



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Wellington Martinho da Silva

Propostas de Sequências Didáticas Para a Aprendizagem da
Matemática no Ensino Médio à Luz do Jogo *Instant Insanity*

RECIFE
2025



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Wellington Martinho da Silva

**Propostas de Sequências Didáticas Para a Aprendizagem da
Matemática no Ensino Médio à Luz do Jogo *Instant Insanity***

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera

RECIFE

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

S586p Silva, Wellington Martinho da.
Propostas de sequências didáticas para a aprendizagem da matemática no ensino médio à luz do jogo *instant insanity* / Wellington Martinho da Silva. – Recife, 2025.
144 f.; il.

Orientador(a): Jorge Antonio Hinojosa Vera.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Didática (Ensino médio). 2. Jogos no ensino de matemática. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Aprendizagem ativa 5. Prática de ensino. I. Vera, Jorge Antonio Hinojosa, orient. II. Título

CDD 510

WELLINGTON MARTINHO DA SILVA

**"Propostas de Sequências Didáticas para a Aprendizagem da Matemática
no Ensino Médio à Luz do Jogo Instant Insanity"**

*Trabalho apresentado ao Programa de
Mestrado Profissional em Matemática –
PROFMAT do Departamento de Matemática da
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE
PERNAMBUCO, como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em 27/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera (Orientador) – UFRPE

Prof. Dr. Airton Temistocles Gonçalves de Castro - DMAT/UFPE

Prof. Dr. Fabiano Barbosa Mendes da Silva – PROFMAT/UFRPE

Ao meu filho Wellington Martinho da Silva Segundo, In Memoriam .

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta dissertação.

Primeiramente, agradeço **aos meus pais, Edmilson Martinho e Maria do Carmo**, por todo o amor e apoio ao longo da minha vida. Sem o exemplo e o apoio incondicional de vocês, não teria chegado até aqui.

Agradeço especialmente **à minha esposa, Karine Monique**, pelo apoio constante e pela paciência durante todo o desenvolvimento desta dissertação. Sua compreensão e encorajamento foram fundamentais para que eu pudesse me dedicar aos meus estudos e conquistas acadêmicas. Sou grato por compartilharmos os desafios e alegrias dessa caminhada em família.

Às minhas maiores inspirações, **meus filhos Davi Wellington e Kélida Monique**, agradeço por darem sentido à minha vida. Davi, com sua presença sensível e compreensiva, e Kélida, com seus primeiros sorrisos e olhares, que mesmo tão pequena, já traz luz e esperança ao meu caminho. Vocês são a razão pela qual sigo acreditando na transformação pelo conhecimento.

Registro aqui minha sincera gratidão **ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera**, pela orientação atenta, pela escuta generosa e pelas valiosas contribuições ao longo de todo o processo de construção desta dissertação. Sua dedicação e confiança foram fundamentais para o amadurecimento deste trabalho.

Não poderia deixar de agradecer ao [Laboratório de Ensino da Matemática \(LEMAT\)](#) da [Universidade Federal de Pernambuco \(UFPE\)](#), espaço onde a ideia central desta dissertação nasceu e ganhou forma. Meu reconhecimento especial também vai para **Rafael Ribeiro**, que idealizou essa proposta junto comigo e contribuiu com ideias fundamentais para seu desenvolvimento inicial no LEMAT.

Um agradecimento especial aos meus amigos de turma, em particular **ao Douglas de Souza**, pela ajuda constante nas muitas dúvidas ao longo do curso; **ao Marcilio**, pelos momentos de estudo, pelas maravilhosas refeições em sua casa e pelas constantes caronas até a universidade; e **à Diandra Dalila**, pelo companheirismo e amizade dentro e fora da sala, especialmente nos momentos em que a fome apertava. A amizade e o apoio de vocês foram essenciais para mim.

A todos vocês, meu muito obrigado.

*"Todos os dias, quando acordo,
não tenho mais o tempo que passou."
— Legião Urbana*

Resumo

Este trabalho tem como base o uso de *metodologias ativas* a partir do jogo *Instant Insanity*, com o propósito de convidar professores de Matemática do Ensino Médio a percorrer um percurso que se inicia na construção do jogo e se estende até a sua resolução. Na fase de construção, são apresentadas duas sequências didáticas independentes que exploram os conteúdos de **planificação de sólidos** e **área e perímetro de polígonos**; já na etapa de resolução, são sugeridos outros conteúdos que podem ser abordados, como **análise combinatória**, **probabilidade** e **introdução à teoria dos grafos**. Embora a teoria dos grafos não integre as matrizes curriculares do Ensino Médio, ela oferece ferramentas valiosas para a modelagem matemática. As sequências propostas têm como objetivo promover uma aprendizagem ativa, contextualizada e significativa, transformando o jogo em um recurso didático capaz de enriquecer a prática pedagógica em sala de aula.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Metodologias Ativas. Sequências Didáticas. Jogos Didáticos. Geometria Plana e Espacial. Área e Perímetro. Aritmética. Análise Combinatória. Teoria dos Grafos. Ensino Médio. Instant Insanity.

Abstract

This work is based on the use of *active methodologies* through the game *Instant Insanity*, aiming to invite high school mathematics teachers to undertake a journey that begins with the construction of the game and extends to its solution. In the construction phase, two independent teaching sequences are presented that explore the contents of **cube net development** and **area and perimeter of polygons**; in the solution phase, other topics that can be addressed are suggested, such as **combinatorial analysis**, **probability**, and **introduction to graph theory**. Although graph theory is not formally included in high school curricula, it provides valuable tools for mathematical modeling. The proposed sequences aim to promote active, contextualized, and meaningful learning, transforming the game into a teaching resource capable of enriching pedagogical practice in the classroom.

Keywords: Mathematics Education. Active Methodologies. Didactic Sequences. Educational Games. Plane and Solid Geometry. Area and Perimeter. Arithmetic. Combinatorial Analysis. Graph Theory. High School. Instant Insanity.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Uma permutação do jogo <i>Instant Insanity</i> .	26
Figura 2 – Movimento horizontal	26
Figura 3 – Movimento vertical	26
Figura 4 – Elementos do cubo	34
Figura 5 – Cubo com vértices, arestas e faces destacadas.	34
Figura 6 – Tetraedro com vértices A, B, C e D	35
Figura 7 – Primeira Planificação do tetraedro com vértices A, B, C e D	36
Figura 8 – Segunda Planificação do tetraedro com vértices A, B, C e D	36
Figura 9 – Planificação incorreta do tetraedro com vértices A, B, C e D	37
Figura 10 – Cubo 1 com faces f_1 , f_2 e f_3 destacadas.	37
Figura 11 – Cubo 2 com faces f_4 , f_5 e f_6 destacadas.	37
Figura 12 – Planificação do cubo em cruz.	38
Figura 13 – Planificação do cubo em T.	38
Figura 14 – Planificação colorida dos cubos do <i>Instant Insanity</i>	43
Figura 15 – As Onze Planificação do Cubo	44
Figura 16 – Planificação descolorida dos cubos do <i>Instant Insanity</i>	44
Figura 17 – Planificação colorida dos cubos e com borda do <i>Instant Insanity</i>	45
Figura 18 – Representação dos quadrados f_1 a f_6	47
Figura 19 – Representação sequencial dos quadrados f_1 a f_6	48
Figura 20 – Do quadrado ao retângulo ou triângulo	50
Figura 21 – Peça Elementar	51
Figura 22 – Construção das peças elementares	52
Figura 23 – Encaixe e montagem do cubo.	52
Figura 24 – Diferentes conceitos para área e perímetro	53
Figura 25 – Exemplos de polígonos e não polígonos	55
Figura 26 – Representação esquemática de um polígono de n lados.	56
Figura 27 – Origami- POTI	56
Figura 28 – Origami sobre Malha Quadriculada	57
Figura 29 – Quadrados de lados 2 cm e 3 cm	59
Figura 30 – Quadrado de lado n cm subdividido em quadrados de lado 1 cm.	59
Figura 31 – Quadrado de lado racionais	60
Figura 32 – Formação de um quadrado de lado m a partir de n^2 cópias de Q , cada uma com lado $\frac{m}{n}$.	60
Figura 33 – Quadrado de lado x_k dentro de quadrado de lado l , que está dentro do quadrado de lado y_k , com $x_k < l < y_k$.	61

Figura 34 – Retângulo com lados a e b , ambos naturais, subdividido em quadrados de lado 1 cm.	63
Figura 35 – Retângulo com lados a e b	63
Figura 36 – Formação de um retângulo de lados m e p , a partir de $n \times q$ cópias de Q , cada uma com dimensões $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$	63
Figura 37 – Construção de aproximações para o retângulo de lados a e b	65
Figura 38 – Paralelogramo $ABCD$ com base b e altura h	67
Figura 39 – Paralelogramo $ABCD$ com alturas relativas a AB	67
Figura 40 – Retângulo $CDEF$ feito a partir do Paralelogramo $ABCD$	67
Figura 41 – Triângulo ABC com altura (h) relativa à base AB	68
Figura 42 – Paralelogramo $ABCD$ criado a partir de triângulo ABC	68
Figura 43 – Trapézio com base maior $AB = b$ e altura h	69
Figura 44 – Trapézio com base maior $AB = b$, altura h e segmento paralelo a AD saindo de C	69
Figura 45 – Losango com diagonais $AC = D'$ e $BD = d$	70
Figura 46 – Losango com diagonais $AC = \frac{D'}{2} + \frac{D'}{2}$ e $BD = \frac{d}{2} + \frac{d}{2}$	70
Figura 47 – Quadrado e retângulos quadriculados	76
Figura 48 – Passo cinco na dobradura elementar	77
Figura 49 – Passo seis na dobradura elementar	77
Figura 50 – Peça elementar seis	81
Figura 51 – Área da logomarca	81
Figura 52 – Grafo $G = (V, E)$	98
Figura 53 – Subgrafos da solução do <i>Instant Insanity</i> representando as decisões D1 e D2.	98
Figura 54 – Cubo 2	106
Figura 55 – Cubo 3	107
Figura 56 – Cubo 4	108

Lista de tabelas

Tabela 1 – Relação entre o lado do quadrado e sua área	59
Tabela 2 – Características dos cubos do jogo <i>Instant Insanity</i>	87
Tabela 3 – Produtos das faces opostas dos cubos do <i>Instant Insanity</i>	90
Tabela 4 – Produtos correspondentes aos pares de faces opostas dos cubos	91
Tabela 5 – Todas as combinações de produtos com destaque para aquelas cujo produto é 44 100.	91
Tabela 6 – Combinações cujo produto é 44 100.	93
Tabela 7 – Pares de faces opostas dos cubos do <i>Instant Insanity</i> usados na sequência didática.	95
Tabela 8 – Solução do <i>Instant Insanity</i> por pares ordenados.	96
Tabela 9 – Caminho pelos cubos e cores associadas às decisões D1 e D2 com base nos subgrafos.	99

Lista de Siglas e Abreviações

BNCC Base Nacional Comum Curricular. 17, 27, 33

EM Ensino Médio. 73

ENEM Exame Nacional do Ensino Médio. 30

FGB Formação Geral Básica. 73

LEMAT Laboratório de Ensino da Matemática. 5

OBMEP Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. 45, 56

SAEB Sistema de Avaliação da Educação Básica. 14, 15, 30, 31, 38, 41, 45, 46, 73, 109

SAEPE Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco. 14, 15, 30, 31, 38, 40, 41, 45, 47, 73, 81, 83

UFPE Universidade Federal de Pernambuco. 5

Sumário

	INTRODUÇÃO	16
1	O USO DE JOGOS NA MATEMÁTICA: <i>INSTANT INSANITY</i>	19
1.1	Metodologias Ativas na Educação Matemática	20
1.1.1	Jogos como Ferramentas Didáticas	21
1.1.1.1	Características que Tornam os Jogos Eficazes para o Aprendizado	22
1.1.2	Características e Benefícios dos Jogos Matemáticos	22
1.1.2.1	Exemplos de Jogos Matemáticos	23
1.1.2.2	Revisão de estudos e experiências com jogos matemáticos na sala de aula	24
1.1.2.3	Impactos no desempenho e no engajamento dos estudantes	25
1.1.3	O Jogo <i>Instant Insanity</i>	25
1.1.4	Regras do Jogo	26
1.1.5	Objetivo do Jogo	26
1.1.6	O Jogo <i>Instant Insanity</i> no Contexto Educacional	26
1.2	Competências Gerais e Específicas da BNCC.	27
1.2.1	Competências Gerais	27
1.2.2	Competências Específicas	28
1.3	Habilidades Desenvolvidas da BNCC	30
1.4	Avaliações externas	30
2	A CONSTRUÇÃO DO JOGO À LUZ DA PLANIFICAÇÃO.	32
2.1	Instant Insanity: Um olhar para o estudos de planificação	32
2.2	Um estudo sobre planificações	34
2.2.1	O cubo e suas características	34
2.2.2	Conceito de Planificação	35
2.2.3	As Planificações do Cubo	37
2.3	Sequência Didática 1: Planificação do Cubo	38
2.3.1	Conteúdos Abordados	38
2.3.2	Título:	39
2.3.3	Justificativa	39
2.3.4	Duração:	39
2.3.5	Objetivos	39
2.3.5.1	Objetivo Geral	39
2.3.5.2	Objetivos Específicos	40
2.3.6	Público-alvo	40

2.3.7	Perfil das turmas	40
2.3.8	Habilidades da BNCC	40
2.3.9	Descritores do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE)	41
2.3.10	Recursos	42
2.3.11	Avaliação	42
2.3.12	Etapas da Sequência Didática	42
2.3.12.1	Encontro 1: Oficina de Construção do Jogo	42
2.3.12.2	Encontro 2: Instant Insanity e Planificação.	43
2.3.12.3	Encontro 3: Provas externas a luz do <i>Instant Insanty</i>	45
2.4	Questão Comentada	46
3	A CONSTRUÇÃO DO JOGO À LUZ DA ÁREA E PERÍMETRO.	49
3.1	Origami e Matemática	49
3.2	Origami: Construção dos Cubos	51
3.3	Aprendizagem de Área e Perímetro	52
3.4	Um estudo sobre Área e Perímetro	54
3.4.1	Conceito de Perímetro	54
3.4.2	Conceito de Área	57
3.4.3	Área do Quadrado	58
3.4.3.1	Caso 1: Lados Naturais	59
3.4.3.2	Caso 2: Lados Racionais	60
3.4.3.3	Caso 3: Lados Irracionais	61
3.4.4	Área do Retângulo	62
3.4.4.1	Caso 1: Lados Naturais	62
3.4.4.2	Caso 2: Lados Racionais	63
3.4.4.3	Caso 3: Lados Irracionais	64
3.4.5	Área do Paralelogramo	66
3.4.6	Área do Triângulo	68
3.4.7	Área do Trapézio	69
3.4.8	Área do losango	70
3.5	Sequência Didática 2: Do Origami ao <i>Instant Insanity</i>	71
3.5.1	Conteúdos Abordados	71
3.5.2	Título:	71
3.5.3	Justificativa	71
3.5.4	Duração	71
3.5.5	Objetivos	72
3.5.5.1	Objetivo Geral	72
3.5.5.2	Objetivos Específicos	72

3.5.6	Público-alvo	72
3.5.7	Perfil das turmas	72
3.5.8	Habilidades da BNCC	72
3.5.9	Descritores do SAEB e do SAEPE	73
3.5.10	Recursos	74
3.5.11	Avaliação	74
3.5.12	Etapas da Sequência Didática	74
3.5.12.1	Encontro 1: O jogo, o contrato didático, avaliação diagnóstica e o início da construção das peças elementares.	74
3.5.12.2	Encontro 2: Um estudo sobre área e perímetro	75
3.5.12.3	Encontro 3: Discussão e generalização	77
3.5.12.4	Encontro 4: Conclusão da construção do jogo	78
3.5.12.5	Encontro 5: O jogo e a avaliação	79
3.5.12.6	Encontro 6: Devolução da avaliação	79
3.6	Questões Comentadas	79
3.6.1	Perguntas norteadoras	79
3.6.2	Questão de provas externas	81
4	UMA SÉRIE DE POSSIBILIDADES: A SOLUÇÃO DO <i>INSTANT INSANITY</i>	85
4.1	Um estudo do jogo	85
4.1.1	Uma Aproximação para o Número de configurações do <i>Instant Insanity</i>	85
4.1.2	Um Pouco de probabilidade	87
4.2	Solução por Números Primos	89
4.3	Solução por Pares não Ordenados	94
4.3.1	Definições	94
4.3.2	Solução	95
4.4	Solução por Grafos	96
4.4.1	Algumas Definições Importantes	96
4.4.2	Solução	97
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	100
	REFERÊNCIAS	102
	APÊNDECE A: Moldes para construção dos Cubos	105
	APÊNDECE B: Provas Externas Sobre Planificação	109
	APÊNDECE C: Figura para análise de área e perímetro	113

Introdução

Este trabalho tem origem no Laboratório de Ensino de Matemática (LEMAT) da UFPE, na graduação, onde a proposta foi inicialmente idealizada, embora não tenha sido concluída naquela ocasião. Posteriormente, a ideia foi retomada e aprofundada durante o mestrado, transformando-se nesta proposta concreta voltada à prática em sala de aula.

A experiência no LEMAT proporcionou a vivência de uma Matemática mais criativa, prática e integrada, evidenciando o potencial do uso de jogos como estratégia para tornar o ensino mais significativo, promovendo o desenvolvimento do raciocínio lógico, a resolução de problemas e a articulação entre diferentes conteúdos.

O professor de Matemática encontrará, neste trabalho, duas sugestões de sequências didáticas voltadas à construção e exploração do jogo *Instant Insanity*: um quebra-cabeça matemático composto por quatro cubos idênticos em tamanho, mas cada face deles é pintada com uma entre quatro cores diferentes, com foco em dois eixos principais: planificação de sólidos e cálculo de área e perímetro. Além disso, são apresentadas sugestões de outros conteúdos que podem ser trabalhados a partir da solução do jogo. As propostas foram elaboradas de modo a garantir a autonomia docente, podendo ser adaptadas à realidade de cada turma.

Justificativa

No Ensino Médio, é comum que a Matemática seja apresentada de forma fragmentada, o que dificulta sua compreensão e afasta os estudantes. A ausência de conexões com o cotidiano contribui para a desmotivação e o aprendizado mecânico.

Diante desse cenário, o jogo *Instant Insanity* configura-se como uma proposta didática capaz de promover uma aprendizagem matemática mais contextualizada e significativa. Sua construção envolve conceitos fundamentais, como planificação do cubo, perímetro e área de polígonos, enquanto sua resolução mobiliza princípios da análise combinatória, da probabilidade e da teoria dos grafos, tornando o aprendizado mais concreto, dinâmico e aplicável à realidade dos estudantes.

Metodologia

A presente dissertação caracteriza-se como uma pesquisa de natureza teórica, com foco na elaboração de duas sequências didáticas baseadas no jogo *Instant Insanity*, sem aplicação prática em sala de aula. A metodologia adotada consistiu na construção e organização dessas sequências a partir de um estudo bibliográfico sobre metodologias

ativas, uso de jogos na educação matemática, diretrizes da BNCC e descritores do SAEB e SAEPE.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos, além desta introdução e das considerações finais. O primeiro capítulo apresenta os fundamentos teóricos que embasam a proposta, abordando metodologias ativas, o uso de jogos na educação matemática e as diretrizes da BNCC relacionadas à proposta. O segundo capítulo detalha a sequência didática voltada à construção dos cubos do *Instant Insanity*, com ênfase na visualização e análise das planificações. No terceiro capítulo, é apresentada uma sequência didática baseada na técnica de origami, com foco no ensino de área e perímetro das figuras planas formadas pelas dobraduras. Por fim, o quarto capítulo discute possíveis formas de resolução do jogo, ao mesmo tempo em que sugere outros conteúdos matemáticos que podem ser explorados a partir desse recurso.

Objetivo Geral

O trabalho apresentar uma proposta de ensino por meio de sequências didáticas baseadas no jogo *Instant Insanity*, com foco nos conteúdos de planificação, área e perímetro, além de indicar outros conteúdos matemáticos que podem ser explorados, de modo a promover uma aprendizagem mais integrada, significativa e alinhada à realidade dos estudantes do Ensino Médio.

Objetivos Específicos

- Explorar o uso de jogos como recurso didático no ensino da Matemática;
- Desenvolver uma sequência didática voltada ao ensino de planificação de sólidos geométricos a partir da montagem dos cubos do jogo;
- Desenvolver uma sequência didática voltada ao ensino do cálculo de áreas e do perímetros de figuras planas a partir da montagem dos cubos do jogo;
- Solucionar o jogo, ao mesmo tempo em que se sugere ao professor explorá-lo para o trabalho de conceitos como análise combinatória e probabilidade.
- Introduzir os conceitos fundamentais da teoria dos grafos, evidenciando sua aplicação na resolução do jogo
- Articular os conteúdos trabalhados com habilidades previstas na [Base Nacional Comum Curricular \(BNCC\)](#);
- Contribuir para a formação de professores, oferecendo material prático e aplicável em sala de aula.

A proposta aqui apresentada pretende contribuir com a prática pedagógica de professores de Matemática do Ensino Médio, oferecendo uma alternativa criativa, acessível e contextualizada. Ao utilizar este jogo como recurso didático, promove-se uma aprendizagem mais envolvente, colaborativa e alinhada às necessidades dos estudantes. Acredita-se que a Matemática pode e deve ser vivida com significado, despertando nos alunos o prazer de aprender e o desejo de compreender o mundo que os cerca.

1 O Uso de Jogos na Matemática: *Instant Insanity*

O presente capítulo tem como objetivo apresentar os fundamentos teóricos que sustentam esta proposta didática intitulada *Propostas de Sequências Didáticas Para a Aprendizagem da Matemática no Ensino Médio à Luz do Jogo Instant Insanity*. Este referencial visa estabelecer conexões entre metodologias ativas de ensino, o uso de jogos como ferramentas pedagógicas e a importância da modelagem de problemas reais — como a solução do jogo — no processo de aprendizagem matemática, com ênfase nos conteúdos e nas habilidades necessárias para resolvê-los.

A versão do jogo *Instant Insanity* adotada nesta obra foi criada pelo programador californiano Franz Owen Armbruster (1929-2013) e lançado comercialmente com esse nome pela Parker Brothers na década de 1960 com milhões de cópias vendidas (1).

Trata-se de um quebra-cabeça lógico que desafiava os jogadores a organizar lado a lado quatro cubos de modo que cada face visível exibisse cores diferentes. Embora à primeira vista o objetivo pareça simples, o jogo envolve um alto grau de complexidade, exigindo estratégias combinatórias e raciocínio lógico avançado (2).

A escolha do *Instant Insanity* como base para esta proposta didática é fundamentada em seu potencial pedagógico, permitindo que conceitos de análise combinatória, geometria plana e espacial bem como a teoria dos grafos sejam exploradas de forma prática e engajante. No contexto educacional, o jogo oferece aos alunos a oportunidade de manipular sólidos geométricos, compreender suas representações planas e desenvolver habilidades cognitivas, como raciocínio lógico e visualização espacial (3).

Conforme Alves e Costa (4), o uso de jogos no ensino da matemática é uma metodologia eficaz, pois proporciona um ambiente lúdico que favorece o aprendizado ativo. Segundo os autores, “atividades lúdicas, ao integrarem diversão e desafio, potencializam o engajamento dos estudantes e facilitam a compreensão de conceitos complexos” (4, p. 47). Nesse sentido, o *Instant Insanity* destaca-se como uma ferramenta pedagógica que vai além do mero entretenimento, transformando o ensino de conceitos abstratos em uma experiência significativa e contextualizada.

Além disso, conteúdos aqui trabalhados, frequentemente apresentados de forma descontextualizada, encontram no jogo um meio de conectar a teoria com aplicações práticas. Estudos como os de Silva e Pereira (5) destacam que a aprendizagem de geometria espacial ganha relevância quando associada a atividades manipulativas, que permitem aos estudantes construir e visualizar sólidos de maneira interativa.

Os temas abordados em cada uma das sequências didáticas foram escolhidos com base em sua relevância pedagógica para o ensino da Matemática, visando à promoção de uma aprendizagem eficaz e significativa.

As metodologias ativas destacam-se por engajar os estudantes em processos de aprendizagem mais dinâmicos e significativos (6). Nesse contexto, o jogo *Instant Insanity* possibilita a exploração de diversas áreas da Matemática, como a geometria espacial, que se mostra essencial para o desenvolvimento de habilidades cognitivas e para a conexão com aplicações práticas, a exemplo do design, da engenharia e da arquitetura (7). Adicionalmente, os jogos matemáticos são incorporados ao processo de ensino-aprendizagem devido ao seu potencial de tornar o aprendizado mais prazeroso e motivador, ao mesmo tempo em que facilitam a compreensão de conceitos abstratos (8).

Dessa forma, este capítulo busca fundamentar teoricamente este trabalho, justificando a escolha de uma abordagem inovadora para o ensino de matemática no ensino médio. Ao combinar a ludicidade do *Instant Insanity* com a prática pedagógica, a proposta promove o engajamento dos alunos, a superação de dificuldades conceituais e o desenvolvimento de habilidades essenciais para o aprendizado matemático.

1.1 Metodologias Ativas na Educação Matemática

As metodologias ativas têm se destacado como estratégias educacionais que promovem a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem. Diferentemente do modelo tradicional, em que o professor é o principal transmissor do conhecimento e os alunos são receptores passivos, as metodologias ativas colocam os estudantes no centro do processo educacional. Segundo Moran (6), essas práticas incentivam os alunos a construir conhecimento de maneira colaborativa, investigativa e contextualizada, o que fortalece o desenvolvimento de habilidades críticas, reflexivas e criativas. Entre os princípios fundamentais das metodologias ativas de acordo Bacich (9), destacam-se:

- **Protagonismo do estudante:** Os alunos assumem um papel ativo no aprendizado, tomando decisões e solucionando problemas relacionados aos conteúdos abordados.
- **Aprendizagem contextualizada:** Os conhecimentos são explorados em situações reais ou simuladas, conectando os conteúdos escolares à realidade cotidiana dos estudantes.
- **Interatividade e colaboração:** O processo é enriquecido por meio da troca de ideias, do trabalho em equipe e do uso de tecnologias digitais para a construção coletiva do conhecimento.

- **Feedback contínuo:** Professores e colegas oferecem retornos constantes durante o processo de aprendizagem, o que contribui para ajustes e melhorias nas estratégias adotadas pelos alunos.

No ensino de matemática, as metodologias ativas são especialmente relevantes por sua capacidade de transformar conteúdos tradicionalmente vistos como abstratos e complexos em experiências práticas e significativas. De acordo com Silva e Souza (10), “a matemática exige que o estudante desenvolva não apenas competências técnicas, mas também habilidades como raciocínio lógico, resolução de problemas e criatividade, todas elas beneficiadas por práticas ativas e participativas” (10, p. 89).

1.1.1 Jogos como Ferramentas Didáticas

O uso de jogos no ensino tem se consolidado como uma metodologia eficiente para promover o aprendizado de maneira dinâmica e interativa. No contexto educacional, os jogos funcionam como ferramentas pedagógicas que combinam diversão, desafio e aprendizado, criando um ambiente que motiva os alunos a se envolverem ativamente com os conteúdos propostos. Segundo Brito (8), “os jogos despertam o interesse dos estudantes ao transformar conceitos abstratos em experiências práticas, favorecendo a construção de conhecimentos significativos” (8, p. 45).

Os jogos desempenham um papel multifacetado no processo educacional, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo, social e emocional dos alunos. No ensino de matemática, eles são especialmente eficazes segundo Alves e Costa (4), pois ajudam a:

- **Facilitar a compreensão de conceitos abstratos:** Os jogos possibilitam que os estudantes visualizem, manipulem e experimentem conceitos matemáticos de maneira concreta. Como exemplo, o jogo *Instant Insanity* contribui para a assimilação de diversos conteúdos abordados nesta obra, como planificações geométricas e visualização espacial, ao proporcionar situações que exigem raciocínio estruturado e interpretação de representações tridimensionais.
- **Estimular o raciocínio lógico e a resolução de problemas:** Durante os jogos, os alunos são incentivados a planejar estratégias, identificar padrões e tomar decisões, habilidades centrais para a matemática.
- **Promover o aprendizado ativo e colaborativo:** A interação durante os jogos, seja em dupla ou em grupo, estimula a troca de ideias e o trabalho em equipe, competências fundamentais para a vida acadêmica e social.
- **Reduzir a ansiedade e tornar o aprendizado mais agradável:** A ludicidade dos jogos cria um ambiente mais descontraído, reduzindo o medo de errar e incentivando a experimentação .

