UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Anderson Jefty Rodrigues Silva

Estratégias no Ensino de Probabilidade para o ENEM: Uma Abordagem por meio de Materiais Concretos para o Desenvolvimento do Raciocínio Matemático no Ensino Médio

MOSSORÓ
2025

Anderson Jefty Rodrigues Silva

Estratégias no Ensino de Probabilidade para o ENEM: Uma Abordagem por meio de Materiais Concretos para o Desenvolvimento do Raciocínio Matemático no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito obrigatório para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Orientador: Paulo Henrique das Chagas Silva, Prof. Dr.

MOSSORÓ

2025

S587e Silva, Anderson Jefty Rodrigues.
Estratégias no Ensino de Probabilidade para o ENEM: Uma Abordagem por meio de Materiais Concretos para o Desenvolvimento do Raciocínio Matemático no Ensino Médio / Anderson Jefty Rodrigues Silva. - 2025.
138 f. : il.

Orientador: Paulo Henrique das Chagas Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2025.

1. ENEM. 2. Políticas públicas. 3. Material concreto. 4. Ensino de probabilidade. I. Silva, Paulo Henrique das Chagas, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automáto em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

Anderson Jefty Rodrigues Silva

Estratégias no Ensino de Probabilidade para o ENEM: Uma Abordagem por meio de Materiais Concretos para o Desenvolvimento do Raciocínio Matemático no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Defendida em: 20 / 08 / 2025.

BANCA EXAMINADORA

Paulo Henrique das Chagas Silva, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

Antônio Gomes Nunes, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

Mônica Paula de Sousa Martins, Prof. Dra. (UFPB)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente, a Deus, fonte de toda sabedoria, força e inspiração, por todas as oportunidades e caminhos abertos em minha vida. Devo a Ele tudo isso e muito mais.

À minha esposa, Andressa Vitória Nogueira de Queiroz, meu amor e gratidão por toda ajuda, paciência nos momentos difíceis e apoio incondicional, não apenas ao longo do Mestrado, mas em cada etapa da minha vida. Sem o seu apoio incondicional, nada disso teria sido possível.

Aos meus pais, Esdras Rodrigues da Fonseca e Regina Seles da Silva, sou imensamente grato pelos conselhos, incentivos e, sobretudo, por todo amor e apoio.

Aos meus tios, Gonzales e Lúcia, agradeço de coração pela hospitalidade, acolhimento e momentos de leveza e descontração durante cada uma das minhas visitas.

Estendo meus agradecimentos a toda minha família e aos amigos que estiveram ao meu lado, oferecendo palavras de incentivo, apoio emocional e celebrações sinceras a cada pequena vitória ao longo desta jornada.

Aos professores do PROFMAT, minha profunda admiração e reconhecimento pelo empenho, dedicação e pelo conhecimento transmitido com tanta generosidade. Cada aula, cada orientação e cada palavra de incentivo contribuíram significativamente para minha formação.

Ao meu amigo e parceiro de longa data, Jeovano Pereira da Costa, que caminhou comigo desde a graduação, minha gratidão pela amizade, apoio e parceria que nos trouxe a essa conquista tão sonhada.

Aos colegas do PROFMAT, obrigado pela colaboração, pela amizade e pelos momentos de descontração que tornaram essa jornada mais leve. Deixo registrado: sem dúvidas, fiz parte da MELHOR TURMA DO PROFMAT.

Ao meu orientador e amigo, Dr. Paulo Henrique das Chagas Silva, minha gratidão pelas orientações, pelos conselhos valiosos e pela confiança no desenvolvimento deste trabalho. Sua postura ética, comprometida e humana foi essencial para que eu pudesse crescer como pesquisador e como profissional.

Aos professores e funcionários da Escola Estadual Francisco de Assis da Silva, minha gratidão por terem aberto as portas e colaborado generosamente durante a construção da pesquisa. O acolhimento e o apoio de vocês foram fundamentais.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta conquista, que representa a realização de um grande sonho pessoal e profissional. Esta vitória é compartilhada com todos que fizeram parte dessa jornada.

A todos vocês, muito obrigado!

EPÍGRAFE

“Não importa o quão difícil ou impossível seja,

nunca perca de vista o seu objetivo!”.

Luffy, One Piece, episódio 83.

RESUMO

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) exerce um papel fundamental na educação brasileira, pois além de funcionar como principal via de acesso ao ensino superior, também atua como instrumento de apoio à formulação de políticas públicas que visam promover maior equidade educacional. Diante desse contexto, esta dissertação tem como objetivo investigar como o uso de materiais concretos pode contribuir para a aprendizagem de conteúdos relacionados à Probabilidade no Ensino Médio, especialmente na preparação para o ENEM. Para isso, foram construídos e aplicados materiais concretos em uma turma da 3ª série do Ensino Médio da Escola Estadual Francisco de Assis da Silva, localizada em Serrinha dos Pintos, no Rio Grande do Norte. A fundamentação teórica apoia-se em autores como Lorenzato (2012) e D'Ambrosio (2009), que destacam a relevância do material concreto como recurso pedagógico essencial para tornar o ensino da Matemática mais acessível e significativo; Morgado (2016), com seus inúmeros trabalhos no campo da Probabilidade; e Saviani (2008), cujas contribuições reforçam o papel da escola pública como espaço de democratização do conhecimento e transformação social. Além disso, o trabalho vai de encontro com as diretrizes e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que enfatiza o uso de situações-problema, experimentos e práticas contextualizadas para o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento crítico e da autonomia dos estudantes. Os resultados da pesquisa evidenciam que o uso de materiais concretos, aliado a uma prática pedagógica bem estruturada, proporciona momentos de maior engajamento, compreensão conceitual, além de uma aprendizagem mais interativa e significativa. Como produto educacional, esta pesquisa oferece uma sequência didática, acompanhada de seus respectivos materiais concretos, criados para facilitar a abordagem de conteúdos de Probabilidade de forma prática e interativa. Este produto tem como objetivo orientar professores que desejem aplicar ou adaptar os recursos desenvolvidos, promovendo aulas mais dinâmicas, contextualizadas e alinhadas ao perfil das questões do ENEM. Assim, este trabalho busca contribuir para o aprimoramento do ensino de Matemática na escola pública, tornando-o mais atraente, compreensível e conectado à realidade dos estudantes, além de melhorar seu desempenho em avaliações externas como o ENEM.

Palavras-chave: ENEM; políticas públicas; material concreto; ensino de probabilidade.

ABSTRACT

The National High School Exam (ENEM) plays a fundamental role in Brazilian education, since in addition to functioning as the main access route to higher education, it also acts as an instrument to support the formulation of public policies that aim to promote greater educational equity. Given this context, this dissertation aims to investigate how the use of concrete materials can contribute to the learning of content related to Probability in High School, especially in preparation for the ENEM. To this end, concrete materials were constructed and applied in a 3rd grade class of High School at the Francisco de Assis da Silva State School, located in Serrinha dos Pintos, Rio Grande do Norte. The theoretical basis is supported by authors such as Lorenzato (2012) and D'Ambrosio (2009), who highlight the relevance of concrete materials as an essential pedagogical resource to make the teaching of Mathematics more accessible and meaningful; Morgado (2016), with his numerous works in the field of Probability; and Saviani (2008), whose contributions reinforce the role of public schools as a space for the democratization of knowledge and social transformation. Furthermore, the work aligns with the guidelines and skills of the National Common Curricular Base (BNCC), which emphasizes the use of problem-solving situations, experiments, and contextualized practices to develop students' logical reasoning, critical thinking, and autonomy. The research results show that the use of concrete materials, combined with well-structured pedagogical practices, provides moments of greater engagement, conceptual understanding, and more interactive and meaningful learning. As an educational product, this research offers a teaching sequence, accompanied by its respective concrete materials, designed to facilitate the approach to Probability content in a practical and interactive way. This product aims to guide teachers who wish to apply or adapt the developed resources, promoting more dynamic, contextualized classes aligned with the profile of ENEM questions. Thus, this work seeks to contribute to the improvement of mathematics teaching in public schools, making it more engaging, understandable, and connected to students' realities, in addition to improving their performance on external assessments such as ENEM.

Keywords: ENEM; public policies; concrete material; teaching probability.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DIREC	Diretoria Regional de Educação e Cultura
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FIES	Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IFES	Instituições Federais de Ensino Superior
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
MD	Material Didático
MEC	Ministério da Educação e Cultura
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIB	Produto Interno Bruto
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
PROUNI	Programa Universidade para Todos
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
PUC-PR	Pontifícia Universidade Católica do Paraná
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SEEC	Secretaria de Estado da Educação, da Cultura, do Esporte e do Lazer
SISU	Sistema de Seleção Unificada
TALE	Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TRI	Teoria de Resposta ao Item
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
UNIFESP	Universidade Federal de São Paulo
URI	Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões

LISTA DE SÍMBOLOS

$=$	Igualdade
π	Pi
$\leq$	Menor do que ou igual
$\geq$	Maior do que ou igual
$+$	Adição
$-$	Subtração
$\approx$	Aproximadamente

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática está presente no nosso dia a dia, seja quando vamos ao supermercado fazer compras e verificamos o valor a ser pago, seja quando nos comunicamos com algum parente por meio das redes sociais, cujos algoritmos são baseados em princípios matemáticos e até mesmo quando analisamos a previsão do tempo em um determinado dia. Esses são apenas alguns exemplos de como a Matemática influencia de forma essencial o nosso cotidiano.

Mesmo com diversas aplicações, a matemática ministrada em sala de aula é vista, pela maioria dos alunos, como uma disciplina difícil, pois em geral, envolve um número considerável de fórmulas e manuseio que parte dos alunos não consegue desenvolver, principalmente quando os problemas vêm elaborados de forma contextualizada.

Apesar de toda a sua importância, a Matemática ainda enfrenta grandes desafios no cenário educacional brasileiro. O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) do Brasil, no ano de 2023, foi de 4,3, enquanto a meta estabelecida em 2021 previa alcançar 5,2 nesse mesmo período (Brasil, 2024). Esse resultado revela um desempenho abaixo do esperado e acende um alerta para a qualidade da educação básica.

Esses números indicam a necessidade urgente de estratégias pedagógicas mais eficazes, capazes de tornar o ensino da Matemática mais atrativo e compreensível para os alunos. Nesse contexto, a adoção de estratégias pelos professores pode se mostrar uma alternativa viável para facilitar a aprendizagem de conceitos considerados complexos, contribuindo para a melhoria dos índices educacionais e para a formação de estudantes mais preparados para avaliações externas como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) que avalia o desempenho dos alunos na educação básica ou até mesmo o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Diante desse cenário, é fundamental compreender o papel do ENEM como principal porta de entrada para o ensino superior, destacando sua estrutura e relevância no contexto da educação básica brasileira. Além disso, o exame funciona como um importante auxiliador das políticas públicas e práticas pedagógicas do país.

O ENEM é uma prova realizada anualmente com o objetivo de selecionar alunos para o ingresso no ensino superior. Essa prova é composta de 180 questões objetivas, distribuídas em quatro áreas do conhecimento, além de uma redação dissertativo-argumentativa, o qual será tratado com mais detalhes no decorrer deste trabalho.

A preparação para o ENEM demanda não apenas o domínio dos conteúdos específicos, mas também o desenvolvimento de habilidades que possibilitem a interpretação e resolução de problemas complexos, alinhadas às competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nesse sentido, a aplicação de situações-problemas no ensino da

Matemática torna-se fundamental para que os estudantes possam relacionar os conceitos teóricos à realidade, favorecendo um aprendizado mais significativo e contextualizado.

Essa importância da aplicações de situações-problemas é enfatizada pela BNCC quando diz que o desenvolvimento de procedimentos matemáticos para interpretar problemas "é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para fazer julgamentos bem fundamentados" (Brasil, 2018, p. 532).

Dessa forma, cabe ao professor desenvolver métodos que ajudem os alunos nas interpretações desses problemas e aplicações das fórmulas resolutivas. Uma maneira de desenvolver o pensamento crítico dos alunos é com o uso de materiais concretos, como também é destacado na BNCC quando diz que as habilidades de manusear materiais "[...] têm importante papel na formação Matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância" (Brasil, 2018, p. 540).

Com o uso de materiais concretos, o professor tem em mãos ferramentas que podem auxiliar de maneira significativa na aprendizagem dos seus estudantes. Esses recursos permitem que eles possam interagir direta e dinamicamente com conceitos formais que não seriam possíveis apenas com aulas teóricas.

Por meio dessa perspectiva existe a valorização da prática ativa dos alunos no âmbito educacional, incentivando a reflexão e a transformação da realidade, afinal "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção" (Freire, 2002, p. 12). O uso de materiais concretos no ensino de Matemática pode contribuir para uma aula mais atrativa, tornando a aprendizagem mais eficiente, além de estimular o interesse e a participação ativa dos alunos durante todo o processo educativo.

No ensino de probabilidade, o uso de materiais concretos torna-se ainda mais relevante, pois experimentos práticos possibilitam que os estudantes desenvolvam a intuição probabilística por meio da interação direta com situações reais, como jogos e sorteios, ação tão necessária para a conscientização da sociedade atual devido ao desenfreado crescimento das famosas *bets* e rifas online.

Partindo desse pressuposto, o trabalho visa responder a seguinte pergunta norteadora: "De que forma o uso do material concreto pode auxiliar na aprendizagem de probabilidade dos alunos concluintes do ensino médio que prestarão o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)?"

A partir disso, este trabalho tem como objetivo geral investigar como o uso de materiais concretos pode contribuir para a aprendizagem de conteúdos relacionados à probabilidade no Ensino Médio, especialmente no contexto da preparação para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Para alcançar esse objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as principais dificuldades encontradas pelos alunos na resolução de problemas de probabilidade nas provas do ENEM.
- Elaborar estratégias pedagógicas que possibilitem contornar as dificuldades enfrentadas pelos alunos.
- Selecionar e analisar questões de probabilidade do ENEM que melhor estejam alinhadas aos objetivos pedagógicos da pesquisa.
- Construir materiais concretos para facilitar na aprendizagem do estudo de probabilidade.
- Aplicar e avaliar a eficácia dos materiais elaborados, verificando sua contribuição para a melhoria do desempenho dos alunos.

Nesse contexto, o uso de materiais concretos surge como uma alternativa promissora para facilitar a compreensão de conceitos considerados abstratos, como os da probabilidade, por meio da visualização e manipulação direta dos elementos envolvidos. A seleção criteriosa de questões do ENEM permite que o processo de ensino-aprendizagem seja direcionado e contextualizado, preparando melhor os estudantes para os desafios das avaliações. A construção, aplicação e avaliação de materiais concretos possibilitam não apenas um suporte didático inovador, mas também auxiliam na melhoria do desempenho dos alunos ao possibilitar uma aula mais interativa e diversificada.

Este estudo está organizado em 6 (seis) capítulos. O primeiro corresponde à presente introdução. O segundo capítulo traz o referencial teórico, construído para embasar a pesquisa por meio da apresentação da tendência educacional conhecida como Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), destacando os benefícios da utilização de materiais concretos no ensino de probabilidade, bem como um panorama histórico sobre a evolução do ENEM ao longo dos anos. No terceiro capítulo, trata-se da trajetória histórica da probabilidade, apresentando um panorama a partir dos jogos de azar, além da apresentação de alguns problemas clássicos que intrigaram diversos matemáticos. O quarto capítulo trata dos aspectos metodológicos, descrevendo os critérios adotados para a seleção das questões e a aplicação dos problemas envolvendo materiais concretos. O quinto capítulo apresenta e analisa os resultados obtidos durante a aplicação das propostas. Por fim, o sexto capítulo é dedicado às considerações finais, onde são discutidas as contribuições da pesquisa, suas limitações e possíveis encaminhamentos para estudos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Com o objetivo de embasar e fundamentar a nossa pesquisa, neste capítulo foi apresentado um estudo bibliográfico que servirá de base para a construção da presente proposta. Dessa forma, analisamos diversas fontes acadêmicas sobre o tema, como artigos, livros, dissertações e teses e buscou-se oferecer uma visão crítica e aprofundada sobre os principais conceitos e discussões que norteiam o campo de estudo. Portanto, este levantamento teórico servirá para compreender melhor o objeto da pesquisa, onde a dividimos em subcategorias, sendo elas: *Laboratório de Ensino de Matemática, Material Concreto no Ensino de Probabilidade* e, por fim, *Exame Nacional do Ensino Médio.*

2.1 LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

A busca por estratégias para tornar o ensino de Matemática mais atrativo e significativo tem sido um desafio constante dos educadores e pesquisadores. Nesse sentido, destaca-se a formação docente, pois como afirma Freire (2002, p. 18) “na formação permanente dos professores, o momento fundamental é o da reflexão crítica sobre a prática”. Em meio a esse cenário surgem diferentes iniciativas voltadas para aproximar a teoria da prática e promover uma aprendizagem mais contextualizada com o dia a dia. Entre estas iniciativas, destaca-se uma abordagem que vem ganhando espaço no ensino de matemática por todo o Brasil.

Ao longo dos anos, diversos estudiosos dedicaram-se a investigar e propor métodos que auxiliassem no ensino de Matemática. Nesse contexto, uma das propostas que ganhou destaque como tendência na Educação Matemática foi o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), cuja relevância no processo de ensino e aprendizagem será abordada nesta seção.

Além de fornecer recursos concretos, o LEM possibilita a construção de experiências práticas que incentivam a experimentação, a investigação e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Por meio de atividades planejadas, professores e alunos podem explorar conceitos matemáticos de forma mais interativa, favorecendo a compreensão de conteúdos que, muitas vezes, se mostram abstratos na abordagem tradicional.

O LEM, muitas vezes, é compreendido apenas como um simples depósito de materiais didáticos de matemática. Entretanto, ele vai muito além disso, tratando-se de um ambiente dinâmico e multifuncional podendo ser um facilitador no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, além de servir como um ambiente privilegiado para o planejamento pedagógico das aulas de Matemática. Essa concepção vai em consonância com Lorenzato (2012), quando define o LEM como

> um local da escola reservado preferencialmente não só para aulas regulares de matemática, mas também para tirar dúvidas de alunos; para os professores de matemática planejarem suas atividades, sejam elas aulas, exposições, olimpíadas, avaliações, entre outras, discutirem seus projetos, tendências e inovações; um local para criação e desenvolvimento de atividades experimentais, inclusive a produção de materiais instrucionais que possam facilitar o aprimoramento da prática pedagógica (Lorenzato, 2012, p. 6).

Além de Lorenzato (2012), Santos (2021, p. 83) também fala da importância do LEM quando diz que é "um espaço de múltiplas convivências e, investigar é uma ação necessária porque permite que o sujeito busque respostas de um determinado fenômeno ou algo desconhecido, e questões como o que, quem, quando, como e por quê estão atreladas a essa busca".

A partir dessas definições, é possível entender como o LEM contribui significativamente para a construção de um ensino mais participativo, especialmente no tratamento de conteúdos mais abstratos. Ele oferece recursos e metodologias que estimulam o raciocínio lógico, a criatividade e a autonomia dos estudantes. Nesse ambiente, o aluno se torna sujeito ativo do processo educativo.

A partir disso, o LEM deve ser valorizado não apenas como um espaço físico, mas como uma proposta pedagógica que favorece o protagonismo do aluno e o fortalecimento da prática docente. Sua implementação e uso podem representar um importante diferencial para o ensino da Matemática no contexto escolar. Com base nisso, Marciel (2022) destaca que

> é necessário que o professor possua um vasto conhecimento sobre o que será trabalhado e como vai ser aplicado, não dissociando essas duas vertentes. Diante dessa perspectiva inovadora, o LEM pode ser aplicado sob um viés de construção de materiais manipuláveis e jogos pedagógicos, possibilitando aos alunos o protagonismo no processo de ensino-aprendizagem. (Marciel, 2022, p. 26).

O LEM configura-se como um espaço fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois oferece mecanismos necessários para a integração entre teoria e prática. Trata-se de um ambiente que favorece a experimentação, a construção do conhecimento e a aprendizagem ativa. Lucena (2017) reforça essa perspectiva ao afirmar que,

> o Laboratório de Ensino de Matemática é o espaço propício e indispensável ao contexto escolar, em que há um ambiente favorável à aproximação da matemática teórica com a matemática prática. No LEM, a utilização de materiais como jogos, livros, vídeos, computadores, materiais manipuláveis, materiais para experimentos Laboratório de Ensino da Matemática 10 com a matemática (tesoura, compasso, régua, fita métrica, isopor, transferidor, softwares educativos, etc.), dentre outros, permitirá ao professor o planejamento

> e a execução da aula com maior qualidade, tornando-o capaz de fomentar nos seus alunos a curiosidade, a criatividade e a participação nas aulas, fazendo-os sujeitos ativos nos processos de aprendizagem (Lucena, 2017, p. 9).

Para Munari (2010) em sua obra intitulada *Jean Piaget*, o aluno deve participar ativamente da construção do conhecimento por meio de experimentações, em que a descoberta seja reconquistada, reconstruída ou redescoberta pelo próprio estudante. Nesse sentido, o LEM exerce um papel fundamental nesse processo, proporcionando ao aluno a oportunidade de fazer observações e manipulações utilizando materiais construídos para esse fim, favorecendo assim o processo de aprendizagem construtivista, defendido por Jean Piaget.

Com mecanismos oferecidos pelo LEM, o professor tem a oportunidade de tornar a aula mais interativa, auxiliando assim para uma aplicação prática que desenvolva o raciocínio dos estudantes, conforme mencionado por Tahan (1961) quando diz que

> Cabe, ao professor, essa delicada e importante tarefa de despertar em seus alunos o gosto, o intêresse [sic.] pela Matemática. Formulará problemas interessantes, artifícios curiosos; apresentará problemas relacionados com os fatos da vida corrente do aluno; chamará a atenção para a fecundidade de certos raciocínios; para uma figura notável; para uma aplicação prática engenhosa (Tahan, 1961, p. 168).

Além disso, o LEM favorece a integração entre teoria e prática, estimulando a resolução de problemas reais que dialogam com o cotidiano dos alunos. Essa articulação contribui para que o aprendizado deixe de ser visto como algo distante da realidade, aproximando a Matemática do contexto de vida dos estudantes e fortalecendo o vínculo entre o conteúdo escolar e as demandas sociais.

Nesse sentido, Santos (2021, p. 96) diz que é fundamental que o professor considere a construção do conhecimento pelo aluno, por meio da descoberta pois, "na investigação, a interação dos sujeitos é ocorrente em todos os momentos e exige um trabalho exploratório e de observação. Os resultados são necessários, porém, o processo em que o sujeito se inseriu fazendo conjecturas, justificando e provando, é o que dá o significado da aula".

Dessa forma, evidencia-se que o LEM não deve ser visto apenas como um espaço físico ou um repositório de materiais, mas sim como uma proposta metodológica que valoriza a construção ativa do conhecimento. Ao possibilitar a vivência de situações concretas e a aplicação prática dos conceitos matemáticos, o LEM contribui para tornar a aprendizagem mais efetiva e prazerosa.

Nesse ambiente, o estudante deixa de ser apenas um receptor passivo de informações e passa a atuar como protagonista no processo de aprendizagem. A exploração de materiais manipuláveis, materiais concretos, jogos didáticos, experimentos e desafios práticos possibilita que o conhecimento matemático seja construído de forma colaborativa, permitindo trocas de ideias e o desenvolvimento de habilidades como argumentação, análise crítica e autonomia. Essa percepção é vista por Ksiaszczyk (2021, p. 80), quando afirma que “a concepção pedagógica proposta para o LEM possibilita aos estudantes [...] participar ativamente do processo de ensino e aprendizagem, com vistas a interagir com a realidade de forma crítica e criativa”.

Lorenzato (2012) propõe ainda que durante uma atividade prática no LEM, o professor seja um agente mediador do conhecimento que possa ajudar os alunos na construção do conhecimento. Partindo desse pressuposto, Araújo (2024) salienta que “essa mediação é essencial, pois exige que o professor, além de acompanhar os trabalhos dos alunos, seja capaz de interpretar e compreender as estratégias que eles empregam para resolver as atividades propostas” (Araújo, 2024, p. 40).

Portanto, reforça-se a importância de sua inserção no contexto escolar como uma estratégia eficaz para despertar o interesse dos alunos, promover a compreensão dos conteúdos e favorecer o desenvolvimento de habilidades essenciais ao raciocínio matemático.

2.2 MATERIAL CONCRETO NO ENSINO DE PROBABILIDADE

O uso de material concreto no ensino de Matemática garante uma abordagem mais significativa do conteúdo ministrado pelo professor. Assim, os alunos conseguem efetuar experimentos que os possibilitem visualizar os problemas de forma mais clara e concreta. Essa prática aproxima a realidade do estudante, despertando seu interesse, ampliando sua participação nas aulas e fortalecendo a construção do conhecimento.

Nesse sentido, conforme destacam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), “quando se recomenda a contextualização como princípio de organização curricular, o que se pretende é [...] facilitar o processo de concreção dos conhecimentos abstratos que a escola trabalha” (BRASIL, 2000, p. 82), o que evidencia a importância de relacionar a teoria à prática por meio de materiais concretos.

Além disso, a utilização de materiais concretos favorece a participação ativa dos alunos, que deixam de ser apenas receptores de informações para se tornarem protagonistas do próprio aprendizado. Ao manipular objetos, construir modelos e realizar atividades práticas, os estudantes são incentivados a formular hipóteses, testar estratégias e discutir resultados em grupo, o que contribui para o desenvolvimento de habilidades cognitivas e sociais essenciais para a aprendizagem matemática.

O material concreto é um recurso pedagógico que pode ser utilizado pelo professor para que auxiliem o aluno na interpretação dos problemas e elaboração de uma solução, pois desenvolvem o raciocínio lógico estimulando o pensamento crítico, como destacado por Lorenzato (2012, p. 61) quando diz que “o material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos”.

Para Marciel (2022, p. 140), “o material concreto deve ser usado com responsabilidade e conhecimento nas aulas de Matemática”, cabendo ao professor orientar o processo e favorecer a interação entre os alunos e os materiais. Assim, o docente atua como mediador, problematizando saberes e criando um ambiente de aprendizagem colaborativa.

A aplicação de materiais concretos também fortalece a relação entre a teoria e a prática, permitindo assim que os alunos percebam a aplicação da matemática no seu dia a dia, tornando a aprendizagem mais significativa, ressaltando a importância do incentivo ao uso desses materiais no contexto educacional.

O professor tem o dever de planejar estratégias didáticas que tornem o ensino mais atrativo, integrando essa relação entre teoria e prática. A utilização de materiais concretos desempenha um papel fundamental nesse processo, isso é intensificado por D’Ambrosio (2009, p. 79) ao afirmar que “entre teoria e prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para prática equipado com uma teoria e a praticar de acordo com essa teoria até atingir os resultados desejados.”

Ao utilizar materiais concretos para se ensinar probabilidade, o aluno tem uma melhor aceitação quanto ao conteúdo, como é enfatizado pela BNCC (Brasil, 2018, p. 274) quando destaca que o estudo de probabilidade “deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica”. Essa orientação também está em consonância com os PCN quando afirmam que

> com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p. 82).

Dessa forma, com o ensino de probabilidade, o professor permite que os alunos tenham uma formação crítica da sociedade, isso é ressaltado por Pontes (2019, p. 16) quando diz que, “a Estatística e a Probabilidade propõem através de seus conteúdos elementos capazes de contribuir com uma formação diversificada dos alunos, no âmbito da qual eles possam fazer uma leitura crítica da realidade vivenciada associando-a aos seus múltiplos contextos”.

Sabe-se que em algumas situações os alunos podem apresentar dificuldades na elaboração de uma solução matemática relacionadas com problemas de probabilidade por não conseguirem visualizar uma saída, por isso, cabe ao professor efetuar atividades que possibilitem uma visualização prática de alguns problemas, como também destaca Pontes (2019) em seu trabalho sobre a identificação dos erros e dificuldades de aprendizagem dos alunos nas questões de estatística e probabilidade no ENEM, quando diz que,

> Acreditamos que um dos problemas fundamentais do ensino de estatística e probabilidade consiste na busca de possibilidades para que eles aprendam utilizando os erros como aliados para serem “trampolins” de uma aprendizagem consistente. Isso requer do professor as reflexões sobre a sua formação quanto às questões didático-metodológicas implícitas no ensino desse conteúdo e sobre a importância da avaliação no diagnóstico dos erros associados às dificuldades na aprendizagem, as quais se apresentam durante o ensino dos conteúdos no ambiente escolar (Pontes, 2019, p. 175).

Nesse sentido, o papel do professor como mediador do conhecimento é de ficar atento aos erros e dificuldades apresentados pelos alunos e propor estratégias que auxiliem na aprendizagem dos estudantes. Assim, ao reconhecer e valorizar o erro como parte do processo de aprendizagem, o docente contribui de maneira significativa para a formação de um estudante mais crítico, autônomo e preparado para lidar com situações que envolvam incertezas.

Para que o professor desempenhe esse papel de mediador de forma eficaz, é fundamental que ele vá além da simples transmissão de conteúdo, buscando estratégias que estimulem o pensamento crítico e a autonomia dos alunos. Nesse contexto, o ensino de probabilidade não deve se limitar à exposição teórica, mas sim promover experiências práticas que aproximem os conceitos matemáticos do cotidiano dos estudantes. Dessa forma, o uso de materiais concretos, jogos e outras atividades lúdicas torna-se uma ferramenta valiosa para que os alunos possam internalizar os princípios da probabilidade de forma mais concreta.

Partindo do pressuposto de facilitador, torna-se evidente que o ensino de probabilidade deve ir muito além de uma simples exposição teórica de definições e fórmulas. É essencial que o professor promova situações em que os alunos estabeleçam conexões significativas entre os conceitos matemáticos e a realidade. Tendo em vista isso, a utilização de materiais concretos, jogos ou qualquer atividade prática planejada para esse fim pode contribuir de maneira significativa para que os estudantes compreendam os princípios da probabilidade de forma intuitiva e sólida.

2.3 EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), a partir do seu surgimento, vem ganhando cada vez mais relevância como uma política de avaliação dos estudantes do ensino médio, sendo hoje o principal meio de acesso para o ensino superior público.

2.3.1 Desenvolvimento do ENEM

Discutiremos a trajetória histórica do ENEM, para isso a dividimos em três etapas de evolução, que as denominamos *consolidação e expansão*, *aperfeiçoamento e ampliação* e *adaptação e modernização*.

2.3.1.1 Consolidação e Expansão

O ENEM surgiu a partir da Portaria n° 438 de 28 de maio de 1998, e possuía o objetivo de avaliar o nível dos estudantes concluintes do ensino médio; contendo uma proposta de redação e 63 questões objetivas, sendo 7 (sete) questões de português e literatura, 15 questões de matemática, 14 questões de biologia, 4 (quatro) de química, 10 de física, 11 de geografia e 2 (duas) de história. Tendo o Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) como órgão responsável pelas inscrições, elaborações e correções das provas.

Em sua primeira edição, o ENEM contou com um total de 157.221 inscritos, tendo um crescimento substancial a cada ano que se passava, principalmente pelo fato do Ministério da Educação e Cultura (MEC) ter beneficiado os alunos concluintes de escola pública com isenção no exame, passando para um total de 1.624.131 inscritos no ano de 2001 e finalizando o primeiro ciclo do exame, no ano de 2004, com 1.552.316 inscritos.

Até então, o ENEM era apenas uma prova de avaliação dos estudantes do ensino médio. Entretanto, uma mudança importante ocorreu em 13 de janeiro de 2005, com a criação do Programa Universidade para Todos (ProUni) regida pela Lei nº 11.096/2005 a qual em seu Art. 1° decreta que,

> Fica instituído, sob a gestão do Ministério da Educação, o Programa Universidade para Todos (Prouni), destinado à concessão de bolsas de estudo integrais e bolsas de estudo parciais de 50% (cinquenta por cento) para estudantes de cursos de graduação e sequenciais de formação específica, em

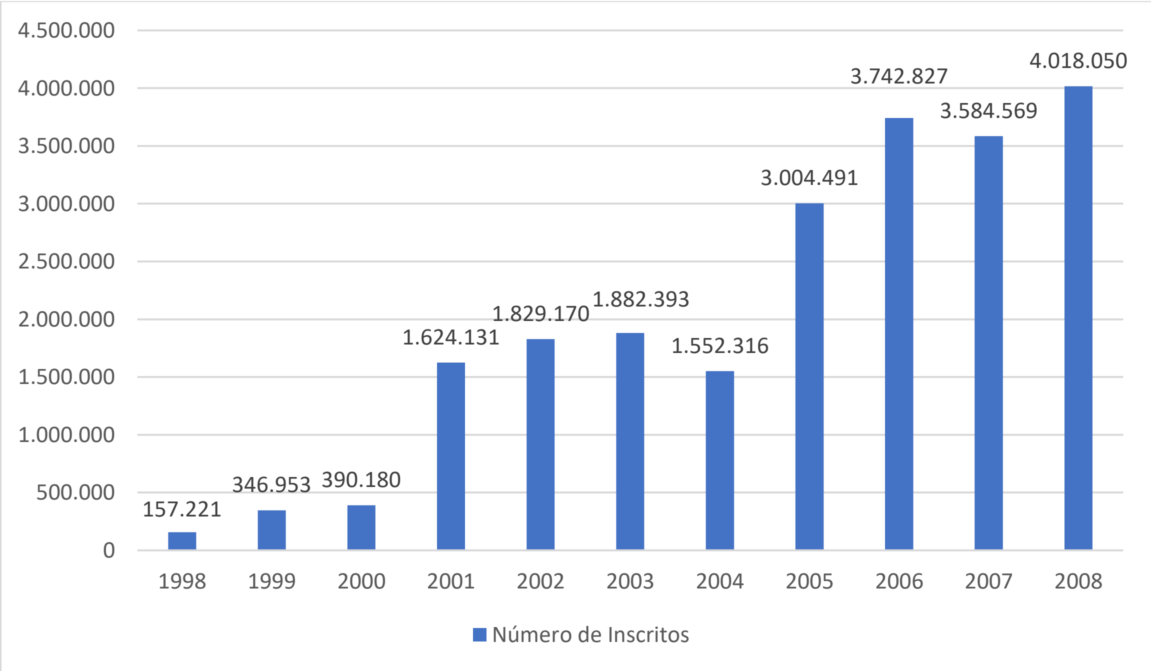
> instituições privadas de ensino superior, com ou sem fins lucrativos. (Brasil, 2005).

Após a criação do ProUni, o ENEM de 2005 contou com um aumento relativo de aproximadamente, 93,5% em relação ao ano anterior, passando para um total de 3.004.491 no número de inscrições. Isso se deu devido à possibilidade de bolsas para estudantes que cursavam instituições privadas. Segundo Leal (2015), com essa mudança,

> O Exame deixa de ser conhecido pelo caráter, eminentemente avaliativo do ensino médio, e passa a funcionar como referência de processo seletivo para ingresso no ensino superior, garantindo a ele o *status* de modelo avaliativo. Nessa linhagem, a política nacional do ENEM configura um apontamento para o ensino médio, uma vez que o acesso ao ensino superior depende da base constitutiva desta etapa de ensino. (Leal, 2015, p. 22).

A partir disso, podemos observar no Gráfico 01, a seguir, como se deu a evolução no número de inscrições no ENEM, de acordo com cada fato mencionado anteriormente.

Gráfico 01 – Número de inscritos no ENEM (1998 - 2008).



Fonte: O autor (2024).

Como mostra o Gráfico 01, a cada ano que se passava o ENEM ganhava maior visibilidade pelo fato do governo federal, juntamente com o governo estadual e escolas de todo o país, intensificarem as divulgações do exame e trabalharem para se obter bons resultados.

