais

Apesar das dificuldades enfrentadas pelos alunos na resolução de problemas, tanto no pré-teste quanto no pós-teste, observou-se um aumento significativo na porcentagem de acertos no pós-teste, ao comparar os resultados. Esse progresso evidencia a eficácia da abordagem utilizada. Além disso, o nível de comprometimento dos estudantes com as atividades propostas e o aprendizado demonstrado ao longo de toda a implementação da sequência didática foi extremamente satisfatório.

Outro aspecto importante a ser destacado são os impactos positivos da aplicação da sequência didática no que se refere à participação e ao engajamento dos alunos. Ao propor atividades investigativas e participativas no estudo da função afim, conseguimos não apenas promover o desenvolvimento das habilidades cognitivas dos estudantes, mas também estimular o seu protagonismo. Nesse sentido, a sequência didática contribuiu para a criação de um ambiente de aprendizagem que favoreceu a colaboração, incentivou a criatividade e estimulou a autonomia dos alunos.

Referências

ALBUQUERQUE, R. *Feijão a granel da DaquiÓ*. 2024. Fonte: DaquiÓ. Acesso em: 30 set. 2024. Disponível em: <https://s2.glbimg.com/5W3s9LX3p_WdtFYz9QN0rwJmr3o=/e.glbimg.com/og/ed/f/original/2021/03/12/daquio_-_credito_rogerio_albuquerque_32.jpg>.

APAC. *Climatologia*. 2024. Acesso em: 30 set. 2024. Disponível em: <https://www.apac.pe.gov.br/climatologia/519-climatologia>.

BRASIL, S. *Ministério da Educação. Base nacional comum curricular*. [S.l.]: MEC Brasília, DF, 2018.

CAED, D. *Biblioteca - Avaliação e Monitoramento Pernambuco*. 2024. Acesso em: 30 set. 2024. Disponível em: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/#!/biblioteca>.

CAVALCANTI, C. C.; SILVA, M. A. M. da. *Metodologias Ativas: Um Guia Prático para Professores*. Pernambuco, Brasil, 2023. Caderno pedagógico elaborado com o apoio do Instituto Sonho Grande e SEDUC Alagoas. Colaboração de Gabriela Droichi, Francila Freitas Pereira de Novaes e Vanessa Queiroz. Imagens: Unsplash, Istock e Shutterstock. Projeto gráfico e diagramação: Devagar Lab.

D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? *Temas e debates*, v. 1, n. 2, p. 15–19, 1989.

FEDERAL, R. *Tabelas do Imposto de Renda*. 2024. Acesso em: 9 jan. 2025. Disponível em: <https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2024>.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. et al. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. *Boletim da SBEM-SP*, v. 4, n. 7, p. 5–10, 1990.

GELSON, I. et al. *Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 1*. [S.l.]: São Paulo: Saraiva, 2016.

GODOY, C. L. S.; MENEGAZZI, M. O uso de jogos no ensino da matemática. *Comunicação apresentada em XIV Salão Intermunicipal de pesquisa. Lutheran University of Brazil, Guaíba*, 2011.

HENRIQUE. *A Lei da Oferta e da Demanda*. 2015. Acesso em: 30 set. 2024. Disponível em: <https://henriquecer.com/2015/11/01/a-lei-da-oferta-e-da-demanda/>.

IBGE. *De 2010 a 2022, população brasileira cresce 6,5% e chega a 203,1 milhões*. 2022. Acesso em: 30 set. 2024. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37237-de-2010-a-2022-populacao-brasileira-cresce-6-5-e-chega-a-203-1-milhoes>.

IEZZI, G. Murakami, carlos. *Fundamentos de matemática elementar*, v. 1, 2013.

INEP, I. N. de Estudos e P. E. A. T. *Provas e gabaritos do ENEM*. 2024. Acesso em: 30 set. 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>.

LABIM. *Curtas Matemáticos - Intersecção de Retas*. 2017. Acessado em: 30 de setembro de 2024. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1CBuGGC8CpM>.

LARA, I. C. M. Jogando com a matemática de 5ª a 8ª série. *São Paulo: Rêspel*, v. 21, 2004.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 1.

LUIZ, E. A. J. Alternativas metodológicas para o ensino de matemática visando uma aprendizagem significativa. In: *VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática-2013*. [S.l.: s.n.], 2013.

MELO, S. A. de; SARDINHA, M. O. B. Jogos no ensino aprendizagem de matemática: uma estratégia para aulas mais dinâmicas. *Revista F@ pciência, ISSN*, v. 2333, n. 4, p. 2, 2009.

NETO, A. C. M. Fundamentos de cálculo. *Rio de janeiro: SBM*, 2015.

PEGN, R. *Empreendedora fatura com loja especializada em feijão*. 2021. Acesso em: 30 set. 2024. Disponível em: <https://revistapegn.globo.com/Banco-de-ideias/Alimentacao/noticia/2021/03/empreendedora-fatura-com-loja-especializada-em-feijao.html>.

PREPARA, E. *Movimento uniforme*. 2024. Acesso em: 30 set. 2024. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/fisica/movimento-uniforme.htm>.

ROBERTO, D. L. Matemática: contexto e aplicações. *São Paulo: Ática*, 2016.

