UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Felipe Teixeira Vieira

Teorias das Situações Didáticas Aplicadas às Olimpíadas de Matemática:
Contribuições da Engenharia Didática para o Ensino da Análise Combinatória no Contexto da OBMEP

MOSSORÓ – RN
2025

Felipe Teixeira Vieira

Teorias das Situações Didáticas Aplicadas às Olimpíadas de Matemática:
Contribuições da Engenharia Didática para o Ensino da Análise Combinatória no Contexto da OBMEP

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fabrício de Figueredo Oliveira.

MOSSORÓ – RN

2025

V657t Vieira, Felipe Teixeira.
Teorias das Situações Didáticas aplicadas às Olimpíadas de Matemática: contribuições da Engenharia Didática para o ensino da Análise Combinatória no contexto da OBMEP / Felipe Teixeira Vieira. - 2025.
106 f. : il.

Orientador: Fabrício de Figueredo Oliveira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2025.

1. Análise combinatória. 2. Engenharia didática. 3. Obmep. 4. Situações didáticas. I. Oliveira, Fabrício de Figueredo , orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

Felipe Teixeira Vieira

Teorias das Situações Didáticas Aplicadas às Olimpíadas de Matemática:
Contribuições da Engenharia Didática para o Ensino da Análise Combinatória no Contexto da OBMEP

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Defendida em: 14 / 11 / 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabrício de Figueredo Oliveira (UFERSA)
Presidente

Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues (UFERSA)
Membro Examinador

Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves (IFCE)
Membro Examinador

Dedico este trabalho à minha esposa e aos meus filhos, que muito me apoiaram e me incentivaram a realizá-lo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sua infinita graça, misericórdia e bondade, que me sustentaram em cada fase desta caminhada acadêmica. Sem a sabedoria, a força e a orientação do Senhor, este trabalho não teria sido possível.

Agradeço à minha querida esposa, Tamyres, aos meus amados filhos, Isaac e Noah, pelo amor, incentivo e paciência ao longo dessa jornada. Estendo também minha gratidão à minha mãe, Helena, aos meus irmãos e, de modo especial, ao meu sogro, Erivaldo, pela disponibilidade e generosidade em nos conduzir até a instituição nos momentos de maior cansaço.

Agradeço à coordenação e aos professores que compõem o Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT/UFERSA, pela qualidade no ensino e organização, que nos proporcionaram a oportunidade de aperfeiçoamento e o enriquecimento de nossos conhecimentos matemáticos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Fabrício de Figueredo Oliveira, pela paciência e pelos esclarecimentos, bem como pelos caminhos apontados para que este trabalho se concretizasse, mesmo diante das minhas dificuldades.

Agradeço sinceramente à Banca Examinadora pela valiosa contribuição na avaliação deste trabalho. Suas observações, sugestões e indagações foram imprescindíveis para o melhoramento deste trabalho, bem como para meu crescimento acadêmico e profissional.

Agradeço aos meus colegas de turma pelo companheirismo ao longo de nossa jornada de aulas e pesquisas. De modo especial, expresso minha gratidão aos amigos Jeovano e Djalma pela valiosa companhia e conversas nos trajetos entre Fortaleza e Mossoró.

"Na matemática, a arte de propor uma questão deve ser considerada de valor superior à arte de resolvê-la".

Georg Cantor

RESUMO

A Análise Combinatória é um dos conteúdos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático na Educação Básica, bem como na resolução de problemas que envolvem o processo de contagem, conforme a BNCC (2018). No contexto da OBMEP, essa temática assume um papel importante pelo fato de exigir do estudante não só o domínio de técnicas para resolver problemas combinatórios, mas também a competência de articular e aplicar conceitos matemáticos de forma flexível e inovadora. O objetivo do presente estudo é elaborar Situações Didáticas Olímpicas (SDO) voltadas para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio, considerando o contexto da OBMEP e suas especificidades, de modo a potencializar a aprendizagem matemática. O percurso metodológico adota a abordagem qualitativa e está estruturado sob a égide da Engenharia Didática, especificamente as suas duas etapas iniciais, a saber: análises preliminares e análise a priori, embora as quatro fases da metodologia estejam descritas no trabalho, por se adequar melhor ao contexto de ensino da Matemática. Os resultados da pesquisam demonstram o potencial da Engenharia Didática, associada à Teoria das Situações Didáticas, como uma abordagem didática efetiva para o ensino da Análise Combinatória por meio de problemas olímpicos oriundos da OBMEP. A proposta privilegia a participação do aluno na construção do seu conhecimento matemático efetivamente e significativamente. Como resultado desse processo, foi elaborado um Produto Educacional que organiza e estrutura Situações didáticas Olímpicas com base em problemas olímpicos da OBMEP, proporcionando um ambiente de aprendizagem para o estudante que seja desafiador e significativo, pois tal abordagem possibilita desenvolver o pensamento combinatório, oferecendo algo mais concreto, contextualizado à realidade do aluno e significativo, que leva em conta a sua participação ativa na construção do saber matemático.

Palavras-chave: Análise Combinatória**;** Engenharia Didática; OBMEP; Situações Didáticas.

ABSTRACT

Combinatorics is a fundamental topic for the development of mathematical thinking in Basic Education, as well as for solving problems that involve the counting process, in accordance with the BNCC (2018). In the context of OBMEP, this topic plays an important role because it requires students not only to master techniques for solving combinatorial problems, but also to have the competence to articulate and apply mathematical concepts in a flexible and innovative way. The objective of the present study is to develop Olympic Didactic Situations (ODS) aimed at teaching Combinatorics in High School, considering the context of OBMEP and its specificities, in order to enhance mathematical learning. The methodological path adopts a qualitative approach and is structured under the aegis of Didactic Engineering, specifically its two initial stages, namely: preliminary analyses and a priori analysis, although the four phases of the methodology are described in the work, as it is better suited to the context of teaching Mathematics. The research results demonstrate the potential of Didactic Engineering, associated with the Theory of Didactic Situations, as an effective didactic approach for teaching Combinatorics through Olympic problems from OBMEP. The proposal favors the student's participation in the construction of their mathematical knowledge effectively and significantly. As a result of this process, an Educational Product was created that organizes and structures Olympic Didactic Situations based on Olympic problems from OBMEP, providing a challenging and meaningful learning environment for the student, as this approach makes it possible to develop combinatorial thinking, offering something more concrete, contextualized to the student's reality and meaningful, that takes into account their active participation in the construction of mathematical knowledge.

Keywords: Combinatorial Analysis; Didactic Engineering; OBMEP; Didactic Situations.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PO	Problema Olímpico
SDO	Situações Didáticas Olímpicas
TSD	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é relevante em várias áreas e fases da vida humana, seja no aprimoramento de competências cognitivas, seja na superação de desafios e demandas educacionais atuais (BNCC, 2018). O ensino bem como a aprendizagem matemática tem sido temática de debates intensos na área da Educação Matemática no cenário brasileiro. Docentes e instituições estão em busca de novos métodos para ensinar e aprender matemática de forma significativa, onde o estudante possa participar ativamente na construção do seu saber.

Embora haja no meio educacional, discussões recorrentes e ações pedagógicas com vista à melhoria do ensino e aprendizagem de matemática, a realidade do ensino dessa disciplina está longe de alcançar o ideal desejado. O desinteresse dos alunos pelos estudos dos conteúdos próprios à disciplina, o baixo rendimento nas avaliações, bem como a relação desses estudantes com a Matemática, marcada pelas dificuldades e reprovações, tem gerado um sentimento de pessimismo e frustração, resultando em indicadores educacionais críticos que demandam atenção e ações estratégicas para reversão.

No contexto das Olimpíadas de Matemática vários desafios são apresentados tanto para alunos quanto para professores. Os alunos enfrentam dificuldades relacionadas à falta de uma sólida base matemática, lacunas no aprendizado de conteúdos basilares da disciplina, comprometendo o avanço na compreensão de problemas mais sofisticados, bem como entraves na leitura atenta e interpretação crítica, exigidas nas questões olímpicas. Já os professores enfrentam o desafio da falta de recursos didáticos adequados em que os conteúdos olímpicos matemáticos estejam alinhados a currículo escolar.

As Olimpíadas de Matemática são competições nacionais ou internacionais que propiciam participantes de níveis variados, o contato com a resolução de problemas matemáticos criativos e complicados, com vistas o pensamento crítico e lógico. Dentre as competições matemáticas nacionais está a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas – OBMEP. Ela se propõe a instigar o estudo da Matemática por meio da resolução de situações-problema instigantes que aguçam a criatividade do aluno, contribuindo para que estudantes de diversas realidades do país tenham acesso a recursos didáticos de qualidade e difusão do saber matemático significativo no contexto escolar.

Dentre as diversas temáticas tratadas nas provas da OBMEP, a Análise Combinatória se apresenta como um dos tópicos bastante explorados por conta de sua aplicabilidade em resolução de problemas matemáticos, bem como sua relação com o raciocínio lógico. A análise Combinatória é uma área da matemática que lida com o princípio fundamental da contagem, as técnicas de permutações, arranjos e combinações. Na OBMEP, os problemas olímpicos sobre a temática aparecem de forma diversificada, exigindo do aluno criatividade, apreensão teórica e estratégias de resolução de problemas matemáticos eficiente.

Além disso, a Análise Combinatória quando comparada a outros assuntos da Matemática escolar, possui um grau de dificuldade moderadamente desafiador para alunos e professores, embora se correlacione com conceitos bastante simples, como por exemplo, a contagem. É um assunto abordado nos três níveis da OBMEP, a saber: o nível 1, compreendendo 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, o nível 2, abrangendo 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, e o nível 3, abarcando os três anos do Ensino Médio.

A Análise Combinatória, comumente, é um componente curricular do Ensino Médio apresentado no 2º ano dessa etapa da educação básica brasileira. É um dos tópicos considerados mais desafiadores para os alunos, e isso se deve, em boa parte, ao tipo de enfoque, muitas vezes tradicional, que prioriza uma abordagem mecânica e sem ligação com a realidade do estudante, gerando dificuldades e desafios a serem superados (Bastos, 2013).

No contexto das Olimpíadas de Matemática, a realidade de dificuldades e entraves não difere muito do âmbito da educação básica, especialmente, do Ensino Médio. Os estudantes que participam de Olimpíadas, especificamente, a OBMEP, enfrentam problemas desafiadores e bem mais complexos dos que aqueles abordados tradicionalmente no âmbito de sala aula, além de exigir estratégias resolutivas e raciocínio lógico refinado que vai além do simples memorizar fórmulas e reprodução de questões modelos (Lima M., 2019).

A discrepância entre o ensino de determinado conteúdo, que no caso desta pesquisa é a Análise Combinatória, com seus problemas de contagem, no contexto de sala de aula, que requer do aluno mera repetição e memorização de fórmulas, para abordagem do mesmo conteúdo em um âmbito olímpico de matemática, faz-se necessário a busca por metodologias de ensino que incentivem a ação investigativa, criativa, além do pensamento lógico ágil.

Nesse sentido, partindo da temática em apreço e diante do exposto, a presente pesquisa pergunta: Como a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e Engenharia Didática podem contribuir para a construção de sequências de ensino que favoreçam a aprendizagem da Análise Combinatória a partir de problemas olímpicos no contexto da OBMEP?

Para tal questionamento, foi eleito como hipótese que a integração entre a Teoria das Situações Didáticas e a Engenharia Didática pode auxiliar na superação das dificuldades típicas dos alunos em Análise Combinatória, viabilizando um ensino de matemática progressivo que oportunize aos estudantes a autonomia na resolução de problemas olímpicos, além da construção de estratégias próprias e exploração de conceitos combinatórios de forma mais dinâmica e interativa.

O objetivo geral do presente estudo é elaborar Situações Didáticas Olímpicas (SDO) voltadas para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio, considerando o contexto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP e suas especificidades, com vistas a potencializar a aprendizagem. Especificamente, objetiva-se ainda:

- Apresentar a Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau;
- Salientar os aspectos históricos e as peculiaridades da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP;
- Descrever Situações Didáticas Olímpicas (SDO) para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio;
- Propor um Produto Educacional (PE) com Situações Didáticas Olímpicas (SDO) envolvendo três problemas de Análise Combinatória extraídas das edições da OBMEP do período de 2005 a 2024.

Nesta pesquisa, o percurso metodológico empregado será fundamentado na Engenharia Didática de Primeira Geração ou Clássica, metodologia de investigação científica que se estrutura em quatro fases: análise preliminar, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori. Entretanto, para fins deste estudo, serão adotadas apenas as duas primeiras etapas.

A primeira etapa permitirá uma investigação a respeito das dificuldades e entraves dos estudantes em Análise combinatória, além da fundamentação teórica imprescindível para a construção das situações didáticas. Na segunda fase, tem-se a elaboração de uma sequência didática baseada na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, com vistas a antecipar as possíveis estratégias e dificuldades que os alunos possam encontrar.

A Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986) será utilizada como metodologia de ensino com suas quatro fases, a saber: Ação, Formulação, Validação e Institucionalização. Essa teoria foi desenvolvida por um pesquisador em matemática francês, com o intento de “[...] modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos” (Almouloud, 2007, p.31). Ela mostra a maneira como determinado conteúdo pode ser ministrado ao aluno, construindo para isso o conceito de situação didática.

O Produto Educacional (PE) é constituído de Situações Didáticas Olímpica, entendidas como as interações de forma implícita ou explicita entre o estudante e o ambiente que está inserido, abrangendo todos os fatores que podem influenciar a construção do conhecimento matemático. Nessas situações, o papel do professor é minimamente interventivo, permitindo que o aluno se aproprie de um saber especifico (Lima, M., 2019).

Dessa forma, o presente trabalho de pesquisa está organizado com uma seção introdutória que contextualiza o tema abordado, define os objetivos da pesquisa e justifica sua relevância. Seguem-se três capítulos e uma seção para considerações finais. No primeiro capítulo são apresentadas as metodologias de pesquisa e de ensino que serão utilizadas nesse estudo, a saber, a Engenharia de Didática e a Teoria das Situações Didáticas, respectivamente.