2.3.1.2 Aperfeiçoamento e Ampliação

O ENEM, até 2008, permaneceu com este formato e objetivo, com alterações apenas na quantidade de questões de cada área do conhecimento. Quando, em 2009, foi totalmente reestruturado por meio da Portaria n° 109, de 27 de maio de 2009, e passou a servir como método de ingresso no ensino superior. A portaria destaca, em seu art. 13, que o exame,

> constituir-se-á em uma proposta para redação e 4 (quatro) provas, contendo 45 (quarenta e cindo) questões objetivas de múltipla escolha, versando sobre as várias áreas de conhecimento em que se organizam as atividades pedagógicas da Educação Básica no Brasil, e intituladas como:
>
> - Prova I - Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e redação - que compreende os seguintes componentes curriculares: língua Portuguesa, Artes e educação Física;
>
> - Prova II - Matemática e suas Tecnologias - que compreende os seguintes componentes curriculares: Matemática e Estatística;
>
> - Prova III - Ciências humanas e suas tecnologias - que compreende os seguintes componentes curriculares: História, Geografia, Filosofia e Sociologia
>
> - Prova IV - Ciências da Natureza e suas Tecnologias - que compreende os seguintes componentes curriculares: Química, física e Biologia. (Brasil, 2009).

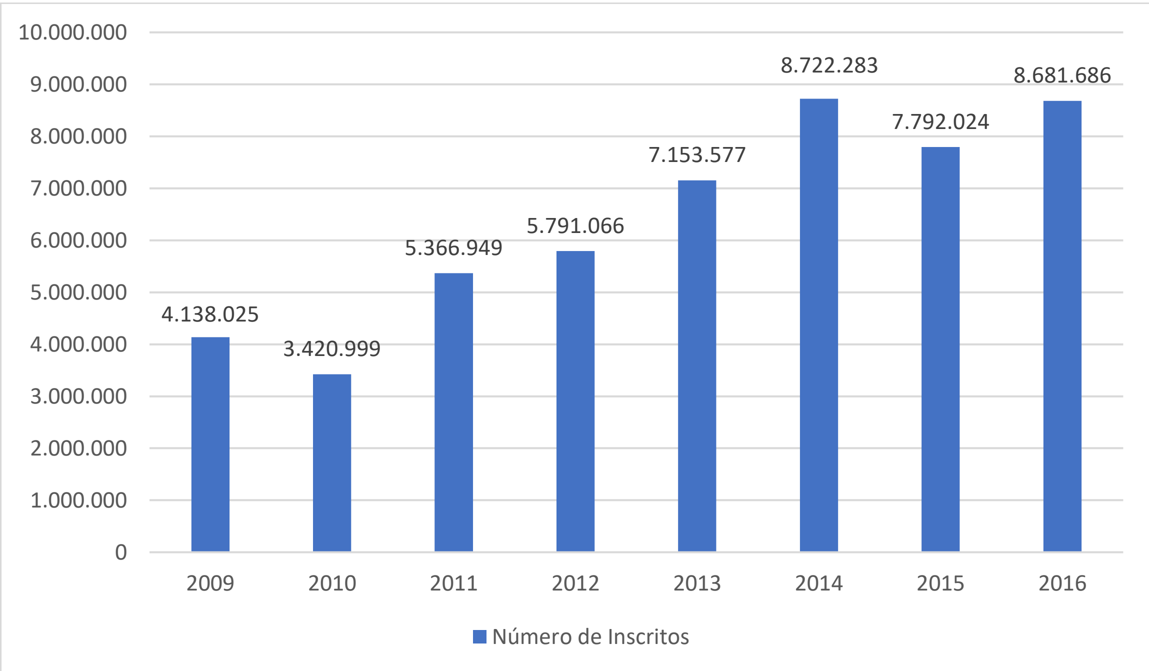
Onde na época era aplicado em um sábado (1° dia) e domingo (2° dia) consecutivos, sendo 4h30min no 1° dia, onde o estudante tinha 90 (noventa) questões objetivas referentes às Provas III e IV e no 2° dia tinha 5h30min para responder mais 90 (noventa) questões objetivas referentes às Provas I e II, além de uma redação. O que torna a prova bastante cansativa para os estudantes que a fazem, pois com o tempo previsto para respondê-la, o estudante tem o tempo médio de 3 (três) minutos para cada questão no primeiro dia de aplicação, com um acréscimo de 1 (uma) hora no segundo dia de aplicação para desenvolver a proposta de redação.

Outra mudança significativa ocorreu em 2010, com a publicação da portaria normativa n° 2, de 26 de janeiro de 2010 no Diário Oficial da União, que instituiu e regulamentou o Sistema de Seleção Unificada (SISU), gerenciado pelo Ministério da Educação, para seleção de candidatos a vagas em cursos de graduação disponibilizadas pelas instituições públicas de educação superior (Brasil, 2010), sendo hoje o principal responsável por esse ingresso em instituições públicas, estaduais ou federais.

Além disso, também em 2010, a nota do ENEM passou a ser utilizada no Programa de Financiamento Estudantil (FIES), que existia desde 2001, mediante a lei nº 10.260, de 12 de julho de 2001, mas apenas neste ano foi ampliado para que os estudantes que desejassem ingressar no ensino privado pudessem utilizar seus resultados do exame e ter seus estudos financiados pelo governo federal com taxas de juros baixas e com um período de carência após sua conclusão.

Em 2012, houve mais uma alteração relevante no ENEM, mediante a Portaria nº 144, de 24 de maio de 2012, que dispôs sobre a certificação de conclusão do ensino médio ou declaração parcial de proficiência com base nas notas obtidas na prova (Brasil, 2012), ou seja, um aluno que estivesse em atraso no ensino médio poderia obter certificação de conclusão se obtivesse pontuações exigidas pelos editais. A popularidade dessa segunda etapa no desenvolvimento do ENEM pode ser verificada pelo Gráfico 02, a seguir.

Gráfico 02 – Número de inscritos no ENEM (2009 - 2016).



Fonte: O autor (2024).

Após diversas divulgações e incentivos ocorridos nesta etapa, nota-se um crescimento substancial no número de inscritos no exame, atingindo o seu ápice em 2014, sendo ainda hoje o ano em que teve a maior participação dos estudantes no ENEM.

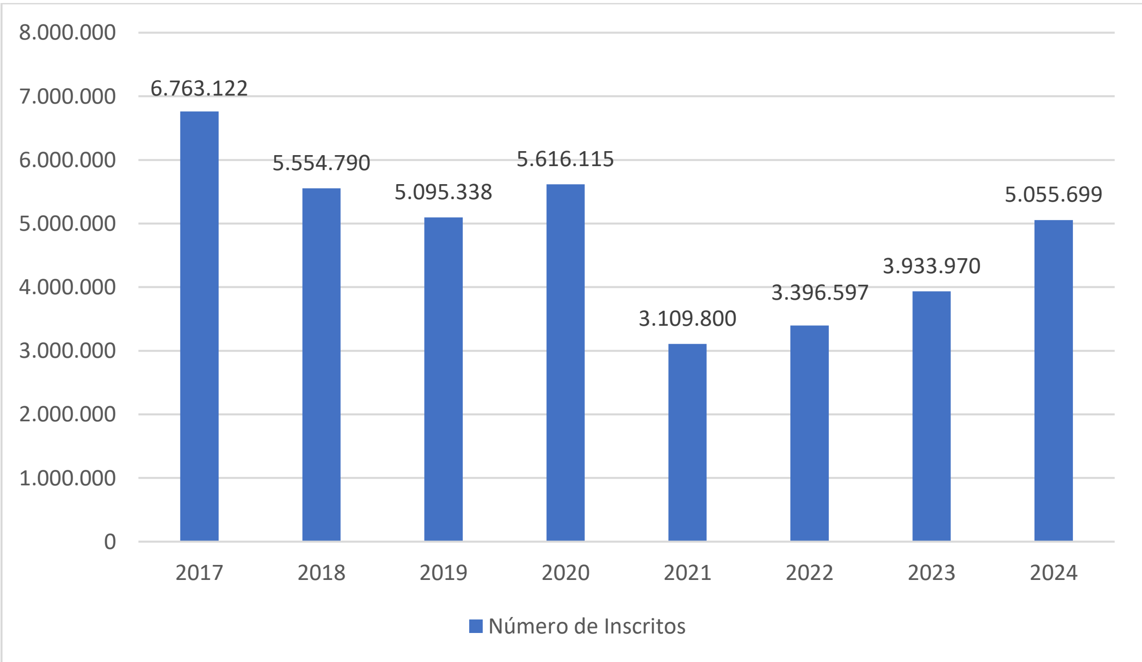
2.3.1.3 Adaptação e Modernização

Tendo em vista os dois dias consecutivos (sábado e domingo) que tornavam a prova bastante exaustiva e, considerando os estudantes sabatistas, religiosos que guardam o sábado, o MEC realizou uma consulta pública em janeiro de 2017, o qual o INEP optou por realizar as provas do ENEM em dois domingos consecutivos.

Sendo as provas de linguagens, ciências humanas e a redação no 1° dia de aplicação, com duração de 5h30min, e o 2° dia com as provas de ciências da natureza e suas tecnologias e matemática e suas tecnologias, com duração de 4h30min. As características da prova do ENEM supracitadas ainda se mantêm até os dias atuais.

Apesar da alteração que tornou o ENEM um pouco menos exaustivo, pela análise do Gráfico 03, a seguir, pode-se notar que houve uma queda significativa na quantidade de inscritos no exame, o qual pode estar atrelado a diversos fatores, entre eles podemos citar questões logísticas, tendo em mente que um estudante de localidades distantes precisaria se deslocar em dois domingos, aumentando assim os gastos com transportes e estadia. Além disso, essa desvalorização foi intensificada pela pandemia da Covid-19[1], que assolou o mundo em 2020, o que mostra uma queda considerável nas edições de 2021 e 2022.

Gráfico 03 – Número de inscritos no ENEM (2017 - 2024).



Fonte: O autor (2024).

Em 2019, com o objetivo de modernizar as provas do ENEM de forma gradual, o INEP anunciou o ENEM digital. Entretanto, devido aos altos custos que, segundo dados do MEC,

[1] A Covid-19 é uma infecção respiratória aguda causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, potencialmente grave, de elevada transmissibilidade e de distribuição global.

foram de aproximadamente R$ 860,00 por candidato e também, devido à baixa procura por parte dos estudantes, esse modelo de prova teve fim em 2022, voltando no ano seguinte apenas aos modelos de provas impressas.

Como uma tentativa de melhorar o rendimento dos estudantes do ensino médio, o governo federal instituiu o Programa Pé-de-Meia, regido pela lei nº 14.818, de 16 de janeiro de 2024 que dispõe sobre um incentivo financeiro-educacional, na modalidade de poupança, aos estudantes matriculados no ensino médio público. Tal programa trata, em seu art. 3°, sobre os requisitos, na forma de regulamento e, dentre eles, está a participação no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) para aqueles que frequentam o último ano do ensino médio público (Brasil, 2024). Isso pode ter influenciado no aumento do número de inscritos no exame em 2024, conforme observado no Gráfico 03.

2.3.2 Impacto do Enem como Política Pública

Desde sua criação, em 1998, o ENEM vem ganhando cada vez mais espaço como política pública no Brasil. Como destacado na seção anterior, inicialmente surgiu com a intenção de política de avaliação educacional e hoje funciona como um método de democratização ao acesso ao ensino superior.

Com o objetivo de compreender melhor os impactos do ENEM como política pública, desenvolvemos uma revisão de literatura, pois segundo Noronha e Ferreira (2000, p. 191) *apud* Silva (2023, p. 22),

> os trabalhos de revisão de literatura são estudos que analisam a produção bibliográfica em determinada área temática, dentro de um recorte de tempo, fornecendo uma visão geral ou um relatório do estado-da-arte sobre um tópico específico, evidenciando novas idéias (sic.), métodos, subtemas que têm recebido maior ou menor ênfase na literatura selecionada.

Dessa forma, realizamos uma análise detalhada dos trabalhos presentes no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). O levantamento foi realizado no período de 02 a 07 de julho de 2024 e teve o objetivo de identificar pesquisas que discutissem ENEM como política pública. A partir desse primeiro levantamento, obtivemos 81 trabalhos, distribuídos em 55 dissertações de mestrado e 11 teses de doutorado, que atendiam a esse critério.

Em seguida, foi feita uma filtragem dos trabalhos que tivessem apenas Educação como área de conhecimento, onde foram obtidos 15 trabalhos, sendo 9 (nove) dissertações de mestrado e 4 (quatro) teses de doutorado. Dos quais, ao observar o tema e ler o resumo dessas pesquisas, chegou-se à conclusão de que apenas 6 (seis) enquadravam-se na temática levantada nesta dissertação, restando 4 (quatro) dissertações e 2 (duas) teses, representadas no Quadro 01 a seguir, em ordem crescente do ano de publicação.

Quadro 01 – Seleção das pesquisas com temática a contribuir com o presente trabalho.

Nível	Autor/Ano	Título	Instituição
Tese	Pacheco (2013)	As metamorfoses do ENEM: de avaliação coadjuvante para protagonista chave das políticas públicas de acesso à Educação Superior.	PUC-SP
Dissertação	Mazzonetto (2014)	O ENEM como política pública de avaliação: construção e ou (des)construção do currículo escolar.	URI
Dissertação	Oliveira (2016)	Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM: caminhos e contradições.	PUC-PR
Dissertação	Hundertmarck (2017)	Políticas educacionais e ensino médio: O Exame Nacional do Ensino Médio em xeque!	UFSM
Tese	Almeida (2019)	Políticas de avaliação externa no ensino médio: o ENEM sob a perspectiva de discentes e docentes da escola pública.	UFU
Dissertação	Vargas (2021)	As políticas públicas para a educação superior no Brasil pós LDB/96: o ENEM, SISU, PROUNI e FIES e suas (des)continuidades.	URI

Fonte: O autor (2024).

Após uma análise minuciosa dos trabalhos mencionados, podemos perceber uma semelhança entre eles, principalmente no que tange aos principais objetivos das pesquisas e algumas referências utilizadas, pois foram trabalhos desenvolvidos com base na importância histórica e institucional do ENEM ao longo dos anos e sua aplicabilidade em contextos de igualdades sociais.

Após uma análise nas referências dos trabalhos, identificamos diversos autores em comum, dos quais consideraremos apenas os autores que foram referenciados por, pelo menos, 66% dos trabalhos, ou seja 4 (quatro) ou mais trabalhos. Dessa forma, observe no Quadro 02 com mais detalhes sobre cada uma dessas referências.

Quadro 02 – Trabalhos referenciados pelos autores abordados.

Autores	Citados por:	Quantidade
CIAVATTA, Maria.	Pacheco (2013), Mazzonetto (2014), Hundertmarck (2017) e Almeida (2019)	2 teses e 2 dissertações.
FRIGOTTO, Gaudêncio.	Pacheco (2013), Mazzonetto (2014), Hundertmarck (2017) e Almeida (2019)	2 teses e 2 dissertações.
MARK, Karl.	Pacheco (2013), Mazzonetto (2014), Almeida (2019) e Vargas (2021)	2 teses e 2 dissertações.
RAMOS, Marise Nogueira.	Pacheco (2013), Mazzonetto (2014), Hundertmarck (2016) e Almeida (2019)	2 teses e 2 dissertações.
ROMANELLI, Otaiza Oliveira.	Pacheco (2013), Mazzonetto (2014), Oliveira (2016) e Vargas (2021)	1 tese e 3 dissertações
SAVIANI, Dermeval.	Pacheco (2013), Mazzonetto (2014), Oliveira (2016), Hundertmarck (2017), Almeida (2019) e Vargas (2021)	Todos os trabalhos. (2 teses e 4 dissertações)

Fonte: O autor (2024)

Dessa forma, após uma nova análise nos trabalhos citados, observamos que Dermeval Saviani foi usado como referência em todos os trabalhos, o que traz uma relevância para nossa proposta. Ao observar suas pesquisas, notamos que os trabalhos se baseiam na Pedagogia Histórico-Crítica, do qual ele é o precursor, onde defende que a educação deve ser um instrumento para a transformação social e a escola deve garantir o acesso aos saberes sistematizados.

Em outras palavras, a educação funciona como um instrumento de luta para com as desigualdades sociais, onde essa transmissão de conhecimento deve atuar como meio de transformação social, isso é comentado por Saviani (2008) quando destaca que,

> Do ponto de vista prático, trata-se de retomar vigorosamente a luta contra a seletividade, a discriminação e o rebaixamento do ensino das camadas populares. Lutar contra a marginalidade por meio da escola significa engajar-se no esforço para garantir aos trabalhadores um ensino da melhor qualidade

> possível nas condições históricas atuais. O papel de luta de uma teoria crítica da educação é dar substância concreta a essa bandeira de luta de modo a evitar que ela seja apropriada e articulada com os interesses dominantes. (Saviani, 2008, p. 26).

Quando estruturada para promover a democratização social, a escola assume um importante papel na educação como instrumento de transformação social, destacando-se por sua capacidade de promover a equidade e a inclusão.

Para isso, faz-se necessário políticas públicas de acesso ao ensino superior que garanta a população menos favorecida seus direitos de aperfeiçoamento social e profissional. Assim, analisaremos a problemática, os principais objetivos e a finalidade de cada trabalho com o intuito de discutir como funciona o acesso ao ensino superior e se, de fato, estão promovendo melhorias para a classe social mais vulnerável.

A tese de João Alves Pacheco, publicada no ano de 2013 pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), abordou como uma de suas problemática: “O ENEM tem permitido ou facilitado o ingresso de estudantes de baixa renda oriundos de escola pública em Instituições Federais de Ensino Superior (IFES)?”, teve como principal finalidade avaliar o que caracterizou o ENEM como um mecanismo de avaliação de grande relevância no final do século XX até sua reestruturação em 2009. Para isso, foi adotado como principal objetivo, investigar a democratização do ENEM como mecanismo de acesso ao ensino superior e, se tem favorecido o ingresso de estudantes de escolas públicas. Dessa forma, foi feita uma pesquisa de campo na Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP) para caracterização dos alunos que ingressaram na universidade nos anos de 2011 e 2012. No qual ele destaca que, apesar das limitações metodológicas da pesquisa,

> o trabalho permitiu obtermos algumas inferências acerca dos benefícios do ENEM na “democratização das oportunidades de concorrência às vagas federais de ensino superior”. No que tange às questões que motivaram o presente trabalho, os resultados indicam que não obstante observarmos indícios dos efeitos positivos da utilização do ENEM para o grupo pesquisado, eles não nos afiguram duradouros, pois na medida em que o exame amplia a participação de mais candidatos, também aguçará as desigualdades socioeconômicas e culturais observadas no *grupo vulnerável.* (Pacheco, 2013, p. 294).

Essa análise da tese de Pacheco levanta uma reflexão crítica sobre a eficácia do ENEM como uma política pública que busca promover uma equidade de acesso ao ensino superior, considerando os diferentes contextos sociais e econômicos das desigualdades regionais do país.

A dissertação de Clenio Vianei Mazzonetto, publicada no ano de 2014 pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI), teve como problemática: “Investigar se a proposta do ENEM, como política pública de avaliação/construção do currículo escolar, propicia o processo de emancipação ou apenas reproduz conhecimento sem preocupação com a formação geral do sujeito?”, abordando sobre uma análise das Políticas Públicas de Avaliação do Ensino Médio e seu impacto nos currículos do ensino médio. Ele entende que,

> As políticas públicas têm como foco norteador responder as demandas principalmente dos setores marginalizados da sociedade, considerados como mais vulneráveis. Essas demandas geralmente são interpretadas por aqueles que ocupam o poder, mas acabam sendo influenciados por uma agenda, que se cria na sociedade civil, que ocorrem através de pressões e mobilizações sociais. (Mazzonetto, 2014, p. 78).

Assim, seu estudo se baseou em investigar a decorrência do currículo escolar de três escolas de ensino médio e o quanto elas se adaptaram ao ENEM como política pública, em seguida, ele conclui que “as escolas apenas estão treinando os alunos para responderem as questões das provas, e não uma mudança mais profunda. Fica difícil falar em autonomia, em protagonismo, em reflexão do mundo vivido pelo educando sem uma mudança curricular” (Mazzonetto, 2014, p. 161).

A dissertação de Geisa Melo de Oliveira, publicada no ano de 2016 pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR), teve como problemática: “É possível afirmar que o ENEM mantém, no contexto atual, os seus objetivos de avaliação do estudante do ensino médio e de acesso ao ensino superior?”. Teve como principal propósito analisar os dados do ENEM obtidos a partir dos exames de 2009 a 2013 com uma breve comparação entre as escolas públicas e privadas. A análise revelou uma certa desigualdade, evidenciado pelas maiores notas no exame serem oriundas de escolas privadas e, as dez piores notas serem de escolas públicas. Ela ainda enfatiza que,

> Não houve nenhuma instituição privada de ensino figurando entre as últimas posições do ENEM. Também não houve nenhuma instituição Federal no ranking das dez piores em nenhuma das edições analisadas. Tais constatações corroboram com a percepção de que, de fato, a pré-seleção dos ingressantes no ensino médio favorece uma melhor colocação no ranking do ENEM. (Oliveira, 2016, p. 173).

Entretanto, ela não deixa de ressaltar o mérito do MEC e do INEP na realização das provas do ENEM que vem tentando aprimorar a qualidade do exame. A cada nova edição, são implementados alguns ajustes, visando uma melhor inclusão, ressaltando a importância desse exame como uma política pública que tenta democratizar, cada vez mais, o acesso ao ensino superior.

A dissertação de Bruno Sartuni Hundertmarck, publicada no ano de 2017 pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), teve como problemática: "Como o referencial teórico-metodológico do ENEM pode contribuir para qualificar a prática pedagógica do Ensino Médio de uma escola da rede privada de Santa Maria – RS?". Objetivou analisar como o ENEM pode contribuir para a proposta pedagógica da escola, tendo em vista que a mesma estava passando por um processo de transição do modelo curricular do vestibular para o ENEM, onde ele realça que,

> as mudanças propostas pela LDB/96, poucas coisas foram efetivamente modificadas no contexto escolar, e mesmo com o caráter indutivo sobre a reforma do Ensino Médio, a proposta do Enem é vista por muitas escolas com indiferença. (...) os motivos que estão imbricados nesse posicionamento escolar são que os professores não se sentem questionados pelo resultado do Enem, e o fato dos docentes possuírem um conhecimento muito superficial acerca do exame. (Reis, 2012 *apud* Hundertmarck, 2017, p. 68)

Outro ponto levantado com a leitura desse trabalho foi o grave problema de a evasão escolar prejudicar o desempenho dos estudantes de escolas públicas nas provas do ENEM. Dessa forma, esse problema tende a agravar as desigualdades educacionais que dificultam o retorno do estudante aos sistemas educacionais, ao processo de aprendizagem ou ao acesso a cursos preparatórios, impossibilitando, na maioria dos casos, o seu acesso à cursos superiores.

A tese de Vitor Sergio Almeida, publicada no ano de 2019 pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU), teve como principal problemática: "quais as mediações da lógica do Estado Avaliador contemporâneo com a indução e implementação de políticas de avaliação externa do Ensino Médio?". O estudo buscou analisar as visões dos discentes e docentes de escolas públicas sobre a qualidade do ENEM como Política Pública de Avaliação. Para isso, foram analisadas 23 das 29 escolas de ensino médio da cidade de Uberlândia. Onde ele menciona que,

> O Exame está inserido nas atividades da escola, o que é percebido pelos próprios docentes, mas, não é interiorizado, ou seja, discutido e utilizado de modo crítico afim de gerar ações formativas nas práticas escolares. Constata-se que a materialização exterior alcançada pelo Enem se dá mais pela sua função de ingresso ao Ensino Superior. (Almeida, 2019, p. 225).

A partir do que foi dito, percebe-se que o ENEM é visto como um método de obtenção de resultados positivos para se ingressar no ensino superior, deixando de impulsionar ações para beneficiar as políticas e práticas do ambiente escolar.

Por fim, a dissertação de Ariele Souza de Vargas, publicada no ano de 2021 pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI), teve como problemática: "quais as políticas públicas para a Educação Superior que, em âmbito federal, tiveram, de fato, continuidade no Brasil após a LDB/96, e quais os fundamentos que motivaram as suas permanências e/ou descontinuidades?" (Vargas, p. 21). Ela fez um estudo bibliográfico das políticas públicas de avaliação e programas e ingresso no ensino superior por meio do ENEM.

Dessa forma, em comum com os trabalhos já mencionados, ela ressalta que, o objetivo inicial do ENEM, "que visava apenas uma avaliação do Ensino foi desviado, revelando um caráter excludente presente no exame, marcado pela mesma desigualdade de oportunidades que os vestibulares."

A partir da análise desses trabalhos constatou-se que o tema "ENEM como política pública" ainda permanece complexo, pois envolve diversas desigualdades no âmbito socioeconômico e carece de uma abordagem efetiva de equidade. Sua proposta inicial de democratizar o acesso ao ensino superior não é tão evidenciado por pesquisas que mostram diferença entre ingressos de determinados grupos sociais.

Outro dado que foi abordado durante os trabalhos engloba a dificuldade do processo de avaliação do ENEM a partir do momento em que o MEC anunciou, em 2017, que o INEP deixaria de divulgar o ranking das melhores e piores escolas avaliadas em todo o país, comprometendo o avanço de novas políticas públicas.

Todos os fatos aqui levantados evidenciam a necessidade de repensar o papel do ENEM como meio de democratização do acesso ao ensino superior e sua eficiência como exame de avaliação dos estudantes do ensino médio, principalmente pelas barreiras impostas pelos contextos sociais dos menos favorecidos.

Os trabalhos apresentados destacam com clareza os principais problemas do ENEM como política pública de avaliação e ingresso no ensino superior, principalmente dos estudantes de escolas públicas; por outro lado, não se aprofundam em possíveis soluções para a melhoria desse ingresso dos estudantes menos privilegiados, em outras palavras, não apresentam sugestões mais concretas de uma possível reformulação do ENEM.

Alguns dos trabalhos mencionados não apresentam dados práticos da conexão do ENEM com as políticas públicas de acesso ao ensino superior, limitando-se a análises teóricas sem aprofundar-se em como a avaliação impacta efetivamente a democratização do ensino. Além de existir uma carência de propostas concretas para lidar com a desigualdade socioeconômica dos candidatos.

De acordo com o que foi discutido, o presente trabalho tem seu principal foco em uma ideia de aperfeiçoamento dos estudantes de escolas públicas visando facilitar a visualização e o manuseio dos estudantes na interpretação de problemas envolvendo probabilidade e, dessa forma, poder garantir o acesso dos estudantes mais vulneráveis a uma educação pública de qualidade, pois isso é fundamental para as transformações sociais.

3 TRAJETÓRIA HISTÓRICA E PROBLEMAS CLÁSSICOS DA PROBABILIDADE

Este capítulo tem como objetivo estabelecer um panorama sobre a história da Probabilidade, relacionando seu surgimento com aplicações práticas envolvendo problemas clássicos. Para isso, inicialmente, são apresentados um retrospecto histórico, destacando o possível surgimento e desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, desde seus primórdios nos jogos de azar até seu amadurecimento como área formal da Matemática.

Em seguida, serão apresentados alguns problema clássicos de Probabilidade que marcaram a história da Matemática, impulsionaram debates entre grandes estudiosos e contribuíram para o desenvolvimento de conceitos fundamentais dessa área.

3.1 HISTÓRIA DA PROBABILIDADE A PARTIR DOS JOGOS DE AZAR

A possibilidade de ocorrência de determinados eventos é tão antiga quanto as primeiras civilizações humanas. Desde os primórdios, povos antigos já precisavam lidar com a incerteza, principalmente em relação a fenômenos naturais, como a chuva, essencialmente usada na agricultura. Assim, mesmo que de forma empírica, eram obrigados a fazer previsões com base na observação e na experiência acumulada, buscando aumentar as chances de sucesso em suas plantações.

Com o passar do tempo, essa necessidade de antecipar determinados eventos incertos foi dando origem a reflexões mais aprofundadas, até culminar no desenvolvimento formal da teoria das probabilidades. Essa teoria encontrou grande impulso nos estudos relacionados aos jogos de azar, onde a análise das chances se tornou fundamental para ganhos próprios. A partir daí, a probabilidade passou a ser estudada com maior rigor matemático, tornando-se uma ferramenta essencial em diversas áreas do conhecimento, como estatística, economia, ciências naturais e até mesmo na tomada de decisões do cotidiano.

Segundo IMPA (2019) "a teoria matemática da probabilidade só começou no século 16. Os primeiros avanços foram obtidos por um dos personagens mais interessantes de seu tempo, o italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576), e a motivação era prática: como ganhar dinheiro com jogos de azar?"

O matemático italiano Girolamo Cardano, no século XVI, iniciou seus estudos sobre a teoria dos jogos de azar inicialmente apenas para obter vantagens pessoais e lucros com suas apostas. Entretanto, seus esforços excederam em muito o campo dos jogos, tendo contribuições pioneiras para a consolidação da Teoria da Probabilidade que conhecemos hoje.

Apesar disso, desde a antiguidade que se têm evidências de objetos semelhantes a dados que eram utilizados por civilizações, por volta de 3000 a.C. Esses objetos eram feitos de ossos, pedras ou marfim e serviam tanto para fins religiosos quanto para entretenimento. Um dos exemplos mais antigos é o uso de "astrágalos", pequenos ossos do tornozelo de animais, que eram lançados como se fossem dados, com cada face representando um valor. Veja a Figura 01.

Figura 01 – Possíveis dados criados a partir de ossos de “juntas”.

Fonte: <https://www.terra.com.br/byte/estes-dados-de-osso-eram-usados-em-rituais-ha-2300-anos-em-israel,b56a322fbf3579b9b031e60d2bb2168eyhwrpv8z.html>. Acesso em 22 de mai. 2025.

Segundo mencionado por Viali (2008, p. 144) *apud* Silva (2020, p. 16) “um astrágalo tem seis lados, mas só quatro deles são estáveis o suficiente para permitir que o osso se apoie sobre eles. Devido à anatomia do osso, as probabilidades de obter cada um dos lados em um lançamento são de aproximadamente 39%, 37%, 12% e 12%”.

Com o tempo, os dados foram se aprimorando em seu formato e função, tornando-se objetos regulares com faces numeradas e com igual probabilidade em cada face, como conhecemos hoje. Seu uso foi essencial para o avanço da compreensão da probabilidade, servindo como uma ponte entre a curiosidade humana e o desenvolvimento do pensamento estatístico.

Apesar de seu papel fundamental no desenvolvimento da probabilidade, os dados também estiveram historicamente ligados a práticas de entretenimento, especialmente nos jogos de azar. Essa função dos dados acabou por coloca-los no centro de discussões mais amplas sobre moralidade, legalidade e economia, especialmente quando seu uso se estende para além do campo acadêmico e adentra o universo das apostas e cassinos.

Os jogos de azar são proibidos no Brasil desde 1941, conforme estabelecido pela Lei das Contravenções Penais (Lei n° 3.688/41), que considera essa prática uma infração passível de punição. Entretanto, ao longo dos anos surgiram diversos debates a respeito dessa proibição, principalmente pelo fato do seu enorme potencial econômico. Como consequência disso, a Lei n° 12.756, de 12 de dezembro de 2018 autorizou a quota fixa, onde o apostador sabe previamente quando pode ganhar. Essa liberação permitiu a entrada das famosas *bets* no Brasil, muitas delas operando no exterior para fugir de ações regulatórias.

Com essa liberação, vários modelos de jogos também passaram a surgir, como o famoso "Tigrinho", cassinos online e as rifas virtuais, que se espalharam por meio das redes sociais, muitas vezes sem regulamentação adequada. O que evidencia um processo de flexibilidade desse mercado de apostas no Brasil, ainda que tenha surgido um marco regulatório a partir da Lei da Regulamentação das *bets* (Lei n° 14.790/23).

Embora exista a regulamentação, esse mercado gera grandes impactos sociais e econômicos na nossa realidade, como evidenciado por um relatório do Banco Itaú publicado em agosto de 2024, que destaca o crescimento das casas de apostas online devido a facilidade de acesso e as promessas de ganhos rápidos, o que atrai um grande número de brasileiros, onde estima-se que as apostas, no acumulativo de 12 meses até junho de 2024, corresponderam ao equivalente a 0,2% do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil, totalizando R$ 23,9 bilhões de reais.

Cardano, em 1663, publicou a primeira obra que tratava sobre os jogos de azar, seu livro intitulado *De Ludo Aleae* (Sobre os jogos de azar), que funcionava mais como um manual para jogadores de jogos de azar do que apropriadamente dito um livro sobre Probabilidade. Alguns anos depois foi-se aprimorando o conceito da Teoria da Probabilidade, onde segundo Morgado (2016),

> a Teoria das Probabilidades originou-se com Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), devido à curiosidade de um cavalheiro, o Chevalier de Méré, jogador apaixonado, que em cartas discutiu com Pascal problemas relacionados à probabilidade de ganhar em certo jogo de cartas" (Morgado, 2016, p. 3).

Ainda segundo Morgado (2016, p. 5) com o avanço dos estudos da teoria dos jogos de azar "percebeu-se imediatamente a utilidade da Teoria das Probabilidades para estudar situações como taxa de mortalidade, prêmios de seguros [...], impostos, doenças, condenações, etc., organizadas pelos governos que viram logo o poder deste instrumento de observação social".

A partir disso, grandes nomes da Matemática passaram a se dedicar ao aprofundamento e à estruturação da Teoria da Probabilidade. Entre eles, destaca-se Christian Huygens (1629–1695), considerado um dos pioneiros ao publicar o primeiro tratado formal sobre o assunto, intitulado *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Sobre os Raciocínios no Jogo de Azar). Posteriormente, Jakob Bernoulli (1655–1705), com sua obra *Ars Conjectandi*, definiu importantes fundamentos teóricos, como a Lei dos Grandes Números. Leonard Euler (1707–1783) também contribuiu significativamente ao aplicar conceitos probabilísticos em diferentes áreas da Matemática. Pierre-Simon Laplace (1749–1827), por sua vez, ampliou esses estudos com seu trabalho *Théorie Analytique des Probabilités*, no qual desenvolveu ferramentas que ainda hoje são bastante utilizadas. Assim, ao longo dos séculos XVII e XVIII, esses e outros estudiosos construíram as bases da Teoria da Probabilidade moderna, transformando-a nesse campo matemático que conhecemos hoje.

3.2 PROBLEMAS FAMOSOS DE PROBABILIDADE

Nesta seção, serão apresentados alguns dos mais famosos e intrigantes problemas do campo da Probabilidade, que desafiaram a lógica matemática de estudiosos ao longo da história. Esses problemas, além de contribuírem significativamente para o desenvolvimento teórico da área, também desempenham um papel fundamental no ensino da matemática, por permitirem a análise de situações paradoxais, a formulação de estratégias e a aplicação prática de conceitos probabilísticos. Será comentado brevemente a respeito dos seguintes problemas: *problema de Monty Hall*, *problema da Agulha de Buffon* e *problema do Macarrão*.

3.2.1 Problema de Monty Hall

Este impressionante problema do campo da probabilidade, também chamado de Paradoxo de Monty Hall, foi apresentado pela primeira vez em um programa de televisão americano denominado *Lets Make a Deal* (em tradução livre, "Vamos Fazer um Acordo") transmitido entre 1963 e 1971. O programa foi produzido e apresentado por Monty Hall[2], tendo o problema sido nomeado em sua homenagem. O mesmo problema foi popularizado quando apresentado no filme *Quebrando a Banca* (2008), dirigido por Robert Luketic, no qual o professor Mickey Rosa questiona uma determinada turma sobre o problema, surpreendentemente respondida corretamente pelo aluno Ben Campbell.

O problema trata de algo aparentemente simples, mas que provoca reações paradoxais, pois a sua solução contraria a intuição inicial da maioria das pessoas. Entretanto, à medida que se aprofunda na análise, percebe-se a presença de elementos da teoria dos jogos. Como ressalta Miranda (2024) quando diz que,

> Este é um problema que por natureza própria acaba indo além de sua abordagem em Probabilidade, elencando-se assim na compreensão da teoria de jogos, onde podemos observar o quanto a escolha de uma estratégia para abordagem do

[2] Monty Hall é o nome artístico do apresentador canadense Monte Halparin.

> problema poderá ou não facilitar o jogador, potencializando sua probabilidade de vitória (Miranda, 2024, p. 38).

Para compreender o problema imagine o seguinte: diante de você há três portas, numeradas de 1 a 3. Atrás de uma delas há um prêmio, enquanto as outras duas estão vazias. Você escolhe uma porta, o apresentador, que sabe onde está o prêmio, abre uma das portas que você não escolheu, relevando que ela está vazia. Então o apresentador questiona: "Você gostaria de trocar de porta?". Nesse momento, qual seria a melhor estratégia: manter a porta ou trocá-la?