SILVA, A. J. N. da; NASCIMENTO, A. M. P. do; MUNIZ, C. A. O necessário olhar do professor sobre a produção matemática das crianças nos anos iniciais. *Educação Matemática em Revista*, v. 22, n. 54, p. 48–55, 2017.

SMOLE, K. S. et al. *Cadernos do Mathema: Ensino Médio: Jogos de matemática de 1º a 3º ano*. [S.l.]: Artmed Editora, 2008.

STEWART, J. Precalculus mathematics for calculus/james stewart, lothar redlin, saleem watson; ed. *J. Stewart.–Belmont: Brooks/Cole Cengage Learning*, v. 1062, 2009.

THIOLLENT, M. *Metodologia da pesquisa-ação*. [S.l.]: Cortez editora, 2022.

VERAS, E. *Plano Cartesiano Reciclado - Como Fazer e Usar*. 2015. <https://www.youtube.com/watch?v=NDXCiD9LD3s>. Acessado em: 24 de julho de 2024.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. [S.l.]: Artmed Editora, 1998.

ANEXO A – Pré-teste

1. (ENEM 2023) Para concretar a laje de sua residência, uma pessoa contratou uma construtora. Tal empresa informa que o preço y do concreto bombeado é composto de duas partes: uma fixa, chamada de taxa de bombeamento,e uma variável, que depende do volume x de concreto utilizado. Sabe-se que a taxa de bombeamento custa $R\$$ 500,00 e que o metro cúbico do concreto bombeado é de $R\$$ 250,00.

   A expressão que representa o preço y em função do volume x, em metro cúbico, é:

   a) $y = 250x$

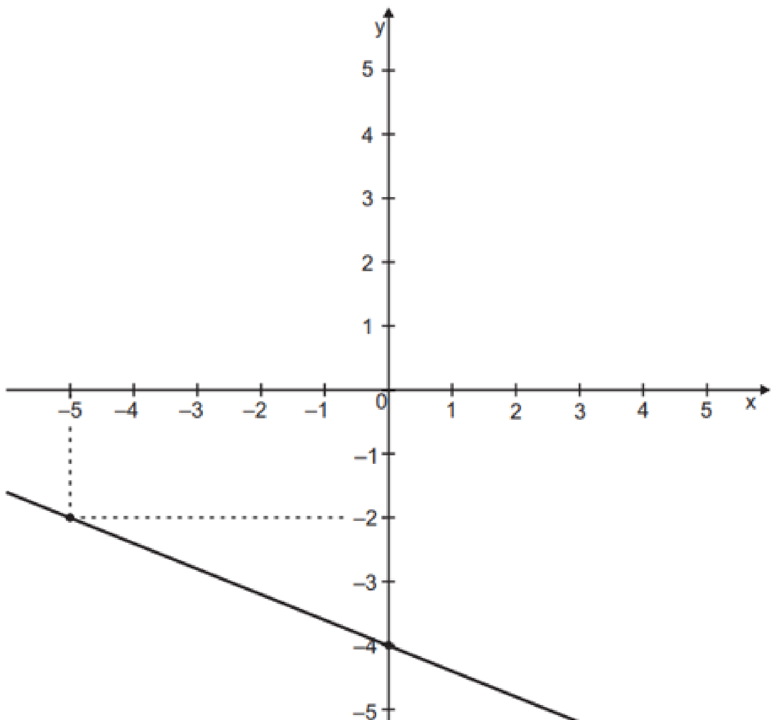
   b) $y = 500x$

   c) $y = 750x$

   d) $y = 250x + 500$

   e) $y = 500x + 250$

2. (SAEPE 2022) Considere uma função polinomial f do 1º grau, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cujo gráfico está representado abaixo.



   A lei de formação dessa função f é:

a) $f(x) = -5x - 2$

b) $f(x) = -4x - 22$

c) $f(x) = -\frac{5}{2}x - 10$

d) $f(x) = -\frac{2}{5}x - 4$

e) $f(x) = \frac{6x}{5} + 4$

3. (SAEPE 2022) Cássio trabalha como pesquisador e, para a realização de um experimento, anotou as temperaturas registradas por uma estação meteorológica. A tabela abaixo apresenta as anotações do tempo decorrido, em horas, do início da observação dessas temperaturas.

Tempo decorrido (em horas)	Temperatura (°C)
1	12
2	10
3	8
4	6

A partir dos dados dessa tabela, Cássio percebeu que poderia estabelecer uma função polinomial do 1° grau que relaciona o tempo decorrido, em horas, representado por x, e a temperatura, em °C, representada por $f(x)$. A lei de formação dessa função está representada em:

a) $f(x) = -2x + 14$.