Além disso, jogos permitem que os professores acompanhem de maneira mais natural o progresso dos alunos, identificando dificuldades e ajustando a abordagem pedagógica de forma imediata.

1.1.1.1 Características que Tornam os Jogos Eficazes para o Aprendizado

Para que os jogos sejam ferramentas eficazes no ensino, é importante que apresentem características específicas (9):

1. **Desafio adequado:** Jogos devem ser desafiadores o suficiente para estimular o engajamento, mas não tão difíceis que causem frustração. A dificuldade deve ser ajustável para atender a diferentes níveis de habilidade dos estudantes.
2. **Objetivos claros:** Um bom jogo educacional deve ter metas definidas que estejam alinhadas aos conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos. No caso do *Instant Insanity*, o objetivo de organizar os cubos para atender a uma regra específica envolve diretamente habilidades como raciocínio lógico e visualização tridimensional.
3. **Feedback imediato:** Jogos eficazes fornecem retorno imediato sobre as ações do jogador, permitindo que ele avalie seu progresso e ajuste suas estratégias.
4. **Elementos de ludicidade e engajamento:** A presença de regras, competição saudável e um componente de diversão é fundamental para manter os alunos interessados e envolvidos.
5. **Conexão com a realidade ou com outros conteúdos:** Jogos que relacionam seus desafios ao cotidiano ou a aplicações práticas dos conceitos matemáticos são mais eficazes em contextualizar o aprendizado.

No caso específico da matemática, jogos como o *Instant Insanity* têm demonstrado ser poderosas ferramentas pedagógicas. Por meio da manipulação de cubos coloridos, os estudantes não apenas desenvolvem habilidades matemáticas, como também exercitam a criatividade e a persistência na busca por soluções (10).

Dessa forma, a utilização de jogos no ensino representa uma estratégia inovadora e eficaz para promover a aprendizagem significativa, estimular a curiosidade e desenvolver habilidades essenciais para o sucesso acadêmico e pessoal dos estudantes.

1.1.2 Características e Benefícios dos Jogos Matemáticos

Os jogos matemáticos têm se destacado como ferramentas pedagógicas eficazes no ensino de matemática, pois combinam diversão e aprendizado, promovendo o desenvolvimento de habilidades cognitivas e socioemocionais. Por meio de desafios estruturados,

os jogos ajudam os estudantes a construir e aplicar conhecimentos de forma prática, ao mesmo tempo que estimulam o engajamento e a colaboração.

Os jogos matemáticos desempenham um papel central no desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento matemático. Eles criam situações que exigem análise, planejamento e tomada de decisão, habilidades que são transferíveis para problemas matemáticos mais amplos e para situações do dia a dia. Durante um jogo, os alunos:

- **Desenvolvem estratégias:** A necessidade de resolver desafios e superar obstáculos leva os estudantes a criar e testar estratégias, fortalecendo sua capacidade de planejar e pensar criticamente.
- **Identificam padrões:** Muitos jogos exigem a identificação e análise de padrões, um aspecto fundamental da matemática.
- **Resolvem problemas:** A resolução de problemas é uma parte intrínseca dos jogos, que desafiam os alunos a encontrar soluções criativas e eficazes.
- **Praticam a persistência:** Jogos frequentemente incluem tentativas e erros, encorajando os alunos a aprender com os fracassos e a perseverar.

Segundo Brito (8), “os jogos matemáticos são uma oportunidade de ensinar não apenas conteúdos, mas também habilidades essenciais para o raciocínio lógico, como a capacidade de argumentação, a formulação de hipóteses e a validação de soluções” (8, p. 89).

Outro benefício importante dos jogos matemáticos é o aumento do engajamento dos estudantes. Ao transformar conceitos abstratos em atividades desafiadoras e divertidas, os jogos incentivam os alunos a se aprofundarem mais no conteúdo, tornando o aprendizado mais prazeroso e significativo. A ludicidade também contribui para a redução da ansiedade, permitindo que os alunos se sintam mais confortáveis ao enfrentar problemas difíceis, sem o medo de cometer erros.

Portanto, o uso de jogos no ensino de matemática não apenas facilita a compreensão de conceitos matemáticos, mas também torna o processo de aprendizado mais dinâmico, envolvente e acessível, preparando os alunos para resolver problemas de forma criativa e colaborativa.

1.1.2.1 Exemplos de Jogos Matemáticos

Além do *Instant Insanity*, que utiliza cubos coloridos para explorar a lógica e a visualização espacial, outros jogos matemáticos apresentam características e benefícios semelhantes no ensino de conceitos geométricos e lógicos. Alguns exemplos incluem:

- **Tangram:** Um jogo clássico que utiliza peças geométricas para formar figuras específicas. Ele desenvolve habilidades de visualização espacial, decomposição de formas e planejamento, sendo amplamente utilizado no ensino de áreas, perímetros e propriedades geométricas.
- **Pentaminós:** Um jogo baseado em figuras formadas por cinco quadrados conectados. Ele auxilia no estudo de áreas, simetrias e combinações possíveis, além de promover o raciocínio lógico e a resolução de problemas espaciais.
- **Torre de Hanói:** Um jogo de lógica que envolve a movimentação de discos entre pinos, respeitando regras específicas. Focado no desenvolvimento do raciocínio lógico, exige planejamento e análise de sequências.

Esses jogos, assim como o *Instant Insanity*, compartilham características que os tornam eficazes no ensino de matemática: eles são desafiadores, interativos e promovem a construção de conhecimentos de forma prática e envolvente.

Segundo Alves e Costa (4), “os jogos matemáticos criam um ambiente de aprendizado significativo, onde os estudantes podem explorar conceitos, testar hipóteses e aplicar seus conhecimentos de maneira concreta e divertida” (4, p. 120). O uso de jogos no ensino, portanto, não apenas facilita a compreensão dos conteúdos matemáticos, mas também transforma a experiência de aprendizado, tornando-a mais atrativa e acessível para os alunos.

1.1.2.2 Revisão de estudos e experiências com jogos matemáticos na sala de aula

Pesquisas realizadas em diferentes contextos educacionais indicam que os jogos matemáticos são ferramentas eficazes para ensinar conteúdos que vão desde a aritmética básica até a geometria espacial e álgebra avançada. Alves e Costa (4), em um estudo com alunos do ensino médio, analisaram o impacto de jogos matemáticos na compreensão de conceitos de geometria. Os resultados mostraram que 84% dos estudantes demonstraram uma melhora significativa no desempenho após participarem de atividades lúdicas que incluíam jogos como Tangram e Pentaminós.

De forma semelhante, Brito (8) investigou o uso de jogos no ensino de álgebra em turmas do ensino fundamental. O autor observou que atividades baseadas em desafios e competições saudáveis aumentaram a motivação dos alunos e reduziram significativamente os índices de evasão nas aulas de matemática. O estudo também apontou que os estudantes tinham maior disposição para discutir estratégias e trabalhar em equipe, desenvolvendo habilidades colaborativas.

No caso específico do ensino de geometria espacial, Silva e Pereira (2018) destacaram que jogos com características semelhantes ao *Instant Insanity* facilitam o entendimento de conceitos abstratos, como planificações e relações entre dimensões. Em sua pesquisa, os autores verificaram que estudantes que participaram de atividades com jogos apresentaram um desempenho superior em tarefas que exigiam visualização espacial e resolução de problemas.

Esses estudos evidenciam que o uso de jogos na sala de aula não apenas melhora o desempenho acadêmico, mas também cria um ambiente mais dinâmico e interativo, onde os alunos se sentem mais confiantes para explorar e aprender.

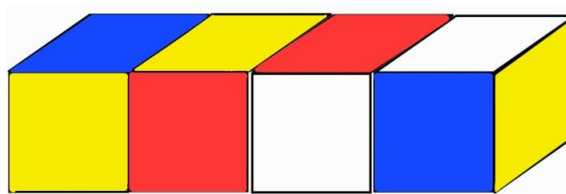
1.1.2.3 Impactos no desempenho e no engajamento dos estudantes

O impacto dos jogos matemáticos no desempenho dos estudantes é amplamente documentado. Segundo Moran (2015), o uso de metodologias ativas, como jogos, estimula o raciocínio lógico e promove uma aprendizagem mais profunda e duradoura. Os alunos que participam de atividades lúdicas frequentemente demonstram maior capacidade de transferir os conhecimentos adquiridos para contextos práticos, o que melhora seu desempenho em avaliações.

Além do desempenho acadêmico, os jogos têm um impacto significativo no engajamento dos estudantes. Ao transformar o aprendizado em uma atividade divertida e desafiadora, os jogos ajudam a superar barreiras emocionais, como a ansiedade matemática — um aspecto que merece atenção especial. Dados divulgados em 2022 pelo Programa para a Avaliação Internacional dos Estudantes (Pisa) revelam um cenário preocupante entre os estudantes brasileiros: 79,5% sentem ansiedade em relação às suas notas em matemática, enquanto 62,3% relatam sentir-se nervosos, tensos ou desamparados ao resolver problemas matemáticos. Esses índices, superiores à média internacional, reforçam a urgência de adotar práticas pedagógicas que contribuam para a redução da ansiedade e promovam um ambiente mais positivo, seguro e acolhedor para a aprendizagem e a exploração dos conceitos matemáticos. Brito (8) destaca que “a ludicidade dos jogos matemáticos é capaz de resgatar o interesse dos alunos pela disciplina, tornando a matemática mais acessível e atrativa” (p. 98).

1.1.3 O Jogo *Instant Insanity*

Este jogo trata-se de um desafio de raciocínio lógico composto por **quatro cubos**, sendo que **cada um deles apresenta suas faces pintadas com quatro cores distintas**, como mostra a figura a seguir:

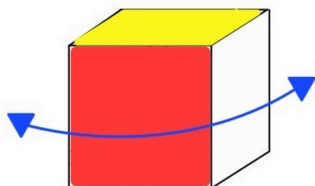
Figura 1 – Uma permutação do jogo *Instant Insanity*.

Fonte: do autor, 2025

1.1.4 Regras do Jogo

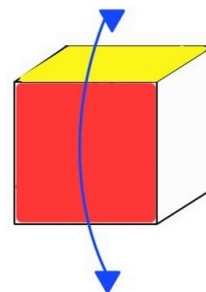
1. Os cubos devem ser dispostos um ao lado do outro conforme a Figura 1, mas não necessariamente nesta ordem, pois a ordem desses cubos *cab*e ao jogador *decidir*. Essa disposição que aparece na figura é apenas uma das várias configurações possíveis. Essa ordem pode ser alterada quantas vezes forem necessárias para alcançar o objetivo do jogo.
2. Cada um dos cubos pode ser rotacionado no sentido horizontal ou vertical (conforme as Figuras 2 e 3) a critério do jogador.

Figura 2 – Movimento horizontal



Fonte: do autor, 2025

Figura 3 – Movimento vertical



Fonte: do autor, 2025

1.1.5 Objetivo do Jogo

O jogador vencerá o jogo se os conjuntos formados pelas quatro faces posicionadas lado a lado contiverem todas as quatro cores disponíveis. Ou seja, ao rotacionar o bloco formado pelos quatro cubos, **cada lado** desse bloco deve conter as quatro cores, sem repetições.

1.1.6 O Jogo *Instant Insanity* no Contexto Educacional

Apesar de seu objetivo simples, o jogo é notavelmente desafiador, exigindo estratégias combinatórias e raciocínio lógico para alcançar a solução. Tais estratégias são aprofundadas por Silver (2) e Brown (11).

A construção do jogo abre um leque de possibilidades ao professor, uma vez que ela pode ser realizada de diferentes formas. Neste trabalho, exploram-se dois métodos distintos — a partir do uso de dobraduras de papel (origami) e de moldes planejados — com o objetivo de oferecer ao docente mais opções de escolha e adaptação. A variedade de possibilidades construtivas foi, inclusive, um das características que tornaram o *Instant Insanity* a escolha mais apropriada para a elaboração desta proposta, pois permite ao professor abordar diferentes conteúdos a partir de cada forma de construção, como os que são explorados nas sequências didáticas propostas nesta obra.

A facilidade de obtenção dos materiais necessários para a construção do jogo é outra característica relevante, que contribui para a viabilidade de sua aplicação em diferentes contextos escolares.

Dessa forma, o jogo reúne características essenciais que o tornam uma ferramenta didática especialmente adequada para aplicação em contextos de sala de aula.

Ao integrar jogos matemáticos ao planejamento pedagógico, os professores podem não apenas aumentar o desempenho dos alunos, mas também transformar a sala de aula em um espaço mais inclusivo, colaborativo e estimulante.

1.2 Competências Gerais e Específicas da BNCC.

A proposta didática apresentada, que utiliza o jogo *Instant Insanity* como eixo central para a elaboração de uma série de sequências didáticas, está em conformidade com as competências gerais e específicas da BNCC (12). Essa abordagem favorece o desenvolvimento de habilidades cognitivas e práticas, promovendo um aprendizado ativo e significativo, alinhado às diretrizes estabelecidas para o ensino médio.

1.2.1 Competências Gerais

Entre as competências gerais atendidas pela proposta, destacam-se:

- **Conhecimento:** Os alunos mobilizam conhecimentos matemáticos (como análise combinatória, geometria, teoria dos grafos e números primos) de forma aplicada e contextualizada, o que favorece uma compreensão mais significativa dos conteúdos.
- **Pensamento científico, crítico e criativo:** A resolução do jogo exige raciocínio lógico, formulação de hipóteses, experimentação e análise de soluções, estimulando a criatividade e a capacidade investigativa.
- **Comunicação:** Durante as atividades, os estudantes precisam explicar estratégias, apresentar soluções e argumentar em grupo, desenvolvendo a comunicação oral, escrita e simbólica.

- **Trabalho e projeto de vida:** Ao participar de uma atividade desafiadora e prática, os estudantes desenvolvem habilidades como perseverança, organização e autonomia, importantes para a construção de seus projetos de vida.
- **Argumentação:** A busca por soluções para o desafio exige que os alunos justifiquem suas decisões, argumentem com base em dados (por exemplo, combinações possíveis) e escutem os colegas, desenvolvendo a argumentação fundamentada.
- **Autoconhecimento e autocuidado:** Ao reduzir a ansiedade matemática por meio do lúdico e da colaboração, a proposta contribui para o bem-estar emocional dos alunos, promovendo autoconfiança e reconhecimento de suas capacidades.
- **Empatia e cooperação:** A resolução do jogo em grupo incentiva o respeito às ideias dos colegas, a escuta ativa e a cooperação para alcançar objetivos comuns.

1.2.2 Competências Específicas

Na área de Matemática, a proposta se relaciona diretamente com as cinco competências específicas:

- **1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.**

O jogo *Instant Insanity* é utilizado como um recurso lúdico que traz uma situação-problema concreta, aproximando os estudantes da aplicação da Matemática a partir de contextos didáticos e cotidianos, favorecendo uma formação mais ampla.

- **2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.**

Embora seja um recurso lúdico, o jogo permite que os estudantes desenvolvam habilidades de raciocínio lógico e análise sistemática, essenciais para compreender problemas complexos e tomar decisões fundamentadas. Os alunos exercitam o planejamento estratégico, a avaliação de possibilidades e organização de dados, competências

que refletem nos processos de investigação e tomada de decisão aplicáveis a situações reais do mundo contemporâneo, como planejamento, otimização de recursos ou análise de sistemas complexos.

- **3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.**

A resolução do jogo exige estratégias combinatórias, análise de possibilidades e construção de modelos matemáticos, permitindo ao estudante verificar soluções e justificar suas escolhas com base em argumentos lógicos.

- **4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.**

O jogo permite múltiplas representações: geométricas (nas planificações e montagem dos cubos), algébricas (nas relações entre medidas e comprimento de peças) e gráficas (no uso de grafos para solução), ampliando a capacidade de comunicação matemática dos alunos.

- **5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.**

Os alunos são incentivados a formular hipóteses e conjecturas sobre a disposição das cores nos cubos e testar possibilidades, desenvolvendo o raciocínio lógico e a argumentação matemática com base em experimentação e validação formal ou empírica.

Essas competências são essenciais para a formação integral dos alunos e são potencializadas pela prática interativa e lúdica proporcionada pelo jogo *Instant Insanity*.

1.3 Habilidades Desenvolvidas da BNCC

Muitas das habilidades previstas na BNCC serão exploradas neste trabalho, com o objetivo de torná-lo uma ferramenta de grande relevância e um importante aliado do professor. Dentre essas habilidades, destacam-se:

- **EM13MAT311 – Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore:** A solução do jogo explora etapas de análise combinatória, envolvendo permutações e agrupamentos das faces dos cubos. Essa abordagem permite a aplicação dos princípios de contagem como estratégia para calcular, organizar e visualizar as diferentes possibilidades de combinação, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e a resolução sistemática de problemas.
- **EM13MAT312 – Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade:** Os alunos podem explorar o espaço amostral das diferentes combinações de cores e calcular a probabilidade de se sortear uma dessas cores.
- **EM13MAT316 – Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema:** A construção de um algoritmo de tentativa e erro ou sistematizado para resolver o *Instant Insanity* pode ser representada por fluxogramas, desenvolvendo o pensamento lógico e a habilidade de abstração.

As habilidades associadas a cada competência estão melhores distribuídas nas sequências didáticas desta obra de forma a proporcionar ao professor uma experiência de leitura e aplicação compatível com suas condições de trabalho. Em cada sequência, essas habilidades estarão devidamente destacadas, conforme o tema central abordado, facilitando a identificação dos objetivos de aprendizagem previstos pela BNCC.

1.4 Avaliações externas

As principais provas externas, como o [SAEB](#), o [SAEPE](#) e o [Exame Nacional do Ensino Médio \(ENEM\)](#), às quais os alunos do 3º ano do ensino médio são incumbidos de participar, são de grande relevância para a construção das sequências didáticas desta obra.

A proposta didática baseada no *Instant Insanity* também está alinhada às matrizes de referência dessas avaliações, que estabelecem descritores específicos relacionados à geometria, análise combinatória e demais componentes abordados aqui.

Entre os descritores atendidos pela presente proposta, destacam-se:

SAEB D11 (Ensino Médio) – Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas e SAEB D12 (Ensino Médio) – Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas: Serão trabalhados na construção do jogo, ao modelarmos suas peças e discutirmos sobre seu formato e a relação com a geometria.

SAEPE D31 – Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples e SAEPE D32 (Ensino Médio) – Resolver problema que envolva probabilidade de um evento: Serão trabalhados na Resolução do jogo como sugestão do potencial pedagógico desse.

Ao trabalhar diretamente com essas competências e descritores, a proposta prepara os estudantes não apenas para os desafios acadêmicos, mas também para a aplicação prática dos conceitos em contextos cotidianos e profissionais. A atividade lúdica, como o jogo *Instant Insanity*, potencializa essa aprendizagem ao combinar teoria e prática de forma interativa e envolvente.

2 A Construção do jogo à Luz da Planificação.

Atualmente no contexto do ensino médio, a Matemática é muitas vezes apresentada de forma fragmentada, com tópicos isolados que carecem de conexão com a realidade do estudante. Quando o conteúdo é ensinado de maneira descontextualizada, perde-se a oportunidade de mostrar suas aplicações práticas e o potencial de despertar a curiosidade dos estudantes. Um exemplo claro disso é o estudo de planificações, que pode ser visto como abstrato, quando na verdade está profundamente ligado à visualização espacial e à compreensão de formas tridimensionais do cotidiano.

Este trabalho fundamenta-se no jogo *Instant Insanity* com a finalidade de convidar os professores de matemática do Ensino Médio a explorar o tema: planificação de sólidos a partir de uma abordagem lúdica, prática e de fácil compreensão. Por meio da construção desse jogo, torna-se possível concretizar a aprendizagem dos alunos à medida que eles se divertem. Espera-se, com isso, que o processo de ensino e aprendizagem se afaste da abordagem tradicional, buscando mais eficiência por meio da metodologia ativa.

2.1 Instant Insanity: Um olhar para o estudos de planificação

O jogo *Instant Insanity* é um quebra-cabeça que utiliza um conjunto de quatro cubos coloridos e desafia os jogadores a organizá-los, lado a lado, de maneira que todas as faces apresentem cores diferentes, mesmo ao rotacionar o conjunto conforme Figura 1.

Embora pareça simples à primeira vista, o jogo envolve uma complexidade que exige raciocínio lógico e estratégias combinatórias, o que o torna uma excelente ferramenta didática para trabalhar conceitos matemáticos.

No contexto do ensino de planificações, a construção do jogo *Instant Insanity* a partir de moldes de cubos, permite que os estudantes construam e manipulem formas tridimensionais, visualizando suas diferentes disposições. Essa abordagem favorece uma compreensão mais profunda da relação entre os sólidos geométricos e suas representações planas, promovendo o desenvolvimento da visualização espacial, do raciocínio geométrico e de habilidades essenciais, tais como:

- **Ensino de planificações geométricas:** Durante o processo de construção do jogo, os estudantes podem manipular suas próprias planificações dos cubos. Essa etapa

proporciona uma compreensão concreta de como as faces bidimensionais se conectam para formar um sólido tridimensional. Além disso, os alunos têm a oportunidade de analisar como diferentes configurações das planificações **não** afetam a montagem final dos cubos, facilitando a internalização do conceito.

- **Desenvolvimento da visualização espacial:** Resolver o *Instant Insanity* requer que os jogadores manipulem mentalmente os cubos, imaginando como suas faces se alinham para atender às condições do jogo. Esse exercício fortalece a habilidade de visualização espacial, que é fundamental não apenas para a geometria, mas também para disciplinas como engenharia, arquitetura e design.
- **Integração de raciocínio lógico e combinatório:** O jogo exige a análise de possibilidades e a organização sistemática das permutações das faces dos cubos. Essa prática ajuda a desenvolver o pensamento lógico e matemático, ao mesmo tempo que apresenta conceitos combinatórios em um contexto acessível e prático (8).

Além disso, o uso do *Instant Insanity* em sala de aula está alinhado com as diretrizes da BNCC (12), que valoriza metodologias ativas. A proposta de ensinar planificações e visualização espacial por meio do jogo é uma estratégia que combina inovação pedagógica e eficiência no aprendizado.

Como afirmam Silva e Pereira (5), “a manipulação prática de elementos geométricos, como no caso do *Instant Insanity*, oferece aos alunos uma oportunidade única de explorar e internalizar conceitos espaciais e combinatórios de forma significativa e divertida” (5, p. 92).

Esta sequência didática utiliza o jogo *Instant Insanity* para ensinar planificações de uma maneira inovadora e lúdica. O jogo oferece uma oportunidade de explorar os conceitos geométricos de forma integrada, promovendo uma abordagem que vai além da simples exposição teórica, permitindo que os estudantes manipulem formas, construam soluções e visualizem as relações entre sólidos e suas representações planas. Ao conectar os conceitos de planificações com um jogo dinâmico e envolvente, a matemática pode se tornar mais acessível e atrativa, quebrando a barreira da complexidade que muitas vezes a acompanha.

A intenção é demonstrar que, ao apresentar o conteúdo por meio de desafios práticos e contextuais, como a construção do jogo *Instant Insanity*, o aprendizado de planificações se torna mais rico, multifacetado e motivador.

Portanto, a construção do *Instant Insanity* é uma ferramenta poderosa para o ensino de geometria espacial, promovendo o engajamento dos alunos, fortalecendo suas habilidades cognitivas e conectando os conteúdos teóricos às suas aplicações práticas, pois mesmo um tópico aparentemente simples pode exigir a aplicação de múltiplos conhecimentos, contribuindo para um ensino mais profundo e significativo.

2.2 Um estudo sobre planificações

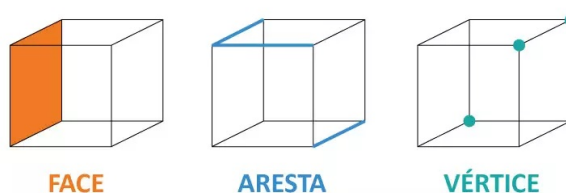
As peças que compõem o jogo *Instant Insanity* consistem em um conjunto de quatro sólidos geométricos tridimensionais denominados cubos. Neste ponto, buscamos definir o cubo, compreender o conceito de planificação e analisar como essa representação bidimensional se aplica a esse sólido, à luz de conceitos matemáticos mais precisos como vértices e arestas.

2.2.1 O cubo e suas características

Um cubo é um sólido geométrico tridimensional, ou seja, possui três dimensões — largura, altura e comprimento — e pertence à família dos poliedros regulares, pois é formado por polígonos regulares. Cada polígono regular que o compõe é chamado de face. Sua principal característica é que todas as suas faces são quadrados, totalizando seis. Por isso, o cubo também é denominado hexaedro regular (13).

Dentre as principais características dos poliedros, o cubo possui os vértices, as faces e as arestas, que destacamos na Figura 4 para melhor compreensão.

Figura 4 – Elementos do cubo

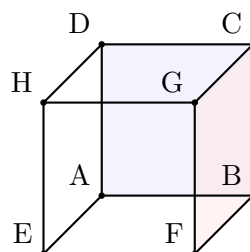


Fonte: Educa Mais Brasil

A fim de sanar qualquer dúvida, destacamos na Figura 5 todos esses elementos do cubo.

Onde:

Figura 5 – Cubo com vértices, arestas e faces destacadas.



Fonte: do autor, 2025

Os pontos do espaço A, B, C, D, E, F, G e H são os **Vértices**.

Os segmentos de reta $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}, \overline{HE}, \overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}$ e \overline{DH} são as **Arestas**.

E os quadrados \overline{ABFE} , \overline{DCGH} , \overline{EFGH} , \overline{BCGF} , \overline{CDAB} e \overline{DAEH} são suas faces inferior (base), superior (tampa), frontal, direita, traseira e esquerda respectivamente.

2.2.2 Conceito de Planificação

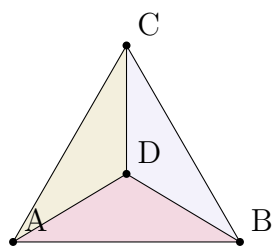
Serão aqui abordados o conceito de planificação como forma de auxiliar o professor quanto ao conhecimento necessário para a compreensão desse assunto. O rigor matemático envolvido na definição formal de planificação não será tratado neste material, mas é possível consultá-lo com toda a precisão conceitual que esse importante tema exige em obras como (14), (15) e (16), onde tais conceitos são definidos com o devido formalismo.

Para esta sequência didática, “Planificação de poliedros é uma maneira de representar esses sólidos tridimensionais em um plano, que é bidimensional. [...] Obtemos, assim, uma figura plana, que costuma ser chamada de molde do poliedro, ou planificação da superfície do poliedro, ou simplesmente planificação do poliedro” (SEDU(17), 2024, p. 3).

Mais precisamente, podemos definir planificação de um sólido geométrico como a representação bidimensional de todas as suas faces em um plano bidimensional, como se o sólido fosse "desdobrado". Essa representação permite visualizar a superfície completa do sólido, e ao dobrar suas partes novamente, o sólido original é reconstruído.

Para melhor elucidar o conceito apresentado, serão apresentadas algumas possíveis planificações do sólido geométrico da Figura 6, denominado *tetraedro regular*.

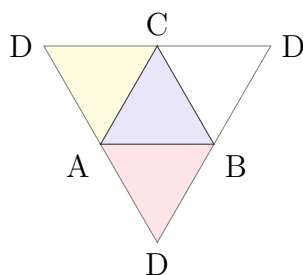
Figura 6 – Tetraedro com vértices A, B, C e D



Fonte: do autor, 2025

Uma característica dos poliedros é que sua nomenclatura está diretamente associada ao número de faces que eles possuem. O tetraedro, por exemplo, tem 4 faces — por isso o prefixo "tetra" em seu nome. Logo, em sua planificação devem aparecer as quatro faces que o compõem. Além disso, na planificação devem ser mantidas as arestas, e não deve haver sobreposição entre as faces. Assim, uma possível planificação para esse sólido pode ser observada na Figura 7.

Figura 7 – Primeira Planificação do tetraedro com vértices A, B, C e D

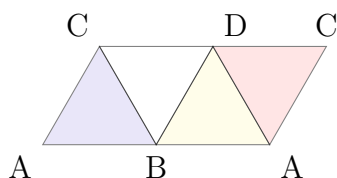


Fonte: do autor, 2025

Na Figura 7, é possível observar que o vértice D aparece três vezes na planificação apresentada. Essa repetição indica que os três pontos distintos no plano correspondem a um único vértice no espaço tridimensional. O mesmo princípio se aplica às arestas representadas: embora apareçam mais de uma vez na planificação, cada uma delas representa uma única aresta do sólido geométrico original.