Intuitivamente, muitas pessoas acreditariam que o apresentador está tentando manipulá-las ao sugerir a troca, e optam por manter a porta escolhida. Outra interpretação comum é pensar que, como restam duas portas, há uma probabilidade de 50% em cada, o que torna indiferente trocar ou não. No entanto, essa conclusão está equivocada.

Considere, por exemplo, que o prêmio está na porta número 3, ao escolher uma porta e mantê-la até o final do programa, o participante tem uma probabilidade de 1/3. Entretanto, se o participante escolher inicialmente a porta 1, o apresentador abrirá a porta 2 (vazia). Ao trocar, o participante passaria para a porta 3, a correta. O mesmo ocorre se a escolha inicial for a porta 2: o apresentador abrirá a porta 1 (vazia), e a troca levaria novamente à porta 3, a correta. Ou seja, se a primeira escolha for incorreta (o que ocorre em 2 de 3 casos), a troca levará à vitória.

Dessa forma, a probabilidade de ganhar mantendo a escolha inicial é de 1/3, enquanto a probabilidade de ganhar ao trocar de porta é de 2/3. Portanto, a melhor estratégia, contra a intuição inicial, é sempre trocar de porta, pois essa decisão duplica as chances de acerto.

Portanto, este Problema de Monty Hall é um excelente exemplo de como a instituição pode falhar em contexto envolvendo probabilidade. Ele revela a importância da análise cuidadosa dos dados e das condições do problema antes de tomar uma decisão e, ainda ensina uma importante lição sobre o raciocínio lógico e a tomada de decisões com base em incertezas.

3.2.2 Problema da Agulha de Buffon

No ano de 1777, o matemático francês Georges-Louis Leclerc, mais conhecido como Conde de Buffon (1707-1788), apresentou um problema envolvendo o lançamento de agulhas sobre uma superfície marcada com linhas paralelas. Esse problema mais tarde ficaria conhecido como "Problema da Agulha de Buffon", sendo considerado como umas das primeiras conexões entre probabilidade e geometria. De acordo com Silva (2014, p. 9) "o referido problema é considerado um marco inicial para o estudo da Probabilidade Geométrica; um novo ramo da teoria das probabilidades envolvendo conceitos geométricos".

A proposta de Buffon trouxe um olhar inovador para a matemática da época, ao demonstrar que conceitos aparentemente distintos, como probabilidade e geometria, podiam ser unidos em um mesmo problema. Essa aproximação entre duas áreas da matemática, que à primeira vista pareciam desconectadas, foi surpreendente e abriu caminho para uma nova vertente de estudos probabilísticos: a probabilidade geométrica.

O enunciado do problema diz que: imagine uma superfície plana com linhas paralelas traçadas a uma distância d umas das outras (semelhante a cerâmicas em um piso), e uma agulha de comprimento l, onde $l \leq d$. Ao lançar essa agulha aleatoriamente sobre a superfície, qual é a probabilidade de que a agulha cruze uma linha?

O que torna esse problema ainda mais fascinante é o fato de sua solução envolver diretamente o número π, conectando de forma surpreendente a probabilidade com a geometria. Considerando os dados mencionados acima, a probabilidade de que a agulha cruze uma linha é de $\frac{2l}{\pi d}$.

Essa expressão revela como, a partir de uma situação aparentemente simples, surge um número fundamental da geometria, o número π. Essa conexão inesperada é um dos aspectos que tornam o Problema da Agulha de Buffon um marco histórico da probabilidade geométrica e uma porta de entrada para o cálculo integral e métodos experimentais para estimar o π.

Isso ainda é salientado por Silva (2014) quando diz que "é possível estimar de forma empírica o valor de π. Para tanto, basta realizar o experimento proposto por Buffon utilizando-se convenientemente uma agulha (ou um objeto retilíneo) com comprimento igual à distância entre as retas paralelas" (Silva, 2014, p. 69).

Como esta seção tem o objetivo de apresentar curiosidades envolvendo problemas clássicos da probabilidade, optamos por não demonstrar formalmente o resultado neste momento. No entanto, destacamos que essa relação entre o acaso e uma constante matemática universal é um excelente exemplo de como a matemática pode surpreender e incentivar o pensamento científico.

3.2.3 Problema do Macarrão

O problema do macarrão foi apresentado em 1994, durante um curso de aperfeiçoamento para professores no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). A atividade foi conduzida pelo professor Eduardo Wagner, conhecido por seu trabalho na área da

Educação Matemática utilizando abordagens criativas para tratar de conceitos abstratos da matemática.

Durante a palestra, o professor distribuiu macarrão aos participantes e propôs que eles quebrassem o macarrão em três pedaços. Qual a probabilidade de os três pedaços formarem um triângulo? Essa simples pergunta traz consigo um problema clássico da probabilidade geométrica: o problema do triângulo aleatório.

Apesar de sua aparência simples, este problema se destaca por um raciocínio matemático envolvente e tem despertado o interesse de estudiosos ao longo dos anos. Ao respondê-lo conclui-se que a probabilidade de formar um triângulo com três segmentos repartidos de forma totalmente aleatória é de $\frac{1}{4}$.

O aspecto mais intrigante e paradoxal do problema está na diferença entre a expectativa intuitiva das pessoas e o resultado real. Quando executados por indivíduos quebrando o macarrão manualmente, observa-se que os resultados tendem a se afastar da probabilidade teórica esperada. Isso ocorre porque as pessoas, conscientemente ou não, tendem a quebrar o macarrão em partes de tamanhos semelhantes, o que aumenta artificialmente a chance de formar um triângulo, já que lados mais semelhantes favorecem o cumprimento do critério de formação de um triângulo. Isso é salientado por Wagner (1997) *apud* Kayzer *et. al* (2014, p. 4) quando diz que "a divisão realizada no experimento não ocorreu de forma aleatória, indicando a tendência pessoal em dividir o macarrão em partes aproximadamente iguais, além de abordar questões relacionadas ao número de amostras e frequência".

De forma análoga ao Problema da Agulha de Buffon, optamos por não demonstrar este problema, pois demandam de um aprofundamento algébrico e geométrico que extrapolam o objetivo da presente seção. Tal omissão não compromete a compreensão conceitual do problema ou ao entendimento de suas contribuições para o estudo da probabilidade geométrica.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Sabendo das dificuldades encontradas pelos alunos nas resoluções de problemas envolvendo probabilidade, este trabalho visa abordar de maneira didática algumas questões do ENEM com a finalidade de proporcionar aos alunos a oportunidade de desenvolver soluções de maneira mais ágil e assimilar o funcionamento das questões com uma maior profundidade, facilitando a relação com esse tema nos exames posteriores.

4.1 DESCRIÇÃO DA PROPOSTA

A pesquisa tem cunho qualitativo, e se enquadra, em relação a sua natureza, como uma pesquisa aplicada, pois segundo Gil (2008, p. 27) esse tipo de investigação “tem como característica fundamental o interesse na aplicação, utilização e consequências práticas dos conhecimentos”.

A pesquisa ainda tem objetivo de investigação exploratório, pois ainda segundo Gil (2008, p. 27) “têm como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e idéias (sic.), tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores”.

Quanto aos procedimentos e métodos, a pesquisa ainda se destaca como pesquisa-ação, pois segundo Thiollent (1988) *apud* Gerhardt e Silveira (2009, p. 42) “é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo”.

O presente trabalho foi aplicado na Escola Estadual Francisco de Assis da Silva, localizada no município de Serrinha dos Pintos no Alto-Oeste Potiguar, no estado do Rio Grande do Norte. A referida instituição faz parte da 14ª Diretoria Regional de Educação e Cultura (DIREC) que, por sua vez, faz parte da Secretaria de Estado da Educação, da Cultura, do Esporte e do Lazer (SEEC) do Rio Grande do Norte. Essa estrutura organizacional tem como objetivo garantir o acompanhamento, a execução e a implementação das políticas públicas educacionais nas unidades escolares da rede estadual.

A intervenção teve como público-alvo os alunos de uma turma do 3° ano do Ensino Médio. O desenvolvimento da proposta ocorreu em diversas aulas na disciplina de Matemática, sendo divididas da seguinte forma: 02 aulas para aplicação de um questionário, que teve a finalidade de verificar o conhecimento prévios dos alunos e 06 aulas para abordagem das questões por meio de material concreto.

Para a aplicação da pesquisa, os alunos maiores de idade assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), enquanto os menores de idade assinaram um Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE), com a devida autorização de seus responsáveis legais, que também assinaram um TCLE. Além disso, o diretor da escola em questão autorizou formalmente a realização da pesquisa.

A pesquisa foi documentada de forma detalhada por meio de um diário de bordo, no qual foram registradas observações, reflexões e aspectos relevantes do desenvolvimento das atividades. Além disso, a aula foi gravada em áudio, permitindo a captura dos relatos e interações dos alunos. Esses registros serviram como material de apoio para futuras análises, possibilitando a retomada de informações importantes e garantindo maior precisão na interpretação dos dados coletados.

Discutiremos a seguir o passo a passo da aplicação de toda metodologia abordada durante o trabalho.

4.2 SELEÇÃO DAS QUESTÕES

Inicialmente foi feito um levantamento de todas as questões de probabilidade no ENEM, das edições de 2009 a 2024, aplicado regularmente e de cor amarela, quando ocorreu a alteração mais significativa. Sabendo ainda que, a prova de Matemática ocorre no 2° dia de aplicação, constituindo-se de 45 questões, compreendidas no intervalo fechado de 136 a 190.

A partir da análise feita nas provas, constatou-se que em todas as provas existiam questões de probabilidade, obtendo uma média[3] de quase 3 (três) questões por prova, como pode ser verificada na Tabela 01.

Tabela 01 – Questões de probabilidade nas provas do ENEM de 2009 a 2023.

Ano do ENEM	Questões de Probabilidade.
2009	138, 146 e 171
2010	156 e 173
2011	159, 166 e 167
2012	138, 164 e 174
2013	141, 155, 175 e 176
2014	152 e 162
2015	149, 158, 175 e 180
2016	147
2017	142, 155 e 171
2018	140, 163, 173, 176 e 180
2019	164 e 176

[3] Média exata: 2,8125.

2020	141, 160 e 163
2021	177
2022	152 e 162
2023	149, 157, 158 e 166
2024	140, 149 e 161

Fonte: O autor (2025).

Na sequência, foi realizada uma análise minuciosa das questões que melhor se enquadravam com a proposta. Para essa análise, foram considerados os seguintes critérios: *Nível de dificuldade* e *Contextualização prática e pensamento crítico.* Cada um desses aspectos foi avaliado de forma minuciosa, a fim de garantir que as questões escolhidas contribuíssem de maneira efetiva para o desenvolvimento das competências e habilidades previstas no currículo. A seguir, comentaremos detalhadamente cada um desses critérios, destacando sua relevância no processo de escolha.

4.2.1 Nível de dificuldade

Para essa etapa foi considerado o número de acertos dos candidatos de cada questão de probabilidade que incluía na prova. Para isso, se utilizou como base o trabalho de Pontes (2019) que caracteriza os erros das questões de estatística e probabilidade da prova de matemática do ENEM de 2013 a 2016 dos alunos que ingressaram na primeira chamada na UFRN em 2017.

Também utilizamos como base de dados o site (https://www.zbs.com.br/enem) que utiliza dados públicos do INEP para organizar estatísticas a respeito do ENEM, incluindo o número de acerto das questões dos anos de 2016 a 2023. Além disso, até a presente data, não foi possível localizar os dados referentes ao ENEM de 2024.

Os dados dos ENEM de 2009 a 2012 não foram possíveis obter, fazendo com que o trabalho seja desenvolvido tendo como base as questões dos anos de 2013 a 2023. Acreditamos que seja uma margem sólida para se obter um resultado satisfatório da pesquisa.

Vale ressaltar ainda que, o ENEM utiliza como método de avaliação a Teoria da Resposta ao Item (TRI) que considera uma pontuação maior para as questões que tiverem o menor número de acerto, pois alguns modelos clássicos de avaliação tem certa dificuldade de avaliar um maior número de indivíduos submetidos à um mesmo teste, Castro (2017) fala a respeito do TRI em seu trabalho quando diz que,

> A proposta da TRI para resolver este problema (e alguns outros) é partir de um modelo teórico baseado nos itens e não nos testes. Considera-se que a probabilidade de um indivíduo dar uma determinada resposta a um determinado item depende apenas de certas características intrínsecas do

> indivíduo, chamadas traços latentes, e do próprio item, e não dos outros itens do teste, ou da ordem em que os itens são apresentados. (Castro, 2017, p. 8)

Além do TRI, também foi considerado o processo de avaliação de Núñez (2018) que divide o grau de dificuldade de um problema objetivo baseado em 5 (cinco) categorias de desempenho, conforme o índice de acerto dos estudantes, sendo elas: Muito Baixo, Baixo, Médio, Alto e Muito Alto. Com a seguinte margem de acerto:

Tabela 02 – Subcategorias do Índice de Desempenho segundo Núñez (2018).

Índice de Desempenho	% de acerto
Muito Alto	75 – 100
Alto	55 – 74
Médio	45 – 54
Baixo	25 – 44
Muito Baixo	0 – 24

Fonte: UFRN – COMPERVE (2017). Elaborado pelo autor (2024).

Dessa forma, utilizando os processos de avaliações mencionados, elaboramos o grau de dificuldade das questões analisando o percentual de acertos em cada questão e, às dividimos em três categorias da seguinte forma:

1) Até 25% de acertos a questão será considerada difícil.
2) No intervalo entre 25.1% a 55.0% a questão será considerada mediana.
3) Acima de 55.1% a questão será considerada fácil.

O trabalho de Pontes (2019) aborda as questões de estatística e probabilidade que apresentam o menor rendimento, para isso ele considerou que as questões com percentual de acerto abaixo de 25% sejam consideradas como "muito baixo desempenho", também com base na abordagem pedagógica de Núñez (2017). Uma abordagem um pouco diferente da que utilizamos, pois dividimos em 3 (três) categorias.

As questões de probabilidade que não foram mencionadas de forma específica serão classificadas como de nível mediano, uma vez que apresentaram um índice de acerto superior a 25%, como citado no decorrer do trabalho. Para uma melhor compreensão desses resultados, observe a Tabela 03, na qual está detalhado o percentual de acerto obtido, com base na análise realizada por Pontes (2019), que serviu de referência para esta investigação.

Tabela 03 – Percentual de acertos das questões do ENEM de 2013 a 2016 segundo Pontes (2019).

Ano do ENEM	Questão (Prova Amarela)	Percentual de Acerto	Dificuldade
2013	176	11,6%	Difícil
2014	152	19,5%	Difícil
2015	149	8,8%	Difícil
2015	158	10.0%	Difícil
2015	175	24,4%	Difícil
2016	147	23,5%	Difícil

Fonte: O autor (2024).

A Tabela 04 cita as questões que não foram abordadas por Pontes (2019) devido ter um percentual de acertos acima de 25%.

Tabela 04 – Questões que não foram citadas por Pontes (2019).

Ano do ENEM	Questão (Prova Amarela)	Percentual de Acerto	Dificuldade
2013	141	Acima de 25%	Mediana
2013	155	Acima de 25%	Mediana
2013	175	Acima de 25%	Mediana
2014	162	Acima de 25%	Mediana
2015	180	Acima de 25%	Mediana

Fonte: O autor (2024).

Para as questões posteriores a 2016, utilizamos a plataforma “ZBS educação” que apresenta um apanhado de dados públicos disponibilizados pelo INEP para organizar as questões do ENEM, dessa forma, utilizando os mesmos critérios apresentados anteriormente, obtemos os seguintes resultados apresentados na Tabela 05.

Tabela 05 – Questões abordadas na plataforma ZBS educação.

Ano do ENEM	Questão (Prova Amarela)	Percentual de Acerto	Dificuldade
2017	142	25,7%	Mediana
2017	155	30,5%	Mediana
2017	171	25,0%	Difícil
2018	140	24,4%	Difícil
2018	163	21.4%	Difícil
2018	173	19.3%	Difícil
2018	176	35,3%	Mediana
2018	180	17,3%	Difícil
2019	164	13,1%	Difícil
2019	176	13,0%	Difícil

2020	141[4]	Anulada	-
2020	160	38,6%	Mediana
2020	163	38%	Mediana
2021	177	18%	Difícil
2022	152	28,8%	Mediana
2022	162	8,7%	Difícil
2023	149	33,3%	Mediana
2023	157	21,8%	Difícil
2023	158	15,1%	Difícil
2023	166	23,4%	Difícil

Fonte: O autor (2024).

Outra informação pertinente a ser considerada em sua análise é que algumas dessas questões podem ser classificadas entre as 3 (três) mais difíceis da prova, de acordo o seu percentual de acerto. Sendo elas:

1) 140 de 2018 foi a 3ª questão com maior percentual de erro.
2) 164 de 2019 foi a 3ª questão com maior percentual de erro.
3) 176 de 2019 foi a 2ª questão com maior percentual de erro.
4) 162 de 2022 foi a 2ª questão com maior percentual de erro.
5) 158 de 2023 foi a 3ª questão com maior percentual de erro.

Conforme observado, na prova de 2019, 2 (duas) das 3 (três) questões mais difíceis estavam relacionadas ao tema de probabilidade. Esse fato ressalta a importância do presente estudo, uma vez que ele busca abordar tópicos complexos com o objetivo de facilitar a compreensão dos alunos em sala de aula. Além disso, após uma análise dessas questões presentes nas provas, este trabalho reforça sua relevância ao contribuir diretamente para o aprimoramento das práticas pedagógicas, fornecendo estratégias eficazes para a abordagem de conteúdos de maior dificuldade, como a disponibilidade de um material concreto.

4.2.2 Contextualização prática e pensamento crítico.

O ENEM elabora suas questões com ênfase na contextualização prática, buscando relacionar conteúdos com situações do cotidiano. Esse modelo de aplicação permite que os estudantes desenvolvam habilidades de interpretação, análise crítica, resolução de problemas e raciocínio lógico, estimulando o pensamento crítico.

[4] A questão foi anulada por conter conteúdos desproporcionais com a grade curricular do ensino médio, sendo uma questão que aborda sobre probabilidade caótica e, dessa forma, o INEP optou por anulá-la.

Pensando nisso, selecionamos as questões que melhor se alinhavam com a proposta de construção de materiais, priorizando aquelas que facilitassem a compreensão e visualização dos conceitos abordados.

Segundo o levantamento de dados que foi desenvolvido, chegamos a um total de 31 questões de probabilidade nas provas do ENEM do ano de 2013 a 2023, entre as quais, priorizamos questões que melhor se enquadravam com a possibilidade de construção de materiais concretos e possibilitassem uma visualização e entendimento mais completos por parte dos alunos.

Após essa análise cuidadosa de contextualização de todas as questões que foram mencionadas na seção anterior, notamos que algumas não se alinhavam à proposta por se tratarem de questões que abordavam interpretação de dados, como gráficos ou tabelas. Que é o caso das questões presentes no Quadro 03.

Quadro 03 – Questões de probabilidade que abordam sobre gráficos ou tabelas.

Questão e ano	Motivo da exclusão
141 de 2013	Interpretação de Gráfico.
176 de 2013	Interpretação de Tabela.
162 de 2014	Interpretação de Tabela.
173 de 2018	Interpretação de Tabela.
163 de 2020	Interpretação de Tabela.

Fonte: O autor (2025).

Restando um total de 26 questões, o que ainda representa um número elevado para que a construção dos materiais tenha relevância em uma aplicação em sala de aula. Diante disso, optamos por questões que envolvessem conceitos de probabilidade geométrica ou que a construção do material pudesse contribuir de forma efetiva na visualização e compreensão dos estudantes. Essa escolha visou não apenas tornar o aprendizado mais intuitivo, como também otimizar os recursos disponíveis para sua construção.

Conforme mencionado por Lorenzato (2012) um professor de matemática precisa se fazer alguns questionamentos na hora de aplicar um material didático: o material vai facilitar a aprendizagem? Qual material? Como esse material deverá ser utilizado? Em outras palavras, o professor precisa de garantias de que o material é fundamental para que a aprendizagem significativa possa ocorrer.

Observa-se que os problemas que melhor se alinhavam com os aspectos mencionados estavam presentes nas questões: 147 do ano de 2016, 142 do ano de 2017, 180 do ano de 2018, 162 do ano de 2022 e, por fim, 149 do ano de 2024. Essas questões foram selecionadas com base nos critérios estabelecidos anteriormente.

Outra questão que, infelizmente, não foi possível obter os dados para análise de acertos e erros, mas que tem grande relevância para esta proposta de pesquisa, é a questão 149 do ano de 2024. Essa questão aborda o tema da criptografia, o que a torna bem relevante para a proposta, já que a criptografia é uma área de estudo que permite diversas aplicações dinâmicas e práticas, envolvendo tanto a proteção de dados quanto a segurança da informação.

Mesmo que a ausência dos dados específicos impeça uma análise detalhada, a própria temática da questão sugere uma abordagem interdisciplinar capaz de enriquecer o desenvolvimento de metodologias didáticas inovadoras. Desse modo, a questão 149, mesmo sem os dados disponíveis, pode ser considerada uma questão importante para ilustrar o potencial pedagógico do material concreto na sala de aula.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, foi apresentado todo o processo de construção dos materiais didáticos desenvolvidos, bem como suas respectivas aplicações em sala de aula. Em seguida, foi feita uma análise dos resultados obtidos a partir da aplicação desses materiais, com ênfase nas principais contribuições pedagógicas observadas.

Com isso, serão destacados aspectos fundamentais como o nível de engajamento dos estudantes, o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, a participação ativa nas atividades e os desafios enfrentados durante a implementação. Essa reflexão busca evidenciar o potencial dos materiais concretos utilizados na promoção de uma aprendizagem mais significativa e interativa no ensino de probabilidade.

5.1 CONSTRUÇÃO DOS MATERIAIS

Para a construção dos materiais concretos optamos por utilizar recursos que fossem de fácil acesso para os estudantes ou educadores que, eventualmente, desejem reproduzir ou adaptar este trabalho no futuro. A escolha dos recursos levou em consideração fatores como disponibilidade do mercado, baixo custo, facilidade no manuseio e fácil acessibilidade. Uma vez que isso possibilita que todos possam manusear os materiais de forma dinâmica e eficiente.

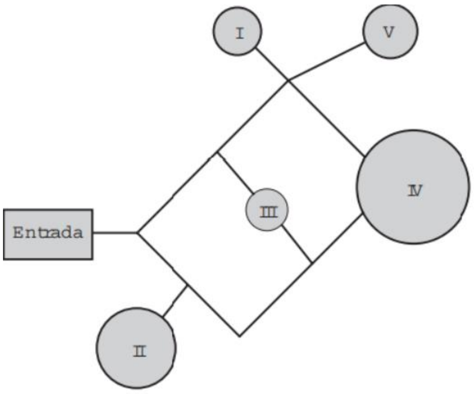
5.1.1 Problema do Mapa do Parque

O primeiro problema selecionado foi a questão 147 do ano de 2016. Ela aborda um problema com estrutura semelhante a uma árvore de possibilidades, na qual diferentes caminhos podem ser escolhidos para se chegar a uma determinada área do parque.

Para esse problema, é imprescindível que os alunos tenham conhecimento sobre árvore de possibilidades, do qual eles podem analisar todas as possibilidades de escolha para se obter o resultado desejado, tendo em vista que desde os anos iniciais do ensino fundamental, os alunos têm a possibilidade de construir o espaço amostral, utilizando árvore de possibilidades, princípio multiplicativo ou simulações (Brasil, 2018). Observe uma possível solução para o problema comentado.

<u>Problema</u>:

Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, entre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna.

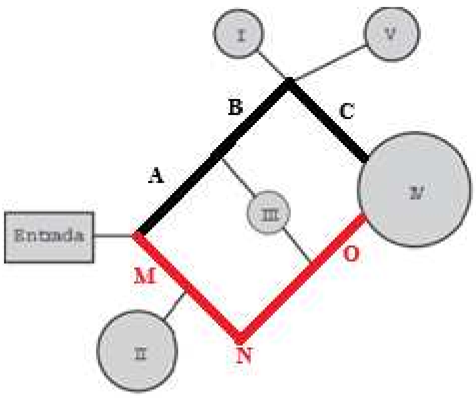
Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a.

a) 1/96 b) 1/64 c) 5/24 d) 1/4 e) 5/12

Possível solução:

Queremos calcular a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas, dessa forma, considerando que todas as opções têm igual probabilidade de serem escolhidas e que, caso o percurso passe por áreas diferentes da área IV, o adolescente deve necessariamente voltar ou passar por essa área, o objetivo é determinar a probabilidade de ele chegar diretamente à área IV, sem passar por outras áreas e sem precisar retornar. Dessa forma, tem-se dois caminhos possíveis, como observados na Figura 02.

Figura 02 – Possíveis caminhos para chegar à área IV.



Fonte: Inep. Adaptada (2025).

Como a escolha de cada caminho apresenta igual probabilidade, então calcularemos a probabilidade de cada percurso ocorrer e somaremos. Note ainda que cada ramificação foi nomeada de acordo com um possível caminho, ou seja, as letras A, B e C na cor preta indicam o caminho na cor preta, já as letras M, N e O na cor vermelha indicam o caminho vermelho. Dessa forma, chamaremos P(p) a probabilidade de ele escolher o caminho na cor preta e P(v) a probabilidade de ele escolher o caminho na cor vermelha. Calculando as probabilidades, teremos:

Caminho na cor preta.

P (p) = P(A) . P(B) . P(C)

$P(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

$P(p) = \frac{1}{12}$

Caminho na cor vermelha.

P(v) = P(M) . P(N) . P(O)

$P(v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

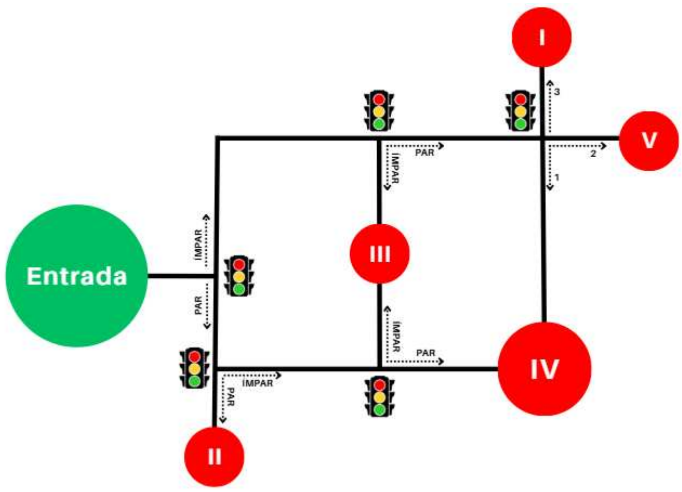
$P(v) = \frac{1}{8}$

Portanto, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por nenhuma outra área é igual a.

$P(T) = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{2+3}{24} = \frac{5}{24}$. Alternativa correta é a C.

Para este problema, a construção da base do material se deu por um modelo construído para ser mais interativo e, em seguida, foi feito a impressão em folhas A4 e colado em um papelão, escolhida por sua facilidade de acesso e manuseio. Nessa base, foi desenhada uma árvore de possibilidades ilustrando as possíveis escolhas disponíveis. Para que o material se tornasse mais atrativo, optamos por representar as pessoas por botões que poderiam ser movidos ao longo do trajeto, tornando a abordagem mais concreta e envolvente. Também foi adicionado no material alguns locais que pudessem representar as paradas das pessoas que iam optar por escolher um dos caminhos. Essas paradas no material foram representadas por meio de semáforos. Veja o material na Figura 03.

Figura 03 – Modelo da construção da base do material representando o Mapa do Parque.



Fonte: O autor (2025).

Outro aspecto fundamental levado em consideração foi a necessidade de envolver os alunos por meio de experimentos aleatórios no que tange o problema, conforme estabelecido pela BNCC (EM12MAT312)[5]. Para isso, foi utilizado um dado como ferramenta, permitindo que os alunos realizassem múltiplos experimentos e registrassem seus resultados, para que pudessem ser analisados posteriormente.

Nota-se ainda que existem 5 (cinco) semáforos presentes no mapa, ou seja, são 5 (cinco) ramificações onde as pessoas podem escolher caminhos a seguir, observa-se ainda que 4 (quatro) das ramificações tem 2 (dois) caminhos possíveis e existe uma única ramificação que tem 3 (três) caminhos. Para isso, com o auxílio de um dado padrão, optou-se por utilizar os números pares e ímpares para representar as ramificações com 2 (dois) caminhos e o dado foi dividido em 3 (três) pares (1 e 2; 3 e 4; 5 e 6) para representar o caminho com 3 (três) ramificações.

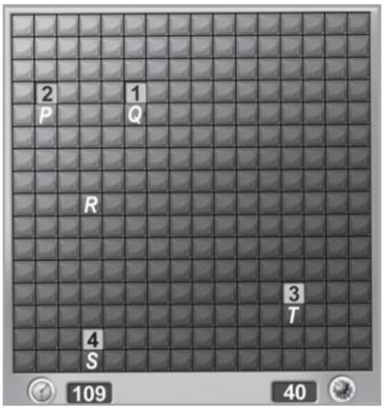
5.1.2 Problema do Campo Minado

O segundo problema foi a questão 142 do ano de 2017, escolhida por se tratar de um jogo amplamente conhecido: o campo minado. Este jogo tem como finalidade abrir todas as casas do tabuleiro sem que seja revelado a localização de nenhuma mina. A escolha dessa questão se deu devido à sua relevância para o desenvolvimento do pensamento matemático, uma vez que o jogo envolve a interpretação de padrões numéricos e a aplicação de conceitos de probabilidade. Além disso, por se tratar de um jogo popular, facilita o engajamento dos alunos, tornando o aprendizado mais dinâmico e interativo.

<u>Problema</u>:

A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16 x 16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contém minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.

[5] Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos (BNCC, p. 529).



Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras P, Q, R, S e T um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina.

O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

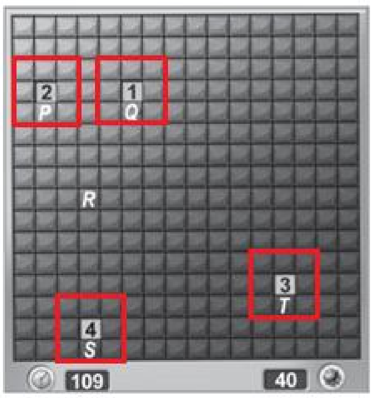
a) P. b) Q. c) R. d) S. e) T.

<u>Possível solução</u>:

As letras P, T e S estão adjacentes aos números 2, 3 e 4 (ver Figura 04), respectivamente, enquanto a letra Q está adjacente ao número 1. Portanto, a partir disso, pode-se perceber que a chance de se selecionar uma mina ao escolher os quadrados P (probabilidade de $\frac{2}{8}$ = 25%), T (probabilidade $\frac{3}{8}$ = 37,5%) e S (probabilidade de $\frac{4}{8}$ = 50%) são maiores do que se escolher o quadrado Q, onde sua probabilidade é de $\frac{1}{8}$ = 12,5%. Seguindo esse raciocínio são descartadas as alternativas A, D e E, ficando agora apenas entre os quadrados Q e R.

Já a probabilidade de sair uma mina no quadrado R deve ser levado em consideração que existem minas distantes, sendo elas: 1 (adjacente ao quadrado Q) + 2 (adjacente ao quadrado P) + 3 (adjacente ao quadrado T) + 4 (adjacente ao quadrado S) = 10, ou seja, há ainda 30 minas que podem estar próximas do quadrado R. Para calcular essa probabilidade, devemos considerar que existem 30 minas no jogo em um total de 220 casas disponíveis pois, desconsideramos os 9 (nove) quadrados que estão adjacentes aos quadrados P, Q, T e S (como mostra a Figura 04), ou seja, a probabilidade de sair uma mina no quadrado R é de $\frac{30}{220} \approx 13{,}6\%$.

Figura 04 – Área já considerada na resolução do campo minado.



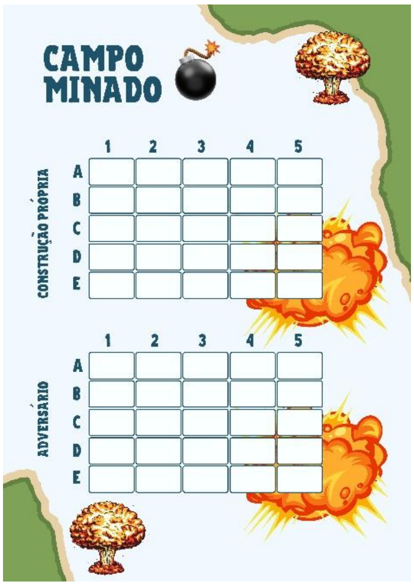
Fonte: Inep. Adaptada (2025).

Portanto, concluímos que a menor probabilidade de sair uma mina entre os quadrados P, Q, R, S e T é no quadrado Q. Alternativa correta é a B.

A principal ideia por trás da construção deste material foi o desenvolvimento do próprio jogo no qual os alunos competem entre si de forma interativa. Entretanto, apenas essa abordagem poderia não ser suficiente para a aprendizagem ser eficaz. Então optou-se por construir campos minados em versões menores, para que eles pudessem experimentar diferentes estratégias antes de avançar para tabuleiros maiores.

Dessa forma, o jogo foi construído em papel A4, com um tabuleiro inicial no tamanho 5x5, com possibilidades de aumento para 6x6 e até 8x8. A principal ideia na abordagem desse material é que os alunos possam construir seus próprios campos minados e competir entre si. Para a construção do tabuleiro 5x5, optou-se por utilizar 4 (quatro) minas mantendo uma proporção semelhante ao do problema inicial. Essa adaptação permite que os estudantes tenham uma noção do desenvolvimento do jogo no formato real e, assim possam interagir de forma a estimular o raciocínio lógico e o trabalho em grupo. Veja a construção na Figura 05.

Figura 05 – Construção do campo minado no modelo 5x5.



Fonte: O autor (2025).

Com base nessa proposta, os alunos serão organizados em duplas, promovendo uma competição dinâmica e interativa. Cada jogador terá a liberdade de posicionar suas bombas estrategicamente no tabuleiro a sua escolha. O objetivo central do jogo é explorar o campo minado do adversário sem encontrar suas bombas, desenvolvendo habilidades de raciocínio lógico, estratégia e tomada de decisão.

Vale ressaltar ainda que os alunos devem observar atentamente os números que serão posicionados vizinho às bombas, uma vez que esses valores são essenciais para indicar, ao adversário, a proximidade de perigo. Nesse contexto, o professor tem total liberdade de analisar a construção dos campos minados minimizando possíveis erros no desenvolvimento da atividade.

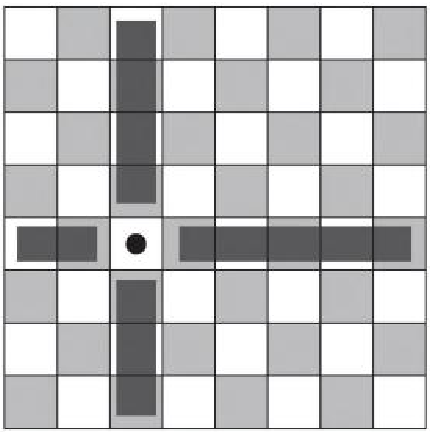
5.1.3 Problema do Jogo de Tabuleiro

O terceiro problema foi a questão 180 do ano de 2018. Essa questão aborda a criação de um jogo de tabuleiro que foi desenvolvido com o objetivo de posicionar peças de maneira estratégica para formar uma área específica, denominada "zona de combate".

A dinâmica desse jogo se assemelha aos conceitos de probabilidade geométrica, pois ao observar a "zona de combate" que envolve uma determinada região do tabuleiro, considerando que cada quadrado do tabuleiro representa 1 (uma) unidade de área, a relação com a probabilidade geométrica torna-se ainda mais evidente.

Problema:

Um designer de jogos planeja um jogo que faz uso de um tabuleiro de dimensão n x n, com no qual cada jogador, na sua vez, coloca uma peça sobre uma das casas vazias do tabuleiro. Quando uma peça é posicionada, a região formada pelas casas que estão na mesma linha ou coluna dessa peça é chamada de zona de combate dessa peça. Na figura está ilustrada a zona de combate de uma peça colocada em uma das casas de um tabuleiro de dimensão 8 x 8.