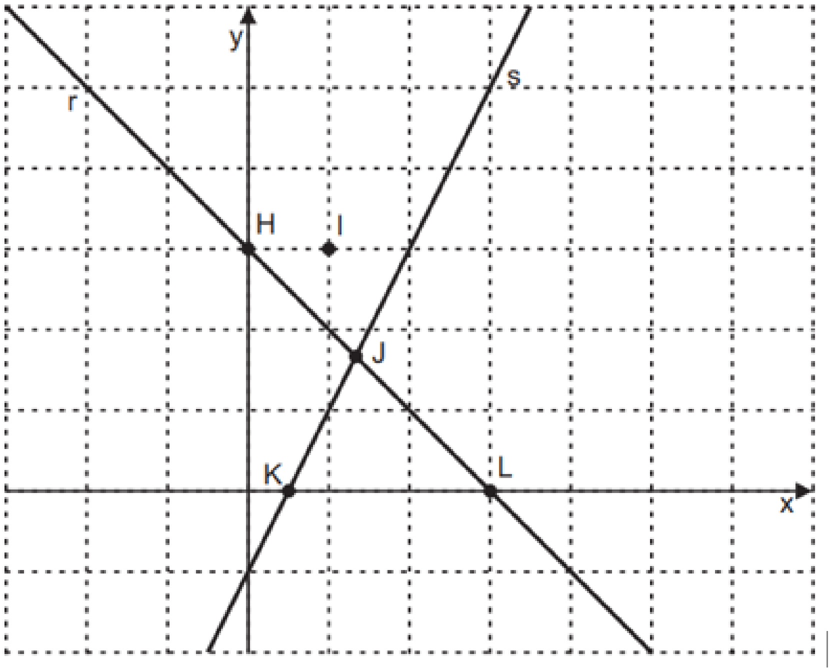
b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{25}{2}$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 7$

d) $f(x) = x + 12$.

e) $f(x) = x - 2$.

4. (SAEPE 2019) Observe abaixo as duas retas r e s traçadas em um plano cartesiano em que os pontos H, I, J, K, L foram destacados.



A solução do sistema que envolve as equações das retas r e s é o ponto:

a) H.

b) I.

c) J.

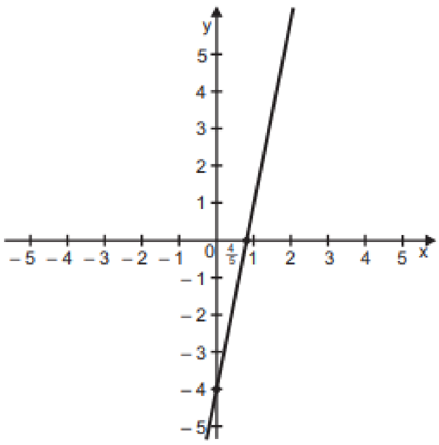
d) K.

e) L.

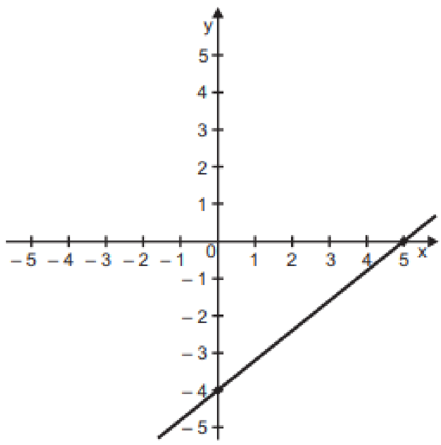
5. (SAEPE 2022) Considere uma função polinomial do 1º grau $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo coeficiente linear é – 4 e o coeficiente angular é 5.

O gráfico dessa função f está representado em:

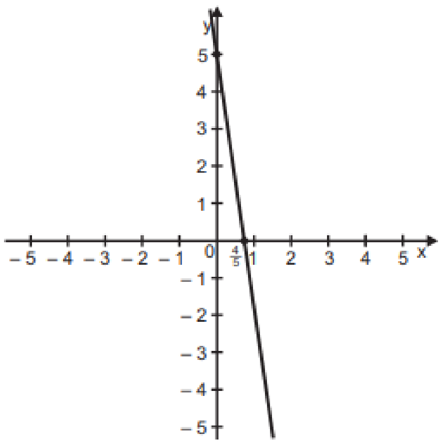
A)



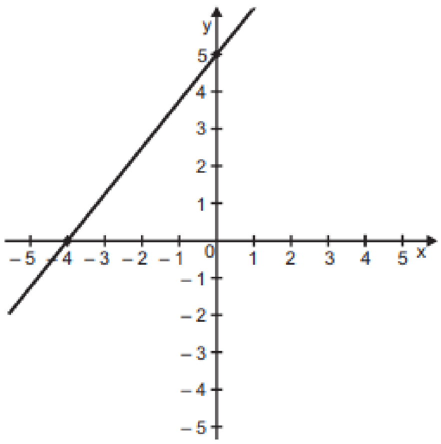
B)



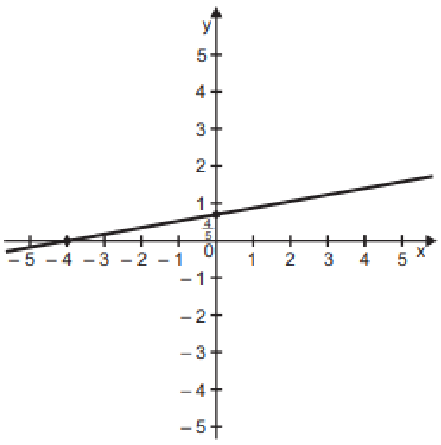
C)



D)



E)



6. (SAEPE 2019 – ADAPTADA) Qual é a equação da reta que passa pelos pontos de coordenadas (0,1) e (3,2) ?

   a) $y = -3x - 1.$

   b) $y = \dfrac{x}{3} + 1$

   c) $y = x + 3$

   d) $y = 3x + 1$

   e) $y = 3x + 2.$

ANEXO B – Ficha de exercícios

1. (Autoral) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = ax + b$, com a e b números reais e $a \neq 0$. Sabendo que $f(-3) = 12$ e $f(1) = 4$, determine:

   a) Os coeficientes angular e linear da função f.