Outro aspecto relevante a ser destacado é que a planificação de um sólido geométrico não é única. Em outras palavras, um mesmo sólido pode ser representado por diferentes planificações no plano. A título de exemplo, observa-se, na Figura 8, a seguir, uma nova planificação para o mesmo tetraedro apresentado anteriormente na Figura 6.

Figura 8 – Segunda Planificação do tetraedro com vértices A, B, C e D

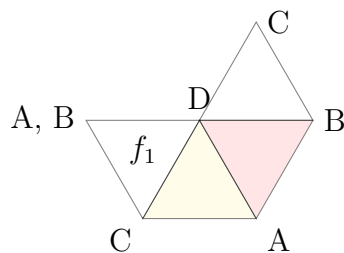


Fonte: do autor, 2025

É importante destacar que, ao planificar um sólido, deve-se ter cautela, pois nem toda disposição das faces que compartilham arestas resulta em uma planificação válida. Em outras palavras, nem toda interseção entre faces no plano corresponde a uma estrutura tridimensional possível. Como exemplo, a Figura 9, a seguir, apresenta uma tentativa incorreta de planificação do mesmo tetraedro representado na Figura 6, embora contenha todas as suas faces. A disposição inadequada das faces impede que o sólido seja reconstituído corretamente no espaço tridimensional.

A inconsistência presente nessa planificação decorre do fato de que, nela, o vértice D aparece como ponto comum às quatro faces do tetraedro. No entanto, uma simples análise da estrutura tridimensional desse sólido revela que nenhum de seus vértices é comum às quatro faces simultaneamente. Em um tetraedro, cada vértice pertence exatamente a três das quatro faces.

Figura 9 – Planificação incorreta do tetraedro com vértices A, B, C e D



Fonte: do autor, 2025

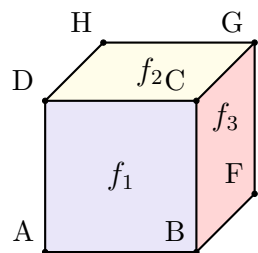
Além disso, a face destacada como f_1 apresenta uma ambiguidade quanto à identificação de um de seus vértices, que pode ser tanto A quanto B. Independentemente da escolha, essa face resultaria congruente a uma outra já existente na planificação, o que acarretaria uma sobreposição entre faces. Essa inconsistência compromete a estrutura do sólido, fazendo com que o tetraedro aparente possuir apenas três faces distintas em vez das quatro que o compõem.

Portanto, é fundamental atentar-se para a veracidade das planificações dos sólidos geométricos, assegurando que representem corretamente sua estrutura tridimensional. Esse aspecto é, inclusive, um dos mais recorrentes em avaliações externas já mencionadas, estando diretamente relacionado à habilidade D3 da Matriz de Referência: "Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas."

2.2.3 As Planificações do Cubo

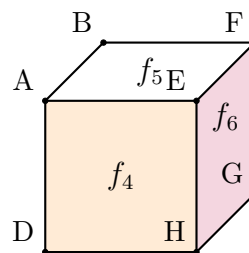
Após a análise fundamental da estrutura do cubo, suas características como poliedro e a compreensão do conceito de planificação, cabe agora examinar algumas de suas possíveis representações planificadas. A Figura 10 e a Figura 11, abaixo, representam o mesmo cubo em perspectivas diferentes, com a finalidade de exibir as cores de cada uma de suas faces.

Figura 10 – Cubo 1 com faces f_1 , f_2 e f_3 destacadas.



Fonte: do autor, 2025

Figura 11 – Cubo 2 com faces f_4 , f_5 e f_6 destacadas.

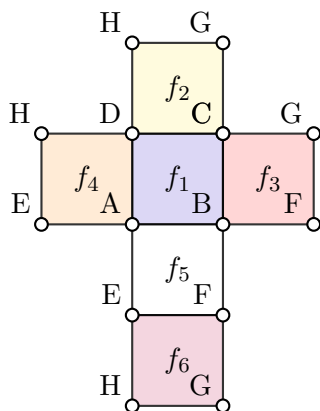


Fonte: do autor, 2025

Dessa forma as faces f_1 , f_2 e f_3 são opostas as faces f_6 , f_5 e f_4 respectivamente. Na Figura 12 e na Figura 13, a seguir, são apresentadas duas planificações desse sólido

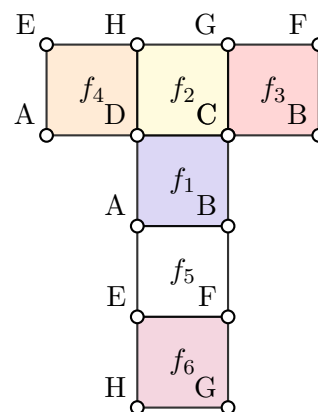
geométrico, frequentemente cobradas em avaliações externas, as quais esta sequência didática se propõe a abordar.

Figura 12 – Planificação do cubo em cruz.



Fonte: do autor, 2025

Figura 13 – Planificação do cubo em T.



Fonte: do autor, 2025

A planificação apresentada na Figura 12, caracterizada pelo formato de cruz, revela-se como a mais recorrente em avaliações externas que envolvem a visualização e a manipulação de sólidos geométricos, em especial o cubo. Uma análise das questões pré-selecionadas para este material, listadas no Apêndice B e provenientes de exames como o SAEB e o SAEPE, indica que essa configuração está presente em aproximadamente 50% das questões que abordam planificações. Em segundo lugar em termos de frequência, encontra-se a planificação ilustrada na Figura 13, que apresenta o formato de T e aparece em cerca de 25% das questões.

Além dessas duas, identificam-se ainda outras duas planificações que, embora menos frequentes, também estão presentes nas avaliações, com ocorrências mais pontuais. Tendo em vista a diversidade de representações possíveis para o cubo e sua importância para o desenvolvimento da visualização espacial dos estudantes, todas essas quatro planificações serão abordadas ao longo desta sequência didática, de modo a ampliar as possibilidades de ensino e aprendizagem por meio de uma proposta didática pautada na exploração concreta e contextualizada.

Logo, serão exploradas, neste material, quatro das onze possíveis planificações do cubo, selecionadas com base na frequência com que aparecem em avaliações externas, especialmente em exames como o SAEB e o SAEPE.

2.3 Sequência Didática 1: Planificação do Cubo

2.3.1 Conteúdos Abordados

- **Planificação de sólidos geométricos:** O Cubo e Suas Planificações.

- **Visualização espacial:** Desenvolvimento de habilidades de visualização, que ajudam a identificar as correspondências entre o cubo e suas planificações.
- **Estratégias de resolução de questões:** Aplicação de raciocínio lógico e matemático na resolução de problemas envolvendo planificações do cubo no contexto de avaliações externas.

2.3.2 Título:

Explorando Planificações através da construção do Jogo *Instant Insanity*: Uma Abordagem Lúdica para o Ensino da Matemática no Ensino Médio

2.3.3 Justificativa

O ensino de matemática, particularmente no que diz respeito à geometria espacial e planificações, muitas vezes encontra resistência por parte dos estudantes, que têm dificuldade em visualizar e conectar formas tridimensionais e bidimensionais. Utilizar a construção do *Instant Insanity* como ferramenta pedagógica oferece uma abordagem interativa e divertida para explorar esses conceitos, permitindo que os estudantes manipulem fisicamente os cubos em sua forma plana e desenvolvam uma compreensão mais profunda das planificações desse sólido.

2.3.4 Duração:

Encontro	Descrição	Duração
1	Pintura, corte e montagem dos cubos	1h e 40min
2	Explicação sobre planificação e momento de jogar	1h e 40min
3	Resolução de questões de provas externas	1h e 40min

Quadro 2.3.1 – Planificação: Encontros, atividades e duração

2.3.5 Objetivos

2.3.5.1 Objetivo Geral

Utilizar o processo de construção do jogo *Instant Insanity* para ensinar o conteúdo de planificações do cubo aos estudantes do ensino médio, promovendo uma aprendizagem contextualizada e prática, que desperte a curiosidade e o interesse pela visualização espacial e raciocínio geométrico.

2.3.5.2 Objetivos Específicos

1. Explorar o uso do jogo *Instant Insanity* como estratégia eficaz no processo de ensino-aprendizagem de matemática, com foco em planificações de sólidos geométricos.
2. Investigar as planificações do cubo por meio da manipulação estimulando a visualização e análise espacial.
3. Desenvolver a habilidade dos estudantes de reconhecer e identificar diferentes planificações do cubo.
4. Envolver os estudantes na construção de estratégias para resolver os desafios do *Instant Insanity*, promovendo o raciocínio lógico e a aplicação prática dos conceitos de planificações.
5. Facilitar a compreensão de planificação em um contexto prático e desafiador, promovendo a aplicação das habilidades definidas pela BNCC.
6. Promover a cooperação e o trabalho em equipe durante o desenvolvimento das atividades, permitindo que os estudantes troquem ideias e compartilhem suas soluções para o jogo.
7. Relacionar o estudo das planificações com questões de avaliação de simulados e exames, integrando o aprendizado prático com a preparação para provas como o [SAEPE](#).

2.3.6 Público-alvo

Alunos do 1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio, na faixa etária de 14 a 17 anos.

2.3.7 Perfil das turmas

Turmas compostas por 20 a 40 alunos.

2.3.8 Habilidades da BNCC

Apesar de a planificação de sólidos não aparecer explicitamente como uma habilidade específica do Ensino Médio na BNCC, o documento orienta que:

“A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade.” (BNCC, 2018)

Nesse sentido, é legítimo e recomendado que conteúdos como **planificação de sólidos geométricos** sejam retomados e aprofundados no Ensino Médio, especialmente em propostas que buscam integrar a Matemática a contextos significativos.

No Ensino Fundamental, por exemplo, a BNCC prevê as seguintes habilidades relacionadas a esse tema:

- **(EF03MA14)**: Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações.
- **(EF04MA17)**: Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais.
- **(EF05MA16)**: Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.

Essas habilidades são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento espacial e geométrico dos estudantes, sendo integradas à proposta didática do uso do jogo *Instant Insanity*, que visa facilitar o aprendizado de planificações de maneira mais prática, concreta e dinâmica, por meio de atividades que estimulam a construção, manipulação e análise de sólidos.

2.3.9 Descritores do **SAEB** e do **SAEPE**

Os descritores do **SAEB** e do **SAEPE** fazem referência direta à importância de planificações no ensino da matemática:

- **(D03-SAEPE)**: Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.
- **(D2-SAEB)**: Identificar propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações.
- **(D3-SAEB)**: Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

Tais descritores deixam evidente a necessidade de abordar o conteúdo de planificação de sólidos geométricos no ensino médio, especialmente no 3º ano, em função da sua presença nas avaliações externas em nível estadual (**SAEPE**) e nacional (**SAEB**). Trabalhar esse conteúdo de forma intencional pode contribuir para a preparação dos estudantes frente aos instrumentos de avaliação que medem o desempenho e a qualidade da educação básica.

2.3.10 Recursos

Datashow, computador, folhas de papel, quadro branco, Impressora, tesoura sem ponta, cola e material para colorir.

2.3.11 Avaliação

Será realizada de forma contínua, por meio da participação nas discussões e resolução dos problemas propostos.

2.3.12 Etapas da Sequência Didática

2.3.12.1 Encontro 1: Oficina de Construção do Jogo

Este primeiro encontro, com duração de **1 hora e 40 minutos**, marca o início da proposta didática e tem como objetivo principal a construção do material que será utilizado nas etapas seguintes. Antes de iniciar a atividade prática, recomenda-se que o professor **apresente brevemente o jogo *Instant Insanity*** (Seção 1.1.3), de modo a contextualizar os alunos e despertar o interesse pelo que será desenvolvido ao longo da sequência.

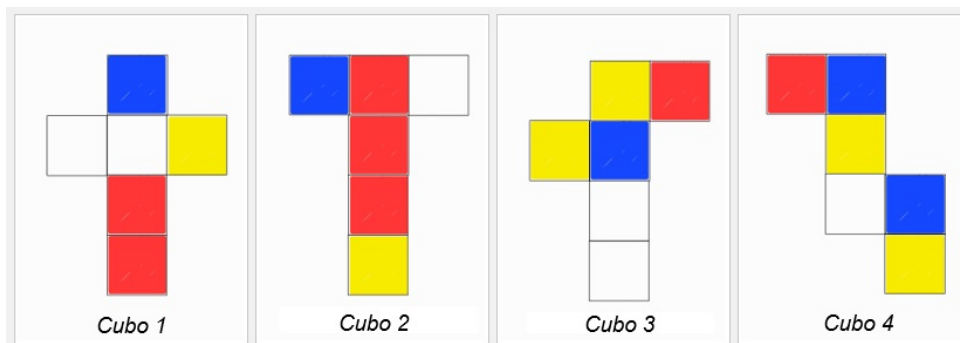
Para isso, o professor deverá dispor de **um conjunto próprio do jogo já montado**, a fim de apresentar visualmente o desafio aos estudantes. Uma estratégia eficaz para iniciar essa explicação é lançar uma provocação inicial à turma, como: *Vocês acham que é possível empilhar quatro cubos de forma que cada cor apareça apenas uma vez em cada lado da pilha?*

O papel do professor, nesse momento, é o de mediador e incentivador da participação ativa dos alunos, conduzindo-os à construção do material necessário para a realização das atividades posteriores. Para isso, cada estudante receberá quatro moldes de cubos impressos . Esses moldes podem ser encontrados no [Apêndice A](#).

A atividade consiste em recortar e montar os cubos, além de colorir suas faces. A seguir, na Figura 14, apresenta-se uma forma de planificar tais cubos com seus respectivos cores. Tal planificação não precisa ser esta que aqui é apresentada, mas deve seguir os padrões de cores e a ordenação dos cubos, pois é com essas cores e essa ordenação que serão estabelecidas algumas soluções do jogo.

A fim de otimizar recursos e garantir maior eficiência no processo de pintura dos cubos, recomenda-se que a Figura 14 seja projetada em sala de aula, de modo que todos os alunos possam visualizá-la simultaneamente.

Concluída a etapa de pintura, que deverá ter uma duração de 50 minutos, e após todos os alunos sinalizarem o término, o professor deverá orientá-los a dar continuidade ao trabalho com o recorte e a montagem dos cubos. Para essa fase, recomenda-se a

Figura 14 – Planificação colorida dos cubos do *Instant Insanity*

Fonte: do autor, 2025

destinação de aproximadamente 50 minutos, considerando o tempo necessário para a execução cuidadosa das etapas de corte, dobradura e colagem.

É fundamental que o professor acompanhe ativamente a atividade, oferecendo suporte aos alunos com dificuldades, especialmente na manipulação dos moldes, garantindo assim a montagem correta dos cubos. Ao final do tempo previsto, espera-se que todos tenham concluído a construção das quatro peças do jogo *Instant Insanity*, organizadas lado a lado conforme a Figura 1. Essa disposição será essencial para o desenvolvimento das estratégias nos encontros seguintes.

2.3.12.2 Encontro 2: *Instant Insanity* e Planificação.

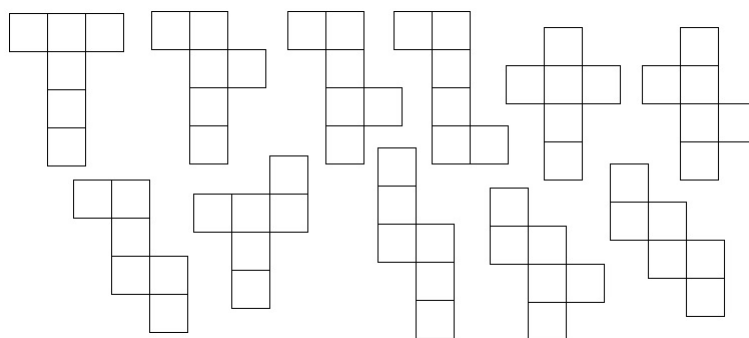
O professor deverá iniciar a aula retomando brevemente as regras do jogo (Seção 1.1.3), assegurando que todos os estudantes compreendam plenamente o desafio proposto. Em seguida, será reservado um tempo aproximado de 50 minutos para que os alunos joguem livremente, buscando identificar soluções possíveis por meio da experimentação e do raciocínio lógico. O aluno deverá ser incentivado a estabelecer meios e técnicas próprias para a resolução do jogo.

Concluída essa fase, o professor deverá, durante os 50 minutos restantes, conduzir uma explanação sobre o conceito de planificações do cubo, enfatizando que se trata da representação bidimensional de todas as faces desse sólido, o que permite visualizar e compreender a totalidade de sua superfície.

Neste contexto, o professor deverá enfatizar que, para a construção do jogo, foram utilizadas **quatro planificações distintas do cubo**, escolhidas entre as **onze planificações possíveis**, conforme ilustrado na figura 15.

É fundamental que o professor promova, junto aos alunos, uma análise detalhada das planificações utilizadas, destacando aspectos relevantes de cada uma. Deve-se chamar atenção para o fato de que as planificações referente aos cubos 1 e 2 (Figura 14) são consideradas as representações clássicas do cubo, frequentemente presente em livros

Figura 15 – As Onze Planificação do Cubo

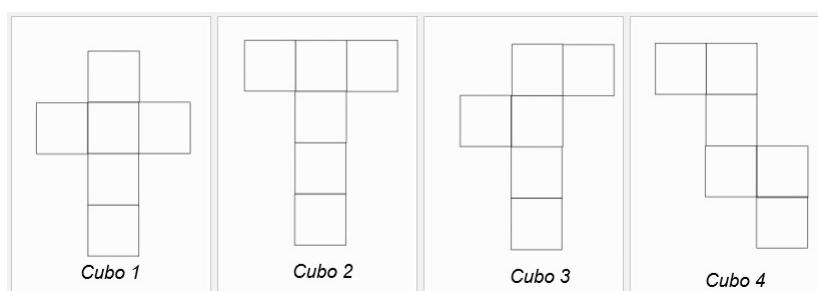


Fonte: wikipedia (18)

didáticos, materiais introdutórios e provas externas. Já as planificações correspondentes aos cubos 3 e 4 (também na Figura 14) aparecem com maior frequência unicamente em avaliações externas, o que reforça a importância de familiarizar os estudantes com diferentes configurações das planificações do cubo.

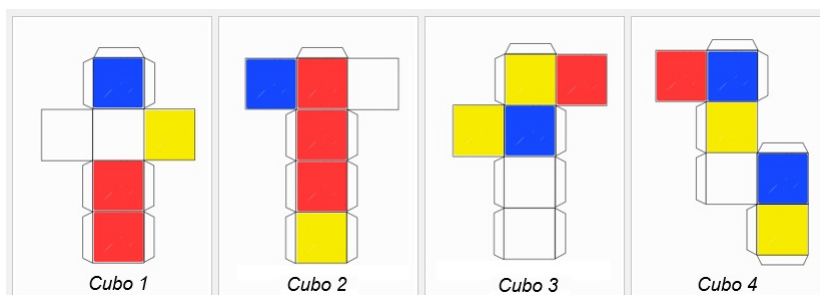
Com a finalidade de garantir uma montagem eficiente dos cubos, as planificações fornecidas aos alunos contêm extensões denominadas “abas de colagem”. Essas bordas foram inseridas propositalmente para facilitar a dobradura e a colagem das faces, assegurando maior firmeza à estrutura final do cubo. Contudo, é fundamental que o professor esclareça aos estudantes que essas abas não integram a estrutura geométrica do cubo em si, tratando-se apenas de elementos auxiliares no processo construtivo.

Para esse momento comparativo, recomenda-se que o professor utilize um projetor multimídia (*datashow*) para exibir as figuras 16 e 17 simultaneamente, favorecendo a observação coletiva e a discussão guiada.

Figura 16 – Planificação descolorida dos cubos do *Instant Insanity*

Fonte: do autor, 2025

Durante este encontro, após a explanação do conteúdo referente às planificações dos cubos e as observações pertinentes quanto as “abas de colagem”, o professor deverá adotar uma postura mediadora, promovendo um ambiente propício à participação ativa dos estudantes na resolução do desafio proposto pelo jogo e seu entendimento sobre o conceito abordado. É fundamental que, ao longo da atividade, o docente realize intervenções pontuais sempre que identificar a necessidade de redirecionamento ou aprofundamento

Figura 17 – Planificação colorida dos cubos e com borda do *Instant Insanity*

Fonte: do autor, 2025

conceitual, com vistas à consolidação dos conhecimentos abordados e ao fortalecimento do processo de ensino-aprendizagem.

Ao final deste encontro, o professor deverá informar aos alunos que, no próximo momento da sequência didática, serão trabalhadas questões extraídas de provas externas, cujos conteúdos dialogam diretamente com as habilidades desenvolvidas durante as atividades com o jogo. Essa etapa tem como objetivo aprofundar a compreensão dos conceitos abordados e estabelecer conexões com o formato das avaliações em larga escala.

2.3.12.3 Encontro 3: Provas externas a luz do *Instant Insanity*

Este terceiro encontro, com duração de 1h e 40 minutos, tem como objetivo consolidar os conhecimentos desenvolvidos nos encontros anteriores, articulando o jogo *Instant Insanity* à resolução de questões de provas externas.

O professor deverá iniciar a aula destinando 30 minutos para que os alunos retomem o jogo *Instant Insanity*, revisando suas estratégias de resolução e fortalecendo o raciocínio lógico. Caso os alunos não encontrem uma solução para o jogo, o professor poderá apresentar a resolução, utilizando o material disponível no Capítulo 4.

Em seguida, o professor resolverá a questão da Seção 2.4 e entregará aos alunos uma versão impressa do Apêndice B. Os Alunos poderão trabalhar em duplas ou pequenos grupos para resolvê-lo. Para essas atividades serão reservados 40 minutos. Esse apêndice contempla itens extraídos de avaliações como o SAEB, SAEPE e Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), os quais estão diretamente relacionados às habilidades exploradas na sequência didática, especialmente no que diz respeito à visualização espacial e às planificações de sólidos geométricos. Durante a resolução da atividade, o professor deverá adotar uma postura mediadora, incentivando o debate, a argumentação matemática e a mobilização dos conceitos previamente explorados.

Os últimos 30 minutos do encontro serão dedicados à socialização das estratégias adotadas, correção coletiva das atividades e retomada dos conceitos envolvidos. Esse momento é fundamental para consolidar a aprendizagem, sanar possíveis dúvidas e preparar

os estudantes para desafios avaliativos semelhantes.

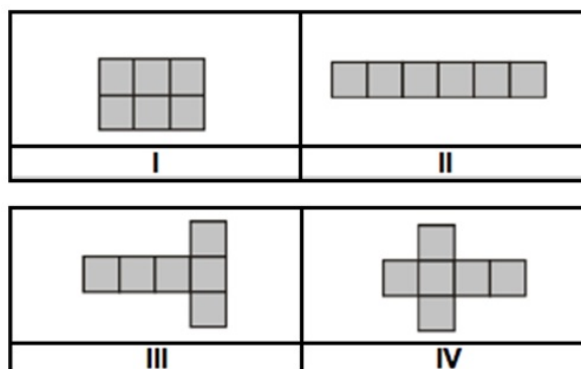
2.4 Questão Comentada

Esta seção tem como objetivo comentar a resolução de uma questão extraída da avaliação externa SAEB, cujo conteúdo dialoga diretamente com os conceitos trabalhados ao longo da proposta didática com o jogo *Instant Insanity*. A análise dessa questão visa oferecer ao professor orientações claras sobre como abordá-las em sala de aula, de forma a integrar teoria e prática e a favorecer a aprendizagem significativa dos estudantes.

Espera-se, com isso, proporcionar ao docente maior segurança na mediação desses conteúdos, além de evidenciar caminhos metodológicos que possam tornar a resolução de problemas mais acessível e atrativa para os alunos. Ao reconhecerem nas questões um prolongamento das experiências vivenciadas durante a construção e a exploração do jogo, os estudantes tenderão a estabelecer conexões mais sólidas entre os conceitos geométricos e suas aplicações em contextos avaliativos reais.

Ciente da dificuldade de acesso a provas atualizadas do SAEB, a questão aqui selecionada foi extraída de um banco de dados público (19). Contudo, devido à escassez de itens disponíveis nesse repositório que tratem especificamente da temática de planificações de sólidos geométricos — e, mais precisamente, das avaliações do SAEB —, optou-se por restringir a análise a uma questão representativa. Essa escolha se justifica não apenas pela pertinência do conteúdo abordado, mas também pela relevância pedagógica do item selecionado, que dialoga com os objetivos formativos desta proposta didática. Isso posto, vamos à questão:

1. (SAEB 2013) Recortando-se, de diversas maneiras, embalagens de papelão em forma de cubo, obtém-se diferentes planificações.



Entre as figuras acima, somente poderiam ser algumas dessas planificações as de números

- a) II e III b) I e III c) II e IV d) I e IV e) III e IV

Comentário: Esse modelo de questão é frequentemente utilizado para avaliar a aprendizagem dos estudantes quanto ao tema de planificações, sendo considerado um clássico na abordagem desse conteúdo. O enunciado exige que o aluno identifique, dentre uma sequência de figuras, quais delas correspondem a planificações válidas do cubo.

Espera-se que os discentes não apresentem grandes dificuldades em reconhecer as imagens III e IV como planificações corretas desse sólido, amplamente trabalhado nas etapas anteriores da proposta didática. Tais imagens correspondem, respectivamente, às planificações conhecidas como "formato de T" (após uma rotação de 90° no sentido *horário*) e "formato de cruz" (após uma rotação de 90° no sentido *antihorário*), já destacadas anteriormente neste trabalho como preferidas em avaliações externas, como o SAEB e o SAEPE.

Embora a alternativa correta (letra E) possa ser rapidamente identificada por alguns estudantes, recomenda-se que o professor vá além da simples validação da resposta. É importante que se estimule uma reflexão coletiva sobre o porquê de as figuras I e II não configurarem planificações válidas do cubo, promovendo, assim, uma discussão que aprofunde a compreensão geométrica dos alunos e favoreça o desenvolvimento de argumentos matemáticos mais consistentes.

Inicialmente, a **Figura I**, na qual, para facilitar a análise, nomeamos os quadrados como f_1 a f_6 :

Figura 18 – Representação dos quadrados f_1 a f_6

f_1	f_2	f_3
f_4	f_5	f_6

Fonte: do autor, 2025

Para verificar se essa configuração representa de fato uma planificação válida de um cubo, podemos escolher qualquer uma das faces como a base do nosso cubo. Suponhamos, por exemplo, que a face f_2 seja tomada como base.

Ao tentar reconstruir o cubo a partir dessa planificação, nenhuma das demais faces se encontra em posição oposta à face f_2 , o que contraria uma propriedade fundamental do cubo — a existência de três pares de faces opostas. Essa inconsistência demonstra que a **Figura I** não constitui uma planificação válida de um cubo.

De forma mais simples, observa-se que a Figura I não corresponde a uma planificação do cubo, uma vez que nela há vértices incidentes a quatro arestas, ao passo que, no cubo, cada vértice é incidente exatamente a três arestas.

Já para a análise da **Figura II** seus quadrados também serão nomeados de f_1 a f_6 :

Figura 19 – Representação sequencial dos quadrados f_1 a f_6

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Fonte: do autor, 2025

Tomando um deles como base do cubo — por exemplo, f_3 como a face inferior — f_2 e f_4 atuarão como faces laterais. Conseqüentemente, as faces f_1 e f_5 ao serem dobradas, tenderiam a se sobrepor, assumindo simultaneamente a posição de face oposta à base f_3 . Essa sobreposição inviabiliza a montagem correta do cubo, pois resulta em apenas dois pares de faces opostas, em vez dos três pares exigidos pela geometria do cubo. Em outras palavras, essa configuração gera uma estrutura tridimensional com apenas quatro faces em posição funcional, quando o esperado seriam seis. Logo, conclui-se que a Figura II não representa uma planificação válida de um cubo.

3 A Construção do jogo à Luz da Área e Perímetro.

A compreensão dos conceitos de área e perímetro é essencial para o desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino médio, constituindo-se como base para a análise e resolução de problemas em diversas situações do cotidiano. No entanto, é comum que estudantes apresentem dificuldades em visualizar e interpretar essas grandezas de forma concreta, o que pode comprometer a construção de significados sólidos e duradouros.

Diante desse desafio, este capítulo propõe uma abordagem didática inovadora, que utiliza a técnica do origami — a tradicional arte japonesa de dobrar papel — como recurso pedagógico para a construção do jogo *Instant Insanity*. Ao explorar as figuras planas que emergem das dobras do papel, os estudantes têm a oportunidade de investigar, de maneira prática e contextualizada, as medidas de área e perímetro envolvidas nas formas geométricas criadas. Essa estratégia metodológica pode favorecer a aprendizagem ativa, ao mesmo tempo em que estimula a percepção espacial, a análise de propriedades métricas e o raciocínio lógico-matemático.