O tabuleiro deve ser dimensionado de forma que a probabilidade de se posicionar a segunda peça aleatoriamente, seguindo a regra do jogo, e esta ficar sobre a zona de combate da primeira, seja inferior a $\frac{1}{5}$.

A dimensão mínima que o designer deve adotar para esse tabuleiro é

a) 4 x 4.
b) 6 x 6.
c) 9 x 9.
d) 10 x 10.
e) 11 x 11

Possível solução:

Para resolver esse problema, temos que considerar que o tabuleiro tem que ser dimensionado de maneira que a probabilidade seja inferior a $\frac{1}{5}$ e que temos uma casa que já se encontra ocupada com a primeira peça que está posicionada. Se considerarmos um tabuleiro n x n, então o número de casos possíveis para se posicionar a segunda peça serão todos os quadrados do tabuleiro com a única exceção do lugar que já se encontra com a primeira peça, ou seja, $n^2 - 1$. Para os casos favoráveis, temos os quadrados que se encontram na vertical e na horizontal da peça posicionada, ou seja, $n - 1$, pois a única exceção é o lugar da peça já posicionada, então os casos favoráveis são $(n - 1) + (n - 1) = 2n - 2$. Assim, desenvolvendo o seguinte cálculo: $P = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{2n - 2}{n^2 - 1} < \frac{1}{5}$, obtemos que $n > 9$. Logo, o tabuleiro tem que ser no formato 10 x 10. Portanto, a alternativa correta é a D.

Para trabalhar este material, optou-se por abordar conceitos introdutórios do xadrez, com ênfase no uso da peça "torre". Seu movimento, restrito a vertical e a horizontal, facilita a compreensão do aluno a respeito da zona de combate da peça posicionada no tabuleiro do problema.

Além disso, o estudo do movimento da torre permite que os alunos desenvolvam noções fundamentais de estratégia e posicionamento no tabuleiro, aspectos essenciais para a compreensão mais avançada do jogo. Ao visualizar e aplicar os movimentos da peça, os estudantes começam a assimilar conceitos como controle de colunas e fileiras, planejamento de jogadas e reconhecimento de padrões essenciais para a compreensão do problema.

Como o tabuleiro do problema possui o mesmo formato do tabuleiro de xadrez, o professor pode aproveitar esse material já conhecido pelos alunos, facilitando a compreensão das regras. Seguindo a dinâmica do próprio problema, os alunos irão posicionar fichas que foram confeccionadas em EVA, com formato circular, para garantir um manuseio mais prático, confortável e acessível.

Para uma melhor organização e visualização do jogo, as fichas serão divididas em 4 (quatro) cores distintas: 2 (duas) cores para representar as peças dos jogadores, enquanto as outras 2 (duas) serão utilizadas para marcar suas zonas de combate ao longo da partida. Essa diferenciação por cores ajudará os alunos a acompanhar o desenvolvimento do jogo de forma clara.

5.1.4 Problema do Bingo

O quarto problema escolhido foi a questão 162 do ano de 2022. Assim como o problema do Campo Minado, também se trata de um jogo bastante conhecido: o bingo. Sua escolha aleatória de números sorteados e marcação em cartelas possibilita uma abordagem mais dinâmica e atrativa para os alunos.

Dessa forma, essa escolha de peças permite explorar conceitos de probabilidade que tornem o aprendizado mais significativo. Com isso, ao usar o bingo como ferramenta pedagógica, podemos contribuir significativamente para tornar as aulas mais interessantes e interativas, incentivando a participação ativa dos alunos e reforçando o aprendizado de maneira natural e intuitiva.

Problema:

Em um jogo de bingo, as cartelas contêm 16 quadrículas dispostas em linhas e colunas. Cada quadrícula tem impresso um número, dentre os inteiros de 1 a 50, sem repetição de número. Na primeira rodada, um número é sorteado, aleatoriamente, dentre os 50 possíveis. Em todas as rodadas, o número sorteado é descartado e não participa dos sorteios das rodadas seguintes. Caso o jogador tenha em sua cartela o número sorteado, ele o assinala na cartela. Ganha o jogador que primeiro conseguir preencher quatro quadrículas que formam uma linha, uma coluna ou uma diagonal, conforme os tipos de situações ilustradas na Figura 1.

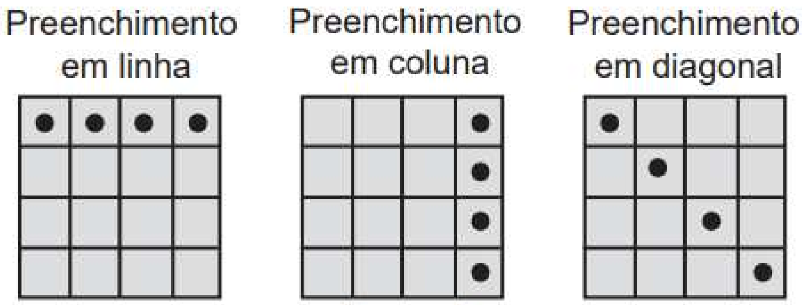


Figura 1

O jogo inicia e, nas quatro primeiras rodadas, foram sorteados os seguintes números: 03, 27, 07 e 48. Ao final da quarta rodada, somente Pedro possuía uma cartela que continha esses quatro números sorteados, sendo que todos os demais jogadores conseguiram assinalar, no máximo, um desses números em suas cartelas. Observe na Figura 2 o cartão de Pedro após as quatro primeiras rodadas.

03	48	12	27
49	11	22	05
29	50	19	45
33	23	38	07

Figura 2

A probabilidade de Pedro ganhar o jogo em uma das duas próximas rodadas é

a) $\frac{1}{46} + \frac{1}{45}$

b) $\frac{1}{46} + \frac{2}{46 \times 45}$

c) $\frac{1}{46} + \frac{8}{46 \times 45}$

d) $\frac{1}{46} + \frac{43}{46 \times 45}$

e) $\frac{1}{46} + \frac{49}{46 \times 45}$

Possível solução:

Como já ocorreram 4 (quatro) rodadas, queremos calcular a probabilidade de Pedro ganhar nas 2 (duas) próximas rodadas, ou seja, na quinta ou sexta rodada. Para que ele ganhe na quinta rodada, basta sair o número 12. Como já foram sorteados 4 (quatro) números de um total de 50, então a probabilidade de sair o número 12 na quinta rodada é de $\frac{1}{46}$.

Entretanto, caso o número 12 não seja sorteado na quinta rodada, Pedro ainda tem a chance de ganhar na sexta rodada, desde que o número 12 seja sorteado nesse momento. Além disso, ele também pode vencer caso complete a coluna ou a diagonal, o que torna a análise mais abrangente. Para isso, três casos distintos precisam ser considerados:

1° caso: ele ganhar com o preenchimento da linha. Para isso, o 12 não pode sair na quinta rodada, mas terá que sair na sexta:

$$P_1 = \frac{45}{46} \times \frac{1}{45} = \frac{45}{46 \times 45}$$

2° caso: ele ganhar com o preenchimento da coluna. Para isso, o número 05 ou 45 deverá sair na quinta rodada e o outro na rodada seguinte.

$$P_2 = \frac{2}{46} \times \frac{1}{45} = \frac{2}{46 \times 45}$$

3° caso: ele ganhar com o preenchimento da diagonal. Para isso, o número 11 ou 19 deverá sair na quinta rodada e o outro na rodada seguinte.

$$P_3 = \frac{2}{46} \times \frac{1}{45} = \frac{2}{46 \times 45}$$

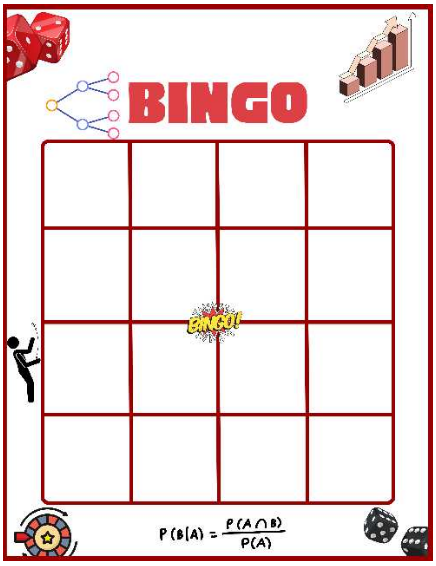
Somando todas as probabilidades, teremos:

$\frac{1}{46} + \frac{45}{46 \times 45} + \frac{2}{46 \times 45} + \frac{2}{46 \times 45} = \frac{1}{46} + \frac{49}{46 \times 45}$. Alternativa correta é a E.

A construção deste material incluirá sorteios aleatórios de números, enquanto os alunos montarão suas cartelas de bingo, no tamanho citado no problema, ou seja, cartelas 4x4, com base em números de 1 a 50[6] escolhidos por eles mesmos. Essa abordagem permite que os estudantes participem ativamente do processo, tornando a experiência mais envolvente, observe a Figura 06.

[6] Intervalo do problema do ENEM.

Figura 06 – Cartela de bingo para aplicação do problema.



Fonte: O autor (2025).

Dessa forma, o uso de um material auxiliar é fundamental para aprimorar a compreensão do jogo, pois possibilita a exploração de conceitos essenciais, como a análise de probabilidades e a identificação de padrões numéricos. Durante o desenvolvimento da atividade, será possível observar quais alunos possuem maior probabilidade de vencer em determinado momento do jogo, considerando os números já sorteados e os que ainda restam.

Ao analisar as cartelas dos alunos, será viável calcular e discutir todas as probabilidades envolvidas, permitindo um estudo mais aprofundado sobre a aleatoriedade e a chance de vitória. Dessa forma, o bingo se torna não apenas uma atividade recreativa, mas também um recurso pedagógico valioso para a introdução a conceitos matemáticos, estimulando o pensamento lógico e a tomada de decisões estratégicas.

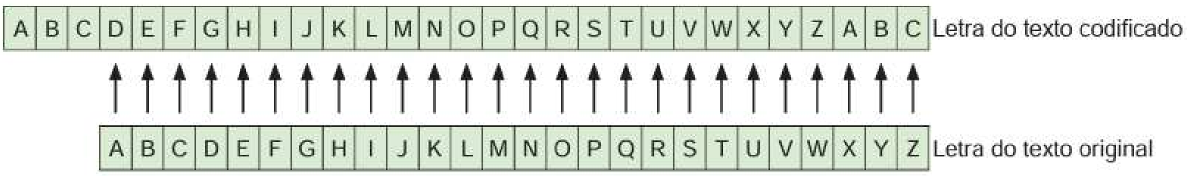
5.1.5 Problema de Criptografia

O quinto e último problema selecionado foi a questão 149 do ano de 2024. Sua escolha se deve pelo fato dela abordar um tema altamente pertinente para o ensino básico: a criptografia. Esse mecanismo é de extrema importância para a sociedade, considerando o aumento de ataques cibernéticos com o avanço da tecnologia.

A elaboração de um material que permita a aplicação dessa questão é especialmente significativa para o aprendizado de Probabilidade, além de ajudar os alunos a compreender por que a quebra de uma criptografia é praticamente impossível, mesmo para computadores capazes de realizar milhões de cálculos por segundo. Essa abordagem contribui para despertar o interesse dos estudantes, conectando a matemática com desafios do mundo real e estimulando o pensamento crítico e a compreensão prática de conceitos matemáticos complexos.

Problema:

A criptografia refere-se à construção e análise de protocolos que impedem terceiros de lerem mensagens privadas. Júlio César, imperador romano, utilizava um código para proteger as mensagens enviadas a seus generais. Assim, se a mensagem caísse em mãos inimigas, a informação não poderia ser compreendida. Nesse código, cada letra do alfabeto era substituída pela letra três posições à frente, ou seja, o “A” era substituído pelo “D”, o “B” pelo “E”, o “C” pelo “F”, e assim sucessivamente.



Disponível em: www.codifica.ibict.br. Acesso em: 15 out. 2019.

Qualquer código que tenha um padrão de substituição de letras como o descrito é considerado uma Cifra de César ou um Código de César. Note que, para decifrar uma Cifra de César, basta descobrir por qual letra o “A” foi substituído, pois isso define todas as demais substituições a serem feitas.

Uma mensagem, em um alfabeto de 26 letras, foi codificada usando uma Cifra de César. Considere a probabilidade de se descobrir, aleatoriamente, o padrão utilizado nessa codificação, e que uma tentativa frustrada deverá ser eliminada nas tentativas seguintes. A probabilidade de se descobrir o padrão dessa Cifra de César apenas na terceira tentativa é dada por

a) $\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}$

b) $\frac{24}{25}+\frac{23}{24}+\frac{1}{23}$

c) $\frac{1}{25} \text{ x } \frac{1}{24} \text{ x } \frac{1}{23}$

d) $\frac{24}{25} \text{ x } \frac{23}{25} \text{ x } \frac{1}{25}$

e) $\frac{24}{25} \text{ x } \frac{23}{24} \text{ x } \frac{1}{23}$

Possível solução:

A Cifra de César é um tipo de criptografia em que cada letra é substituída por outra, seguindo essa mesma lógica de deslocamento. Observa-se que o alfabeto contém 26 letras e uma letra codificada teria 25 possibilidades, tendo em vista que, não é possível codificar uma letra com ela própria, do contrário não haveria criptografia.

Para que a Cifra de César seja descoberta exatamente na terceira tentativa é necessário que a pessoa que está tentando decifrar erre as duas primeiras tentativas, então teremos a seguinte probabilidade:

1) <u>Errar a primeira tentativa</u>: Como existe uma única substituição correta para a letra “A”, então tem-se 24 substituições incorretas, então a probabilidade é dada por:

$P = \frac{24}{25}$.

2) <u>Errar a segunda tentativa</u>: Nesse caso, já foi tentado uma letra, então teremos uma única substituição correta para 23 incorretas, então a probabilidade é dada por:

$P = \frac{23}{24}$.

3) <u>Acertar a terceira tentativa</u>: Agora, ele tem que acertar, como existe uma única substituição correta e já saíram 2 incorretas, então a probabilidade é dada por:

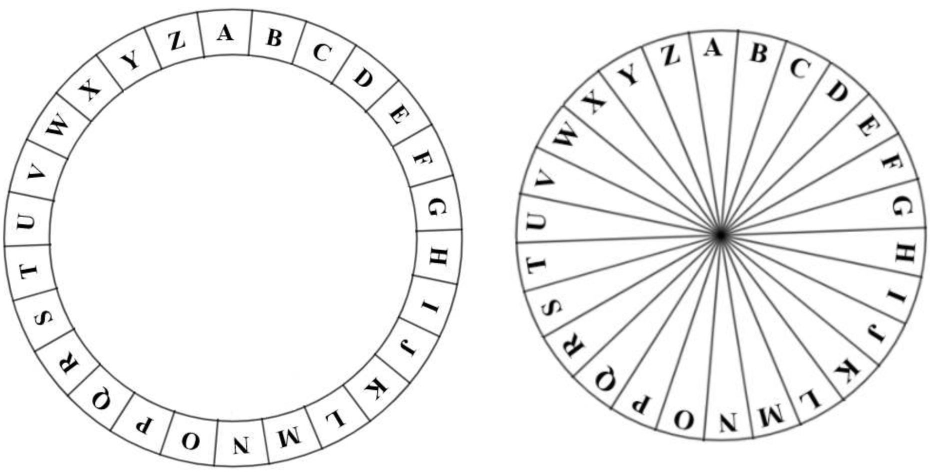
$P = \frac{1}{23}$.

A probabilidade total será o produto entre as probabilidades encontradas nos itens anteriores, ou seja, $P = \frac{24}{25} . \frac{23}{24} . \frac{1}{23}$. Alternativa correta será a E.

A construção deste material surgiu a partir da ideia de construir um disco giratório, com papelão e papel A4. Seu principal objetivo é representar visualmente todas as possíveis substituições da Cifra de César de maneira simultânea. Esse recurso permite que os alunos compreendam, de forma concreta e interativa, como funciona o processo de criptografia por deslocamento de letras no alfabeto.

O disco facilita a visualização do mecanismo de codificação e decodificação, tornando o aprendizado mais dinâmico e acessível, beneficiando os alunos por meio de recursos visuais e manipuláveis. Ao girar o disco interno em relação ao disco externo, é possível observar, em tempo real, como cada letra é substituída por outra, conforme observado na Figura 07.

Figura 07 – Roleta para aplicação do problema de criptografia.



Fonte: O autor (2025).

A principal proposta por trás desta atividade é incentivar os alunos a criarem suas próprias mensagens criptografadas, utilizando a Cifra de César, enquanto um colega tenta decifrar o código elaborado. Essa dinâmica promove não apenas o engajamento dos estudantes, mas também proporciona uma atividade prática dos conceitos envolvidos no processo de criptografia.

Ao assumir os papéis de emissores de códigos e decodificadores, os alunos desenvolvem uma compreensão mais concreta e significativa dos princípios matemáticos e lógicos que fundamentam a criptografia. Além disso, essa abordagem facilita o entendimento do enunciado da questão do ENEM, tornando mais claro o que se espera como raciocínio e resposta. A atividade também estimula o trabalho colaborativo, o pensamento estratégico e o raciocínio probabilístico, ao mesmo tempo em que insere os estudantes em um contexto lúdico e desafiador.

5.2 APLICAÇÃO DOS MATERIAIS

Durante a primeira aula de aplicação da proposta, ocorrida no dia 03 de abril de 2025, foi comentado a respeito dos termos de assentimento e consentimento, além do objetivo da pesquisa, em seguida foi aplicado um questionário para verificar o conhecimento prévio dos alunos individualmente. O questionário era composto por 9 (nove) perguntas que abordavam a respeito da frequência dos estudos dos alunos para o ENEM, além de verificar conhecimentos prévios sobre probabilidade. Veja, a seguir, como se deu a aplicação do questionário.

5.2.1 Aplicação do Questionário

A aplicação do questionário nesse primeiro momento visou verificar os conhecimentos prévios dos alunos acerca da aplicação da proposta. Segundo Gil (2008, p. 121) define-se como questionário “a técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, [...], comportamento presente ou passado etc.”

Para a aplicação do questionário, foi fundamental garantir o anonimato dos estudantes, assegurando que suas respostas fossem fornecidas de maneira livre e sem qualquer tipo de identificação pessoal. Dessa forma, os alunos puderam expressar suas opiniões de maneira sincera e imparcial, sem a necessidade do registro de seus nomes, além de incentivar uma participação mais espontânea e transparente por parte dos participantes.

A turma é composta por um total de 14 alunos. No momento da aplicação do questionário, 12 deles estavam presentes, participando ativamente do processo. Diante disso, passaremos agora à análise das respostas obtidas, buscando compreender as percepções e opiniões dos estudantes em relação ao tema abordado.

Para isso, o questionário foi dividido em duas partes: a primeira parte é composta por 4 (quatro) perguntas objetivas que tratam sobre a frequência do estudo dos alunos para o ENEM. Já a segunda parte visou analisar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito de Probabilidade. Analisaremos individualmente cada parte comentada.

5.2.1.1 Primeira Parte do Questionário

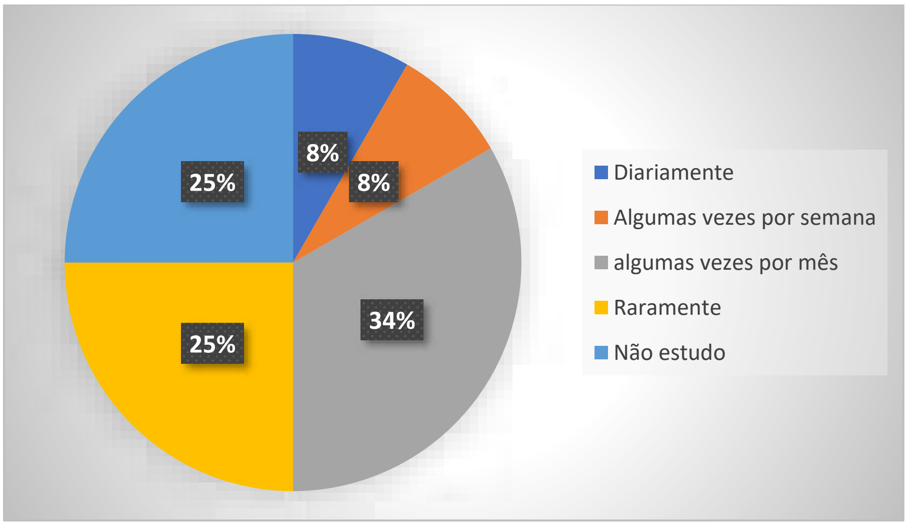
A primeira parte era composta por 4 (quatro) perguntas objetivas, elaboradas com o intuito de analisar, de forma quantitativa, a frequência com que os alunos se dedicavam para o ENEM. Além disso, esta seção também buscava identificar possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes durante sua rotina de preparação, como falta de tempo, dificuldade de concentração ou carência de materiais adequados.

A coleta destas informações permite traçar um panorama mais detalhado sobre os hábitos de estudo da turma, contribuindo para uma melhor compreensão dos desafios enfrentados no processo de aprendizagem. Ao conhecer essas limitações, torna-se possível desenvolver estratégias mais assertivas para auxiliar os alunos, seja por meio da oferta de materiais complementares, seja pela criação de espaços de estudo mais adequados ou mesmo pela orientação quanto ao planejamento do tempo disponível para estudar.

A primeira pergunta do questionário abordava a frequência com que os estudantes dedicavam seus estudos para o ENEM. Essa pergunta teve o objetivo de compreender os hábitos de estudo da turma de forma mais aprofundada, buscando identificar quantos alunos mantinham uma rotina de estudos regular e quantos apresentavam lacunas nesse aspecto. Para isso, foi estruturada em 5 (cinco) alternativas distintas, permitindo uma análise detalhada da regularidade com que os alunos revisavam os conteúdos exigidos no exame.

As opções de resposta contemplavam diferentes níveis de dedicação, desde aqueles que estudavam diariamente, passando pelos que estudavam algumas vezes na semana ou eventualmente, até os que não possuíam uma rotina estruturada de estudos. Essa diversidade de alternativas possibilitou captar um retrato mais fiel da realidade dos estudantes, revelando, por exemplo, a proporção de alunos que enfrentam dificuldades para manter uma disciplina de estudos constante. Os resultados obtidos estão representados no Gráfico 04 a seguir, o qual fornece subsídios importantes para futuras reflexões e tomadas de decisão relacionadas ao apoio pedagógico oferecido pela instituição.

Gráfico 04 – Frequência de estudo para o ENEM.



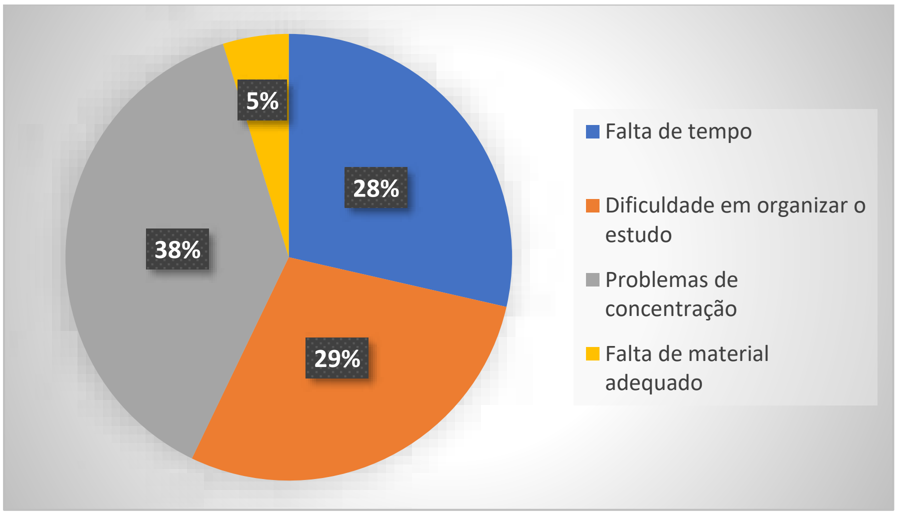
Fonte: O autor (2025).

A primeira pergunta já apresenta dados preocupantes ao evidenciar que a maioria dos alunos não apresentam rotinas de estudos para o ENEM. Note que apenas 16% estudam diariamente ou algumas vezes por semana, enquanto 34% estudam algumas vezes por mês e metade da turma raramente estuda ou, simplesmente, não estuda. Essa falta de rotina de estudos para o ENEM pode indicar a falta de planejamento ou orientação pedagógica para melhorar a dedicação dos alunos.

Além disso, esses números podem refletir outros fatores externos que dificultam a criação de uma rotina, como a necessidade de conciliar estudos com trabalho, responsabilidades domésticas ou falta de um ambiente apropriado para estudar em casa. Esse panorama ressalta a importância de ações interventivas por parte da escola e dos professores, como palestras motivacionais, oficinas de organização do tempo, rodas de conversa sobre estratégias de estudo e disponibilização de materiais de apoio específicos para a preparação para o exame.

Tendo em vista que alguns alunos iriam responder que apresentavam dificuldade na rotina de estudo para o ENEM, a segunda pergunta foi elaborada com o intuito de analisar os principais desafios enfrentados na organização desses estudos. Com isso, buscou-se identificar quais fatores impactam a rotina dos estudantes, como falta de tempo, dificuldade de organização, problema de concentração, falta de material adequado ou outros. Para essa pergunta, os alunos poderiam marcar mais de uma alternativa, permitindo uma visão mais ampla das barreiras encontradas pelos estudantes.

Gráfico 05 – Dificuldades enfrentadas ao estudar para o ENEM.



Fonte: O autor (2025).

Note que, a maior parte dos alunos alegou que apresenta dificuldade de concentração na hora de estudar, o que pode estar associado ao uso excessivo uso de celular. Como demonstrado por Magnago *et al.* (2024) quando afirma que,

> a dependência digital está impactando negativamente o comportamento dos estudantes, especialmente em termos de desempenho acadêmico e socialização. A constante necessidade de estar conectado prejudica a capacidade de concentração e a interação social, fatores cruciais para o desenvolvimento educacional e emocional dos jovens (Magnago *et al*, 2024, p. 4).

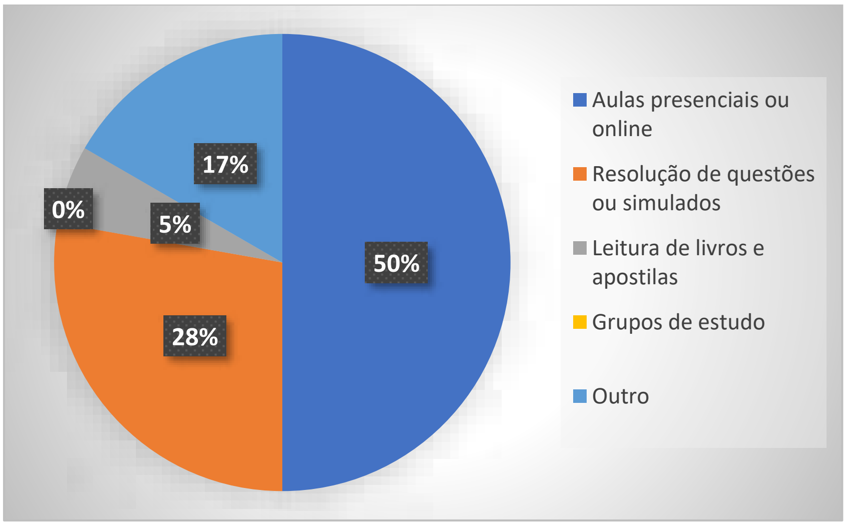
Outras opções mencionadas pelos alunos foram a falta de tempo e a dificuldade em organizar os estudos, fatores que estão diretamente relacionados e, refletem não apenas questões individuais, mas também estruturais. A falta de tempo, muitas vezes decorrente de jornadas de trabalho, tendo em vista que alguns alunos trabalham e estudam, isso impacta diretamente a rotina de estudos, dificultando a criação de um planejamento consistente. Da mesma forma, a dificuldade na organização dos estudos pode estar atrelada a ausência de uma orientação adequada ou a falta de um ambiente propício para o aprendizado e até mesmo a desafios emocionais, como ansiedade e desmotivação.

Por fim, uma opção pouco mencionada pelos alunos foi a falta de material adequado, demonstrando que a escassa rotina de estudos não está tão associada à ausência de livros ou apostilas. Esse dado revela que embora a ausência de material adequado seja um fato relevante, a principal dificuldade dos estudantes está mais associada a organização tempo do que, apropriadamente, a ausência desses materiais.

A partir desses dados, é possível compreender melhor quais aspectos necessitam de maior suporte, seja por meio de estratégias de organização, incentivo nos estudos ou até mesmo orientação para o desenvolvimento de métodos de aprendizagem mais eficazes. Essas informações são fundamentais para que os alunos possam ter incentivo na hora de se organizar para uma melhor rotina de estudos para o ENEM.

Tendo em vista essa rotina de estudo dos estudantes, a terceira pergunta teve como objetivo analisar quais eram os principais métodos utilizados no estudo para o ENEM. Buscou-se compreender de que forma os alunos estruturavam seu aprendizado, investigando se davam preferência por aulas presenciais ou online, resolução de questões e simulados, leitura de livros ou apostilas, participação em grupos de estudo ou outros métodos alternativos. Para essa pergunta, os alunos também poderiam marcar mais de uma alternativa, para analisar melhor os seus métodos, veja o Gráfico 06.

Gráfico 06 – Métodos de estudo utilizado com maior frequência.



Fonte: O autor (2025).

Nota-se inicialmente que metade dos alunos marcaram a opção aulas presenciais ou online como principal método de estudo. No entanto, essa escolha dos estudantes pode gerar uma certa dúvida na interpretação dos dados, uma vez que na pergunta não ficou totalmente claro se os estudantes se referiam às aulas presenciais ministradas na escola ou a cursos extracurriculares, como cursinhos preparatórios ou plataformas digitais. Essa ambiguidade na resposta necessita de uma certa investigação mais detalhada de como os estudantes conduzem seus estudos extracurriculares.

No que se refere a resolução de questões ou simulados, 28% dos estudantes apresentaram esse método como principal estratégia utilizada fora do ambiente escolar. Esse dado evidencia a importância da prática, visto que a resolução frequente de exercícios permite aos alunos não apenas revisar o conteúdo, mas também desenvolver habilidades essenciais, como a interpretação de enunciados, a aplicação do conhecimento teórico e a gestão do tempo durante as provas, prática tão necessária no ENEM.

Isso ainda é evidenciado pela BNCC quando destaca que para estimular e provocar os processos de reflexão e de abstração "[...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas." (Brasil, 2018, p. 519).

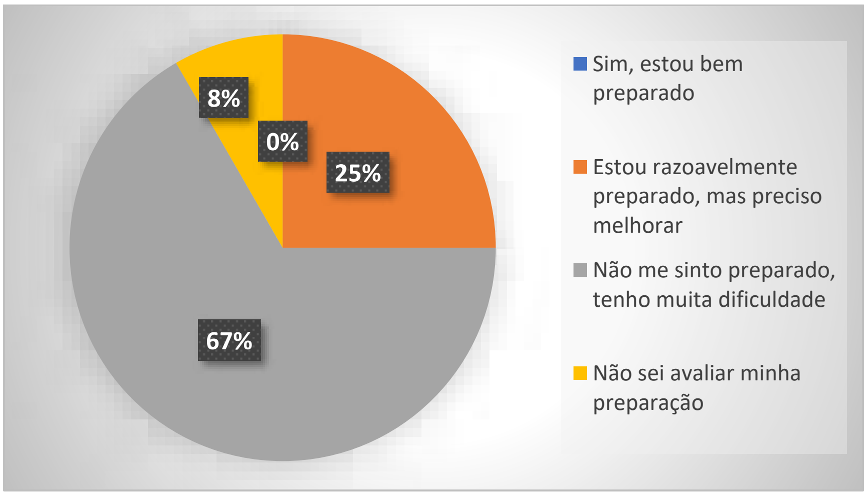
Ainda houve algumas respostas na opção "outro", entre as quais se destaca a de um dos alunos que afirmou: "gosto de ler e explicar para alguém". Essa resposta evidencia uma estratégia da aprendizagem, baseada na técnica conhecida como *learning by teaching* (aprender ensinando), um método didático pedagógico de Jean-Pol Martin que permite que os alunos aprendam ensinando seus colegas.

Essa técnica baseia-se na ideia de que o aluno ao assumir o papel de professor precisa organizar as informações e reformulá-las de maneira compreensível, o que fornece um determinado conhecimento a respeito do tema em debate. Além disso, essa estratégia estimula habilidades cognitivas e sociais, como comunicação, pensamento crítico e autonomia no aprendizado (Tschud; Wagner, 2016).

A resposta do aluno também sugere, de forma implícita, a necessidade e a importância de um ambiente colaborativo, em especial, os grupos de estudo, onde essa metodologia pode ser aplicada de forma estruturada, incentivando uma aprendizagem mais participativa e eficaz. Embora nenhum aluno tenha marcado a opção de que utilizava grupos de estudo como prática de estudo.

Por fim, a quarta e última pergunta da primeira parte do questionário tinha como objetivo avaliar a percepção dos alunos a respeito da sua preparação para o ENEM. As possíveis respostas identificam diferentes níveis de preparação, como "está preparado", "está razoavelmente preparado", "não está preparado" ou ainda "não sabe avaliar sua preparação". Veja como foram as respostas dos alunos no Gráfico 07.

Gráfico 07 – Percepção do aluno quanto ao preparo para o ENEM.



Fonte: O autor (2025).

Como principal indicativo, nota-se que nenhum dos alunos que responderam ao questionário se sente totalmente preparado para fazer o ENEM, esse indicativo mostra a necessidade de um acompanhamento mais especializado e direcionado nos preparativos para essa prova, evidenciando a necessidade de uma preparação mais pedagógica e direcionada que fortaleça a confiança e desempenho dos alunos nesta prova.

5.2.1.2 Segunda Parte do Questionário

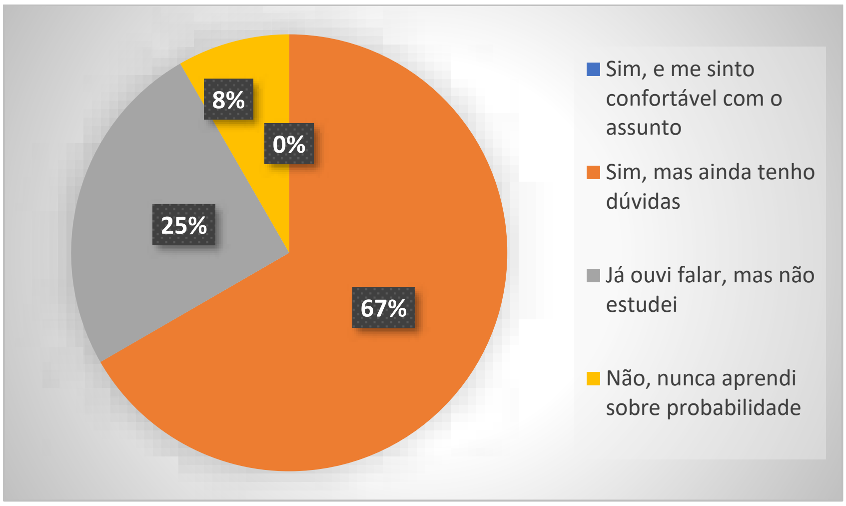
A segunda parte do questionário teve como principal objetivo analisar o conhecimento prévio dos alunos a respeito de Probabilidade, tendo em vista que é um conteúdo já é abordado no ensino fundamental. Essa análise é fundamental para verificar possíveis dificuldades na aprendizagem, sabendo que, possivelmente, tem um certo tempo que eles se depararam com o mesmo.

A partir dessa análise, torna-se possível obter um diagnóstico acerca do conhecimento prévio dos alunos e como conduzir a aplicação do problema, tendo em vista que esse conhecimento é fundamental para que seja feita uma abordagem pedagógica, podendo ser ajustado durante a aplicação da proposta.