O segundo capítulo refere-se a um breve histórico da OBMEP no âmbito brasileiro, mostrando sua origem e relevância. Nesse contexto, é dada uma atenção especial à Análise Combinatória, uma área frequentemente abordada nas provas da OBMEP, bem como de relevância no currículo de matemática do Ensino Médio brasileiro. Além da contribuição da OBMEP no que diz respeito a proposta de problemas matemáticos que estimulam tanto alunos quanto professores a explorarem essa área da matemática.

O terceiro capítulo é dedicado à apresentação do Produto Educacional (PE) elaborado tomando como referência as reflexões teóricas realizadas nos capítulos anteriores. Tal produto consiste de três situações didáticas olímpicas (SDO), elaboradas a partir de problemas oriundos das provas da OBMEP e estruturadas com base na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, com o intuito de promover uma aprendizagem significativa na Análise Combinatória no contexto de Ensino Médio.

Por fim, dedica-se a última parte desta pesquisa às considerações finais, nas quais se sintetizam os principais resultados alcançados, enfatizando o processo de construção das situações didática olímpicas sobre Análise Combinatória a partir dos problemas encontrados nas edições de provas da OBMEP, a relevância da pesquisa para o contexto de ensino e aprendizagem da matemática, das pesquisas futuras e da utilização da Engenharia Didática Clássica como metodologia de investigação científica e a Teoria das Situações Didáticas como metodologia de ensino da matemática.

2 A ENGENHARIA DIDÁTICA E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

O presente capítulo versa sobre a contextualização da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas como respostas às demandas contemporâneas no campo educacional, com ênfase no ensino de Matemática. Segundo Artigue (1995), a Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa oferece ferramentas para a concepção, experimentação e análise de situações de ensino, destacando-se por sua capacidade de adaptação às diversas realidades educacionais. Já a Teoria das Situações Didáticas (TSD), baseada nos estudos de Guy Brousseau (1986), explora as interações entre professor, aluno e conteúdo, enfatizando o papel ativo do aluno na construção do conhecimento matemático significativo.

A compreensão da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas (TSD) é crucial para o aprimoramento dos processos de ensino e aprendizagem, contribuindo para a resolução de problemas didáticos no contexto atual. Assim, neste capítulo, serão detalhados o conceito e a definição de Engenharia Didática, seguidos das suas etapas constitutivas: Análises Prévias, Análise a Priori, Experimentação, Análise a Posteriori e Validação. Por fim, será apresentada a Teoria das Situações Didáticas, com foco no processo de ensino e aprendizagem da matemática de forma significativa e duradoura.

2.1 Explorando o Conceito de Engenharia Didática

No início da década de 1980, a Engenharia Didática (ED) emerge no contexto da Didática da Matemática como uma metodologia contemporânea, voltada para a análise e aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem em matemática (Artigue, 1995). Tal proposta foi inicialmente apresentada por Michèle Artigue, que aponta que essa abordagem caracteriza-se pela adaptação de conceitos naturais da engenharia ao campo educacional, com o objetivo de sistematizar a prática pedagógica a partir de uma perspectiva científica. Essa sistematização visa à validação de teorias pedagógicas por meio de experimentação em contextos reais de sala de aula, promovendo o desenvolvimento e análise das práticas educativas e melhoramento do processo ensino e aprendizagem.

De acordo com Almouloud e Silva (2012), o conceito de Engenharia Didática clássica ou de primeira geração:

> [...] emergiu na didática matemática no início dos anos 1980. Primeiramente em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1989, por Michèle Artigue. Ela foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica (Almouloud; Silva, 2012, p. 26).

A Engenharia Didática, nesse sentido, toma como referência o trabalho de um engenheiro, que não se limita a um sólido conhecimento científico, mas o enfrentamento de problemas práticos para os quais não há uma teoria científica precedente. Assim como o engenheiro, o professor, na perspectiva da Engenharia Didática, precisa "[...] planejar todas as etapas da pesquisa e estar munido de conhecimentos teóricos necessários, mas também deve estar preparado para possíveis ajustes que devam ocorrer na aplicação" (Lima, 2019, p. 31).

O professor, nessa perspectiva, possui o papel de um engenheiro, da qual se faz necessário um planejamento para cada situação didático-pedagógica proposta ao aluno, em que este possa assimilar determinados conteúdos do saber matemático significativamente. A execução de uma aula pelo professor com o aporte metodológico da Engenharia Didática tem o caráter investigativo e iterativo, permitindo um processo reflexivo e de compreensão mais denso tanto da aprendizagem quanto das dificuldades dos discentes, propiciando a formulação de estratégias eficazes no que diz respeito ao ensino da matemática.

A Engenharia Didática clássica ou de 1º geração, enquanto abordagem metodológica de pesquisa, busca elaborar "[...] dispositivos de ensino comunicáveis e reprodutíveis. [...], já que se desenvolvem nela situações de sala de aula nas quais o pesquisador é levado a descrever e analisar os resultados de sua aplicação" (Almouloud; Silva, 2012, p. 46). Assim, a ED faz surgir fenômenos pedagógicos com a finalidade de estudá-los, com vistas ao avanço nos resultados da pesquisa, ressaltando a ação didática em sala de aula como investigação.

Além disso, Pommer (2013) no que diz respeito à Engenharia Didática na qualidade de metodologia de pesquisa:

> [...] se enquadra na perspectiva da pesquisa qualitativa, que inicialmente teve como finalidade estudar problemas relativos à aprendizagem de conhecimentos específicos da Matemática: diagnóstico de concepções, dificuldades e obstáculos, compreender os níveis de desenvolvimento das estratégias dos alunos, a aprendizagem, introdução e construção de conhecimentos específicos, a formação de professores, explicitar a relação entre temas da matemática e outras áreas de conhecimento, dentre outras (Pommer, 2013, p. 21).

Nessa perspectiva, a garantia de compreensão dos conteúdos matemáticos pelo aluno tem como base a elaboração de um planejamento adequado e adaptado a cada situação pelo professor que atua na qualidade de engenheiro. Da mesma forma que um engenheiro precisa projetar e construir estruturas conforme as demandas inerentes à função, o professor deve planejar procedimentos metodológicos que se ajustam aos contextos de aprendizagem.

Ainda, sobre a relevância da Engenharia Didática, Vieira, Alves e Catarino (2023) afirmam que:

> A Engenharia Didática Clássica-EDC (1ª geração) estuda e analisa o comportamento do discente, tendo um interesse maior na modelização das atividades dos alunos, em seu progresso de aprendizagem e nos elementos clássicos assegurados no triângulo didático (aluno--professor-conhecimento) (Vieira; Alves; Catarino, 2023, p. 24-25).

Nesse sentido, ao focalizar o efeito de modelizar as atividades do estudante, a Engenharia Didática está lidando com uma abordagem voltada e estruturada para o ensino. Ao focar no compromisso com os elementos basilares do triângulo didático, assegura uma fundamentação consistente no processo educacional. Entretanto, essa forma de abordagem não leva em consideração outros elementos que impactam a aprendizagem, tais como os fatores sociais, contextuais, socioculturais e a dinamicidade das interações e construção do conhecimento eficazmente e dialógicas.

Ainda, o professor na abordagem da Engenharia Didática deve "[...] criar um planejamento, de acordo com cada situação, para que os alunos consigam compreender determinados conteúdos matemáticos" (Vieira; Alves; Catarino, 2023, p. 24). O docente de matemática, assim como um engenheiro, é aquele responsável por criar, testar, ajustar, bem como reformular estratégias de ensino que proporcionem a melhor compreensão de determinados conteúdos matemáticos à semelhança de um experimento científico.

Nessa perspectiva, o professor é alguém que "[...] deve estar ciente, de que precisa instigar o aprendiz a contribuir e que não se limite, mas que ouse em aprender a cada vez mais" (Oliveira, 2016, p. 32). Ter ciência de que o ambiente de sala aula deve ser um local que proporcione não só a construção do conhecimento matemático significativo, mas também o estabelecimento da relação do aluno com o saber matemático.

Vale salientar que, a Engenharia Didática tem uma função dúplice, a saber: como procedimento metodológico de pesquisa qualitativa e como produção para o ensino, ou seja, ela é um instrumento valioso tanto para quem pesquisa em educação matemática, como para professores que procuram aperfeiçoar a sua prática pedagógica. A Engenharia Didática no contexto de sala de aula possibilita acompanhar uma "[...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma constante, por um professor-engenheiro, para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos" (Douady, 1993, p.2).

No que diz respeito à estruturação da Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa, Alves e Dias (2018) apontam duas abordagens distintas:

> Engenharia Didática clássica ou de 1ª geração (ED1), compreendida como uma metodologia que visa o estudo dos fenômenos didáticos, que possam permitir os fenômenos em sala de aula, bem como, uma perspectiva de ED, visando o desenvolvimento de recursos de formação que, segundo a tradição, tem recebido a denominação de Engenharia Didática de 2ª geração (ED2) (Alves; Dias, 2018, p. 197).

A Engenharia Didática, nesse sentido, é uma metodologia de investigação que propicia a interação e integração da teoria com prática, realizada por meio de observações no contexto de sala aula, além de caracteriza-se pela comparação entre a análise preliminar e a análise posteriori (Almouloud, 2007). Essas análises possibilitam a investigação do processo tanto do ensino quanto da aprendizagem, especialmente, o matemático.

Assim sendo, o presente trabalho versa sobre a primeira abordagem, ou seja, a Engenharia Didática clássica, constituída de suas quatro etapas de investigação, tais como a análise preliminar, a análise a priori, a experimentação e a análise a posteriori e validação. Tida como "[...] processo empírico, A Engenharia Didática tem como objetivo conceber, realizar, observar e analisar as situações didáticas" (Lima, F., 2019, p. 36).

2.2 Etapas da Engenharia Didática: Passos Essencias para uma Aprendizagem Eficaz

A Engenharia Didática, na qualidade de metodologia de pesquisa, é desenvolvida em diferentes etapas integradas uma à outra, propiciando não só a análise, mas também a compreensão do processo de ensino e aprendizagem na educação matemática. Tal metodologia, segundo Artigue (1996), é constituída de quatro fases, designadas de análises preliminares, análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação.

2.2.1 Análises Preliminares

Essa primeira fase da metodologia constitui-se o ponto inicial para o estabelecimento das condições propicias ao processo de ensino e aprendizagem matemática de uma forma mais significativa. É a etapa que "[...] realiza as análises preliminares das concepções dos estudantes, dificuldade e barreiras que afetam as concepções" (Maia, 2023, p. 78-79). É a etapa da Engenharia Didática, em que o problema em questão é analisado, além de serem consideradas as possíveis soluções.

Essa fase é subdivida em três dimensões, a saber, a dimensão epistemológica, a dimensão cognitiva e a dimensão didática (Artigue, 1995). O propósito dessa fase está na busca pela identificação de “[...] problemas de ensino e aprendizagem do objeto em estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questão(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa” (Almouloud, 2007, p. 172).

Nas análises preliminares, considera-se o que já se conhece sobre determinada temática, ou seja, faz-se necessário uma reflexão a respeito do referencial teórico que a fundamenta, bem como os conhecimentos já consolidados sobre o tema. Tal reflexão requer uma análise epistemológica do ensino em vigência, bem como as suas implicações sobre o processo de aprendizagem. Além disso, devem-se levar em conta os limites e restrições do contexto educacional, pois tais fatores determinam em grande medida a sua exequibilidade e eficiência na aplicabilidade (Almouloud; Silva, 2012).

Nessa etapa do percurso investigativo, busca-se a compreensão, de uma forma geral, do processo histórico e de construção do saber a ser explorado. É a etapa da metodologia que serve para realizar a análise “[...] dos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos que se pretende trabalhar e dos efeitos provocados por ele, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos” (Lima, F., 2019, p. 37).

Almouloud (2007) destaca que a etapa de análises preliminares contempla as seguintes vertentes:

> [...] estudar a gênese histórica do saber em estudo e suas manifestações antigas ou contemporâneas, suas funcionalidades na Matemática e os obstáculos epistemológicos relativos ao conceito; analisar a estrutura matemática do conceito investigado; analisar o ensino usual e seus efeitos; evidenciar os saberes (matemáticos) e os conhecimentos (matemáticos e/ou culturais ou pessoais) relacionados com o saber visado; analisar as condições e fatores de que depende a construção didática efetiva das situações de ensino; considerar os objetivos específicos da pesquisa; [...] Fazer uma análise das propostas curriculares e dos PCNs; Analisar livros didáticos. [...] Levantar referências bibliográficas sobre fatores que interferem no processo de ensino e de aprendizagem do objeto em questão (artigos, livros, revistas, dissertações, teses etc.) (Almouloud, 20078, p. 172-173).

Na presente pesquisa, nesse sentido, foram feitas análises em dissertações no repositório de dissertações do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática – ENCIMA, no repositório de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT e no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior – CAPES, levando em consideração somente produções acadêmicas do período de 2014 até o ano de 2023, cruzando as palavras e expressões: Situações Didáticas, Engenharia Didática e Analise Combinatória.

No repositório do ENCIMA foram identificadas no período supracitado dez dissertações, em que todas fazem uso da Engenharia Didática como metodologia de Pesquisa e a Teoria das Situações Didáticas com metodologia de ensino. Dentre as dissertações identificadas, apena seis delas abordam as Situações Didáticas Olímpicas (SDO), especialmente, os problemas oriundos da OBMEP. Nenhuma das dissertações aborda as Situações Didáticas Olímpicas com o tema da Análise Combinatória; pelo contrário, as funções e a geometria plana são os principais temas abordados nesses trabalhos.

No repositório das dissertações do PROFMAT foram encontrados dezenove registros de trabalhos que utilizam a Engenharia Didática como aporte metodológico no período de 2014 a 2024. Desses trabalhos de pesquisa identificados, somente seis abordam a Teoria das Situações Didáticas. Ainda, foi verificado que nenhum desses dezenove trabalhos trata das Situações Didáticas Olímpicas (SDO) com a temática de Análise Combinatória associada ao contexto da OBMEP ou oferecem alguma metodologia de ensino nessa perspectiva.