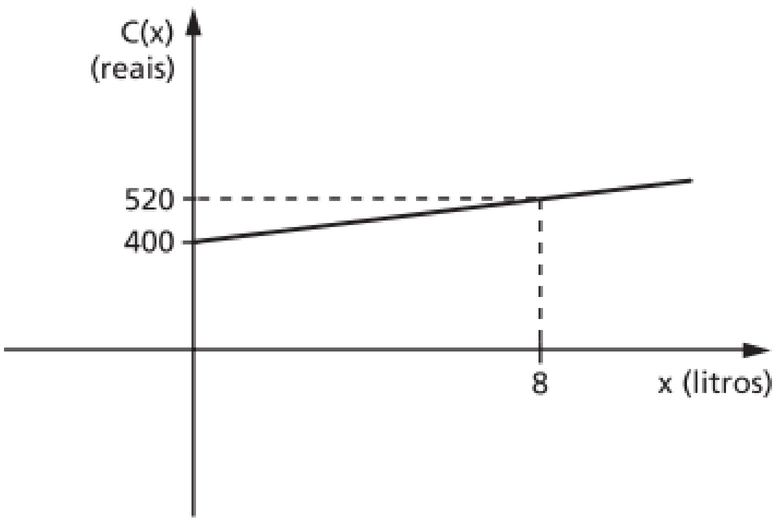
   b) Os valores de $f(-1)$, $f(\frac{-1}{4})$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ e $f(2)$.

   c) O zero da função f.

   d) As coordenadas do ponto que o gráfico de f corta o eixo y.

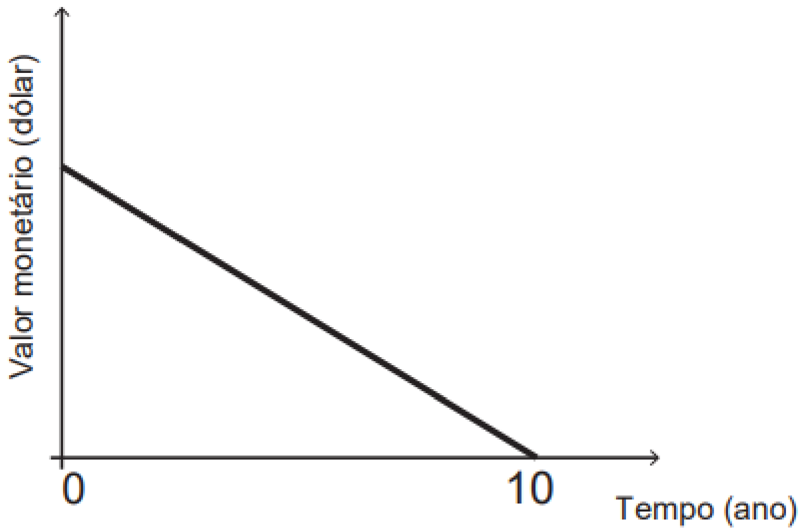
   e) Esboce o gráfico da função f sinalizando as interseções com os eixos x e y.

2. (IEZZI, 2013) O custo C de produção de x litros de uma certa substância é dado por uma função afim de x, com $x \geq 0$, cujo gráfico está representado abaixo.



   Nessas condições, o custo de $R\$$ 700,00 corresponde à produção de quantos litros?

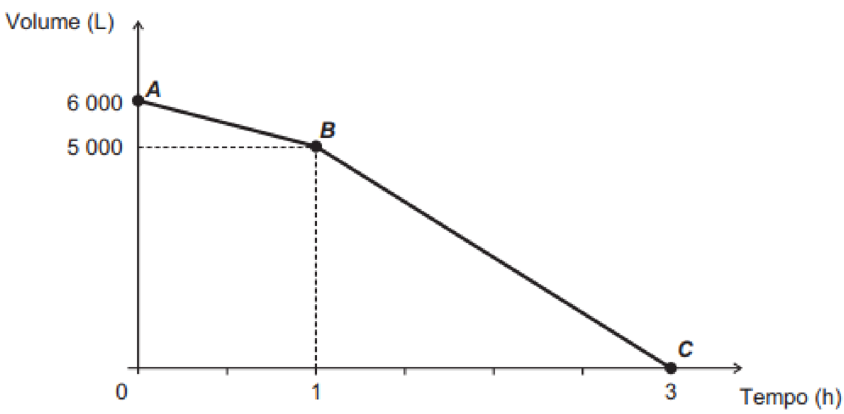
3. (ENEM 2017 - PPL) Um sistema de depreciação linear, estabelecendo que após 10 anos o valor monetário de um bem será zero, é usado nas declarações de imposto de renda de alguns países. O gráfico ilustra essa situação.



Uma pessoa adquiriu dois bens, A e B, pagando 1200 e 900 dólares, respectivamente. Considerando as informações dadas, após 8 anos, qual será a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens?

a) 30
b) 60
c) 75
d) 240
e) 300

4. (ENEM 2016) Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.



Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

a) 1000

b) 1250

c) 1500

d) 2000

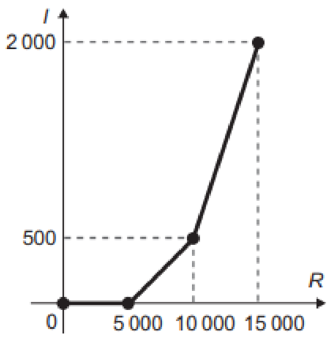
e) 2500

5. (ENEM 2021)O quadro representa a relação entre o preço de um produto (R) e seu respectivo imposto devido (I).

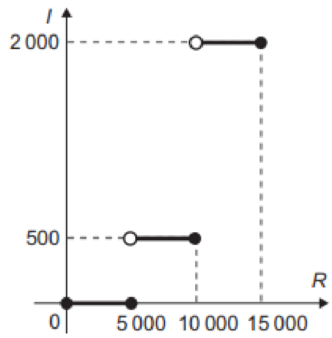
Preço do produto (*R*)	**Imposto devido (*I*)**
$R \leq 5\,000$	isento
$5\,000 < R \leq 10\,000$	10% de $(R - 5\,000)$
$10\,000 < R \leq 15\,000$	$500 + 30\%$ de $(R - 10\,000)$

O gráfico que melhor representa essa relação é:

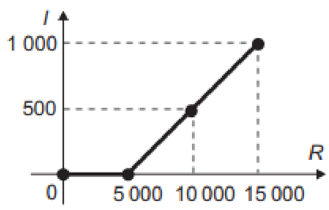
A



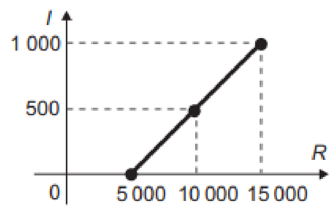
D



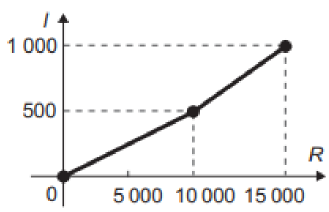
B



E



C



6. (ENEM 2022-ADAPTADA).O funcionário de uma loja tem seu salário mensal formado por uma parcela fixa de 675 reais mais uma comissão que depende da quantidade de peças vendidas por ele no mês. O cálculo do valor dessa comissão é feito de acordo com estes critérios:

   - até a quinquagésima peça vendida, paga-se 5 reais por peça;
   - a partir da quinquagésima primeira peça vendida, o valor pago é de 7 reais por peça.

   Represente por q a quantidade de peças vendidas no mês por esse funcionário, e por S(q) o seu salário mensal, em real, nesse mês.

   A expressão algébrica que descreve $S(q)$ em função de q é:

   a) $S(q) = 675 + 12q$

   b) $S(q) = 325 + 12q$

   c) $S(q) = 675 + 7q$

   d) $S(q) = \begin{cases} 625 + 5q, & \text{se } q \leq 50 \\ 925 + 7q, & \text{se } q > 50 \end{cases}$

   e) $S(q) = \begin{cases} 675 + 5q, & \text{se } q \leq 50 \\ 575 + 7q, & \text{se } q > 50 \end{cases}$

ANEXO C – Desafio da dinâmica de rotação por estações e atividades propostas em cada estação.

Situação-problema inicial: Questão desafio.

1. (Autoral). Com base na lei da oferta e da demanda, considerada fundamental para o funcionamento sustentável de um mercado, vamos investigar as conexões existentes entre o conceito de equilíbrio de mercado e o ponto de intersecção entre as curvas de oferta e demanda.

   Para isso, é fundamental compreender que as quantidades que vendedores e compradores desejam negociar em função do preço de um produto podem ser ilustradas, respectivamente, pelas curvas de oferta e demanda desse produto. Além disso, o equilíbrio de mercado somente é alcançado quando a quantidade demandada é igual à quantidade ofertada.

   A partir dessas informações, resolva o seguinte problema:

Figura 59 – Imagem da Questão desafio: Lei da oferta e da procura.

Fonte: (HENRIQUE, 2015)

Em um certo mercado, as quantidades ofertadas e demandadas de um produto são representadas, respectivamente, pelas funções $Q_O(x) = 3x+100$ e $Q_D(x) = -2x+400$, onde Q_O, Q_D e x representam, nessa ordem, a quantidade ofertada, a quantidade demandada e o preço unitário do produto em reais.

a) Qual o preço de equilíbrio de mercado?

b) Qual é a quantidade comercializada nesse mercado quando ele estiver em equilíbrio?

c) Quais as coordenadas do ponto de interseção das retas de oferta e demanda?

d) Esboce as retas de oferta e demanda deste mercado, e sinalize o ponto de intersecção destas retas.

Atividades propostas em cada estação.