Além disso, o professor encontrará, neste capítulo, um aprofundamento teórico dos conceitos de área e perímetro, articulado com propostas concretas de aplicação em sala de aula. As atividades sugeridas visam promover uma experiência de ensino mais significativa, aliando ludicidade, criatividade e rigor matemático. Ao integrar o fazer manual com a investigação matemática, busca-se não apenas reforçar o conteúdo curricular, mas também ampliar as possibilidades de ensino da geometria por meio de metodologias ativas.

3.1 Origami e Matemática

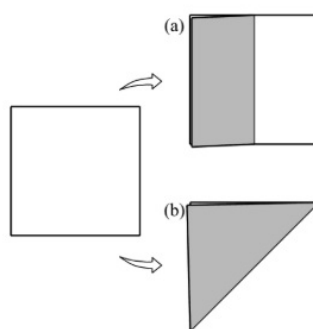
Segundo Origami Club (20) a palavra origami tem origem japonesa, composta pelos termos oru (dobrar) e kami (papel), e refere-se à arte tradicional de criar formas por meio da dobra de papel, sem a utilização de cortes ou colagens. Embora essa prática esteja fortemente associada à cultura japonesa, registros históricos indicam que a técnica da dobradura de papel também foi desenvolvida em outras regiões do mundo, como a China e a Europa, ainda na Idade Média, logo após a invenção do papel. No entanto, foi no Japão que o origami se consolidou como forma de expressão artística e simbólica, sendo inicialmente utilizado em cerimônias religiosas e, mais tarde, difundido como atividade recreativa e educativa.

Ao longo dos séculos, o origami passou por uma evolução significativa, transformando-se de uma prática artesanal e cultural em uma ferramenta com reconhecido potencial

pedagógico. No contexto educacional, especialmente no ensino de Matemática, o origami revela-se como um recurso didático valioso, capaz de proporcionar aos estudantes uma experiência de aprendizagem concreta, lúdica e visualmente significativa.

Essa diversidade de possibilidades torna-se particularmente evidente quando se observa que, por meio de simples dobras em uma folha de papel, é possível transformar um quadrado em diversas outras figuras geométricas planas, como retângulos e triângulos, conforme ilustrado na Figura 20. Essa Figura foi extraída da obra de Haga (21), que apresenta reflexões aprofundadas sobre o potencial matemático das dobraduras e cuja leitura é recomendada ao leitor interessado em explorar com mais profundidade essa abordagem.

Figura 20 – Do quadrado ao retângulo ou triângulo



Fonte: Haga (21)

Além disso, o manuseio das dobras permite explorar conceitos matemáticos fundamentais, como ângulos, simetrias, proporções, área e perímetro. A acessibilidade do material — o papel — e a simplicidade da técnica contribuem para que o origami se destaque como uma alternativa eficaz no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Não por acaso, observa-se um número crescente de produções acadêmicas que estabelecem relações entre o origami e o ensino matemático. Esse fenômeno pôde ser constatado por meio de uma simples busca no Google Acadêmico, em 11-06-25, utilizando a expressão “Origami + Matemática”, a qual retornou milhares de trabalhos com títulos como "O origami no ensino e aprendizagem de Matemática" e "O uso do origami no processo de ensino de Matemática: um estudo em produções acadêmicas". Tais publicações evidenciam o reconhecimento do origami como um recurso didático promissor, que favorece a construção do conhecimento matemático de forma ativa, criativa e interdisciplinar.

Diante do exposto, o uso do origami como ferramenta para a construção do jogo *Instant Insanity* revela-se uma escolha didática especialmente valiosa no contexto do ensino de área e perímetro. Ao dobrar uma folha de papel — especialmente quando posicionada sobre uma malha quadriculada — o estudante tem a oportunidade de observar, formar e transformar diferentes figuras geométricas planas, como quadrados, triângulos

e retângulos. Essa dinâmica torna possível a mensuração direta de lados e a contagem de unidades de área, facilitando a compreensão das fórmulas matemáticas envolvidas. As dobras funcionam como delimitadores naturais das figuras, permitindo que o aluno perceba, de forma concreta, como o espaço é ocupado ou repartido.

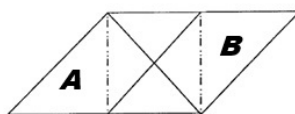
Nesse sentido, a malha quadriculada potencializa ainda mais o aprendizado ao oferecer uma base visual que auxilia no cálculo e na comparação das medidas das figuras geradas. Assim, a construção dos cubos por meio do origami não se limita a um exercício manual, mas torna-se uma rica oportunidade de investigação matemática, promovendo a articulação entre prática e teoria, e incentivando uma aprendizagem significativa e contextualizada dos conceitos de área e perímetro.

3.2 Origami: Construção dos Cubos

O jogo *Instant Insanity*, objeto central deste trabalho, é constituído por quatro cubos, como apresentado no Capítulo 1. Nesta seção, será feito o processo de montagem desses cubos utilizando a técnica do origami. Ressalta-se que, neste momento, o foco não será a exploração dos conceitos matemáticos envolvidos, uma vez que essa abordagem será realizada na seção dedicada à sequência didática.

Cada cubo é formado por seis peças de origami. Portanto, sua construção ocorrerá em duas etapas: primeiramente, a confecção de cada uma dessas seis peças, denominadas **elementares** (Figura 21), e, em seguida, a montagem do cubo a partir dessas peças elementares.

Figura 21 – Peça Elementar



Fonte: Adaptado de OrigamiArt(22)

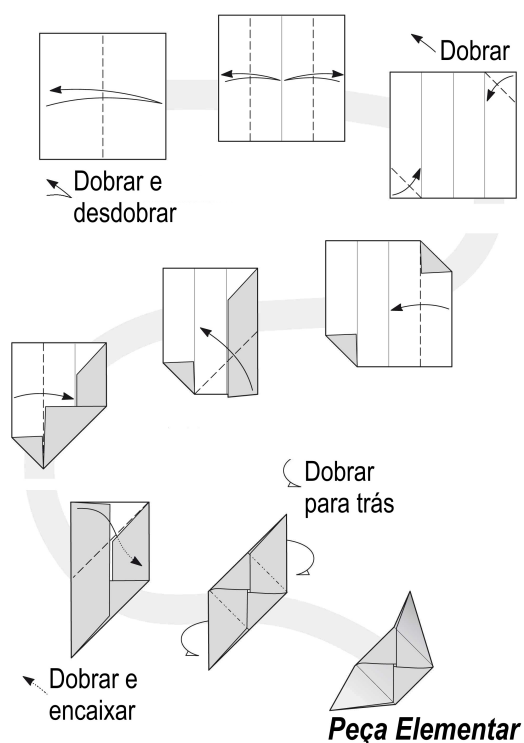
O Origami apresentado na Figura (22), a seguir, ilustra a construção das peças elementares que compõem os cubos. Ele desempenha um papel fundamental na sequência didática proposta, pois se mostra uma estratégia eficaz para compreender, de forma prática e visual, como essas peças são confeccionadas. Além disso, permite o trabalho concreto com os conceitos de área e perímetro, articulando a manipulação geométrica com o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Ao final do processo de dobragem, o professor terá em mãos a peça elementar, ilustrada na Figura 21.

Nessa peça, os triângulos *A* e *B* desempenham um papel fundamental na construção

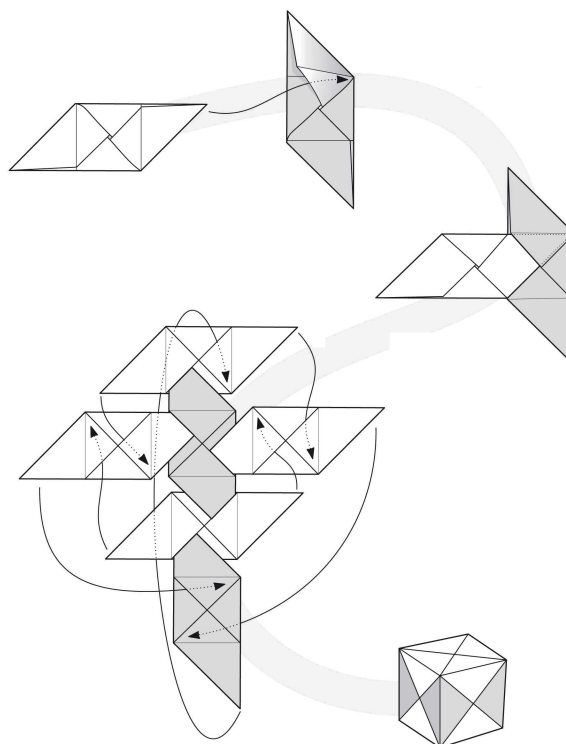
do cubo, pois funcionam como abas de encaixe. Em outras palavras, serão utilizados para conectar uma peça elementar à outra, como ilustrado na Figura 23, a seguir.

Figura 22 – Construção das peças elementares



Fonte: Adaptado de OrigamiArt (22)

Figura 23 – Encaixe e montagem do cubo.



Fonte: Adaptado de OrigamiArt (22)

Confeccionadas as 24 peças elementares o professor conseguirá montar os cubos necessários para a construção do jogo. Cada etapa da dobradura envolvida na confecção da peça elementar será de fundamental importância para os estudos dos conceitos matemáticos explorados neste trabalho, os quais serão abordados posteriormente, durante o desenvolvimento da sequência didática.

3.3 Aprendizagem de Área e Perímetro

A presente dissertação opta por abordar os conceitos de área e perímetro de forma conjunta durante a construção dos cubos do jogo *Instant Insanity*, utilizando a técnica do origami. Essa escolha considera tanto a relevância desses conteúdos para o desenvolvimento do pensamento geométrico quanto as dificuldades recorrentes observadas em sua aprendizagem. O uso das dobraduras permite que, simultaneamente à montagem dos cubos, os estudantes possam observar e discutir as transformações ocorridas nas figuras planas, favorecendo uma compreensão integrada entre forma, contorno e superfície.

Segundo Biani (23), o ensino tradicional de área e perímetro tende a se limitar à apresentação de fórmulas, nomenclaturas e regras, negligenciando demonstrações e explorações visuais que poderiam atribuir maior significado aos conceitos. Essa abordagem torna o ensino mecânico e pouco conectado à realidade dos estudantes, dificultando a aprendizagem efetiva. Em contraponto, o uso do origami permite a manipulação concreta das formas, promovendo uma abordagem mais visual, investigativa e significativa.

De acordo com Bellemain e Lima (24), e também Van Cleave (25), os conceitos de área e perímetro são indissociáveis: compreender um leva, naturalmente, à compreensão do outro. Essa relação é evidenciada na Figura 24, que apresenta um comparativo entre diferentes concepções desses conceitos à luz de importantes autores da área.

Figura 24 – Diferentes conceitos para área e perímetro

Perímetro	Área
O “contorno de uma figura plana, no qual o valor associado a ele é a resultante do processo de medição do comprimento da fronteira da figura geométrica” (VAN CLEAVE, 1994, p. 61).	Corresponde à “cobertura de uma superfície com uma unidade repetida, de forma a pavimentar essa superfície, isto é, não deixar buracos nem fazer sobreposições” (BELLEMAIN; LIMA, 2000).
[...] a resultante do processo de medição da curva que delimita a região interior da figura (VAN CLEAVE, 1994, p. 61).	A medida de área de uma superfície expressa o número de vezes que uma dada unidade cabe na superfície objeto da medição (BELLEMAIN; LIMA, 2000).
[...] o conceito de perímetro está diretamente ligado às unidades de comprimento (VAN CLEAVE, 1994, p. 61).	O processo de medição dessa grandeza, do ponto de vista da estrutura matemática, tem como ponto de partida “a definição de uma função (f)- dita função área-num conjunto S de superfícies, assumindo valores no conjunto dos números reais não negativos” (BELLEMAIN; LIMA, 2000).
A fronteira que limita e fecha uma região plana (GERÔNIMO; FRANCO, 2005).	A verificação de quais superfícies são mensuráveis pela função área, para isso, deve-se limitar a parte do plano ocupada por uma figura plana (BELLEMAIN; LIMA, 2000).
Perímetro é a medição do comprimento da fronteira fechada da figura geométrica	A ideia de região plana é uma noção primitiva utilizada na determinação da área. Portanto, toda região limitada e fechada do plano é correspondente a uma área (GERÔNIMO; FRANCO, 2005).

Fonte: Braga (26)

Por isso, trabalhá-los de forma separada pode empobrecer o processo de aprendizagem. No contexto das dobraduras, essa indissociabilidade torna-se evidente, uma vez que cada nova dobra altera tanto a extensão do contorno quanto a superfície coberta pela figura, oferecendo oportunidades ricas para a exploração simultânea dos dois conceitos.

Brito (27), Bellemain (28) e Costa (29) destacam que uma das principais dificuldades enfrentadas pelos alunos diz respeito à confusão entre os conceitos de área e perímetro, frequentemente agravada pela abordagem isolada desses conteúdos em sala de aula. Os autores também apontam concepções equivocadas recorrentes, como a crença de que apenas polígonos possuem perímetro ou de que a comparação de grandezas deve ocorrer exclusivamente por meio de números. Tais dificuldades, segundo os autores, decorrem da limitação de se trabalhar apenas com figuras planas desenhadas, sem o uso de recursos concretos. Nesse sentido, o uso do origami aliado à construção dos cubos apresenta-se como uma alternativa concreta e dinâmica, permitindo aos alunos visualizar e manipular

diferentes formas e medidas de maneira integrada e contextualizada.

Dessa forma, a opção por trabalhar área e perímetro de maneira articulada no processo de construção dos cubos do *Instant Insanity* contribui não apenas para a superação de dificuldades históricas no ensino desses conceitos, mas também para a promoção de uma aprendizagem mais significativa, visual e exploratória, conforme sugerido por esses pesquisadores da área.

3.4 Um estudo sobre Área e Perímetro

Na construção dos cubos utilizados no jogo *Instant Insanity*, são empregadas peças elementares feitas por meio da técnica do origami. Os estudos sobre os conceitos de área e perímetro concentram-se nessas peças. Ao utilizar o origami para modelar uma peça elementar, o professor e os alunos transitam por diversas figuras geométricas planas, que serão o objeto de estudo desta seção.

O objetivo aqui é fornecer ao professor o conhecimento matemático necessário para abordar os conteúdos de área e perímetro de forma fundamentada, apresentando as definições formais, as propriedades e as deduções das fórmulas relacionadas às figuras envolvidas. Assim, este capítulo busca oferecer um arcabouço teórico que permita ao docente conduzir esse tema da maneira que considerar mais adequada às características da sua turma.

Importante destacar que, nesta seção, não serão propostas atividades práticas com os alunos. Toda a abordagem será teórica, voltada para a construção e a compreensão matemática dos conceitos. A exploração prática, com medições, aplicações e validação das fórmulas pelos alunos, ocorrerá posteriormente, na sequência didática. Ao longo dessa sequência, o professor encontrará sugestões de abordagens que poderão ser ajustadas conforme sua necessidade e o perfil de seu público. Cabe ao docente, com base na experiência em sala de aula e nos conhecimentos adquiridos aqui, decidir se seguirá as propostas sugeridas ou se desenvolverá sua própria maneira de explorar esses conceitos.

3.4.1 Conceito de Perímetro

Segundo a Figura 24, o conceito de perímetro está fortemente associado à ideia de contorno da figura, à sua fronteira e à unidade de comprimento utilizada para medi-lo. Um conceito que não aparece explicitamente nessa tabela, mas que será adotado como definição neste capítulo, é o seguinte: o perímetro corresponde à soma das medidas dos lados de uma figura.

Embora todos esses conceitos sejam válidos em determinado contexto, muitos autores fazem críticas legítimas à definição restrita de perímetro como sendo apenas a

soma das medidas dos lados de uma figura. Rocha et al. (30), por exemplo, destacam que alguns professores, ao ensinar esse tema, limitam-se a apresentar o perímetro apenas como a “soma da medida dos lados”. No entanto, essa abordagem gera uma questão importante: como definir o perímetro de figuras curvas, como a circunferência ou outras curvas fechadas?

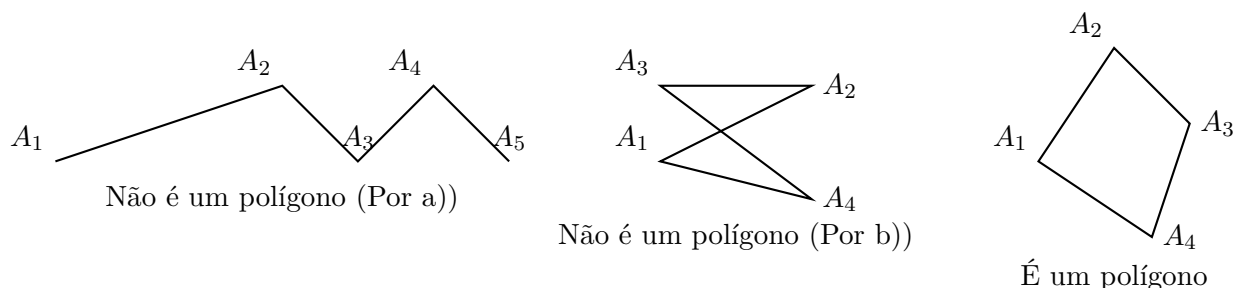
Essa limitação conceitual, na maioria das vezes, revela a falta de uma exploração mais aprofundada dos diferentes tipos de figuras geométricas planas. Uma forma simples de contornar esse problema é especificar que tal definição é válida apenas para os polígonos. Contudo, para que essa delimitação fique clara, é necessário primeiro compreender o que caracteriza um polígono. Dessa forma, apresenta-se a seguir a definição formal desse conceito segundo Barbosa (31).

Definição 3.1. Uma **poligonal** é uma figura formada por uma sequência de pontos A_1, A_2, \dots, A_n distintos com três pontos consecutivos não colineares e pelos segmentos consecutivos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$. Os pontos são chamados de *vértices* da poligonal e os segmentos são os seus *lados*. Um **polígono** é uma poligonal que satisfaz as seguintes três condições:

- $A_n = A_1$.
- Os lados se interceptam apenas em suas extremidades.
- Dois lados consecutivos não pertencem à mesma reta.

A fim de elucidar melhor o conceito, apresenta-se a seguir alguns exemplos de figuras que são polígonos e outras que não são:

Figura 25 – Exemplos de polígonos e não polígonos



Fonte: do autor, 2025

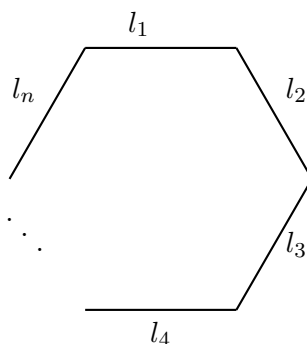
Um polígono de vértices $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} = A_1$ será representado por $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Ele possui n lados, n vértices e n ângulos internos.

Definição 3.2. O comprimento de uma poligonal é dado pela soma dos comprimentos de seus lados.

Ao especificar que a definição que associa o perímetro à soma dos lados é restrita aos polígonos, o professor deixa claro que, no caso de figuras curvas, será necessária uma abordagem mais geral, capaz de abranger essas situações, como ocorre com a circunferência. Neste capítulo, contudo, foca-se nos polígonos.

Assim, dado um polígono com n lados:

Figura 26 – Representação esquemática de um polígono de n lados.



Fonte: do autor, 2025

onde $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ representam as medidas dos lados do polígono.

O **perímetro** (P) desse polígono é o comprimento de sua poligonal, ou seja:

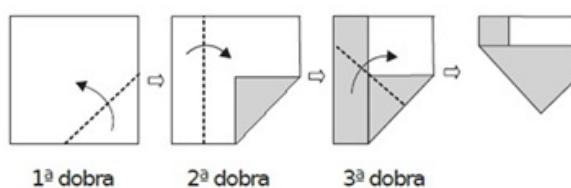
$$P = l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n \quad (3.1)$$

Vale destacar que todas as figuras geométricas abordadas neste capítulo são polígonos. Por essa razão, a definição apresentada mostra-se não apenas adequada, mas também suficiente para os objetivos aqui propostos.

A seguir, apresenta-se um exemplo de como é possível relacionar o uso do origami com o conceito de perímetro, a partir da adaptação de uma questão da [OBMEP](#):

Exemplo 3.3. Problema 20-Adaptado (OBMEP(32) 2016 - 1ª Fase) Alice fez três dobras numa folha de papel quadrada de lado 20 cm, branca na frente e cinza no verso. Na primeira dobra, ela fez um vértice coincidir com o centro do quadrado e depois fez mais duas dobras, como indicado na figura. Após a terceira dobra, qual é o perímetro da parte cinza da folha que ficou visível?

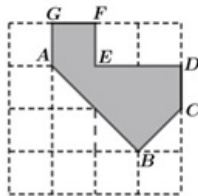
Figura 27 – Origami- POTI



Fonte: POTI (32)

Solução: Analisando as dobras feitas na folha, tem-se que calcular o perímetro do polígono ABCDEFG da seguinte figura.

Figura 28 – Origami sobre Malha Quadriculada



Fonte: do autor, 2025

Nota-se que a folha pode ser dividida em pequenos quadrados de lado 5 cm. Tem-se assim,

$$CD = EF = FG = AG = 5\text{cm}, \quad ED = 10\text{cm}.$$

E utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos

$$BC = 5\sqrt{2}\text{cm}, \quad AB = 10\sqrt{2}\text{cm}.$$

Portanto, o perímetro P da parte cinza é

$$P = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA$$

$$P = 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5 + 10 + 5 + 5 + 5$$

$$P = 25 + 15\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Portanto, o conceito de perímetro, desde que devidamente contextualizado e associado ao conceito de polígono, pode e deve ser trabalhado como a soma das medidas dos lados dessas figuras. Essa abordagem é, inclusive, a que adotamos neste capítulo, por ser a mais adequada aos objetivos propostos e ao público-alvo deste trabalho.

3.4.2 Conceito de Área

A Figura 24 apresenta excelentes noções introdutórias que podem ser trabalhadas com os alunos em sala de aula, no que diz respeito ao conceito de área. Contudo, do ponto de vista do rigor matemático, a definição formal de área exige um aprofundamento maior na ciência matemática e em seus objetos de estudo. Com o intuito de oferecer subsídios ao professor quanto à compreensão desse conceito, e atendendo aos critérios de formalidade que a Matemática requer, apresentaremos a seguir a definição de área e a demonstração das principais fórmulas utilizadas no seu cálculo.

Assim como foi feito com o conceito de perímetro, o conceito de área aqui trabalhado está restrito à noção de **área de polígonos**. Para que essa delimitação faça sentido matemático e conceitual, é fundamental compreender previamente dois conceitos importantes: **congruência de polígonos** e **convexidade de polígonos**.

Definição 3.4 (Congruência de Polígonos). Dois polígonos são congruentes se possuem a mesma forma e o mesmo tamanho, o que significa que todos os seus lados e ângulos correspondentes são iguais em medida. A congruência pode ser verificada pela sobreposição das figuras: se um polígono puder ser colocado exatamente sobre o outro, eles são congruentes.

Definição 3.5 (Convexidade de Polígonos). Um polígono é dito **convexo** quando, para quaisquer dois pontos pertencentes ao seu interior, o segmento de reta que os une também está inteiramente contido dentro do polígono.

De forma equivalente, pode-se afirmar que um polígono convexo é aquele cujos ângulos internos são todos menores que 180° .

A fim de que os conceitos de área de polígonos sejam minimamente válidos do ponto de vista matemático, postula-se a seguir quatro propriedades que, embora aqui apresentadas de forma empírica, são amplamente aceitas na literatura como fundamentos básicos para a definição da área de polígonos.

Postulado 1 (Congruência). *Polígonos congruentes possuem a mesma área.*

Postulado 2 (Aditividade). *Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles compartilham somente seus vértices ou arestas), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.*

Postulado 3 (Monotonicidade). *Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles compartilham somente seus vértices ou arestas), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.*

Esse postulado expressa que, sempre que um polígono contém outro em seu interior, sua área será maior ou igual à área do polígono contido.

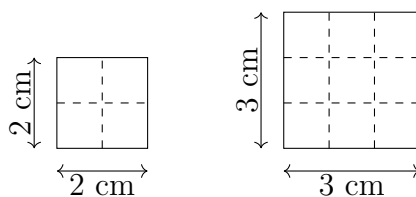
Postulado 4 (Normalização). *A área de um quadrado de lado 1cm é igual a 1cm^2 . ou seja:*

$$\begin{array}{c} \square \\ 1\text{ cm} \end{array} 1\text{ cm} \Leftrightarrow A = 1\text{cm}^2$$

3.4.3 Área do Quadrado

Valendo-se dos postulados apresentados anteriormente, pode-se inferir que os quadrados abaixo possuem, respectivamente, áreas igual a 4cm^2 e 9cm^2 como mostra a Figura 29, a seguir.

Figura 29 – Quadrados de lados 2 cm e 3 cm



Fonte: do autor, 2025

A tabela abaixo sugere que, pelos casos apresentados, para um quadrado de lado l , sua área A_l será dada por l^2 .

Tabela 1 – Relação entre o lado do quadrado e sua área

Lado (cm)	Área (cm ²)	Expressão da Área
1	1	1^2
2	4	2^2
3	9	3^2

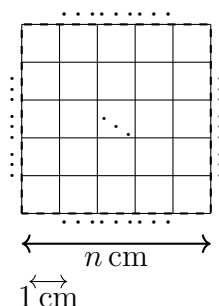
A fim de verificar tal sugestão, realiza-se um estudo de caso para demonstrar que, de fato, a área de um quadrado de lado l é dada por l^2 , ou seja:

$$A_l = l^2$$

3.4.3.1 Caso 1: Lados Naturais

Seja Q um quadrado de lado n , com $n \in \mathbb{N}$, e área A_n . Particionando Q em n^2 quadrados menores, cada um com 1 cm de lado, obtém-se a configuração mostrada na Figura 30.

Figura 30 – Quadrado de lado n cm subdividido em quadrados de lado 1 cm.



Fonte: do autor, 2025

Pelo postulado 2 devemos ter que A_n é igual à soma das áreas desses n^2 quadrados, ou seja:

$$A_n = n^2 \cdot 1,$$

onde n^2 representa a quantidade de quadrados de área 1cm^2 e 1 é a área de cada um desses quadrados. Portanto:

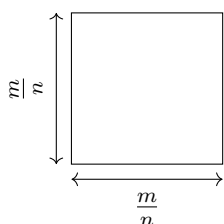
$$A_n = n^2$$

Ou seja, para quadrados cujo lado mede um número natural, de fato obtemos o resultado esperado, confirmando que a área de um quadrado de lado l , com $l \in \mathbb{N}$, é igual a l^2 .

3.4.3.2 Caso 2: Lados Racionais

Ao analisar-se um quadrado Q de lado $l = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e área $A_{\frac{m}{n}}$.

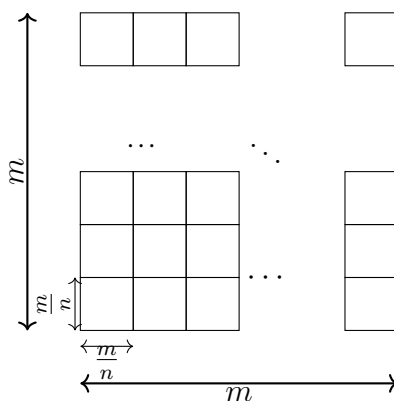
Figura 31 – Quadrado de lado racionais



Fonte: do autor, 2025

Tomando n^2 cópias de Q e organizá-las em n filas e n colunas, pode-se construir um novo quadrado de lado m , conforme poderá ser visto na Figura 32, a seguir.

Figura 32 – Formação de um quadrado de lado m a partir de n^2 cópias de Q , cada uma com lado $\frac{m}{n}$.



Fonte: do autor, 2025

O lado do quadrado maior apresentado na Figura 32 é igual a m :

$$\underbrace{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}}_{n \text{ termos}} = n \cdot \frac{m}{n} = m.$$

Deve-se ter, então, que

$$m^2 = n^2 \cdot A_{\frac{m}{n}}, \quad (3.2)$$

em que m^2 é a área do quadrado maior, pois provamos essa área para números naturais, n^2 representa a quantidade de quadrados Q e $A_{\frac{m}{n}}$ corresponde à sua área.

Resolvendo a Equação 3.2, pode-se isolar $A_{\frac{m}{n}}$ determinando assim que:

$$A_{\frac{m}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Esse resultado reforça a ideia de que a área de um quadrado de lado l é dada por l^2 mesmo que $l \in \mathbb{Q}^*$. No entanto, ele ainda não é suficiente para estabelecer uma demonstração formal dessa afirmação para todos os valores reais de l .