No repositório da CAPES foi realizada a pesquisa e identificadas as mesmas dez dissertações encontradas no repositório do ENCIMA cruzando as expressões: Situações Didáticas, Engenharia Didática e Analise Combinatória. Sobre a temática da Análise Combinatória, bem como seu uso pedagógico em sala de aula foram identificados 726 trabalhos no período de 2011 a 2023. Nenhuma dessas pesquisas aborda as Situações Didáticas Olímpicas (SDO) com ênfase ensino da Análise Combinatória a partir dos problemas matemáticos oriundos das edições da OBMEP.

A BNCC (2018) integra a Análise Combinatória no currículo como um instrumento de relevância no desenvolvimento do pensamento matemático. É uma parte da matemática presente tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, com ênfase em sua aplicação prática, favorecendo ao aluno “[...] um domínio mais coeso das habilidades relacionadas ao desenvolvimento do pensamento combinatório, podendo, por consequência, propiciar um aprofundamento em técnicas mais elaboradas de contagem” (Anselmo; Barone, 2024, p. 4).

Na BNCC (2018), na área de matemática e suas tecnologias, exige-se que o aluno desenvolva determinadas competências e habilidades específicas, para que construa seu conhecimento de forma significativa, oportunizando possibilidades para que o estudante não só resolva problemas, mas também os elabore. Ainda, que o conhecimento matemático “[...] é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais" (Brasil, 2018, p. 265).

A Matemática, bem como as demais disciplinas que constituem o currículo escolar brasileiro, exerce um papel fundamental na formação integral do aluno. A BNCC (2018), nesse sentido, organiza e estrutura de maneira organizada as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelo estudante em cada etapa da educação básica. "Essas habilidades possibilitam acompanhar o desenvolvimento do aluno e foram catalogadas por um código alfanumérico, que facilita sua localização no documento" (Costa, 2021, p.30).

A BNCC (2018) em sua estrutura, especialmente, na área de Matemática e Suas Tecnologias direcionadas ao Ensino Médio, lista duas habilidades relacionadas à Análise Combinatória, a saber:

> **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
> **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade (BRASIL, 2018, p. 537).

O código de cada habilidade inicia com a designação da etapa da educação básica, ou seja, Ensino Médio (EM), já o número 13 indica que a habilidade descrita pode ser desenvolvida em qualquer uma séries do Ensino Médio, obedecendo às definições do currículo escolar proposto. Nesse sentido, a primeira habilidade mencionada, ou seja, a EM13MAT310 desenvolve no aluno a capacidade de contar em diferentes contextos, propiciando, dessa forma, o raciocínio lógico refinado e a competência na resolução de problemas matemáticos.

Já a habilidade EM13MAT311, mencionada anteriormente, indica que o domínio das técnicas e estratégias de contagem é imprescindível para a determinação tanto do espaço amostral quanto dos eventos, o que é crucial para que se possam resolver problemas que envolva cálculos de probabilidades. Por essa razão, é comum que os estudos de Análise Combinatória antecedam o ensino de probabilidade (Costa, 2021).

A presença da Análise Combinatória no currículo de matemática do Ensino Médio tem uma enorme relevância para a formação integral do aluno, pois "[...] proporciona uma experiência inovadora, capaz de conduzir o aluno ao processo de descoberta e, ao prazer em fazer matemática" (Costa, 2021, p. 33). O assunto de Análise Combinatória, nesse sentido, não pode ser reduzido somente à aplicação de técnicas gerais que propiciam a resolução de determinados problemas que envolvem o processo de contagem (Morgado, 1991).

Ainda, sobre o ensino de Análise Combinatória, Morgado (1991) salienta que:

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução (Morgado, 1991, p. 2).

Nesse sentido, o professor e o livro didático por ele utilizado precisam promover um ambiente de aprendizado que vá além da mera exposição de técnicas e fórmulas para se resolver problemas de combinatória. O professor, nesse contexto, atua como um mediador, conduzindo o aluno na exploração de possibilidades criativas de resolução de problemas, e o Material didático no oferecimento de situações desafiadoras e contextualizadas que promovam a autonomia intelectual do estudante.

Entretanto, a respeito do tema de combinatória, Morgado (1991, p. 2) salienta que "[...] se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória" não passa de um amontoado de fórmulas complexas e técnicas avançadas para se resolver problemas complicados de contagem que nada tem haver com a realidade do aluno.

Quando associada à Engenharia Didática e à Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, a Análise Combinatória tem sua relevância ampliada, porque essas metodologias propiciam um contexto de aprendizagem mais dinâmico, significativo e investigativo, tendo o aluno como peça central. Dessa forma, a integração entre a Análise Combinatória e essas teorias didáticas favorece para a formação de alunos mais independentes e críticos, aptos a lidar com diferentes desafios que se apresentam com perspicácia e lógica.

Em síntese, após a análise dos documentos discutidos neste capítulo, conclui-se que a Análise Combinatória deve ser integrada de forma significativa ao currículo escolar. É uma área da matemática extremamente relevante não somente por suas aplicações no cotidiano, mas também por propiciar o raciocínio lógico, o estimulo ao aspecto crítico e favorecer na tomada de decisões diante de determinadas situações-problema. "É preciso despertar a capacidade criativa nos alunos, para resolver as situações e promover a construção do conhecimento" (Costa, 2021, p. 101).

2.2.2 Análise a Priori

A análise a *priori* se caracteriza como a etapa em que serão realizadas as escolhas conscientes das variáveis didáticas, que podem ser microdidáticas, relacionadas à organização das situações específicas no contexto de sala de aula, ou macrodidáticas, que diz respeito à estrutura a nível global de ensino (Artigue, 1995). Tais variáveis trabalhadas pelo professor permitem o controle do comportamento do aluno no ambiente de sala de aula (Maia, 2023).

É a etapa da metodologia de pesquisa responsável em dar uma resposta às questões obtidas nas análises preliminares, bem como validar as hipóteses que foram levantadas (Lima, M., 2019). O aprendizado de determinado assunto de matemática é o objetivo das situações-problema propostas pelo professor, gerando desequilíbrios cognitivos no aluno e incentivando-o a reorganizar seus conhecimentos, construir novos saberes e, assim, aprender matemática de uma forma significativa. É o momento em que o professor "[...] deve prever o que vai ocorrer e descrever todos os passos a serem realizados" (Lima, M., 2019, p. 35).

Almouloud e Silva (2012) salientam que nessa fase da metodologia deve ser levando em conta os seguintes pontos relevantes:

> - Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação adidática desenvolvida;
> - Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação.
> - Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem (Almouloud; Silva, 2012, p. 27).

Além disso, a fase de análise a *priori* tem um caráter tanto descritivo quanto preditivo, pois antecipa e descreve os elementos essenciais do processo de ensino e aprendizagem, fundamentando teoricamente a sequência didática a ser elaborada e aplicada (Pommer, 2013). Ela descreve o conteúdo matemático envolvido, os saberes prévios esperados, a forma como o aluno vai interagir com a tarefa a ele proposta, os desafios e estratégias que podem surgir no contato com as sequências didáticas.

É o momento que o professor oferece ao aluno situações de ensino e boas sugestões sobre o assunto a ser abordado, no intuito de que ele aperfeiçoe sua forma de agir autônoma. Isso porque a aprendizagem ideal acontece quando o aluno é desafiado a pensar por si só e tomas decisões de forma independente. "O professor é nesse caso o agente mediador que tem importante papel, o de motivar e auxiliar seu aluno nos seus processos de desenvolvimento e aprendizagem” (Oliveira Neto, 2019, p.26).

Ademais, o professor é responsável por elaborar situações-problemas que estejam sob a sua supervisão cuja finalidade seja gerar desequilíbrio, para que cheguem a uma acomodação quanto ao conhecimento. É elaborar uma situação que seja controlável, para que possam ser verificadas as pretensões e dificuldades apresentadas pelo aluno. Assim, nessa etapa, é realizado “[...] o planejamento da aula, como ela irá ocorrer, descrevendo todos os seus passos” (Oliveira, 2016, p. 33).

Além do mais, as atividades elaboradas nessa fase devem utilizar como ponto de partida o conhecimento prévio do aluno, permitindo que ele desenvolva as competências e habilidades necessárias para a construção de novos saberes de uma forma mais significativa, que estimule a reflexão crítica e construtiva. O aluno, nessa perspectiva metodológica, deve “[...] agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos” (Almouloud, 2007, p. 174).

É a partir dessa fase que, com base no fenômeno didático, é delineado as expectativas bem como o planejamento de condutas almejadas do aluno. A situação didática construída e aplicada ao aluno deve ser uma tarefa de cunho experimental que possa desafiá-lo fazendo com que tenha um confronto com obstáculos conceituais e cognitivos. É o momento de verificar as possibilidades de ação do estudante e como ele respondeu a situação proposta.

Segundo Almouloud (2007), a análise a priori possibilita o controle das atividades realizadas, bem como a identificação e o entendimento dos elementos observados no momento da aplicação da situação didática, levando em conta a análise matemática e uma análise didática. Também, possibilita verificar a pertinência das atividades propostas em relação aos objetivos da aprendizagem, articulando aspectos matemáticos aos didáticos.

Nessa etapa da metodologia de pesquisa, elaboraram-se as situações didáticas para o ensino da Análise Combinatória a partir de alguns problemas de nível 3 da OBMEP, seguindo os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e o descritor D32 da matriz de referência de Matemática da 3º série do Ensino Médio do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará – SPAECE, descritas e pormenorizadas no capítulo quatro do presente trabalho.

Apresentar-se-ão, a seguir, as demais etapas da Engenharia Didática, ainda que estas não sejam utilizadas na presente pesquisa. Ressalta-se, todavia, que tais fases poderão constituir objeto de estudos em pesquisas futuras.

2.2.3 Experimentação

A fase de experimentação não será realizada, pois a análise de resultados não faz parte da finalidade da pesquisa. Nesse sentido, a aplicação de questionários ou entrevistas para a sondagem de conhecimentos prévios não será aplicado. Para Almouloud (2007, p. 177), a experimentação "é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica um retorno à análise *a priori*, um processo de complementação".

É a fase responsável por desenvolver a aplicação da Engenharia Didática a partir de um grupo de alunos com o intuito de averiguar as ponderações obtidas na análise a *priori*. É nessa etapa que deve ser estabelecido uma: "Apresentação dos objetivos e condições de realização da pesquisa didática aos discentes; Estabelecimento de um contrato didático; Aplicação da sequência didática definida anteriormente; Registros das observações feitas durante a realização da sequência" (Oliveira, 2016, p. 33-34).

Por outro lado, é a etapa que possibilita a correção pelo professor de algum problema que ocorra na aplicação da situação didática. É o momento também que propicia a coleta de informações para que sejam analisadas na fase posterior. Vale ressaltar também que nessa fase, "[...] assim como em todas as outras, pode ocorrer de retomar as etapas anteriores, a fim de reconsiderar uma escolha e corrigir um procedimento" (Castro, 2023, p. 28).

Silva (1999) elenca alguns pontos importantes da etapa de experimentação para o êxito da realização da engenharia com o aluno, a saber:

> - A explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
> - O estabelecimento do contrato didático;
> - a aplicação dos instrumentos de pesquisa;
> - o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc) (Silva, 1999, p. 206).

Em síntese, é na etapa de experimentação que se formaliza o contrato didático, são verificadas as hipóteses formuladas na fase de análise a priori e são feitos os registros referentes à experimentação (Maia, 2023). É realizada a aplicação, propriamente dita, da sequência didática, buscando registrar por meio de observações, registro escrito, vídeos, áudios, entre outras estratégias, as ações efetuadas pelos alunos.

2.2.4 Análise a Posteriori e Validação

Na quarta e última etapa da Engenharia Didática é realizada a análise dos resultados que foram auferidos na fase de experimentação. Tal etapa metodológica tem por objetivo “[...] relacionar as observações com objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados (Almouloud, 2007, p. 177). As informações colhidas na fase *a priori* são confrontadas com os da análise a posteriori para que aquilo que foi constado possa ser rejeitado ou validado.

É a fase da metodologia aplicada após a fase de experimentação, tendo como base os dados coletados nas etapas anteriores para que possam ser aferidos e validados. A análise *a posteriori* constitui no “[...] conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo” (Almouloud, 2007, p. 177).

Nessa parte da pesquisa, o pesquisador tem contato com os instrumentos técnicos ou teóricos que foram utilizados para se obter as informações nas fases anteriores. É a etapa em que o estudante se depara com a situação didática elaborada e passa a interagir com ela. Além disso, é em tal fase que se aplica a metodologia de ensino Teoria das Situações Didáticas de Brousseau à Situação Didática Olímpica.

Almouloud e Coutinho (2008) salientam que é nessa etapa da Engenharia Didática que:

> [...] é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação. (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008, p. 6-7)

Dessa forma, a citação anterior descreve o processo dinâmico de ação, observação, reflexão e ajuste. Diz respeito à avaliação do dispositivo construído logo após que ele é colocado em prática, isto é, após a experimentação. É na validação que se tem o objetivo precípuo da análise a posteriori, pois se confirma se o que foi construído atende, de fato, aos requisitos e expectativas, além de se verificar se é capaz de atender ao objetivo pretendido.

Em suma, a análise a posteriori e validação é o estágio da Engenharia Didática crucial, pois é nela que é dado sentido a toda informação coletada e resultados alcançados. É o momento em que a teoria encontra a prática, em que se realiza uma confrontação entre os resultados obtidos e a análise a priori. Esse confronto possibilita avaliar a consistência das hipóteses formuladas no início, propiciando a interpretação dos resultados de forma crítica e validar, ou não, as contribuições do objeto de estudo.

Para Artigue (1995, p. 48), essa última fase consiste na análise "[...] com base nos dados coletados ao longo do experimento, ou seja, observações das sequências de ensino, bem como das produções dos alunos em sala de aula ou fora dela". Além disso, é também o momento em que as análises a priori e a posteriori são colocadas em confrontação para que possa validar ou não as hipóteses formuladas na etapa inicial da engenharia didática.

