UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Diego Dantas De Oliveira

Números primos: os tijolos fundamentais da aritmética

MOSSORÓ/RN

2025

Diego Dantas De Oliveira

Números primos: os tijolos fundamentais da aritmética

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues

Co-orientador: Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia

MOSSORÓ/RN

2025

O48n Oliveira, Diego Dantas de.
Números primos: os tijolos fundamentais da aritmética / Diego Dantas de Oliveira. - 2025.
94 f. : il.

Orientador: Walter Martins Rodrigues.
Coorientador: Antonio Ronaldo Gomes Garcia.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em --Selecione um Curso ou Programa--, 2025.

1. números primos. 2. sequência didática. 3. ensino. I. Martins Rodrigues, Walter, orient. II. Ronaldo Gomes Garcia, Antonio, co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

Diego Dantas De Oliveira

Números primos: os tijolos fundamentais da aritmética

Dissertação apresentada ao Programa de PósGraduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática.

Defendida em: 12 / 09 / 2025.

BANCA EXAMINADORA

Walter Martins Rodrigues, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

Antonio Ronaldo Gomes Garcia, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

Odirlei Silva Jesus, Prof. Dr. (UFRN)
Membro Examinador

Manassés Pereira Nóbrega, Prof. Dr. (UERN)
Membro Examinador

Elmer Rolando LLanos Villarreal, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

Dedico este trabalho a minha mãe, Tereza M. de Oliveira Araújo, ao meu irmão, Thiago Dantas de Oliveira e ao meu pai, Benedito Dantas de Araújo (*in memoriam*), que foram fonte de incentivo, suporte e inspiração em toda a minha trajetória de vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me presenteado com saúde, paciência e persistência para concluir essa etapa em minha vida. Sei que sem Ele eu não teria todas as oportunidades que me fizeram chegar onde estou, e realizar esse sonho.

Agradeço a minha mãe Tereza Maria de Oliveira Araújo, e ao meu irmão Thiago Dantas de Oliveira, por todo apoio incondicional que me ofereceram durante todo o curso e por sempre acreditarem em minha capacidade.

Agradeço a minha namorada Ana Cátia Alves da Silva, por sempre me apoiar e acreditar no meu sucesso, me ajudando inclusive em correções ortográficas na produção deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos que sempre me ofereceram palavras positivas e dividiram comigo vários momentos, experiências e conselhos a respeito dessa etapa acadêmica.

Agradeço aos meus colegas de curso por todos os momentos, aprendizados, risadas, conhecimentos, experiências e conquistas que foram compartilhadas mutuamente durante todo o curso.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT que fizeram parte dessa etapa da minha vida e foram fundamentais para essa conquista.

Agradeço a toda equipe da escola E.E.E.F.M. Américo Maia pela compreensão e apoio oferecidos durante o curso.

Agradeço a toda banca examinadora pela avaliação que muito contribuiu para enriquecer o meu trabalho.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que tiveram participação e estiveram comigo contribuindo, direta ou indiretamente, para a realização deste sonho. Fica aqui o meu muito obrigado.

“Se for humanamente possível, considere que está ao seu alcance”.

Marco Aurélio.

RESUMO

Esta dissertação apresenta a abrangência e a importância do conjunto dos números primos, incluindo também uma proposta de sequência didática para o Ensino Fundamental, voltada ao ensino dos conhecimentos relacionados a esses números, com o objetivo de tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, contextualizado e significativo. Fundamentada em autores como Sautoy (2007), Oliveira (2013), Zabala (1998) e Lima (2025), a pesquisa contempla diversas informações sobre números primos, como sua descoberta, aplicações, teoremas, curiosidades e conjecturas, entre outros temas, além de destacar a importância das sequências didáticas como instrumento eficaz, desde que bem planejadas e mediadas por professores atentos às realidades e aos ritmos de aprendizagem dos alunos. A proposta da SD contempla seis atividades articuladas, que visam desenvolver, de forma gradual e interativa, a compreensão dos números primos, suas propriedades e aplicações. As atividades incluem discussões iniciais, identificação de números primos por meio do crivo de Eratóstenes, pesquisa sobre curiosidades, fatoração em primos e aplicações. O enfoque está na construção coletiva do conhecimento, valorizando o raciocínio lógico, a pesquisa, o trabalho em grupo e a relação entre teoria e prática, incentivando o protagonismo do aluno. Os resultados esperados envolvem não apenas a apropriação do conceito de número primo, mas também o estímulo à curiosidade matemática, à autonomia dos alunos e à percepção da aplicabilidade dos conteúdos matemáticos em contextos reais. Conclui-se que, com planejamento e intencionalidade, as sequências didáticas podem ser aliadas potentes na promoção de uma aprendizagem mais sólida e significativa no ensino de matemática. Dessa forma, espera-se que este material se torne uma ferramenta eficaz nas mãos de professores do Ensino Fundamental ao trabalharem com números primos.

Palavras-chave: números primos, sequência didática, ensino.

ABSTRACT

This dissertation presents the scope and importance of the set of prime numbers, also including a proposal for a didactic sequence for Elementary Education, aimed at teaching knowledge related to these numbers, with the goal of making the teaching-learning process more dynamic, contextualized, and meaningful. Grounded in authors such as Sautoy (2007), Oliveira (2013), Zabala (1998), and Lima (2025), the research covers various information about prime numbers, such as their discovery, applications, theorems, curiosities, and conjectures, among other topics. It also highlights the importance of didactic sequences as an effective tool, provided they are well planned and mediated by teachers attentive to the realities and learning rhythms of their students. The proposal of the DS includes six interconnected activities designed to gradually and interactively develop the understanding of prime numbers, their properties, and applications. The activities include initial discussions, identification of prime numbers through the Sieve of Eratosthenes, research on curiosities, factorization into primes, and applications. The focus is on the collective construction of knowledge, valuing logical reasoning, research, teamwork, and the relationship between theory and practice, encouraging student protagonism. The expected results involve not only the appropriation of the concept of prime numbers but also the stimulation of mathematical curiosity, student autonomy, and the perception of the applicability of mathematical content in real contexts. It is concluded that, with planning and intentionality, didactic sequences can be powerful allies in promoting more solid and meaningful learning in mathematics teaching. Thus, it is expected that this material will become an effective tool in the hands of Elementary Education teachers when working with prime numbers.

Keywords: prime numbers, didactic sequence, teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SD - Sequência Didática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da matemática, os números primos despertam admiração, atração e, por vezes, até mesmo surpresa. Definidos como os números inteiros maiores que um, que possuem apenas dois divisores, o um e ele próprio, os números primos desempenham um papel central na estruturação dos números naturais. Nessa perspectiva, são, por excelência, os tijolos fundamentais da aritmética. Podemos dizer que os números primos estão para a matemática assim como as notas musicais estão para a música.

Segundo O livro da matemática (2020, p. 124) “os números primos fascinam os estudiosos desde que os gregos antigos da escola de Pitágoras primeiro os estudaram, sobretudo porque podem ser vistos como os ‘tijolos’ de todos os números naturais”. Essa idealização é legitimada a partir do conhecido *Teorema Fundamental da Aritmética.* Dito isto, seria oportuno afirmar que o conhecimento a respeito desses números e sua utilização é indispensável para um satisfatório desenvolvimento dos saberes matemáticos.

A importância dos números primos vai além da teoria elementar dos números, eles estão presentes em várias outras áreas do conhecimento, como criptografia, análise matemática, computação, entre outras. Apesar disso, é comum que o seu ensino, principalmente nos anos finais do Ensino Fundamental, e até mesmo no Ensino Médio, seja restringido a conceitos básicos e a definições fundamentais, sem contextualização histórica ou aprofundamento de conhecimentos.

O ensino da matemática nos anos finais do Ensino Fundamental apresenta diversos desafios, especialmente quando se trata de conteúdos abstratos como os números primos. Logo, essa forma limitada de trabalho com o tema pode acontecer até mesmo por falta de conhecimentos mais específicos a respeito dos números primos, de certa forma, colaborando para um ofuscamento da riqueza da temática, afastando os estudantes de sua beleza matemática.

Nesse contexto, o uso de sequências didáticas como estratégia de ensino surge como uma opção eficaz para promover um ensino mais significativo e contextualizado. Segundo Zabala (1998), sequências didáticas são conjuntos de atividades organizadas e articuladas que visam desenvolver objetivos educacionais específicos, respeitando o ritmo e o nível de compreensão dos estudantes. Desse modo, o uso dessa metodologia permite uma construção gradual do conhecimento, na qual é possível valorizar as interações, os saberes prévios dos alunos e a mediação pedagógica do professor.

A presente dissertação tem como objetivo tratar de conhecimentos a respeito dos números primos, a partir de uma abordagem teórica consistente, apresentando resultados, teoremas e conjecturas associadas aos primos — como o Teorema de Euclides, a Conjectura de Goldbach, a Hipótese de Riemann, entre outros — e, em paralelo, propõe-se uma sequência didática para o ensino de números primos no Ensino Fundamental, com foco nos anos finais, na qual propomos caminhos para o ensino deste tema de forma mais rica, motivadora e significativa.

A proposta busca, além de transmitir os conceitos formais, despertar a curiosidade dos estudantes por meio de atividades investigativas, lúdicas e interdisciplinares. São abordados conteúdos como definição de números primos, crivo de Eratóstenes, fatoração em primos, propriedades e curiosidades, culminando em uma discussão introdutória sobre a aplicação desses números na criptografia moderna e uma análise dos conteúdos aprendidos durante a aplicação das atividades realizadas.

Acredita-se que, ao tratar os números primos como "tijolos fundamentais da aritmética", conforme aponta a tradição matemática, é possível não apenas melhorar o desempenho dos alunos nesse conteúdo, mas também contribuir para o desenvolvimento do pensamento lógico, da capacidade de argumentação e da valorização da matemática como ferramenta essencial para a compreensão do mundo.

A metodologia adotada neste trabalho foi a pesquisa bibliográfica, realizada por meio da leitura e análise de diversos materiais, como artigos científicos, livros, revistas especializadas, dissertações e teses, que abordam as temáticas centrais: números primos e sequências didáticas. Nesse sentido, Guerra (2024) destaca que a metodologia de pesquisa bibliográfica consiste na procura, seleção e análise de materiais informativos, que sejam relevantes para o estudo do tema em questão.

A dissertação está organizada da seguinte maneira: no primeiro capítulo, encontra-se a introdução, na qual apresentamos uma visão geral acerca do que foi desenvolvido, como também os objetivos da pesquisa; o segundo capítulo trata-se de uma breve abordagem histórica sobre os números primos, ressaltando seu “surgimento” e também sua formalização, assim como a apresentação de teoremas contidos na obra “Os Elementos” de Euclides; o terceiro capítulo foi destinado à apresentação de métodos de identificação de números primos, os chamados testes de primalidade, os quais foram divididos em categorias; no quarto capítulo, apresentam-se algumas categorias de números primos, bem como as propriedades ligadas a cada uma dessas categorias.

O quinto capítulo foi destinado à apresentação de algumas das mais famosas conjecturas sobre números primos, além da exposição de algumas curiosidades acerca do tema; o sexto capítulo foi destinado a tão famosa Hipótese de Riemann, apresentando sua história e contextualização do seu surgimento; o sétimo capítulo foi destinado, exclusivamente, à apresentação de uma proposta de sequência didática de ensino/estudo de números primos no Ensino Fundamental; e no oitavo capítulo encontram-se as considerações finais a respeito da presente pesquisa.

Indubitavelmente, os números primos são objetos de estudos milenares, capazes de despertar curiosidade e encantamento, e merecem ser melhor explorados nos espaços escolares. Com isso em vista, esta dissertação busca contribuir para uma maior difusão e valorização desse conteúdo no ambiente educacional, propondo práticas que promovam não apenas a aprendizagem, mas também o encantamento e o engajamento dos estudantes com a matemática.

2 UMA BREVE HISTÓRIA DOS NÚMEROS PRIMOS

Os números primos têm despertado a curiosidade e o interesse de estudiosos da matemática há muitos anos, provavelmente antes mesmo do seu surgimento e desenvolvimento como Ciência propriamente dita. Neste capítulo, propõe-se um recorte das origens e da descoberta da sequência dos números primos como se conhece hoje.

2.1 O OSSO DE ISHANGO

Acredita-se que um dos primeiros indícios do aparecimento de números primos está presente em um osso, conhecido como "osso de Ishango" descoberto pelo geólogo belga Jean Heinzelin de Braucourt, no ano de 1960, em montanhas da África, onde até então era o Congo Belga. Para Gracián (2017) essa descoberta pode ser classificada como arqueologia matemática.

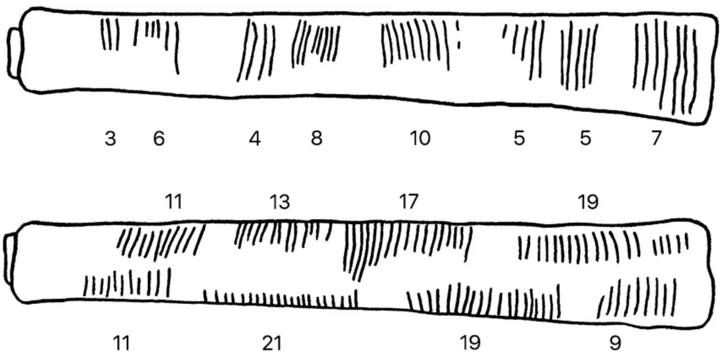
O osso de Ishango não possui datação precisa, porém estima-se que sua idade esteja entre 18000 e 20000 anos. Esse artefato possui várias marcações gravadas, organizadas em grupos, que sugerem algum tipo de sistema de contagem. Sobre essas marcações Santos (2019, p. 124) afirma que "Independentemente da explicação encontrada, para cada um dos pormenores presentes no osso de Ishango, é indiscutível o fato de que aqueles registros, à data em que foram feitos, demonstram interesse pelos 'números'".

Figura 1: O osso de Ishango

Fonte: < https://www.megacurioso.com.br/arqueologia/37345-osso-de-ishango-conheca-a-calculadora-mais-antiga-do-mundo.htm>. Acesso em: 19 de jun. 2024.

Em uma de suas colunas, que contém marcações, está presente um conjunto de marcas organizadas, representando os números 11, 13, 17 e 19, que são os números primos compreendidos entre 10 e 20, como mostra a Figura 2 abaixo.

Figura 2: Esquema de marcações no osso de Ishango



Fonte: < https://fredlopes.com.br/ufmt/ensino/matematica/historia-da-matematica/o-osso-de-ishango/>. Acesso em: 19 de jun. 2024.

Acredita-se que os registros no osso de Ishango são as primeiras representações de números primos feitas por seres humanos. Para Peruzzo (2012, p. 2) “talvez esse osso seja um indício das primeiras incursões pela teoria dos números primos”. Desse modo, é possível afirmar que o osso de Ishango é mais do que um mero artefato arqueológico, e sim uma prova do pensamento matemático primitivo rudimentar que os seres humanos possuíam há milênios. Além disso, a presença das marcações representando números primos nesse objeto só representa o quão antigo é o pensamento matemático relacionado a esses números.

2.2 EUCLIDES E SEUS ELEMENTOS

Euclides, mais conhecido como “Euclides de Alexandria”, foi um matemático grego que viveu por volta do ano 300 a.C., cuja grandiosa reputação faz jus a seu nome, apesar do pouco conhecimento sobre sua história de vida. Por ter lecionado matemática na cidade de Alexandria, provavelmente, pode ter sido aluno de discípulos de Platão, inclusive estudado em sua tão famosa academia, devido à natureza de seu trabalho em matemática. De acordo com o historiador Aaboe (2013, p. 52) “não conhecemos nada com certeza sobre Euclides, exceto seus trabalhos que foram preservados”.

Figura 3: Euclides

Fonte: <https://vemlerciencia.com.br/2023/04/12/euclides-de-alexandria-e-a-mesa-bamba/>. Acesso em: 24 jun. 2024.

Além de ser considerado um dos mais importantes e influentes estudiosos da Grécia antiga, Euclides de Alexandria também foi considerado um dos mais importantes autores de matemática da história da humanidade. Sua obra “Os elementos”, resultado da junção de 13 volumes, que ao longo do tempo tornou-se tão famosa quanto o próprio autor, devido a sua importância para a matemática, é considerada a mais importante e famosa obra da matemática e da história, de maneira geral.

Figura 4: Os Elementos de Euclides

Fonte: <https://www.grupoescolar.com/a/b/172D0.jpg>. Acesso em 03 jul. 2024.

Essa obra trata dos mais importantes assuntos matemáticos existentes à época de sua publicação, na qual o autor apresenta como grande diferencial a forma de tratar e apresentar tais assuntos. Segundo Aaboe (2013, p. 53) “nestes treze livros, Euclides incorpora todo o conhecimento matemático acumulado em sua época, com algumas exceções”.