Essa parte do questionário foi dividida em 2 (duas) questões objetivas e 3 (três) questões discursivas. Essa divisão teve como finalidade proporcionar uma análise mais detalhada do conhecimento dos alunos a respeito do tema a ser trabalhado. As questões objetivas foram elaboradas para o obter resultados mais diretos, enquanto as questões discursivas tiveram como foco a análise do conhecimento prévio dos alunos sobre aplicações de Probabilidade no cotidiano.

A primeira pergunta foi elaborada no formato objetivo e, teve como foco obter um diagnóstico a respeito dos estudos passados sobre o conteúdo de Probabilidade visto na escola, para que assim se possa proceder a respeito de um conhecimento prévio que os alunos possam vir a ter. Veja o Gráfico 08 com as respostas dos alunos.

Gráfico 08 – Contato do estudante com Probabilidade na escola.



Fonte: O autor (2025).

Nota-se que nenhum dos alunos que responderam ao questionário se sente plenamente confortável com o assunto de Probabilidade. Esse dado sugere uma possível dificuldade na assimilação e retenção do conteúdo, que pode estar associada ao tempo decorrido desde a última vez em que os estudantes tiveram contato com Probabilidade no ambiente escolar. Além disso, a ausência de revisões ao longo dos anos pode ter contribuído para um enfraquecimento da base conceitual, dificultando a memorização dos conhecimentos adquiridos anteriormente.

Essa informação pode ser reforçada pelo fato de se observar que 67% dos alunos responderam que já estudaram Probabilidade, mas que ainda tem uma certa dúvida sobre o conteúdo. Além disso, é importante considerar que essa dúvida pode ter surgido devido a compreensão dos alunos em relação ao seu nível de domínio do assunto, ou seja, ao responderem "sim, e me sinto confortável com o assunto" na primeira pergunta, eles poderiam ter interpretado que essa escolha implicaria em um conhecimento aprofundado de Probabilidade, o que pode ter levado a uma resposta mais cautelosa.

Por fim, 25% dos alunos responderam que já ouviram falar sobre o tema, mas que nunca tinham estudado a respeito e, além disso, 8% nunca aprendeu sobre Probabilidade. Esses dados sugerem que, pelo menos, 33% dos alunos detém um possível déficit sobre o conteúdo, mesmo sendo um conteúdo previsto introduzido no ensino fundamental e aprofundado no ensino médio.

Como mencionado no início da seção, o principal objetivo do questionário é uma aplicação autônoma e sigilosa. Entretanto, é importante destacar que em um comentário oral durante a aplicação, um(a) dos(as) alunos(as) comentou: "eu lembro de ter visto algo sobre Probabilidade durante uma atividade na pandemia[7]". Essa informação é bem relevante, pois evidencia um possível déficit na aprendizagem de alguns conteúdos de Matemática durante o período de quarentena.

A segunda e terceira pergunta, ambas de natureza dissertativa, objetivou verificar o conhecimento dos alunos sobre Probabilidade, solicitando que eles escrevessem o que compreendem a respeito do tema, definindo e citando aplicações, respectivamente. Essa abordagem permitiu que os alunos pudessem se expressar de forma clara de acordo com sua familiaridade com o conteúdo.

Para essas questões, os alunos foram numerados estrategicamente, para que se permita ter uma análise mais minuciosa em relação a ambas as perguntas. Essa abordagem permite que se possa verificar conhecimento a respeito de Probabilidade e como visualizavam sua aplicabilidade em diferentes contextos.

Em relação à escrita dos alunos, as respostas foram ajustadas apenas no que diz respeito a concordância gramatical e a correções ortográficas, garantindo que a estrutura textual estivesse adequada às normas da língua portuguesa. Esses ajustes foram realizados de forma cuidadosa, preservando integralmente o sentido original das respostas fornecidas pelos estudantes. Dessa maneira, pode-se assegurar que as ideias escritas por eles fossem mantidas, ao mesmo tempo que se facilita a sua análise e interpretação.

A respeito das respostas, entre os 12 alunos que responderam, 6 (seis) disseram que não tinham conhecimento sobre o tema. Para facilitar a análise, as respostas foram numeradas (de 1 a 6) de acordo com a resposta da segunda questão, para que se possa comentar a respeito da definição mencionada pelos alunos e como eles visualizavam a aplicação da Probabilidade. Veja o Quadro 04 que apresenta de forma clara as respostas obtidas.

Quadro 04 – Respostas dos alunos na segunda e terceira questões (1 a 6).

Número	Segunda pergunta	Terceira pergunta
1	Tenho pouco conhecimento, o que sei é que usamos uma divisão.	Probabilidade de ganhar na loteria.

[7] Pandemia que se refere ao covid-19, em que os alunos tinham aulas *online* e resolviam atividades impressas com devolutivas semanais.

2	Só sei que é usado uma divisão entre números para se chegar a uma porcentagem.	A probabilidade de uma mulher engravidar.
3	Não tenho conhecimento sobre esse tema.	Não sei.
4	Não lembro bem.	Não sei.
5	Não sei, infelizmente não lembro.	Não sei.
6	Não sei.	Probabilidade de chover, ganhar na loteria, etc.

Fonte: O autor (2025).

Observa-se que os alunos que apresentaram as respostas 1 e 2 mostraram uma certa familiaridade com o tema probabilidade, associando-a a uma razão, além de apresentarem dois exemplos de aplicações e, mais detalhadamente, o(a) aluno(a) que deu a resposta número 2 avançou um pouco mais ao lembrar que o tema também estava relacionado a porcentagem. Por outro lado, as respostas obtidas, pelos alunos de número 3, 4, 5 e 6, na segunda pergunta não apresentaram nem o mínimo de conhecimento sobre o tema, respondendo que não sabiam nada a respeito.

Entretanto, ao analisar a resposta do(a) aluno(a) de número 6, nota-se uma certa contradição. Embora o estudante tenha afirmado que não tinha nenhum conhecimento sobre probabilidade, ele foi capaz de apresentar dois exemplos de sua aplicação: a "Probabilidade de chover" e a Probabilidade de “ganhar na loteria". Esse fato sugere que, mesmo sem um conhecimento formal sobre o tema, o aluno tem uma compreensão intuitiva de seu uso no cotidiano.

Em relação aos outros 6 (seis) alunos, eles apresentaram possuir certo conhecimento a respeito do tema. Esses alunos foram numerados de 7 a 12 para que se possa diferenciar suas respostas dos 6 (seis) alunos apresentados na Tabela 09 e, assim, verificar o quanto de conhecimento eles possuem a respeito de Probabilidade. Veja a seguir o Quadro 05 com essas respostas.

Quadro 05 – Respostas dos alunos na segunda questão (7 a 12).

Número	Segunda pergunta	Terceira pergunta
7	Probabilidade é para determinar o resultado de alguma circunstância.	Por exemplo, uma moeda tem dois lados, quando a jogamos, terá uma probabilidade de qual lado vai ficar para cima.
8	Probabilidade é algo que pode ou não acontecer dependendo da possibilidade aplicada. Por exemplo: A uma	Investimentos é um exemplo bom. Quando se faz um investimento terá uma certa probabilidade de gerar lucro ou não.

	probabilidade de 2 alunos acertar essa questão.	
9	Probabilidade é a porcentagem de algo acontecer. Probabilidade é o que é provável.	Clima, onde apresenta uma possibilidade de chover ou fazer sol.
10	Probabilidade é a possibilidade de aquilo acontecer, ou seja, quantos porcentos é provável acontecer algo.	Qual a probabilidade de eu dormir até determinado horário do dia?
11	Pode ser algo que indica as chances, em forma de porcentagem, para saber se algo vai acontecer ou não.	A previsão do tempo, que pode mostrar a probabilidade de chover.
12	Probabilidade é a chance de um evento acontecer na Matemática. Ela estuda os resultados e experimentos aleatórios.	A probabilidade é muito usada pelas pessoas no dia a dia, como o cálculo da possibilidade de passar em uma prova ou até mesmo em outras coisas.

Fonte: O autor (2025).

Observa-se que os 6 (seis) alunos definiram probabilidade como a possibilidade de um determinado evento ocorrer, demonstrando um certo nível de compreensão sobre o conceito. Essas respostas obtidas demonstram que esses alunos possuem com certo conhecimento intuitivo de Probabilidade, especialmente relacionadas aos aspectos presentes no cotidiano.

Quanto à terceira pergunta, os alunos apresentados na tabela demonstram aplicações bem consistentes sobre probabilidade. Suas respostas evidenciam uma capacidade de visualização do conceito no cotidiano, onde foram citados exemplos relacionados a previsões climáticas, investimento, estimativa de ocorrência de determinado evento, entre outros.

A quarta pergunta teve como objetivo avaliar o conhecimento básico dos alunos sobre o tema da probabilidade, por meio de uma questão simples relacionada à sua aplicação em previsões climáticas. A questão foi estruturada no formato de múltipla escolha, contendo 4 (quatro) alternativas, das quais apenas 1 (uma) era correta. Ao analisar as respostas, observou-se que 100% dos alunos presentes acertaram a questão. Esse resultado indica que, mesmo aqueles que, na segunda pergunta, declararam não possuir qualquer conhecimento sobre probabilidade, há, na prática, uma noção mínima e funcional do conceito. Essa informação reforça a hipótese de que, embora não reconheçam formalmente seu conceito, os alunos já têm contato com ideias probabilísticas no cotidiano.

Por fim, a quinta e última pergunta, de caráter discursivo, teve como principal objetivo investigar os conhecimentos dos alunos quanto a importância do conhecimento probabilístico na tomada de decisões, especialmente em contextos como investimentos financeiros, avaliação de riscos e prevenção contra golpes, como os comumente encontrados em jogos de azar. Todos os alunos responderam de forma positiva, reconhecendo que o conhecimento em probabilidade pode, de fato, ser um aliado importante nesses cenários.

Quanto às suas respostas, parte dos alunos complementou as afirmações com justificativas claras, demonstrando a capacidade de aplicar esse saber em contextos reais. Outros optaram por respostas mais objetivas e diretas, sem desenvolver maiores explicações. Esses resultados, organizados e apresentados no Quadro 06, de acordo com a numeração estabelecida nas terceira e quarta perguntas, reforçam a ideia de que os estudantes, mesmo com diferentes níveis de aprofundamento, compreendem a utilidade da probabilidade na vida prática e reconhecem seu valor como ferramenta de apoio à tomada de decisões conscientes, seguras e responsáveis.

Quadro 06 – Respostas dos alunos na quinta pergunta.

Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
1	Pode, para saber se aquilo é confiável, ou se vai ter algum prejuízo.	**7**	Sim, pois ajuda a compreender o que acontece em determinado assunto, os que são mais frequentes.
2	Sim, já que os números podem esclarecer as chances de algo dar certo ou não.	**8**	Pode sim.
3	Sim.	**9**	Sim, quando sabemos a probabilidade de algo podemos tirar conclusões a respeito.
4	Com certeza! Você vendo que um investimento tem uma probabilidade de crescer e estabilizar-se no topo, obviamente, você irá adquirir.	**10**	Ela é de suma importância, pois a partir dela podemos tomar decisões corretas. Por exemplo, em uma aposta esportiva em um jogo de “Palmeiras x Corinthians”, a banca está pagando 1,30 no Corinthians e 2,89 no Palmeiras, isso significa que o Corinthians tem maior probabilidade de ganhar.
5	Sim, todo conhecimento é importante principalmente para não ser pego em golpes.	**11**	Sim, saber probabilidade pode ajudar a escolher um bom investimento.
6	Pode ajudar, pois saber se algo pode dar certo ou errado, com mais precisão.	**12**	Acho que sim, porque você pode ter uma noção da melhor forma de fazer o investimento.

Fonte: O autor (2025).

Dessa forma, observa-se que os alunos que responderam ao questionário demonstraram possuir, em maior ou menor grau, algum conhecimento sobre o tema da probabilidade. Mesmo aqueles que, em determinados momentos, afirmaram não ter familiaridade com o assunto, revelaram, por meio de suas respostas, compreensões implícitas e noções práticas que indicam contato prévio com o conceito.

Um aspecto que deve ser levado em consideração é a resposta do Aluno 10, demonstrando uma certa compreensão a respeito das *bets* (casas de apostas). Esse fator merece uma atenção especial considerando diversos problemas envolvendo essas casas de apostas já comentadas no decorrer do trabalho. Essa percepção demonstrada pelo aluno pode indicar um ponto de partida importante para discussões mais amplas em sala de aula sobre os impactos negativos das apostas online e a necessidade de uma postura crítica diante desse fenômeno cada vez mais presente no cotidiano

Por fim, essa possível discrepância entre o que os alunos acreditam saber e o que efetivamente demonstram em suas respostas sugere que o conhecimento sobre probabilidade já está presente em suas experiências cotidianas, embora muitas vezes não seja reconhecido como tal. Esse dado é valioso para o planejamento pedagógico, pois aponta a importância de trabalhar a partir desses saberes prévios, os valorizando e ampliando por meio de uma abordagem entre teoria e prática de forma significativa.

5.2.2 Aplicação dos Materiais

Para a aplicação dos materiais, houve uma pequena discrepância, de um pouco mais de um mês, em relação à aplicação do questionário. Isso foi devido algumas demandas específicas da escola. Entre essas demandas, destacam-se a necessidade de revisar para a prova, a aplicação de provas bimestrais, tais como suas correções e geração de notas, bem como a participação em capacitações de recomposição de aprendizagem. Ainda assim, o professor pesquisador conseguiu reorganizar seus cronogramas para a aplicação dos materiais antes do recesso escolar do mês de junho.

Dos 5 (cinco) materiais que foram construídos, ocorreu a aplicação de 3 (três) deles, devido as demandas já especificadas anteriormente. Essa quantidade representa uma margem sólida para se obter resultados satisfatórios. Além disso, acredita-se que essa estratégia permitirá ajustes e aperfeiçoamentos pontuais, caso necessário, para otimizar ainda mais o impacto da intervenção.

Para a aplicação da proposta e tendo em vista que o diálogo ocorra de forma fluída sem nenhuma divulgação de nomes, utilizaremos pseudônimos para os alunos, dos quais nomeamos os grupos como G_1, G_2, G_3, ..., G_n e os alunos como A_1, A_2, A_3, ..., A_n. Por exemplo, se nos referirmos ao aluno 3 do grupo 2, o chamaremos de G_2A_3. Essa nomeação ocorrerá de acordo com a aplicação de cada atividade, já que cada problema requer uma formação de grupos diferentes.

5.2.2.1 Aplicação do Material Mapa do Parque

A aplicação do primeiro material ocorreu nos dias 21 e 22 de maio de 2025 em 2 (duas) aulas da disciplina de Matemática, ministrada pelo próprio pesquisador, onde, em ambos os dias, estiveram presentes os 14 alunos da turma em questão, o que possibilitou o desenvolvimento integral da atividade proposta.

Inicialmente, o professor pesquisador separou a turma em 4 (quatro) grupos, distribuídos da seguinte forma: 2 (dois) grupos compostos por 3 (três) alunos cada e 2 (dois) grupos compostos por 4 (quatro) alunos cada. Essa divisão dos grupos foi pensada tendo como principal critério a interação entre os mesmos.

Na sequência, foi apresentado o material nomeado como Mapa do Parque (ver Apêndice B). Além disso, cada aluno recebeu um “bonequinho” que o representaria ao longo do percurso no mapa, além de uma ficha individual de registro para anotar 5 (cinco) rodadas. Nessa ficha, o aluno deveria indicar, após cada rodada, se “Chegou à Área IV” ou “Não Chegou à Área IV”, conforme o desfecho de sua jogada.

Após a divisão dos grupos e entrega dos materiais aos mesmos, o professor pesquisador explicou as regras do jogo, conforme descritos a seguir:

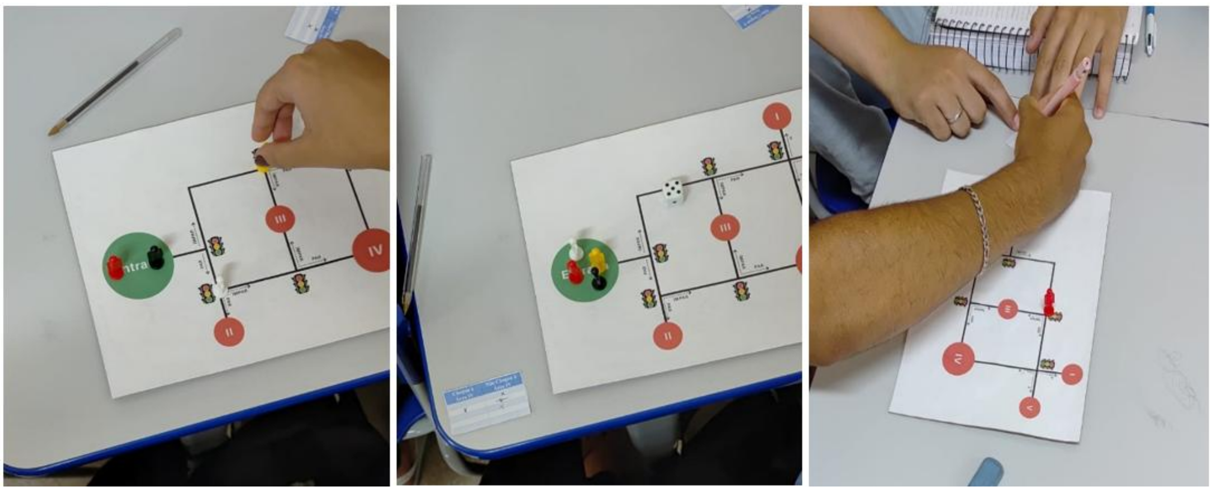
1) Cada aluno efetuará um lançamento de dado e seguirá, no mapa, pelo caminho correspondente ao resultado obtido. Por exemplo, ao lançar o dado e sair o número 3 (três), o aluno começará a jogada seguindo pelo caminho que indica o “ímpar” até parar no próximo semáforo e aguardará o colega fazer a próxima jogada.

2) O percurso contém apenas uma ramificação com 3 (três) caminhos possíveis. Nesse caso, o caminho que o aluno seguirá dependerá do resultado observado no dado, ou seja, caso saia os números 1 e 2 no dado, o aluno seguirá pelo caminho 1, ao sair os números 3 e 4, o aluno seguirá pelo caminho 2, da mesma forma, se sair os números 5 e 6, o aluno seguirá pelo caminho 3.

3) O principal objetivo do jogo é chegar à Área IV no mapa. Dessa forma, caso o aluno chegue em outra área além da IV, ele retornará para o início e marcará na ficha que não conseguiu chegar à área IV e repetirá esse procedimento até concluir as 5 (cinco) jogadas previstas.

Após toda explicação das regras, foi feita uma rodada de teste para que os alunos compreendessem melhor as regras propostas e em seguida, os alunos começaram a fazer seus lançamentos de dados, conforme a Figura 08.

Figura 08 – Registro da aplicação do material Mapa do Parque.



Fonte: O autor (2025).

Esse registro de possibilidades obtidas e manuseio do material didático está em consonância com a BNCC, especificada pela habilidade (EM13MAT311)[8]. Além disso, Lorenzato (2012) fala da importância dessas atividades práticas quando destaca que,

> Para um mesmo MD, há uma diferença pedagógica entre a aula em que o professor apresenta oralmente o assunto, ilustrando-o com um MD, e a aula em que os alunos, manuseiam esse MD. O MD é o mesmo, mas os resultados do segundo tipo de aula serão mais benéficos à formação dos alunos porque, de posse do MD, as observações e reflexões deles serão mais profícuas, uma vez que poderão, em ritmos próprios, realizar suas descobertas e, mais facilmente, memorizar os resultados obtidos durante suas atividades. (Lorenzato, 2012, p. 27).

Após a conclusão e registro nas fichas individuais das 5 (cinco) rodadas de cada componente dos grupos, se chegou a um resultado quantitativo bem curioso e digno de reflexão, dos quais apresentaremos em seguida.

O Grupo 1, composto por 3 (três) alunos, obteve um total de 3 (três) sucessos, sendo que cada aluno conseguiu chegar à Área IV uma única vez durante as 5 (cinco) tentativas. Isso resultou em uma taxa de sucesso de $\frac{3}{15} = 20\%$.

[8] Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades (Brasil, 2018, p. 546).

O Grupo 2, também composto por 3 (três) alunos, apresentou um desempenho semelhante. Um aluno conseguiu chegar à Área IV em 2 (duas) ocasiões, enquanto o segundo aluno obteve êxito uma única vez, por fim, o terceiro aluno não obteve sucesso em nenhuma das 5 (cinco) tentativas. Dessa forma, analisando o desempenho do grupo, obtemos novamente 3 (três) sucessos em 15 rodadas, mantendo a taxa de sucesso de $\frac{3}{15} = 20\%$.

No Grupo 3, formado por 4 (quatro) alunos, verificou-se um desempenho ligeiramente superior aos anteriores. 3 (três) alunos conseguiram chegar à Área IV uma única vez, enquanto um aluno obteve sucesso em 2 (duas) rodadas, totalizando um desempenho de 5 (cinco) sucessos em 20 tentativas. A taxa de sucesso do grupo foi de $\frac{5}{20} = 25\%$.

Por fim, o Grupo 4, também formado por 4 (quatro) alunos, obteve desempenho superior aos grupos anteriores, uma vez que 2 (dois) alunos conseguiram chegar à Área IV duas vezes, enquanto os outros 2 (dois) alunos conseguiram êxito uma única vez. Totalizando uma taxa de sucesso do grupo de $\frac{6}{20} = 30\%$.

A análise geral dos dados revela que, dos 14 (quatorze) alunos participantes, 9 (nove) conseguiram alcançar a Área IV uma única vez, 4 (quatro) alunos conseguiram chegar à área duas vezes, e 1 (um) aluno não obteve sucesso em nenhuma jogada. Considerando a moda da distribuição – ou seja, o resultado mais frequente – observa-se que a frequência mais comum de sucesso foi a de uma única chegada à Área IV, indicando um padrão predominante de desempenho entre os alunos de 20%, valor muito próximo da resposta correta da questão do ENEM ao qual o material foi construído que foi a Alternativa C, apresentando $\frac{5}{24} \approx 20{,}83\%$.

Por outro lado, ao calcular o percentual médio de sucesso com base no total de jogadas realizadas (5 jogadas por aluno dos 14 presentes), obteve-se um total de 17 acertos de 70 rodadas, o que resulta em uma taxa média de $\frac{17}{70} \approx 24{,}28\%$ de êxito geral entre todos os participantes. Curiosamente, esse resultado se assemelha à Alternativa D do mesmo problema, que apresenta $\frac{1}{4} = 25\%$, um resultado incorreto para o problema.

Entretanto, embora a média de acertos da turma esteja mais próxima de uma alternativa incorreta, o valor ainda tem proximidade com o resultado correto, apresentando uma pequena margem de erro de, aproximadamente, 3,45%. Essa discrepância pode ser atribuída ao número relativamente reduzido de tentativas, o que pode limitar o resultado obtido no experimento. Esse fato pode ser evidenciado segundo um fundamento do estudo de probabilidade: a necessidade de um número suficientemente grande de repetições para que os resultados se aproximem dos valores esperados.

Nesse sentido, Morgado (2016, p. 6) explica que a Lei dos Grandes Números afirma que "se dois eventos são igualmente prováveis, após um grande número de experimentos eles terão sido obtidos aproximadamente o mesmo número de vezes. O Teorema permite também deduzir qual a probabilidade de cada um dos eventos acontecer".

Após o manuseio do material, foi entregue uma folha para cada aluno de cada grupo com a questão proposta pelo ENEM, então o pesquisador deu um tempo para que os alunos fizessem a leitura do problema e, em seguida, iniciou-se o seguinte o diálogo:

[Diálogo com a turma]
(1) Professor – Quantos caminhos existem para se chegar à Área IV sem passar por nenhuma outra área?
Três alunos responderam ao mesmo tempo:
(2) G_1A_2, G_2A_1 e G_4A_3 – 2 caminhos.
(3) Professor – Todos os caminhos tem o mesmo número de ramificações?
(4) Alguns alunos – Sim.
(5) Outros alunos – Não.

Nessa hora, iniciou-se um debate entre os alunos até alguns alunos perceberem que existe uma única ramificação com 3 (três) caminhos distintos, os quais estavam representadas por semáforos no material construído e apresentado na aula anterior.

Nota-se ainda que, de imediato, a maior parte da turma conseguiu compreender que existiam 2 (dois) caminhos possíveis para se chegar à Área IV sem passar por nenhuma outra área, já que durante o manuseio do material, eles tiveram a compreensão dos seus objetivos para "ganhar o jogo". Em seguida, o diálogo continuou:

[Diálogo com a turma]
(1) Professor – Como todos compreenderam que existem dois caminhos possíveis, eu gostaria de saber: a probabilidade de chegar à Área IV é a mesma para ambos os caminhos?
(2) G_1A_2 – Eu não sei se são iguais, mas o meu grupo não conseguiu chegar nenhuma vez pelo caminho de cima.
(3) Professor – Levantem a mão quem conseguiu chegar à Área IV pelo caminho de cima.
Nesse momento, três alunos levantaram a mão.
(4) Professor – Com base no que discutimos, alguém sabe dizer o que torna possivelmente o caminho de cima mais difícil de se alcançar à Área IV?
(5) G_3A_3 – Provavelmente o semáforo com três caminhos, já que existem 3 caminhos e apenas um deles é o correto.

A partir desse pequeno diálogo, podemos notar que os alunos, mesmo que de forma indireta, compreenderam que os caminhos apresentavam probabilidades diferentes para se chegar ao objetivo, com o caminho de cima tendo uma probabilidade menor.

Em continuidade à atividade, o professor apresentou o resultado dos registros dos alunos feito na aula anterior, com 9 (nove) dos 14 alunos terem conseguido chegar à Área IV uma única vez. Essa devolutiva, além de promover o que foi vivenciado na prática, serviu como uma pista ou indício que provocaria a reflexão da turma sobre a questão que estava em foco, incentivando-os a buscar uma possível solução a partir da própria experiência. Então se iniciou um novo diálogo:

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) Professor – Com base nessa breve informação, ao escolher uma alternativa na questão, qual vocês escolheriam?
> (2) G_3A_4 – Eu iria em 1/4, já que a maioria chegou 1 vez e não chegaram 4 vezes, então a alternativa correta é a C.

A resposta do aluno G_3A_4 revela uma interpretação equivocada, porém bastante comum, no contexto do ensino da probabilidade. O estudante fundamenta sua escolha em uma comparação entre o número de vezes em que o objetivo foi atingido (1 vez) com o número de vezes que o objetivo não foi atingido (4 vezes) assumindo que essa proporção representa corretamente a probabilidade do evento.

Essa situação, portanto, não apenas revela uma concepção alternativa sobre probabilidade, mas também aponta para a importância de trabalhar com mais intensidade a definição de espaço amostral. Nesse sentido, a intervenção do professor ao apresentar os dados e provocar o raciocínio dos alunos abre um espaço para identificar e desconstruir tais concepções, caminhando progressivamente para uma compreensão mais robusta dos conceitos probabilísticos.

Em seguida, o professor decidiu apresentar a solução do problema, provocando, mais uma vez, o diálogo entre os alunos. Ao iniciar a solução pelo caminho de baixo, nota-se para se chegar ao objetivo, o dado precisa sair em três jogadas consecutivas a seguinte sequência: par, ímpar e par. Sabendo disso, o professor fez o seguinte questionamento:

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) Professor – Qual a probabilidade de, no primeiro lançamento, o dado resultar em um número par?
> (2) Maioria da turma – 50%.
> (3) Professor – Fácil, né? Mas, vejam que, para chegar à Área IV, o dado precisa seguir uma sequência de três resultados de 50%.

Nesse momento, observou-se um certo grau de confusão entre os alunos, então o professor decide melhorar o diálogo.
(4) Professor – Vejam bem, para seguir pelos semáforos, os resultados do dado, precisam ser, nessa ordem: par, ímpar e par. Onde todos tem igual probabilidade de 50%.
Na mesma hora, um dos alunos já questiona o professor sobre a probabilidade do caminho de cima.
(5) G_1A_2 – Ah, então é por isso que a probabilidade do caminho de cima é menor, já que no último semáforo existem três caminhos, o que faz a probabilidade ser menor do que 50%.
(6) Professor – Vamos com calma, chegamos já lá.
(risos).

A resposta do aluno G_1A_2 demonstra que a construção do raciocínio probabilístico começava a ganhar consistência entre os estudantes, ainda que algumas ideias ainda necessitassem de lapidação. Essa intervenção evidencia uma progressiva mobilização de conceitos fundamentais para o entendimento das probabilidades compostas e das ramificações do espaço amostral.

Em seguida, o professor formalizou o cálculo da probabilidade de se chegar à Área IV pelo caminho de baixo, utilizando a multiplicação das probabilidades em cada ramificação, sendo $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. A apresentação do cálculo, associada a representação concreta das ramificações representada por um semáforo, contribuiu significativamente para que os alunos compreendessem a lógica por trás da resolução.

Do mesmo modo, o professor decidiu apresentar a probabilidade do caminho de cima, conforme tinha sido questionado pelo aluno G_1A_2 no diálogo anterior. Esse movimento foi estratégico, pois aproveitou o interesse espontâneo da turma para aprofundar a discussão e promover a comparação entre os dois trajetos possíveis até à Área IV. Então seguiu com o seguinte diálogo:

[Diálogo com a turma]
(1) Professor – Nesse caso, também teremos três probabilidades de 50%?
Os alunos já tendo ciência do que foi discutido anteriormente, reagiram com entusiasmo:
(2) Toda a turma – Não!
(muitos risos)
(3) Professor – Então como ficaria essa probabilidade?
(4) G_1A_2 – A probabilidade no último semáforo é de 1/3.

A resposta apresentada pelo aluno evidenciou um certo grau de assimilação dos conceitos da probabilidade, ou seja, enquanto no caminho de baixo as escolhas eram sempre binárias (par ou ímpar, com 50% de chance cada), no caminho de cima o último semáforo apresentava três opções possíveis, o que altera significativamente o cálculo. A partir disso, o professor finalizou a probabilidade do caminho superior apresentando o produto das probabilidades de cada ramificação, sendo P = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

Ao apresentar esse resultado, o professor reforçou a importância de analisar cuidadosamente cada etapa do percurso, destacando que as probabilidades associadas a cada uma delas podem variar, especialmente quando o número de possibilidades não é constante em todas as etapas, como é o caso das ramificações do problema.

Para concluir a atividade, o professor apresentou a solução final da questão do ENEM, destacando que a solução final é a soma das probabilidades do caminho superior e do caminho inferior. Nesse momento, além de trabalhar conceitos de probabilidade, o professor aproveitou a oportunidade para reforçar a importância do estudo da matemática básica como a soma de frações. O cálculo apresentado foi seguinte: P = $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$. Após a apresentação, seguiu o seguinte diálogo:

> **[Diálogo com a turma]**
> (1) Professor – Vocês perceberam algo nesse resultado em comparação ao registro feito por vocês nas rodadas?
> *Nesse instante, os alunos ficaram confusos com a pergunta, então o professor decidiu converter a fração encontrada para porcentagem, resultando em, aproximadamente, 20,83%*
> (2) Professor – Vejam que a maioria dos alunos chegaram à Área IV uma única vez (9 alunos), o que representa uma probabilidade de 20%.
> *Os alunos ficaram impressionados com a aproximação dos resultados.*
> (3) G_3A_1 – Então quer dizer que, fazendo lances aleatório, encontramos o mesmo resultado?
> *Nesse momento, é importante que o aluno tenha ciência da complexidade da pergunta feita.*
> (4) Professor – Depende. Mas é bem provável que com uma quantidade suficientemente grande de experimentos se obtenha resultados próximo da probabilidade teórica.

Essa aproximação entre os dados registrados e o resultado teórico final (20% e 20,83%) foi especialmente significativa, pois demonstrou aos alunos a validade dos modelos matemáticos na representação do material concreto com a realidade e reforçou a importância de experimentações como ferramenta de aprendizagem.

Em suma, a proposta não apenas promoveu o desenvolvimento de habilidades matemáticas, como também contribuiu para a formação de atitudes investigativas, o trabalho colaborativo e a valorização do erro como parte do processo de aprendizagem. A condução cuidadosa e intencional do professor foi essencial para promover uma abordagem por meio de diálogo, alinhada aos princípios de uma educação criativa, crítica e reflexiva.

5.2.2.2 Aplicação do Material Campo Minado

A aplicação do segundo material ocorreu nos dias 28 e 29 de maio de 2025 em 2 (duas) aulas de Matemática ministrada pelo próprio professor pesquisar, onde 11 alunos estiveram presentes no primeiro e segundo dia.

Para este material, a turma foi organizada em duplas, tendo em vista que o material proposto se desenvolve em forma de duelo. Dos 11 alunos presentes na sala, formaram-se 5 (cinco) duplas, restando um(uma) aluno(a), que participou da atividade em dupla com o professor pesquisador.

Após a divisão das duplas, foi apresentado o material intitulado Campo Minado (ver Apêndice D). Cada aluno recebeu 5 (cinco) fichas contendo duas áreas: uma área destinada para a construção própria do campo minado e outra para realização dos “ataques” no campo minado do adversário. Em seguida, o professor pesquisador explicou as regras do jogo, conforme descritas a seguir:

1) Cada aluno colocará, conforme sua preferência e sem que o adversário veja, 4 (quatro) minas na área destinada a construção própria do campo minado.

2) Em seguida, o aluno deverá preencher as demais casas com números de acordo com a quantidade de minas em suas casas adjacentes. Por exemplo, se uma determinada casa tem 2 (duas) minas ao redor, então o número inserido nessa casa deverá ser o 2.

3) Após a finalização da construção do campo por ambos os integrantes da dupla, os alunos deverão alternar jogadas, escolhendo coordenadas para tentar descobrir o campo do adversário, evitando acertar minas.

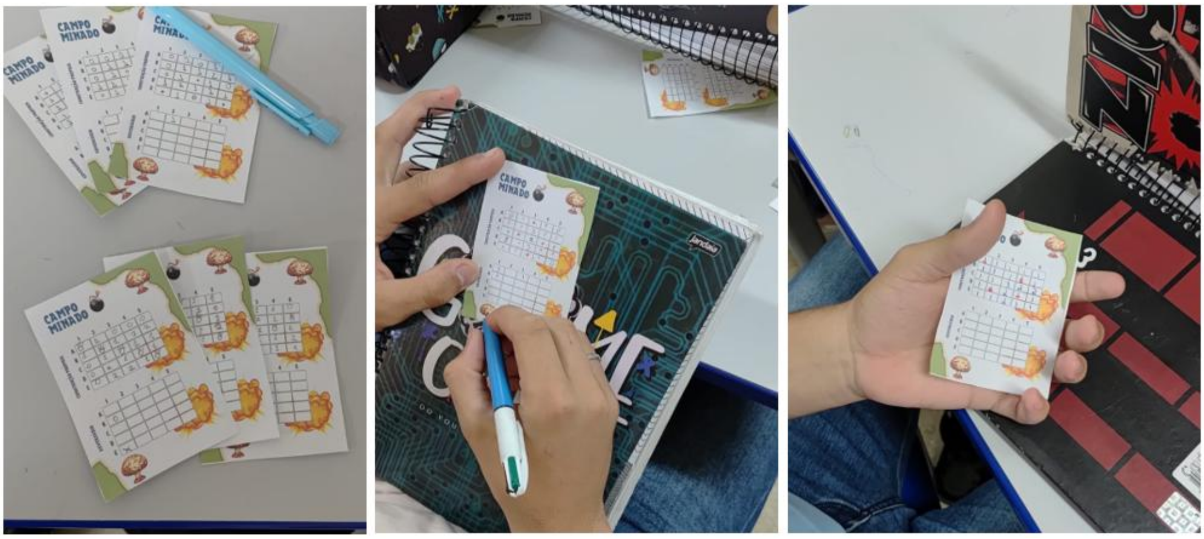
Após a explicação das regras, o professor pesquisador realizou uma demonstração prática da construção própria do campo minado, para que assim os alunos não tivessem nenhuma dúvida sobre suas construções. Essa etapa foi fundamental para esclarecer eventuais dúvidas sobre o posicionamento das minas e o preenchimento das casas com os números correspondentes às minas adjacentes.