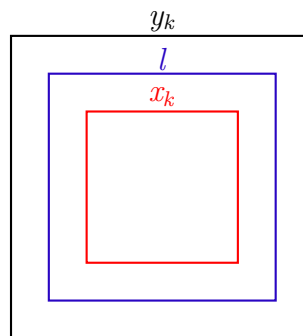
3.4.3.3 Caso 3: Lados Irracionais

Para a área de um quadrado de lado l irracional, adota-se a seguinte estratégia: para cada número natural k , escolheremos dois números racionais x_k e y_k tais que

$$x_k < l < y_k \quad \text{e} \quad y_k - x_k < \frac{1}{k}.$$

Pelo **Caso 2** (Seção 3.4.3.2) é possível calcular a área de quadrados de lado racional então será construído dois quadrados: um de lado x_k , cuja área será x_k^2 , e outro de lado y_k , cuja área será y_k^2 , conforme mostra a Figura 33 a seguir.

Figura 33 – Quadrado de lado x_k dentro de quadrado de lado l , que está dentro do quadrado de lado y_k , com $x_k < l < y_k$.



Fonte: do autor, 2025

Pelo postulado da *Monotonicidade* tem-se:

$$x_k^2 < A_l < y_k^2,$$

onde A_l representa a área do quadrado de lado l .

Além disso tem-se que $x_k^2 < l^2 < y_k^2$, ou seja, tanto A_l quanto l^2 devem pertencer ao intervalo (x_k^2, y_k^2) , de modo que:

$$|A_l - l^2| < y_k^2 - x_k^2 = (y_k - x_k)(y_k + x_k)$$

do fato de $y_k - x_k < \frac{1}{k}$ tem-se que:

$$|A_l - l^2| < \frac{1}{k}(y_k + x_k)$$

Somando zero ao termo dentro do parenteses tem-se:

$$|A_l - l^2| < \frac{1}{k}(y_k + x_k + \underbrace{(x_k - x_k)}_0)$$

Ou seja:

$$|A_l - l^2| < \frac{1}{k}(y_k - x_k + 2x_k)$$

Mais um vez de $y_k - x_k < \frac{1}{k}$ e do fato de $x_k < l$ tem-se

$$|A_l - l^2| < \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 2l \right) = \frac{1 + 2lk}{k^2} \leq \frac{1 + 2l}{k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Como $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$, segue que $|A_l - l^2| = 0 \Rightarrow A_l - l^2 = 0$. Logo,

$$A_l = l^2 \tag{3.3}$$

concluindo assim a demonstração.

3.4.4 Área do Retângulo

Após a demonstração rigorosa de que a área de um quadrado de lado l é dada por l^2 , pode-se agora estender tal construção para a área de um retângulo de lados a e b , com $a, b \in \mathbb{R}^+$.

3.4.4.1 Caso 1: Lados Naturais

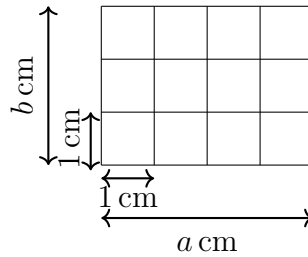
Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Consideremos um retângulo de base a cm e altura b cm, subdividido em quadrados de lado 1 cm, como mostra a Figura 34.

Pelo Postulado da Aditividade, a área total desse retângulo será a soma das áreas dos $a \cdot b$ quadrados unitários:

$$A_{a,b} = a \cdot b \cdot 1$$

$$A_{a,b} = a \cdot b$$

Figura 34 – Retângulo com lados a e b , ambos naturais, subdividido em quadrados de lado 1 cm.

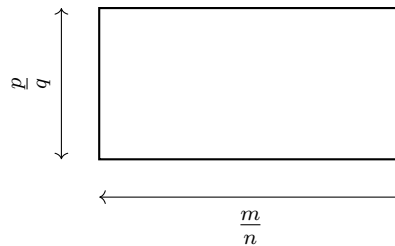


Fonte: do autor, 2025

3.4.4.2 Caso 2: Lados Racionais

Sejam agora $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$, com $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$, lados do retângulo Q como na ilustrado na Figura 35.

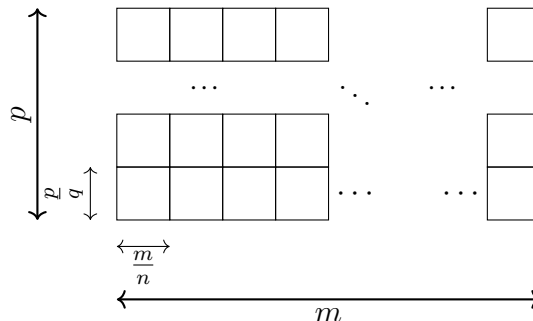
Figura 35 – Retângulo com lados a e b .



Fonte: do autor, 2025

Pode-se tomar $n \cdot q$ cópias de Q e organizá-las em q filas e n colunas, assim construiremos um novo retângulo de base n e altura q , conforme mostrado na Figura 36.

Figura 36 – Formação de um retângulo de lados m e p , a partir de $n \times q$ cópias de Q , cada uma com dimensões $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$.



Fonte: do autor, 2025

As dimensões do retângulo maior são essas pois:

$$\underbrace{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}}_{n \text{ termos}} = n \cdot \frac{m}{n} = m,$$

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}}_{q \text{ termos}} = q \cdot \frac{p}{q} = p.$$

O número total de retângulos Q usados na construção é $n \cdot q$.

Seja $A_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}$ a área de Q . A área total do retângulo maior, com lados m e p , é $m \cdot p$, segundo já demonstramos anteriormente para retângulos de lados naturais.

Portanto, temos a relação:

$$m \cdot p = (n \cdot q) \cdot A_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}, \quad (3.4)$$

onde $(n \cdot q)$ representa a quantidade de retângulos Q que compõem o retângulo maior.

Isolando $A_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}}$, temos que a área de um retângulo de lados $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ é:

$$A_{\frac{m}{n}, \frac{p}{q}} = \left(\frac{m}{n}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right).$$

Tal como na demonstração da área do quadrado, este resultado é válido para lados racionais.

3.4.4.3 Caso 3: Lados Irracionais

Conforme feito na demonstração da área do quadrado, para estendermos o conceito de área de um retângulo para casos em que os lados são números reais positivos, recorreremos novamente a uma abordagem por aproximação.

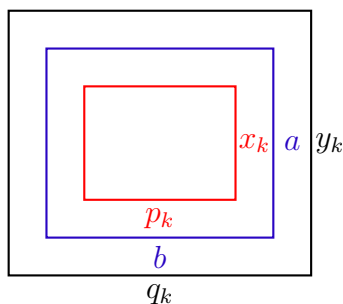
Seja $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$. Deseja-se demonstrar que a área de um retângulo de lados a e b é dada por:

$$A_{a,b} = a \cdot b.$$

Para isso, tome números racionais x_k, y_k, p_k e q_k , com $k \in \mathbb{N}^*$ tais que:

$$x_k < a < y_k, \quad y_k - x_k < \frac{1}{k} \quad e \quad p_k < b < q_k, \quad q_k - p_k < \frac{1}{k},$$

Assim, para cada k , considera-se três retângulos: - Um retângulo interno de lados x_k e p_k , com área $x_k \cdot p_k$. - Um retângulo externo de lados y_k e q_k , com área $y_k \cdot q_k$. - O retângulo de lados a e b , cuja área real ($A_{a,b}$) queremos determinar, que está contido entre os dois anteriores conforme ilustrado na Figura 37.

Figura 37 – Construção de aproximações para o retângulo de lados a e b


Fonte: do autor, 2025

Aplicando o postulado da monotonicidade da área, temos:

$$x_k \cdot p_k < A_{a,b} < y_k \cdot q_k.$$

Além disso, como já demonstrado, a área de um retângulo com lados racionais é o produto dos lados, assim $x_k \cdot p_k$ e $y_k \cdot q_k$ são as áreas dos retângulos interno e externos ao retângulo de lados a e b respectivamente.

Agora, comparando $A_{a,b}$ com $a \cdot b$. Observa-se que:

$$x_k < a < y_k \quad \text{e} \quad p_k < b < q_k,$$

o que implica que:

$$x_k \cdot p_k < a \cdot b < y_k \cdot q_k.$$

Logo $A_{a,b}$ e $a \cdot b \in (x_k \cdot p_k, y_k \cdot q_k)$. Portanto

$$|A_{a,b} - a \cdot b| < y_k \cdot q_k - x_k \cdot p_k.$$

Somando zero ao 2º membro da desigualdade tem-se:

$$|A_{a,b} - a \cdot b| < y_k \cdot q_k + \underbrace{(-y_k \cdot p_k + y_k \cdot p_k)}_0 - x_k \cdot p_k.$$

$$|A_{a,b} - a \cdot b| < (q_k - p_k) \cdot y_k + p_k \cdot (y_k - x_k).$$

Sabe-se que $q_k - p_k < \frac{1}{k}$ e $y_k - x_k < \frac{1}{k}$.

Portanto:

$$|A_{a,b} - a \cdot b| < \frac{1}{k}(y_k + p_k).$$

Somando zeros novamente tem-se:

$$|A_{a,b} - a \cdot b| < \frac{1}{k}(y_k + p_k + \underbrace{(-x_k + x_k)}_0 + \underbrace{(-p_k + p_k)}_0).$$

Como x_k e $q_k > 0$ então:

$$|A_{a,b} - a \cdot b| < \frac{1}{k}(y_k - x_k + x_k - p_k + 2p_k + \underbrace{x_k + q_k}_{<0}).$$

Usando as propriedades comutativa e associativa da adição tem-se:

$$|A_{a,b} - a \cdot b| < \frac{1}{k}((y_k - x_k) + (q_k - p_k) + 2x_k + 2p_k)$$

Sabe-se que $x_k < a$, $p_k < b$, $q_k - p_k < \frac{1}{k}$ e $y_k - x_k < \frac{1}{k}$ portando:

$$|A_{a,b} - a \cdot b| < \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right)$$

Como $\frac{2}{k} \leq 2$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ então:

$$|A_{a,b} - a \cdot b| < \frac{1}{k}(2 + 2a + 2b), \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (3.5)$$

Prova-se que $|A_{a,b} - a \cdot b| = 0$ por redução ao absurdo como feito para a área do quadrado.

Suponha, a fim de chegar em um absurdo que $|A_{a,b} - a \cdot b| > 0$. Pela propriedade arquimediana dos reais existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que:

$$0 < \frac{1}{k_0} < \frac{|A_{a,b} - a \cdot b|}{2 + 2a + 2b} \quad (3.6)$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade 3.6 por $(2 + 2a + 2b)$ temos:

$$0 < \frac{1}{k_0}(2 + 2a + 2b) < |A_{a,b} - a \cdot b|$$

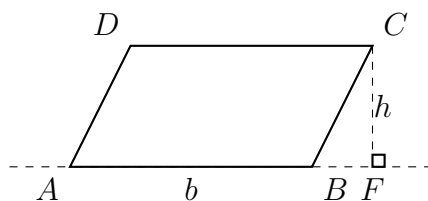
O que é claramente um absurdo, pois não pode haver um k_0 com tal propriedade já que a desigualdade 3.5 garante que $|A_{a,b} - a \cdot b| < \frac{1}{k}(2 + 2a + 2b)$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Portanto:

$$\begin{aligned} |A_{a,b} - a \cdot b| &= 0, \\ A_{a,b} &= a \cdot b \end{aligned} \quad (3.7)$$

concluindo assim a demonstração.

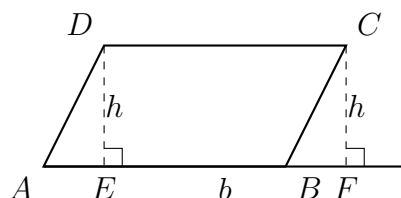
3.4.5 Área do Paralelogramo

Seja $ABCD$ um paralelogramo, cuja base AB mede b e sua altura mede h , conforme ilustrado na Figura 38.

Figura 38 – Paralelogramo $ABCD$ com base b e altura h .

Fonte: do autor, 2025

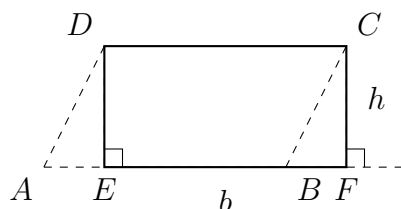
Sejam DE e CF as alturas relativas à base AB , com E e F sendo os respectivos pés dessas alturas, conforme figura 39.

Figura 39 – Paralelogramo $ABCD$ com alturas relativas a AB 

Fonte: do autor, 2025

Nos triângulos ADE e BCF os segmentos AD e BC são congruentes por serem lados opostos do paralelogramo, além disso os segmentos DE e CF possuem a mesma medida, pois correspondem à altura (h) do paralelogramo. Tem-se ainda que esses triângulos são retângulos. Logo, pelo critério de congruência *Hipotenusa-cateto* eles são congruentes e possuem a mesma área pelo postulado 1.

Tal congruência permite considerar uma translação que desloca o triângulo ADE para ocupar exatamente a posição do triângulo BCF , sem interseção com a região restante do paralelogramo. Após essa transformação, a figura resultante é um retângulo de base AB e a altura DE conforme Figura 40.

Figura 40 – Retângulo $CDEF$ feito a partir do Paralelogramo $ABCD$ 

Fonte: do autor, 2025

Pelo postulado 2, temos que a área do paralelogramo original é exatamente igual à área desse retângulo, ou seja:

$$A_{ABCD} = A_{CDEF} = b \cdot h,$$

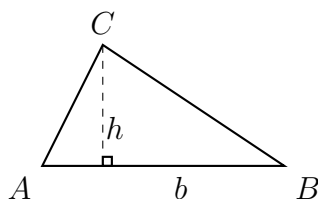
$$A_{ABCD} = b \cdot h \quad (3.8)$$

Portanto, conclui-se que a área de um paralelogramo é dada pelo produto entre a medida da base e a altura correspondente.

3.4.6 Área do Triângulo

Seja ABC um triângulo, cuja base AB mede b e sua altura mede h , conforme ilustrado na figura 41.

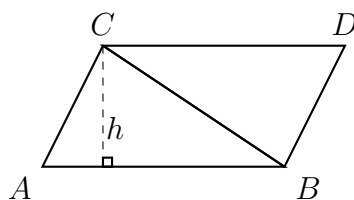
Figura 41 – Triângulo ABC com altura (h) relativa à base AB .



Fonte: do autor, 2025

Seja D o ponto do plano tal que $ABCD$ forma um paralelogramo, conforme ilustrado na figura 42. Nos triângulos ABC e BCD os lados AB e AC são congruentes a CD e BD respectivamente por serem lados opostos do paralelogramo. Além disso o segmento CB é comum a ambos, portanto pelo caso *lado-lado-lado* esse triângulos são congruentes e possuem a mesma área pelo postulado 1.

Figura 42 – Paralelogramo $ABCD$ criado a partir de triângulo ABC .



Fonte: do autor, 2025

Tem-se então pelo postulado 2 que

$$A_{ABC} + A_{CBD} = A_{ABDC} \Rightarrow 2 \cdot A_{ABC} = A_{ABDC} \Rightarrow 2 \cdot A_{ABC} = b \cdot h$$

Logo,

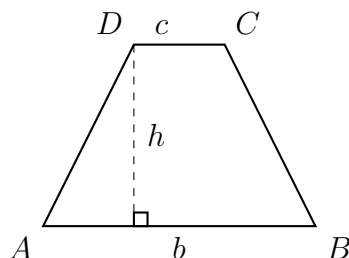
$$A_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2} \quad (3.9)$$

De forma análoga mostra-se esse mesmo resultado para quando as bases do Triângulo são os lados AC ou CB . Portanto, conclui-se que a área de um triângulo é dada pela metade do produto entre a medida da base e a altura correspondente.

3.4.7 Área do Trapézio

Seja $ABCD$ um trapézio, cuja base maior $AB = b$, base menor $DC = c$ e sua altura mede h , conforme ilustrado na Figura 43.

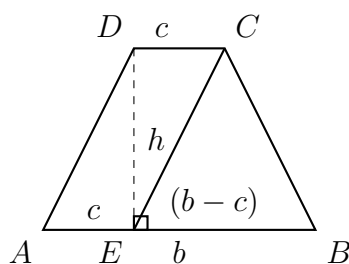
Figura 43 – Trapézio com base maior $AB = b$ e altura h .



Fonte: do autor, 2025

Seja E um ponto de AB tal que $AECD$ forme um paralelogramo. Assim $AE = c$ e $EB = b - c$ como ilustrado na Figura 44.

Figura 44 – Trapézio com base maior $AB = b$, altura h e segmento paralelo a AD saindo de C .



Fonte: do autor, 2025

Pelo postulado 2 a área do trapézio é dado por:

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= A_{AECD} + A_{EBC} \Rightarrow A_{ABCD} = c \cdot h + \frac{(b-c) \cdot h}{2} \\ &\Rightarrow A_{ABCD} = \frac{2 \cdot c \cdot h + b \cdot h - c \cdot h}{2} \\ &\Rightarrow A_{ABCD} = \frac{c \cdot h + b \cdot h}{2} \end{aligned}$$

Logo,

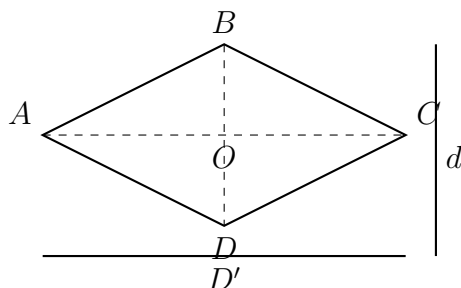
$$A_{ABCD} = \frac{(c+b)h}{2} \tag{3.10}$$

Portanto, conclui-se que a área de um trapézio é dada pela metade do produto entre a soma das medidas das suas bases e a sua altura.

3.4.8 Área do losango

Seja $ABCD$ um losango, cuja diagonal maior $AC = D'$ e a diagonal menor $BD = d$, conforme ilustrado na Figura 45.

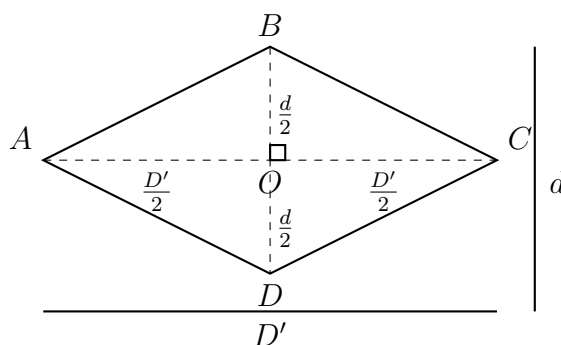
Figura 45 – Losango com diagonais $AC = D'$ e $BD = d$.



Fonte: do autor, 2025

Note que $OB = OD = \frac{d}{2}$, $OA = OC = \frac{D'}{2}$ e os triângulos AOB , BOC , COD , DOA são todos retângulos, pois O é o ponto de intersecção das diagonais do losango conforme mostrado na Figura 46. Além disso $AB = BC = CD = DA$ por serem os lados do losango portanto pelo caso *hipotenusa-cateto* esses triângulos são todos congruentes entre si e possuem a mesma área pelo postulado 1, ou seja $A_{AOB} = A_{BOC} = A_{COD} = A_{DOA}$.

Figura 46 – Losango com diagonais $AC = \frac{D'}{2} + \frac{D'}{2}$ e $BD = \frac{d}{2} + \frac{d}{2}$.



Fonte: do autor, 2025

Pelo postulado 2 a área do losango é dada por:

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= A_{AOB} + A_{BOC} + A_{COD} + A_{DOA} \Rightarrow A_{ABCD} = 4 \cdot A_{AOB} \\ &\Rightarrow A_{ABCD} = 4 \cdot \frac{\frac{D'}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$A_{ABCD} = \frac{D' \cdot d}{2} \tag{3.11}$$

Portanto, conclui-se que a área de um losango é dada pela metade do produto entre as medidas das suas diagonais.

3.5 Sequência Didática 2: Do Origami ao *Instant Insanity*

3.5.1 Conteúdos Abordados

- **Perímetro de figuras planas:** Cálculo do contorno de figuras geométricas planas, como quadrado, retângulo, triângulo, trapézio e losango, a partir das medidas observadas nas etapas de dobradura.
- **Área de figuras planas:** Determinação da superfície ocupada por figuras planas geradas durante o processo de construção do cubo por meio do origami.

3.5.2 Título:

Do Origami ao conhecimento: Explorando Área e Perímetro na Construção do Jogo *Instant Insanity*.

3.5.3 Justificativa

Os conceitos de área e perímetro, embora recorrentes na educação básica, ainda são abordados, em grande parte, por meio da memorização de fórmulas descontextualizadas, o que dificulta a aprendizagem significativa. Esta sequência didática propõe uma abordagem lúdica e concreta por meio da construção do jogo *Instant Insanity* com a técnica do origami, possibilitando ao aluno compreender esses conceitos de forma prática e sensorial, a partir da manipulação direta de figuras geométricas.

3.5.4 Duração

Encontro	Descrição	Duração
1	O jogo, o contrato didático, avaliação diagnóstica e o início da construção das peças elementares.	1h e 40min
2	Um estudo sobre área e perímetro.	1h e 40min
3	Discussão e generalização.	1h e 40min
4	Conclusão da construção do jogo.	1h e 40min
5	O jogo e a avaliação.	1h e 40min
6	Devolução da avaliação.	1h e 40min

Quadro 3.5.1 – Área e perímetro: Encontros, atividades e duração

3.5.5 Objetivos

3.5.5.1 Objetivo Geral

Compreender e aplicar os conceitos de área e perímetro de figuras planas por meio da construção do jogo *Instant Insanity* utilizando a técnica do origami, visando promover uma aprendizagem significativa e concreta desses conteúdos geométricos.

3.5.5.2 Objetivos Específicos

1. Compreender o origami como ferramenta de aprendizagem no ensino da geometria.
2. Reforçar os nomes, características e propriedades dos polígonos envolvidos na construção do jogo.
3. Entender o conceito de perímetro de polígonos e sua aplicação prática.
4. Compreender o conceito de área e analisar como as fórmulas utilizadas são construídas.
5. Revisar conceitos aritméticos e algébricos envolvidos no cálculo de área e perímetro.
6. Utilizar a malha quadriculada como recurso de apoio para estimativas e cálculos geométricos.
7. Estimular o raciocínio lógico e a autonomia na resolução de problemas geométricos, com foco no desenvolvimento de competências exigidas em avaliações externas.

3.5.6 Público-alvo

Alunos do 1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio, na faixa etária de 14 a 17 anos.

3.5.7 Perfil das turmas

Turmas compostas por 20 a 40 alunos.

3.5.8 Habilidades da BNCC

Esta proposta torna-se relevante principalmente por atender a diversas habilidades específicas da BNCC, alinhadas ao desenvolvimento do pensamento matemático e à formação cidadã dos estudantes. Dentre essas habilidades, destacamos:

- **(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

- **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT313)** Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro. *Toda medição está sujeita a erro, mesmo que mínimo. Essa habilidade orienta a reconhecer e considerar isso, especialmente no contexto de resolução de problemas com medidas.*
- **(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

Essas habilidades são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, sendo integradas à proposta didática do uso do jogo *Instant Insanity* para facilitar o aprendizado de área e perímetro de maneira mais prática e dinâmica.

3.5.9 Descritores do SAEB e do SAEPE

A matriz de referência da 3ª Série do Ensino Médio (EM) para o SAEB e o SAEPE contempla o estudo de área e perímetro por meio dos seguintes **descritores**:

1. **D11:** Resolver problemas envolvendo o perímetro de figuras planas.
2. **D12:** Resolver problemas envolvendo a área de figuras planas.

Esses descritores são fortemente trabalhados ao longo da 3ª série do EM, ainda que não de forma exclusiva. Essa abordagem pode ser observada nas habilidades específicas do componente curricular de Matemática, conforme descrito no Organizador Curricular da Formação Geral Básica (FGB) – EM de Pernambuco como mostra o quadro 3.5.2:

Série	Trimestre	Habilidade específica do componente	Objeto(s) de conhecimento
1ª série EM	1º bimestre	(EM13MAT201PE13) Propor ou participar de ações envolvendo medições e cálculos de perímetro, área, volume, capacidade e massa, etc.	Medição e cálculo de perímetro e área
1ª série EM	1º bimestre	(EM13MAT201PE14) Mobilizar conceitos e propriedades para estabelecer fórmulas de medida da área e do volume em figuras geométricas.	Conceitos, propriedades e medidas de área
1ª série EM	2º bimestre	(EM13MAT307PE23) Utilizar modelos para obtenção da medida da área de superfícies por composição e decomposição.	Área de figuras geométricas planas
2ª série EM	1º bimestre	(EM13MAT201PE13) (<i>Reaplicado</i>) Cálculos de perímetro, área, volume, etc.	Medição e cálculo de perímetro e área

Quadro 3.5.2 – Habilidades de área e perímetro nas 1ª e 2ª séries do Ensino Médio (FGB – Pernambuco)

3.5.10 Recursos

Datashow, computador, folhas de papel, quadro branco, Impressora, tesoura, régua e Apêndice.

3.5.11 Avaliação

A sequência didática terá início com uma **avaliação diagnóstica**, que servirá de **orientação para o professor** ao longo das demais etapas. O processo avaliativo **terá continuidade por meio da participação dos estudantes nas discussões e na resolução dos problemas propostos**. Ao final do conteúdo, será aplicada uma **avaliação somativa**, com o objetivo de verificar a aprendizagem dos conceitos trabalhados.

3.5.12 Etapas da Sequência Didática

3.5.12.1 Encontro 1: O jogo, o contrato didático, avaliação diagnóstica e o início da construção das peças elementares.

No primeiro encontro, é fundamental que o docente apresente com clareza o jogo *Instant Insanity* (Seção 1.1.3) e todas as etapas que compõem esta sequência didática. São elas: Apresentação do jogo; construção do contrato didático; aplicação da prova diagnóstica sobre área e perímetro; estudo introdutório sobre o origami e a confecção das peças elementares; exploração dos conceitos de área e perímetro por meio do origami; generalização desses conceitos; conclusão das peças elementares, montagem e pintura dos cubos do *Instant Insanity*; momento lúdico com o jogo *Instant Insanity*; e, por fim, a avaliação da aprendizagem.

Além disso, o professor deve esclarecer que a avaliação será contínua ao longo de todo o processo. Todas as atividades, com exceção da prova somativa, serão realizadas em grupos, embora a nota de cada estudante seja atribuída de forma individual. Cabe ainda ao docente estabelecer, neste momento inicial, os combinados e requisitos que considerar importantes para o bom andamento da proposta, considerando as especificidades da escola e o perfil dos alunos envolvidos.

Recomenda-se que o professor destine cerca de 20 minutos desse primeiro encontro para apresentar o jogo e firmar esse contrato didático com a turma. Em seguida, os 40 minutos restantes devem ser utilizados para a aplicação da avaliação diagnóstica composta por questões que avaliem os conhecimentos prévios dos estudantes sobre os conceitos de área e perímetro de figuras planas. O objetivo dessa avaliação é identificar possíveis lacunas e mapear o nível da turma, de modo a orientar as intervenções pedagógicas que serão realizadas ao longo da sequência.

Ao final da aplicação da prova o professor fará uma breve contextualização histórica e cultural do origami, destacando sua importância tanto como forma de expressão artística quanto como ferramenta pedagógica no ensino da matemática. Ele deverá destinar 10 minutos para isso. No tempo restante deste encontro, será realizada a divisão da turma em grupos de quatro alunos e iniciada a construção das peças elementares para isso o professor deverá entregar para cada integrante dos grupos seis quadrados de mesma medida e apresentar o modelo ilustrado na figura 22, que pode ser projetado com o uso de datashow, garantindo que todos os grupos tenham acesso simultâneo às instruções do origami.

Ao final deste encontro, espera-se que boa parte das peças de cada grupo já esteja confeccionada. A finalização da construção ocorrerá nos encontros seguintes, conforme o andamento e o ritmo da turma.

Além disso, o professor deverá recolher e armazenar adequadamente as peças produzidas por cada grupo, a fim de evitar perdas ou danos que possam comprometer o andamento das etapas posteriores da sequência didática.

3.5.12.2 Encontro 2: Um estudo sobre área e perímetro

Ao iniciar este encontro, o professor deverá explicar que o foco da aula será a compreensão de dois conceitos fundamentais da matemática: área e perímetro. Em seguida, entregará a cada aluno um quadrado impresso em malha quadriculada cuja figura poderá ser encontrada no Apêndice C (2- Quadrado Quadriculado), destacando que o objetivo da atividade é compreender esses conceitos e associá-los às peças elementares produzidas — mas ainda não finalizadas — no encontro anterior.