2.3 Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau: Um novo olhar sobre o Ensino da Matemática

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau nesta pesquisa é utilizada como metodologia de ensino e na elaboração das situações didáticas que constituem o produto educacional. Tal teoria tem como concepção central a criação de conexão entre o aluno e o conhecimento por meio de estratégias significativas de ensino. O professor, por meio das situações didáticas, assume o papel de mediador, fazendo uso de distintos recursos para relacionar o abstrato e o concreto, em um processo interativo que propicie um espaço favorável à construção do saber (Santos; Alves, 2017).

A teoria de Brousseau tem como finalidade "[...] criar um modelo da interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (ou meio) no qual a aprendizagem deve se desenrolar" (Almouloud, 2007, p.31). O conhecimento, nessa perspectiva, é construído a partir da interação dinâmica entre os três elementos citados acima no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, as situações didáticas propiciam ao professor, a função de um mediador, que por meio de ferramentas adequadas relacionam o abstrato e o concreto, favorecendo um meio (*milei)* para uma pessoa desenvolver o conhecimento (Maia, 2023).

A Teoria das Situações Didáticas, diferente de outras teorias pedagógicas, possibilita a contemplação em seu bojo da especificidade do saber matemático, pois propicia o processo de aprendizagem matemática no âmbito de sala aula abrangendo os seus elementos cruciais, a saber: o professor, o estudante e o conhecimento matemático. Além disso, o "significado do saber matemático escolar para o aluno é fortemente influenciado pela forma didática com que o conteúdo lhe é apresentado" (Machado, 1999, p. 66).

Dessa forma, a teoria das Situações Didáticas preconiza que o aluno esteja em um processo de busca por respostas de um determinado problema até que toda essa ação gere conhecimento. É fundamental ao professor, nessa perspectiva, que contextualize os problemas de matemática a serem propostos aos alunos, alinhando-os à sua realidade, proporcionando, assim, uma facilitação no procedimento de resolução. Nesse sentido, um ambiente ou contexto sem intencionalidade torna-se inábil de proporcionar ao aluno a aquisição de todos os conhecimentos esperados (Oliveira, 2016).

De acordo com Almouloud (2007), A Teoria das Situações Didáticas tem como finalidade precípua:

> [...] caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa. O objetivo central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre o professor, aluno e Saber (Almouloud, 2007, p. 31-32).

Assim, conforme a Teoria das Situações Didáticas, a aprendizagem do aluno deve ser acompanhada em todas as etapas do processo de busca por solução de um determinado problema proposto pelo professor, instigando-o a utilizar estratégias e recursos lógicos em todo o percurso para a obtenção da solução do problema indicado, propiciando, assim, uma relação relevante entre professor, aluno, meio e o conhecimento.

Brousseau (1982 apud Lima, 2019, p. 36) salienta que uma situação didática, objeto central na Teoria das Situações Didáticas, é definida como:

> [...] é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um certo meio (compreendendo eventualmente instrumentos e objetos) e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição.

A função do professor na elaboração das situações didáticas é crucial, porque ele é o responsável por propiciar um ambiente de aprendizagem significativa, em que o aluno faça uso de seus conhecimentos prévios. Nesse sentido, o professor “[...] não intervém diretamente para que o aluno adquira o conhecimento esperado: o aprendiz adapta-se a um ‘meio’, que é o fator de desequilíbrios” (Araújo, 2010, p. 21).

No âmbito da Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau (1986), a situação didática constitui-se como elemento basilar do processo de ensino-aprendizagem. Essa teoria destaca três elementos imprescindíveis que possuem uma inter-relação constante, a saber, o professor, o aluno e o saber. Além disso, as “[...] interações professor e alunos são mediadas pelo saber das situações de ensino” (Oliveira, 2016, p. 35).

Essa metodologia de ensino, com foco voltado na matemática, deve propor problemas que estejam dentro de situações didáticas que "[...] possam ser reproduzidas, ou seja, um ambiente em que o aluno se identifique e com isso consiga compreender de um modo mais pessoal" (Maia, 2023, p. 74). O professor deve propiciar ao aluno problemas matemático que estejam alinhados à sua realidade, possibilitando que o estudante esteja envolvido no processo de busca de resposta, e, que nesse processo aconteça a construção de conhecimento.

Além disso, uma situação relevante na Teoria da Situação Didática consiste na situação adidática, que segundo Almouloud (2007, p. 33), compreende uma "[...] situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar".

Machado (1999) ressalta que a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Brousseau (1986), representa:

> [...] uma referência para o processo de aprendizagem matemática em sala de aula envolvendo professor, aluno e conhecimento matemático. Todo esse procedimento didático visa principalmente realizar uma educação matemática mais significativa para o aluno. Esse significado consiste basicamente em proporcionar ao aluno um conhecimento que esteja realmente vinculado ao processo de sua promoção existencial. Este princípio básico que deve conduzir toda a análise didática. A busca desse significado leva-nos então à reflexão sobre a forma com que podemos conceber e apresentar ao aluno o conteúdo matemática escolar. É sobretudo na especificidade do saber matemático que reside o centro desse desafio (Machado, 1999, p. 65-66).

O aluno, nesse sentido, enfrenta situações de aprendizagens propiciadas pelo professor que foram intencionalmente elaboradas em um ambiente apropriado, com o objetivo de promover um cenário fecundo para a ação ativa do aluno. São situações pensadas e elaboradas com o intuito de incentivar a participação ativa e autônoma do estudante na busca de conhecimento, além de uma aprendizagem significativa de determinados conteúdos a ele propostos em sala de aula e vinculados à sua realidade existencial.

De acordo com Almouloud (2007), a Teoria das Situações Didáticas observa e decompõe o processo de aprendizagem de determinado saber "[...] em quatro fases diferentes, nas quais tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o saber. Nessas fases interligadas, podem-se observar tempos dominantes de ação, de formulação, de validação e de institucionalização" (Almouloud, 2007, p. 36). As três primeiras fases constituem em situações adidática, em que os alunos interagem entre si e o meio, enquanto o papel do professor é de um mediador nessas fases.

Para Brousseau (2008), a ordem no processo pelas sucessões de situações de ação, formulação, validação e institucionalização constitui a forma que se dá a construção do conhecimento matemático, pois essa ordem “[...] costuma ser observada na origem histórica das noções, em que uma sucessão de formas *protomatemáticas* e *paramatemáticas* que precedem as formas matemáticas propriamente ditas” (Brousseau, 2008, p. 33).

Assim, no contexto da Teoria das Situações Didáticas, propostas por Brousseau (1986), o processo de ensino e aprendizagem matemática é concebido por uma interação estruturada entre três principais elementos elencados por ele, a saber: o aluno, o meio, o saber, mediado de forma intencional pela figura do professor. Além disso, tal teoria organiza-se em fases que descrevem o percurso cognitivo do aluno na construção do saber matemático.

A seguir, serão apresentadas e analisadas as quatro fases que compõem esse processo, a saber: a situação de ação, a situação de formulação, a situação de validação, e a situação de institucionalização. Cada uma dessas fases exerce um papel especifico e relevante no desenvolvimento da aprendizagem, “[...] nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o saber” (Almouloud, 2007, p. 36).

2.3.1 Situação de Ação

Esta etapa é necessária ao aluno para que haja a identificação tanto do conhecimento quanto dos conteúdos que ele possui para a solução do problema proposto pelo professor. É o momento que o aluno tem para iniciar “[...] a busca pela resposta do problema, usando de simulações, suposições, análise e interação com o meio” (Maia, 2023, p. 75). É nesse momento que o estudante tem a oportunidade de desenvolver técnicas e estratégias próprias para encontrar a solução do problema proposto a ele pelo professor.

Ainda, sobre a situação de ação e o que se espera do aluno nessa fase da Teoria das Situações Didáticas, Castro (2023) ressalta que:

> [...] espera-se que os estudantes busquem adaptar-se ao meio didático, também chamado de *milleu*, ao qual foi exposto. Nessa fase, o estudante é estimulado à tomada de decisões, análise e verificação de resultados. Contudo, essas ações ocorrem de forma interna, ou seja, não há verbalização por parte do estudante e nem mesmo uma formalização matemática (Castro, 2023, p. 30).

A situação de ação requer mais do que apenas a simples manipulação de objetos ou do seguimento de instruções detalhadas, ela demanda a participação efetiva e a tomada de decisões por parte do estudante. “Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu*. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar outro" (Almouloud, 2007, p. 37).

É a fase que o estudante aprende agindo e tem a possibilidade de aprimorar ou abandonar uma abordagem inicial, com o intuito de elaborar um novo. Esse processo tem a característica de conduzir o aluno a uma aprendizagem, mas baseada na adaptação ao meio. As soluções efetivas da situação são propiciadas pelo uso de estratégias e tentativas de sistematização do problema matemático proposto ao aluno (Amorim, 2023).

Nesse sentido, quando o aluno está envolvido no processo de resolução de um problema, é natural que ele reflita sobre o que está fazendo e experimenta diferentes estratégias para se resolver, escolhendo, assim, um caminho mais adequado à situação. O estudante vai interagir com o ambiente, além de tomar decisões significativas para organizar a melhor forma de se alcançar a solução do problema proposto (Teixeira; Passos, 2013).

Ainda, sobre a etapa da situação de ação, Almouloud (2007) destaca que:

> Ela consiste em colocar o aprendiz numa situação, chamada de situação de ação, tal que: coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar; o aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação (Almouloud, 2007, p. 37).

Nesta fase, o aluno é estimulado pelo professor a procurar uma solução razoável para o problema matemático a ele proposto, com base unicamente nos seus conhecimentos prévios. O estudante é colocado diante uma situação em que ele precisa interagir com o meio (milleu), tomar decisões e testar estratégias sem o auxilio do professor, fazendo com que ocorra a aprendizagem dele pela própria ação.

A situação de ação, portanto, proporciona uma aprendizagem matemática significativa e efetiva, porque respeita o processo cognitivo do aluno, além de favorecer a sua autonomia intelectual (Almouloud, 2007). O aluno, nesse sentido, tem a oportunidade favorecida pela fase de ação de repensar o que construiu, melhorando o modelo utilizado ou rejeitando por completo para criar um novo modelo, uma nova tomada de decisão. Essa forma de movimento do estudante faz com que a situação acarrete uma aprendizagem por adaptação.

2.3.2 Situação de Formulação

Nesta fase, os alunos compartilham informações entre si, além de interagir de forma efetiva com o meio. Não há a necessidade de uma formalização matemática do assunto abordado, pois o estudante tem a liberdade para pensar e discutir até conseguir um modelo matemático que solucione o problema proposto. É o momento em que o aluno tem a oportunidade de compartilhar suas estratégias empregadas na solução do problema e as ferramentas utilizadas para que os demais colegas compreendam a linha de raciocínio.

Além disso, Pommer (2013) salienta que na fase de Formulação o aluno não somente compartilha um modelo para a solução do problema, mas é o momento que:

> [...] se instala intensa troca de informação entre o aluno e o ‘milieu’, ocorrendo tentativas de utilização de uma linguagem mais adequada para comunicação entre alunos, porém sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal. Nesta situação poderá ocorrer certa ambigüidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retro-ações contínuas. Deste modo, nas situações de formulação, os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a as informações que devem comunicar (Pommer, 2013, p. 18).

Ademais, a etapa de formulação proposta pela Teoria das Situações Didática, diz respeito ao “[...] momento em que o aluno ou grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que utilizou e a solução encontrada” (Almouloud, 2007, p. 38). É a ocasião que o estudante tem a oportunidade de compartilhar informações, comunicar com outros colegas sobre estratégias adotadas para a solução do problema.

Trata-se da etapa que tem por finalidade principal a troca de informações e que versa em “[...] proporcionar ao aluno condições para que este construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos, que considere os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática” (Almouloud, 2007, p. 38). O estudante nesta fase consegue elaborar hipóteses sobre a situação a ele proposta, além de conseguir compartilhar essas novas ideias com os demais participantes, embora não compreenda por completo as razões por trás de suas escolhas (Oliveira, 2019).

2.3.3 Situação de Validação

É a etapa em que o aluno compartilha com os demais colegas os resultados alcançados por ele, “[...] submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor” (Almouloud, 2007, p. 39). Nesta fase, os estudantes devem estar aptos para a utilização de uma linguagem matemática mais formal, além de recursos de demonstrações que possam ser apresentados ao professor, com a finalidade de demonstrar a compreensão do aluno das noções matemáticas, bem como manejo correto das técnicas matemáticas necessárias para a resolução das situações didáticas que foram propostas .

Na etapa de validação, os resultados obtidos, bem como a correção e a consistência de sua solução durante o processo devem ser apresentados pelos estudantes ao professor em uma linguagem matemática bem mais apurada. Nesse momento, torna-se possível a verificação do novo conhecimento que fora construído pelo aluno ao longo do percurso de aprendizagem. “As situações de validação são aquelas em que o aluno já utiliza mecanismos de prova e onde o saber é usado com esta finalidade” (Machado, 1999, p. 80).

Além disso, para Brousseau (2008), na etapa de validação da Teoria das Situações Didáticas:

> [...] o emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Pressupõe-se que possuam as mesmas informações necessárias para lidar com uma questão. Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. [...] Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio (Brousseau, 2008, p. 30)

Vale salientar que as situações de ação, formulação e validação são caracterizadas por Brousseau (2008) como situações adidática, ou seja, “[...] é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para apropriação do novo saber que deseja ensinar” (Almouloud, 2007, p. 33). O aluno, nesse sentido, é responsável por agir sobre o saber matemático, sem levar em consideração as intenções pedagógicas do professor.

Na situação de validação, portanto, o aluno além de comunicar uma determinada informação por ele obtida, precisa demonstrar que o que afirma é verdadeiro dentro de um sistema determinado (Brousseau, 2008). É o momento também que o estudante procura validar as ideias que foram desenvolvidas nas fases de ação e formulação, na qual suas afirmações matemáticas podem ser aceitas ou contestadas pelos outros.