Ademais, Aaboe (2013, p. 53) afirma que “seu grande feito é a apresentação do material sob uma bela forma sistemática e seu tratamento dele como um todo orgânico”. Apesar de dar maior destaque à geometria, ela também trata de temas de álgebra e teoria dos números.

Em “Os Elementos”, Euclides aborda ainda os principais teoremas sobre os números primos que eram conhecidos à época, apresentando inclusive demonstrações e resultados importantes. Segundo Peruzzo (2012, p. 3) “O livro Elementos, de Euclides [...] de cerca do ano 300 a.C., contém importantes teoremas sobre os números primos, nos quais incluem-se a demonstração de sua infinitude e o teorema fundamental da aritmética”.

Hefez (2022, p. 95), ao falar sobre o teorema fundamental da aritmética, diz que “este resultado, porém, não explicitamente enunciado em sua totalidade, está essencialmente contido nos Elementos de Euclides, pois ele é consequência quase que imediata de proposições que lá se encontram”. O teorema diz o seguinte:

Teorema 1: *Todo número inteiro positivo maior que 1 pode ser escrito como um produto de números primos.*

De maneira mais formal, temos:

Dado $n \in \mathbb{Z}$*, com* $n > 1$*, então existem números primos* $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_k$*, e expoentes positivos* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_k$ *de modo que*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

sendo essa decomposição única, a menos da ordem dos fatores.

Abaixo demonstraremos, usando o método da indução finita, a existência desse produto, e usando o método da demonstração por contradição demonstraremos a unicidade.

Demonstração:

<u>Existência:</u>

Base da indução:

Para $n = 2$, o resultado é verificado, pois 2 é um número primo.

Hipótese indutiva:

Suponha verdade que para todo número inteiro positivo $n \in \mathbb{Z}$, n pode ser escrito como um produto de números primos.

Passo indutivo:

Provaremos que $n + 1$ também pode ser escrito como um produto de números primos.

- Se $n + 1$ é primo, nada temos a provar;
- Se $n + 1$ é composto, então existem inteiros n_1 e n_2, tal que $n + 1 = n_1 \cdot n_2$, sendo $1 < n_1 < n + 1$ e $1 < n_2 < n + 1$.

  Note que, pela hipótese indutiva, $n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ e $n_2 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$, sendo p_i e q_j números primos, com $i = 1, 2, \ldots, k$ e $j = 1, 2, \ldots, t$.

  Dessa forma, $n + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$, sendo, então, $n + 1$ um produto de números primos. Como queríamos demonstrar.

<u>Unicidade:</u>

Suponha $n > 1$, tal que $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$, onde p_i e q_j números primos, com $i = 1, 2, \ldots, k$ e $j = 1, 2, \ldots, t$, de modo que o produto dos p_i é diferente do produto dos q_j.

Note que p_1 divide $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$, e p_1 é primo, então p_1 divide algum q_j.

Como todos os q_j são primos, então p_1 é igual a algum q_j, o que nos permite “cancelar” esse fator comum de ambos os lados da igualdade.

Repetindo esse argumento continuadamente notaremos que todos os fatores serão “cancelados” até sobrar $1 = 1$, contradizendo a afirmação inicial de que os produtos entre p_i e q_j eram diferentes. Portanto, a fatoração é única, exceto pela ordem dos fatores. □

Sobre a infinitude dos números primos, Peruzzo (1012, p. 14) afirma que “a questão da existência de uma infinidade de números primos foi levantada no ano de 300 a.C, estando resolvida no livro Elementos de Euclides”. Ainda, sobre a demonstração da existência de infinitos números primos, Hefez (2022, p. 101) destaca que “essa prova é considerada uma das pérolas da matemática”.

A afirmação de Euclides foi a seguinte:

Teorema 2: *Existem infinitos números primos.*

Demonstraremos, assim como Euclides, esse teorema pelo método da redução ao absurdo.

Demonstração:

Suponha, por absurdo, que a quantidade de números primos é finita, ou seja, existe um número primo p_k que seja maior que todos os outros números primos que existem.

Considere um número natural n, de modo que

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$$

Note que $n > p_k$, e que pelo teorema fundamental da aritmética existe um número primo p que divide n, e pela construção do n, esse fator primo deve ser um dos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, portanto p divide o produto $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Como p divide n e também divide o produto $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, então p também deve dividir 1, o que é um absurdo.

Portando, a quantidade de números primos é infinita.

3 NÚMEROS PRIMOS NA OBMEP

A Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) foi criada no ano de 2005, e desde então acontece anualmente. Ela, ao decorrer dos anos, tem se mostrado um valioso instrumento de incentivo à matemática, como também um meio democrático de descobrir talentos matemáticos, visto que ela é voltada, principalmente, para as escolas públicas. Para Maranhão (2011, p.13):

> Atualmente a OBMEP é uma política pública mundialmente reconhecida, uma das maiores iniciativas governamentais voltadas ao processo de ensino-aprendizagem em matemática, visando melhorar a motivação, o interesse e o desempenho dos alunos nas escolas públicas brasileiras. (MARANHÃO, 2011, p.13).

Sendo os números primos tão importantes para a matemática, ao analisar as questões propostas pela OBMEP ao longo dos anos, notamos que conhecimentos relacionados a números primos aparecem com frequência, seja de maneira direta ou indireta, como um conhecimento essencial para a resolução do problema. Vejamos alguns problemas cuja solução está relacionada à números primos.

<u>Problema 1:</u> (OBMEP – 2007 – Nível 3 – Questão 14) Quantos são os números inteiros p tais que $50^3 < 5^p < 50^4$?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

- ***<u>Solução:</u>***

Notamos, inicialmente que, pelo teorema fundamental da aritmética, 50 pode ser escrito de forma única como a multiplicação de fatores primos. Dessa forma:

$$50 = 2 \cdot 5^2.$$

Então, a desigualdade do problema pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(2 \cdot 5^2)^3 < 5^p < (2 \cdot 5^2)^4$$

$$2^3 \cdot 5^6 < 5^p < 2^4 \cdot 5^8,$$

dividindo toda a desigualdade por 5^6, teremos:

$$2^3 < 5^{p-6} < 2^4 \cdot 5^2$$
$$8 < 5^{p-6} < 400.$$

Notamos, agora, que as únicas potências de 5 que são maiores que 8 e menores que 400 são $5^2 = 25$ e $5^3 = 125$, assim, p só pode assumir os valores 8 e 9. Portanto, a alternativa correta é a **alternativa B**.

<u>Problema 2:</u> (OBMEP – 2011 – Nível 2 – Questão 17) Mariana escreveu as decomposições em fatores primos dos números naturais de 2 a 100:

$$2, 3, 2 \times 2, \dots, 3 \times 3 \times 11, 2 \times 2 \times 5 \times 5.$$

Quantas vezes ela escreveu o algarismo 2?

A) 99
B) 104
C) 152
D) 188
E) 191

- ***<u>Solução:</u>***

Na fatoração, podemos contar o número de vezes que Mariana escreveu o algarismo 2 em cada fatoração da seguinte forma:

- uma vez para cada número par (50 vezes);
- mais uma vez para cada número múltiplo de 4 (25 vezes);
- mais uma vez para cada número múltiplo de 8 (12 vezes);
- mais uma vez para cada múltiplo de 16 (6 vezes);
- mais uma vez para cada múltiplo de 32 (3 vezes);
- mais uma vez para cada múltiplo de 64 (1 vez);
- ao escrever os números primos 23 e 29 (2 vezes);
- ao escrever 23, quando fatorou os números $46, 69, 92$ (3 vezes);
- ao escrever 29, quando fatorou os números $58, 87$ (2 vezes).

Somando os valores apresentados entre parênteses acima teremos 104 vezes em que o algarismo 2 apareceu. Portanto a alternativa correta é a **alternativa B**.

<u>Problema 3:</u> (OBMEP – 2012 – Nível 3 – Questão 13) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R$ 2,99 para compra botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

A) 2
B) 5

C) 10

D) 13

E) 23

- ***Solução:***

Considerando que a costureira gastou $R\$\,2{,}99$ (299 centavos), e que ela produziu blusas iguais, concluímos que foi gasto a mesma quantia de dinheiro para cada blusa. Chamando de x a quantidade de blusas, notamos que x é divisor de 299.

Notamos agora que $299 = 13 \cdot 23$, ambos números primos, dessa forma x pode assumir os valores $1, 13, 23$ e 299, onde excluímos imediatamente 1 e 299.

Se $x = 23$, então teremos que foram gastos exatamente 13 centavos em laços e botões para cada blusa, o que seria impossível, dado o valor de cada um dos itens. Agora, se $x = 13$, então teremos que foram gastos exatamente 23 centavos para a produção de cada blusa, o que seria possível ao comprar 4 botões e 1 laço. Portanto a alternativa correta é a **alternativa D**.

Problema 4: (OBMEP – 2014 – Nível 1 – Questão 8) Ana Maria apertou as teclas 19x106= de sua calculadora e o resultado 2014 apareceu no visor. Em seguida, ela limpou o visor e fez aparecer novamente 2014 com uma multiplicação de dois números naturais, mas, desta vez, apertando seis teclas em vez de sete. Nesta segunda multiplicação, qual foi o maior algarismo cuja tecla ela apertou?

A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 9

- ***Solução:***

Utilizando o teorema fundamental da aritmética notamos que o número 2014 pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores, da seguinte forma:

$$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53.$$

Analisando as possibilidades, vemos que existem somente quatro formas possíveis de escrever 2014 multiplicando dois números naturais. São elas:

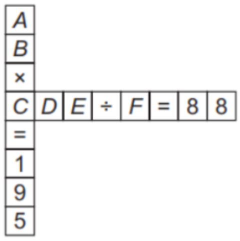
- $1 \cdot 2014 = 2014;$
- $2 \cdot 1007 = 2014;$
- $19 \cdot 106 = 2014;$

- $53 \cdot 38 = 2014$.

Dentre as quatro possibilidades apresentadas, apenas em uma delas seis teclas da calculadora são pressionadas. As teclas pressionadas foram $5, 3, \cdot, 3, 8, =$. Assim, concluímos que a maior tecla de algarismo pressionada por Ana Maria foi 8. Portanto, a alternativa correta é a **alternativa D**.

<u>Problema 5:</u> (OBMEP – 2015 – Nível 1 – Questão 15) As contas $AB \times C = 195$ e $CDE \div F = 88$ estão corretas, sendo A, B, C, D, E e F algarismos diferentes. O número AB é formado pelos algarismos A e B, e o número CDE é formado pelos algarismos C, D e E. Qual é o algarismo representado pela letra F?

A) 1
B) 2
C) 4
D) 6
E) 8



- ***<u>Solução:</u>***

Inicialmente, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, 195 pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores da seguinte forma:

$$195 = 3 \cdot 5 \cdot 13.$$

Dessa forma, como C representa um só algarismo, podemos chegar à conclusão que ou $C = 3$ ou $C = 5$.

Se $C = 3$, considerando que $65 \cdot 3 = 195$, concluímos que $A = 6$ e $B = 5$. Temos então que:

$$3DE \div F = 88$$

$$3DE = 88 \cdot F,$$

o que nos leva ao resultado de $F = 4$, pois 4 é o único número natural que, ao ser multiplicado por 88 tem como resultado 3 no algarismo das centenas. Agora, tendo em vista $F = 4$, temos que $D = 5$ e $E = 2$, uma vez que $352 = 88 \cdot 4$. Nesse caso, note que $B = D = 5$, e o enunciado do problema afirma que os algarismos são diferentes, portanto, esse resultado não é válido.

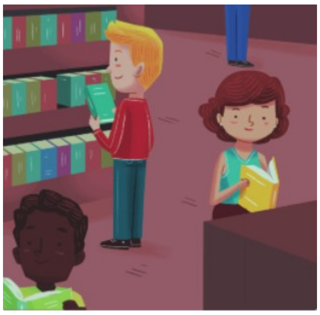
Agora, se $C = 5$, considerando que $39 \cdot 5 = 195$, chegamos à conclusão que $A = 3$ e $B = 9$. Temos então que:

$$5DE \div F = 88$$

$$5DE = 88 \cdot F,$$

o que nos diz que $F = 6$, pois 6 é o único número natural que multiplicado por 88 tem como resultado 5 no algarismo das centenas. Do resultado anterior, chegamos também a $D = 2$ e $E = 8$, visto que $528 = 88 \cdot 6$. Podemos notar que para os resultados $A = 3, B = 9, C = 5, D = 2, E = 8$ e $F = 6$ não encontramos nenhum impedimento ou contradição. Portanto a alternativa correta é a **alternativa D**.

Problema 6: (OBMEP – 2015 – Nível 3 – Questão 18) Três amigas foram a uma livraria com seus namorados. Coincidentemente, cada pessoa pagou, por livro, um preço em reais igual à quantidade de livros que comprou. Além disso, cada mulher gastou 32 reais a mais que seu respectivo namorado. Ao final das compras, as mulheres compraram, ao todo, oito livros a mais que os homens. Quantos livros foram comprados no total?



A) 32
B) 36
C) 40
D) 44
E) 48

- ***Solução:***

Primeiramente, faremos a "Amiga 1" namorada do "Namorado 1", a "Amiga 2" namorada do "Namorado 2" e a "Amiga 3" namorada do "Namorado 3". Note que, como cada mulher gastou 32 reais a mais que seu respectivo namorado, cada namorado gastou o valor gasto por sua namorada subtraído 32. Podemos organizar as informações fornecidas pelo problema, como mostramos na tabela 1 abaixo.

Tabela 1: Informações do problema

Comprador do livro	Livros comprados (qtd.)	Preço por livro	Valor gasto	Valor final gasto
Amiga 1	x_1	x_1	$x_1 \cdot x_1$	${x_1}^2$
Amiga 2	x_2	x_2	$x_2 \cdot x_2$	${x_2}^2$
Amiga 3	x_3	x_3	$x_3 \cdot x_3$	${x_3}^2$
Namorado 1	y_1	y_1	$y_1 \cdot y_1$	${x_1}^2 - 32$

Namorado 2	y_2	y_2	$y_2 \cdot y_2$	${x_2}^2 - 32$
Namorado 3	y_3	y_3	$y_3 \cdot y_3$	${x_3}^2 - 32$

Fonte: Autor (2025)

Agora, notemos que ${y_1}^2 = {x_1}^2 - 32$, ${y_2}^2 = {x_2}^2 - 32$ e ${y_3}^2 = {x_3}^2 - 32$, o que também nos leva a:

$$ {x_1}^2 - {y_1}^2 = 32 \Rightarrow (x_1 + y_1) \cdot (x_1 - y_1) = 32, $$
$$ {x_2}^2 - {y_2}^2 = 32 \Rightarrow (x_2 + y_2) \cdot (x_2 - y_2) = 32, $$

e

$$ {x_3}^2 - {y_3}^2 = 32 \Rightarrow (x_3 + y_3) \cdot (x_3 - y_3) = 32. $$

Como $32 = 2^5$, pela decomposição única em fatores primos, temos apenas duas possibilidades para os produtos notáveis supracitados:

$$ x_i = 9 \text{ e } y_i = 7, $$

e

$$ x_i = 6 \text{ e } y_i = 2, $$

com $i = 1, 2, 3$.

Note que, para a primeira solução, a namorada comprou 2 livros a mais que o namorado, e para a segunda solução, a namorada comprou 4 livros a mais que o namorado. Como o enunciado afirma que as mulheres compraram oito livros a mais que os homens, podemos concluir que um único casal comprou, de acordo com a segunda solução $(6 + 2 = 8)$ e os outros dois casais compraram, de acordo com a primeira solução $(9 + 7 = 16)$, satisfazendo a condição da superioridade de oito livros comprados pelas mulheres em relação aos homens.

Assim, a quantidade total de livros comprados foi de $8 + 16 + 16 = 40.$. Portanto a alternativa correta é a **alternativa C**.

<u>Problema 7:</u> (OBMEP – 2017 – Nível 3 – Questão 18) Para quais conjuntos $\{a, b, c\}$ de três números naturais é verdade que $a \times b \times c = 2310$?

A) 24
B) 30
C) 32
D) 36
E) 40

- ***<u>Solução:</u>***

Primeiramente, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, notamos que o número 2310 pode ser escrito de forma única, a menos pela ordem dos fatores, da seguinte forma:

$$2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Agora, vamos analisar quantas são as possibilidades de colocar os cinco fatores primos, da decomposição supracitada, nas posições dos termos a, b ou c. Temos então três possibilidades para cada fator primo, e pelo princípio da contagem:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243.$$

Note que, dentre as 243 possibilidades mostradas acima, três não são válidas ($1 \cdot 1 \cdot 2310, 1 \cdot 2310 \cdot 1$ e $2310 \cdot 1 \cdot 1$), pois temos o termo 1 repetido, e o enunciado deixa claro que nenhum dos termos da multiplicação se repete, assim, excluiremos essas possibilidades, restando apenas 240.