Para isso, o professor iniciará conceituando o perímetro de um polígono como sendo a soma dos comprimentos de seus lados. Em seguida, apresentará exemplos simples com

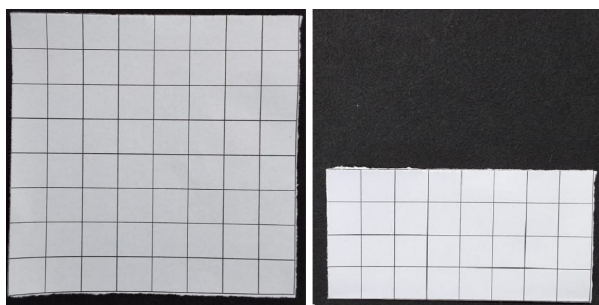
figuras desenhadas sobre a malha quadriculada cuja figura também poderá ser encontrada no Apêndice C (1- [Figura para análise de área e perímetro](#)), permitindo que os alunos façam contagens diretas dos segmentos e da região que compõem as figuras.

Na sequência, será introduzido o conceito de área como medida da superfície de uma figura plana, com base em três premissas fundamentais (32):

- **Premissa I:** A área de um retângulo de lados a e b é dada por $a \cdot b$.
- **Premissa II:** Se uma figura plana é dividida em partes menores, a soma das áreas dessas partes é igual à área da figura original.
- **Premissa III:** Figuras planas congruentes possuem a mesma área.

A partir da **Premissa I**, os alunos serão convidados a observar a primeira dobradura do origami da peça elementar, que transforma um quadrado em um retângulo, conforme ilustrado na Figura 47.

Figura 47 – Quadrado e retângulos quadriculados



Fonte: do autor, 2025

Essa transição permitirá verificar empiricamente a validade da fórmula $a \cdot b$, além de reforçar a ideia de que todo quadrado é, por definição, um caso particular de retângulo.

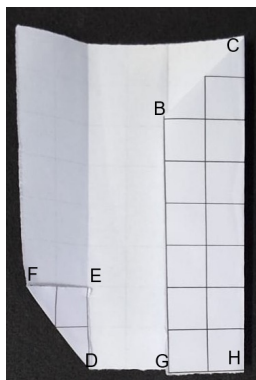
De posse das demais premissas e da Seção 3.3, o professor deverá destinar aproximadamente 50 minutos para essa discussão, bem como para a dedução das fórmulas de área e perímetro das demais figuras planas.

Munidos das fórmulas para o cálculo da área das figuras geométricas planas, os alunos serão reorganizados em seus grupos para, no tempo restante do encontro, darem continuidade à construção da peça elementares no quadrado quadriculado. À medida que forem identificando as figuras presentes nas dobraduras, deverão calcular seus respectivos perímetros e áreas.

O professor deverá intervir sempre que solicitado ou considerar pertinente, conduzindo a exploração com perguntas norteadoras como, por exemplo, ao observa a dobradura

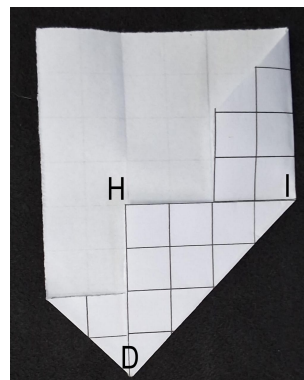
representada nas Figuras 48 e 49: “Qual é a área do trapézio $CBGH$?” ou “Qual é o perímetro do triângulo IHD ?” respectivamente.

Figura 48 – Passo cinco na dobradura elementar



Fonte: do autor, 2025

Figura 49 – Passo seis na dobradura elementar



Fonte: do autor, 2025

O uso do quadrado impresso em malha quadriculada configura-se como um recurso visual relevante para estimativas, contagem de unidades e delimitação de formas, favorecendo a compreensão dos conceitos abordados nesta fase da sequência didática.

O próximo encontro será iniciado com a socialização das conclusões de cada grupo, permitindo o alinhamento geral dos conhecimentos construídos.

3.5.12.3 Encontro 3: Discussão e generalização

Este encontro será iniciado com a exibição, via datashow, da figura 22, que ilustra os passos de montagem da peça elementar. A cada etapa apresentada, os grupos deverão expor as figuras geométricas identificadas, bem como os respectivos perímetros e áreas. Cabe ao professor, como mediador do processo, orientar, complementar e aprofundar a discussão sempre que considerar necessário. Recomenda-se destinar aproximadamente 50 minutos para essa atividade.

As Figuras 48 e 49 sugerem que a mediação do professor quanto ao cálculo de áreas será mais fluida, uma vez que os alunos já terão sido sensibilizados com a contagem de unidade de área. No entanto, é possível que surjam dificuldades no que se refere ao cálculo de perímetros, especialmente em casos que envolvem triângulos retângulos, como no caso da Figura 49. Nessa etapa, o uso do Teorema de Pitágoras é uma ferramenta didática valiosa, auxiliando os estudantes na determinação das medidas e promovendo maior compreensão desse conceito. Na Seção 3.6.1, alguns desses cálculos serão apresentados com o intuito de oferecer subsídios ao professor para lidar com tais situações.

Concluída a exposição o professor deverá convidar os grupos a refletirem sobre a generalização das ideias construídas. Uma pergunta norteadora que pode orientar esse

momento é: “Se não soubéssemos a medida do lado do quadrado inicial, seria possível determinar a área das demais figuras? E se o lado do quadrado fosse $4x$, qual seria a área de cada figura?”

Neste momento, o professor deve explicar a razão da escolha pela expressão $4x$ ao invés de apenas x . Essa decisão se justifica pelo fato de que o quadrado inicial é dividido ao meio, e, em seguida, suas metades são novamente subdividida. Assim, ao adotar $4x$ como medida do lado do quadrado, obtêm-se, ao final desses dois passos, retângulos com lados de $4x$ e x , o que permite trabalhar com medidas inteiras e evitar frações. Embora o uso de frações não seja o foco principal desta sequência, sua incorporação, caso desejada, também pode enriquecer a atividade e demonstrar a eficiência do método.

A conclusão do encontro dar-se-á com a exposição das conclusões elaboradas pelos grupos, mediadas pelo professor, promovendo a socialização das aprendizagens construídas ao longo da atividade.

3.5.12.4 Encontro 4: Conclusão da construção do jogo

Neste encontro, será retomada a construção das peças elementares. O professor deverá devolver a cada grupo os respectivos materiais para a conclusão dessa etapa. Após finalizarem as dobraduras, os alunos serão convidados a iniciar a montagem dos cubos a partir das peças.

Para apoiar esse processo, o professor deverá exibir, por meio de data show, a Figura 23, que apresenta o modelo de montagem do cubo. A partir disso, os grupos poderão, enfim, concluir seus cubos.

Sugere-se que o professor destine cerca de 30 minutos à montagem dos cubos. Ao término desse tempo, os grupos deverão iniciar a etapa de pintura. Para isso, recomenda-se que o professor destine mais 40 minutos e exiba da Figura 14, que deverá servir como guia para a distribuição das cores nos cubos a serem pintados.

Durante o tempo de secagem da pintura dos cubos, recomenda-se que o professor utilize aproximadamente 30 minutos para, em conjunto com os alunos, resolver as questões apresentadas na Seção 3.6.2.

Ao final do encontro, espera-se que cada grupo tenha finalizado a confecção dos cubos completando o jogo *Instant Insanity*. Durante esse momento final, o professor também deverá informar os alunos sobre a aplicação da avaliação somativa, que ocorrerá no próximo encontro. Essa atividade será de fundamental importância para avaliar os conhecimentos adquiridos, especialmente em relação aos conceitos de área e perímetro explorados ao longo da sequência didática.

3.5.12.5 Encontro 5: O jogo e a avaliação

Com os grupos já organizados, este encontro será iniciado com 30 minutos destinados à jogar com *Instant Insanity* e à discussão sobre possíveis estratégias de solução. Caso os alunos não encontrem uma solução, o professor poderá apresentar uma das resoluções propostas, utilizando o material disponibilizado no Capítulo 4.

Na sequência, será reservado um momento de cerca de 20 minutos para que os alunos possam expressar suas impressões, opiniões e sugestões sobre a proposta vivenciada. Esse espaço de escuta ativa tem caráter formativo e contribui para o aprimoramento contínuo da prática docente. As observações dos estudantes deverão ser registradas, respeitando a singularidade de cada turma.

Este encontro será encerrado com 50 minutos dedicados a aplicação da avaliação somativa, atividade que tem como objetivo verificar os conhecimentos construídos ao longo da sequência didática.

3.5.12.6 Encontro 6: Devolução da avaliação

O professor deve realizar este encontro com foco na devolutiva da avaliação somativa. Deve organizar momentos individuais com cada aluno para apresentar os resultados, discutir os pontos fortes e identificar as dificuldades. É importante apresentar sugestões concretas de superação e orientar caminhos de estudo.

Ele deve valorizar o progresso de cada estudante e reforçar que a avaliação faz parte de um processo contínuo de aprendizagem. Os dados obtidos devem ser utilizados para ajustar a prática pedagógica e, se necessário, replanejar atividades futuras com base nas necessidades observadas.

Por fim, o professor deve garantir que todos os alunos sejam ouvidos e compreendam o seu desempenho. Este momento deve ser breve, objetivo e formativo.

3.6 Questões Comentadas

Com o intuito primordial de assessorar o professor frente às perguntas norteadoras abordadas na seção anterior, bem como auxiliá-lo na resolução de problemas que assegurem um bom desempenho dos alunos nas avaliações externas do SAEP e SAEB, esta seção dedica-se a apoiá-lo nesse processo.

3.6.1 Perguntas norteadoras

- **Questão 1:** Qual é a área do trapézio $CBGH$ na Figura 48?

Comentário: O aluno pode, neste caso, contar facilmente as unidades de área, atentando-se para o fato de que o segmento CB compõe as diagonais de dois triângulos congruentes, cuja soma das áreas é 1 cm^2 . Totaliza-se, assim, uma área de 14 cm^2 para o trapézio.

Outra possibilidade é substituir as medidas do trapézio na fórmula 3.10, deduzida em sala:

$$A = \frac{(8 + 6) \cdot 2}{2} = \frac{14 \cdot 2}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ cm}^2$$

Portanto, a área do trapézio é $\boxed{14 \text{ cm}^2}$.

- **Questão 2:** Qual é o perímetro do triângulo IHD na figura 49?

Comentário: Note que o triângulo $\triangle IHD$ é retângulo em H , e seu perímetro depende da medida do segmento \overline{ID} . Como $\overline{IH} = \overline{DH} = 4 \text{ cm}$, podemos calcular \overline{ID} aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$ID^2 = IH^2 + DH^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$$

$$ID = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Outra possibilidade é a aplicação do **Teorema de Pitágoras** em um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 cm . Dessa forma, a medida da hipotenusa é $\sqrt{2}$. Como o segmento IH é composto por quatro dessas diagonais, seu comprimento é $4\sqrt{2}$.

Agora, somamos os lados para obter o perímetro:

$$P = IH + DH + ID = 4 + 4 + 4\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

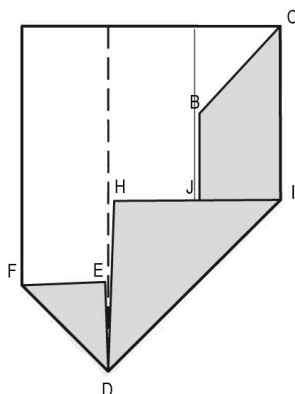
Portanto, o perímetro do triângulo $\triangle IHD$ é $\boxed{8 + 4\sqrt{2} \text{ cm}}$.

Caso o professor mediador sinta necessidade, poderá dedicar um tempo da aula para discutir o Teorema de Pitágoras, reforçando sua aplicação no contexto da atividade.

- **Questão 3:** Se o quadrado inicial tem lado $4x$, qual será a medida do lado da face do cubo?

Comentário: Note que, se o quadrado inicial tem lado $4x$, então o triângulo $\triangle IHD$, destacado na Figura 50, tem seus catetos medindo $\overline{IH} = \overline{DH} = 2x \text{ cm}$.

Figura 50 – Peça elementar seis



Fonte: do autor, 2025

Assim, a hipotenusa \overline{ID} pode ser calculada utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$ID^2 = IH^2 + DH^2 = (2x)^2 + (2x)^2 = 4x^2 + 4x^2 = 8x^2$$

$$ID = \sqrt{8x^2} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot x^2} = 2x\sqrt{2}$$

Portanto, a hipotenusa \overline{ID} mede $2x\sqrt{2}$ cm.

Além disso, o lado da face do cubo corresponde à metade da hipotenusa \overline{ID} . Logo, a medida do lado da face do cubo é:

$$\frac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{2} = x\sqrt{2} \text{ cm}$$

Conclusão: O lado da face do cubo mede $x\sqrt{2}$ cm.

3.6.2 Questão de provas externas

- **Questão 1:** (SAEPE). A figura, abaixo, mostra uma logomarca formada por um retângulo e um trapézio cujas medidas estão expressas em centímetros.

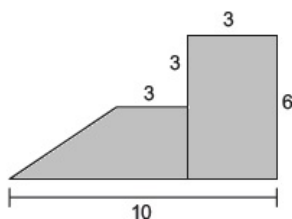


Figura 51 – Área da logomarca

Qual a medida da área dessa logomarca?

- A) 18 cm^2
- B) 25 cm^2
- C) 33 cm^2
- D) 39 cm^2
- E) 60 cm^2

Comentário: Note que, em uma única questão, estão sendo trabalhadas mais de uma figura geométrica. Além disso, essas figuras não estão sobre uma malha quadriculada. Embora existam questões desse modelo em avaliações externas, elas ainda são minoria. Por essa razão, o trabalho com as fórmulas — a partir de sua dedução — é necessário, pois tem a finalidade de auxiliar o aluno na compreensão dos conceitos geométricos envolvidos. Como o enunciado apresenta a subdivisão da logomarca em um trapézio e um retângulo, deve-se supor que não há sobreposição entre essas figuras. Assim, conforme a premissa estabelecida na referência 3.5.12.2, a área total corresponde à soma das áreas dessas duas figuras.

Observe ainda que o retângulo em questão tem base medindo 3 cm, portanto, o trapézio terá base maior medindo 7 cm, já que a base total da logomarca é 10 cm.

Como a altura do retângulo é 6 cm e o trapézio é 3 cm mais baixo, então o trapézio tem altura igual a 3 cm. A base menor do trapézio também mede 3 cm, como podemos observar na figura.

Portanto, a área da logomarca é dada por:

$$A_{\text{logomarca}} = A_{\text{trapézio}} + A_{\text{retângulo}}$$

Calculando a área do trapézio:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(7 + 3) \cdot 3}{2} = \frac{10 \cdot 3}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

Calculando a área do retângulo:

$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h = 3 \cdot 6 = 18 \text{ cm}^2$$

Somando as áreas:

$$A_{\text{logomarca}} = 15 + 18 = \boxed{33 \text{ cm}^2}$$

Portanto nosso gabarito é a letra **C**.

- **Questão 2 (SAEPE).** André possui um terreno retangular de perímetro 96 m, cujo comprimento é o triplo da largura. Qual é a medida da largura e do comprimento, respectivamente, desse terreno?
 - A) 8,0 cm e 24,0 cm.
 - B) 12,0 cm e 36,0 cm.
 - C) 22,5 cm e 25,5 cm.
 - D) 24,0 cm e 72,0 cm.
 - E) 46,5 cm e 49,5 cm.

Note que as dimensões do retângulo não foram informadas, apenas o valor do seu perímetro. Por isso, precisamos expressar essas dimensões por meio de incógnitas. Questões como esta são comuns em provas externas, não apenas no cálculo de perímetro, mas também em diversos outros assuntos — inclusive área. Isso reforça a importância de generalizar os conceitos trabalhados ao longo de nossos encontros, promovendo uma compreensão mais ampla e aplicável.

Seja x a largura do retângulo. Consequentemente, o comprimento será $3x$, conforme indicado no enunciado. Assim, podemos escrever a seguinte equação para o perímetro do retângulo:

$$P = 2 \cdot x + 2 \cdot 3x$$

Sabendo que o perímetro total é 96 m, temos:

$$2x + 6x = 96$$

$$8x = 96$$

$$x = \frac{96}{8} = 12$$

Assim:

– **Largura:** $x = 12$ m

– **Comprimento:** $3x = 36$ m

Portanto as dimensões do terreno são $\boxed{12 \text{ m}}$ de largura e $\boxed{36 \text{ m}}$ de comprimento e o gabarito é a letra **B**.

Outra possibilidade que os alunos podem explorar é a resolução por teste de alternativas. Ou seja, eles podem calcular o perímetro dos retângulos que possuem as dimensões informadas nas alternativas da questão e verificar qual deles tem exatamente 96 cm de perímetro.

Essa estratégia é válida especialmente em avaliações de múltipla escolha, pois permite que o aluno utilize o raciocínio reverso e a substituição direta na fórmula do perímetro:

$$P = 2 \cdot (b + h)$$

Além de promover o desenvolvimento da habilidade de análise e comparação entre valores, essa abordagem também contribui para reforçar o conceito de perímetro de forma prática e contextualizada.

A) Para as dimensões 8,0 cm e 24,0 cm:

$$P = 2 \cdot (8,0 + 24,0) = 2 \cdot 32,0 = \boxed{64,0 \text{ cm}}$$

B) Para as dimensões 12,0 cm e 36,0 cm:

$$P = 2 \cdot (12,0 + 36,0) = 2 \cdot 48,0 = \boxed{96,0 \text{ cm}}$$

C) Para as dimensões 22,5 cm e 25,5 cm:

$$P = 2 \cdot (22,5 + 25,5) = 2 \cdot 48,0 = \boxed{96,0 \text{ cm}}$$

D) Para as dimensões 24,0 cm e 72,0 cm:

$$P = 2 \cdot (24,0 + 72,0) = 2 \cdot 96,0 = \boxed{192,0 \text{ cm}}$$

E) Para as dimensões 46,5 cm e 49,5 cm:

$$P = 2 \cdot (46,5 + 49,5) = 2 \cdot 96,0 = \boxed{192,0 \text{ cm}}$$

O aluno perceberá que duas alternativas apresentam perímetro igual a 96 cm: as letras **B** e **C**. No entanto, apenas na alternativa **B** o comprimento é o triplo da largura, conforme estabelecido no enunciado do problema.

Esse tipo de análise reforça a importância de não apenas encontrar o valor correto do perímetro, mas também verificar se todas as condições do problema estão sendo atendidas. Dessa forma, o aluno compreende que, em situações de múltipla escolha, é essencial interpretar cuidadosamente o enunciado e confirmar se os dados numéricos satisfazem todas as relações envolvidas.

4 Uma Série de Possibilidades: A solução do *Instant Insanity*

Ao se deparar com o desafio de resolver o *Instant Insanity*, é natural que surjam questionamentos como: quantas configurações distintas o jogo permite? Existe uma solução viável? Em caso afirmativo, tal solução é única? Essas indagações não apenas motivam a investigação matemática, como também encontram respaldo em estudos específicos sobre o problema, como o de Beer (33), que aborda a estrutura combinatória do jogo e discute a contagem das configurações possíveis.

É a partir dessas inquietações que este capítulo se estrutura. Nele, são apresentadas ao professor três abordagens distintas para a resolução do jogo, cada uma com seus respectivos fundamentos matemáticos. Tais abordagens visam proporcionar ao docente subsídios teóricos e práticos para a seleção da estratégia mais adequada à sua realidade educacional e aos objetivos pedagógicos pretendidos. Para os leitores que desejarem aprofundar-se em aspectos mais técnicos, como o uso de algoritmos de retrocesso (*backtracking*) e a análise do espaço de estados do problema, recomenda-se a obra clássica de Knuth (34), referência fundamental no campo da ciência da computação aplicada à resolução de jogos e quebra-cabeças.

4.1 Um estudo do jogo

Um dos primeiros questionamentos que surge ao se deparar com o desafio do jogo *Instant Insanity* é: quantas são as possíveis configurações iniciais? Para responder a essa pergunta, é necessário considerar dois aspectos fundamentais: a quantidade de cubos e suas possíveis orientações no espaço tridimensional.

Como o objetivo aqui é responder a essa questão no contexto das versões do jogo apresentada nas sequências didáticas dos capítulos anteriores, consideraremos a configuração em que os quatro cubos estão dispostos horizontalmente, lado a lado, conforme ilustrado na Figura 1.

A partir dessa disposição, pode-se com a ajuda da análise combinatória determinar o número total de configurações distintas do jogo.

4.1.1 Uma Aproximação para o Número de configurações do *Instant Insanity*

Nota-se que, para cada um dos cubos, tem-se duas decisões a serem tomadas:

- **D1**: escolher uma das faces do cubo para ficar voltada para a frente (voltada para o observador). Como o cubo possui 6 faces, essa escolha pode ser feita de 6 maneiras distintas. Ao fazer essa escolha, a face oposta fica automaticamente determinada.
- **D2**: escolher qual das 4 faces restantes ficará voltada para cima. Essa escolha pode ser feita de 4 maneiras, já que, após fixar a face frontal, restam 4 opções laterais válidas para a face superior.

Aplicando o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) (35), tem-se que existem:

$$6 \times 4 = 24$$

possibilidades de orientação para cada cubo. Como o jogo utiliza 4 cubos e cada um deles pode ser orientado de forma independente, novamente pelo PFC, o número total de configurações iniciais possíveis é:

$$24 \times 24 \times 24 \times 24 = 24^4 = 331\,776.$$

No entanto, ao colocarmos os cubos lado a lado para formar a configuração do jogo, devemos considerar que essa pilha horizontal pode ser **rotacionada em torno de seu eixo horizontal**. Existem 4 rotações possíveis:

0° (voltada para o observador), **90°**, **180°**, **270°**.

Além das rotações deve-se considerar a existência de simetrias adicionais, como a **reflexão na ordem dos cubos**. Isso ocorre porque, uma vez fixadas as faces frontal e superior de cada cubo, a sequência de cubos dispostos como C_1, C_2, C_3, C_4 representa a mesma configuração que a sequência invertida C_4, C_3, C_2, C_1 . Assim tem-se 2 possibilidades de ordem dos cubos que combinada com as 4 rotações possíveis da pilha (0°, 90°, 180°, 270°), dá-se, mas uma vez, pelo PFC que existem $4 \times 2 = 8$ possibilidades que representam a mesma configuração e portanto, devem-se **dividir** o número total de configurações por 8.

$$\frac{24^4}{8} = \frac{331\,776}{8} = 41\,472.$$

Portanto, para a configuração do *Instant Insanity* apresentada, existem aproximadamente 41.472 possibilidades distintas de disposição dos cubos. Com um estudo mais aprofundado, é possível determinar o valor exato desse número. Ressalta-se, entretanto, que esse cálculo não constitui o foco principal do presente trabalho. A contagem aqui apresentada teve o objetivo de evidenciar o potencial do jogo como um recurso didático extremamente rico, passível de exploração em aulas de Análise Combinatória.

Com o auxílio de ferramentas digitais, como o site interativo desenvolvido por Scherphuis (36), o professor pode ir além da configuração clássica com quatro cubos e propor variações mais complexas, com cinco ou até seis cubos.

4.1.2 Um Pouco de probabilidade

Com a finalidade de evidenciar o potencial pedagógico do jogo *Instant Insanity* no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos como probabilidade e porcentagem, observa-se que esse recurso se mostra altamente eficiente ao permitir ao professor explorar o campo das possibilidades de forma concreta e contextualizada.

A própria estrutura do jogo possibilita a formulação de questões que demandam raciocínio probabilístico. Por exemplo: *Em um cubo cuja única face vermelha esta oposta a uma face amarela, qual é a probabilidade de, ao lançarmos esse cubo, a face voltada para cima ser branca?*

Uma análise dos dados apresentados para os quatro cubos do jogo *Instant Insanity* possibilita a construção da Tabela 2, na qual estão registradas as características de coloração de cada cubo conforme Figura 14.

Tabela 2 – Características dos cubos do jogo *Instant Insanity*

Cubos	C_1	C_2	C_3	C_4
Característica	Possui 2 faces vermelhas	Possui 3 faces vermelhas	Única face vermelha oposta à amarela	Única face vermelha oposta à azul
Qtd. face amarela	1	1	2	2
Qtd. face azul	1	1	1	2
Qtd. face branca	2	1	2	1
Qtd. face vermelha	2	3	1	1

De acordo com a descrição apresentada no enunciado, o cubo em questão é o cubo C_3 da Tabela 2. Assumindo que o cubo é lançado de forma justa, isto é, com igual probabilidade de qualquer uma das suas seis faces ficar voltada para cima e observando que C_3 possui duas faces brancas então, ao denotando por $P(\text{branca})$ a probabilidade de que a face voltada para cima seja branca, tem-se:

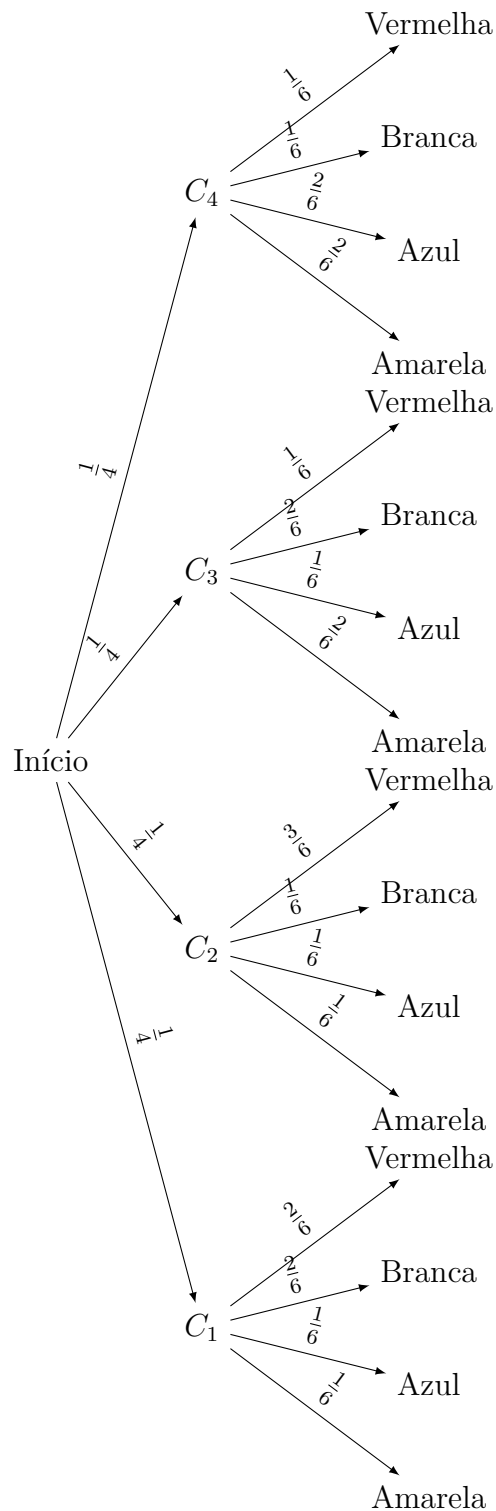
$$P(\text{branca}) = \frac{\text{número de faces brancas}}{\text{total de faces}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a probabilidade de que a face voltada para cima seja branca é de $\frac{1}{3}$, ou aproximadamente 33,3%.

Outra pergunta que evidencia a eficiência do jogo *Instant Insanity* como ferramenta matemática no ensino e aprendizagem de probabilidade é: *Ao escolher aleatoriamente um*

dos quatro cubos do jogo e lançá-lo, qual é a probabilidade de que a face voltada para cima seja de cada uma das cores: amarela, azul, branca ou vermelha?

Essa situação pode ser representada por uma árvore de probabilidades, ilustrada na diagrama a seguir, em que o primeiro nível corresponde à escolha aleatória de um dos quatro cubos (C_1, C_2, C_3, C_4), e o segundo nível representa as possíveis cores que podem aparecer em cada cubo.



Agora, aplicando a *Lei da probabilidade total* que pode ser consultada em Winter (37), pode-se responder a questão ao percorrer cada caminho da árvore.