2.3.4 Situação de Institucionalização

É a fase, segundo Almouloud (2007, p. 40), em que o “[...] o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”. É nesse momento da teoria que o conhecimento que vinha sendo construído nas fases anteriores pelo aluno é consolidado e integrado ao seu repertório matemático. Nesse sentido, “[...] a ação do professor deverá depurar com o grupo uma síntese de todos os dados coligidos e aventados nas fases dialéticas anteriores” (Alves, 2016, p. 94).

Esta fase possui um caráter didático, porque o professor volta a ter um papel ativo por meio da sua interação com os demais agentes do processo ensino e aprendizagem, a saber: o aluno, o conhecimento matemático e o meio da qual o aluno esteja inserido. “As situações de institucionalização visam estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento” (Machado, 1999, p. 82).

Vale salientar que depois da situação de institucionalização, realizada pela figura do professor, o conhecimento construído ao longo do percurso das etapas “[...] torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo aos seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para a utilização na resolução de problemas matemáticos” (Almouloud, 2007, p. 40). Tal situação tem por objetivo estabelecer que o saber adquirido seja reconhecido não só com objetividade como também possua validade universal (Machado, 1999).

Almouloud (2007) chama a atenção para o novo conhecimento alcançado na etapa de institucionalização, ou seja:

> Uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe, embora não tenha ainda o estatuto de saber social:
> - se feita muito cedo, a institucionalização interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades para o professor e os alunos;
> - quando feita após o momento adequado, ela reforça interpretações inexata, atrasa a aprendizagem, dificulta as aplicações;
> - é negociada numa dialética (Almouloud, 2007, p. 40).

Assim, a etapa de institucionalização tem uma relevância extremamente importante para a Teoria das Situações Didáticas, pois é nela que o professor deve realizar a conclusão de tudo que foi proporcionado ao aluno e discutido, para que haja um confronto entre os conhecimentos construídos, para que seja institucionalizado, ou seja, passe a “[...] fazer parte do patrimônio matemático da classe, e ser dominado por todos” (Oliveira Neto, 2019, p. 20).

Dessa forma, o Produto Educacional proposto nesta pesquisa deverá propiciar ao estudante o ensejo de experienciar as fases que constituem uma situação adidática, segundo Brousseau (1986), a partir de problemas olímpicos extraídos da Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas e Privados (OBMEP), a saber: a situação de ação, a situação de formulação, a situação de validação e, por fim, a situação de institucionalização.

2.4 Problema Olímpico (PO) e Situação Didática Olímpica (SDO)

O contexto olímpico em suas edições competitivas propõe várias provas contendo problemas de matemática de diversos níveis e grau de complexidade. No caso da OBMEP, uma das olimpíadas de Matemática do país, as situações-problema são o seu ponto crucial, elaboradas para ir além da simples memorização de fórmulas prontas, exigindo dos alunos participantes uma boa dose de raciocínio lógico apurado e criatividade. Nessa perspectiva, um problema olímpico (PO) é algo que demanda do estudante um conhecimento bem mais apurado e consistente no que diz respeito à matemática (Lima, 2019).

Conforme o pesquisador Alves (2021), um problema olímpico pode ser definido como:

> [...] um conjunto de situações problemas de Matemática, abordado em um contexto competitivo ou de maratonas, com a participação apenas (e de modo restritivo) dos estudantes competidores, cuja abordagem e características de ação individual e solitária destes envolve apenas objetivo/escopo de se atingir as metas (medalhas e certificados) definidas a priori em cada competição por intermédio do emprego de estratégias especializadas, raciocínios e argumentos matemáticos eficientes, instrumentalizados previamente por professores de Matemática (Alves, 2021, p. 125).

Nesse sentido, os problemas olímpicos de matemática demandam o desenvolvimento do pensamento lógico-criativo, além de habilidades voltadas para a resolução de problemas não triviais, ou seja, problemas em que a solução não é algo imediato, exigindo tempo e reflexão. Esses problemas são distintos dos que estão presentes em “[...] livros didáticos que exigem mecanização de pensamento, os problemas olímpicos exigem elaboração, experimentação e validação de conjecturas que auxiliam os estudantes na resolução do problema proposto” (Santos; Alves, 2017, p. 280).

Os problemas olímpicos possuem um grande potencial de serem utilizados em sequências didáticas com vistas ao ensino de matemática, pois demandam certa dose de raciocínio dos alunos. Os problemas olímpicos oriundos da OBMEP são cuidadosamente elaborados para que o estudante desenvolva estratégias de resoluções por meio da exploração de diversos caminhos. Nesse sentido, [...] o que justifica a escolha de trabalhar com problemas de olimpíadas é o seu diferencial, isso porque são desafiadores, apresentam propriedades e conceitos que motivam os estudantes a realizarem pesquisas e discussões sobre eles, com autonomia e coletividade (Alves da Silva; Vieira Alves; Menezes, 2020, p. 3).

O conceito de Situação Didática Olímpica (SDO) proposto pelo estudioso e pesquisador Dr. Francisco Regis Vieira Alves, professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE, que integra problemas olímpicos à Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, propiciando um ambiente em que o aluno investiga, elabora e valida estratégias, tornando a resolução matemática mais ativa e significativa.

Com o intuito de fundamentar teoricamente o conceito de Situação Didática Olímpica (SDO), apresenta-se a seguir a definição proposta por Alves (2021):

> *Situação Didática Olímpica (SDO):* um conjunto de relações estabelecidas implícita ou explicitamente, balizado por uma metodologia de ensino (TSD) entre um aluno ou grupo(s) de alunos, um certo meio (compreendo, ainda, o conhecimento matemático abordado por intermédio de problemas de competição e de olimpíadas) e um sistema educativo, com o objetivo de permitir a apropriação, por parte destes alunos, a um conhecimento constituído ou em vias de constituição, oriundo de um ambiente de competição coletiva e debate científico do grupo, a competição solidária e problemas ou conjunto de problemas característicos e abordados nas olimpíadas de Matemática (Alves, 2021, p. 125-126).

Partindo dessa definição, Alves (2021) elabora uma equação característica que resume a sua proposta: SDO = PO + TSD, em que (PO) indica o Problema Olímpico e TSD refere-se à Teoria das Situações didáticas de Brousseau. A SDO não é somente a utilização de problemas olímpicos, mas a articulação desses problemas oriundos de competições olímpicas matemática com os princípios didáticos da TSD de Brousseau. Dessa forma, Alves (2021) propõe um modelo que integra a complexidade dos problemas olímpicos com uma metodologia de ensino que propicia a estruturação e a potencialização da atividade matemática no contexto de sala de aula.

A abordagem com a Situação Didática olímpica (SDO) propicia uma maior abrangência no uso de problemas olímpicos no contexto de sala aula, de modo que favoreça a participação de todos os estudantes, e não somente dos que atuam em competições olímpicas de matemática (Alves da Silva; Vieira Alves; Menezes, 2020). Assim, a SDO é uma aplicação da Teoria das Situações Didáticas (TSD) a um Problema Olímpico (PO), em que o problema é abordado por meio das fases dialéticas da TSD. Esse processo o PO na SDO.

Santiago (2021) salienta que as Situações Didáticas Olímpicas surgem “[...] nos temas olímpicos como uma nova metodologia de ensino alcançada nas fases dialéticas da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau e que estabelece um novo assunto aos Problemas Olímpicos (Santiago, 2021, p. 55). Dessa forma, a presente pesquisa faz uso da SDO como alternativa metodológica importante para o ensino da Análise Combinatória, baseada em problemas olímpicos da OBMEP.

3 A OBMEP E O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO CONTEXTO BRASILEIRO

Este capítulo tem como objetivo apresentar um breve histórico da OBMEP no cenário educacional brasileiro, bem como o papel da Análise Combinatória no contexto escolar e olímpico. Com esse intuito, abordar-se-á a origem, evolução e impacto da OBMEP no contexto educacional brasileiro, a Análise Combinatória nas Olimpíadas de Matemática: conceitos, abordagens e desafios, e, por fim, as contribuições da OBMEP da Análise Combinatória na Educação Básica.

3.1 Origem, Evolução e Impacto da OBMEP no Cenário Educacional Brasileiro

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) foi instituída no ano de 2005 como uma iniciativa de divulgação e fomento ao estudo da matemática nas escolas públicas e privadas brasileiras, bem como revelar novos talentos na área (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2024). É um projeto a nível nacional encabeçado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, em parceria com o Ministério da Educação – MEC e o Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação – MCTI.

De acordo com o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2024), a OBMEP tem como objetivos primordiais:

a) Estimular e promover o estudo da Matemática;
b) Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
c) Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
d) Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
e) Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
f) Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Assim, a OBMEP desde 2005 tem desempenhado um papel relevante no estímulo ao estudo da matemática em todo país, especialmente, com foco nos alunos da rede pública. A iniciativa tem contribuído de forma significativa para aguçar o interesse dos estudantes pela matemática, alargar o conhecimento científico, além de proporcionar oportunidades educacionais de qualidade a muitos desses jovens oriundos da rede pública de ensino.

Ainda, Maranhão (2011) sobre o impacto da OBMEP salienta que:

> [...] atualmente a OBMEP é uma política pública mundialmente reconhecida, uma das maiores iniciativas governamentais voltadas ao processo de ensino-aprendizagem em matemática, visando melhorar a motivação, o interesse e o desempenho dos alunos nas escolas públicas brasileiras (Maranhão, 2011, p. 13).

A OBMEP, nesse sentido, a cada edição vem se consolidando com a participação expressiva de estudantes de todo o país, pois a quantidade de participantes, escolas e municípios que aderem a essa avaliação em larga escala brasileira cresce a cada ano de realização da competição (Cocco, 2013). É uma avaliação em larga escala realizada com alunos do Ensino Fundamental e Médio das escolas a nível municipal, estadual e federal.

As inscrições dos estudantes para a competição são realizadas na página da OBMEP, sendo de inteira responsabilidade da instituição escolar. Os alunos devidamente inscritos são divididos em três níveis, conforme a escolaridade, a saber: Nível 1, dirigido para 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. Nível 2, voltado para 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, e, Nível 3, focado nas três séries do Ensino Médio brasileiro.

As provas da OBMEP são realizadas em duas fases. A primeira fase é constituída de uma prova objetiva realizada pelos alunos inscritos nas próprias instituições de ensino do país e uma prova discursiva para os participantes classificados para a segunda fase, que corresponde a 5% dos inscritos em cada nível. “A Olimpíada oferece algumas premiações a fim de incentivar a participação e a dedicação dos estudantes que chegam à fase final [...], visando à inserção social desses alunos profissionalmente e na elevação de sua formação acadêmica” (Cocco, 2013, p. 19).

Além disso, o site oficial da OBMEP é um recurso riquíssimo e vasto para o aluno que deseja se preparar de forma séria para as provas da olimpíada, bem como para o professor que precisa de fonte confiável e material de qualidade para elaboração de suas atividades. Na aba de Provas e Soluções é possível fazer o download de todas as edições anteriores das provas de 1ª e 2ª fase, organizadas tanto por ano quanto por nível, acompanhadas por gabaritos.

> Vale ressaltar que um dos objetivos da OBMEP é a melhoria da qualidade do ensino, para a qual essa disponibiliza material de apoio, como banco de questões com soluções que ajudam no estudo da disciplina. A olimpíada também oferece alguns programas, dentre os quais o Portal da Matemática, que disponibiliza vídeo aulas e lista de exercícios, com conteúdos de Matemática que abrangem o currículo escolar do 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio, contribuindo com uma quantidade maior de materiais disponíveis para serem usados pelos professores em sala de aula (Bezerra; Sousa; Medeiros, 2020, p. 104).

É importante ressaltar que com o avanço da OBMEP, o número de alunos inscritos tanto de escolas públicas quanto privadas tem aumentado consideravelmente a cada edição. No ano de 2005, a primeira edição da OBMEP no país, o número de inscritos foi de 10.520.831 alunos na 1ª fase e 457.725 na 2ª fase. No ano de 2024, o número de inscrito na 1ª fase foi de 18.498.709. Já a quantidade de inscrição da 2ª fase foi de 899.355.

Os dados fornecidos pela Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP), revelam um crescimento expressivo nas edições ao longo do ano. Esse aumento significativo indica não só o fortalecimento da OBMEP como uma das maiores competições olímpicas de matemática do país, mas também o interesse de alunos e instituições na valorização da matemática, tendo como ganho educacional um progresso positivo na qualidade da educação matemática do país.

Ao olhar para os dados expressivos sobre a participação de alunos na competição, Santiago (2021) salienta que:

> Com o avanço da OBMEP no número de inscritos, principalmente na primeira fase, deveria ser normal entre todos os professores da área fazer uso de uma metodologia de resolução de problemas olímpicos como instrumento que melhore a intuição do aluno para uma capacidade de ensino-aprendizagem da matemática (Santiago, 2021, p. 44).

Dessa forma, o crescimento significativo no número de inscritos na OBMEP deve estimular, no âmbito pedagógico, uma reflexão crítica entre professores da área e demais agentes escolares que resulte na utilização de metodologias que favoreçam a resolução de problemas olímpicos, bem como a construção da intuição matemática, da criatividade e do raciocínio lógico na resolução de situações didáticas desafiadoras.

Um aspecto relevante da OBMEP é apontado por Cocco (2013), que é o fato dessa competição olímpica em matemática:

> [...] conseguir captar a atenção e interesse não só dos alunos mais preparados, mas fundamentalmente estimular e embasar os que apresentam baixo desempenho, para ajudá-los a trilhar um caminho que eles mesmos tentassem construir, fazer inferências, levantar hipóteses e tirar suas conclusões de maneira independente, interagindo com outros colegas e professores (Cocco, 2013, p.19).

Nesse sentido, tem-se uma compreensão pedagógica mais alinhada ao desafio de formar sujeitos que sejam autônomos, críticos e colaborativos, sobretudo, aqueles alunos com baixo desempenho escolar. O foco da competição é fazer com os participantes da olimpíada matemática desloque o foco da mera transmissão de conhecimentos fragmentados para uma formação mais ativa do pensamento, além da construção independente do saber matemático.

Segundo Cocco (2013, p. 76), a OBMEP, para os órgãos educacionais brasileiros à época de sua implementação, representava "[...] um 'grande acontecimento cientifico' valorizando a escola, o município, o estado e o país, construindo um Brasil melhor". E o crescimento da participação dos alunos das escolas públicas e privadas do país, bem como os resultados exitosos, demonstra o quanto à competição tem logrado êxito.