Agora, note que o produto $a \cdot b \cdot c$ pode ser escrito de seis maneiras diferentes, devido ao fato de que a ordem dos fatores não afeta o resultado, então cada decomposição, dentre as 240, aparece seis vezes, diferindo da ordem dos fatores. Assim, o número de possibilidades diferentes para o produto $a \cdot b \cdot c$ é de $240 \div 6 = 40$ possibilidades. Portanto a alternativa correta é a **alternativa E**.

Problema 8: (OBMEP – 2018 – Nível 2 – Questão 5) Juca colocou algumas bolinhas em uma caixa na qual cabem, no máximo, 100 bolinhas. Artur tirou 1/2 das bolinhas dessa caixa, depois Bernardo tirou 1/3 das restantes, em seguida Carlos tirou 1/4 das que sobraram e, finalmente, Danilo tirou 1/5 das que restaram. Quantas bolinhas ficaram na caixa?

A) 0
B) 3
C) 6
D) 12
E) 24

- ***Solução:***

Primeiramente, chamemos de x a quantidade de bolinhas dentro da caixa. Sabendo que Artur tirou metade das bolinhas, restaram, também, metade das bolinhas na caixa, e sabendo disso, podemos concluir que x é um número par, e que o algarismo 2 deve estar na decomposição de x em fatores primos.

Como restaram metade das bolas na caixa, e Bernardo retirou um terço delas, teremos que as bolinhas que restaram na caixa após a retirada de Bernardo foi de

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{3}.$$

Note que $\frac{x}{3}$ é um número natural, portanto o algarismo 3 também está na decomposição de x em fatores primos. Agora, das $\frac{x}{3}$ bolinhas que sobraram, Carlos retirou destas $\frac{1}{4}$, assim, após a retirada de Carlos a quantidade de bolinhas restantes era de

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x}{4}.$$

Perceba que $\frac{x}{4}$ é um número natural, logo o algarismo 4 (ou 2^2) também faz parte da decomposição de x em fatores primos. E então, das $\frac{x}{4}$ bolinhas restantes foram retiradas, por Danilo, $\frac{1}{5}$ destas. Dessa forma, após a retirada de Danilo sobraram na caixa

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{4} = \frac{x}{5}.$$

Mais uma vez, o que mostra que o algarismo 5 também faz parte da decomposição de x em fatores primos.

Então, observe que o único número menor que 100, como exige o enunciado do problema, que tem em sua decomposição os números $3, 4$ e 5 como fatores primos é o $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Concluímos então que $x = 60$, e que após todas as retiradas sobraram $\frac{60}{5} = 12$ bolinhas. Portanto a alternativa correta é a **alternativa D**.

Problema 9: (OBMEP – 2018 – Nível 3 – Questão 11) Qual é o maior valor possível para o máximo divisor comum de dois números naturais cujo produto é 6000?

A) 10
B) 20
C) 30
D) 40
E) 60

- ***Solução:***

Primeiramente, devemos relembrar que o MDC de dois números que estão fatorados é o produto dos primos comuns, elevados ao menor expoente que aparece nesses primos, considerando as duas fatorações.

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, 6000 pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores, da seguinte forma:

$$6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3.$$

Agora, sejam x e y os números cujo produto é 6000, e então podemos concluir que os fatores primos de x e y são $2, 3$ ou 5.

Note que o MDC de x e y será o maior possível quando a quantidade de fatores primos compartilhados entre x e y for a maior possível, ou seja, a distribuição de fatores primos entre x e y for a mais justa possível.

Veja que na decomposição de 6000 temos quatro algarismos 2, então distribuímos dois deles para x e os outros dois para y. Temos também um algarismo 3, ficando este para x. E temos três algarismos 5, deixando um deles para x e os outros dois para y. Dessa forma, fazemos a distribuição mais justa possível, e então teremos que:

$$x = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60,$$

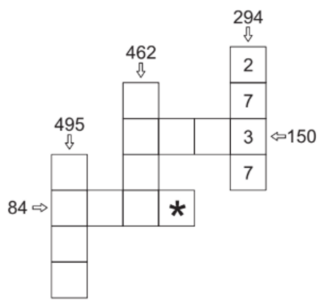
e que

$$y = 2^2 \cdot 5^2 = 100.$$

Assim, o maior valor para o MDC de x e y é o MDC de 60 e 100, que é 20. Portanto a alternativa correta é a **alternativa B**.

__Problema 10:__ (OBMEP – 2018 – Nível 3 – Questão 11) As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com *?

A) 2
B) 3
C) 5
D) 7
E) 11



- ***__Solução:__***

Inicialmente, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, sabemos que todo número natural pode ser representado de forma única, a menos da ordem dos fatores, pela multiplicação de fatores primos. Então faremos a decomposição dos números que aparecem na figura apresentada pelo problema:

- $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$;
- $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$;
- $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$;
- $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$;
- $495 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$.

Note que na intersecção de 150 e 462 deve ser escrito o algarismo 2, pois os únicos algarismos comuns entre eles são o 2 e o 3, e o 3 já está marcado na intersecção de 150 e 294.

Agora, note que o único algarismo em comum entre 495 e 84 é o 3, portanto este deve ser escrito na intersecção entre 495 e 84. Também, observe que os únicos fatores em comum entre 462 e 84 são os números 3 e 7, dos quais o 3 já foi usado, restando apenas o 7 para ser escrito na intersecção entre 462 e 84.

Agora, note que sobrou apenas dois algarismos 2 para preencher o espaço vazio e o espaço marcado com $\ast$ na linha que contém os fatores da decomposição de 84, nos fazendo concluir que $\ast = 2$. Portanto, a alternativa correta é a **alternativa A**.

Ao observar as questões apresentadas neste capítulo, é possível concluir que os números primos aparecem com frequência em problemas da OBMEP, tanto em seu conceito, no Teorema Fundamental da Aritmética, quanto em suas propriedades e em seus mais diversos níveis, o que mostra que esse conteúdo é importante desde as etapas iniciais do ensino fundamental.

Também é valido salientar que todas as questões aqui presentes fazem parte apenas da 1ª fase da OBMEP, e que na 2ª fase o conhecimento sobre números primos também é cobrado. Como adendo, fica a informação de que todas as provas da OBMEP, assim como as soluções dessas provas, são disponibilizadas no site oficial da olimpíada, cujo link de acesso está presente nas referências deste trabalho.

4 TESTES DE PRIMALIDADE

A identificação de números primos é de grande importância para diversas áreas e aplicações, como ciências da computação, criptografia, teoria dos números, entre outras. Desse modo, podemos dizer que identificar primos não se trata apenas de um exercício teórico, mas sim de uma habilidade com fortes implicações na ciência.

Ao se tratar de primos, facilmente, identificam-se tais números quando são consideravelmente “pequenos”, porém, para todo o caso: números grandes ou pequenos, existem os chamados “testes de primalidade”, que são algoritmos ou métodos utilizados para identificar se um dado número natural é primo ou composto. Este capítulo apresentará alguns dos principais testes de primalidade, classificando-os como básicos, determinísticos e probabilísticos.

4.1 TESTES BÁSICOS DE PRIMALIDADE

Os testes básicos de primalidade consistem em métodos de fácil entendimento e aplicação, mas se mostram inapropriados em algumas situações. A seguir, falaremos dos principais testes que se encaixam nessa categoria.

4.1.1 Crivo de Eratóstenes

O crivo de Eratóstenes, que recebe esse nome por ter sido criado pelo matemático grego Eratóstenes (276 a.C. a 194 a.C.), é um algoritmo de extrema simplicidade e praticidade para encontrar números primos, porém tal método torna-se inexequível para primos muito grandes. Quanto maior o número primo, mais difícil se torna a utilização do crivo, como reforça Coutinho (2004) ao afirmar que o crivo de Eratóstenes é o algoritmo mais conhecido para se encontrar números primos, porém, devido a sua complexidade de tempo, ele se torna inviável para se encontrar primos grandes.

O método do crivo de Eratóstenes consiste na aplicação da seguinte sequência de passos:

- Passo 1: Construímos uma tabela com os números naturais, iniciando do número 1, indo até o maior número que se queira;

- Passo 2: Cortamos o número 1;
- Passo 3: Circulamos o número 2 e cortamos todos os outros múltiplos de 2, maiores do que 2, presentes na tabela;

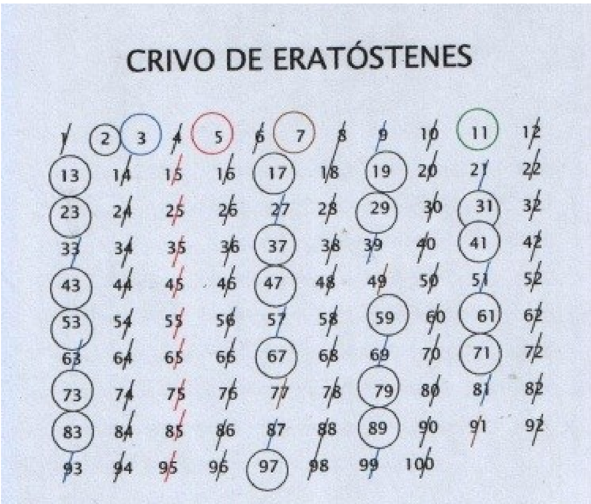
Seguindo a sequência de números na tabela, observamos que o próximo número que não foi cortado é o 3.

- Passo 4: Circulamos o número 3 e cortamos todos os outros múltiplos de 3, maiores do que 3, presentes na tabela;
- Passo 5: Repetimos o processo sucessivamente, circulando os números não cortados, enquanto cortamos seus múltiplos.

Após a aplicação dos passos supracitados, nota-se que os números circulados na tabela serão todos os primos existentes na sequência de números utilizados para montar a mesma.

Vejamos um exemplo de aplicação do crivo de Eratóstenes para os números naturais até o 100.

Figura 5: O Crivo de Eratóstenes



Fonte:<https://ivansanchesblog.wordpress.com/wp-content/uploads/2016/07/141931937.jpg?w=375>. Acesso em: 06 de ago. 2024.

No exemplo supracitado, é possível notar que são “eliminados” os números compostos e seus múltiplos, enquanto os números primos estão sendo destacados através de círculos.

4.1.2 Divisão por tentativa

O método da divisão por tentativa é, talvez, o mais simples entre todos os existentes, porém exige certa quantidade de "trabalho duro" de quem deseja utilizá-lo, por consistir em sucessivas divisões "teste", a fim de verificar se um determinado número é divisível por outros números menores que ele.

Para determinar se um número n qualquer é primo, devemos verificar se n é divisível por qualquer número inteiro não negativo menor do que $\sqrt{n}$. Se n for divisível por qualquer um dos números supracitados então concluímos que n é composto, caso n não seja divisível por nenhum desses números podemos concluir que n é primo.

Esse método é bastante eficaz para números relativamente pequenos, porém inapropriado para números de cardinalidade elevada, uma vez que necessitaria de uma grande quantidade de "divisões teste" para concluir que tal número seja primo.

4.2 TESTES DETERMINÍSTICOS DE PRIMALIDADE

Os testes determinísticos de primalidade são aqueles que apresentam resultados incontestáveis, ou seja, eles determinam com absoluta precisão se um dado número é, ou não, um número primo.

4.2.1 Teste de Lucas - Lehmer

Esse teste é aplicado a um grupo específico de números, os chamados números de Mersenne (que são da forma $M_n = 2^n - 1$, sendo n um número natural).

Esse teste afirma que um número de Mersenne é primo se $M_n \mid L_{n-2}$, ou seja, a divisão de L_{n-2} por M_n tem resultado inteiro e deixa resto zero, onde L_n são os números de Lucas – Lehmer, definidos da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathrm{L_0} = 4 \\ \mathrm{L_n} = \mathrm{L_{n-1}^2} - 2 \end{cases}$$

Por exemplo, facilmente podemos constatar que $M_3 = 7$, e que $L_1 = 14$. Então, como $M_3 \mid L_1$, podemos afirmar com absoluta certeza que M_3 é um número primo.

4.2.2 Método AKS

O teste de primalidade chamado de “método AKS” trata-se de um algoritmo publicado em um artigo no ano de 2002, criado pelos matemáticos indianos Manindra Agrawal, Neeraj Kayal e Nitin Saxena. Uma característica importante desse teste de primalidade é que ele é o primeiro algoritmo determinístico em tempo polinomial, ou seja, o tempo de execução desse teste pode ser descrito por um polinômio, a depender da quantidade de dígitos do número a ser testado. Para Coutinho (2003, p. 7) a publicação de Agrawal, Kayal e Saxena gerou um impacto imediato, pois o “teste não era apenas muito fácil de descrever, mas seu funcionamento dependia apenas de métodos algébricos elementares (grupos, anéis e corpos) bem conhecidos de qualquer aluno de graduação em matemática”.

Em termos mais simples, o tempo de execução desse algoritmo cresce de forma razoável à medida que o número a ser testado aumenta, fazendo com que esse teste também seja apropriado para números muito grandes, agilizando o processo de descoberta dos mesmos. De modo geral, esse algoritmo é uma generalização do pequeno teorema de Fermat, e baseia-se na seguinte equivalência:

$$(x-a)^n \equiv x^n - a \ (mod\ n) \Leftrightarrow n \text{ é } primo$$

Com $a \in \mathbb{Z}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{n} \geq 2$ e $\mathrm{mdc}(\mathrm{a}, \mathrm{n}) = 1$.

Por exemplo, tomando $a = 1$, para testar $n = 3$. Constatamos primeiramente $\mathrm{mdc}(1,3) = 1$. Agora iremos verificar se $(x+1)^3 \equiv x^3 + 1\ (mod\ 3)$:

$$(x+1)^3 \equiv x^3 + 1\ (mod\ 3)$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \equiv x^3 + 1\ (mod\ 3),$$

note que $3x^2 + 3x \equiv 0\ (mod\ 3)$

$$x^3 + 1 \equiv x^3 + 1\ (mod\ 3)$$

Como a congruência é verdadeira, verificou-se pelo método AKS que $n = 3$ é um número primo.

3.3 TESTES PROBABILÍSTICOS DE PRIMALIDADE

Os testes probabilísticos de primalidade são aqueles que oferecem uma alta probabilidade de que um número testado, identificado como primo, seja realmente um número primo, apesar de não oferecerem total convicção de que esse número realmente seja primo.

4.3.1 Teste de Fermat

Pierre de Fermat foi um importante matemático francês por suas expressivas contribuições, especialmente, para a teoria dos números. O teste de primalidade de Fermat tem sua origem no chamado pequeno teorema de Fermat, que faz a seguinte afirmação: seja $a \in \mathbb{Z}$ e p um número primo, de modo que $mdc(a, p) = 1$, tem-se que

$$a^p \equiv a \ (mod\ p).$$

Desse teorema surge o seguinte resultado:

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p).$$

Nesse sentido, podemos afirmar que para $p > 1\ e\ a \in \mathbb{Z}$, se o resto da divisão de a^{p-1} por p for diferente de 1, então p é um número composto, e se o resto for 1, é provável que p seja um número primo.

Por exemplo, tomando $a = 2$, e $p = 5$, notamos primeiramente que o $mdc(2, 5) = 1$ e constatamos que $2^4 = 16\ \equiv 1\ (mod\ 5)$. Portanto, por ser um teste probabilístico, é provável que 5 seja um número primo, o que sabemos que é uma verdade absoluta. Entretanto, existem números que satisfazem as condições apresentadas anteriormente e ainda assim são compostos. Esses são chamados de números de Carmichael.

Por definição, temos que um número composto n é dito número de Carmichael se $a^{n-1} \equiv 1\ (mod\ n)$ para todo inteiro $a \in \mathbb{N}$ e com $mdc(a, n) = 1$.

Os números de Carmichael são particularmente interessantes devido ao fato de, apesar de serem compostos, se comportam como números primos ao passar por testes de primalidade.

4.3.2 Teste de Miller - Rabin

O teste de Miller – Rabin é um dos mais populares entre todos os testes de primalidade existentes, muito por conta de suas características e eficiência na detecção de números primos.

Para analisar um número inteiro n, ímpar, com esse teste, basicamente utilizaremos uma fatoração de $n-1$, escrevendo como $2^a \cdot b$, onde a é um número inteiro qualquer e b é um inteiro ímpar. Teremos que para $x < n, n$ provavelmente será primo se:

$$x^b \equiv 1 \ (mod\ n)$$

ou

$$x^{2^i \cdot b} \equiv -1 \ (mod\ n), \text{ com } i = 0, 1, \ldots, a-1.$$

Caso algumas dessas condições sejam satisfeitas, existe uma grande chance de o número testado ser primo, caso contrário podemos afirmar que o número testado é composto.