Além disso, na primeira rodada, enquanto os alunos montavam seus próprios campos, o professor acompanhou o processo dupla a dupla. Nesse momento, foram identificados e corrigidos pequenos erros cometidos por alguns alunos, especialmente relacionados à contagem das minas adjacentes.

Após a construção dos campos, as duplas iniciaram as partidas com grande entusiasmo, foi possível perceber o envolvimento dos alunos com a atividade, demonstrando atenção às estratégias e às jogadas dos adversários. A proposta do jogo estimulou uma competitividade saudável entre os participantes.

Após o desenvolvimento dos duelos foi possível perceber uma troca de ideias e revisão dos seus raciocínios lógicos durante o decorrer das partidas. O clima na sala de aula era de empolgação, marcado por momentos de suspense e comemoração após alguma vitória. As tentativas de acertar as casas do campo minado do adversário despertaram nos estudantes uma postura investigativa, exigindo deles atenção, paciência e pensamento estratégico. Ver Figura 09.

Figura 09 – Registro da aplicação do material Campo Minado.



Fonte: O autor (2025).

A mecânica do jogo favoreceu o reforço de conceitos matemáticos, como coordenadas cartesianas e noções de probabilidade, além da tomada de decisões baseadas na análise de padrões e estratégias. A participação ativa e o interesse dos alunos durante toda a atividade evidenciaram o potencial pedagógico do material, que conseguiu aliar ludicidade e aprendizagem de forma eficaz.

Durante o segundo dia de aplicação, ocorreu um pequeno contratempo. No primeiro dia estiveram presentes 11 alunos, o que também ocorreu no segundo dia, entretanto, 2 (dois) dos alunos não estavam no primeiro dia e, consequentemente, 2 (dois) que estiveram no primeiro dia faltaram no segundo dia. Por esse motivo, foi necessário explicar novamente as regras do material para esses alunos que participaram da aplicação apenas no segundo dia.

Enquanto o professor pesquisador explicava as regras para os alunos que faltaram no primeiro dia, os demais alunos pediram para jogar mais algumas partidas com os colegas, o que demonstra grande entusiasmo dos alunos com o jogo. Este pequeno contratempo, assim como a demonstração de interesse por parte dos alunos pode ser evidenciado nas palavras de D'Ambrósio (2009) quando diz que,

> Uma das coisas mais notáveis com relação à atualização e ao aprimoramento de métodos é que não há uma receita. Tudo o que se passa na sala de aula vai depender dos alunos e do professor, de seus conhecimentos matemáticos e, principalmente do interesse do grupo. (D'Ambrósio, 2009, p. 98).

Enquanto os alunos jogavam mais algumas partidas de Campo Minado, ocorreu um diálogo interessante com o Grupo 3, no qual um aluno perguntou ao professor:

> **[Diálogo com o Grupo 3]**
> (1) G_3A_1 – Professor, o senhor viu que um menino de 12 anos quebrou o recorde mundial de Campo Minado?
> (2) Professor – Não fiquei sabendo.
> (3) G_3A_1 – Ele concluiu o campo minado grande em apenas 26 segundos.
> (4) Professor – Eita! Impressionante! Vou pesquisar a respeito, agradeço a informação.

Após o diálogo, o professor pesquisador ficou bem entusiasmado com o interesse do aluno e comprometeu-se de buscar a informação para discutir o assunto em outra oportunidade. Posteriormente, verificou-se que o aluno tinha razão: em 2020, um garoto chinês de apenas 12 anos chamado Ze-En Ju quebrou o recorde mundial de campo minado ao concluir a grade grande (16 x 30 com 99 minas) em apenas 29 segundos, superando o então campeão mundial, o polonês Kamil Muranski, que passou 11 anos no pódio com 31 segundos[9]. O mais impressionante é que, em 2022, o garoto chinês quebrou o próprio recorde reduzindo o tempo para apenas 26 segundos, entretanto ocorreu de forma casual, onde foi postado em suas redes sociais.

Após algumas partidas, o professor questionou a turma a respeito do jogo, então se iniciou o seguinte diálogo:

> **[Diálogo com a Turma]**
> (1) Professor – O que vocês acharam do jogo?
> (2) G_1A_1 – Muito bacana.
> (4) G_4A_1 – Bem interessante.

---

[9] Informação obtida no site: https://www.247minesweeper.com/news/amazing-minesweeper-world-records/.

(5) G_1A_2 – Só não gostei porque perdi quase todas.
Nesse momento, iniciou-se uma breve discussão sobre as vitórias e derrotas com os colegas com bastante entusiasmo e muitos risos.
(6) Professor – Algum grupo conseguiu ir até o final em uma partida e resultar em empate?
(7) G_2A_1 – Teve uma partida nossa que ficaram faltando umas 8 casas.
(8) G_1A_1 – Eu achei que tem muitas minas pra poucas casas.
Então o professor explicou o porquê da escolha de 4 (quatro) minas.
(8) Professor – A probabilidade de encontrar uma mina no primeiro lance se aproxima bastante do campo minado real, por isso que pedi para vocês colocarem 4 minas.

A partir daí, surgiu um pequeno debate para que o professor fizesse, posteriormente, um pequeno campeonato de campo minado seguindo a mesma lógica. Entretanto, tornaria o jogo mais atrativo e competitivo se o número de minas fosse reduzido para 3 (três), diminuindo a probabilidade de acertar a mina logo no início da partida.

Após a explicação das regras e ocorrência de mais algumas partidas entre os alunos, o professor distribuiu a questão do campo minado do ENEM para cada grupo, onde foi solicitado que cada grupo, inicialmente, tentasse responder o problema proposto. Após alguns minutos, iniciou-se o seguinte diálogo com o Grupo 1:

[Diálogo com o Grupo 1]
(1) Professor – Como está a resolução do problema?
(2) G_1A_1 – De cara já sabemos que não podem ser as alternativas A, D e E.
(3) Professor – Por quê?
(4) G_1A_1 – Veja que ao redor o número 4 há quatro minas e a letra S está ao redor do 4. Então, nessas 8 casas tem quatro minas, a chance de sair uma mina é muito alta.
(5) G_1A_2 – O mesmo ocorre com as letras T e P.

O grupo 1 rapidamente percebeu que a probabilidade de sair uma mina ao redor dos números 4, 3 e 2 é maior do que a probabilidade de sair uma mina ao redor do número 1, associado à letra Q. A maioria dos demais grupos tiveram um raciocínio bem semelhante. O problema se reduziu apenas a analisar as letras Q e R, onde se iniciou o seguinte diálogo com o Grupo 3:

[Diálogo com o Grupo 3]
(1) Professor – Conseguiram obter as probabilidades das alternativas que estão faltando?
(2) G_3A_1 – Apenas da letra Q, a letra R não sabemos fazer.
(3) Professor – Qual seria a solução da letra Q?
(4) G_3A_1 – Como tem 1 mina ao redor desses 8 quadradinhos, então a probabilidade é de 1/8, ou seja, 12,5%.
(5) Professor – Exatamente!

Os Grupos 1, 2 e 4 tiveram o mesmo raciocínio, o que demonstra um excelente conhecimento do campo minado, principalmente após várias partidas com os colegas. Então o professor procurou dialogar com os demais grupos para analisar o desempenho dos demais. Então se iniciou o diálogo com o Grupo 7 (grupo formado pelos alunos que haviam faltado no primeiro dia).

[Diálogo com o Grupo 7]
(1) Professor – Conseguiram eliminar alguma alternativa?
(2) G_7A_1 – Não tenho certeza.
Nesse momento o professor procurou incentivar o grupo.
(3) Professor – Será que pode ser essa alternativa D?
(4) G_7A_2 – Acho que não.
(5) Professor – Por que não? Compare o número de minas ao redor dela com os números das outras alternativas.
(6) G_7A_2 – Se aqui tem 4 minas (apontando para o número 4) e ali tem uma mina (apontando para o número 1), então é mais seguro escolher o Q.
(7) Professor – Exatamente! Então o que podemos tirar dessa análise?
(8) G_7A_1 – Que a alternativa correta é a B.
(risos)
(9) Professor – Pode até ser, mas temos que ter cuidado porque ainda temos que analisar essa letra R.

Ficou evidente nos diálogos em grupo e nos diálogos com o professor que os alunos demonstraram ter compreendido bem os conceitos de probabilidade envolvendo o número de minas ao redor de terminada casa no campo minado. Após uma análise cuidadosa todos os alunos chegaram à conclusão de que só poderia ser duas alternativas possíveis: a alternativa correspondente a letra Q e a alternativa correspondente a letra R.

Diante desse consenso inicial, o professor retomou o diálogo com a turma para que a análise fosse concluída de forma conjunta garantindo que todos entendessem os detalhes do problema. Dessa forma, se iniciou o seguinte diálogo:

[Diálogo com a Turma]
(1) Professor – Ao analisar a alternativa Q, alguns grupos conseguiram chegar à probabilidade de 1/8, já que tem uma única mina em um dessas 8 casas. Alguém conseguiu obter algum progresso na letra R?
(2) G_3A_1 – O jogo tem 40 minas, seria algo como 40/256?
(3) Professor – Raciocinou muito bem! Mas, veja que tem algumas casas abertas.
Nota-se que o aluno conseguiu utilizar muito bem a definição de probabilidade, faltando apenas uma pequena atenção para os quadradinhos que já estavam aberto.
(4) Professor – Mesmo que a gente não saiba onde estão as minas, mas quantas minas já estão possivelmente localizadas?
(5) G_1A_2 – Seria a soma desses números visíveis no campo minado?
(6) Professor – Exatamente! Notem que sabemos, mais ou menos, a localização de 10 minas do jogo, já que elas estão adjacentes a esses números.

Nesse momento, os alunos perceberam que ainda restavam 30 minas cuja localização ainda não era conhecida. Assim, os alunos notaram que basta analisar essas 30 minas com a quantidade de casas que restantes no tabuleiro. O professor foi questionado:

> **[Diálogo com a Turma]**
> (1) G_4A_1 – Então seria 30/252?
> (2) Professor – Ainda não! Notem que já temos todas as informações das casas abertas e das casas adjacentes aos números abertos, então temos que eliminá-las também.
> (3) G_1A_1 – Faz sentido! Então eliminamos esses grupos de 9 casas?
> (4) Professor - Isso mesmo.

Nesse momento, todos os alunos chegaram à conclusão de que a probabilidade de encontrar uma mina no número R seria de $\frac{30}{220}$. O único detalhe agora seria observar qual fração é menor $\frac{1}{8}$ ou $\frac{30}{220}$. Para isso, o professor solicitou que os alunos dividissem os valores e verificassem qual fração seria menor. Dessa forma, os resultados obtidos foram 0,125 e, aproximadamente, 0,136. Onde os mesmos concluíram que a alternativa correta seria a alternativa B que corresponde a letra Q.

Esse momento de diálogo e análise colaborativa favoreceu a prática da resolução de problemas e promoveu o incentivo à autonomia dos alunos na construção do conhecimento. Além disso, reforçou o raciocínio matemático e a importância da comparação de frações e probabilidades em situações práticas através do jogo proposto.

Ao final da atividade, o professor ainda reforçou que o objetivo principal não era apenas acertar a alternativa correta, mas compreender profundamente o raciocínio por trás da resolução do problema. Dessa forma, todos os alunos puderam perceber a relevância da análise de dados através de um material construído com esse fim.

Por fim, o professor ressaltou a importância da participação ativa de todos os grupos, elogiando o comprometimento e a colaboração de todos que participaram ativamente do processo. Ele encerrou a atividade com uma reflexão sobre como o trabalho em grupo pode ajudar na busca por uma aprendizagem de qualidade, e ainda destacando a relevância de estratégias de pensamento coletivo para solucionar desafios matemáticos do cotidiano.

5.2.2.3 Aplicação do Material Bingo

A aplicação deste material ocorreu no dia 05 de junho de 2025, em 2 (duas) aulas ministradas pelo próprio professor pesquisador. Na ocasião, estiveram presentes 8 (oito) alunos, o que representou uma leve limitação em termos de participação, considerando o número total da turma que é de 14 alunos. Entretanto, como a aplicação estava planejada para ocorrer no formato individual, não houve prejuízo na abordagem e nem nos resultados esperados pelo estudo.

Essa aplicação trouxe uma abordagem didática um pouco diferente dos demais materiais utilizados anteriormente, com o intuito de diversificar as estratégias pedagógicas e tornar o aprendizado mais dinâmico e significativo. Inicialmente, o professor entregou o problema para cada aluno presente e solicitou que eles tentassem resolvê-lo de forma individual e autônoma, sem auxílio direto, estimulando a leitura atenta, a interpretação e o raciocínio lógico. Para esta etapa, foi concedido um tempo de 20 minutos, considerado adequado para que os alunos pudessem se concentrar, refletir e buscar soluções de forma independente.

Após o tempo estipulado, o professor reuniu a turma novamente e apresentou a proposta principal da atividade, entregando uma cartela de Bingo (ver Apêndice E) para cada aluno. Em seguida, foram explicadas detalhadamente as regras do jogo, buscando garantir que todos compreendessem o funcionamento e os objetivos pedagógicos envolvidos na dinâmica.

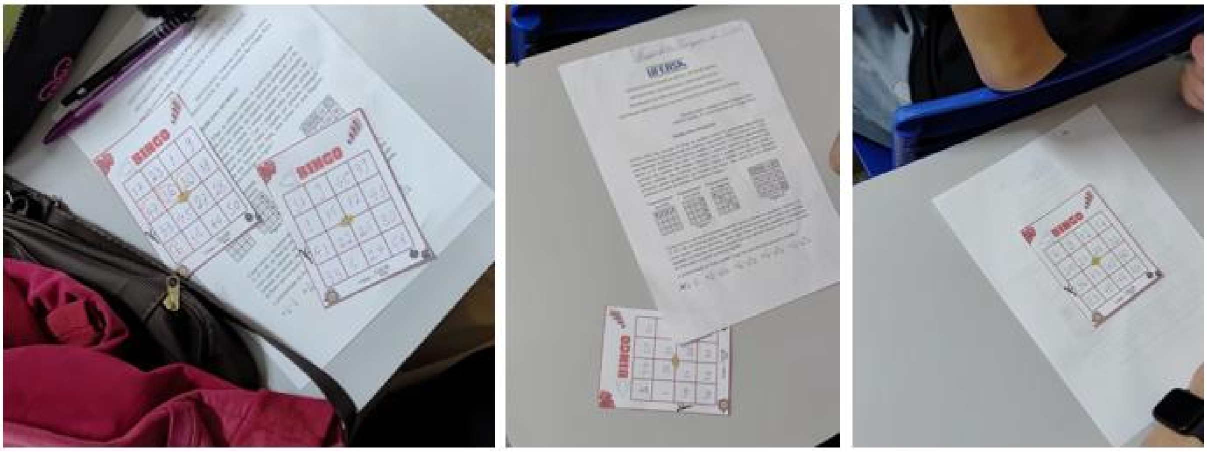
1) Cada aluno preencherá sua cartela com os números distintos de 1 a 50, posicionados conforme sua escolha. Posteriormente, o professor realizará uma verificação individual das cartelas para minimizar possíveis erros no seu preenchimento.

2) O objetivo do jogo é que o aluno que preencher completamente uma linha, uma coluna ou uma diagonal, será considerado o vencedor do sorteio.

3) Após todas as cartelas estarem devidamente preenchidas, o professor iniciou o sorteio dos números de 1 a 50. A cada 10 números sorteados, era feita uma breve pausa para promover um diálogo coletivo com a turma, abordando a verificação da probabilidade envolvida em cada situação, discutindo as chances de completar linhas, colunas ou diagonais e incentivando os alunos a refletirem sobre os conceitos probabilísticos aplicados de forma prática.

Os alunos ficaram bem entusiasmados com a possibilidade de jogar bingo, tendo em vista que, é um jogo bem popular. Após toda a explicação das regras de como ocorreria a aplicação, se iniciou o sorteio de cada número e marcação dos alunos nas cartelas, conforme ilustrado na Figura 10.

Figura 10 – Registro da aplicação do material Bingo.



Fonte: O autor (2025).

Após o sorteio dos primeiros 10 números, não houve nenhum ganhador. Nesse momento, o professor interrompeu o sorteio e iniciou o seguinte diálogo com a turma:

> **[Diálogo com a Turma]**
> (1) Professor – Alguém está com a cartela faltando apenas um número? *Lembrando que, para ganhar, basta completar uma linha, uma coluna ou uma diagonal.*
> (2) A_1 e A_8 – Eu.
> (3) Professor – Pois bem, eu pergunto aos dois: qual é a probabilidade de ganhar com a cartela faltando apenas um número?
> (4) A_8 – 1/40?
> (5) Professor – Exatamente! Vejam que um de vocês irá ganhar se sair um único número dos 40 que ainda restam.

Observa-se que os alunos já apresentam uma ótima base de probabilidade, conseguindo assimilar com facilidade tanto a sua definição quanto as aplicações práticas. Essa experiência evidencia um progresso significativo, possivelmente, derivados da aplicação dos materiais anteriores e sendo reformados com a integração e reforço proporcionados pela abordagem deste último material.

A sequência das atividades aplicadas tem fortalecido o raciocínio matemático dos estudantes, permitindo o avanço de forma confiante no tema de probabilidade. Essa evolução contribui diretamente para o desenvolvimento das competências essenciais no campo da matemática, estimulando o interesse e a participação ativa dos alunos nas aulas.

Após o diálogo, retomou-se o sorteio dos números. Onde na rodada 16, os alunos A_2 e A_8 completaram, respectivamente, uma linha e uma diagonal conquistando a vitória no primeiro sorteio. Em seguida, foi entregue outra cartela para cada aluno, onde, novamente, o professor solicitou para que cada aluno preenchesse as cartelas de acordo com sua escolha.

Na sequência, iniciou-se um novo sorteio. Sem nenhum ganhador até a 10ª rodada, o professor seguiu com o diálogo:

[Diálogo com a Turma]
(1) Professor – Dessa vez, a pergunta é um pouco diferente: algum de vocês está com 2 números marcados em uma mesma linha, coluna ou diagonal?
(2) A_1 – A minha tem uma diagonal com 2 números.
(3) A_2 – A minha tem uma coluna.
(4) A_7 – A minha também.
(5) Professor – Pois bem! A pergunta agora é um pouco mais desafiadora: qual é a probabilidade de algum de vocês, separadamente, ganhar nas duas próximas rodadas?
(6) A_1 – Para eu ganhar na diagonal, precisa sair os números 07 e 39, então seria 2/40?
(7) Professor – Observe que sua resposta se referente apenas à probabilidade de sair os números 07 ou 39 na próxima rodada. Se fosse apenas isso, a sua probabilidade estaria correta. Entretanto, para que você ganhe, precisam sair, nas duas próximas rodadas, os números 07 e 39.
Nesse momento, o professor explicou a diferença entre os conectivos "e" e "ou" no contexto da probabilidade.
(8) Professor – Vamos por parte: qual a probabilidade de sair o número 07 ou 39 na próxima rodada?
(9) A_1, A_3 e A_8 – 2/40.
(10) Professor – Perfeito! Guardem essa probabilidade. Agora eu pergunto: saindo um desses números na próxima rodada (por exemplo o 07), na rodada seguinte, qual a probabilidade de sair o outro número (por exemplo, o 39)?
(11) A_1 – Seria 1/39?
(12) Professor – Muito bem! Portanto, a probabilidade de sair os números 07 e 39 nas duas próximas rodadas é o produto entre essas probabilidades.

Após esse diálogo esclarecedor, o professor realizou os devidos cálculos no quadro e apresentou a probabilidade de sair os números 07 e 39 nas duas próximas rodadas como sendo $P = \frac{2}{40} \cdot \frac{1}{39} = \frac{2}{39 \text{ x } 40}$. Além disso, o professor explicou que, embora fosse possível efetuar o cálculo diretamente, não seria necessário, pois, ao observar as alternativas do problema entregue a cada aluno no início da aula, esse produto não estava desenvolvido.

Na sequência, o professor continuou o sorteio e, na rodada 14, os alunos A_5 e A_8 completaram, ambos uma linha, e conquistaram a vitória no segundo sorteio. Logo após, o professor distribuiu mais uma cartela de bingo para os alunos e deu início ao terceiro e último sorteio. Após o fim 10ª rodada, também sem nenhum ganhador, o professor iniciou o seguinte diálogo:

[Diálogo com a Turma]
(1) Professor – Alguém está com a cartela faltando apenas um número?
Nenhum aluno respondeu, então o professor decidiu realizar o sorteio de mais 5 números. Após isso foi perguntado novamente e os seguintes alunos responderam:

(2) A_4 e A_5 – Eu.
(3) Professor – Perfeito! Primeiramente, me digam qual é o número que está faltando.
(4) A_4 – O meu é 03 para completar uma coluna.
(5) A_5 – O meu é 37 para completar uma linha e uma diagonal.
Nesse momento, o aluno A_5 questiona se haveria problema o número faltando está intersectando uma mesma linha e diagonal. Então o professor respondeu:
(6) Professor – Não tem problema algum. De toda forma você ganhará se esse número for sorteado.
O professor retomou o diálogo:
(7) Professor – Agora eu quero saber: qual é a probabilidade de vocês, separadamente, ganharem nas duas próximas rodadas?
Nesse momento, os alunos ficaram confusos com a pergunta e não conseguiram chegar a uma solução. Confundindo sua solução com perguntas anteriores. Então, o professor incentivou o diálogo:
(8) Professor – Vamos simplificar: qual é a probabilidade de ganhar na próxima rodada?
(9) A_1 – Já vimos uma probabilidade parecida. É de 1/35.
(10) Professor – Exatamente, mas observem que também é possível ganhar na rodada seguinte (se referindo a rodada 17).
O professor prosseguiu:
(11) Professor – Agora, supondo que vocês não ganham na próxima rodada, qual é a probabilidade de ganhar na seguinte?
(12) A_1 e A_3 – 1/34.
(13) Professor – Perfeito! Mas, observem que para ganhar na rodada 17, é necessário não ganhar na rodada 16. Então precisamos considerar também essa probabilidade. De quanto ela?
(14) A_8 – Se eles só ganham com um número, então não ganham com 34 números. Portanto, seria 34/35.
(15) Professor – Exato! Assim a probabilidade de ganhar na rodada 17, será o produto entre essas probabilidades, ou seja, $\frac{34}{35} . \frac{1}{34} = \frac{34}{34 \text{ x } 35} = \frac{1}{35}$.
Depois disso, o professor explicou que a probabilidade de ganhar nas duas próximas rodadas é a soma das probabilidades obtidas nos diálogos (9) e (15).

Ao final do diálogo, o professor retomou o sorteio, onde o aluno A_4 conquistou a vitória do terceiro sorteio na rodada 17. Percebe-se que, para resolver o problema e garantir uma aprendizagem significativa, o professor incentivou o diálogo, permitindo que os alunos, mesmo que indiretamente, resolvessem o mesmo problema, apresentando no início da aula, com apenas 3 (três) sorteios de bingo.

Logo após, o professor finalizou os sorteios e deu continuidade a solução do problema proposto no início da aula, agora que os alunos estavam mais familiarizados com o problema e com os possíveis passos para resolvê-lo. Após a leitura do problema do ENEM, o professor incentivou o seguinte diálogo:

[Diálogo com a Turma]
(1) Professor – Agora fica mais fácil resolver esse problema. Ao observar a cartela de Pedro, qual é a probabilidade de ele ganhar na próxima rodada?

(2) A_1 – Como ele só ganha na primeira linha e já foram sorteados 4 números, então é 1/46.
(3) Professor – Perfeito! Guardem essa probabilidade. Agora, de acordo com o nosso último diálogo, vamos analisar a probabilidade de ele ganhar nessa primeira linha na rodada seguinte, ou seja, ele não ganha na próxima (se referindo a rodada 45), mas ganha na seguinte (rodada 44).
(4) A_8 – Para ele não ganhar na próxima rodada é 45/46 e para ganhar na seguinte é 1/45. Então é só multiplicar, certo?
(5) Professor – Perfeito! Vocês são demais!
(risos) Após esse pequeno momento descontraído, o professor realizou o seguinte cálculo: $P = \frac{45}{46} \cdot \frac{1}{45} = \frac{45}{46 \times 45}$. *Então deu continuidade ao diálogo:*
(6) Professor – Agora pra ele ganhar na diagonal, qual é a probabilidade?
Alguns alunos perguntaram se era igual a probabilidade do segundo sorteio, e o professor respondeu que era parecido. Então iniciou-se um debate entre os alunos:
(7) A_3 – Ele tem que tirar os números 11 e 19 nas duas próximas rodadas?
(8) A_1 – Se for isso, seria 1/46 vezes 1/45.
(9) A_8 – Não, acho que está errado. Na primeira rodada pode sair os números 11 ou 19, então a primeira teria que ser 2/46.
(10) Professor – Exatamente!
O professor efetuou a multiplicação entre ambos, obtendo o seguinte cálculo: $\frac{2}{46} \cdot \frac{1}{45} = \frac{2}{46 \times 45}$. *E finalizou dizendo a probabilidade de ganhar na coluna será a mesma.*

Após esse diálogo esclarecedor, o professor reforçou que ao utilizar o conectivo “ou”, deveríamos somar as probabilidades. Portanto, a probabilidade final seria a soma das probabilidades obtidas nas linhas de diálogos (2), (5) e (10). Como a probabilidade da coluna é igual a probabilidade da diagonal, então essa probabilidade obtida na linha (10) deverá ser somada novamente. Assim, teríamos: $P = \frac{1}{46} + \frac{45}{46 \times 45} + \frac{2}{46 \times 45} + \frac{2}{46 \times 45} = \frac{1}{46} + \frac{49}{46 \times 45}$. Dessa forma, a alternativa E é a correta.

Ao final dos diálogos, percebe-se que a dinâmica utilizada favoreceu a aprendizagem dos alunos no conteúdo de probabilidade, facilitando sua convivência com ações práticas. Esse recurso ainda favoreceu o engajamento e a participação ativa da turma, transformando conceitos abstratos em um material concreto que possibilitasse a visualização, manuseio e interação entre os mesmos.

Como destacado por Libâneo (2013, p. 28) “o processo de ensino é uma atividade conjunta de professores e alunos, organizado sob a direção do professor, com a finalidade de prover as condições e meios pelos quais os alunos assimilam ativamente conhecimentos, habilidades e convicções”.

A partir disso, o professor conseguiu articular conceitos fundamentais de probabilidade de maneira contínua e contextualizada. A condução dos diálogos evidenciou o cuidado em evitar respostas diretas, priorizando a problematização e o uso da matemática como uma ferramenta para resolver situações reais e lúdicas. Dessa forma, com o uso de perguntas desafiadoras, os debates e as explicações detalhadas contribuíram não apenas para a resolução do problema, mas também para o desenvolvimento de competências essenciais, como o raciocínio lógico, a comunicação e a argumentação matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de todo o percurso realizado ao longo do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), especialmente no que se refere à importância do estudo da probabilidade para avaliações externas, com ênfase no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), considera-se que este trabalho apresenta uma contribuição significativa para o desenvolvimento de uma prática pedagógica mais ativa, dinâmica e relevante em sala de aula.

Este trabalho teve como objetivo principal investigar como o uso de materiais concretos pode contribuir para a aprendizagem de conteúdos relacionados à probabilidade no Ensino Médio, especialmente no contexto da preparação para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Partindo da constatação de que muitos alunos enfrentam dificuldades na compreensão e resolução de problemas probabilísticos, buscou-se propor e aplicar estratégias didáticas que tornassem o ensino mais atrativo.

A partir do referencial teórico apresentado e da aplicação prática dos materiais construídos, foi possível observar que a utilização de recursos concretos possibilita um ambiente mais dinâmico, interativo e participativo em sala de aula. Os alunos demonstraram engajamento nas atividades e uma compreensão mais intuitiva dos conceitos de probabilidade, o que corrobora com os pressupostos defendidos por autores como Lorenzato (2012) e D'Ambrosio (2009) no que tange o uso de materiais concretos no ensino de matemática e ainda com Pontes (2019) quando se refere aos possíveis erros e dificuldades enfrentados pelos alunos na resolução de problemas que envolvem o raciocínio probabilístico.

A abordagem da Teoria da Probabilidade, quando aliada a metodologias que favoreçam a experimentação, mostra-se essencial para promover uma aprendizagem mais efetiva. Principalmente por ter conteúdos mais abstratos que requerem uma observação mais dinâmica de conceitos e aplicações.

Nesse sentido, a utilização de jogos e materiais concretos se revelou uma estratégia valiosa no desenvolvimento de métodos que tornam o processo de ensino e aprendizagem mais acessível e atrativo. Com base nisso, este trabalho propôs a criação de cinco materiais concretos, acompanhados de suas respectivas sequências didáticas, elaboradas com o objetivo de potencializar a construção do conhecimento matemático pelos alunos de futuros leitores deste trabalho.

Contudo, reconhece-se que a pesquisa apresentou algumas limitações, como o número restrito de participantes e o tempo limitado de intervenção, especialmente devido a demandas institucionais da Secretaria de Educação do Estado do Rio Grande do Norte, principalmente no que tange às exigências relacionadas ao ano de aplicação do Sistema de Avaliação da Educação

Básica (SAEB); por isso, dos 5 (cinco) materiais desenvolvidos, apenas 3 (três) foram efetivamente aplicados em sala de aula. Ainda assim, os resultados obtidos com os materiais aplicados evidenciam o potencial pedagógico da proposta apresentada.

Outro fator que se apresentou como um desafio significativo no desenvolvimento desta pesquisa refere-se à natureza do PROFMAT, cuja estrutura curricular é fortemente voltada para a formação de professores, com foco no aprimoramento da Matemática, o que acaba por restringir o tempo e os recursos disponíveis para investigações acadêmicas mais aprofundadas de cunho teórico e metodológico. Essa característica, embora altamente relevante para a realidade docente, limita a exploração e dedicação relacionada a pesquisa científica.

Como produto educacional decorrente desta pesquisa, apresenta-se uma sequência didática elaborada a partir dos 5 (cinco) problemas construídos especificamente para aplicação em sala de aula. Essa sequência foi desenvolvida com o propósito de oferecer ao professor um conjunto de atividades estruturadas que favoreçam a abordagem de conteúdos probabilísticos de forma prática, interativa e contextualizada. Cada problema foi pensado para estimular o raciocínio lógico, promover a participação ativa dos alunos e facilitar a compreensão dos conceitos de probabilidade por meio do uso de materiais concretos.

Por fim, acredita-se que todas as questões norteadoras, inicialmente formuladas para a construção desta pesquisa, foram devidamente respondidas ao longo do trabalho. Os resultados obtidos não apenas validam os objetivos propostos, como também indicam caminhos promissores para futuras práticas pedagógicas voltadas ao ensino da probabilidade, especialmente quando articuladas com o uso de recursos concretos que promovem o protagonismo estudantil e a aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Vitor Sergio de. **POLÍTICAS DE AVALIAÇÃO EXTERNA NO ENSINO MÉDIO: O ENEM SOB A PERSPECTIVA DE DISCENTES E DOCENTES DA ESCOLA PÚBLICA.** 2019. 309 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, MG.

ARAÚJO, Jonimar Pereira de. **LABORATÓRIO VIRTUAL DE MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES PARA UMA PRÁTICA DOCENTE MEDIADA POR RECURSOS DIGITAIS.** 2024. 137 f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, RN.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, Versão Final, 2018, p. 274. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2024.

BRASIL. **INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA.** Apresentação IDEB 2023: Resultados 2023. Brasília, DF: Inep, 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/ideb>. Acesso em 30 jun. 2025.

BRASIL. **Lei nº 11.096, de 13 de janeiro de 2005**. Institui o Programa Universidade para Todos – PROUNI e dá outras providências. Diário Oficial da União, Brasília, DF. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2005/lei/l11096.htm>. Acesso em 26 jun. 2024.

BRASIL. **Lei nº 12.756, de 12 de dezembro de 2018**. Altera a Lei nº 13.756, de 12 de dezembro de 2018, e dá outras providências. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 13 dez. 2018.

BRASIL. **Lei nº 14.818, de 16 de janeiro de 2024**. Institui incentivo financeiro-educacional, na modalidade de poupança, aos estudantes matriculados no ensino médio público. Diário Oficial da União, Brasília, DF. Disponível em: <https://www.in.gov.br/en/web/dou/-/lei-n-14.818-de-16-de-janeiro-de-2024-538053523>. Acesso em 26 de jun. 2024.

BRASIL. **Lei nº 3.688, de 3 de outubro de 1941**. Dispõe sobre as contravenções penais. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 6 out. 1941.

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto. Portaria Ministerial n° 438 de 28 de maio de 1998**. Institui o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 1° jun. 1998. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/diretrizes_p0178-0181_c.pdf> Acesso em 25 jun. 2024.

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto. Portaria n° 109, de 27 de maio de 2009**. Sistemática para a realização do Exame Nacional do Ensino Médio no exercício de 2009. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 28 mai. 2009. Disponível em:

<https://riep.inep.gov.br/bitstreams/f3bc596b-e795-4ab0-a3f1-8340378d1736/download>. Acesso em 26 jun. 2024.

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto. Portaria Normativa n° 2, de 26 de janeiro de 2010**. Institui e regulamenta o Sistema de Seleção Unificada – SISU. Diário Oficial da União, Brasília, DF. Disponível em: <http://ces.ufpel.edu.br/vestibular/download/2009i/portaria_sisu_diario.pdf>. Acesso em 26 de jun. 2024.

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto. Portaria nº 144, de 24 de maio de 2012**. Dispõe sobre certificação de conclusão do ensino médio ou declaração parcial de proficiência com base no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 25 mai. 2012. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/legislacao/2012/portaria-inep-144-certificacao.pdf>. Acesso em 26 jun. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Portaria nº 468, de 3 de abril de 2017. Dispõe sobre a realização do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, e dá outras providências. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 4 abr. 2017. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/legislacao/2017/Portaria_mec_gm_n468_de_03042017_dispoe_sobre_a_realizacao_do_enem.pdf>. Acesso em 26 de jun. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Exame Nacional do Ensino Médio (Enem)**. 2024. Disponível em: <https://enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 27 de jun. 2024.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

CASTRO, Luciano Guimarães Monteiro de. **Análise dos microdados do ENEM a partir da teoria da resposta ao item.** 2017. 60 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado em Modelagem Matemática da Informação. Fundação Getúlio Vargas, Escola de Matemática Aplicada. Rio de Janeiro, RJ.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática.** 17. ed. Campinas, SP: Papirus Editora, 2009. 79 – 98 p.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa.** 25 ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (org.). **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120 p. (Série Educação a Distância). ISBN 978-85-386-0071-8

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2008. 27 p.

HUNDERTMARCK, Bruno Saturni. **POLÍTICAS EDUCACIONAIS E ENSINO MÉDIO: O Exame Nacional do Ensino Médio em xeque!.** 2017. 118 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Políticas Públicas e Gestão Educacional. Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, RS.

IMPA. Como ganhar dinheiro com jogos de azar. Disponível em: <https://impa.br/notices/como-ganhar-dinheiro-com-jogos-de-azar>. Acesso em: 17 jun. 2025.

KAYSER, Tatiane Aline Rodrigues *et. al*. Explorando a Probabilidade Geométrica: o caso do Problema do Macarrão. **Revista Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática – RIPem**. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/ripem/article/view/3898/2650>. Acesso em: 18 jun. 2025.

KSIASZCZYK, Flavia Manuella de Almeida. **Laboratório de Educação Matemática: possibilidade para prática pedagógica transdisciplinar na formação docente.** 2021. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2021

LEAL, Amilton Flávio Coleta. **A FORMULAÇÃO DA PROPOSTA DE REDAÇÃO DO ENEM: A PROJEÇÃO IMAGINÁRIA DO SUJEITO-ESCRITOR IDEAL.** 2015. 110 f. Dissertação (Mestrado). Mestrado em Linguística. Programa de Pós-Graduação em Linguística. Universidade do Estado de Mato Grosso. Cáceres, MT.

LIBÂNEO, José Carlos. Didática. 2ª ed. São Paulo, SP: Editora Cortez, 2013, 287 p.

LORENZATO, Sérgio (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados Ltda, 2012. 27 – 61 p.