Probabilidade de a face voltada para cima ser amarela:

$$P(\text{amarela}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1+1+2+2}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Probabilidade de ser azul:

$$P(\text{azul}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1+1+1+2}{24} = \frac{5}{24} \approx 20,83\%$$

Probabilidade de ser branca:

$$P(\text{branca}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2+1+2+1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Probabilidade de ser vermelha:

$$P(\text{vermelha}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2+3+1+1}{24} = \frac{7}{24} \approx 29,17\%$$

Com o objetivo de evidenciar o potencial didático no ensino de probabilidade, propõe-se a seguinte questão: *Considerando que a solução do jogo seja única, qual é a probabilidade de uma pessoa, ao organizar aleatoriamente os cubos em linha, obter a configuração correta baseada na aproximação encontrada na Seção 4.1.1?*

Com base no que foi discutido nesta seção, a resposta à questão torna-se imediata, uma vez que já foi determinado uma quantidade total de configurações possíveis (41.472). Portanto, se a solução do jogo é única, essa probabilidade é dada por:

$$P = \frac{1}{41.472} \approx 0,0000241 = 0,00241\%$$

Mostra-se, nas seções seguintes, que a solução é, de fato, única. Diante disso, espera-se que o professor considere o *Instant Insanity* como uma alternativa viável em seu planejamento para os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade. Assim, como ferramenta didática, esse jogo oferece ao docente uma ampla gama de possibilidades para explorar tais conceitos de forma significativa e motivadora.

4.2 Solução por Números Primos

Aqui convida-se o professor a explorar o potencial do *Instant Insanity* em suas aulas de aritmética, especialmente no que diz respeito aos números primos, pois a solução do jogo está inteiramente relacionada a um importante teorema sobre esses números, que será apresentado a seguir.

Definição 4.1. Um número natural maior do que 1 que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio é chamado de *número primo*. Quando o número não é primos ele é chamado de *número composto*.

Exemplo 4.2. Assim temos que

- 7 é primo, pois seus divisores são apenas 1 e 7.
- 12 é composto, pois seus divisores são 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Teorema 4.3 (Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único(a mesnos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

Assim, para determinar a solução do *Instant Insanity*, associa-se cada cor dos cubos a um número primo da seguinte forma: Azul = 2, Vermelho = 3, Branco = 5 e Amarelo = 7. A escolha desses números se dá unicamente por serem os menores números primos, mas esse argumento pode ser reproduzido de forma análoga para quaisquer outros primos.

Como precisa-se que cada uma das cores apareça na solução, isso pode ser representado pelo produto:

$$\text{Azul} \cdot \text{Vermelho} \cdot \text{Branco} \cdot \text{Amarelo} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210.$$

Esse cálculo vale tanto para a face voltada para o observador quanto para a face voltada para cima, conforme as decisões **D1** e **D2** apresentadas na seção 4.1.1. Portanto, precisamos considerar o produto:

$$\underbrace{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)}_{\text{D1}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)}_{\text{D2}} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2 = 210^2 = 44\,100.$$

Essa associação garantirá a unicidade da solução pelo Teorema 4.3.

Ao tomar-se a decisão **D1**, tem-se determinando não apenas a face voltada para o observador, mas também a sua face oposta; o mesmo ocorre para a decisão **D2**. Por isso é preciso considerar o produto das faces opostas de cada cubo, conforme mostrado na Tabela 3.

Tabela 3 – Produtos das faces opostas dos cubos do *Instant Insanity*.

	C_1	C_2	C_3	C_4
Faces opostas	$\text{Branco} \cdot \text{Vermelho} = 15$ $\text{Azul} \cdot \text{Vermelho} = 6$ $\text{Branco} \cdot \text{Amarelo} = 35$	$\text{Amarelo} \cdot \text{Vermelho} = 21$ $\text{Branco} \cdot \text{Azul} = 10$ $\text{Vermelho} \cdot \text{Vermelho} = 9$	$\text{Branco} \cdot \text{Amarelo} = 35$ $\text{Vermelho} \cdot \text{Amarelo} = 21$ $\text{Branco} \cdot \text{Azul} = 10$	$\text{Azul} \cdot \text{Branco} = 10$ $\text{Azul} \cdot \text{Vermelho} = 6$ $\text{Amarelo} \cdot \text{Amarelo} = 49$

Assim podemos destacar cada produto conforme Tabela 4.

Tabela 4 – Produtos correspondentes aos pares de faces opostas dos cubos

	C_1	C_2	C_3	C_4
	15	21	35	10
Produtos	6	10	21	6
	35	9	10	49

A fim de encontrar a solução, é necessário calcular os produtos entre os números apresentados na Tabela 4, de modo a identificar aqueles cujo resultado seja 44 100, conforme mostrado na Tabela 5.

Tabela 5 – Todas as combinações de produtos com destaque para aquelas cujo produto é 44 100.

C_1	C_2	C_3	C_4	Produto
15	21	35	10	110250
15	21	35	6	66150
15	21	35	49	540225
15	21	21	10	66150
15	21	21	6	39690
15	21	21	49	324135
15	21	10	10	31500
15	21	10	6	18900
15	21	10	49	154350
15	10	35	10	52500
15	10	35	6	31500
15	10	35	49	257250
15	10	21	10	31500
15	10	21	6	18900
15	10	21	49	154350
15	10	10	10	15000
15	10	10	6	9000
15	10	10	49	73500
15	9	35	10	47250
15	9	35	6	28350
15	9	35	49	231525
15	9	21	10	28350
15	9	21	6	17010
15	9	21	49	138915
15	9	10	10	13500

C_1	C_2	C_3	C_4	Produto
15	9	10	6	8100
15	9	10	49	66150
6	21	35	10	44100
6	21	35	6	26460
6	21	35	49	216090
6	21	21	10	26460
6	21	21	6	15876
6	21	21	49	129654
6	21	10	10	12600
6	21	10	6	7560
6	21	10	49	61974
6	10	35	10	21000
6	10	35	6	12600
6	10	35	49	102900
6	10	21	10	12600
6	10	21	6	7560
6	10	21	49	61974
6	10	10	10	6000
6	10	10	6	3600
6	10	10	49	29400
6	9	35	10	18900
6	9	35	6	11340
6	9	35	49	92565
6	9	21	10	11340
6	9	21	6	6804
6	9	21	49	55773
6	9	10	10	5400
6	9	10	6	3240
6	9	10	49	26460
35	21	35	10	257250
35	21	35	6	154350
35	21	35	49	1261725
35	21	21	10	154350
35	21	21	6	92610
35	21	21	49	761985
35	21	10	10	73500
35	21	10	6	44100

C_1	C_2	C_3	C_4	Produto
35	21	10	49	361725
35	10	35	10	122500
35	10	35	6	73500
35	10	35	49	600725
35	10	21	10	73500
35	10	21	6	44100
35	10	21	49	361725
35	10	10	10	35000
35	10	10	6	21000
35	10	10	49	171500
35	9	35	10	110250
35	9	35	6	66150
35	9	35	49	540225
35	9	21	10	66150
35	9	21	6	39690
35	9	21	49	324135
35	9	10	10	31500
35	9	10	6	18900
35	9	10	49	154350

Destaca-se, na Tabela 6, as possíveis soluções para o *Instant Insanity*.

Tabela 6 – Combinações cujo produto é 44 100.

Linhas	C_1	C_2	C_3	C_4	Produto
l_1	6	21	35	10	44 100
l_2	35	21	10	6	44 100
l_3	35	10	21	6	44 100

Assim, a solução do jogo fica determinada ao se combinarem duas linhas da Tabela 6, uma para cada decisão a ser tomada (**D1** e **D2**). Existem três combinações possíveis: l_1 com l_2 , l_1 com l_3 e l_2 com l_3 . Dentre essas combinações, apenas uma de fato soluciona o jogo: l_1 com l_3 .

Isso decorre do fato de que a combinação l_1 com l_2 exigiria que, no cubo C_2 , o produto 21 aparecesse duas vezes, o que não é possível, pois, como pode ser observado na Tabela 3, ele aparece apenas uma vez. Um argumento análogo justifica que a combinação l_2 com l_3 também não constitui solução, uma vez que exigiria que os produtos 35 e 6 aparecessem duas vezes.

Esses fatos reforçam, assim, a **unicidade** da solução do jogo.

Portando, nesse contexto, o professor se vê diante de um universo de possibilidades para explorar em suas aulas de Matemática de forma prática e ativa, rompendo com o tradicionalismo e inovando no fazer matemático, possibilitando ao aluno uma aprendizagem significativa.

4.3 Solução por Pares não Ordenados

Com o objetivo de evidenciar ao professor o potencial do *Instant Insanity* no ensino do plano cartesiano, esta Seção introduz o conceito de pares não ordenados como uma alternativa simples e eficaz para a resolução do jogo.

Para isso, propõe-se a associação das cores dos cubos da seguinte forma: Azul = 2, Vermelho = 3, Branco = 5, Amarelo = 7. A escolha desses números busca manter coerência com a associação previamente utilizada na solução baseada em números primos, embora tal atribuição possa ser adaptada conforme a necessidade do professor. Essa substituição pode, inclusive, ser realizada por letras ou símbolos, uma vez que o objetivo central é a identificação dos pares não ordenados que compõem a solução.

4.3.1 Definições

Definição 4.4. Dado um conjunto S um par **não** ordenado é um subconjunto de S com exatamente dois elementos.

Exemplo 4.5. Seja $S = \{2, 3, 5, 7\}$ então $\{3, 2\} = \{2, 3\}$, $\{5, 2\} = \{2, 5\}$ e $\{3, 3\}$ são pares não ordenados de S .

No contexto do *Instant Insanity*, pode-se explorar ainda melhor a Definição 4.4.

Definição 4.6. Sejam C_1, C_2, C_3 e C_4 os cubos do *Instant Insanity*. Os pares não ordenados $\{x, y\}$, com $x, y \in \{2, 3, 5, 7\}$ em que Azul = 2, Vermelho = 3, Branco = 5 e Amarelo = 7, são tais que:

$$x \text{ é face oposta a } y \text{ em } C_1, C_2, C_3 \text{ ou } C_4.$$

A análise dos cubos do *Instant Insanity* usados na sequências didáticas conforme Figura 14 e a definição 4.6 nos permite criar a Tabela 7, a seguir.

Tabela 7 – Pares de faces opostas dos cubos do *Instant Insanity* usados na sequência didática.

	C_1	C_2	C_3	C_4
Faces opostas	$\{5, 3\}$	$\{7, 3\}$	$\{5, 7\}$	$\{2, 5\}$
	$\{2, 3\}$	$\{5, 2\}$	$\{3, 7\}$	$\{2, 3\}$
	$\{5, 7\}$	$\{3, 3\}$	$\{5, 2\}$	$\{7, 7\}$

Definição 4.7. Dado um conjunto S um par ordenado é um sequência de S com exatamente dois elementos.

Exemplo 4.8. Seja $S = \{2, 3, 5, 7\}$, então $(3, 2) \neq (2, 3)$, $(5, 2) \neq (1, 5)$ e $(3, 3)$ são pares ordenados de S .

Tanto em pares ordenados quanto em pares não ordenados, o primeiro número será chamado de *primeira coordenada* e o segundo de *segunda coordenada*. Ou seja, tanto para (x, y) quanto para $\{x, y\}$, o x será a primeira coordenada e o y será a segunda coordenada.

Nota-se que, em $\{x, y\}$, por definição, sempre pode-se trocar as coordenadas de posição, enquanto que tal troca não pode ser feita em (x, y) .

4.3.2 Solução

Para solucionar o *Instant Insanity*, precisam-se, para cada cubo listado na Tabela 7, escolher dois pares não ordenados. O primeiro, determina qual cor fica voltada para o observador e conseqüentemente qual será a sua cor oposta; o segundo, determina qual cor fica voltada para cima e conseqüentemente qual será a sua cor oposta, conforme as decisões descritas em **D1** e **D2** de 4.1.1.

Nota-se que, ao observar um cubo isoladamente, o par $\{5, 3\} = \{3, 5\}$, pois dizer que a cor branca é oposta à cor vermelha é o mesmo que dizer que a cor vermelha é oposta à cor branca. Por isso, usa-se *pares não ordenados* para descrever as faces opostas em cada cubo.

Entretanto, Ao buscar-se uma *solução* para o jogo, a troca das coordenadas em um par não ordenado não pode ser feita de modo arbitrário: precisa-se escolher, para cada cubo, uma orientação concreta tal que nenhuma cor se repita na mesma posição correspondente em outro cubo. Essa restrição impede repetições indesejadas de cores.

Portanto, para solucionar o jogo, precisa-se tomar as decisões D1 e D2 de forma que a primeira coordenada de um cubo não apareça como primeira coordenada em outro, e o mesmo vale para a segunda coordenada. Além disso, cada um dos números do conjunto $\{2, 3, 5, 7\}$ deve estar presente, garantindo que não haja repetição e que cada cor apareça exatamente uma vez em cada posição, conforme a Tabela 8.

Tabela 8 – Solução do *Instant Insanity* por pares ordenados.

	C_1	C_2	C_3	C_4
D1	(2, 3)	(3, 7)	(7, 5)	(5, 2)
D2	(7, 5)	(5, 2)	(3, 7)	(2, 3)

Duas observações merecem a atenção do professor quanto à riqueza que o jogo *Instant Insanity* pode trazer à aula, caso seja adotado como ferramenta pedagógica.

Primeiro: ao solucionar o jogo, os pares que antes eram tratados como não ordenados passam a se comportar como pares *ordenados*, pois qualquer troca de posição das coordenadas em um dos cubos invalida a solução. Assim, por tentativa e erro, os alunos podem investigar a unicidade da solução a não ser pela ordem dos cubos.

Segundo: a noção de pares ordenados e não ordenados é experimentada na prática, em um contexto concreto e significativo, atendendo ao objetivo desta proposta de contextualizar conceitos matemáticos.

Portanto, cabe ao professor considerar práticas de metodologias ativas como esta para tornar a matemática mais acessível, envolvente e significativa para os alunos.

4.4 Solução por Grafos

Para esta solução, exploramos o potencial do *Instant Insanity* à luz da teoria dos grafos. Esse importante conceito será abordado de forma pontual para a resolução do jogo; entretanto, ao professor que desejar se aprofundar no assunto, recomenda-se a obra de Gomes (38), que apresenta conceitos fundamentais e aplicações relevantes.

4.4.1 Algumas Definições Importantes

Para compreendermos o processo de solução, algumas definições básicas da teoria dos grafos fazem-se necessárias:

Definição 4.9 (Grafo). Um *grafo* é um par ordenado $G = (V, E)$ em que V é um conjunto não vazio cujos elementos são chamados *vértices* (ou *nós*), E é um conjunto cujos elementos são chamados *arestas* e cada aresta $e \in E$ associa um par de vértices de V .

Quando cada aresta associa um par não ordenado $\{u, v\}$, dizemos que G é um *grafo não direcionado*. Quando cada aresta associa um par ordenado (u, v) , dizemos que G é um *grafo direcionado* (ou *dígrafo*).

Definição 4.10 (Laço). Em um grafo $G = (V, E)$, dizemos que uma aresta $e \in E$ é um *laço* se ela conecta um vértice a ele mesmo, ou seja, se $e = \{v, v\}$ para algum $v \in V$.

Definição 4.11 (Arestas paralelas). Em um grafo $G = (V, E)$, duas arestas são chamadas *arestas paralelas* (ou *múltiplas*) se conectam o mesmo par de vértices. Assim, se $e_1 = \{u, v\}$ e $e_2 = \{u, v\}$ com $e_1 \neq e_2$, então e_1 e e_2 são arestas paralelas.

Definição 4.12 (Multigrafo.). Um *multigrafo* é um grafo $G = (V, E)$ possui *arestas paralelas* ou *laços*.

Definição 4.13 (Caminho). Um *caminho* em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência de vértices (v_1, v_2, \dots, v_k) tal que, para todo $i = 1, \dots, k - 1$, existe uma aresta $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

O número de arestas do caminho é chamado de *comprimento* do caminho.

Por fim, apresentamos a definição de gráfico e subgrafo, que serão muito exploradas nesta seção.

Definição 4.14 (Gráfico de um grafo). O *gráfico* de um grafo $G = (V, E)$ é a sua representação no plano, onde cada vértice $v \in V$ é representado por um ponto e cada aresta $\{u, v\} \in E$ é representada por um segmento de reta ou curva ligando os pontos correspondentes aos vértices u e v .

Essa representação é usada para visualizar a estrutura do grafo, mas não altera suas propriedades matemáticas.

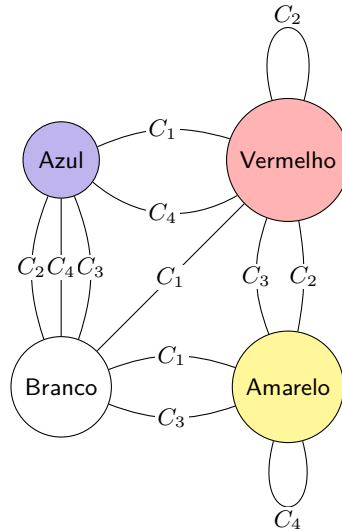
Definição 4.15 (Subgrafo). Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um *subgrafo* $G' = (V', E')$ de G é um grafo tal que $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ e toda aresta $e \in E'$ conecta apenas vértices em V' .

Em outras palavras, um subgrafo é formado pela seleção de um subconjunto de vértices de G e de um subconjunto de arestas que os conectam.

4.4.2 Solução

Munidos das definições necessárias, podemos enfim solucionar o jogo. Para tal, construiremos um grafo $G = (V, E)$, no qual $V = \{\text{Azul, Vermelho, Branco, Amarelo}\}$ é o conjunto das cores usadas para colorir os cubos do *Instant Insanity* e $E = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ é o conjunto de arestas que liga duas cores sempre que elas aparecem em faces opostas de um mesmo cubo. A representação gráfica de G é mostrada na Figura 52.

Figura 52 – Grafo $G = (V, E)$



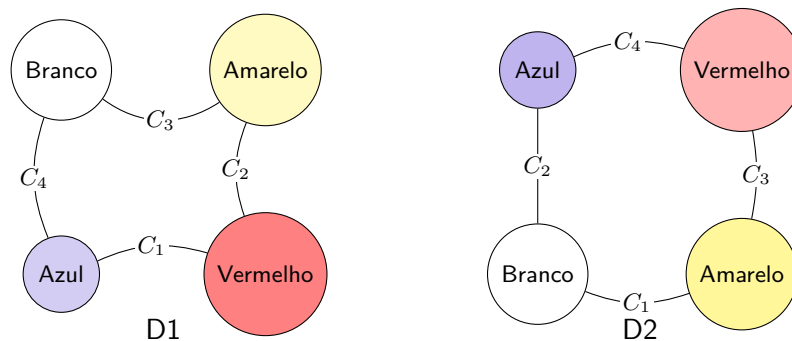
Fonte: do autor, 2025

Nota-se que G é um multigrafo.

Para solução é preciso determinar dois subgrafo, o primeiro, determina qual cor fica voltada para o observador e conseqüentemente qual será a sua cor oposta; o segundo, determina qual cor fica voltada para cima e conseqüentemente qual será a sua cor oposta, conforme as decisões descritas em **D1** e **D2** (Seção 4.1.1).

Para definir esses subgrafos, é necessário que possuam um caminho que percorra todos os vértices (cores) exatamente uma vez, sem repetição de arestas, passando por C_1, C_2, C_3 e C_4 . Existem dois subgrafos com essas características, os quais estão destacados na Figura 53.

Figura 53 – Subgrafos da solução do *Instant Insanity* representando as decisões D1 e D2.



Fonte: do autor, 2025

Essas são exatamente as escolhas que devem ser tomadas para as decisões D1 e D2 e, portanto, representam a solução do *Instant Insanity*. Para melhor elucidar, na Tabela 9 apresenta-se a interpretação deste grafo.

Tabela 9 – Caminho pelos cubos e cores associadas às decisões D1 e D2 com base nos subgrafos.

Cubos	D1 (face para o observador / oposta)	D2 (face para cima / oposta)
C_1	Azul / Vermelho	Branco / Amarelo
C_2	Vermelho / Amarelo	Azul / Branco
C_3	Amarelo / Branco	Amarelo / Vermelho
C_4	Branco / Azul	Vermelho / Azul

Das três soluções apresentadas, esta se destaca por ser objetiva, dispensando análises complexas, e direta, sem abrir espaço para múltiplas interpretações ou verificações de outras possíveis soluções. Por isso, mesmo que a teoria dos grafos não esteja contemplada nos organizadores curriculares do ensino médio, ela ainda pode ser apresentada aos alunos como uma alternativa para aqueles que almejam cursos superiores na área de Exatas, oferecendo-lhes uma ferramenta de modelagem matemática altamente eficiente.

Considerações Finais

A presente dissertação teve como propósito investigar e propor uma alternativa didática para o ensino de Matemática no Ensino Médio, tomando como ponto de partida o jogo Instant Insanity. Essa proposta emerge da necessidade de promover um ensino mais integrado, ativo e significativo, capaz de conectar o conteúdo escolar à realidade dos estudantes e às demandas contemporâneas da educação, conforme estabelecido pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Ao longo do desenvolvimento do trabalho, foi possível construir um percurso metodológico que integra teoria e prática por meio de três eixos principais: (1) a construção do jogo como suporte para o ensino da planificação de sólidos; (2) o uso da técnica de origami na construção do jogo como suporte para o ensino de área e perímetro de figuras planas; e (3) a resolução do jogo como oportunidade para explorar tópicos de análise combinatória, números primos e introdução à teoria dos grafos. Esse percurso foi estruturado em sequências didáticas autônomas, adaptáveis, e intencionalmente desenhadas para potencializar a aprendizagem ativa, a experimentação e o protagonismo estudantil.

A construção dos cubos do Instant Insanity, por meio do recorte e colagem de moldes, mostra-se um caminho eficiente para trabalhar a visualização espacial. Essa abordagem permite ao estudante transitar entre o plano e o espaço tridimensional, desenvolvendo competências essenciais para a geometria e para a resolução de problemas e questões de provas externas como o SAEB e o SAEPE.

No segundo eixo, explorou-se a relação entre a construção dos cubos e os conceitos de área e perímetro, utilizando o origami como metodologia ativa. A partir das dobraduras, foi possível construir situações de aprendizagem em que os estudantes interagissem com figuras planas, estimassem medidas, fizessem comparações e aplicassem fórmulas de forma contextualizada. Além disso, a inserção de demonstrações rigorosas — como no caso da área do quadrado e do retângulo — confere ao trabalho um caráter formativo, pois oferece ao professor subsídios para aprofundar conceitos com fundamentação teórica.

No terceiro e último eixo, a resolução do jogo abriu possibilidades para trabalhar conteúdos normalmente pouco explorados na Educação Básica, como os números primos e a teoria dos grafos. Embora esses conteúdos não estejam previstos explicitamente nas matrizes curriculares do Ensino Médio, sua inserção justifica-se como extensão natural do raciocínio lógico e como estratégia para resolver problemas de natureza combinatória. Ao aplicar o método dos produtos primos e a construção de subgrafos de decisão, o estudante é convidado a transitar entre diferentes representações e a aplicar o pensamento matemático em desafios que exigem planejamento, persistência e argumentação lógica.

Outro aspecto fundamental da proposta é a valorização do papel do professor como autor de sua prática. Ao invés de um roteiro fechado, o que se apresenta aqui é uma estrutura flexível, que pode ser adaptada conforme o contexto, a turma e os objetivos pedagógicos. A simplicidade dos materiais sugeridos (papel, lápis de cor, cola, tesoura) torna a proposta exequível mesmo em realidades com poucos recursos, garantindo a equidade no acesso ao ensino de qualidade.

A dissertação também reafirma o compromisso com os documentos oficiais da educação brasileira. As sequências didáticas foram planejadas com base nas competências gerais e específicas da BNCC e nos descritores das avaliações externas (SAEB, SAEPE e ENEM). Essa articulação assegura que a proposta esteja em consonância com os objetivos da educação básica, ao mesmo tempo que oferece alternativas metodológicas inovadoras, centradas no desenvolvimento integral do estudante.

Do ponto de vista teórico, a proposta dialoga com autores que defendem o uso de metodologias ativas como forma de tornar o ensino mais significativo, como Moran, Silva e Souza, Brito e outros. A fundamentação apresentada ao longo da dissertação sustenta que o jogo, quando planejado com intencionalidade pedagógica, pode se tornar uma ferramenta poderosa na mediação do conhecimento, promovendo a aprendizagem pela investigação, pela descoberta e pela interação.

Como toda proposta didática, esta também possui limites. A implementação em sala de aula exige planejamento, formação docente e abertura para novas práticas, o que nem sempre é viável em contextos marcados por currículos engessados ou por pressões avaliativas. No entanto, acredita-se que, ao oferecer um material bem estruturado e alinhado aos objetivos da educação contemporânea, este trabalho pode contribuir para ampliar as possibilidades de atuação do professor de Matemática.

Dentre os desdobramentos possíveis deste trabalho, destacam-se a aplicação e avaliação das sequências propostas em turmas reais, a criação de novos materiais didáticos baseados no *Instant Insanity* para outras séries ou áreas do conhecimento, e o aprofundamento da abordagem com tecnologias digitais, como simuladores tridimensionais e ambientes virtuais de aprendizagem. Além disso, a proposta pode servir de inspiração para que outros jogos sejam investigados com o mesmo rigor e compromisso pedagógico.

Em síntese, este trabalho acredita na Matemática como linguagem para compreender e transformar o mundo, e na escola como espaço de vivência, criatividade e emancipação. Que o jogo *Instant Insanity* não seja apenas um objeto de desafio lógico, mas também um símbolo de que a Matemática pode — e deve — ser viva, acessível, conectada e significativa. Que cada professor que aqui encontrar uma ideia, uma prática ou uma inspiração possa levá-la à sala de aula com liberdade, coragem e entusiasmo. Afinal, ensinar Matemática é, também, ensinar a jogar com a lógica da vida.