Por exemplo, para testarmos $n = 13$ utilizando este teste, devemos considerar $n - 1 = 12$ e escreve-lo de forma fatorada como $12 = 2^2 \cdot 3$, assim $a = 2$ e $b = 3$. Utilizando uma base $x = 2$, teremos:

$$2^3 \equiv 8 \ (mod\ 13),$$

assim, a primeira parte do teste não se satisfez para $n = 13$.

Por hora, para a segunda parte, utilizaremos $i = 1$, pois $i = 0$ retoma a primeira parte do teste. Assim:

$$2^{2^1 \cdot 3} \equiv 2^{2 \cdot 3} \ (mod\ 13)$$

$$2^6 \equiv 64 \ (mod\ 13)$$

$$64 \equiv -1 \ (mod\ 13).$$

Como a segunda parte do teste de Miller – Rabin foi satisfeita, temos que o número $n = 13$ é, provavelmente, um número primo.

5 CATEGORIAS DE NÚMEROS PRIMOS

Este capítulo será dedicado à apresentação de algumas categorias de números primos, enfatizando suas características especiais e específicas que os diferem dos demais existentes.

5.1 PRIMOS DE MERSENNE

Marin Mersenne foi um monge e matemático francês, cujos trabalhos em teoria dos números tiveram grande destaque no mundo da matemática. De acordo com Morimoto (2014, p. 39):

> Marin Mersenne foi um padre e flósofo francês que viveu do final do século XVI até meados do século XVII. Mersenne tinha grande interesse pelas ciências, em particular pela matemática, tanto que se comunicava por correspondências com muitos cientistas contemporâneos, dentre eles grandes mentes como Pierre de Fermat, René Descartes, Blaise Pascal, Evangelista Torricelli e Galileu Galilei. (MORIMOTO, 2014, p. 39).

Em seus estudos, Mersenne propôs uma fórmula (que dá origem aos “números de Mersenne”) da forma:

$$M_n = 2^n - 1$$

onde n é um número primo.

Figura 6: Marin Mersenne

Fonte: <https://sciencemeetsfaith.wordpress.com/2018/09/01/marin-mersenne/>. Acesso em: 14 de jan. 2025.

Sendo um número de Mersenne M_n um número primo, então esse é chamado de número primo de Merssene. É importante observar que nem todo número de Mersene é um número primo, alguns, como por exemplo $M_{11} = 2047$, são compostos.

5.2 PRIMOS DE FERMAT

Pierre de Fermat propôs a seguinte fórmula:

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

a qual deu origem aos chamados “números de Fermat”. Pierre conjecturou que todos os “números de Fermat” seriam primos, porém, anos depois, Euler mostrou que para $n = 5, F_5 = 4294967297$ é composto, sendo $F_5 = 641 \cdot 6700417$.

Para Morimoto (2014, p. 41) “A afrmação de Fermat se baseava no fato de que F_n é primo para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4. No entanto, o que Fermat ignorou, ou muito provavelmente não teve condições de checar, é que o próximo número dessa forma não é primo”.

Figura 7: Pierre de Fermat

Fonte: <https://www.sciencephoto.com/media/776354/view/pierre-de-fermat-french-mathematician>. Acesso em: 16 de jan. 2025.

Os “primos de Fermat” são os números primos que também são “números de Fermat”, ou sejam, podem ser escritos de acordo com a configuração proposta por Fermat para F_n. Até então, são conhecidos apenas cinco primos de Fermat, para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4. São eles:

$$F_0 = 3$$
$$F_1 = 5$$
$$F_2 = 17$$
$$F_3 = 257$$
$$F_4 = 65537$$

Sabe-se que os demais números de Fermat até $n = 24$, entre outros para n com valores maiores, são todos compostos, porém ainda não se sabe se existem infinitos primos de Fermat.

5.3 PRIMOS GÊMEOS

Com o avanço da teoria dos números e o aprofundamento dos estudos sobre números primos, os matemáticos começaram a analisar os padrões existentes na distribuição de números primos, foi então que surgiram os “primos gêmeos”, que são um par de números primos, cuja diferença entre eles é igual a dois. Podemos dizer então que, se m e n são um par de primos gêmeos, com $m > n$, então $m = n + 2$.

Nesse sentido, pares de números primos como 3 e 5 ou 11 e 13 são de se identificar, pois os mesmos tem valores baixos, mas à medida que o número cresce, a frequência de aparecimento de pares de números primos cai drasticamente, ficando cada vez mais difícil de se identificar tais números.

5.4 PRIMOS DE SOPHIE GERMAIN

Marie-Sophie Germain foi uma estudiosa que dedicou parte de seu tempo aos estudos em aritmética, fornecendo grandes contribuições para a área de teoria dos números.

Figura 8: Sophie Germain

Fonte: <https://www.unilim.fr/wp-content/uploads/sites/8/2016/04/Sophie_Germain-600x600.jpg>. Acesso em: 31 de jan. 2025.

Sobre Sophie, Pequeno (2022, p.7) afirma que:

> com sua identidade escondida, ela trocava correspondências com Carl Friedrich Gauss, o qual a inspirou para trabalhar com a Teoria dos Números, na qual conseguiu provar alguns casos particulares do Último Teorema de Fermat. Teorema que ficou conhecido como “os números primos de Germain”, o qual afirma que para todo n inteiro maior do que dois a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução nos inteiros. (PEQUENO, 2022, p. 1).

Sob esse viés, os números “primos de Sophie Germain” são caracterizados de modo que se p é um número primo e $2p + 1$ também é um número primo, então p é um “primo de Sophie Germain”. Podemos citar como exemplo de um “primo de Sophie Germain” o número 11, pois $2 \cdot 11 + 1 = 23$ também é um número primo.

A importância de tais números vai além da teoria matemática, visto que na criptografia computacional, em protocolos de chaveamento seguro e em alguns algoritmos os primos de Sophie Germain desempenham um papel crucial. Acredita-se que existam infinitos “primos de Sophie Germain”, porém isso ainda se encontra no campo das conjecturas, pois a demonstração de infinidade desses números ainda é um problema em aberto na matemática.

5.5 PRIMOS DE WILSON

John Wilson foi um matemático inglês, conhecido no mundo da matemática principalmente pelos seus estudos em teoria dos números. Campos e Avila (2015) apontam que Wilson foi professor de matemática, porém abandonou essa carreira para estudar Direito e, posteriormente, exercer a profissão de juiz.

Figura 9: John Wilson

Fonte:< https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wilson_John/Wilson_John.jpeg>. Acesso em: 28 de jan. 2025.

Os números “primos de Wilson” são números p, de modo que:

$$\frac{p^2}{[(p-1)!+1]} = k, \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

ou

$$(p-1)! \equiv -1 \ (mod\ p^2).$$

É válido salientar que ainda não se sabe se existem infinitos “primos de Wilson”, porém existem apenas três conhecidos, que são: 5, 13 e 563.

5.6 PRIMOS DE FIBONACCI

Leonardo de Pisa, mais conhecido como Leonardo de Fibonacci, foi um importante matemático italiano, mais conhecido no mundo da matemática por ter proposto uma sequência de números denominada “sequência de Fibonacci”, que obedece a seguinte lei de formação:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

onde $F_0 = F_1 = 1$.

Figura 10: Leonardo Fibonacci

Fonte:<https://blogger.googleusercontent.com/img/b/R29vZ2xl/AVvXsEh43KAbBXLfITsWxmuKIEuDV8NLNyVV6sk8ml9-1wsbm8dEowgLSFV7o3r0giD3y6uxDnFg4yCwS2Wyq-d0yEsf9BeO3rezaoYu0hoIEXBaltpBvXzzkITRudIh_bgM7mRMrVng7jpF_Eo/s1600/0508_fibonacci_1260.jpg> Acesso em: 04 de fev. 2025.

Através da lei de formação, podemos determinar facilmente todos os números da sequência de Fibonacci, sendo esses conhecidos como números de Fibonacci. Abaixo, no quadro 1, apresentamos um trecho dessa sequência, contendo apenas os oito primeiros números da mesma.

Quadro 1: Números de Fibonacci

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	$\dots$

Fonte: Autor (2025)

Em sua obra "A música dos números primos" Sautoy (2007) afirma que há uma estranha conexão entre os números primos e os números de Fibonacci, salientando que p-ésimo número de Fibonacci, sendo p um número primo, também é primo. Dando como exemplo o número 11, que é primo, e o $11^{\underline{o}}$ número de Fibonacci, o 89, também é primo, porém Sautoy também sustenta que isso nem sempre funciona.

Essa conexão observada por Sautoy foi alvo de estudos e análises matemáticas, em busca de uma eventual descoberta de relação entre a sequência de Fibonacci e os números primos, porém até os dias atuais nada foi concretamente demonstrado.

Os "primos de Fibonacci" são, como facilmente podemos deduzir, números de Fibonacci que também são números primos, como por exemplo $2, 3, 5, 13, \dots$, etc.

Não se sabe se existem, ou não, infinitos primos de Fibonacci. Esse é um problema em aberto na matemática. Sabe-se que apesar de existirem infinitos números de Fibonacci, os primos de Fibonacci são raros, aparecendo com pouca frequência na sequência. De acordo com Dias (2008) o maior primo de Fibonacci até então conhecido é o F_{604711}, que possui 126377 dígitos.

6 ALGUMAS CONJECTURAS E CURIOSIDADES SOBRE NÚMEROS PRIMOS

Este capítulo tem como objetivo apresentar algumas conjecturas relacionadas aos números primos, ou seja, afirmações que possuem relações com o conjunto dos números primos, mas que até o momento não foram demonstradas matematicamente. Neste capítulo também serão apresentadas algumas curiosidades que ilustram a riqueza e a profundidade desse conjunto de números.

6.1 CONJECTURA DOS PRIMOS GÊMEOS INFINITOS

De posse do conhecimento do que são primos gêmeos, será de fácil entendimento de que se trata a conjectura referida neste tópico. Podemos tratar a conjectura da seguinte forma:

"*Existem infinitos pares de números p e $p + 2$, ambos primos*".

A simplicidade da conjectura contrasta com a complexidade de sua demonstração e apesar de ser verificada para uma grande quantidade de casos, até mesmo para números muito grandes, essa conjectura ainda não foi provada, ou refutada, até o momento. Dessa forma, não se sabe ao certo se há infinitos números primos gêmeos, embora tudo indique que sim. De acordo com Vieira (2023, p. 37), "Euclides já havia afirmado sobre a existência de infinitos pares de primos gêmeos, mas até o momento não se conseguiu provar a validade desta conjectura."

Ao longo dos séculos, diversos nomes notáveis da matemática dedicaram tempo e esforços consideráveis para provar a existência de infinitos pares de primos gêmeos, ao ponto dessas tentativas de resolução de tal conjectura impulsionarem o desenvolvimento de novas técnicas analíticas, importantes descobertas e avanços na pesquisa. Nesse contexto, em 2013, o matemático Yitang Zhang apresentou uma importante descoberta feita por ele, na qual mostrou que existem infinitos pares de números primos cuja diferença entre eles é menor que 70000000 (setenta milhões). Vieira (2023, p. 37 e 38), discorrendo sobre avanços na demonstração da conjectura dos primos gêmeos, diz que:

> Há uma descoberta recente acerca da questão das lacunas entre primos. O responsável por tal descoberta foi o matemático chinês Yitang Zhang, anunciada em Abril de 2.013. Zhang, ex-funcionário de uma franquia

> internacional muito conhecida de lanchonetes, provou que existem infinitos pares de primos cuja distância é N, para algum $N \in \mathbb{N}$ menor que 70.000.000. Para os primos gêmeos, faz-se necessário provar o caso específico do teorema de Zhang para N = 2. (VIEIRA, 2023, p. 37 e 38).

Apesar da estimativa de Zhang parecer um tanto ruim, devido à grande distância entre os primos, e ainda estar longe da diferença de duas unidades entre os pares de números primos, o resultado foi importante pois o mesmo apresentou um método que permitiu avanços na pesquisa.

A partir do trabalho de Zhang, que demonstrou a existência de infinitos pares de primos com separação finita, em 2014, o projeto Polymath, que é uma colaboração mundial entre matemáticos, voltada a resolver problemas importantes da matemática, conseguiu diminuir a "distância" entre os infinitos pares de números primos, demonstrando que existem infinitos intervalos nos números naturais contendo dois números primos de modo que a diferença entre o maior e o menor deles é menor ou igual a 246.

Esses avanços não apenas aproximam a comunidade matemática da solução da conjectura, mas também revelam a profundidade e a beleza estrutural oculta nos números primos.

6.2 CONJECTURA DE LEGENDRE

Adrien-Marie Legendre foi um importante matemático francês, nascido na cidade de Paris em 18 de setembro de 1752, conhecido por suas contribuições fundamentais para a matemática, especialmente nas áreas de teoria dos números, análise, geometria e estatística.

Figura 11: Adrien-Marie Legendre

Fonte: <https://edukavita.blogspot.com/2015/01/adrien-marie-legendre-biografia-e-vida.html>. Acesso em: 25 de maio 2025.

De acordo com Silva (2010), apesar de alguns documentos e pesquisas apontarem Toulouse como local de nascimento de Legendre, ele nasceu, de fato, em Paris, pois arquivos sobre sua candidatura à eleição da Academia Real de Londres atestam Paris como seu local de nascimento.

A conjectura proposta por Legendre é de fácil entendimento e faz a seguinte afirmação:

"*Sempre existe pelo menos um número primo entre dois quadrados consecutivos*"

Em termos puramente matemáticos, temos que para qualquer número $n \in \mathbb{Z}$ positivo, existe pelo menos um número primo p, tal que:

$$n^2 < p < (n+1)^2.$$

Podemos dizer também, que:

$$p \in [n^2, (n+1)^2].$$

Apesar da fácil apresentação e entendimento da conjectura, sua demonstração ainda não foi alcançada até os dias atuais, tamanha sua complexidade. Para Negrão (2023) a conjectura de Legendre é considerada uma das grandes questões ainda não resolvidas da teoria dos números, e a mesma tem sido objeto de intensa pesquisa ao longo dos séculos.

O quadro 2 a seguir ilustra a conjectura de Legendre para os 20 (vinte) primeiros números naturais.

Quadro 2: Conjectura de Legendre para os 20 primeiros números inteiros positivos

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n^2}$	$\boldsymbol{(n+1)^2}$	$\boldsymbol{p \in [n^2, (n+1)^2]}$	$\boldsymbol{Quantidade}$
1	1	4	2, 3	2
2	4	9	5, 7	2
3	9	16	11, 13	2
4	16	25	17, 19, 23	3
5	25	36	29, 31	2
6	36	49	37, 41, 43, 47	4
7	49	64	53, 59, 61	3
8	64	81	67, 71, 73, 79	4
9	81	100	83, 89, 97	3
10	100	121	101, 103, 107, 109, 113	5
11	121	144	127, 131, 137, 139	4
12	144	169	149, 151, 157, 163, 167	5
13	169	196	173, 179, 181, 191, 193	5
14	196	225	197, 199, 211, 223	4
15	225	256	227, 229, 233, 239, 241, 251	6
16	256	289	257, 263, 269, 271, 277, 281, 283	7
17	289	324	293, 307, 311, 313, 317	5
18	324	361	331, 337, 347, 349, 353, 359	6
19	361	400	367, 373, 379, 383, 389, 397	6
20	400	441	401, 409, 419, 421, 431, 433, 439	7

Fonte: Autor (2025)

Os esforços aplicados nas tentativas de demonstrar a conjectura de Legendre ainda não foram o suficiente para o sucesso na demonstração, porém geraram importantes resultados, o que aproximou a comunidade matemática cada vez mais da solução dessa conjectura.

Para Assis (2019), apesar de ainda não ter sido provada, a conjectura de Legendre gerou resultados notáveis. Dentre esses resultados, destaca-se o trabalho de Jing Run Chen que afirma que sempre existe um número que é primo ou semiprimo entre n^2 e $(n+1)^2$. Vale destacar que um número semiprimo trata-se de um número composto que é resultado do produto de apenas dois números primos, não necessariamente distintos.

Os estudos e pesquisas relacionados à conjetura de Legendre levaram, não só à descoberta de resultados matemáticos significativos, mas também impulsionaram o surgimento de novas conjecturas semelhantes a apresentada por Legendre. Reforçando essa ideia, Negrão (2023, p. 39) salienta que:

> A Conjectura de Legendre também se associa a outras conjecturas, no mínimo, curiosas, como o postulado de Bertrand, desenvolvida pelo matemático francês Bertrand Russell (1822 - 1900), que afirma que sempre existe um número primo entre n e $2n$ para qualquer número inteiro positivo n, que pode ser interpretada como uma variação da Conjectura de Legendre. Outro exemplo é o teorema dos números primos de Dirichlet, analisada pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), que estabelece que, se $d \geq 2$ e $a \neq 0$ são números inteiros primos entre si, ou seja, o mdc (a, d) = 1, então a progressão aritmética a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, ..., contém uma infinidade de números primos. Todos esses trabalhos desenvolvidos possuem como base os estudos de Legendre. (NEGRÃO, 2023, p. 39).