- **Atividade da Estação 01:** Ler a seção sobre a interseção de retas na página 74 do livro Matemática: Ciência e aplicações: Ensino Médio, volume 1, de Gelson et al. (2016), e listar as informações mais relevantes em tópicos que auxiliem na resolução do problema inicial. (15 minutos)

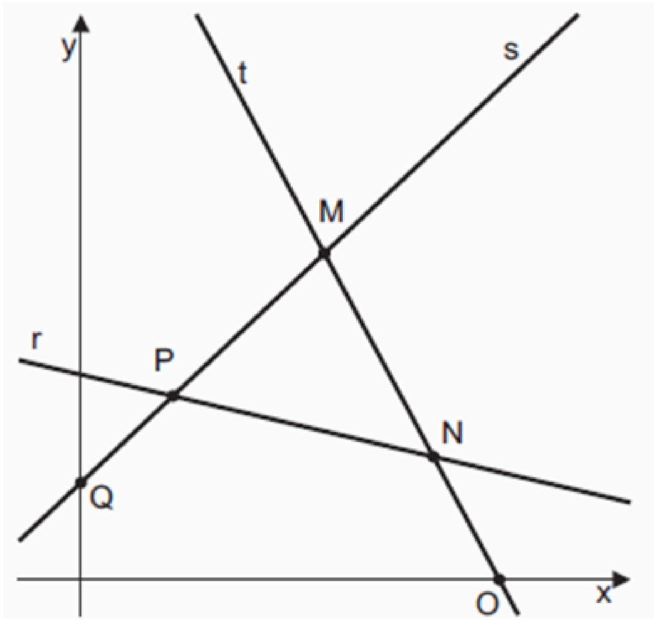
- **Atividade da Estação 02:** Registrar as principais informações de um vídeo, que fornece conhecimentos importantes para a resolução da situação-problema proposta no início da aula. (15 minutos)

  Vídeo sugerido: <https://www.youtube.com/watch?v=1CBuGGC8CpM>. (LABIM, 2017).

- **Atividade da Estação 03:** Resolver as três questões abaixo, relacionadas com a habilidade abordada na situação problema inicial. Nesta estação os alunos poderão consultar o livro didático. (15 minutos)

  Observação: Apesar das questões abaixo serem de múltipla escolha, os alunos devem apresentar uma justificativa escrita para cada problema proposto.

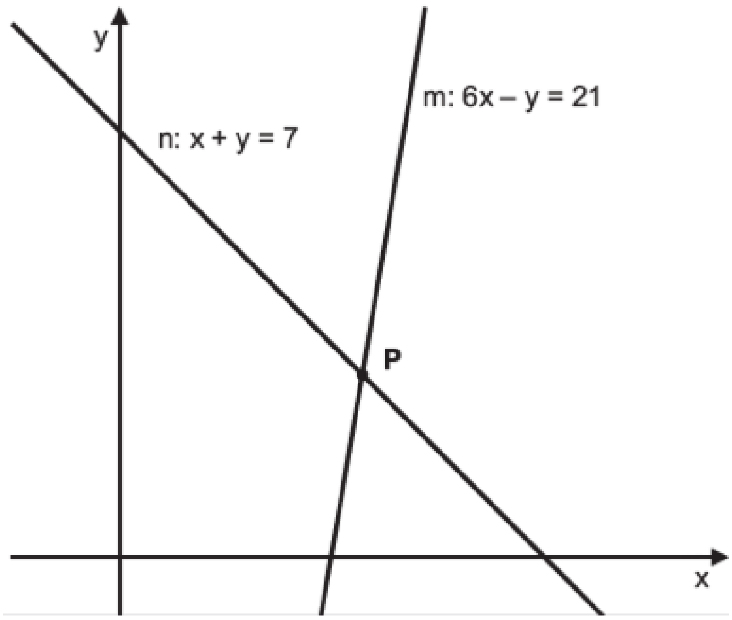
1. (SAEPE 2018). Observe, no plano cartesiano abaixo, as retas r, s e t e os pontos M, N, O, P e Q.



A solução do sistema de equações formado pelas equações das retas s e t está representado nesse plano cartesiano pelo ponto:

a) M.
b) N.
c) O.
d) P.
e) Q.

2. (SAEPE). No plano cartesiano abaixo estão representados as retas m, n e suas respectivas equações.



As coordenadas do ponto P, intersecção dessas retas, são:

a) $(1, 1)$.
b) $(4, 3)$.
c) $(5, -2)$.
d) $(7, 0)$.
e) $(6, -1)$.

3. Considere duas retas r e s concorrentes no plano cartesiano. As equações dessas retas são, respectivamente, $y = 2x + 1$ e $y = -x + 4$.

   O ponto de interseção dessas retas é:

   a) $(-5, 3)$.
   b) $(1, 3)$.
   c) $(5, -1)$.
   d) $(-2, 8)$.
   e) $(3, 7)$.

- **Atividade da Estação 04:** Representar geometricamente a situação problema utilizando o GeoGebra e estabelecer conexões com a solução algébrica do desafio proposto. (15 minutos)

ANEXO D – Imagens motivadoras e situações-problema, referentes ao Encontro 5.

Relação quantidade x preço na compra de feijão a granel.

Figura 60 – Venda de feijão a granel da DaquiÓ

Fonte: (ALBUQUERQUE, 2024)

1. (Autoral). “Junto com o arroz, o feijão faz parte da combinação mais popular no prato dos brasileiros e foi a matéria-prima escolhida pela professora de inglês Vinha da Ávila, 55 anos, para transformar a paixão de cozinhar em negócio. Em 2018, ela abriu as portas da loja boutique DaquiÓ – o feijão tá na mesa, na região do Brooklin, em São Paulo, e oferece, pelo menos, 12 tipos do popular grão em três formatos diferentes: congelado, cozido no dia ou a granel.” (PEGN, 2021)

   A Tabela 11 mostra como o preço de determinada compra varia de acordo com a quantidade de feijão carioca comprada pelos clientes da loja boutique DaquiÓ:

Tabela 11 – Quantidade x Preço do feijão carioca.