Referências

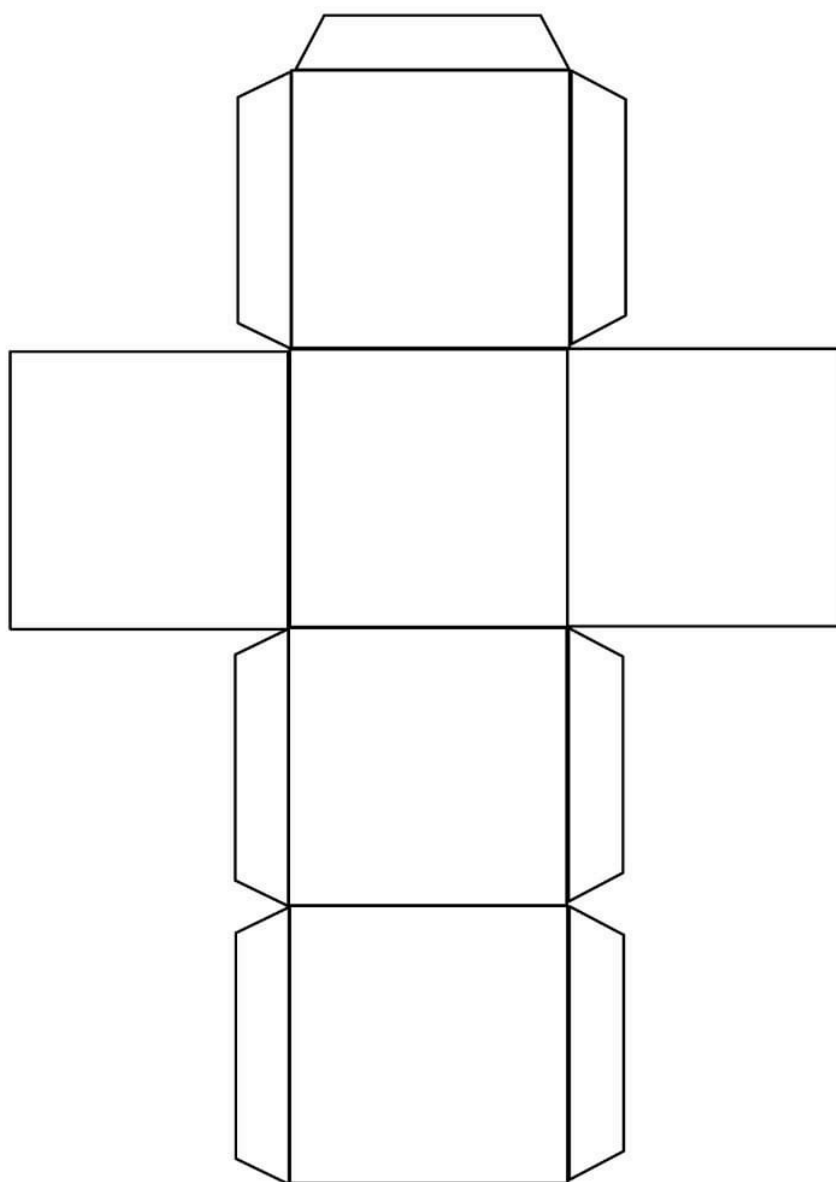
- 1 National Museum of American History. *Puzzle, Instant Insanity*. s.d. Acesso em: 5 maio 2025. Disponível em: <https://americanhistory.si.edu/collections/object/nmah_1425316>. 19
- 2 SILVER, N. *The Complexity of Combinatory Puzzles*. London: Math & Games, 1972. 19, 26
- 3 PIAGET, J.; INHELDER, B. *A Psicologia da Criança*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1971. 19
- 4 ALVES, R.; COSTA, M. *Jogos no Ensino de Matemática: Aprendendo com Diversão*. São Paulo: Matemática & Ensino, 2020. 19, 21, 24
- 5 SILVA, A.; PEREIRA, R. *Manipulação e Aprendizado em Geometria: Um Estudo com Sólidos Geométricos*. Belo Horizonte: Matemática Aplicada, 2018. 19, 33
- 6 MORAN, J. M. *Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora*. Rio de Janeiro: EdUrb, 2015. 20
- 7 BORGES, L.; MATTOS, A. *Geometria Espacial no Ensino Médio: Aplicações e Desafios*. Porto Alegre: EducMath, 2019. 20
- 8 BRITO, J. *O Uso de Jogos Matemáticos no Ensino: Práticas e Impactos*. Recife: Didática Moderna, 2021. 20, 21, 23, 24, 25, 33
- 9 BACICH, L.; TANZI, S. M.; TREVISANI, F. M. *Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora: Uma Abordagem Teórico-Prática*. Porto Alegre: Penso, 2015. 20, 22
- 10 SILVA, A.; SOUZA, P. *Metodologias Ativas no Ensino de Matemática: Práticas e Desafios*. Belo Horizonte: Didática Contemporânea, 2020. 21, 22
- 11 BROWN, T. *The Puzzle as a Teaching Tool: Instant Insanity in Education*. New York: Logic Press, 1985. 26
- 12 (BRASIL), M. da E. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. [S.l.]: MEC, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 8 dez. 2024. 27, 33
- 13 Toda Matéria. *Sólidos Geométricos*. n.d. Acesso em: 8 maio 2025. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/solidos-geometricos/>>. 34
- 14 CROMWELL, P. R. *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 35
- 15 BRÖCKER, T.; DIECK, T. tom. *Elementary Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1986. 35
- 16 FULTON, W. *Algebraic Topology: A First Course*. New York: Springer-Verlag, 1995. 35

- 17 Secretaria da Educação do Estado do Espírito Santo. *Matemática – 1ª Série do Ensino Médio: 33ª Semana – Planificação de Poliedros*. 2024. <<https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/wp-content/uploads/2024/10/1a-serie-33a-semana-2024-f.pdf>>. Material pedagógico do currículo do Espírito Santo. 35
- 18 WIKIPEDIA. *Planificação de um poliedro*. 2024. Acesso em: 27 de outubro de 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Planifica%C3%A7%C3%A3o_de_um_poliedro>. 44
- 19 Professor Warles. *3ª Série por Descritor - Matemática - Ensino Médio*. 2016. Acesso em: 18 maio 2025. Disponível em: <<https://profwarles.blogspot.com/2016/03/3-serie-por-descritor-matematica-ensino.html>>. 46
- 20 Origami Club. *História do Origami*. 2025. <<https://origami.club/historia-do-origami/>>. Acesso em: 9 jul. 2025. 49
- 21 HAGA, K.; FONACIER, J. C.; ISODA, M. *Origamics: Mathematical Explorations through Paper Folding*. 2008. <<https://www.google.com.br/books/edition/Origamics/AqFpDQAAQBAJ?hl=en&gbpv=1&pg=PR3&printsec=frontcover>>. World Scientific Publishing. 50
- 22 Origami Art. *Origami Modular*. 2025. <<http://origamiart.pl/origami-modulowe>>. Acesso em: 15 jun. 2025. 51, 52
- 23 BIANI, R. P. Considerações sobre a geometria nos anos iniciais do ensino fundamental. *Ciências em Foco*, v. 4, n. 1, 2011. 53
- 24 BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. Análises prévias à concepção de uma engenharia de formação continuada para professores de matemática do ensino fundamental. In: *Anais da 23ª Reunião Anual da ANPED-Associação Nacional de Pesquisa e Pós-graduação em Educação*. Caxambu: [s.n.], 2000. 53
- 25 CLEAVE, J. V. *Matemática para jovens: exercícios fáceis que tornam a aprendizagem da matemática divertida*. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1994. 53
- 26 BRAGA, L. *Os conceitos de perímetro e área em um curso de pedagogia e a mobilização de conhecimentos profissionais*. 204 p. Tese (Tese (Doutorado)) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019. 53
- 27 BRITO, A. F. d.; BELLEMAIN, P. M. B. Influência do uso de materiais manipulativos na construção da grandeza comprimento. In: *Anais do 8º Encontro Nacional de Educação Matemática*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004. p. 1–20. 53
- 28 BELLEMAIN, P. M. B. Estudo de situações-problema relativas ao conceito de área. In: *X ENDIPE – Encontro de Didática e Prática de Ensino*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2000. Ensinar e aprender: Sujeitos, saberes, tempos e espaços. Publicação em CD Rom. 53
- 29 COSTA, T. M. *Robótica educativa e conhecimentos de área e perímetro de figuras planas*. 55 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional)) — Universidade Federal do Pará, Belém, PA, 2023. Disponível em: <<https://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/16158>>. 53

- 30 ROCHA, C. d. A. et al. *Uma discussão sobre o ensino de área e perímetro no ensino fundamental*. 2014. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC70705321487T.doc>. Acesso em: 20 jun. 2025. 55
- 31 BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 4^a. ed. Belo Horizonte, 1994. Acesso em: 5 de novembro de 2025. 55
- 32 HOLANDA, B.; CHAGAS, E. *Polos Olímpicos de Treinamento — Curso de Geometria Nível 1: Aula 1*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, c. 2018. Disponível em: <https://potiimpa.br/uploads/material_teorico/gkdhbax24zwo0.pdf>. Disponível em: <https://potiimpa.br/uploads/material_teorico/gkdhbax24zwo0.pdf>. 56, 76
- 33 BEELER, R. *Instant Insanity: A Study of a Puzzle*. n.d. <<https://faculty.etsu.edu/beelerr/insanity-supp.pdf>>. Accessed: 2024-09-15. 85
- 34 KNUTH, D. E. Estimating the efficiency of backtrack programs. *Mathematics of Computation*, American Mathematical Society, v. 29, n. 129, p. 122–136, 1975. URL: <<https://www.ams.org/journals/mcom/1975-29-129/S0025-5718-1975-0373371-6/>>. 85
- 35 MORGADO, A. C. d. O.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2023. ISBN 978-85-8337-195-3. 86
- 36 SCHERPHUIS, J. *Instant Insanity (Cubic Puzzle)*. n.d. <<https://www.jaapsch.net/puzzles/insanity.htm>>. Accessed: 2024-09-15. 86
- 37 WINTER, L. M. W.; SGANZERLA, N. M. Z. *Teoria das Probabilidades*. 1998. Acesso em: 24 out. 2025. Disponível em: <<https://docs.ufpr.br/~aanjos/pagina/cap2.pdf>>. 89
- 38 GOMES, P. C. R. *Grafos: conceitos fundamentais, algoritmos e aplicações*. 1. ed. Blumenau, SC: Editora do Instituto Federal Catarinense, 2022. Acesso em: 17 jul. 2025. ISBN 978-65-88089-12-5. Disponível em: <<https://editora.ifc.edu.br/wp-content/uploads/sites/39/2022/11/Grafos-versao-final.pdf>>. 96

Apêndice A

Moldes dos Cubos



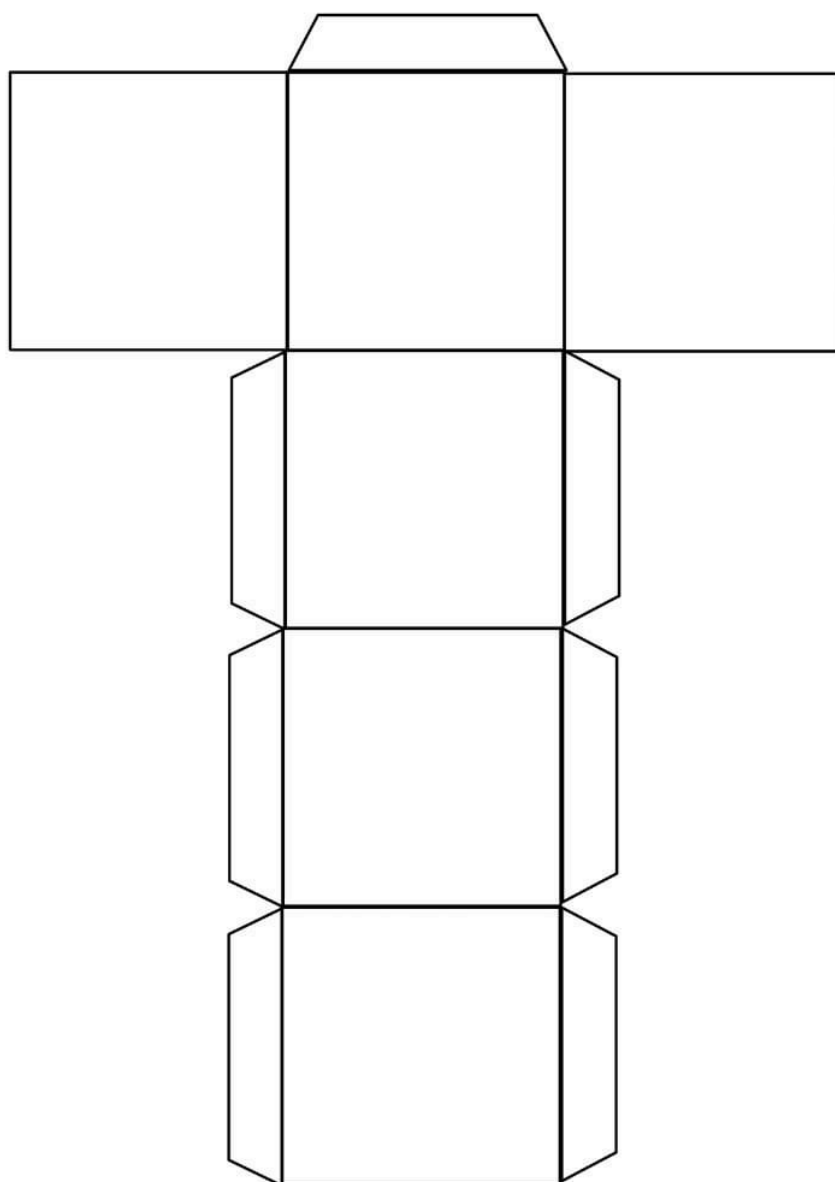


Figura 54 – Cubo 2

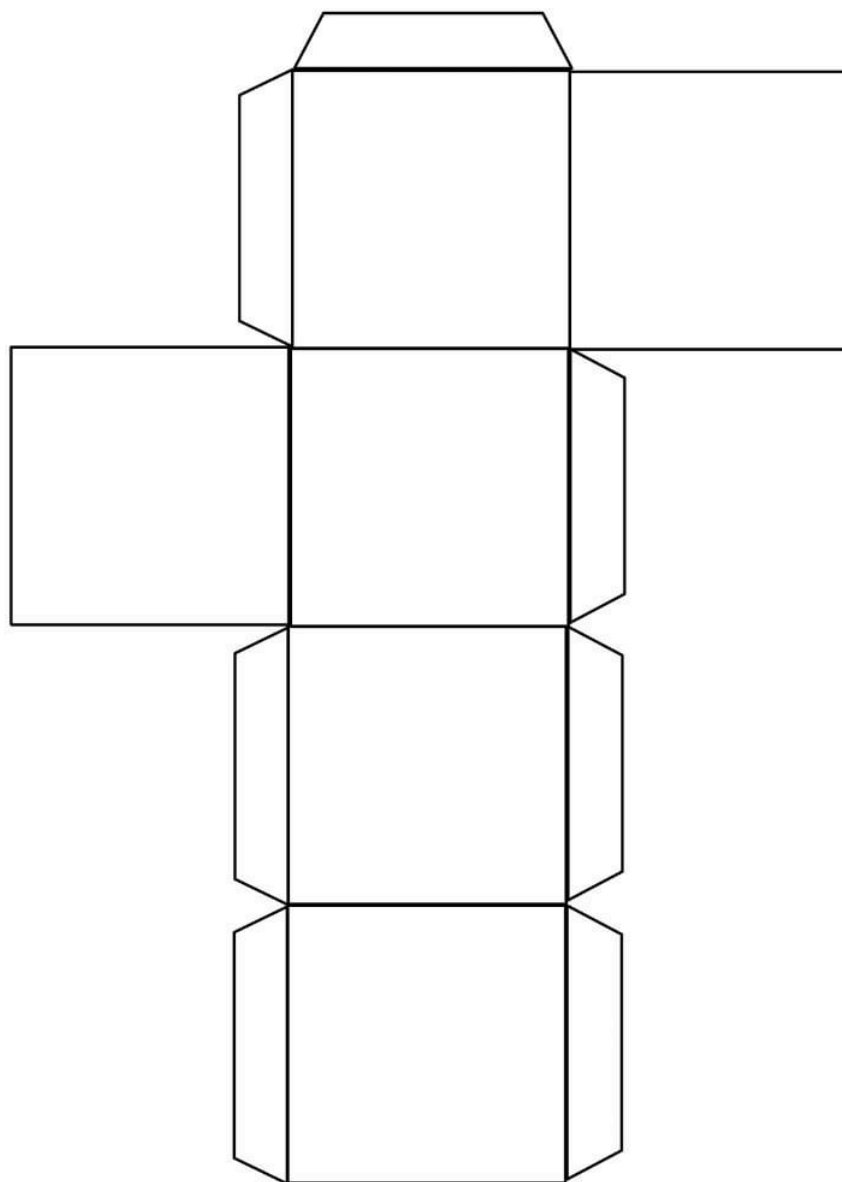


Figura 55 – Cubo 3

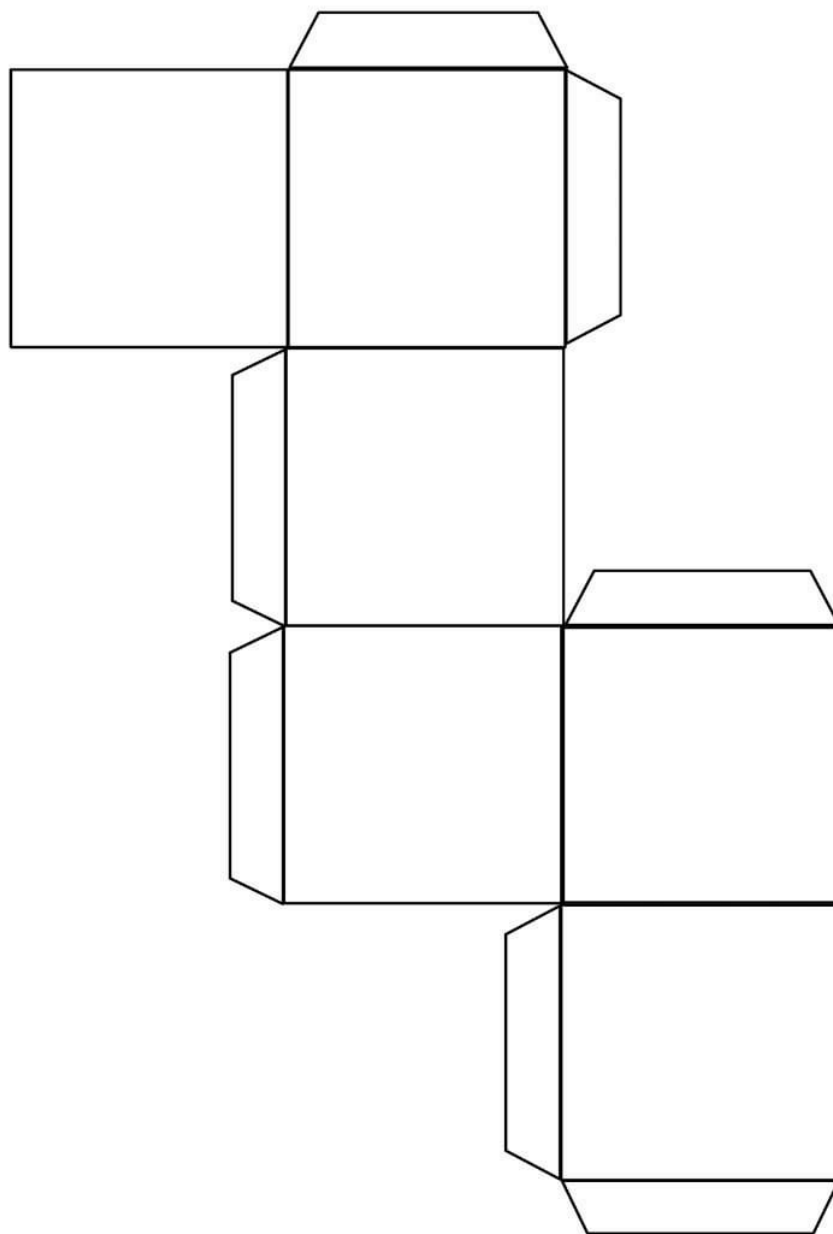


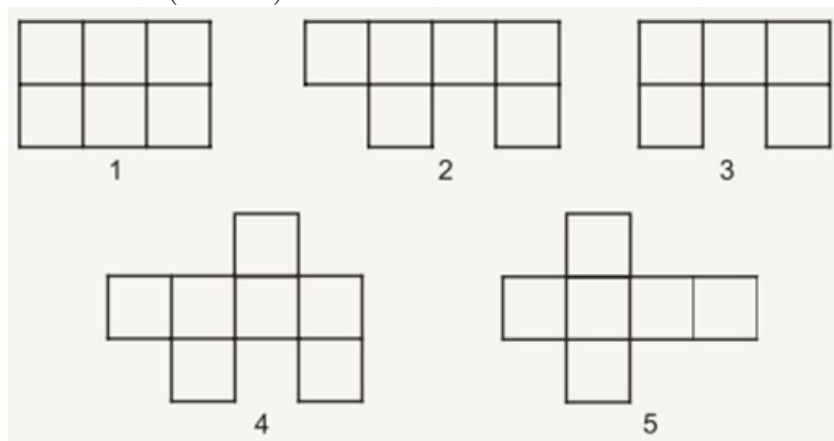
Figura 56 – Cubo 4

Apêndice B

Questões de Provas Externas

QUESTÕES DE PROVAS EXTERNAS

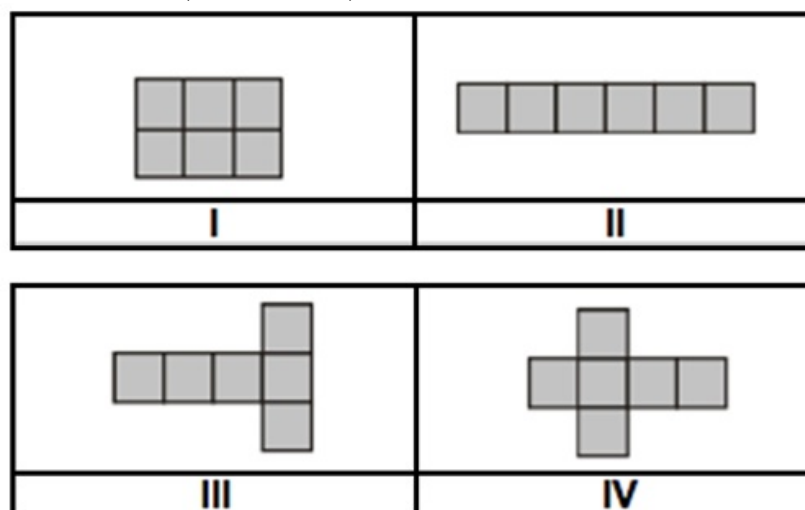
1. (SAEPI). Observe os desenhos abaixo.



Qual desses desenhos representa a planificação de um cubo?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

2. (SAEB 2013).

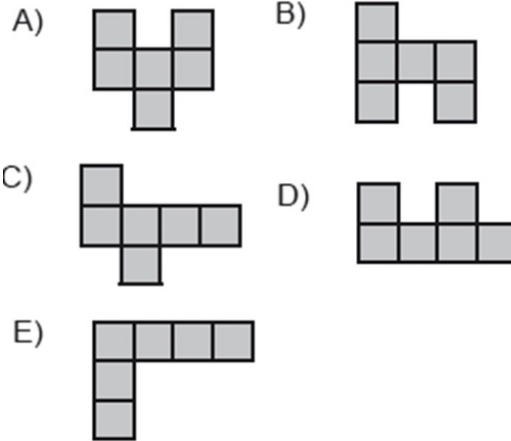


Recortando-se, de diversas maneiras, embalagens de papelão em forma de cubo, obtém-se diferentes planificações. Entre as figuras acima, somente poderiam ser algumas dessas planificações as de números

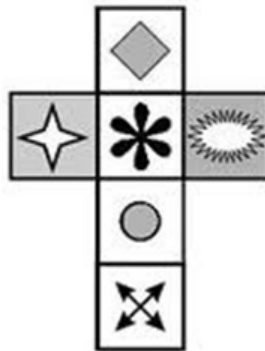
- a) II e III b) I e III c) II e IV d) I e IV e) III e IV

CONTINUAÇÃO QUESTÕES DE PROVAS EXTERNAS

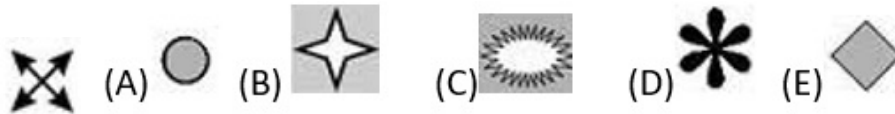
3 Marcelo desenhou em seu caderno a planificação de um cubo. Qual das figuras abaixo representa o desenho de Marcelo?



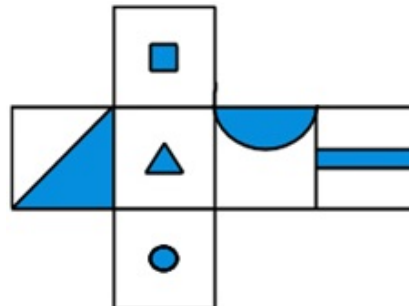
4 (SAEPE) A figura abaixo é a planificação de um cubo.



Ao reconstituir o cubo qual é a face oposta à face que contém o símbolo



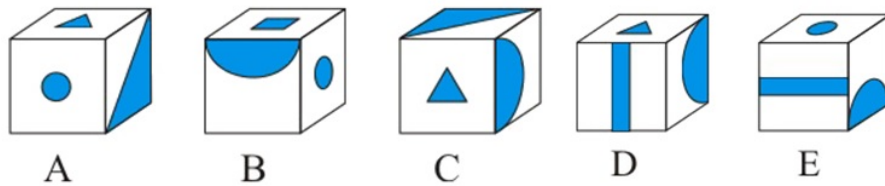
5 (<http://mdmat.mat.ufrgs.br>). A figura abaixo representa a planificação de um



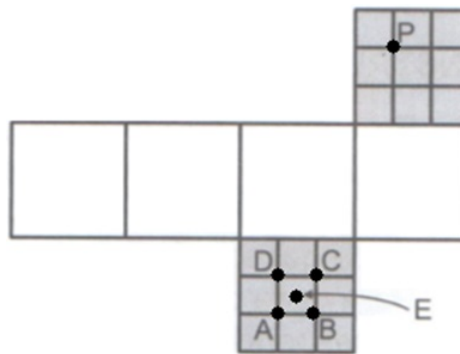
cubo.

CONTINUAÇÃO QUESTÕES DE PROVAS EXTERNAS

Qual das imagens abaixo representa o cubo da planificação acima?



6 (8ª OBMEP). Dois pontos na superfície de um cubo são opostos se o segmento de reta que os liga passa pelo centro do cubo. Na figura vemos uma planificação de um cubo, na qual as faces destacadas em cinzento foram divididas em nove quadradinhos iguais.



Quando o cubo for montado, qual será o ponto oposto ao ponto P?

- a) A
- b) B
- c) C
- d) D
- e) E

7 (GAVE). Na Figura 1 a seguir, está representado um recipiente com tinta. Nesse recipiente mergulhou-se um cubo branco, tal como se ilustra na Figura 2. Desta forma, a parte do cubo que ficou submersa adquiriu a cor da tinta.

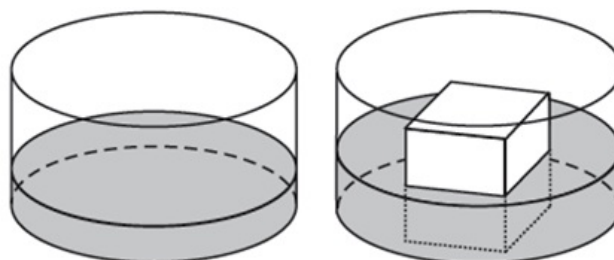
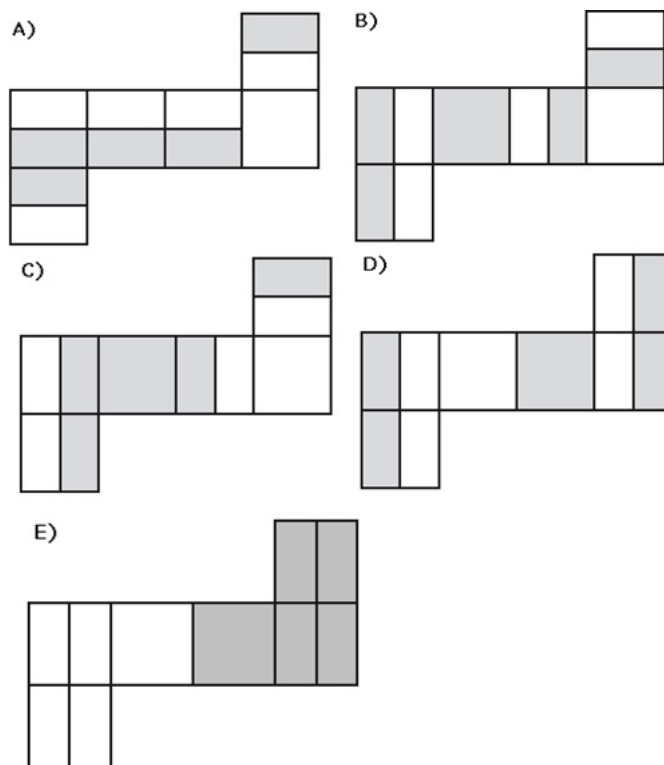


Figura 1

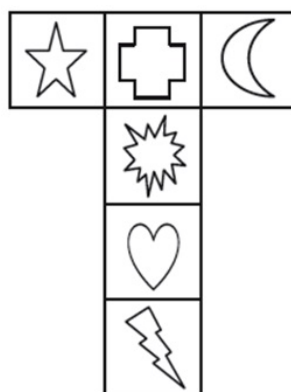
Figura 2

Em qual das opções seguintes pode estar uma planificação desse cubo depois de retirado do recipiente?

CONTINUAÇÃO QUESTÕES DE PROVAS EXTERNAS



8 (FATEC-2012). A figura mostra a planificação de um cubo, que apresenta imagens em suas faces.

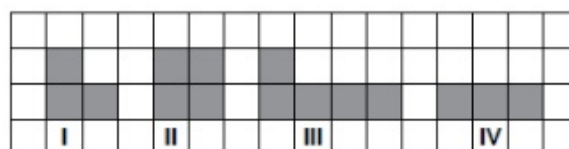
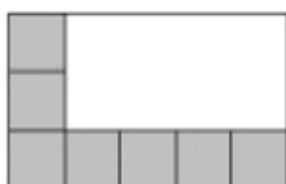
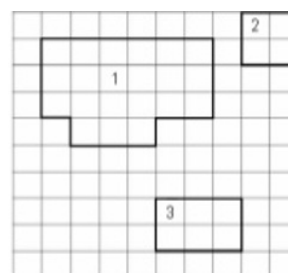
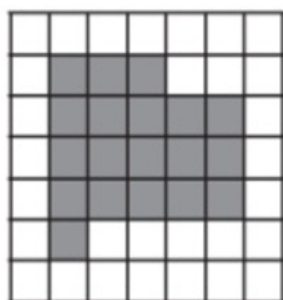


O cubo montado a partir dessa planificação é:



Apêndice C

1- Figura para análise de área e perímetro



2- Quadrado Quadriculado