Ainda de acordo com Negrão (2023), os estudos de Legendre e a busca pela prova de sua conjectura têm levado os matemáticos a desenvolverem novas técnicas e estimularem suas mentes a desenvolverem novas ideias, o que, consequentemente, leva ao desenvolvimento da teoria dos números e áreas relacionadas com a mesma. Dessa forma, podemos dizer que a conjectura de Legendre é importante não só para o desenvolvimento da teoria dos números, mas também como fonte de inspiração e incentivo para a busca de novos conhecimentos.

6.3 CONJECTURA DE GOLDBACH

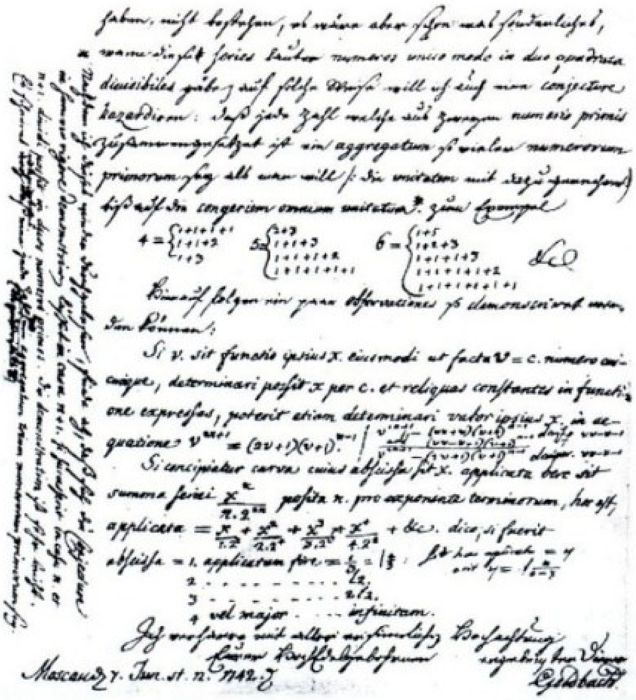
Christian Goldbach foi um matemático nascido na Prússia, reino já dissolvido, onde hoje é o norte da Alemanha. Goldbach conheceu diversos matemáticos famosos, mas foi em correspondências com Leonhard Euler que ele propôs a sua famosa conjectura, que leva seu nome.

Figura 12: Christian Goldbach

Fonte: <https://prime-numbers.fandom.com/wiki/Goldbach%27s_Conjecture?file=Goldbach.jpg> Acesso em: 27 de maio 2025.

De acordo com Filho (2013), Goldbach conheceu matemáticos como Leibniz, Euler e Nicolau I. Bernoulli, e a partir de uma de suas correspondências com Euler surgiu o problema da teoria dos números, conhecido como “A conjectura de Goldbach”. A Figura 13 a seguir exibe uma cópia da referida correspondência, na qual é possível ver, inclusive, a assinatura de Goldbach, ao final da carta.

Figura 13: Correspondência trocada entre Goldbach e Euler



Fonte: <https://content.nationalgeographic.pt/medio/2025/05/25/carta-de-euler-goldbach_41a80b11_250525130611_800x821.webp> Acesso em: 27 de maio 2025.

Ainda, reforçando essa ideia de Filho de que as correspondências entre Euler e Goldbach foram de grande importância para o "nascimento" da conjectura, Pereira (2017, p. 26) afirma que:

> Em 1725, ingressou para lecionar na, recém fundada, Academia das Ciências de São Pertersburg. Nesse período, Christian correspondia-se por meio de cartas com Euler, discutindo resoluções de problemas e, muitas vezes, solicitando que Euler verificasse seus resultados ou testasse suas teorias. Em uma dessas cartas, em 1942 [sic][1], foi enunciado, o que posteriormente ficou conhecido como, Conjectura de Goldbach. (PEREIRA, 2017, p.26).

A conjectura formulada por Goldbach relacionada a números primos é, de certa forma, simples. Ela diz o seguinte:

"Todo número par maior que 2 pode ser escrito como o resultado da soma de dois números primos".

Formalmente, em termos puramente matemáticos, chamando o conjunto dos números primos de $\mathbb{P}$, traduzimos a conjectura como:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n > 2, n \text{ par}, \exists\, p_1, p_2 \in \mathbb{P} \text{ tais que } n = p_1 + p_2.$$

A resolução desse problema é de complexidade tão extrema que está esperando uma demonstração há quase 300 anos, e mesmo com inúmeros matemáticos dedicando esforços ao decorrer desse tempo, nenhum conseguiu alcançar sucesso em demonstrá-la. Reconhecendo sua complexidade, o matemático alemão David Hilbert, no Congresso Internacional de Matemática de Paris em 1900, o incluiu na lista dos 23 grandes problemas que, até o momento do congresso, estavam sem solução.

A inclusão da conjectura de Goldbach na lista de Hilbert a disseminou ainda mais, tornando-a ainda mais famosa, o que fez com que uma quantidade maior de matemáticos pelo mundo tentasse encontrar uma solução para a mesma. De acordo com Bitencourt (2018), matemáticos como Lev Genrikhovich Shnirelman e Harald Andrés Helfgott conseguiram alcançar alguns resultados expressivos ao tentarem demonstrar a conjectura, porém nenhum deles obteve sucesso na demonstração, de fato.

---

[1] O ano correto da anunciação de conjectura de Goldbach foi 1742.

Apesar de ainda não ter sido demonstrada, a conjectura foi verificada para uma grande quantidade de números. Ao se tornar inviável a verificação para números muito grandes, foi necessária a utilização de recursos tecnológicos que auxiliassem esse trabalho. Confirmando essa ideia, Bitencourt (2018, p. 22) atesta que “Verificar a Conjectura de Goldbach manualmente exige muito tempo e concentração. Os computadores têm sido usados para verificações que confirmaram essa afirmação para números da magnitude de pelo menos $3 \cdot 10^7$”.

Como consequência da Conjectura de Goldbach surgiu uma nova problemática, chamada de Conjectura “fraca” de Goldbach, enquanto a original seria a Conjectura “forte” de Goldbach, e essa conjectura “fraca” faz a seguinte afirmação:

“*Todo número primo ímpar maior que 5 pode ser escrito como a soma de três números primos”.*

A Conjectura “fraca” de Goldbach foi demonstrada no ano de 2013 pelo matemático peruano Harald Andrés Helfgott, o que lhe garantiu, em 2015, o Prêmio de Pesquisa Humboldt, entregue pela *Fundação Alexander Van Humboldt, da Alemanha.*

6.4 ESPIRAL DE ULAM

A Espiral de Ulam é uma fascinante representação gráfica pictórica, criada com o fim de visualizar algum possível padrão na distribuição de números primos, no qual os números naturais são organizados em forma espiral, e os números primos são destacados em meio aos naturais.

Quadro 3: Espiral de Ulam para os 225 primeiros números naturais.

197	196	195	194	**193**	192	**191**	190	189	188	187	186	185	184	183
198	145	144	143	142	141	140	**139**	138	**137**	136	135	134	133	182
199	146	**101**	100	99	98	**97**	96	95	94	93	92	91	132	**181**
200	147	102	65	64	63	62	**61**	60	**59**	58	57	90	**131**	180
201	148	**103**	66	**37**	36	35	34	33	32	**31**	56	**89**	130	**179**
202	**149**	104	**67**	38	**17**	16	15	14	**13**	30	55	88	129	178
203	150	105	68	39	18	**5**	4	**3**	12	**29**	54	87	128	177
204	**151**	106	69	40	**19**	6	1	**2**	**11**	28	**53**	86	**127**	176
205	152	**107**	70	**41**	20	**7**	8	9	10	27	52	85	126	175
206	153	108	**71**	42	21	22	**23**	24	25	26	51	84	125	174
207	154	**109**	72	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50	**83**	124	**173**
208	155	110	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80	81	82	123	172
209	156	111	112	**113**	114	115	116	117	118	119	120	121	122	171
210	**157**	158	159	160	161	162	**163**	164	165	166	**167**	168	169	170
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	**223**	224	225

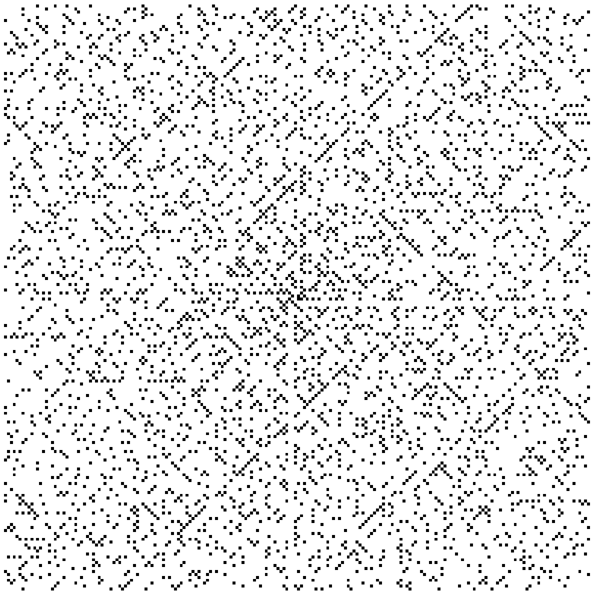
Fonte: Autor (2025)

A espiral surgiu de maneira quase acidental no ano de 1963, quando o matemático polonês Stanisław Marcin Ulam, aparentemente entediado durante uma conferência científica, despretensiosamente, começou a rabiscar em um papel, dispondo os números naturais, começando do 1, em forma de espiral, enquanto marcava os números primos. Para sua surpresa, ele notou um certo padrão visualmente inesperado quanto à disposição dos números primos: ao marcar os números primos na espiral que construiu, observou que os mesmos exibiam um padrão um tanto quanto curioso, em que eles apresentaram estruturas e padrões diagonais visualmente claros em sua distribuição, diferente do que se esperava, uma distribuição completamente caótica e aleatória.

Para Pedroza (2020), a existência de muitos números primos dispostos em diagonais na espiral de Ulam não deve ter ligação com a aleatoriedade, o que indica a existência de algum padrão na distribuição dos números primos, e, devido a isso, essa espiral e esse padrão na disposição dos números primos, devem ser investigados.

A espiral de Ulam foi, computacionalmente, estendida para uma grande quantidade de números, o que permitiu visualizar ainda mais os padrões diagonais dos números primos. Nada foi, de fato, descoberto concretamente a respeito desses padrões de disposição, porém muitos estudos posteriores surgiram a partir da descoberta de Ulam.

Figura 14: Espiral de Ulam 400 x 400



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Ulam#/media/Ficheiro:Ulam_1.png>. Acesso em 03 de junho 2025.

Para Pedroza (2020, p. 70) “a espiral de Ulam pode auxiliar no estudo de expressões matemáticas simples, que forneçam uma boa quantidade de primos”. E, ainda, de acordo com Filho (2019), essa “brincadeira” criada por Ulam rendeu bons estudos sobre os números primos, e está relacionada até mesmo com o polinômio de Euler.

6.5 PRIMOS VULTOSOS

É inquestionável a importância dos números primos para a matemática, e mais especificamente para a teoria dos números, sendo um dos principais responsáveis pelo seu desenvolvimento, desempenhando um papel central em uma vasta quantidade de pesquisas na área. Entre esses, os números primos grandes – primos com centenas, milhares ou até milhões de dígitos – se destacam em meio aos demais, não apenas por serem desafiadores em seus problemas, mas também por suas aplicações práticas.

Dada a importância dos números primos, é antiga a busca pelo “maior” deles, e em 1876, antes da existência de tecnologias avançadas, o francês François Édouard Anatole Lucas encontrou de forma manual o que seria, à época, o maior número primo conhecido.

Figura 15: François Édouard Anatole Lucas

Fonte: < https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lucas/Lucas_2.jpeg>. Acesso em 04 de junho 2025.

O número descoberto por François foi $2^{127} - 1$, possui 39 dígitos e levou 19 anos para ser descoberto, trata-se de um Primo de Mersenne, o 12º descoberto, para ser mais exato. Vale salientar que, durante 75 anos, esse ficou sendo o maior número primo testado, entretanto com o surgimento dos computadores, números primos verdadeiramente maiores do que esse foram descobertos. Porém, o primo descoberto por François continua sendo o maior número primo calculado manualmente, até os dias atuais. De acordo com Pontes, Gobbi e Souza (2018, p. 249 e 250)

> Em 1857, aos 15 anos de idade, Édouard Lucas deu início ao teste de primalidade para o número $2^{127} - 1$, o 12º número primo de Mersenne, só conseguindo concluir 19 anos após, 1876. Com isso, Édouard Lucas encontrou o maior número primo calculado a mão, número esse que contém 39 dígitos. Hoje, com a ajuda de máquinas, números primos imensamente maiores já foram encontrados. (PONTES; GOBBI; SOUZA, 2018, p. 249 e 250).

Com o avanço das tecnologias e dos algoritmos de teste de primalidade, tornou-se possível a identificação e a validação de números primos cada vez maiores.

Essa busca é impulsionada por motivações teóricas, práticas e até mesmo por hobby. Nos dias atuais, até a data de publicação do presente trabalho, o maior número primo conhecido foi descoberto em outubro de 2024 por um programador e matemático amador chamado Luke Durant, que utilizou de meios tecnológicos para a sua descoberta.

O número descoberto por Durant foi $2^{136279841} - 1$, e possui mais de 41 milhões de dígitos. Assim como o número descoberto por François, o primo descoberto por Durant também é um Primo de Mersenne, o 52º. Enfatizando a magnitude do número primo descoberto por Durant, Marin (2024), em uma publicação para o site da CNN BRASIL, diz que se o número fosse lido um dígito por segundo, ele demoraria 475 dias para ser lido por completo e que se fosse escrito em um livro, este teria 20 mil páginas, e ainda se fossemos registrá-lo em um computador, de forma binária, o número ocuparia cerca de 16 megabytes de memória.

Durant fazia parte do projeto “Grande Busca pela Internet de Primos de Mersenne”, tradução do inglês para Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS), que é um projeto colaborativo de busca de números Primos de Mersenne, através da utilização de computação, através do qual surgiu o maior número primo conhecido.

Do ponto de vista matemático, a pesquisa sobre números primos grandes ajuda a entender melhor a distribuição dos primos, como também pode contribuir no teste de conjecturas profundas. Por outro lado, no sentido mais prático, os números primos grandes são componentes fundamentais nos sistemas criptográficos, como o algoritmo RSA, em que a segurança depende da dificuldade de fatorar produtos de dois números primos grandes.

O sistema RSA é baseado na criação de uma chave pública e uma chave privada de criptografia, as quais usam como um dos elementos principais o resultado da multiplicação de dois números primos grandes, e tem como fonte de segurança a dificuldade em fatorar esse número. Peruzzo (2012, p. 99), referindo-se ao sistema de criptografia RSA, afirma que:

> A segurança deste algoritmo baseia-se no fato de que, embora seja fácil encontrar dois números primos de grandes dimensões, conseguir fatorar o produto de tais números, num intervalo de tempo viável, é praticamente impossível computacionalmente. (PERUZZO, 2012, p. 99)

Portanto, podemos afirmar que, quanto maiores os números primos envolvidos no sistema de criptografia RSA, mais seguros estarão os dados criptografados. Dessa forma, a descoberta de novos números primos de grandes dimensões é necessária para o desenvolvimento desse sistema.

6.6 AS CIGARRAS E OS PRIMOS

Embora o conceito de número primo pertença, em essência, ao que se chama de matemática pura, sua existência extrapola os limites abstratos da matemática e se manifesta de forma surpreendente em fenômenos naturais. Um dos exemplos mais notáveis da ocorrência de números primos na natureza é o comportamento biológico peculiar das cigarras do gênero *Magicicada,* também conhecidas como cigarras periódicas.

Discorrendo sobre as cigarras do gênero supracitado, Lima (2024, p. 9) afirma que “as cigarras destacam-se não apenas como mais um componente da intricada teia da vida, mas também por seu ciclo de vida peculiar, intrinsecamente ligado aos números primos”.

Figura 16: Cigarras do gênero Magicicada.

Fonte: <https://www.anthropocenemagazine.org/wp-content/uploads/2022/04/cicadas.jpg>. Acesso em 05 de junho 2025.

A alcunha “cigarra periódica” se dá pela característica do seu comportamento periódico em seu ciclo de vida, uma vez que esses seres vivem a maior parte de suas vidas no subsolo, onde se alimentam de raízes de plantas, porém, geralmente, a cada 13 ou 17 anos (ambos números primos), elas saem do subsolo para a superfície com o fim de acasalar, botar ovos e iniciar novamente seu ciclo de vida. Lima (2024, p. 10) afirma que:

> O fenômeno das cigarras evidencia a fascinante intersecção entre biologia e matemática. Esse fator foi tão impactante na cadeia alimentar, que como consequência a espécie predatória quase se extinguiu, uma vez que a alimentação estava praticamente escassa. A escolha por ciclos de vida baseados em números primos reflete uma adaptação evolutiva notável, que combina sincronia e proteção contra a predação. (LIMA, 2024, p.10).