LUCENA, Regilania da Silva. **Licenciatura em Matemática: Laboratório de Ensino de Matemática.** Fortaleza: UAB/IFCE, 2017. 94 p.

MARCIEL, Aníbal de Menezes (org.). **LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA: UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA.** 1ª ed. Piracanjuba, GO: Editora Conhecimento Livre, 2022.

MAGNAGO, Walaci et al. A DEPENDÊNCIA DIGITAL: COMO O CELULAR ESTÁ INFLUENCIANDO O COMPORTAMENTO DOS ESTUDANTES. **Anais New Science Publishers | Editora Impacto**, *[S. l.]*, v. 1, n. 1, 2024. DOI: 10.56238/I-CIM-007. Disponível em: <https://periodicos.newsciencepubl.com/ans/article/view/625>. Acesso em: 28 mar. 2025.

MAZZONETTO, Clenio Vianei. **O Enem como política pública de avaliação: construção e ou (des)construção do currículo escolar.** 2014. 173 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Frederico Westphalen, 2014.

MIRANDA, Devair da Silva. **PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADES COM APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BAYES NO ESTUDO DO PROBLEMA DE MONTY HALL.** 2024. 71 f. Dissertação (Mestrado). Programa de

Pós-Graduação Stricto Sensu em Matemática em Rede Nacional. Universidade do Estado de Mato Grosso. Barra do Bugres, MT.

MORGADO, Augusto César. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 10ª ed. Rio de Janeiro. SBM, 2016.

MUNARI, Alberto. **Jean Piaget.** Tradução e organização: Daniele Saheb. Recife: Fundação Joaquim Nabuco; Editora Massangana, 2010. (Coleção Educadores).

NÚÑEZ, Isauro Beltrán; RAMALHO, Betania Leite. Dificuldades de aprendizagem em itens de uma prova de Didática Geral de futuros professores Educação, vol. 43, núm. 3, 2018, julho-setembro, p. 483-498. Universidade Federal de Santa Maria. Brasil.

OLIVEIRA, Geisa Melo de. **EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO – ENEM: CAMINHOS E CONTRADIÇÕES.** 2016. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, PR.

PACHECO, João Alves. **AS METAMORFOSES DO ENEM: De avaliação coadjuvante para protagonista chave das políticas públicas de acesso à Educação Superior.** 2013. 350 f. Tese (Doutorado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP.

PONTES, Jailson da Costa. **Identificação e caracterização do perfil de Erros e Dificuldades de aprendizagem nas questões de Estatística e Probabilidade das provas de Matemática do ENEM nos anos de 2013 a 2016 dos aprovados na primeira chamada do SISU para ingressar na UFRN**. 2019. 199 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN.

SANTOS, Joelma Nogueira dos. **O LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA E ENSINO (LME) NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR: ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS COM BASE NA SEQUÊNCIA FEDATHI.** 2021. 209 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE.

SAVIANI, Dermeval. **Escola e democracia**. Edição comemorativa. Campinas: Autores Associados, 2008. (Coleção Educação Contemporânea). ISBN 978-85-7496-219-1

SILVA, Antônio Klinger Guedêlha da. **PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: GENERALIZAÇÕES DO PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON E APLICAÇÕES.** 2014. 75 f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, CE.

SILVA, Paulo Henrique das Chagas. **A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA INTRODUÇÃO DE CONTEÚDOS E CONCEITOS MATEMÁTICOS: UM OLHAR A PARTIR DAS QUESTÕES DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS.** 2023. 293 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

SILVA, Welson Nogueira da. **Um resumo sobre a história da probabilidade e alguns problemas curiosos.** 2020. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências da Educação, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2020.

TAHAN, Malba. **Didática da Matemática.** 1. ed. São Paulo: Saraiva, 1961. v. 1.

TSCHUD, Regina; WAGNER, Dr. Christel. LEARNING BY TEACHING: A DIDACTIC MODEL TO LINK REEDUCATION WITH SELF-REEDUCATION, INTRODUCED BY A WORKSHOP FOR DEVELOPING SELF-INCORRUPTIBILITY. **Parapedagogia,** Foz do Iguaçu, Paraná, ano 6, n. 6, p. 43–52, out. 2016.

VARGAS, Ariele Souza de. **As políticas públicas para a educação superior no Brasil: o REUNI na Universidade Federal da Fronteira Sul**. 2021. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Frederico Westphalen, 2021.

APÊNDICE A – A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

CONTEÚDOS: NOÇÕES GERAIS DE PROBABILIDADE

INTRODUÇÃO

A sequência didática apresentada neste apêndice foi elaborada como parte do produto educacional resultante desta pesquisa. Seu objetivo é orientar professores na aplicação prática dos 5 (cinco) materiais construídos a partir de problemas de probabilidade retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Cada atividade foi pensada para estimular o raciocínio lógico, a interpretação de situações-problemas e o desenvolvimento da intuição probabilística, alinhando-se às competências exigidas pelo ENEM e pela BNCC.

Além disso, a sequência didática busca valorizar o papel do professor como mediador do conhecimento, oferecendo métodos que possam ser aplicados em uma realidade educacional, considerando as dificuldades enfrentadas pelos professores no processo de ensino e aprendizagem. Espera-se que este material sirva como um recurso pedagógico eficaz e que possa ser aplicado no contexto escolar.

OBJETIVOS DA ATIVIDADE

- Promover a compreensão dos conceitos básicos de probabilidade;
- Estimular o raciocínio lógico e a tomada de decisões;
- Contribuir para a preparação dos alunos para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM);
- Oferecer aos professores de Matemática um recurso didático estruturado e adaptável para favorecer uma aprendizagem mais significativa.

DURAÇÃO

10 horas/aulas.

COMPETÊNCIAS SEGUNDO A BNCC

Esta sequência didática está estruturada para favorecer o desenvolvimento das seguintes competências, segundo a BNCC:

1. Conhecimento – Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e digital para entender e explicar a realidade.
4. Comunicação – Utilizar diferentes linguagens – verbal, matemática, gráfica, etc. – para se expressar e partilhar informações.
6. Trabalho e projeto de vida – Valorizar a cooperação e o protagonismo na resolução de problemas e na construção de soluções.
7. Argumentação – Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para defender ideias e tomar decisões.
9. Empatia e cooperação – Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos.

HABILIDADES SEGUNDO A BNCC

Esta sequência didática está estruturada para favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades, segundo a BNCC:
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas que envolvam conhecimentos algébricos e aritméticos, utilizando diferentes estratégias e linguagens.
(EM13MAT407) Utilizar noções de probabilidade, estatística e combinatória na análise de experimentos aleatórios e de situações que envolvam previsão, chance e tomada de decisão, por meio de simulações ou análise de dados reais.
(EM13MAT405) Analisar e interpretar dados estatísticos apresentados em diferentes formas (tabelas, gráficos, infográficos) em contextos variados.
(EM13MAT403) Resolver e propor problemas de contagem com e sem o uso de fórmulas e algoritmos, envolvendo eventos equiprováveis ou não, independentes ou dependentes.
(EM13MAT408) Utilizar o raciocínio estatístico e probabilístico na construção de argumentos e na avaliação crítica de informações.

CONTEÚDOS QUE SERÃO ABORDADOS

- Espaço Amostral;
- Eventos;
- Definição de Probabilidade;
- Probabilidade da União de Eventos;
- Probabilidade da Intersecção de Eventos.

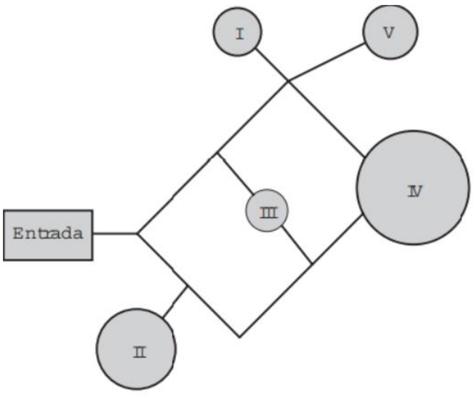
METODOLOGIA

A presente sequência didática foi elaborada com base em uma abordagem ativa e prática do ensino de probabilidade, utilizando materiais concretos como principal recurso pedagógico. A proposta contempla 5 (cinco) problemas distintos, planejados para serem aplicados em sala de aula, principalmente, do 3º ano do Ensino Médio, pois nessa fase, os alunos estão se preparando para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

PROBLEMAS E DISCUSSÕES

PROBLEMA 1 – MAPA DO PARQUE

Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, entre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna.

Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a.

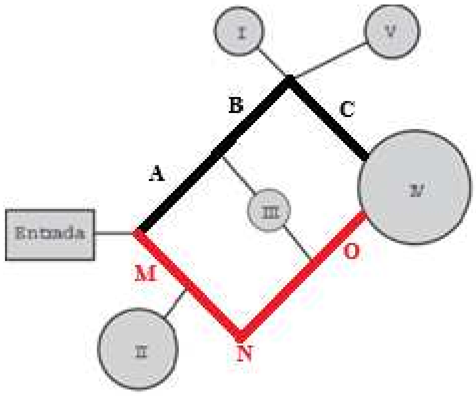
a) 1/96 b) 1/64 c) 5/24 d) 1/4 e) 5/12

OBJETIVO DO PROBLEMA

- Identificar e representar os diferentes caminhos possíveis para chegar até à Área IV;
- Associar e relacionar os lançamentos aleatórios realizados por meio de dados com o resultado esperado;
- Compreender a probabilidade associada em cada ramificação do problema;
- Calcular a probabilidade da união e da intersecção de eventos a partir da representação do material concreto.

POSSÍVEL SOLUÇÃO

Queremos calcular a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas, dessa forma, teremos dois caminhos possíveis, como observados na Figura abaixo:



Como a escolha de cada caminho apresenta igual probabilidade, então calcularemos a probabilidade de cada percurso ocorrer e somaremos. Note ainda que cada ramificação foi nomeada de acordo com um possível caminho, ou seja, as letras A, B e C na cor preta indicam o caminho na cor preta, já as letras M, N e O na cor vermelha indicam o caminho vermelho. Dessa forma, chamaremos P(p) a probabilidade de ele escolher o caminho na cor preta e P(v) a probabilidade de ele escolher o caminho na cor vermelha. Calculando as probabilidades, teremos:

Caminho na cor preta.

$P\ (p) = P(A)\ .\ P(B)\ .\ P(C)$

$P(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

$P(p) = \frac{1}{12}$

Caminho na cor vermelha.

$P(v) = P(M)\ .\ P(N)\ .\ P(O)$

$P(v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$P(v) = \frac{1}{8}$

Portanto, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por nenhuma outra área é igual a.

$P(T) = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{2+3}{24} = \frac{5}{24}$. Alternativa correta é a C.

MATERIAIS UTILIZADOS PARA CONSTRUÇÃO

- Papelão reciclado ou placas de papelão rígidas, utilizado para a confecção da base do material;
- Folhas de Papel A4 destinadas à impressão;

- Tesoura para recorte dos componentes do material;
- Cola branca ou cola bastão empregada para fixação das partes do material.

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

A construção da base do material se deu por um modelo construído para ser mais interativo e, em seguida, foi feito a impressão em folhas A4 e colado em um papelão, escolhida por sua facilidade de acesso e manuseio. Nessa base, foi desenhada uma árvore de possibilidades ilustrando as possíveis escolhas disponíveis. Para que o material se tornasse mais atrativo, opta-se por representar as pessoas por botões que poderiam ser movidos ao longo do trajeto, tornando a abordagem mais concreta e envolvente. Também foi adicionado no material alguns locais que pudessem representar as paradas das pessoas que iam optar por escolher um dos caminhos. Essas paradas no material foram representadas por meio de semáforos. Como demonstrado no Apêndice C.

Outro aspecto fundamental levado em consideração foi a necessidade de envolver os alunos por meio de experimentos aleatórios no que tange o problema, conforme estabelecido pela BNCC (EM12MAT312)[10]. Para isso, foi utilizado um dado como ferramenta, permitindo que os alunos realizassem múltiplos experimentos e registrassem seus resultados, para que pudessem ser analisados posteriormente.

Nota-se ainda que existem 5 (cinco) semáforos presentes no mapa, ou seja, são 5 (cinco) ramificações onde as pessoas podem escolher caminhos a seguir, observa-se ainda que 4 (quatro) das ramificações tem 2 (dois) caminhos possíveis e existe uma única ramificação que tem 3 (três) caminhos. Para isso, com o auxílio de um dado padrão, optou-se por utilizar os números pares e ímpares para representar as ramificações com 2 (dois) caminhos e o dado foi dividido em 3 (três) pares (1 e 2; 3 e 4; 5 e 6) para representar o caminho com 3 (três) ramificações.

Para a aplicação deste material é interessante que o professor inicie o diálogo apresentando o material e suas regras de lançamento de dados, além de entregar para cada aluno uma ficha de anotação, conforme especificadas abaixo:

1) Cada aluno efetuará um lançamento de dado e seguirá, no mapa, pelo caminho correspondente ao resultado obtido. Por exemplo, ao lançar o dado e sair o número 3 (três), o

[10] Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos (BNCC, p. 529).

aluno começará a jogada seguindo pelo caminho que indica o "ímpar" até parar no próximo semáforo e aguardará o colega fazer a próxima jogada.

2) O percurso contém apenas uma ramificação com 3 (três) caminhos possíveis. Nesse caso, o caminho que o aluno seguirá dependerá do resultado objetivo no dado, ou seja, caso saia os números 1 e 2 no dado, o aluno seguirá pelo caminho 1, ao sair os números 3 e 4, o aluno seguirá pelo caminho 2, da mesma forma, se sair os números 5 e 6, o aluno seguirá pelo caminho 3.

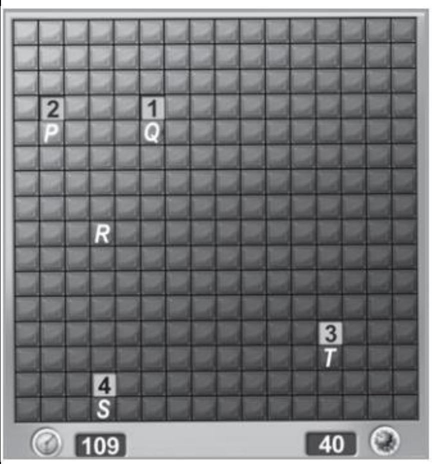
3) O principal objetivo do jogo é chegar à Área IV no mapa. Dessa forma, caso o aluno chegue em outra área além da IV, ele retornará para o início e marcará na ficha que não conseguiu chegar à área IV e repetirá esse procedimento até concluir as 5 (cinco) jogadas previstas.

Após a explicação das regras e início das jogadas pelos alunos, o professor pode iniciar o diálogo comparando, inicialmente, a média dos resultados obtidos em cada ficha com uma possível resposta para a questão do ENEM. Em seguida, o professor pode fazer alguns questionamentos:

- A probabilidade obtida nos lançamentos reflete a realidade?
- Quantos caminhos distintos são possíveis para chegar à área IV?
- Todos os caminhos apresentam a mesma probabilidade? Por quê?
- Qual a probabilidade associada em cada ramificação do diagrama?

Após essas perguntas e outras perguntas, o professor pode orientar os alunos a formular hipóteses e fazer comparações entre os dois caminhos e, dessa forma, incentivar a uma possível solução do problema, relembrando conceitos básicos e definições de probabilidade.

PROBLEMA 2 – CAMPO MINADO



A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16 x 16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contém minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.

Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras P, Q, R, S e T um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina. O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra a) P. b) Q. c) R. d) S. e) T.

OBJETIVO DO PROBLEMA

- Reconhecer e identificar os padrão no jogo de campo minado;
- Determinar, por meio de cálculos, a probabilidade envolvida em cada uma das letras;
- Analisar e comparar os resultados das probabilidades encontradas em cada letra.

POSSÍVEL SOLUÇÃO

As letras P, T e S estão adjacentes aos números 2, 3 e 4, respectivamente, enquanto a letra Q está adjacente ao número 1. Portanto, a partir disso, pode-se perceber que a chance de se selecionar uma mina ao escolher os quadrados P (probabilidade de $\frac{2}{8}$ = 25%), T (probabilidade $\frac{3}{8}$ = 37,5%) e S (probabilidade de $\frac{4}{8}$ = 50%) são maiores do que se escolher o quadrado Q, onde sua probabilidade é de $\frac{1}{8}$ = 12,5%. Seguindo esse raciocínio são descartadas as alternativas A, D e E, ficando agora apenas entre os quadrados Q e R.

Já a probabilidade de sair uma mina no quadrado R deve ser levado em consideração que existem minas distantes, sendo elas: 1 (adjacente ao quadrado Q) + 2 (adjacente ao quadrado P) + 3 (adjacente ao quadrado T) + 4 (adjacente ao quadrado S) = 10, ou seja, há ainda 30 minas que podem estar próximas do quadrado R. Para calcular essa probabilidade, devemos considerar que existem 30 minas no jogo em um total de 220 casas disponíveis pois, desconsideramos os 9 (nove) quadrados que estão adjacentes aos quadrados P, Q, T e S (como mostra a Figura 04), ou seja, a probabilidade de sair uma mina no quadrado R é de $\frac{30}{220} \approx 13{,}6\%$.

Portanto, concluímos que a menor probabilidade de sair uma mina entre os quadrados P, Q, R, S e T é no quadrado Q. Alternativa correta é a B.

MATERIAIS UTILIZADOS PARA CONSTRUÇÃO

- Folhas de Papel A4 destinadas à impressão dos campos minados;
- Tesoura para recorte dos componentes do material;

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

A principal ideia por trás da construção deste material foi o desenvolvimento do próprio jogo no qual os alunos competem entre si de forma interativa. Entretanto, apenas essa abordagem poderia não ser suficiente para a aprendizagem ser eficaz. Então optou-se por construir campos minados em versões menores, para que eles pudessem experimentar diferentes estratégias antes de avançar para tabuleiros maiores.

Dessa forma, o jogo foi construído em papel A4, com um tabuleiro inicial no tamanho 5x5, com possibilidades de aumento para 6x6 e até 8x8. A principal ideia na abordagem desse material é que os alunos possam construir seus próprios campos minados e competir entre si. Para a construção do tabuleiro 5x5, optou-se por utilizar 4 (quatro) minas mantendo uma proporção semelhante ao do problema inicial (ver Apêndice D).

Inicialmente, é interessante que o professor faça a divisão da turma em duplas e, em seguida, apresente o material, com suas respectivas regras:

1) Cada aluno colocará, conforme sua preferência e sem que o adversário veja, 4 (quatro) minas na área destinada a construção própria do campo minado.

2) Em seguida, o aluno deverá preencher as demais casas com números de acordo com a quantidade de minas em suas casas adjacentes. Por exemplo, se uma determinada casa tem 2 (duas) minas ao redor, então o número inserido nessa casa deverá ser o 2.

3) Após a finalização da construção do campo por ambos os integrantes da dupla, os alunos deverão alternar jogadas, escolhendo coordenadas para tentar descobrir o campo do adversário, evitando acertar minas.

Vale ressaltar ainda que os alunos devem observar atentamente os números que serão posicionados vizinho às bombas, uma vez que esses valores são essenciais para indicar, ao adversário, a proximidade de perigo. Nesse contexto, o professor tem total liberdade de analisar a construção dos campos minados minimizando possíveis erros no desenvolvimento da atividade.

Em seguida, o professor pode permitir que os alunos joguem livremente para que eles aprendam de forma prática a respeito do jogo, favorecendo uma competitividade saudável e estratégias para vencer. Após a ocorrência de algumas partidas entre os alunos, o professor pode distribuir os problemas para os alunos e incentivar o diálogo a respeito da questão, fazendo alguns questionamentos:

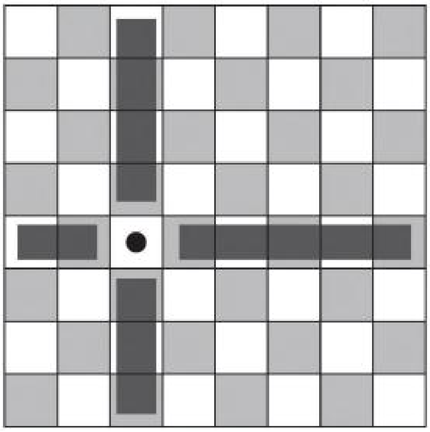
- Vocês conseguiram chegar a algum resultado do problema?
- Qual a probabilidade de encontrar uma mina na letra S? E na letra T?
- O que podemos tirar da comparação entre as letras S, T, P e Q?

- Como podemos calcular a probabilidade de encontrar uma mina na letra R?

Após essas perguntas, o professor pode conduzir os alunos a uma construção coletiva da solução do problema, principalmente no que diz respeito a probabilidade de encontrar uma mina na letra R, que representa um maior desafio no contexto do problema.

PROBLEMA 3 – JOGO DE TABULEIRO

Um designer de jogos planeja um jogo que faz uso de um tabuleiro de dimensão n x n, com no qual cada jogador, na sua vez, coloca uma peça sobre uma das casas vazias do tabuleiro. Quando uma peça é posicionada, a região formada pelas casas que estão na mesma linha ou coluna dessa peça é chamada de zona de combate dessa peça. Na figura está ilustrada a zona de combate de uma peça colocada em uma das casas de um tabuleiro de dimensão 8 x 8.



O tabuleiro deve ser dimensionado de forma que a probabilidade de se posicionar a segunda peça aleatoriamente, seguindo a regra do jogo, e esta ficar sobre a zona de combate da primeira, seja inferior a $\frac{1}{5}$.

A dimensão mínima que o designer deve adotar para esse tabuleiro é

a) 4 x 4.
b) 6 x 6.
c) 9 x 9.
d) 10 x 10.
e) 11 x 11

OBJETIVO DO PROBLEMA

- Compreender os conceitos iniciais no jogo proposto, com ênfase na identificação e interpretação das suas zonas de combate;
- Estimular e despertar a curiosidade dos alunos para um possível aprimoramento estratégico, com base em elementos do xadrez;
- Calcular, por meio da definição, a probabilidade envolvida em cada posicionamento de peças em tamanhos diferentes de tabuleiro.

POSSÍVEL SOLUÇÃO

Para resolver esse problema, temos que considerar que o tabuleiro tem que ser dimensionado de maneira que a probabilidade seja inferior a $\frac{1}{5}$ e que temos uma casa que já se encontra ocupada com a primeira peça que está posicionada. Se considerarmos um tabuleiro n x n, então o número de casos possíveis para se posicionar a segunda peça serão todos os quadrados do tabuleiro com a única exceção do lugar que já se encontra com a primeira peça, ou seja, $n^2 - 1$. Para os casos favoráveis, temos os quadrados que se encontram na vertical e na horizontal da peça posicionada, ou seja, $n - 1$, pois a única exceção é o lugar da peça já posicionada, então os casos favoráveis são $(n - 1) + (n - 1) = 2n - 2$. Assim, desenvolvendo o seguinte cálculo: $P = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{2n - 2}{n^2 - 1} < \frac{1}{5}$, obtemos que $n > 9$. Logo, o tabuleiro tem que ser no formato 10 x 10. Portanto, a alternativa correta é a D.

MATERIAIS UTILIZADOS PARA CONSTRUÇÃO

- Tabuleiro de damas ou xadrez para representar o tabuleiro do problema. Entretanto, caso a escola não dispõe, pode ser construído de papelão, EVA ou cartolina;
- EVA para construção das peças do tabuleiro, preferencialmente de 4 (quatro) cores distintas;
- Tesoura para recorte dos componentes do material.

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

Para trabalhar com este material, o professor pode abordar conceitos introdutórios do xadrez, com ênfase no uso da peça “torre”. Seu movimento, restrito a vertical e a horizontal, facilita a compreensão do aluno a respeito da zona de combate da peça posicionada no tabuleiro do problema.

Além disso, o estudo do movimento da torre permite que os alunos desenvolvam noções fundamentais de estratégia e posicionamento no tabuleiro, aspectos essenciais para a compreensão mais avançada do jogo. Ao visualizar e aplicar os movimentos da peça, os estudantes começam a assimilar conceitos como controle de colunas e fileiras, planejamento de jogadas e reconhecimento de padrões essenciais para a compreensão do problema.

Como o tabuleiro do problema possui o mesmo formato do tabuleiro de xadrez, o professor pode aproveitar esse material já conhecido pelos alunos, facilitando a compreensão das regras. Seguindo a dinâmica do próprio problema, os alunos irão posicionar fichas que foram confeccionadas em EVA, com formato circular, para garantir um manuseio mais prático, confortável e acessível.

Para uma melhor organização e visualização do jogo, as fichas serão divididas em 4 (quatro) cores distintas: 2 (duas) cores para representar as peças dos jogadores, enquanto as outras 2 (duas) serão utilizadas para marcar suas zonas de combate ao longo da partida. Essa diferenciação por cores ajudará os alunos a acompanhar o desenvolvimento do jogo de forma clara.

Para sua aplicação da atividade, o professor pode organizar a turma em duplas e distribuir um tabuleiro para cada grupo, juntamente com suas respectivas fichas recortadas em formato circular para representar a peça do tabuleiro do problema. Em seguida, o professor explicará as regras do material conforme sugeridas abaixo:

1) Cada aluno receberá fichas com 2 (duas) cores: uma das cores representa a peça que será posicionada sobre o tabuleiro e a outra indicará sua área de combate.

2) Ao posicionar uma peça sobre o tabuleiro, o aluno marcará sua área de combate, considerando todas as casas que estão na mesma linha e coluna.

3) Quando o segundo jogador posiciona a sua peça sobre o tabuleiro repetirá o procedimento marcando sua área de combate e assim o jogo seguirá.

Após a explicação das regras, o professor poderá incentivar os alunos a jogarem livremente, desenvolvendo assim a cooperação entre os mesmos. Concluídas algumas rodadas, o professor poderá propor alguns questionamentos para estimular o raciocínio matemático e conceitos de probabilidade, conforme sugeridas abaixo:

- Quantas casas estão representando a área de combate após o posicionamento da primeira peça?
- Ao escolher aleatoriamente uma das casas do tabuleiro, qual é a probabilidade de ser exatamente uma casa que pertence à área de combate?
- Como essa probabilidade de altera se o tabuleiro for do tamanho 10 x 10? Ou quem sabe, 9 x 9?

Ao questionar os alunos sobre o tamanho do tabuleiro, o professor poderá incentivá-los a testar hipóteses por meio de observação de alternativas, facilitando assim a compreensão e interpretação do problema.

PROBLEMA 4 – BINGO

Em um jogo de bingo, as cartelas contêm 16 quadrículas dispostas em linhas e colunas. Cada quadrícula tem impresso um número, dentre os inteiros de 1 a 50, sem repetição de número. Na primeira rodada, um número é sorteado, aleatoriamente, dentre os 50 possíveis. Em todas as rodadas, o número sorteado é descartado e não participa dos sorteios das rodadas seguintes. Caso o jogador tenha em sua cartela o número sorteado, ele o assinala na cartela. Ganha o jogador que primeiro conseguir preencher quatro quadrículas que formam uma linha, uma coluna ou uma diagonal, conforme os tipos de situações ilustradas na Figura 1.

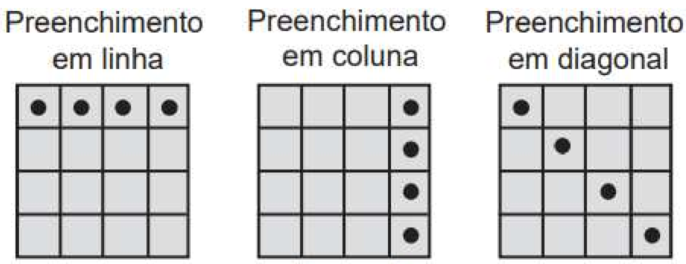


Figura 1

O jogo inicia e, nas quatro primeiras rodadas, foram sorteados os seguintes números: 03, 27, 07 e 48. Ao final da quarta rodada, somente Pedro possuía uma cartela que continha esses quatro números sorteados, sendo que todos os demais jogadores conseguiram assinalar, no máximo, um desses números em suas cartelas. Observe na Figura 2 o cartão de Pedro após as quatro primeiras rodadas.

03	48	12	27
49	11	22	05
29	50	19	45
33	23	38	07

Figura 2

A probabilidade de Pedro ganhar o jogo em uma das duas próximas rodadas é

a) $\frac{1}{46} + \frac{1}{45}$

b) $\frac{1}{46} + \frac{2}{46 \text{ x } 45}$

c) $\frac{1}{46} + \frac{8}{46 \text{ x } 45}$

d) $\frac{1}{46} + \frac{43}{46 \text{ x } 45}$

e) $\frac{1}{46} + \frac{49}{46 \text{ x } 45}$

OBJETIVO DO PROBLEMA

- Compreender os conceitos de probabilidade relacionados a sorteio aleatório de números com o preenchimento da cartela na linha, coluna ou diagonal;
- Analisar e associar a probabilidade de preenchimento em rodadas futuras.

POSSÍVEL SOLUÇÃO

Como já ocorreram 4 (quatro) rodadas, queremos calcular a probabilidade de Pedro ganhar nas 2 (duas) próximas rodadas, ou seja, na quinta ou sexta rodada. Para que ele ganhe na quinta rodada, basta sair o número 12. Como já foram sorteados 4 (quatro) números de um total de 50, então a probabilidade de sair o número 12 na quinta rodada é de $\frac{1}{46}$. Entretanto, ele ainda pode ganhar na sexta rodada, dessa forma, temos 3 (três) casos que podem ocorrer:

1° caso: ele ganhar com o preenchimento da linha. Para isso, o 12 não pode sair na quinta rodada, mas terá que sair na sexta:

$$P_1 = \frac{45}{46} \text{ x } \frac{1}{45} = \frac{45}{46 \text{ x } 45}$$

2° caso: ele ganhar com o preenchimento da coluna. Para isso, o número 05 ou 45 deverá sair na quinta rodada e o outro na rodada seguinte.

$$P_2 = \frac{2}{46} \text{ x } \frac{1}{45} = \frac{2}{46 \text{ x } 45}$$

3° caso: ele ganhar com o preenchimento da diagonal. Para isso, o número 11 ou 19 deverá sair na quinta rodada e o outro na rodada seguinte.

$$P_3 = \frac{2}{46} \text{ x } \frac{1}{45} = \frac{2}{46 \text{ x } 45}$$

Somando todas as probabilidades, teremos:

$\frac{1}{46} + \frac{45}{46 \text{ x } 45} + \frac{2}{46 \text{ x } 45} + \frac{2}{46 \text{ x } 45} = \frac{1}{46} + \frac{49}{46 \text{ x } 45}$. Alternativa correta é a E.

MATERIAIS UTILIZADOS PARA CONSTRUÇÃO

- Folha A4 para impressão das cartelas.

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

A construção deste material incluirá sorteios aleatórios de números, enquanto os alunos montarão suas cartelas de bingo, no tamanho citado no problema, ou seja, cartelas 4x4, com base em números de 1 a 50[11] escolhidos por eles mesmos. Essa abordagem permite que os estudantes participem ativamente do processo, tornando a experiência mais envolvente.

Dessa forma, o uso de um material auxiliar é fundamental para aprimorar a compreensão do jogo, pois possibilita a exploração de conceitos essenciais, como a análise de probabilidades e a identificação de padrões numéricos. Durante o desenvolvimento da atividade, será possível observar quais alunos possuem maior probabilidade de vencer em determinado momento do jogo, considerando os números já sorteados e os que ainda restam.

[11] Intervalo do problema do ENEM.

Ao analisar as cartelas dos alunos, será viável calcular e discutir todas as probabilidades envolvidas, permitindo um estudo mais aprofundado sobre a aleatoriedade e a chance de vitória. Dessa forma, o bingo se torna não apenas uma atividade recreativa, mas também um recurso pedagógico valioso para a introdução a conceitos matemáticos, estimulando o pensamento lógico e a tomada de decisões estratégicas.

Inicialmente, o professor pode apresentar o problema para os alunos e, dessa forma, estimulá-los a responde-lo. Em seguida, o professor pode apresentar a proposta e entregar uma cartela de Bingo (ver Apêndice E) para cada aluno. Na sequência, foram explicadas detalhadamente as seguintes regras do jogo:

1) Cada aluno preencherá sua cartela com os números distintos de 1 a 50, posicionados conforme sua escolha. Posteriormente, o professor realizará uma verificação individual das cartelas para minimizar possíveis erros no seu preenchimento.

2) O objetivo do jogo é que o aluno que preencher completamente uma linha, uma coluna ou uma diagonal, será considerado o vencedor do sorteio.

3) Após as cartelas estarem preenchidas, o professor sorteará números de 1 a 50 e, a cada 10 sorteios, será feito um breve diálogo com a turma para verificação da probabilidade envolvida.

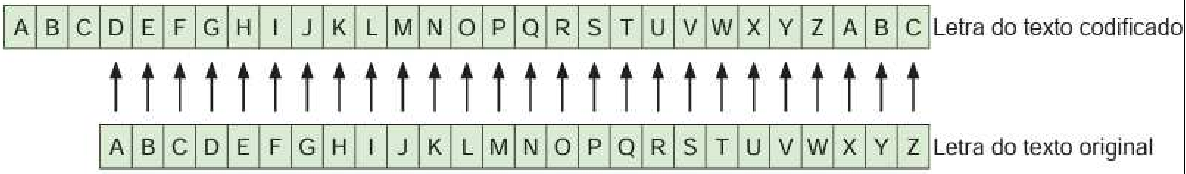
Após o início dos sorteios, o professor pode organizar os alunos em grupos e, a cada 10 sorteios, promover um momento de reflexão por meio de alguns questionamentos, como os sugeridos a seguir:

- Alguém já está com a cartela faltando apenas um número para completar uma linha, coluna ou diagonal?
- Considerando que um aluno está com a cartela faltando apenas um número em uma linha, qual é a probabilidade de ganhar nessa linha na próxima rodada?
- Caso algum aluno esteja com a cartela faltando um número tanto em uma linha como em uma coluna, qual é a probabilidade de ele vencer na próxima rodada?
- E se aumentarmos o grau de dificuldade e quisermos calcular a probabilidade de alguém ganhar daqui a 2 (duas) rodadas?

Esses e outros questionamentos têm como objetivo incentivar os alunos a desenvolverem o raciocínio probabilístico por meio da análise cuidadosa de cada possibilidade. A partir disso, o professor pode orientar os estudantes a explorar diferentes possibilidades, realizar cálculos e discutir os resultados, aprofundando a compreensão dos conceitos envolvidos no problema proposto.

PROBLEMA 5 – CRIPTOGRAFIA

A criptografia refere-se à construção e análise de protocolos que impedem terceiros de lerem mensagens privadas. Júlio César, imperador romano, utilizava um código para proteger as mensagens enviadas a seus generais. Assim, se a mensagem caísse em mãos inimigas, a informação não poderia ser compreendida. Nesse código, cada letra do alfabeto era substituída pela letra três posições à frente, ou seja, o "A" era substituído pelo "D", o "B" pelo "E", o "C" pelo "F", e assim sucessivamente.



Disponível em: www.codifica.ibict.br. Acesso em: 15 out. 2019

Qualquer código que tenha um padrão de substituição de letras como o descrito é considerado uma Cifra de César ou um Código de César. Note que, para decifrar uma Cifra de César, basta descobrir por qual letra o "A" foi substituído, pois isso define todas as demais substituições a serem feitas.

Uma mensagem, em um alfabeto de 26 letras, foi codificada usando uma Cifra de César. Considere a probabilidade de se descobrir, aleatoriamente, o padrão utilizado nessa codificação, e que uma tentativa frustrada deverá ser eliminada nas tentativas seguintes. A probabilidade de se descobrir o padrão dessa Cifra de César apenas na terceira tentativa é dada por

a) $\frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25}$

b) $\frac{24}{25} + \frac{23}{24} + \frac{1}{23}$

c) $\frac{1}{25} \text{ x } \frac{1}{24} \text{ x } \frac{1}{23}$

d) $\frac{24}{25} \text{ x } \frac{23}{25} \text{ x } \frac{1}{25}$

e) $\frac{24}{25} \text{ x } \frac{23}{24} \text{ x } \frac{1}{23}$

OBJETIVO DO PROBLEMA

- Compreender os princípios lógicos e matemáticos envolvidos na codificação e decodificação de mensagens criptografadas;
- Analisar e calcular a probabilidade de decifrar uma mensagem criptografada;
- Investigar como a probabilidade de sucesso na decodificação se altera com o aumento do número de tentativas realizadas.