Quantidade(kg)	Preço(R\$)
1	8
2	16
3	24
4	32
$\vdots$	$\vdots$
10	80
$\vdots$	$\vdots$

a) A partir destas informações, qual o preço pago por um cliente que deseja comprar $6,4$ kg desse feijão carioca a granel? E por um cliente que deseja comprar 700 g deste feijão carioca a granel?

b) Quantos quilos de feijão carioca foram comprados por um cliente cujo valor final da compra foi de R\$ 45,30?

c) Considerando que as grandezas preço e quantidade se relacionam por meio de uma função afim, determine a lei de formação desta função.

Para responder os próximos itens leia a definição abaixo:

Duas grandezas são consideradas diretamente proporcionais quando, ao aumentar uma delas, a outra também aumenta na mesma proporção. Analogamente, se uma das grandezas diminui, a outra diminui na mesma proporção. De maneira equivalente, se duas grandezas são diretamente proporcionais, a razão entre seus valores correspondentes é sempre uma constante k, conhecida como constante de proporcionalidade.

d) No contexto desse problema, as grandezas preço e quantidade são diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.

e) Qual o valor da constante de proporcionalidade $k = \frac{p}{q}$, em que p e q representam respectivamente as variáveis preço e quantidade?

f) Existe alguma relação entre a constante de proporcionalidade k e a taxa de variação da função que representa a relação entre o preço e a quantidade?

Relação tempo x posição no movimento retilíneo uniforme.

Figura 61 – Atletas competindo em uma corrida

(PREPARA, 2024)

2. (Autoral) Um corredor percorre uma estrada se movimentando de acordo com a função horária $s(t) = 12t + 15$, em que $s(t)$ representa a posição do corredor (em km) e t representa o tempo (em horas).

   a) Depois de quanto tempo o corredor passa pelo marco do quilômetro 39 dessa rodovia?

   b) Após 1,5 h o corredor terá percorrido quantos quilômetros?

   c) Esboce o gráfico da função $s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $s(t) = 12t + 15$.

   d) Com que velocidade o corredor percorre essa estrada? Qual a relação existente entre a taxa de variação da função s e a velocidade do corredor? Justifique sua resposta

ANEXO E – Pós-teste.

1. O salário de um vendedor é composto por uma parte fixa de $R\$$ 2000,00 mais uma comissão de $R\$$ 50,00 para cada produto vendido. A expressão que representa o salário y (em reais) do vendedor em função da quantidade x de produtos vendidos é:

   a) $y = 50x$

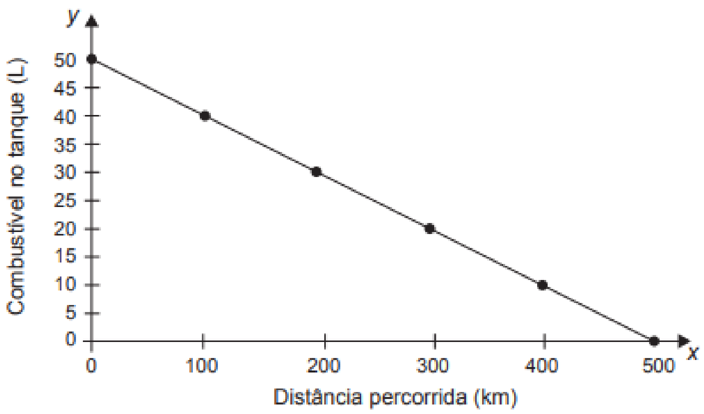
   b) $y = 2000x$

   c) $y = 750x$

   d) $y = 50x + 2000$

   e) $y = 2000x + 50$

2. (ENEM 2018 - PPL). Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



   A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:

   a) $y = -10x + 500$

   b) $y = \dfrac{-x}{10} + 50$

   c) $y = \dfrac{-x}{10} + 500$

   d) $y = \dfrac{x}{10} + 50$

   e) $y = \dfrac{x}{10} + 500$

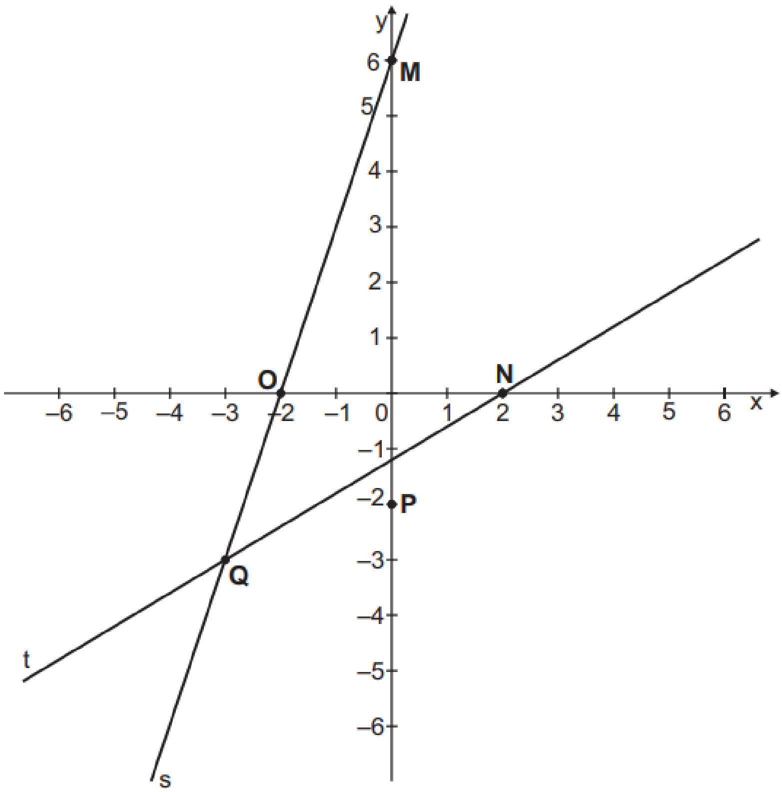
3. (SAEB 2007) Um comerciante, preocupado com a procura de um determinado produto por parte dos consumidores, resolveu anotar as quantidades vendidas em função dos preços praticados, em um determinado período de tempo. Considere que a variável x representa os preços, em unidade monetária, e y representa as unidades vendidas, conforme a tabela seguinte:

x($)	3	6	9	12	15
y(unidades)	15	12	9	6	3

A equação que permite calcular y em função de x é:

a) $y = 6 - x$
b) $y = 9 - x$
c) $y = 12 - x$
d) $y = 15 - x$
e) $y = 18 - x$

4. (SAEPE 2022) Observe, no plano cartesiano abaixo, a representação geométrica de um sistema formado pelas equações das retas s e t, e alguns pontos destacados.



Qual desses pontos é solução desse sistema?

a) M.

b) N.

c) O.

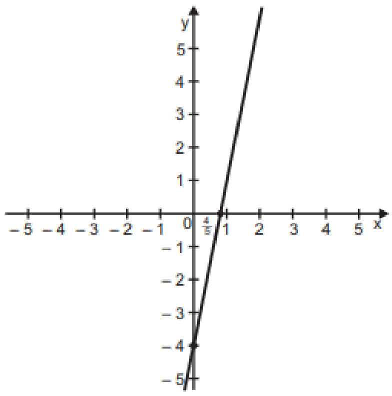
d) P.

e) Q.

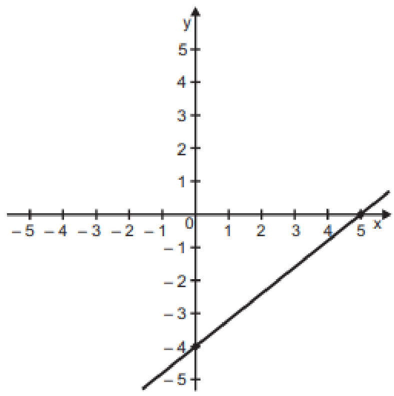
5. (SAEPE 2022 - ADAPTADA) Considere uma função polinomial do 1º grau $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo coeficiente angular é $\dfrac{5}{4}$ e o coeficiente linear é 5.

O gráfico dessa função f está representado em:

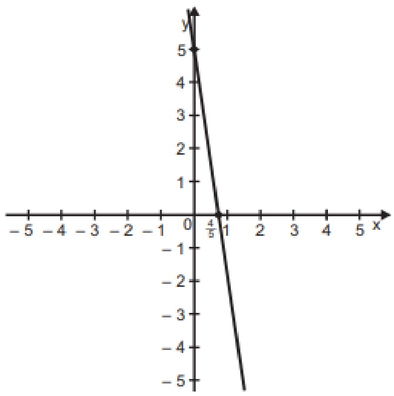
A)



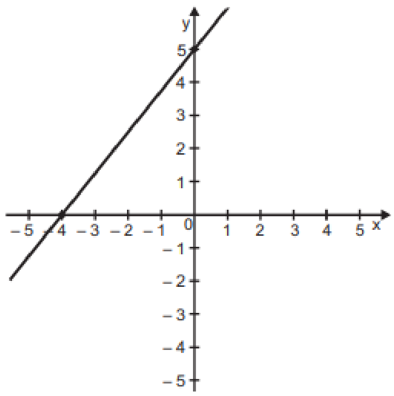
B)



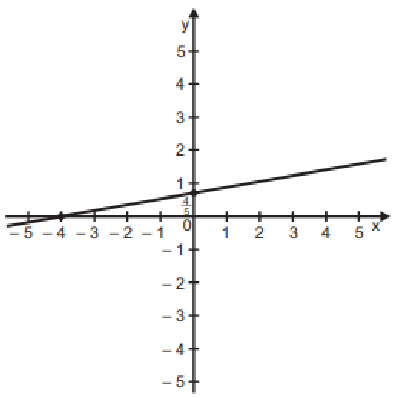
C)



D)



E)



6. (SAEPE 2018 - ADAPTADA) Qual é a equação da reta que passa pelos pontos de coordenadas (4,1) e (2,3)?

   a) $y = -x + 5$.

   b) $y = -2x + 2$.

   c) $y = 2x + 3$.

   d) $y = 4x + 1$.

   e) $y = 6x + 4$.