Dessa forma, Lima nos leva a crer que a escolha natural desse ciclo baseado em números primos não é uma mera coincidência, mas sim uma estratégia adaptativa sofisticada para que a chance do encontro das cigarras com seus predadores na superfície, durante seus ciclos reprodutivos, seja reduzida, fazendo dos números primos um mecanismo natural de proteção.

7 A HIPÓTESE DE RIEMANN

Esse capítulo tem como principal intuito tratar um pouco da conjectura chamada de Hipótese de Riemann que é, sem dúvidas, um dos mais famosos e desafiadores problemas ainda em aberto da matemática moderna, e muito provavelmente o maior deles. Aqui, não iremos nos aprofundar nos detalhes do longo caminho até que Riemann chegasse a sua conjectura, por não ser esse o foco do trabalho. Tentaremos, pois, nos limitar apenas aos principais fatos e descobertas para que fosse formulada a tão famosa Hipótese de Riemann.

A importância desse problema vai além da teoria dos números, de modo que sua resolução pode revolucionar não só a matemática, com sua relação com a distribuição dos números primos, mas também áreas ligadas à computação, aos sistemas de criptografia e à segurança de informação.

7.1 GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN

Bernhard Rieman foi um dos mais famosos matemáticos da história, cujas contribuições revolucionaram vários campos da matemática, e até mesmo da física. Filho de um pastor luterano, Riemann nasceu em Breselenz, na Alemanha, onde teve sua infância fortemente ligada à religião cristã.

Figura 17: Georg Friedrich Bernhard Riemann.

Fonte: < https://darwinthenandnow.com/wp-content/uploads/2016/05/Riemann-Bernhard.jpg>. Acesso em 08 de junho 2025.

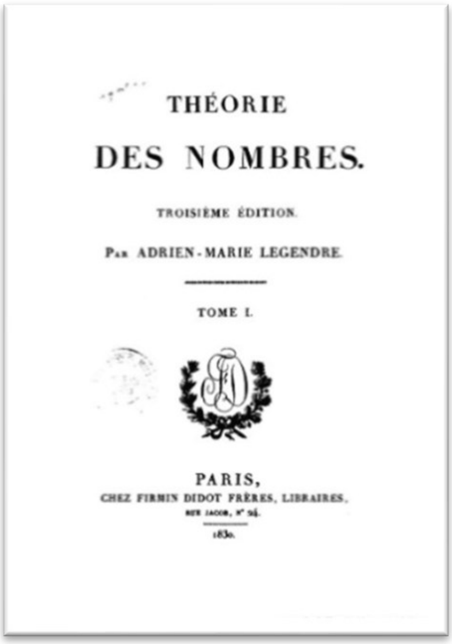
No início de sua vida acadêmica, Riemann, para satisfazer os desejos de seu pai, dedicou-se aos estudos teológicos. Sautoy (2007, p. 71) afirma que "a família de Riemann era pobre, e o pai de Bernhard esperava que o filho também entrasse na vida clerical, o que lhe daria uma fonte de renda regular com a qual poderia sustentar suas irmãs".

Algum tempo após ingressar na universidade de Göttingen para estudar teologia, Riemann, tímido e pouco enturmado, transpareceu a alguns de seus professores suas habilidades com a matemática e sua obsessão pela perfeição. Um de seus professores, Schmalfuss, foi um dos responsáveis por incentivar o jovem Bernhard a aperfeiçoar suas habilidades. Sautoy (2007, p. 70), se referindo a Schmalfuss como "o professor", aponta que:

> O professor logo percebeu a habilidade matemática especial de Riemann, e se dispôs a estimular suas capacidades. Ofereceu a Riemann sua biblioteca, com uma ótima coleção de livros de matemática, onde o rapaz poderia escapar da pressão social dos colegas. A biblioteca foi um mundo novo para Riemann, um lugar onde se sentiria em casa e no controle da situação. Subitamente, ele se viu em um mundo matemático perfeito e idealizado, em que a prova impedia o colapso da realidade ao seu redor, e os números se tornaram seus amigos. (SAUTOY, 2007, p. 70).

A partir do contato com a teoria dos números através de um livro da biblioteca de seu professor, Riemann foi seduzido e inspirado a aprofundar um pouco mais seus estudos sobre essa área, inclusive, chegando a mudar do curso de Teologia para Matemática. Tratava-se do livro *Théorie des Nombres* (Teoria dos Números), escrito por Adrien-Marie Legendre.

Figura 18: Livro Théorie des Nombres.


THÉORIE

DES NOMBRES.

TROISIÈME ÉDITION.

PAR ADRIEN-MARIE LEGENDRE.

TOME I.

PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT FRÈRES, LIBRAIRES,

Fonte: < https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k426107/f3.highres>. Acesso em 08 de junho 2025.

Tamanha foi a empolgação que, apesar da densidade e complexidade da obra de Legendre, Riemann a estudou por completo em pouquíssimos dias, e ainda afirmava que já teria absorvido todo o conteúdo daquela obra. De acordo com Gracián (2017, p. 114 e 115):

> Friedrich Constantin Schmalfuss, diretor do instituto em que o jovem Riemann estudava, permitiu-lhe levar para casa um livro de sua biblioteca particular, a Teoria dos Números, de Legendre, um tratado de matemática de grande complexidade. Riemann leu-o de ponta a ponta em apenas uma semana e devolveu-o, dizendo que tinha achado muito interessante. (GRACIÁN, 2017, p. 114 e 115).

Reforçando essa ideia, Sautoy (2007, p. 71) diz que “apesar das 859 páginas, Riemann o devorou, devolvendo o livro ao professor em apenas seis dias e declarando precocemente: ‘É um livro maravilhoso; já o sei de cor’”. Pode-se dizer que esse livro marcou a vida do jovem matemático e o inspirou a produzir a obra que ficou conhecida como o cálice sagrado da matemática.

7.2 SOBRE A HIPÓTESE DE RIEMANN

Para chegar a sua hipótese, Riemann contou com a “ajuda” de estudos realizados por outros matemáticos que já pesquisavam sobre números primos, e é importante que entendamos um pouco sobre essas pesquisas para apresentarmos a conjectura de Riemann. Nessa perspectiva, Gaspareti (2014) afirma que é necessário conhecer os conceitos matemáticos surgidos a priori para se entender a Hipótese de Riemann.

É interessante que falemos, primeiramente, do trabalho do matemático que serviu de motivação para o estudo de Riemann, trata-se de uma função proposta por Carl Friedrich Gauss, um dos grandes nomes da matemática. Foi uma criança prodígio, chamando a atenção de todos para sua habilidade com números desde muito novo, e devido a isso chegou a ser chamado de “Príncipe da matemática”. Aos 15 anos de idade, em busca de uma “fórmula” que gerasse números primos, Gauss observou certos padrões na quantidade de números primos até um determinado número natural n. Seu estudo surgiu a partir do contato com um livro sobre logaritmos, no qual ele notou uma relação entre a quantidade de números primos até um determinado n com o logaritmo natural de n.

Sautoy (2007, p. 55), ao falar sobre tentativas de descoberta de um padrão na distribuição de números primos, afirma que:

> Era nisso que Gauss pensava em 1792, aos 15 anos de idade, um ano depois que ganhou de presente um livro sobre logaritmos. [...] Na contracapa do livro que Gauss ganhara havia sido publicada uma tabela de números primos. A presença dos primos e logaritmos no mesmo livro era curiosa, pois Gauss percebeu, após cálculos extensos, que esses dois tópicos aparentemente desconexos pareciam estar relacionados. (SAUTOY, 2007, p. 55).

Figura 19: Carl Friedrich Gauss.

Fonte: <https://s.ebiografia.com/assets/img/authors/ca/rl/carl-friedrich-gauss-1777-1855-l.jpg?auto_optimize=low&width=255>. Acesso em 16 de jun 2025.

A conjectura de Gauss propunha uma função de contagem de números primos, chamada de função $\pi(x)$, de modo que a função se propõe a calcular, aproximadamente, a quantidade de números primos até x, sendo x um número natural. A função que Gauss conjecturou foi a seguinte:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

Devemos notar que a função proposta por Gauss não fornecia exatamente a quantidade de números primos até x, mas sim uma aproximação dessa quantidade, e que havia ainda uma margem de erro considerável. Ribenboim (2020, p. 152) chega a afirmar que “a aproximação $\pi(x)$ por $x/\ln x$ não é das melhores”. Também é válido ressaltar que π é apenas o nome dado a função e não possui relação com a constante matemática que relaciona o diâmetro e o comprimento de uma circunferência.

Abaixo, na tabela 2, evidenciamos a aproximação entre a função $\pi(x)$ e o valor real de $x/\ln x$.

Tabela 2: $\pi(x)$ versus $x/\,ln\,x$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\pi(x)}$	$\boldsymbol{x/\ln x}$	$\boldsymbol{Erro\ absoluto}$	$\boldsymbol{Erro\ relativo}$ (%)
10	4	4,34	0,34	8,5%
100	25	21,71	3,29	13,2%
1000	168	144,76	23,24	13,8%

10000	1229	1086,1	142,9	11,6%
100000	9592	8685,89	906,11	9,45%
1000000	78498	72382,41	6115,59	7,8%

Fonte: Autor (2025)

Na tabela temos:

- $\pi(x)$: valor exato de números primos menor ou igual a x;
- $x/\ln x$: aproximação de $\pi(x)$;
- $Erro\ absoluto$: diferença direta $|\pi(x) - x/\ln x|$;
- $Erro\ relativo\ (\%)$: $\frac{|Erro\ absoluto|}{\pi(x)} \cdot 100\%$.

É importante observar que quanto maior o valor de x, mais precisa é a aproximação da função de Gauss com a quantidade real de números primos até x, ou seja, menor é o erro relativo entre $\pi(x)$ e o $x/\ln x$. Também é importante ressaltar que Gauss apenas conjecturou a função, não deixando nenhuma demonstração da mesma.

A conjectura de Gauss foi demonstrada, assintoticamente, apenas em 1896 por Jacques Hadamard e também por Charles de la Vallée-Poussin, de forma independente. Sautoy (2007) enfatiza que após um século, a conjectura de Gauss tinha uma prova, e que daí em diante a conjectura passou a ser chamada de *Teorema dos Números Primos.* Sautoy afirma ainda que esse foi o resultado mais significativo sobre números primos desde que os gregos mostraram sua infinitude.

7.3 A FUNÇÃO ZETA

O desenvolvimento inicial da função zeta está diretamente relacionado aos estudos de Leonhard Euler, que, ao aprofundar-se nos trabalhos de Jacob Bernoulli e, especialmente, de Johann Bernoulli - seu mestre -, estabeleceu as bases analíticas que viriam a caracterizar a função posteriormente conhecida como função zeta de Riemann.

Os irmãos Bernoulli desenvolveram estudos e demonstrações, especialmente, sobre a série conhecida como série harmônica, que nada mais era que a soma infinita dos inversos dos quadrados:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

Euler, inclusive, resolveu a série harmônica supracitada, conhecida como *O Problema da Basileia.* Tendo seus estudos sobre séries como base fundamentadora, Euler então conseguiu definir sua função utilizando a letra grega ζ (zeta), denotando-a por *"função zeta"*. A função zeta de Euler é da seguinte forma:

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{n^x}+\cdots$$

Apesar de a função zeta ser atribuída a Riemann, como vimos a descoberta da mesma foi feita por Euler. Para Gracián (2017, p. 67):

> Com base na série harmônica, Euler definiu uma função que viria a ficar na história como uma das mais importantes alguma vez descoberta em matemática, a $\ll \mathit{função\ zeta\ de\ Euler} \gg$ (embora actualmente se designe, de certo modo injustamente, $\ll \mathit{função\ zeta\ de\ Riemann} \gg$). (GRACIÁN, 2017, p.67).

Estudando as séries infinitas, e utilizando-se do Teorema Fundamental da Aritmética, Euler estabeleceu uma relação entre a função zeta e os números primos. Basicamente, ele utilizou do fato de que todo n pode ser decomposto em fatores primos. Com isso, ele pôde provar que para cada $x \in \mathbb{R}$, com $x > 1$ e p primo, tem-se:

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=\prod_{p}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^x}}\right).$$

Ribenboim (2020) salienta que a descoberta de Euler, chamada de *Produto Euleriano*, é a ligação entre a função zeta e os números primos, e que tal produto é uma expressão analítica de fatoração única de inteiros como produto de números primos.

7.4 A CONTRIBUIÇÃO DE RIEMANN

Bernhard Riemann, em 1859, ao precisar escrever um trabalho relacionado sobre suas pesquisas atuais, como forma de homenagem a seu grande mestre Gauss, publicou um trabalho sobre teoria dos números. É interessante salientar que essa foi a única publicação de Riemann na área.

Peruzzo (2012) afirma que era parte do regulamento da Academia de Ciências de Berlin que os novos membros escrevessem um relatório sobre sua pesquisa, e devido a isso, ao ser eleito para a instituição, Riemann precisou escrever tal relatório. Ademais, Peruzzo (2012, p. 56 e 57), salienta que:

> O relatório apresentado por Riemann tinha como título "sobre o número de números primos que não excedem uma grandeza dada", e nele está contido a atualmente conhecida como hipótese de Riemann. Este relatório tinha 10 páginas e foi publicado na forma de artigo periódico mensal da Academia de Berlin. (PERUZZO, 2012, p. 56 e 57).

Riemann tinha como objetivo fornecer uma demonstração para a função π deixada por Gauss. De posse da função ζ de Euler, Riemann definiu a função zeta para complexos $s \in \mathbb{C}$, com parte real maior que 1, ou seja $Re(s) > 1$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos. A função de Riemann, como consequência da descoberta de Euler: o produto euleriano, está diretamente ligada à distribuição dos números primos.

Com isso, a função zeta, que após a publicação do relatório de Riemann passou a ser conhecida como *Função Zeta de Riemann*, uma das mais famosas funções da matemática, que adquire a seguinte forma:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \text{com } Re(s) > 1.$$

Como utilizava números complexos, devido à robustez do conjunto, Riemann teve a ideia de estender a função zeta para todo o plano complexo, com a exceção de $s = 1$, e fez isso através do que Ribenboim (2020), e também Santos (2015) chamam de *Equação Funcional da Função Zeta de Riemann*. Essa equação tem a seguinte forma:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

É válido ressaltar que Γ trata-se da função gama que, basicamente, generaliza o fatorial de um número inteiro para valores complexos. Aqui, não entraremos em detalhes, pois esse não é o escopo do presente trabalho.

Através da equação funcional, Riemann conseguiu fazer algumas descobertas importantes sobre a função zeta. Destacamos as seguintes:

- A função zeta se anula para os inteiros pares negativos, ou seja, $\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \cdots = \zeta(-2n) = \cdots = 0$. Riemann chamou esses valores de *zeros triviais*.
- Os demais zeros da função zeta se encontram no que foi chamado de *faixa crítica* $0 \leq Re(s) \leq 1$, ou seja, os demais zeros possuem parte real entre 0 e 1. Riemann chamou esses valores de *zeros não triviais.*

Inclusive, de acordo com Gracián (2017) foi utilizando-se dessas descobertas de Riemann que Jacques Hadamard e Charles de la Vallée-Poussin demonstraram o teorema dos números primos, anos após a publicação do relatório de Riemann.

Sabe-se que o comportamento assintótico da distribuição dos números primos está profundamente relacionado ao comportamento dos zeros da função zeta de Riemann, sendo esses zeros determinantes na precisão das estimativas para a quantidade de primos menores que um número dado. Para Ribenboim (2020, p. 155) "o conhecimento dos zeros da função zeta no domínio critico se traduz por um conhecimento mais profundo da distribuição dos números primos".

Ao analisar os zeros não triviais de sua função, Riemann percebeu uma característica comum entre esses valores, todos eles possuíam parte real igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, $Re(s) = \frac{1}{2}$.