A OBMEP além de ser uma competição olímpica a nível nacional tem se configurado como uma das maiores olimpíadas do mundo em relação à quantidade de participantes inscritos (Lima, 2019). Essa expressividade na participação de alunos de todo o Brasil na competição se dá também pela ampla divulgação da olimpíada a nível nacional, assegurando que estudantes de diferentes conjunturas socioeconômicos tenham acesso ao evento.

Os problemas que compõem as provas da OBMEP tanto de primeira fase quanto de segunda não exigem conhecimentos altamente aprofundados de matemática dos alunos participantes, mas a capacidade deles em interpretar, criar e até improvisar na procura de soluções o mais rápido possível, por causa do quesito tempo. A resolução de questões olímpicas proporciona uma aquisição de um conhecimento matemático bem mais organizado e apurado, fazendo com haja um avanço significativo no processo de ensino e aprendizagem matemática (Fernandes, 2021).

Vale ressaltar que os problemas propostos pela OBMEP em suas edições anuais contribuem, significativamente, para a consolidação da aprendizagem matemática no âmbito escolar, uma vez que "[...] para cada problema abordado é preciso buscar os conhecimentos prévios e desenvolvê-los para tal" (Fernandes, 2021, p. 31). É um momento de se fazer construções, pois as soluções dos problemas da OBMEP envolvem passos que não estão explícitos nos enunciados. Além disso, é uma excelente oportunidade que o aluno tem para ampliar o seu repertório matemático e oferecer estratégias criativas de resolução.

Outro fator preponderante é o empenho das escolas no processo de inscrição de seus estudantes na olimpíada e aplicação das provas de primeira fase na escola em todos os turnos com data predefinida no calendário da OBMEP. Tem-se também "[...] a premiação dos estudantes com medalhas e menções honrosas, as bolsas de estudos em universidades pelo Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC-Jr) em matemática" (Lima, 2019, p. 29). Embora a prova tenha um nível de exigência elevado, as questões das provas cobram conteúdos previstos na BNCC (2018) e correspondentes aos respectivos níveis.

Ainda, sobre a relevância e impacto da OBMEP no país, Cocco (2013) faz uma reflexão bem pontual sobre a OBMEP em relação às provas de larga escala do país:

> A OBMEP é constituída de uma prova única para todo o país. O aluno responde a uma prova objetiva na primeira fase e descritiva na segunda fase, mas em nenhum momento é levado em conta às diferenças regionais, econômicas do aluno ou de currículo, de estrutura de cada escola ou região. Não é uma prova obrigatória. Além do grande número de alunos participantes, há o envolvimento de muitas pessoas como coordenadores de escola, coordenadores regionais, as universidades e instituições de pesquisa e as administrações públicas. É também o governo que financia toda a aplicação e premiação, assim como os melhores do ENEM recebem um incentivo por seu desempenho (Cocco, 2013, p. 84).

Assim, o estimulo gerado pela OBMEP, bem como a valorização em busca de novos talentos em matemática e o incentivo à melhoria do processo pedagógico tem contribuído, ainda que de forma gradual, para um âmbito mais favorável ao ensino da matemática nas escolas públicas brasileiras. Além disso, um ponto negativo apontado por Cocco (2013) é o fato de que a OBMEP é uma competição olímpica “[...] composta de uma prova única para todo o Brasil, não respeitando as diferenças regionais e locais e nem o nível de conhecimento dos educandos dos diferentes estabelecimentos de ensino (Cocco, 2013, p. 132).

Por outro lado, um ponto relevante a ser levado em conta na competição está no fato de que os alunos que passam para a segunda fase da OBMEP se deparam com questões bem elaboradas com o enfoque na resolução de problemas, exigindo deles a interpretação dos enunciados, desenvolvimento da escrita matemática e do raciocínio lógico, pois a prova é dissertativa. O aluno deve demonstrar clareza nas ideias desenvolvidas ao longo da resolução do problema proposto, justificando, assim, suas respostas.

Fernandes (2021) faz uma excelente observação ao ressaltar que, no trabalho com problemas olímpicos, “[...] é importante destacar o cuidado que se deve ter quanto ao tratamento dado ao “erro” com os alunos. Para evitar frustrações e desinteresse na participação em olimpíadas, em particular na OBMEP” (Fernandes, 2021, p. 32-33).

A OBMEP, portanto, tem desenvolvido um papel importantíssimo no que diz respeito à promoção de mudanças no contexto do processo de ensino e aprendizagem da matemática no país. De certa forma, a competição tem estimulado e desafiado alunos e professores por meio de problemas matemáticos contextualizados, a disponibilização de materiais didáticos gratuitos disponíveis no site e plataforma virtual, além de programas direcionados ao preparo de alunos em seus vários de níveis de conhecimento (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2024).

3.2 A Análise Combinatória nas Olimpíadas de Matemática: Conceitos, Abordagens e Desafios

A Análise Combinatória é um dos conteúdos matemáticos abordados no currículo do ensino do Ensino Médio brasileiro, embora os conceitos iniciais de contagem sejam tratados no decorrer do Ensino Fundamental. A BNCC (2018), documento oficial que define as aprendizagens fundamentais e necessárias aos alunos das instituições educacionais brasileiras, destaca em seu texto as competências e habilidades a serem adquiridas pelo estudante sobre diversificados temas da matemática, especialmente, a Análise Combinatória.

Além disso, a Análise Combinatória é um dos temas relativamente complicado em relação a outras temáticas da matemática escolar, embora ela trate de conceitos bem simples, como por exemplo, a contagem. (Anselmo; Baroni, 2024). Sua importância reside no fato de que sua finalidade é usar o processo de contagem sem a necessidade de detalhar todas as circunstâncias separadamente, proporcionando uma vantagem no aspecto do tempo.

No currículo escolar brasileiro é um assunto tratado de forma explicita no Ensino Médio. É também um dos temas exigidos nas provas da OBMEP, sendo um assunto que requer do aluno um nível elevado de raciocínio para a resolução de problemas de contagem. "Mas, como o próprio nome sugere 'Análise Combinatória', neste ramo do conhecimento a chave para o sucesso consiste numa análise cuidadosa da situação, observação do contexto e formulação da resolução através das técnicas estudadas" (Costa, 2021, p.12).

Segundo Morgado (1991), a Análise Combinatória é compreendida por boa parte dos alunos do Ensino Médio como:

> [...] o estudo das combinações, arranjo e permutações. Isso no entanto é uma resposta parcial pois, embora combinações, arranjo e permutações façam parte da Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver um tipo de problemas de Análise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. No entanto, Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas para atacá-los (Morgado, 1991, p. 1).

Nesse sentido, o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória devem exceder a simples memorização de fórmulas e enfatizar a compreensão dos princípios subjacentes. Embora as combinações, arranjos e permutações sejam conceitos iniciais relevantes, eles não exauram todos os recursos e a complexidade da Análise Combinatória. Por isso, para Morgado (1991, p. 1), a Análise Combinatória pode ser definida como "[...] parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas".

Ao dar início ao estudo da Análise Combinatória no âmbito escolar, de forma específica no Ensino Fundamental, faz-se necessário que o professor ofereça atividades que sinalizem que as questões que o aluno está lidando, decorre de problemas de contagens e que não são possíveis de se resolver de forma natural e rápida. É fazer com que o tema voltado para contagem seja atrativo, além de estar conectado à realidade do aluno (Dias; Freitas; Victer, 2017).

Os documentos oficiais brasileiros no âmbito educacional têm consistentemente ressaltado a relevância de se desenvolver nos alunos, desde os anos inicias escolares, a capacidade de resolver problemas. Fernandes (2021) sobre essa questão salienta que:

> A BNCC propõe ainda que desde os anos iniciais sejam abordados durante as resoluções de problemas, diferentes formas de resolução do mesmo problema, questionar sobre o que ocorreria se fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada no enunciado, justificativas para suas respostas e validação do resultado. Além de promover que os alunos criem seus próprios enunciados, formulem novos problemas em diferentes contextos (Fernandes, 2021, p. 29).

Dessa forma, o ensino de algum tema da matemática deve romper com os modelos tradicionais que priorizam procedimentos mecanizados, bem como a memorização e a aplicação de fórmulas na resolução de um determinado problema. O ensino de tópicos matemáticos, em especial o de Análise Combinatória, deve ter em consideração a valorização do raciocínio e a compreensão daquilo que se aprendem muito mais do que a repetição e memorização privilegiados nos modelos tradicionais de ensino da matemática (Costa, 2021).

Vale salientar que quando a matemática é dirigida por um enfoque mais mecanicista e tecnicista, essa forma de ensino tem a tendência de ser limitada à simples aplicação de fórmulas, bem como de mecanismos padronizados. Nesse sentido, o procedimento mecânico sem significado assume um papel importantíssimo, em detrimento da compreensão conceitual efetiva e de uma aprendizagem mais significativa e crítica do aluno.

Em vista disso, D’Ambrósio (1989) ressalta que:

> [...] a típica aula de Matemática, a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus, ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julgar importante. Os alunos acreditam que a aprendizagem se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos, nada podendo gerar e criar, tornando o papel da disciplina passivo e desinteressante. (D'Ambrósio, 1989, p. 15)

Nessa perspectiva, para que haja um rompimento da preferência pela lógica da memorização mecânica de fórmulas e dos algoritmos de contas é preciso adotar uma prática pedagógica que propicie a participação do aluno no processo de construção do seu conhecimento. Para que isso aconteça, faz-se necessário o incentivo por meio de situações que levem o estudante ao processo de investigação, argumentação, além das percepções das correlações existentes entre os conceitos matemáticos.

Nesse sentido, a Análise Combinatória, por vezes, embora tenha problemas fáceis de enunciar, ela tende a exigir "[...] quase que sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema" (Morgado, 1991, p. 2). O aluno pode se deparar muitas das vezes com uma situação-problema que envolve contagem que demanda dele certa criatividade, raciocínio lógico bem desenvolvido e o pensamento crítico.

A Análise Combinatória, ramo da Matemática Discreta, trata dos métodos de contagem, que propicia determinar o número de maneiras possíveis de selecionar ou organizar elementos de um conjunto, sem que haja a necessidade de listá-los explicitamente. "A combinatória, como um tipo de contagem, exige que seja superada a simples ideia de enumeração de elementos de um conjunto para se passar à contagem de grupos de objetos, ou seja, de subconjuntos, tendo como base o raciocínio multiplicativo" (Pessoa, 2009, p. 71).

Sobre os problemas de Análise combinatória, Morgado (1991) salienta que ela frequentemente apresente dois tipos situações, a saber:

> 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.
> 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas (Morgado, 1991, p. 2).

Vale salientar que a Análise Combinatória dispõe de várias técnicas que auxiliam na resolução de diversas categorias de problemas. Entretanto, uma variedade de problemas oriundos da Análise Combinatória requer estratégias e habilidades engenhosas para encontrar soluções rápidas e inteligentes. Embora existam problemas de enunciados simples, cuja solução é direta e facilmente determinada.

Além disso, Morgado (1991) destaca, em relação às técnicas utilizadas na Análise Combinatória, que:

> A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é 'contar', ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem (Morgado, 1991, p. 17).

Nesse sentido, observa-se que a operação de adição, mesmo sem a formalização de suas propriedades basilares, está inerentemente conectada a um problema de contagem. Essa conexão demonstra que, antes mesmo da formalização dos princípios da Análise Combinatória, como o princípio aditivo e o multiplicativo, o aluno já tem condições de recorrer ao raciocínio combinatório de forma intuitiva para resolver questões que envolvem a contagem como estratégia de resolução de problemas.

Além disso, entre os conteúdos abordados inicialmente na Análise combinatória, além do Princípio Aditivo, ressalta-se o Princípio Multiplicativo, que pode ser enunciado da seguinte forma: “Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy” (Morgado, 1991, p. 18). Tal princípio é também denominado de Princípio Fundamental da Contagem.

Na Análise Combinatória, o Princípio Multiplicativo, é um dos conceitos “[...] fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio combinatório” (Pessoa, 2009, p. 99). É uma ferramenta excelente e simples que proporcionar a resolução de problemas de forma lógica e estruturada, sem a necessidade de listar todas as possibilidades de forma manual. Sua aplicação é diversificada em vários contextos, a saber: formação de senha, números, arranjos, combinações de vestuários, organização de eventos, entre outros.

Além do Princípio Multiplicativo, têm-se outras ferramentas basilares da Análise Combinatória que propiciam “[...] determinar o número de elementos de conjuntos formados de acordo com certas regras, sem que seja necessário enumerar seus elementos” (Morgado, 1991, p. 17). No caso, as Permutações Simples, Permutações com Elementos Repetidos, Permutações Circulares, Combinações Simples e Combinações Completas.

Nas olimpíadas de Matemática, a Análise Combinatória tem se destacado como um dos pilares essenciais nas competições de Matemática, como a OBMEP. É uma área da matemática que exerce uma função desafiadora na resolução de problemas que exigem do aluno o raciocínio lógico bem desenvolvido, a criatividade e estratégias exitosas. Além disso, reconhece-se que “[...] a OBMEP desempenha um importante papel no estímulo ao estudo da matemática e no desenvolvimento de habilidades matemáticas entre alguns estudantes (Bezerra, 2024, p. 23).

As olimpíadas de matemática têm exigido assuntos referentes à Análise Combinatória, porque “[...] as atividades de organizar e contar fazem parte do cotidiano desde as antigas civilizações. E, mesmo deixando poucos registros sobre como era feito esse procedimento de contagem, conseguimos compreender o domínio do mesmo, através das aplicações realizadas

(Costa, 2021, p. 16). Além disso, a Análise Combinatória é uma ferramenta fundamental para a resolução de problemas do cotidiano, pois auxilia o aluno a solucionar situações como a formação de senhas, a organização de comissões constituída de pessoas, a disposição de objetos, bem como a construção de tabelas de pontuações ou estruturamento de jogos.