POSSÍVEL SOLUÇÃO

A Cifra de César é um tipo de criptografia em que cada letra é substituída por outra, seguindo essa mesma lógica de deslocamento. Observa-se que o alfabeto contém 26 letras e uma letra codificada teria 25 possibilidades, tendo em vista que, não é possível codificar uma letra com ela própria, do contrário não haveria criptografia.

Para que a Cifra de César seja descoberta exatamente na terceira tentativa é necessário que a pessoa que está tentando decifrar erre as duas primeiras tentativas, então teremos a seguinte probabilidade:

1) Errar a primeira tentativa: Como existe uma única substituição correta para a letra "A", então tem-se 24 substituições incorretas, então a probabilidade é dada por:

$P = \frac{24}{25}$.

2) Errar a segunda tentativa: Nesse caso, já foi tentado uma letra, então teremos uma única substituição correta para 23 incorretas, então a probabilidade é dada por:

$P = \frac{23}{24}$.

3) Acertar a terceira tentativa: Agora, ele tem que acertar, como existe uma única substituição correta e já saíram 2 incorretas, então a probabilidade é dada por:

$P = \frac{1}{23}$.

A probabilidade total será o produto entre as probabilidades encontradas nos itens anteriores, ou seja, $P = \frac{24}{25} \cdot \frac{23}{24} \cdot \frac{1}{23}$. Alternativa correta será a E.

MATERIAIS UTILIZADOS PARA CONSTRUÇÃO

- Folha A4;
- Papelão;
- Tesoura;
- Cola.

POSSÍVEIS DIRECIONAMENTOS PARA O(A) DOCENTE

A construção deste material surgiu a partir da ideia de construir um disco giratório, com papelão e papel A4, seu principal objetivo é representar visualmente todas as possíveis substituições da Cifra de César de maneira simultânea. Esse recurso permite que os alunos compreendam, de forma concreta e interativa, como funciona o processo de criptografia por deslocamento de letras no alfabeto.

O disco facilita a visualização do mecanismo de codificação e decodificação, tornando o aprendizado mais dinâmico e acessível, beneficiando os alunos por meio de recursos visuais e manipuláveis. Ao girar o disco interno em relação ao disco externo, é possível observar, em tempo real, como cada letra é substituída por outra (ver Apêndice F).

A principal proposta por trás desta atividade é incentivar os alunos a criarem suas próprias mensagens criptografadas, utilizando a Cifra de César, enquanto um colega tenta decifrar o código elaborado. Essa dinâmica promove não apenas o engajamento dos estudantes, mas também proporciona uma atividade prática dos conceitos envolvidos no processo de criptografia.

Ao assumir os papéis de emissores de códigos e decodificadores, os alunos desenvolvem uma compreensão mais concreta e significativa dos princípios matemáticos e lógicos que fundamentam a criptografia. Além disso, essa abordagem facilita o entendimento do enunciado da questão do ENEM, tornando mais claro o que se espera como raciocínio e resposta. A atividade também estimula o trabalho colaborativo, o pensamento estratégico e o raciocínio probabilístico, ao mesmo tempo em que insere os estudantes em um contexto lúdico e desafiador.

Para a aplicação da atividade, o professor pode organizar a turma em duplas, distribuindo previamente o material didático já confeccionado para cada grupo. Antes do início, é fundamental que o professor explique de forma clara as regras da aplicação do material. As orientações podem seguir conforme o roteiro:

1) Cada integrante da dupla, de forma individual, irá girar o disco a sua escolha e, conforme o resultado, codificar uma pequena frase utilizando o material.

2) Em seguida, o colega da dupla tentará decifrar a mensagem criptografada, com base nos elementos fornecidos pelo próprio material.

Concluída essa etapa inicial, o professor poderá conduzir uma discussão com a turma, promovendo a reflexão sobre o processo de codificação e decodificação. Algumas perguntas orientadoras podem ser utilizadas nesse momento:

- Alguém conseguiu decifrar facilmente a mensagem do colega? Por quê?
- Que estratégias foram utilizadas para tentar descobrir o conteúdo da mensagem?
- Houve dificuldade na decodificação? Quais?

- Quantas letras precisam ser corretamente identificadas para que a mensagem seja compreendida?
- Qual é a probabilidade de alguém decifrar aleatoriamente, em uma única tentativa, a mensagem codificada?

A partir das respostas, o professor pode provocar debates e incentivar que os próprios estudantes formulem hipóteses e testem estratégias para encontrar uma possível solução para o problema proposto.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, Versão Final, 2018, p. 274. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Exame Nacional do Ensino Médio (Enem)**. Disponível em: <https://enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 21 de jun. 2025.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO

Caro(a) estudante, este questionário está dividido em duas partes, cada uma contendo questões cuidadosamente elaboradas para avaliar diferentes aspectos do seu conhecimento e preparação. A estrutura está organizada da seguinte forma:

1ª parte:

Para tratar a respeito da frequência dos seus estudos para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Para isso, foram elaboradas 4 (quatro) questões objetivas, conforme descritas a seguir:

Questão 1. Com que frequência você estuda para o ENEM?
( ) Diariamente.
( ) Algumas vezes por semana.
( ) Algumas vezes por mês.
( ) Raramente.
( ) Não estudo.

Questão 2. Quais são as principais dificuldades que você enfrenta ao estudar para o ENEM?
( ) Falta de tempo.
( ) Dificuldade em organizar o estudo.
( ) Problemas de concentração.
( ) Falta de materiais adequados.
( ) Outros (especificar) ____
____

Questão 3. Quais métodos de estudo você utiliza com maior frequência?
( ) Aulas presenciais ou online.
( ) Resolução de questões e simulados.
( ) Leitura de livros e apostilas.
( ) Grupos de estudo.
( ) Outros (especificar) ____
____

Questão 4. Você sente que está preparado para o ENEM?
( ) Sim, estou bem preparado.
( ) Estou razoavelmente preparado, mas preciso melhorar.
( ) Não me sinto preparado, tenho muitas dificuldades.
( ) Não sei avaliar minha preparação.

2ª parte:

Para analisar o seu conhecimento prévio em Probabilidade, dos quais apresentamos 5 (cinco) questões, sendo 2 (duas) objetivas e 3 (três) subjetivas, conforme descritos a seguir:

Questão 1. Você já aprendeu sobre probabilidade na escola?

( ) Sim, e me sinto confortável com o assunto.
( ) Sim, mas ainda tenho dúvidas.
( ) Já ouvi falar, mas não estudei.
( ) Não, nunca aprendi sobre probabilidade.

Questão 2. Fale, brevemente, sobre o conhecimento que você tem sobre Probabilidade.

____
____
____

Questão 3. Cite uma aplicação de Probabilidade no cotidiano.

____
____
____

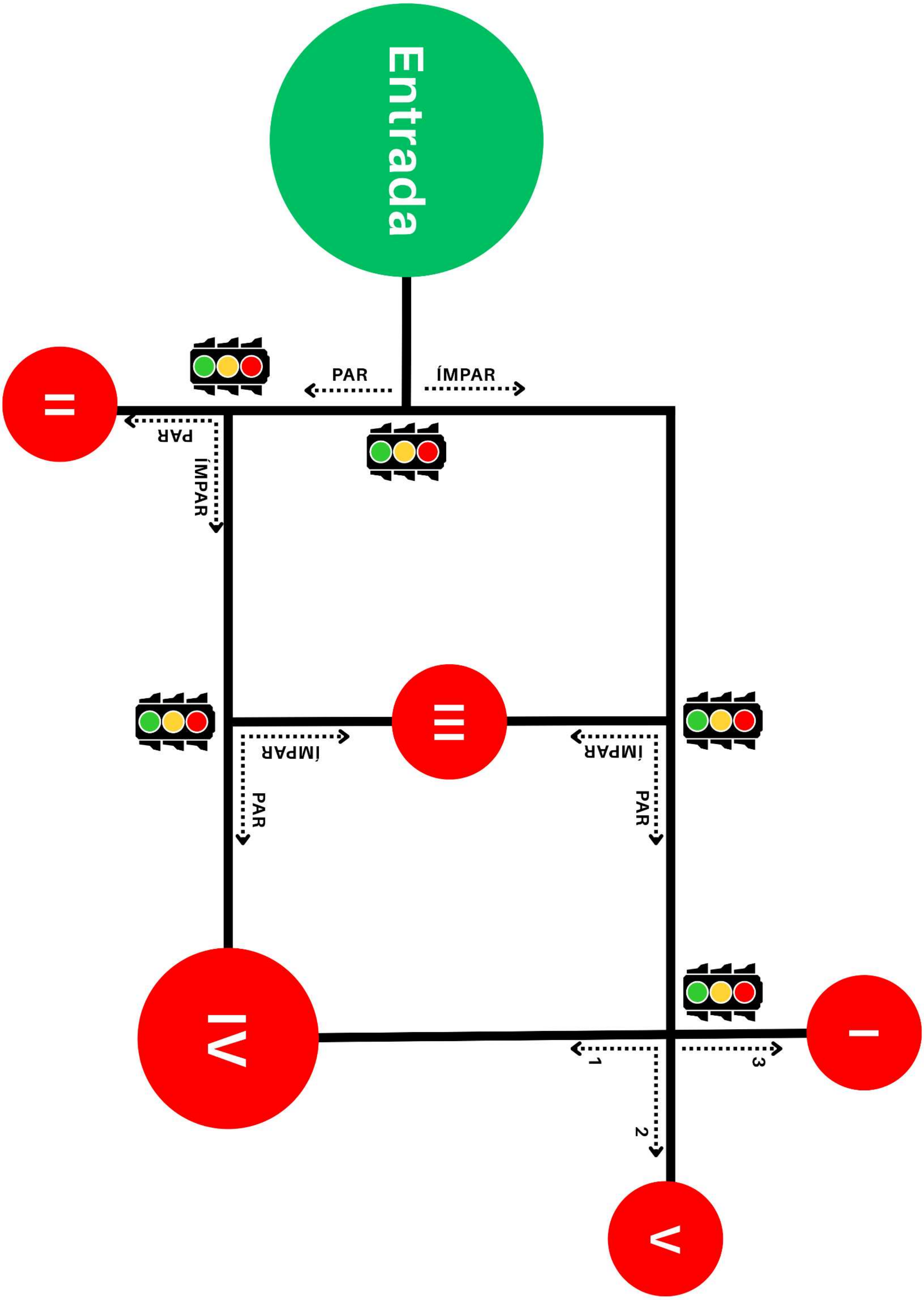
Questão 4. Se alguém disser que há 70% de chance de chover amanhã, como você interpreta essa informação?

( ) Com certeza vai chover.
( ) A chuva é mais provável do que a ausência de chuva, mas ainda pode não acontecer.
( ) Vai chover durante 70% do dia.
( ) A previsão do tempo nunca é confiável, então ignoro essa informação.

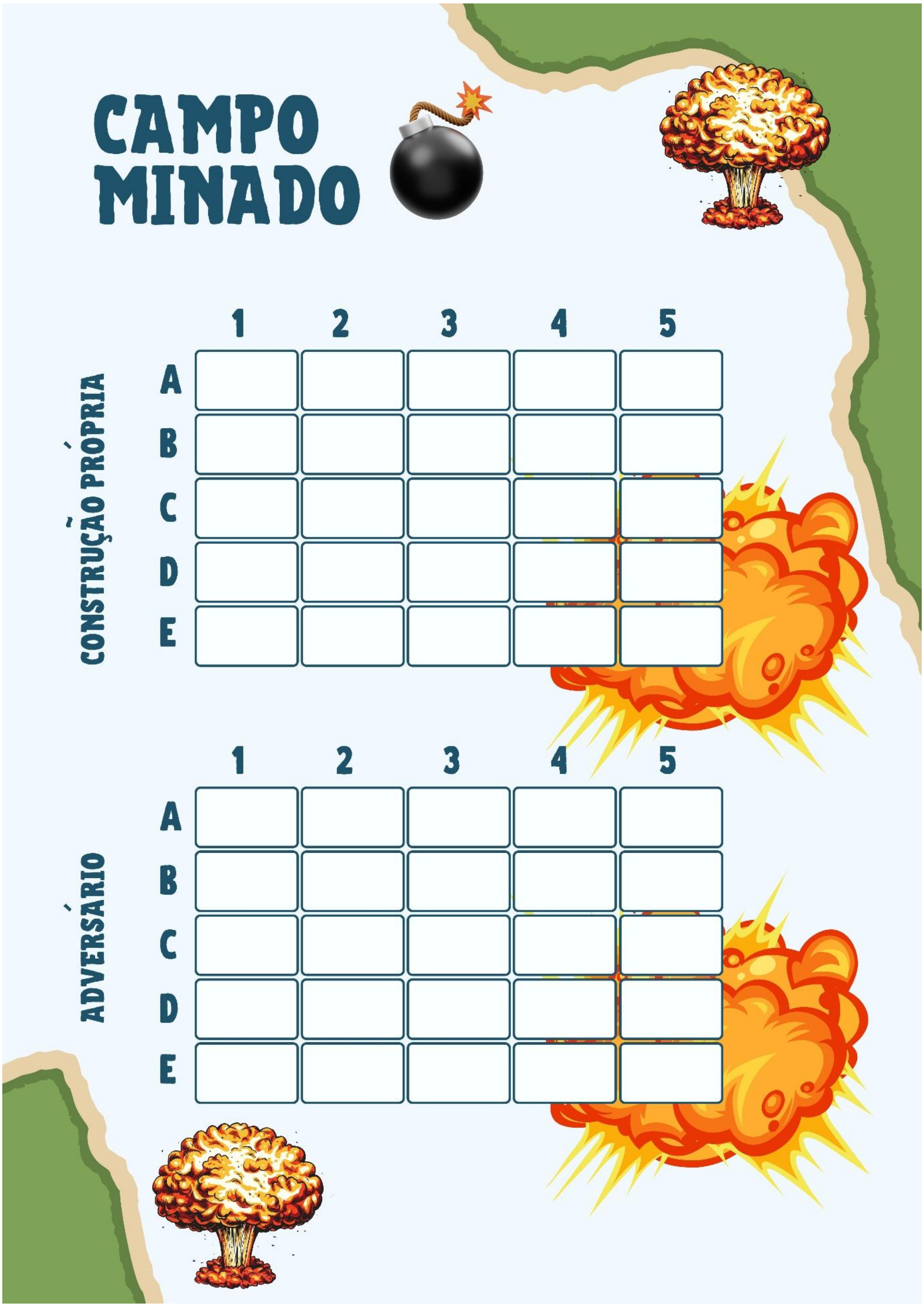
Questão 5. Na sua opinião, entender probabilidade pode ajudar na tomada de decisões importantes, como escolher um investimento, avaliar riscos na saúde ou não cair em golpes de jogos de azar? Fale a respeito.

____
____
____
____
____
____
____

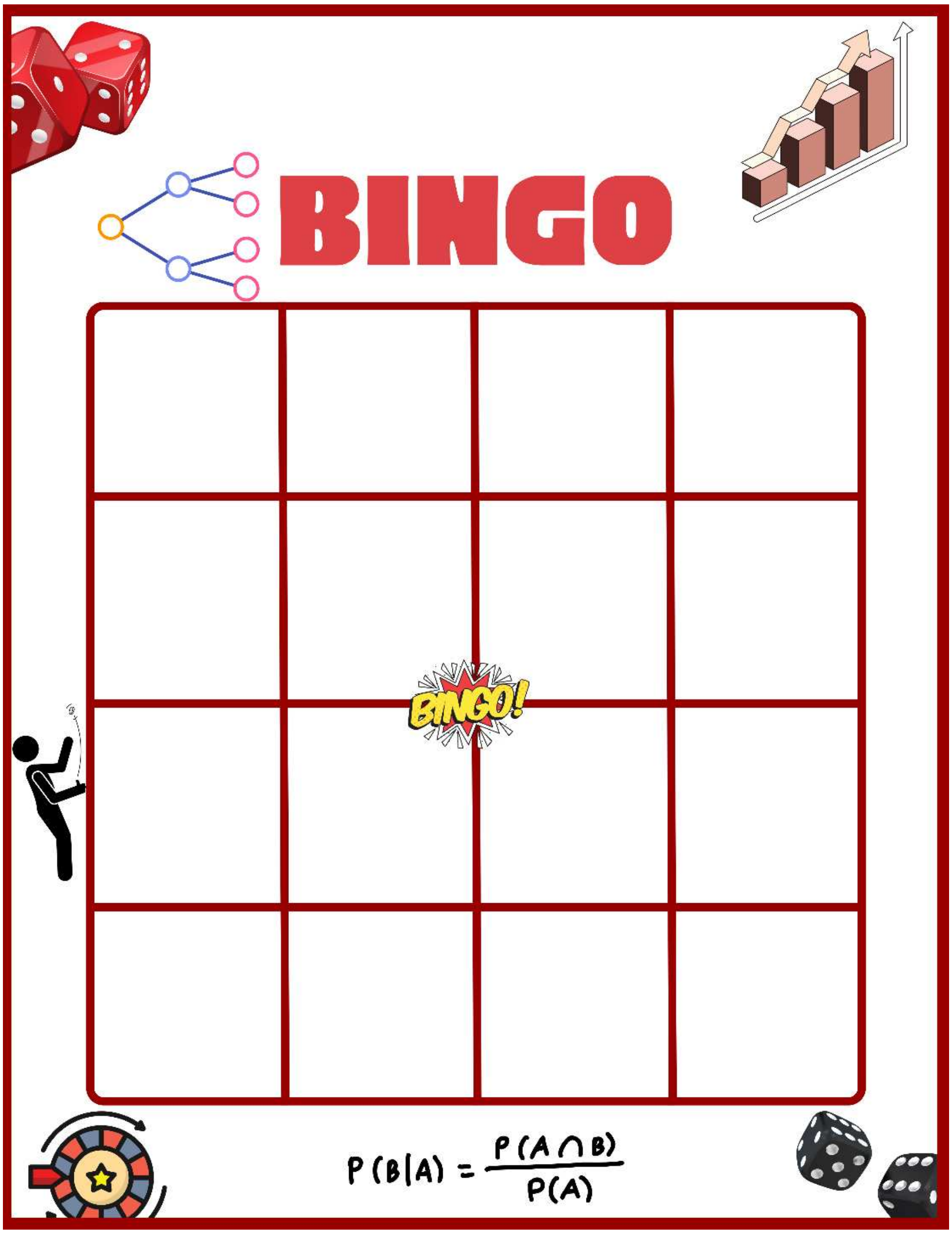
APÊNDICE C – MODELO DO MAPA DO PARQUE



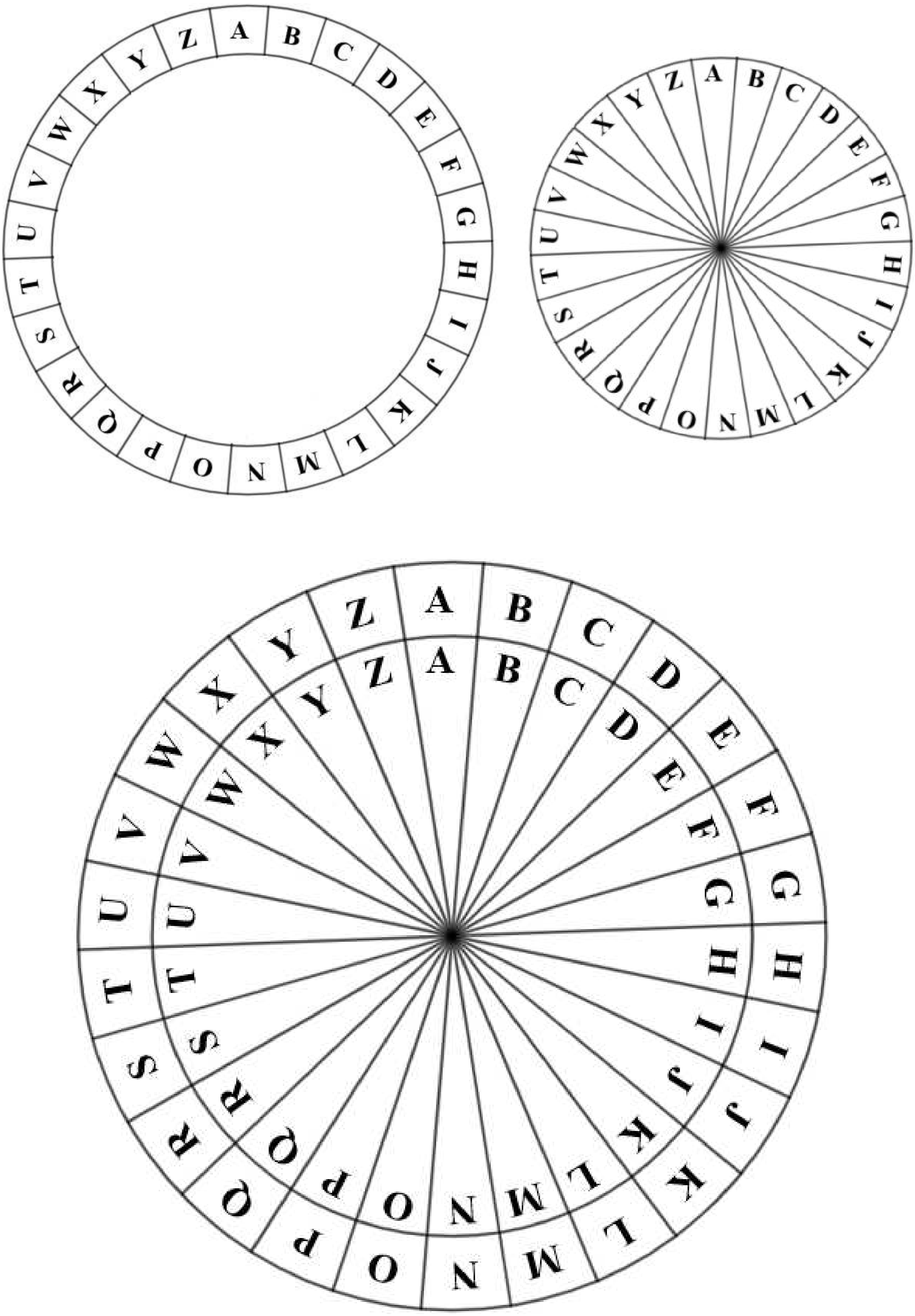
APÊNDICE D – MODELO DO CAMPO MINADO



APÊNDICE E – MODELO DA CARTELA DE BINGO



APÊNDICE F – MODELO DA ROLETA DE CRIPTOGRAFIA



ANEXO A – TALE (Estudantes menores de idade)

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Estratégias no Ensino de Probabilidade para o ENEM: Uma Abordagem por meio de Materiais Concretos para o Desenvolvimento do Raciocínio Matemático no Ensino Médio

Anderson Jefty Rodrigues Silva[1]
Paulo Henrique das Chagas Silva[2]

[1]Aluno do curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA.
[2]Professor orientador do curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA.

Matrícula: 2023110006

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Assentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, assinadas e rubricadas pelo pesquisador e pelo participante, sendo que uma via deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado pelo Ministério da Educação (MEC) com o objetivo de avaliar o desempenho dos estudantes do Ensino Médio e hoje é a principal prova para ingresso no ensino superior no Brasil, tornando-se a principal porta de entrada para universidades públicas e privadas, através de programas como o **Sisu, Prouni e Fies**.

O ENEM é composto por uma série de provas distribuídas ao longo de dois dias, com questões objetivas e uma redação dissertativo-argumentativa. No primeiro dia, os candidatos enfrentam as provas de **Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias** e a **Redação**. No Segundo dia de aplicação as provas são de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e **Matemática e suas Tecnologias.**

Dessa forma, o objetivo desta pesquisa é analisar os benefícios de uma aplicação de materiais concretos no ensino de probabilidade, com foco específico no ENEM. A pesquisa visa analisar como a utilização de recursos pedagógicos mais tangíveis pode facilitar a compreensão dos conceitos abstratos dessa área da matemática, promovendo um aprendizado mais eficaz e acessível. Além disso, pretende-se explorar como essa abordagem pode contribuir para a melhoria da qualidade educacional, especialmente no contexto das políticas públicas

voltadas para o ensino médio, ampliando as oportunidades de acesso a uma educação superior de qualidade.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: resolver problemas referentes ao ENEM. Também poderá responder questionários ou entrevistas sobre as tarefas realizadas. Sua participação terá duração máxima prevista de 5 (cinco) encontros de 2 h/a, e os registros poderão ser feitos através de diário de campo, folhas de respostas, gravação de áudio e fotografias. Em tais casos, sua identidade será mantida sob sigilo: as folhas de respostas reproduzidas na pesquisa não conterão qualquer informação que o identifique, os áudios servirão apenas para posterior transformação em texto e as fotos disporão de efeitos como esfumaçamento, tarjas e/ou outros procedimentos que impeçam o seu reconhecimento. Sempre que necessário, nos dirigiremos a você, no texto da pesquisa, através de um pseudônimo.

As atividades serão realizadas de forma individual e/ou em grupo.

Os dados coletados ficarão armazenados em formato digital sob a responsabilidade do pesquisador por cinco anos após a data de defesa da referida dissertação, após este período os mesmos serão descartados.

Desconfortos e riscos:

Por se tratar de uma pesquisa aplicada com a prática didática em ensino de matemática, com resolução e manuseio de problemas em sala de aula, não há riscos diretos identificados de antemão. Mas, a qualquer sinal de desconforto, os participantes têm a opção de se retirar da pesquisa.

Benefícios:

Prevemos como benefício a médio e longo prazo, o oferecimento de material didático concreto criado a partir destas aplicações em sala de aula.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome também não será citado.

Ressarcimento e Indenização:

Em situações nas quais você preveja alguma despesa (por exemplo, transporte, alimentação, materiais de papelaria ou impressões), deve informar o orçamento calculado ao pesquisador com antecedência ao preenchimento deste termo de consentimento livre e esclarecido, para que o pesquisador delibere sobre o ressarcimento dos custos na forma "em espécie" ou através de depósito em conta corrente.

Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa quando comprovados nos termos da legislação vigente.

Acompanhamento e assistência:

A qualquer momento os participantes poderão entrar em contato com os pesquisadores para esclarecimentos e assistência sobre qualquer aspecto da pesquisa, através dos contatos abaixo. Você receberá assistência integral e imediata, de forma gratuita, pelo tempo que for necessário em caso de danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, se precisar consultar esse registro de consentimento ou quaisquer outras questões, você poderá entrar em contato com o pesquisador Anderson Jefty Rodrigues Silva. Telefone: (84) 99969-0516. E-mail: andersonjefty2017@gmail.com. E também com o professor orientador Paulo Henrique das Chagas Silva. Telefone: (84) 99913-2151. E-mail: paulo.silva@ufersa.edu.br.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar:

Nome do(a) participante: ____

____ Data: ____/____/_____.
(Assinatura do participante)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____ Data: ____/_____/_____.
(Anderson Jefty Rodrigues Silva)

ANEXO B – TCLE (Pais ou responsáveis)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Estratégias no Ensino de Probabilidade para o ENEM: Uma Abordagem por meio de Materiais Concretos para o Desenvolvimento do Raciocínio Matemático no Ensino Médio

Anderson Jefty Rodrigues Silva[1]
Paulo Henrique das Chagas Silva[2]

[1]Aluno do curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA.
[2]Professor orientador do curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA.

Matrícula: 2023110006

Você está sendo convidado a autorizar a participação de seu/sua filho(a) e/ou menor sob sua responsabilidade como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar o direito do menor como participante e é elaborado em duas vias, assinadas e rubricadas pelo pesquisador e pelo responsável legal, sendo que uma via deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar que o menor sob sua responsabilidade participe ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado pelo Ministério da Educação (MEC) com o objetivo de avaliar o desempenho dos estudantes do Ensino Médio e hoje é a principal prova para ingresso no ensino superior no Brasil, tornando-se a principal porta de entrada para universidades públicas e privadas, através de programas como o **Sisu, Prouni e Fies**.

O ENEM é composto por uma série de provas distribuídas ao longo de dois dias, com questões objetivas e uma redação dissertativo-argumentativa. No primeiro dia, os candidatos enfrentam as provas de **Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias** e a **Redação**. No Segundo dia de aplicação as provas são de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e **Matemática e suas Tecnologias.**

Dessa forma, o objetivo desta pesquisa é analisar os benefícios de uma aplicação de materiais concretos no ensino de probabilidade, com foco específico no ENEM. A pesquisa visa analisar como a utilização de recursos pedagógicos mais tangíveis pode facilitar a compreensão dos conceitos abstratos dessa área da matemática, promovendo um aprendizado mais eficaz e acessível. Além disso, pretende-se explorar como essa abordagem pode contribuir para a melhoria da qualidade educacional, especialmente no contexto das políticas públicas

voltadas para o ensino médio, ampliando as oportunidades de acesso a uma educação superior de qualidade.

Procedimentos:

Concordando com o estudo você está autorizando o menor sob sua responsabilidade a: resolver problemas referentes ao ENEM. Também poderá responder questionários ou entrevistas sobre as tarefas realizadas. Sua participação terá duração máxima prevista de 5 (cinco) encontros de 2 h/a, e os registros poderão ser feitos através de diário de campo, folhas de respostas, gravação de áudio e fotografias. Em tais casos, sua identidade será mantida sob sigilo: as folhas de respostas reproduzidas na pesquisa não conterão qualquer informação que o identifique, os áudios servirão apenas para posterior transformação em texto e as fotos disporão de efeitos como esfumaçamento, tarjas e/ou outros procedimentos que impeçam o seu reconhecimento. Sempre que necessário, nos dirigiremos a você, no texto da pesquisa, através de um pseudônimo.

As atividades serão realizadas de forma individual e/ou em grupo.

Os dados coletados ficarão armazenados em formato digital sob a responsabilidade do pesquisador por cinco anos após a data de defesa da referida dissertação, após este período os mesmos serão descartados.

Desconfortos e riscos:

Por se tratar de uma pesquisa aplicada com a prática didática em ensino de matemática, com resolução e manuseio de problemas em sala de aula, não há riscos diretos identificados de antemão. Mas, a qualquer sinal de desconforto, os participantes têm a opção de se retirar da pesquisa.

Benefícios:

Prevemos como benefício a médio e longo prazo, o oferecimento de material didático concreto criado a partir destas aplicações em sala de aula.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que a identidade do menor sob a sua responsabilidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, o nome do menor também não será citado.

Ressarcimento e Indenização:

Em situações nas quais você preveja alguma despesa (por exemplo, transporte, alimentação, materiais de papelaria ou impressões), deve informar o orçamento calculado ao pesquisador com antecedência ao preenchimento deste termo de consentimento livre e esclarecido, para que o pesquisador delibere sobre o ressarcimento dos custos na forma “em espécie” ou através de depósito em conta corrente.

Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa quando comprovados nos termos da legislação vigente.

Acompanhamento e assistência:

A qualquer momento os participantes poderão entrar em contato com os pesquisadores para esclarecimentos e assistência sobre qualquer aspecto da pesquisa, através dos contatos abaixo. O menor receberá assistência integral e imediata, de forma gratuita, pelo tempo que for necessário em caso de danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, se precisar consultar esse registro de consentimento ou quaisquer outras questões, você poderá entrar em contato com o pesquisador Anderson Jefty Rodrigues Silva. Telefone: (84) 99969-0516. E-mail: andersonjefty2017@gmail.com. E também com o professor orientador Paulo Henrique das Chagas Silva. Telefone: (84) 99913-2151. E-mail: paulo.silva@ufersa.edu.br.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, autorizo (nome do menor)
____ a participar desta pesquisa

____ Data: ____/____/_____.
(Assinatura do responsável legal)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____ Data: ____/_____/_____.
(Anderson Jefty Rodrigues Silva)

ANEXO C – TCLE (Estudantes maiores de idade)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Estratégias no Ensino de Probabilidade para o ENEM: Uma Abordagem por meio de Materiais Concretos para o Desenvolvimento do Raciocínio Matemático no Ensino Médio

Anderson Jefty Rodrigues Silva[1]
Paulo Henrique das Chagas Silva[2]

[1]Aluno do curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA.
[2]Professor orientador do curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA.

Matrícula: 2023110006

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, assinadas e rubricadas pelo pesquisador e pelo participante, sendo que uma via deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado pelo Ministério da Educação (MEC) com o objetivo de avaliar o desempenho dos estudantes do Ensino Médio e hoje é a principal prova para ingresso no ensino superior no Brasil, tornando-se a principal porta de entrada para universidades públicas e privadas, através de programas como o **Sisu, Prouni e Fies**.

O ENEM é composto por uma série de provas distribuídas ao longo de dois dias, com questões objetivas e uma redação dissertativo-argumentativa. No primeiro dia, os candidatos enfrentam as provas de **Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias** e a **Redação**. No Segundo dia de aplicação as provas são de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e **Matemática e suas Tecnologias.**

Dessa forma, o objetivo desta pesquisa é analisar os benefícios de uma aplicação de materiais concretos no ensino de probabilidade, com foco específico no ENEM. A pesquisa visa analisar como a utilização de recursos pedagógicos mais tangíveis pode facilitar a compreensão dos conceitos abstratos dessa área da matemática, promovendo um aprendizado mais eficaz e acessível. Além disso, pretende-se explorar como essa abordagem pode contribuir para a melhoria da qualidade educacional, especialmente no contexto das políticas públicas

voltadas para o ensino médio, ampliando as oportunidades de acesso a uma educação superior de qualidade.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: resolver problemas referentes ao ENEM. Também poderá responder questionários ou entrevistas sobre as tarefas realizadas. Sua participação terá duração máxima prevista de 5 (cinco) encontros de 2 h/a, e os registros poderão ser feitos através de diário de campo, folhas de respostas, gravação de áudio e fotografias. Em tais casos, sua identidade será mantida sob sigilo: as folhas de respostas reproduzidas na pesquisa não conterão qualquer informação que o identifique, os áudios servirão apenas para posterior transformação em texto e as fotos disporão de efeitos como esfumaçamento, tarjas e/ou outros procedimentos que impeçam o seu reconhecimento. Sempre que necessário, nos dirigiremos a você, no texto da pesquisa, através de um pseudônimo.

As atividades serão realizadas de forma individual e/ou em grupo.

Os dados coletados ficarão armazenados em formato digital sob a responsabilidade do pesquisador por cinco anos após a data de defesa da referida dissertação, após este período os mesmos serão descartados.

Desconfortos e riscos:

Por se tratar de uma pesquisa aplicada com a prática didática em ensino de matemática, com resolução e manuseio de problemas em sala de aula, não há riscos diretos identificados de antemão. Mas, a qualquer sinal de desconforto, os participantes têm a opção de se retirar da pesquisa.

Benefícios:

Prevemos como benefício a médio e longo prazo, o oferecimento de material didático concreto criado a partir destas aplicações em sala de aula.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome também não será citado.

Ressarcimento e Indenização:

Em situações nas quais você preveja alguma despesa (por exemplo, transporte, alimentação, materiais de papelaria ou impressões), deve informar o orçamento calculado ao pesquisador com antecedência ao preenchimento deste termo de consentimento livre e esclarecido, para que o pesquisador delibere sobre o ressarcimento dos custos na forma “em espécie” ou através de depósito em conta corrente.

Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa quando comprovados nos termos da legislação vigente.

Acompanhamento e assistência:

A qualquer momento os participantes poderão entrar em contato com os pesquisadores para esclarecimentos e assistência sobre qualquer aspecto da pesquisa, através dos contatos abaixo. Você receberá assistência integral e imediata, de forma gratuita, pelo tempo que for necessário em caso de danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, se precisar consultar esse registro de consentimento ou quaisquer outras questões, você poderá entrar em contato com o pesquisador Anderson Jefty Rodrigues Silva. Telefone: (84) 99969-0516. E-mail: andersonjefty2017@gmail.com. E também com o professor orientador Paulo Henrique das Chagas Silva. Telefone: (84) 99913-2151. E-mail: paulo.silva@ufersa.edu.br.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar:

Nome do(a) participante: ____

____ Data: ____/____/_____.
(Assinatura do participante)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____ Data: ____/_____/_____.
(Anderson Jefty Rodrigues Silva)