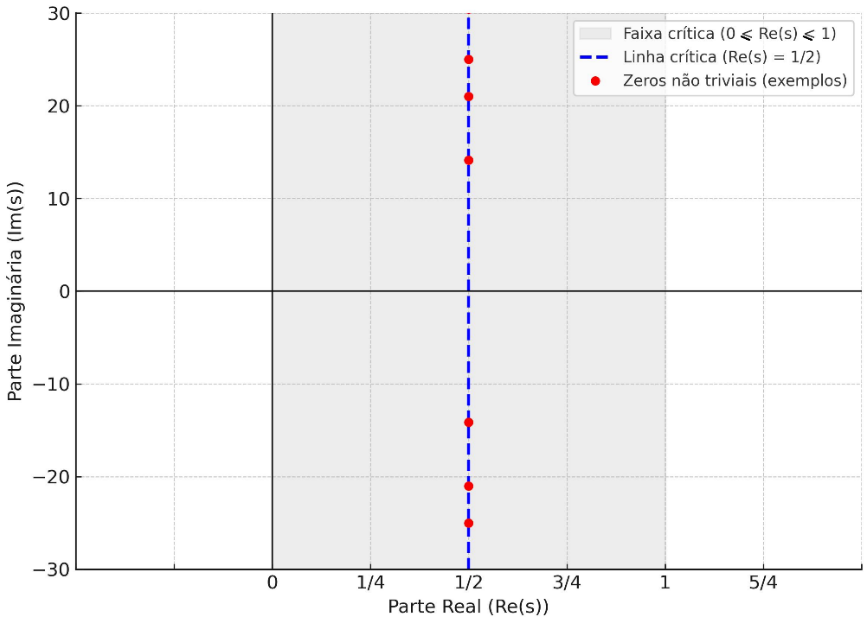
Segundo Peruzzo (2012, p. 59), "de acordo com Riemann muitos dos zeros aparecem sobre essa linha, conhecida hoje como linha crítica de Riemann, e é muito provável que todos os demais também o façam".

A partir dessa observação, Riemann formulou sua conjectura, a tão famosa *Hipótese de Riemann:*

"Todos os zeros não triviais da função zeta possuem parte real igual a $\frac{1}{2}$*."*

O Gráfico 1 a seguir apresenta os zeros não triviais da função zeta de Riemann no plano complexo.

Gráfico 1: Gráfico da função zeta de Riemann.



Fonte: Autor (2025)

Ribenboim (2020, p. 155) salienta ainda que os zeros não triviais, por serem números complexos, são da forma $\frac{1}{2} + it$, e afirma que essa conjectura "é, sem qualquer dúvida, um problema muito difícil e muito importante".

Podemos notar que a hipótese de Riemann trata-se de uma pergunta de "sim" ou "não", a qual muitos matemáticos dedicaram esforços para respondê-la, dando origem a muitas descobertas. Segundo Peruzzo (2012), Godfrey H. Hardy mostrou que existem infinitos zeros sobre a linha critica, Edmund Landau e Harald Bohr provaram que a maior parte dos zeros não triviais da função zeta estão sobre a linha crítica, mas não conseguiram provar que todos estavam.

É importante salientar que já foram encontrados, por meios computacionais, mais de um trilhão de zeros não triviais da função $\zeta(s)$, e todos eles estão sobre a linha crítica, e absolutamente nenhum zero fora dessa linha foi encontrado. Devlin (2008) salienta que os primeiros 1,5 trilhão de zeros estão sobre a linha crítica.

Portanto, os estudiosos da área, de forma consensual, admitem que as descobertas feitas até o momento não foram suficientes para demonstrar a conjectura deixada por Riemann. Dessa forma, essa hipótese segue sendo um dos maiores problemas em aberto de toda a matemática.

7.5 A LISTA DE HILBERT E OS PROBLEMAS DO MILÊNIO

Como já foi citado nesse trabalho (capítulo 6), o matemático David Hilbert, em 1900, listou os 23 grandes problemas em aberto na matemática, em sua participação no Congresso Internacional de Matemática de Paris. O oitavo problema tratava-se da Hipótese de Riemann.

De acordo com o Livro da Matemática (2020, p. 250):

> Em 1900, David Hilbert listou 23 problemas matemáticos pendente. Um deles era a hipótese de Riemann, que ainda é por consenso um dos mais importantes problemas não resolvidos da matemática. Ele trata de números primos – aqueles que só são divisíveis por si mesmos e por 1. (LIVRO DA MATEMÁTICA, 2020, p. 250).

Além disso, Boyer (1996, p. 427), analisando a concepção de Hilbert a respeito da hipótese de Riemann, afirma que o matemático imaginou que a demonstração da hipótese "poderia levar a uma prova da familiar conjetura sobre a infinidade de pares primos; mas nenhuma prova foi dada ainda, embora mais de um século tenha-se passado desde que Riemann arriscou o palpite".

Tamanha era a importância que Hilbert dava à hipótese de Riemann que, de acordo com Derbyshire (2012), certa vez foi perguntado a Hilbert se, vários séculos após sua morte, o mesmo despertasse de volta para o mundo dos vivos, o que ele faria. Como resposta, Hilbert teria respondido "Perguntaria se alguém havia demonstrado a hipótese de Riemann".

A lista de problemas de Hilbert não é a única lista "famosa" de problemas notáveis da matemática da qual a hipótese de Riemann faz parte. Em 2000, o Clay Mathematics Institute (CMI) selecionou sete problemas de extrema dificuldade, devido a sua profundidade, impacto teórico e importância histórica, e os chamou de *Os Sete Problemas do Milênio*, oferecendo um valor em dinheiro para quem solucionasse algum desses problemas de forma rigorosa, publicasse a solução em revista científica, e que tal solução fosse avaliada e validada pela comunidade matemática.

A respeito do Instituto, Gracián (2017) salienta que o CMI, criado pelo multimilionário Landon T. Clay, é uma fundação privada que não possui fins lucrativos, que tem como objetivo o desenvolvimento e divulgação da matemática. Além disso, o

CMI destinou sete milhões de dólares à solução dos sete problemas, ou seja, o prêmio de um milhão de dólares será destinado para o responsável pela solução de cada problema.

Em suma, a hipótese de Riemann é um dos sete problemas do milênio, e a recompensa oferecida pelo CMI é um dos motivadores à solução dessa conjectura, assim como outros prêmios que resultariam como consequência dessa solução, visto a importância do mesmo. Vale salientar que a hipótese de Riemann é o único problema que pertence tanto a lista de Hilbert quanto a lista do CMI, e esse fato reflete a magnitude dessa conjectura para a matemática.

8 UMA PROPOSTA DE ESTUDO DOS NÚMEROS PRIMOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

É inegável que as sequências didáticas são ferramentas pedagógicas bastante interessantes no meio educacional, uma vez que contribuem para um aprendizado mais significativo e dinâmico, desenvolvendo habilidades específicas de maneira gradual. Nesse sentido, Zabala (1998) ratifica sua importância ao afirmar que as sequências didáticas são "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos" (ZABALA, 1998, p. 18).

Este capitulo tem como objetivo salientar a relevância do uso de sequências didáticas para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, favorecendo a aquisição do conhecimento de forma mais sólida e significativa. Além disso, será apresentada uma proposta de sequência didática para o estudo de números primos no ensino fundamental.

8.1 AS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

O uso de sequências didáticas como método de ensino não é algo decorrente dos tempos atuais, uma vez que registros apontam a utilização de sequências didáticas na década de 80. De acordo com Oliveira (2013), na França, no ano de 1980 as sequências didáticas eram utilizadas como estratégia para melhorar o ensino da língua francesa.

As SD surgem como uma estratégia de ensino que tem como objetivo garantir uma progressão das aprendizagens, fazendo com que os alunos obtenham conhecimento de uma forma gradual e significativa. Para Lima (2018, p. 156) "sequência didática é um termo usado na Educação Infantil para definir um conjunto de atividades encadeado de passos e etapas ligadas entre si para tornar mais eficiente o processo de aprendizado".

Nesse sentido, a importância das sequências didáticas está em tornar o ensino mais dinâmico e contextualizado, com uma organização sistematizada na qual seria possível extrair o máximo de cada etapa da sequência, tornando o processo de aprendizagem mais significativo.

É importante salientar que, por mais eficazes que sejam as SD no processo de ensino-aprendizagem, elas não são, por si só, garantia da aquisição de conhecimentos por parte dos alunos, pois necessitam de um bom planejamento e desenvolvimento por parte do mediador. A esse respeito, Araújo (2013) ressalta que as sequências didáticas devem ser bem orientadas para serem eficazes e que o professor é o centro desencadeador das ações e mediador da aprendizagem.

Nessa perspectiva, é evidente que são tão eficazes quanto desafiadoras para os professores, pois tratam-se de atividades em sequência aplicadas para diferentes tipos de alunos, com realidades diversas e que absorvem conhecimento de forma e velocidade distintas. Sobre isso, Carvalho (2017) ressalta que

> Nessa pespectiva (SIC), parece mais adequada uma relação que favoreça as interações nos diferentes níveis: em relação ao grupo-classe; em relação aos grupos de alunos; interações individuais. Salientamos que toda proposta de ensino é carregada de intencionalidade e esta deve estar clara para o professor desde a elaboração das tarefas/atividades até a devolutiva junto aos estudantes dos seus resultados (CARVALHO, 2017, p. 48).

Vale salientar que as SD, apesar de serem relevantes ferramentas para diversificar a forma do ensino, em alguns casos podem não ser a melhor escolha para determinado tipo de conteúdo. Dessa forma, cabe ao educador a tarefa de buscar estratégias para diversificar a forma de ensino, tendo sempre as sequências didáticas como umas das possibilidades.

8.2 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Atividade Inicial – Iniciando a discussão

Tema: Explorando os números primos
Tempo estimado: 1 aula
Material necessário: Quadro branco, lápis de quadro branco e folhas de ofício.

Objetivos:

- Apresentar o conceito de número primo;

- Instigar a curiosidade em relação aos números primos;
- Expor curiosidades sobre números primos.

Orientações:

O professor deve iniciar a aula perguntando sobre os conhecimentos prévios dos alunos a respeito dos números primos: "*Vocês já ouviram falar de números primos? O que acreditam ser esses números?"*

Com isso, o docente deve instigar e mediar uma discussão a respeito das perguntas feitas e pedir que os alunos apresentem seus pensamentos a respeito das mesmas.

Após todos os apontamentos feitos, devem ser apresentadas curiosidades e fatos interessantes a respeito dos números primos, a fim de estimular a curiosidade dos alunos a respeito desse grupo de números.

Por fim, o responsável pela turma deve entregar uma folha em branco a cada aluno e pedir para que os mesmos escrevam o que eles entenderam na folha sobre o que foi discutido e o que eles mais gostaram de aprender/conhecer sobre os números primos.

Considerações:

O professor deve estar atento à realidade social e econômica de cada aluno, considerando os conhecimentos prévios de cada um, sem fazer comparações ou julgamentos.

Além disso, o responsável pela aplicação da SD deve fazer pesquisas prévias a respeito das curiosidades e fatos interessantes sobre os números primos. O capítulo 6 do presente trabalho pode servir de ponto de partida para tal pesquisa por parte do professor.

Atividade 1

Tema: O que são os números primos?

Tempo estimado: 1 aula

Material necessário: Folhas de ofício

Objetivos:

- Compreender a definição de números primos
- Formalizar os conceitos e entendimentos a respeito do conjunto dos números primos
- Revisar os conteúdos de múltiplos e divisores

Orientações:

O professor deve iniciar a aula relembrando um pouco do que foi falado sobre números primos na aula anterior, perguntando aos alunos o que eles ainda guardam na memória sobre tais números.

Após o primeiro momento, o professor deve definir no quadro que um número primo é um número natural maior que zero e que possui apenas dois divisores: o 1 e ele mesmo.

Em seguida, a turma deve ser dividida em grupos de dois ou três componentes, e ser orientada de modo que os componentes de cada grupo listem uma determinada quantidade de números naturais, para que, em seguida, os grupos troquem suas listas de números entre si.

Posteriormente, já com as listas trocadas entre os grupos, o professor deve pedir para os alunos identificaram se os números da lista que receberam são, ou não, primos.

Considerações:

O professor deve salientar que números compostos possuem mais de dois divisores, e que o número 1 não é primo, pois o mesmo possui só um único divisor.

A organização dessa atividade deve ser realizada considerando a quantidade de alunos pertencentes a turma.

O responsável pela turma deve estipular tanto a quantidade de números pertencentes à lista pedida, quanto orientar na escolha desses números, a fim de não permitir que os números escolhidos sejam inadequados para o nível de conhecimento da turma.

Caso seja necessário, o professor deve retomar os conhecimentos a respeito de múltiplos e divisores. Nesse caso, deve-se reconsiderar o tempo estimado para essa atividade, utilizando duas aulas para que a atividade alcance os objetivos desejados.

Atividade 2

Tema: Identificando números primos até 100

Tempo estimado: 2 aulas

Material necessário: Folhas contendo os números primos de 1 até 100, quadro branco e lápis de quadro branco.

Objetivos:

- Identificar os números primos de 1 até o 100
- Assimilar dicas a respeito da identificação de números primos
- Revisar os conteúdos de múltiplos e divisores
- Reforçar o cálculo mental por parte dos alunos

Orientações:

Mais uma vez o professor inicia a aula relembrando rapidamente a definição de números primos, múltiplos e divisores. A essa altura, a maioria dos alunos já terão absorvido esses conhecimentos de forma adequada.

Após esse primeiro momento, deve ser entregue uma folha contendo os 100 primeiros números naturais (Apêndice 1) aos alunos, e também deve ser orientado aos mesmos a marcarem os números primos, a partir dos conhecimentos já adquiridos.

Ao final da atividade, o professor deve corrigir a atividade com os alunos, apontando os números que, de fato, são primos na lista que foi entregue, para que os mesmos possam identificar seus erros.

Considerações:

O professor deve reforçar a ideia de que números primos são aqueles que não têm divisores além de 1 e ele mesmo, além de estimular os alunos a realizarem cálculos mentais, caso apresentem habilidade para tal.

Ao decorrer da aula, o aplicador da SD deve fornecer dicas aos alunos para que sejam direcionados ao aprendizado de técnicas a fim de diferenciar números primos de números compostos.

Como sugestão, é possível dividir a aula em dois momentos: no primeiro, orientar os alunos a marcar os números primos até 50, logo após corrigir e dar algumas dicas; no segundo, pedir que os alunos marquem os primos de 50 até 100, já de posse das dicas oferecidas pelo professor, para que eles possam avaliar seus próprios erros e procurar, no segundo momento, não mais cometê-los.

Atividade 3

Tema: O crivo de Eratóstenes
Tempo estimado: 2 aulas
Material necessário: Folhas contendo os números primos de 1 até 200, quadro branco e lápis de quadro branco.

Objetivos:

- Identificar os números primos de 1 a 200
- Conhecer e dominar o crivo de Eratóstenes
- Aplicar o crivo de Eratóstenes para descobrir números primos
- Reforçar os conhecimentos sobre múltiplos e divisores
- Reforçar o cálculo mental por parte dos alunos

Orientações:

Ao iniciar a aula, o professor deve apresentar o crivo de Eratóstenes, aproveitando o momento para contar um pouco da história desse algoritmo, salientando aos alunos que essa é uma ferramenta simples e eficaz para a identificação de números primos.

Após o momento de apresentação do crivo, é preciso explicar aos alunos, passo a passo, como se dá a aplicação desse algoritmo, usando uma pequena lista de números como exemplo para que eles assimilem melhor o método de aplicação.

Em seguida, deve ser entregue aos alunos uma folha contendo os números naturais de 1 até o 200, orientando-os a aplicar o crivo de Eratóstenes, de modo a encontrar os números primos presentes na lista.

Ao final da atividade, o professor deve perguntar aos alunos o porquê desse algoritmo ser eficiente, e como ele os ajudou a encontrar os números primos presentes na lista.

Considerações:

O professor deve buscar, previamente, informações a respeito do crivo de Eratóstenes. É possível encontrar algumas informações no capítulo 4 do presente trabalho, as quais podem ser utilizadas como base para a pesquisa.

As explicações devem ser feitas no quadro branco para o melhor entendimento dos alunos. Caso ache necessário, o professor pode identificar alguns números compostos na lista para motivar os alunos a continuarem aplicando o método do crivo.

Após a identificação dos números primos por todos os alunos, deve ser feita a correção da atividade para que os discentes saibam, de fato, quais são os números primos presentes na lista.

A discussão final deve ser mediada pelo orientador da SD, para que o mesmo mantenha o controle das informações.

Atividade 4

Tema: Curiosidades e propriedades sobre números primos

Tempo estimado: 2 aulas

Material necessário: Folha de ofício em branco e laboratório de informática com internet

Objetivos:

- Fomentar a pesquisa a respeito de números primos
- Explorar propriedades de números primos
- Estimular a curiosidade a respeito de números primos

Orientações:

O professor deve iniciar essa aula explicando o que é uma propriedade numérica, tendo em vista o possível desconhecimento do conceito por parte dos alunos.

Em seguida, devem ser apresentadas algumas propriedades básicas sobre os números primos, curiosidades e até mesmo diferentes tipos de números primos, como:

1- O número 2 é o único número primo par.
2- Todos os números primos são positivos e maiores do que 1.
3- Números primos não podem ser fatorados em outros números primos.
4- Os chamados primos gêmeos.
5- O osso de Ishango.

Após a apresentação das propriedades, a turma deve ser dividida em grupos de dois ou três alunos e orientada a realizar uma pesquisa na internet e registrar outras propriedades, como também curiosidades sobre números primos.