No contexto olímpico, a Análise combinatória se apresenta de maneira desafiadora, pois ela exige do aluno que ele vá além da simples memorização e aplicação de fórmulas. Os problemas propostos são situações que demandam a interpretação de restrições envolvidas, a organização cuidadosa das informações contidas no enunciado, bem como a formulação de estratégias de contagem apuradas.

Américo (2013) salienta que a Análise Combinatória consiste em “[...] um dos temas da OBMEP, e sendo um assunto não muito apreciado por professores e alunos, devido o seu alto nível de raciocínio, que o individuo precisa para resolver problemas” (Américo, 2013, p. 13). Nesse contexto, a dificuldade enfrentada pelos alunos pode não estar necessariamente ligada ao nível de complexidade das questões das provas olímpicas, mas sim à forma como o conteúdo é tradicionalmente ensinado nas instituições de ensino, frequentemente desvinculados de contextos significativos, além de foco excessivo na manipulação mecânica de algoritmos e na aplicação irrefletida de fórmulas memorizada pelo aluno.

Nesse sentido, a análise Combinatória, quando bem abordada, pode ser motivadora e interessante, pois promove situações de contagem que estão presentes no cotidiano do aluno. Além disso, os conteúdos cobrados nas provas da OBMEP envolvem problemas matemáticos que tratam de assuntos corriqueiros de sala de aula tais como: o Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Permutações, Arranjo e Combinações (Costa, 2021).

Dessa forma, torna-se essencial que sejam adotadas abordagens metodológicas que priorizem a resolução de problemas de uma forma ativa, dinâmica e contextualizada, conforme é exigido nas olimpíadas, em especialmente na OBMEP. Assim, faz-se necessário “[...] despertar a capacidade criativa nos alunos, para resolver as situações e promover a construção do conhecimento” (Costa, 2021, p. 101).

Sendo assim, no contexto olímpico, a Análise Combinatória deve ocupar um espaço de destaque, por sua capacidade de mobilizar a capacidade lógica do aluno, a sua criatividade, além da sua organização cognitiva, diante de situações-problema que abrange o processo de contagem. A sua presença nas Olimpíadas não somente desafia o estudante a pensar de forma lógica e criativa, mas possibilita a valorização do saber matemático para lidar com situações bem mais complexas, sejam elas dentro ou fora da escola.

3.3 A Análise Combinatória do Ponto de Vista Formal

A Análise Combinatória, sob uma perspectiva formal, constitui um ramo da Matemática com ênfase no estudo sistemático dos métodos de contagem, arranjos, combinações e estruturas discretas. Trata-se de um dos conteúdos abordados no campo da matemática que "[...] contribuem para o desenvolvimento de capacidades cognitivas, como: analisar, investigar, refletir, levantar hipóteses, testar, argumentar, generalizar e validar (Ferreira, 2013, p. 15).

No campo da Análise Combinatória, inicialmente é imprescindível a compreensão de dois princípios, a saber: o aditivo e o multiplicativo. Eles são as bases principais e estruturantes para resolver problemas que envolvem o processo de contagem de elementos sem a necessidade de listá-los. Tais princípios são de grande valia como estratégia central na resolução de diversos problemas combinatórios (Morgado, 1991).

Morgado (1991) enuncia o princípio da adição da seguinte forma: "Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então A ∪ B possui p + q elementos" (Morgado, 1991, p. 18). A base para a aplicação do Princípio Aditivo é garantir que as opções ou eventos em que se está somando são mutuamente exclusivos ou disjuntos.

Exemplo: Um aluno precisa escolher exatamente um livro para estudar hoje à noite. Ele tem à disposição: 7 livros de Matemática diferentes e 5 livros de Física diferentes. De quantas maneiras distintas o aluno pode escolher um livro de Matemática ou um livro de Física?

Solução: É uma aplicação direta do **Princípio Aditivo**, pois as duas opções são mutuamente exclusivas (a escolha de um livro de Matemática impede a escolha de um livro de Física).
O número de total de maneiras é: 7 + 5 = 12

Logo, o aluno pode fazer sua escolha de12 maneiras distintas.

O Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem é o enunciado por Morgado e Carvalho (2022) da seguinte forma: "O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy" (Morgado; Carvalho, 2022, p. 118). Esse princípio constitui-se em uma dos principais instrumentos da Análise Combinatória para se resolver problemas de contagem.

Exemplo: Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

Solução: Formar um casal equivale a tomas as decisões:
D_1: Escolha do homem (5 modos).
D_2: Escolha da mulher (5 modos).

Há 5 x 5 = 25 modos de formar casal (Morgado; Carvalho, 2022, p. 118).

O Princípio Multiplicativo é a forma básica de se resolver diversos tipos de problemas que envolvem o raciocínio combinatório (Pessoa, 2009). Esse princípio é uma ferramenta útil em várias aplicações distintas que envolva o produto cartesiano, arranjos, permutações e combinações, além de ser relevante para a resolução de problemas combinatórios condicionais ou não. É também o princípio é a "[...] a base das fórmulas de Análise combinatória (Lima, 2015, p. 26).

Morgado e Carvalho (2022) salientam que existem aplicações do Princípio Fundamental da Contagem que aparecem com frequência em problemas de Análise Combinatória. Os problemas em questão são, respectivamente, o de Permutações Simples e o de Combinações Simples. O conceito de permutação está atrelado ao ato de reordenar um grupo de objetos. Já a combinação tem como intuito contar quantos são os conjuntos de r elementos escolhidos de um total de n elementos distintos, em que a ordem desses r elementos escolhidos não importa.

> Dados n objetos distintos $a_1, a_2, ..., a_n$, de quantos modos é possível ordená-los? [...] No caso geral temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, n – 1 modos de escolher o que ocupará o segundo lugar, ..., 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Portanto,
> *O número de modos de ordenar n objetos distintos é* n(n-1) ... 1 = n!
> Cada ordenação dos n objetos é chamada uma permutação simples de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n. Assim, $P_n = n!$ (Morgado, 1991, p. 27).

Permutação Simples significa trocar a ordem dos elementos ou organizar os mesmos elementos de forma distinta. Um tipo de problema frequente de permutação é o de anagrama, que consiste na permutação de letras que compõem uma palavra, resultando em novas palavras ou sequências com ou sem sentido. Além da Permutação Simples, há também o caso de Permutação com Repetição, que consiste na determinação da permutação de n elementos, onde alguns desses elementos são repetidos ou idênticos.

Exemplo (Permutação Simples): Quantos são os anagramas da palavra “calor”? Quantos começam com consoantes?

Solução: Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas 5 letras. O número de anagramas é $P_5 = 5! = 120$. Para formar um anagrama começando por consoante devemos primeiramente escolher a consoante (3 modos) e, depois, arrumar as quatros letras restantes em seguida à consoante (4! = 24 modos). Há 3 x 24 = 72 anagramas começados por consoante (Morgado; Carvalho, 2022, p. 124).

Exemplo (Permutação com Repetição): Quantos são os anagramas da palavra “MATEMÁTICA”?

Solução: Como temos 3 letras A, 2 letras M, 2 letras T, 1 letra C, 1 letra I e 1 letra E, a resposta é

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 151200$$

(Morgado, 1991, p. 46).

Uma das aplicações em Análise Combinatória é o da Combinação Simples, que consiste no número de maneiras de escolher p elementos de um conjunto com n elementos, em que a ordem não importa. Nesse sentido, a resolução de um problema de combinação simples, faz-se necessário “[...] notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são selecionados, e um grupo de n – p objetos, que são selecionados” (Morgado; Carvalho, 2022, p. 125).

Conforme Morgado (1991) existe uma expressão geral para a resolução de problemas de combinações simples e uma expressão alternativa, a saber:

> No casso geral temos
> $$C_n^p = \frac{n(n-1)\cdots(n+1)}{p!}, 0 \leq p \leq n \; e \; C_n^0 = 1$$
> Uma expressão alternativa pode ser obtida multiplicando o numerador e o denominador por (n – p)!. Obtemos
> $$C_n^p = \frac{n(n-1)\cdots(n+1)}{p!}, 0 \leq p \leq n \; e \; C_n^0 = 1$$
> (Morgado, 1991, p. 32).

Exemplo (Combinação Simples): Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens, podem ser formadas?

Solução: Para formar a comissão devemos escolher 3 dos homens e 2 das mulheres. Há $C_5^3 \cdot C_4^2 = 10\ x\ 6 = 60\ comissões$ (Morgado; Carvalho, 2022, p. 124-125).

Vale salientar que a utilização do Princípio Fundamental da Contagem, bem como a Permutação Simples, Permutação com Repetição e Combinação Simples são ferramentas imprescindíveis para a resolução de problemas que envolvem contagem de possibilidades tanto no Ensino Médio quanto no contexto olímpico (Morgado; Carvalho; 2022). Cada uma dessas técnicas se aplica a situações específicas, razão pela qual é necessário o entendimento de quando usá-las, embora o Princípio Fundamental permaneça como a base dos procedimentos de cálculos empregados na resolução de diversas situações-problema de combinatória.

Além disso, têm-se outras fórmulas combinatórias úteis para resolver alguns problemas específicos. A inserção de técnicas de resolução de problemas combinatórios mais elaborados, como Permutação Circular e Combinações Completas ou com Repetição é basilar para a ampliação do repertório tanto de alunos quanto de professores em Matemática (Morgado; Carvalho; 2022).

A Permutação Circular trata da ordenação de n elementos dispostos em um círculo. É uma técnica que pode ser aplicada para resolver problemas clássicos como o número de maneiras de determinadas pessoas se sentarem em uma mesa redonda. “De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, de forma que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, isto é, o número de permutações circulares de n objetos é $(PC)_n = n!/n = (n – 1)!$” (Morgado; Carvalho, 2022, p. 131).

Exemplo (Permutação Circular): Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com n crianças?

Solução: Como a roda gira, o que importa não é o lugar de cada criança e sim a posição relativa das crianças entre si. A resposta é $(PC)n = (n – 1)!$ (Morgado, 1991, p. 42).

A Combinação Completa lida com a escolha de p elementos a partir de n permitindo a repetição dos elementos, e a ordem de escolha não importa, ou seja, "[...] CR_n^p é o número de modos de escolher p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados (Morgado, 1991, p. 48). Além disso, há duas formas de interpretar as Combinações Completas [illegible] , a saber: "a) [...] é número de modos de selecionar p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos dados. b) [...] é o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ em inteiros não negativos" (Morgado, 1991, p. 49).

Conforme Morgado (1991, p. 50), a fórmula para o cálculo das Combinações Completas é a seguinte:

$$CR_n^p$$

Exemplo (Combinação Completa): Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + ... + x_n = p$?

Solução: A resposta deste problema é representada por CR_n^p , que é o número de *combinações completas ou com repetição* dos n objetos tomados p a p. Para determinar o valor de CR_n^p , vamos representar cada solução da equação por uma fila de sinais + e |. Por exemplo, para a equação x + y + z = 5, as soluções (2, 2, 1) e (5, 0, 0) seriam representadas por + + | + + | + e + + + + + | |, respectivamente. Nossa representação, as barras são usadas para separar as incógnitas, e a quantidade de sinais + indica o valor da incógnita.

Para a equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$, cada solução seria representada por uma fila com n – 1 barras (as barras são para separar as incógnitas; para separar n incógnitas, usamos n – 1 barras) e p sinais +. Ora, para formar uma fila com n – 1 barras e p sinais +, basta escolher dos n + p -1 lugares da fila os p lugares onde serão colocados os sinais +, o que pode ser feito de C_{n+p-1}^p modos. Portanto, $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$ (Morgado; Carvalho, 2022, p. 124-125).

Exemplo (Combinação Completa): De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes em uma loja onde há 5 tipos de refrigerantes?

Solução: $CR_5^3 = C_7^5 = 21$ (Morgado, 1991, p. 50).

3.4 Contribuições da OBMEP para o Ensino da Análise Combinatória na Educação Básica

Um dos temas presentes nas provas da OBMEP é a Análise Combinatória. Nessas provas, as estratégias de contagem e de resolução de problemas são exigidas dos alunos participantes nas duas fases (Américo, 2013). Desde a sua criação em 2005, a OBMEP tem como propósito em sua execução "[...] estimular o estudo da Matemática e incentivar a busca por novos conhecimentos" (Cocco, 2013, p. 74).

A OBMEP, em suas provas, ao propor problemas que envolvam contagem, permutações, arranjos e combinações, ou seja, alguns conteúdos inerentes à Análise Combinatória contribuem para que os estudantes participantes da competição sejam instigados a pensar de forma lógica e estruturada, sobressaindo à mera memorização de fórmulas e aplicações diretas.

Segundo Filho (2020), no que diz respeito à contribuição da OBMEP para o ensino de conteúdos matemáticos, ressalta que ela proporciona a criação de:

> [...] um ambiente motivador na escola, trabalhando de forma amigável o caráter de se por em estado de competição. O contato com questões desafiadoras e interessantes leva os alunos a melhorar a relação com os professores e os influenciam a trabalhar em grupo, melhorando assim o processo de ensino-aprendizagem (Filho, 2020, p. 23).

Nesse sentido, a OBMEP tem exercido, desde a sua criação em 2005, uma função significativa tanto na difusão quanto na valorização do ensino e aprendizagem de Matemática no Brasil. A OBMEP também atua como um importante estímulo para que o aluno busque novos conhecimentos matemáticos, além dos conteúdos que são tradicionalmente abordados no contexto de sala de aula. É de suma importância que o estudante não só compreenda o problema a ele proposto, mas que também seja estimulado a resolvê-lo (Pólya, 1995).

Os problemas matemáticos oferecidos, especialmente os da OBMEP, devem ser relevantes para o "[...] desenvolvimento cognitivo, por isso é necessário que o aluno tenha contato com esse assunto desde os primeiros anos da escola básica" (Pessoa, 2009, p. 85). Nesse sentido, a OBMEP tem incluído questões de Análise Combinatória em suas provas aplicadas desde o 6º ano do Ensino Fundamental e, a partir do ano de 2022, também passou a contemplar a partir do 2º ano por meio da chamada OBMEP Mirim.