Ao término da atividade, o professor deve organizar os grupos para que apresentem aos demais alunos os registros e resultados de suas pesquisas.

Considerações:

Nos capítulos 2, 5 e 6 do presente trabalho, o professor aplicador da sequência didática encontrará algumas propriedades, informações e curiosidades que podem ser apresentadas aos alunos durante essa atividade. Além disso, caso ache necessário, pode buscar informações adicionais na internet, a fim de ter o controle da atividade.

Ademais, na formação de grupos para a resolução das atividades, seria interessante fazer um rodízio dos alunos nos grupos para estimular a troca de conhecimentos. Contudo, essa questão fica a critério do aplicador da atividade.

O professor, como mediador, deve promover uma discussão sobre as propriedades por eles encontradas, destacando sua importância para o entendimento da matemática mais avançada, como a criptografia e a teoria dos números. No entanto, é importante que tais propriedades não sejam abordadas profundamente, e sim de forma superficial e simplificada, visto que são temas avançados para os alunos.

Atividade 5

Tema: Fatoração em números primos
Tempo estimado: 1 aula
Material necessário: Folha de ofício em branco, quadro branco e lápis de quadro branco

Objetivos:

- Entender o teorema fundamental da aritmética
- Aprender a decompor números compostos em fatores primos
- Revisar operações básicas da matemática

Orientações:

Inicialmente, o professor deve esclarecer que todo número que não é primo é chamado de número composto.

Em seguida, é preciso apresentar aos alunos o teorema fundamental da aritmética, e explicá-lo no quadro. Além disso, deve ser mostrado como decompor números compostos em fatores primos, explicando o passo a posso da decomposição.

Após as explicações, o professor deve listar alguns números compostos e pedir que os alunos decomponham tais números em fatores primos.

Considerações:

O professor deve reforçar aos alunos que cada número composto possui uma fatoração única em números primos, e também deve salientar a importância dessa fatoração para o estudo de conteúdos subsequentes.

No capítulo 2 do presente trabalho, o aplicador da sequência didática pode encontrar informações sobre o teorema fundamental da aritmética, que pode ajudá-lo na preparação da atividade.

É importante, ainda, que o aplicador da SD tenha o cuidado de adequar ao nível da turma os números compostos que irá indicar para a fatoração.

Atividade 6

Tema: Números primos e criptografia

Tempo estimado: 1 aula

Material necessário: Folha de ofício em branco e laboratório de informática com internet

Objetivos:

- Explorar a aplicação dos números primos em criptografia e segurança
- Fomentar a curiosidade a respeito dos números primos

Orientações:

O professor deve iniciar apresentando a relação entre os números primos, a criptografia e os sistemas de segurança.

Após apresentar as informações, a turma deve ser dividida de modo a formar grupos de 2 ou 3 alunos. Em seguida, pedir que realizem uma breve pesquisa sobre como os números primos são usados na criptografia, e que cada grupo apresente suas descobertas para o resto da turma.

Considerações:

O professor aplicador da sequência didática poderá encontrar informações sobre números primos e criptografia no capítulo 6 do presente trabalho. Além disso, caso ache necessário, deve efetuar pesquisas em outras fontes sobre o tema para ter o controle da atividade.

É interessante que sejam apresentados textos impressos sobre o tema tratado, para que possam ser entregues aos alunos ao final da atividade, assim, cada aluno poderá fazer a comparação com os que foram produzidos por eles.

O professor deve manter o assunto em um nível mais superficial, enfatizando apenas a aplicabilidade dos números primos e a sua importância na criptografia e segurança digital.

Conclusão da sequência

Após a realização das atividades, é importante que seja feita uma análise a respeito do que foi compreendido pelos alunos. Dessa forma, o professor deve promover uma reflexão sobre o que foi estudado e aprendido nas 6 atividades da sequência didática. Ainda, deve reafirmar a importância do conhecimento dos números primos bem como sua utilidade nas áreas da matemática e até mesmo da vida cotidiana.

É interessante que ao final da sequência o professor revise os conceitos abordados e encoraje os alunos a pesquisarem e praticarem mais exercícios envolvendo números primos e suas propriedades.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino da matemática, por mais experiente que seja o educador, é uma prática desafiadora, pois cada aluno é um mundo desconhecido, que assimila conhecimentos de diferentes formas e ritmos. Dessa forma, é papel do professor buscar meios e ferramentas que possam facilitar e acelerar a aquisição de conhecimentos por parte dos alunos, deixando o processo educacional o mais eficiente possível.

Tendo isso em vista, a presente pesquisa teve como principal objetivo explorar a importância dos números primos e propor, por meio de uma sequência didática, uma maneira de aproximar os conhecimentos relacionados a este tema dos estudantes, uma vez que durante o processo de aplicação da sequência os alunos são induzidos a se aprofundarem no tema de forma mais dinâmica e ativa.

De início, buscamos apresentar um contexto histórico, dando ênfase às pesquisas relacionadas ao surgimento dos números primos, como também o tratamento desse grupo de números por Euclides na sua obra “Os Elementos” no qual apresentamos dois importantes teoremas e suas demonstrações. Tal abordagem tem como objetivo instigar a curiosidade e reafirmar que, mesmo sendo um conhecimento antigo, os números primos continuam despertando interesse e sendo objeto principal de pesquisas atuais.

No desenvolvimento da pesquisa, realizamos uma extensa análise sobre os números primos, considerando pontos importantes nos quais os mesmos estão inseridos de forma direta ou indireta. É interessante ressaltar que todo o corpo do trabalho foi produzido e pensado para que, além de destacar a importância e abrangência da temática “números primos”, servisse de apoio à sequência didática proposta.

Além de toda a fundamentação teórica, foi apresentada como ponto central do trabalho uma proposta de sequência didática voltada ao ensino de números primos para turmas de Ensino Fundamental, considerando as especificidades desse estágio do ensino. Buscamos estruturar a SD de forma a promover um conhecimento não apenas técnico e engessado, mas critico, fundamentado e reflexivo.

Com a pesquisa, é possível concluir que o estudo concreto e aprofundado dos números primos na Educação Básica, sendo este organizado, planejado e contextualizado, pode contribuir significativamente para o desenvolvimento cognitivo matemático dos alunos, como também estimular o interesse para a investigação matemática. Acreditamos que a sequência didática proposta pode contribuir fortemente no enriquecimento da pratica docente.

Por fim, recomendamos que novas pesquisas sejam realizadas com enfoque na aplicação prática da SD apresentada no presente trabalho, a fim de analisar sua eficácia em contextos reais de sala de aula. Com a aplicação e continuidade do presente trabalho, será possível validar e aprimorar a sequência didática, incluindo novas abordagens, métodos, estratégias e meios educacionais, ampliando ainda mais as possibilidades de ensino dos números primos.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 191 p. ISBN 978-85-85818-95-1.

AGRAWAL, M.; KAYAL, N.; SAXENA, N. PRIMES is in P. **Annals of mathematics**, v. 160, p. 781-793, setembro, 2004. Disponível em: https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v160-n2-p12.pdf. Acesso em 05 de setembro de 2024.

ARAÚJO, Denise Lino de. **O que é (e como faz) sequência didática?**. Entrepalavras, Fortaleza, v. 3, n. 1, p. 322 – 334, jan./jul. 2013. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/23796/1/2013_art_dlaraujo.pdf. Acesso em: 26 de abril de 2025.

ASSIS, Deleir Inacio de. **Os números primos como instrumento de estímulo à curiosidade dos estudantes**. Orientador: Vinicius Carvalho Rispoli. 2019. 56 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4903&id2=170271591. Acesso em: 25 de maio de 2025.

BITENCOURT, Carolina da Silva. **A Conjectura de Goldbach e a intuição matemática**. Orientador: Joseph Nee Anyah Yartey. 2018. 41 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Salvador, 2018. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3914&id2=150131131. Acesso em: 27 de maio de 2025.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2. ed. rev. São Paulo: Edgard Blucher ltda., 1996. ISBN 978-85-212-0023-9.

CAMPOS, Waldilainy de. **UM CRITÉRIO DE PRIMALIDADE BASEADO NO TEOREMA DE WILSON**. Orientador: Jorge Andrés Julca Avila. 2015. 12 f. Trabalho de conclusão de curso (tcc) (Mestrado) - Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, São João del-Rei, 2015. Disponível em: https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC/2013/TCC%20Waldilainy%20Versao%20Finalizada.pdf. Acesso em: 28 de janeiro de 2025.

CARVALHO, Euvaldo de Souza. **Sequência Didática**: uma proposta para o ensino do conceito de fração. Orientador: Idemar Vizolli. 2017. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias, Arraias, TO, 2017. Disponível em: https://repositorio.uft.edu.br/bitstream/11612/885/1/Euvaldo%20de%20Souza%20Carvalho%20-%20Disserta%c3%a7%c3%a3o.pdf. Acesso em: 26 de abril de 2025.

CNN Brasil. Número primo de 41 milhões de dígitos é descoberto por matemático. CNN Brasil, Tecnologia, 30 nov. 2024. Disponível em:

https://www.cnnbrasil.com.br/tecnologia/numero-primo-de-41-milhoes-de-digitos-e-descoberto-por-matematico/. Acesso em: 04 de junho de 2025.

COUTINHO, S. C. **Primalidade em Tempo Polinomial**: uma introdução ao algoritmo AKS. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: https://dcc.ufrj.br/~collier/Books/AKS1.pdf. Acesso em: 06 de agosto de 2024.

DERBYSHIRE, John. **Obsessão prima**. Rio de Janeiro: Record, 2012. ISBN 978-85-01-07976-3.

DEVLIN, K. **Os problemas do Milênio**. 1. Ed. Lisboa: Gradiva, 2008.

DIAS, Ricardo Alexandre da Rocha. **Um critério de primalidade baseado no teorema de wilson**: algumas evidências computacionais da infinitude dos números primos de fibonacci e generalizações destes. Orientador: Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal. 2008. 157 f. Trabalho de conclusão de curso (tcc) (Graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal - RN, 2008. Disponível em: https://www.dimap.ufrn.br/~bedregal/Tese-alunos/Monografia%20Ricardo.pdf. Acesso em: 04 de fevereiro de 2025.

FILHO, D. C. M. **A conjectura de Goldbach e mais uma tentativa de demonstrá-la**. In: Programa de Educação Tutorial. Centro de Ciências e Tecnologia/UFCG – 2013. Disponível em: https://www.mat.ufcg.edu.br/pet/arquivos/Conjectura_de_Goldbath.pdf. Acesso em: 30 de maio de 2025.

FILHO, Daniel Cordeiro de Morais. Enrolando os primos dos primos de nossos primos. **Revista do professor de matemática**, [s.l.], n. 98, p. 28-32, 2019.

GASPARETI, Leandro. **O Santo Graal da matemática**: a hipótese de Riemann. 2014. 50 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2014. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/1015/1/CT_PROFMAT_M_Gaspareti%2c%20Leandro_2014.pdf. Acesso em: 08 de junho de 2025.

GRACIÁN, Enrique. Os Números Primos: Um longo caminho para o infinito. **National Geographic**, Edição Especial. Portugal: RBA Coleccionables, 2017.

GUERRA, Avaetê de Lunetta e Rodrigues. METODOLOGIAS E CLASSIFICAÇÃO DAS PESQUISAS CIENTÍFICAS. **RECIMAR21 – Revista Científica Multidisciplinar – ISSN 2675-6218,** *[S. l.],* v. 5, n. 8, 2024. Disponível em: https://recima21.com.br/recima21/article/view/5584/3830. Acesso em: 26 de setembro de 2025.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. ISBN 978-85-8337-181-6.

LIMA, Donizete Franco. A importância da sequência didática como metodologia no ensino da disciplina de física moderna no ensino médio**. Revista triângulo**, Uberaba

– MG, v. 11, n. 1, p. 151 – 162, jan./abr. 2018. Disponível em: https://seer.uftm.edu.br/revistaeletronica/index.php/revistatriangulo/article/view/2664/pdf. Acesso em: 25 de abril de 2025.

LIMA, Fernando Éder Andrade de *et al*. Números primos e algumas curiosidades históricas: da proposição infinita de euclides ao crivo de erastóstenes. **Revista História da Matemática para Professores**, Natal (RN), ano 2024, v. 10, n. 1, p. 1-11, 2024. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/121/104. Acesso em: 05 de junho de 2025.

MARANHÃO, T. P. A. Avaliação de impacto da Olímpiada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP – 2005/2009). In: MARANHÃO, T. P. A. **Avaliação do impacto da Olímpiada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas – OBMEP 2010.** Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011. Disponível em: https://www.cgee.org.br/documents/10195/734063/miolo_OBMEP_9549.pdf/215cdbee-e621-4e97-84d3-a51ec5ca52d5?version=1.8. Acesso em: 20 de junho de 2025.

MORIMOTO, Ricardo Minoru. **Números Primos**: Propriedades, Aplicações e Avanços. Orientador: Carina Alves. 2014. 63 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2014. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/c5d17cc8-a21c-4a70-a095-45fc80f69bf0/content. Acesso em: 14 de janeiro de 2025.

NEGRÃO, Sávio Ribeiro Gomes. **Teoria dos Números**: Uma Análise Sobre Problemas em Aberto. Orientador: Prof. Me. Diego Coutinho Vieira Santiago. 2023. 65 f. Trabalho de conclusão de curso (tcc) (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Valença- BA, 2023. Disponível em: https://portal.ifba.edu.br/valenca/cursos/superior/comat/documentos/tcc/TCCSvio.pdf. Acesso em: 25 de maio de 2025.

OLIMPÍADA Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br/. Acesso em: 20 de junho de 2025.

OLIVEIRA, Maria Marly de**. Sequência Didática Interativa no Processo de Formação de Professores**. Cidade: Vozes, 2013.

PEDROZA, Paulo José Alves. **Distribuição de Números Primos, Padrões Gráficos e a Espiral de Ulam**. Orientador: Gabriel Araujo Guedes. 2020. 102 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5736&id2=171053354. Acesso em: 03 de junho de 2025.

PEQUENO, Vitória Danielle Candido. **Sophie Germain, suas contribuições e o efeito Matilda:** uma personagem feminina na história da matemática. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2022, Foz do Iguaçu. *Anais [...]*. Foz do Iguaçu: SBEM-PR, 2022. Disponível em:

https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxvi/anais/521121.pdf. Acesso em: 31 de janeiro de 2025.

PEREIRA, Andressa de Lima. **Números primos e a conjectura de Goldbach**. Orientador: Mauricio Firmino Silva Lima. 2017. 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3444&id2=94141. Acesso em: 27 de maio de 2025.

PERUZZO, Jucimar. **O fascínio dos números primos**. Irani (SC): Jucimar Peruzzo, 2012. 109 p. ISBN 978-85-913398-2-2.

PONTES, Fabiany Lais Gomes de; GOBBI, Cristiano Rodrigo; SOUSA, Enne Karol Venancio de. As contribuições de Édouard Lucas para a teoria dos números. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [*S. l.*], ano 2018, v. 05, n. 14, p. 243-252, 2018. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/231/186. Acesso em: 04 de junho de 2025.

RIBENBOIM, Paulo. **Números primos**: velhos mistérios, novos recordes. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. 317 p. ISBN 978-65-89124-03-0.

SANTOS, Elisafã Braga dos. **Sobre a equação funcional da função zeta de Riemann**. Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes. 2015. 83 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Fortaleza, 2015. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/67437/3/2015_dis_ebsantos.pdf. Acesso em: 08 de junho de 2025.

SAUTOY, Marcus du. **A música dos números primos**: a história de um problema não resolvido na matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar editor ltda, 2007. ISBN 978-85-378-0037-9.

SILVA, Maria Aparecida Roseane Ramos. **Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) e suas obras em teoria dos números**. Orientador: Prof. Dr. John Andrew Fossa. 2010. 256 f. Tese (Doutorado em educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Sociais Aplicadas., Natal, RN, 2010. Disponível em: https://www.crephimat.com.br/docs/T/T-HEpM/2010%20-%20D%20-%20Maria%20Aparecida%20Roseane%20Ramos%20Silva.pdf. Acesso em: 25 de maio de 2025.

VIEIRA, Márcia Oliveira. **O teorema dos números primos**. Orientador: Evilson da Silva Vieira. 2023. 99 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2023. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/18016/2/MARCIA_OLIVEIRA_VIEIRA.pdf. Acesso em: 22 de maio de 2025.

WARSI, Karl. **O livro da matemática**. Tradução de Maria da Anunciação Rodrigues. 1. ed. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020. 352 p. Tradução de: The Maths Book. ISBN 9786555670233.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – TABELA DE NÚMEROS NATURAIS ATÉ 100

Atividade 2 – Identificando números primos até 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

APÊNDICE B – TABELA DE NÚMEROS NATURAIS ATÉ 200.

Atividade 3 – Identificando números primos até 200.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	197	199	200