Ao propiciar a resolução de problemas de Análise Combinatória sem que haja a utilização de fórmulas prontas, a OBMEP proporciona "[...] o pensar, de forma criativa e crítica” (Pessoa, 2009, p. 86). A OBMEP, nesse sentido, desempenha um papel importante no incentivo ao estudo da Análise Combinatória no âmbito da educacional brasileiro, proporcionando ao estudante meio para que ele possa aprimorar o raciocínio lógico-matemático, além de suas habilidades na resolução dos problemas.

Ainda, sobre o impacto da OBMEP no contexto de ensino e aprendizagem da Matemática, Bezerra (2024) salienta que:

> [...] a OBMEP não apenas promove o aprofundamento no estudo da matemática, mas também contribui para transformar percepções sobre a disciplina, encorajando o enfrentamento de desafios e o desenvolvimento de competências como raciocínio lógico e pensamento crítico. Isso reforça a importância de iniciativas como a OBMEP na valorização da matemática e na formação de uma base científica sólida (Bezerra, 2024, p. 52).

Além de proporcionar contribuições significativas para o processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, como a Análise Combinatória no contexto escolar, a OBMEP também se notabiliza por seu papel transformador no cenário educacional brasileiro (Cocco, 2013). A OBMEP também atua não só como uma competição de matemática, mas como um impulso significativo ao estudo da matemática, proporcionando ao aluno desenvolver o pensamento lógico e criativo.

Também, a OBMEP impulsiona a valorização da matemática como meio de inclusão social e intelectual, pois ela aproxima escolas públicas de universidades, instituto de pesquisa e sociedades científicas. A OBMEP, nesse contexto, propicia a ampliação de horizontes e oportunidades aos estudantes de diferentes realidades, salientado seu caráter democrático e abrangente. Assim, é importante “[...] reconhecer o papel que ela pode assumir no contexto da escola enquanto instituição promotora da transformação social (Cocco, 2013, p. 74).

A OBMEP utilizada como estratégia no processo ensino-aprendizagem da matemática se constitui num fator relevante no contexto escolar, pois ela propiciar o interesse do aluno, bem como a sua autonomia. Além disso, a competição olímpica matemática proporciona a construção de uma cultura matemática bem mais sólida, inclusiva e acessível.

Batista da Silva *et al* (2022) destaque que:

> A preocupação em tornar a Matemática mais atraente para os alunos faz com que o professor pense em estratégias diferenciadas para trabalhar em sala de aula, assim as competições são vistas com o objetivo de contribuir no sentido de motivá-los a buscar um conhecimento a mais para obter determinadas vantagens; eles são instigados a compreender e aplicar o que sabe além do que o professor propõe em sala de aula (Batista da Silva et al, 2022, p.61).

Uma contribuição que vale destacar é a proposta da OBMEP de proporcionar uma abordagem com problemas contextualizados e lúdicos. Em vez de apresentar e aplicar as fórmulas isoladas, os problemas da OBMEP inserem a Análise Combinatória em situações cotidianas. Nesse sentido, ela faz com que o aluno seja estimulado a pensar e construir o conhecimento por si mesmo. Além do mais, ao "[...] enfatizar a criatividade, o pensamento crítico e a resolução de problemas em vez de fórmulas fixas, a competição reforça a ideia de que a matemática pode ser acessível e atraente" (Bezerra, 2024, p. 47).

O ensino da Análise Combinatória no contexto brasileiro demanda desafios específicos, além de exigir que o professor tenha uma forma de olhar atenta e criteriosa. Ao propor em suas edições problemas que são desafios instigantes e contextualizados, a OBMEP estimula a participação efetiva dos alunos, valorizando suas e ideias e experiências tanto formais quanto informais (Ferreira, 2013).

Os problemas de Análise Combinatória propostos nas edições da OBMEP são excelentes ferramentas para que possa ser possível ao aluno resolver situações do cotidiano que o possibilitem a resolver determinadas situações com a utilização do raciocínio matemático, sem a preocupação com as fórmulas,

A Análise Combinatória está presente em diversas situações cotidiano humano, embora muitas vezes esteja de forma implícita. A Análise Combinatória é uma parte da matemática ligada à capacidade de organização, contagem e tomadas de decisões.

Nesse sentido, Sturn (1999) ressalta que:

> (...) o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações problema. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação (Sturm, 1999, p.3)

Por conseguinte, é possível asseverar que a OBMEP tem exercido uma influência significativa na abordagem e aprofundamento da Análise Combinatória no ambiente escolar brasileiro, propiciando aos alunos participantes o acesso a conteúdos pouco explorados no currículo tradicional. Também, a OBMEP além de ampliar o repertório matemático do estudante, contribui para o desenvolvimento de habilidades cognitivas fundamentais, a saber: o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade

4 PRODUTO EDUCACIONAL: CONCEPÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS

O Produto Educacional (PE) consiste em um instrumento pedagógico produzido no âmbito de uma pesquisa científica com o objetivo de articular teoria e prática, promovendo a melhoria do ensino e aprendizagem de um determinado tema ou conteúdo. É um recurso didático para se aplicar o conhecimento teórico e prático adquirido ao longo do mestrado para resolver situações reais do contexto educacional (Oliveira Neto, 2019).

Ainda, a orientação voltada para a aplicação na prática de conhecimentos produzidos em programas profissionais é de que o requisito fundamental das pesquisas desenvolvidas tenha como alvo precípuo a elaboração de:

> [...] um processo ou produto educativo e aplicado em condições reais de sala de aula ou outros espaços de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser, por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, uma exposição, entre outros. A dissertação/tese deve ser uma reflexão sobre a elaboração e aplicação do produto educacional respaldado no referencial teórico metodológico escolhido (Brasil, 2019, p.15).

O presente capítulo tem por finalidade a descrição de um conjunto de três situações didáticas olímpicas (SDO) que abordam conteúdos de Análise Combinatória, compostas com problemas oriundos da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Tais situações foram selecionadas e dispostas com o objetivo de explorar conceitos fundamentais, a saber, o princípio multiplicativo, permutações e combinações, proporcionando ao aluno desenvolver habilidades específicas, o raciocínio lógico, argumentação matemática precisa, bem como a autonomia no processo de resolução dos problemas típicos do contexto olímpico

4.1 Descrições de três Situações Didáticas Olímpicas (SDO)

Apresentam-se, a seguir, três Situações Didáticas Olímpicas (SDO), desenvolvidas com a finalidade de potencializar a aprendizagem de conceitos e estratégias de resolução de problemas de matemática oriundos da OBMEP concernentes ao conteúdo de Análise Combinatória, à luz da Teoria das Situações Didáticas e da metodologia de pesquisa denominada de Engenharia Didática de primeira geração. Uma SDO, nesse sentido, consiste na associação de uma metodologia de ensino, no caso, a Teoria das Situações Didáticas, a um Problema Olímpico, extraído de algumas edições da OBMEP, nível III.

4.1.1 Situação Didática Olímpica 1

Conhecimentos Prévios:

- Compreensão de números naturais de 4 algarismos;
- Noção de restrições, ou seja, saber excluir o algarismo zero e limitar a quantidade de vezes que um determinado dígito aparece;
- Aplicar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

(Problema da OBMEP 2005 – Fase 1 – Nível 3 – Questão 9 – Item A) - Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 000 a 9 999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

(A) 32

(B) 36

(C) 45

(D) 46

(E) 48

Situação de Ação: Nesta fase, o aluno tem o contato inicial com o enunciado da Situação Didática Olímpica proposta. Presume-se que o estudante elabore uma estratégia de resolução do problema com os conhecimentos matemáticos que já possui. É o momento "[...] essencial para o aluno exprimir suas escolhas e decisões por ações sobre o *milieu* (o meio). Nela, as interações estão centralizadas na tomada de decisões" (Almouloud, 2007, p. 38).

É nesse momento que a tomada de decisão do aluno é relevante para a investigação e interpretação do problema a ser solucionado. Espera-se que o estudante ao entrar em contato com a situação proposta, utilize os conteúdos prévios de contagem de algarismos na formação de números naturais, o princípio multiplicativo, a restrição na contagem e saber distinguir as expressões "ao menos", "no máximo" e "exatamente" expresso no enunciado, além da restrição exigida em relação à presença ou não do zero.

O aluno é colocado diante uma situação-problema olímpica sem que haja a intervenção de forma direta do professor no que diz respeito a explicações ou procedimentos pré-definidos para se resolver. O objetivo é fazer com que estudante interaja livremente com o meio e as informações disponíveis, e tente resolver o problema com os recursos que dispõe. É a fase que o conhecimento ainda não está formalizado, mas está imergindo das interações.

Nesta presente fase, portanto, espera-se que o aluno ao entrar em contato com a situação, leia o enunciado do problema e perceba que ele exige que os números a serem formados sejam com quatro algarismo de 1.000 a 9.999, em que o algarismo 7 apareça exatamente três vezes e o zero não apareça. O aluno testa a primeira restrição que é a presença do zero — ou seja, o número 7770 — e sabe que não pode ser utilizado. Na segunda tentativa, ele testa a restrição de ter exatamente três setes — ou seja, 7777 — e percebe que não pode haver quatro setes, conforme o enunciado.

Na terceira tentativa, o aluno testa os seguintes casos: 7771, 7772, 7773, 7774, 7775, 7776, 7778, 7779 e percebe que obteve sucesso ao encontrar um bilhete válido. Após a tentativa de êxito, espera-se que o aluno reconheça as outras posições que o 7 pode ocupar e que comece a listar as possíveis configurações para a posição dos três dígitos 7 e o algarismo distinto, ou seja, os números da seguinte forma: 777X, 77X7, 7X77 e X777, em que o "X" representa o algarismo diferentes.

Sendo assim, a fase da dialética da ação coloca o aluno ante uma situação-problema sem a interferência direta do professor, para que ele possa interagir de forma livre com o meio e informações disponíveis, buscando resolver o problema por meio da exploração e experimentação, mobilizando apenas seus conhecimentos prévios. O estudante também "[...] pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar outro" (Almouloud, 2007, p. 37).

Situação de Formulação: O aluno, nesta fase, ao entrar em contato com a situação proposta, tem a oportunidade de trocar "[...] informações com uma ou várias pessoas, que serão os emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais" (Almouloud, 2007, p. 38). É a fase que se caracteriza por uma intensificação no diálogo dos alunos com os demais colegas, que colaboram entre si na busca de estratégias e um modelo matemático mais adequado à resolução do problema proposto na situação didática.

É a fase em que o mais importante é a troca de informações (Almouloud, 2007). Espera-se que, neste momento do processo, os alunos troquem mensagens entre si, escritas ou verbais, sobre os prováveis padrões observados na fase anterior no processo de resolução do problema. O aluno tende a organizar, expressar e expor suas ideias e estratégias sobre a questão por meio de uma linguagem natural ou mesmo matemática.

Espera-se que, neste momento, o aluno individualmente ou coletivamente com seus colegas explicite quais instrumentos foram utilizados para se chegar à solução procurada, bem como a solução propriamente dita. O objetivo dessa fase é fazer com que o estudante tenha condições de construir "[...] progressivamente, uma linguagem compreensível por todos, que considere os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática ((Almouloud, 2007, p. 38).

Na fase de formulação, o aluno já é capaz de organizar e estruturar seu raciocínio, além de reconhecer a importância de comunicar sua solução de forma compreensível e devidamente justificada. Espera-se, nesse sentido, que o estudante articule e comunique sua descoberta e generalize a partir de agora as regras e observações inferidas na fase anterior.

Estima-se que a partir desse momento do processo, o aluno perceba a regra sobre o dígito “X” — ou seja, não ser o zero e o sete — e comece a verificar quais números podem ser formados com os padrões encontrados na etapa anterior: 777X, 77X7, 7X77 e X777. O estudante fazer a contagem das possibilidades para “X”, ou seja, se o “X” não pode ser zero e sete, e os algarismos são de 0 a 9, então “X” pode ser: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. Isso dá 8 possibilidades para “X”. O aluno confirma a validade da regra encontrada para a formação dos números com as restrições impostas no enunciado.

Assim, os estudantes envolvidos na Situação Didática Olímpica estão na ocasião central do processo de aprendizagem, em que os alunos comunicam as hipóteses e estratégias alcançadas com os demais colegas. Nessa interação há o favorecimento da construção de modelos de resolução bem mais estruturados e consistentes. Essa comunicação passa a ser uma ferramenta imprescindível para a validação conjunta e progresso no entendimento da situação didática (Castro, 2023).

Situação de Validação: Esta fase tem como finalidade a “[...] validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e formulação” (Almouloud, 2007, p. 40). É o momento de o aluno apresentar sua solução do problema no intuito de convencer os demais colegas e professor por meio de uma linguagem matemática. Espera-se que as pessoas envolvidas se comuniquem ativamente pra verificar se suas conclusões ou proposições coincidam com as dos demais participantes (Lima, 2019).

É esperado do aluno, nesta etapa, que ele justifique suas escolhas realizadas nas fases anteriores e especifique as estratégias matemáticas empregadas na solução da situação que lhe foi proposta. É o momento dedicado à revisão crítica dos raciocínios com a finalidade de eliminar as possíveis inconsistências presentes no processo, além das prováveis contradições das estratégias matemáticos que por ventura não tenha sido observada nas fases anteriores.

Ressalta-se que, neste estágio, o aluno tente validar suas formulações por meio de argumentos consistentes ou que ofereça algum contra-exemplo para que demonstre a solidez da situação proposta. A situação didática guia-os por “[...] um processo para garantir que eles usem estratégias certas. Dessa forma, a falha é o ponto de partida, o processo de construção de conhecimento” (Araújo Filho, 2019, p. 34).

É esperado do estudante que ele verifique se a sua solução abrange todos os casos possíveis e que não faça a inclusão de situações inválidas. Espera-se que o aluno verifique cada configuração de número formado com tais restrições contidas no enunciado. No caso, 777X, o dígito que “X” assume pode ser 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, tem-se oito números. Todos com exatamente três setes e nenhum zero. Seguindo a mesma lógica, verifica-se para os casos 77X7, 7X77 e X777, sendo também oito números para cada caso. Totalizando 32 números com exatamente três setes e nenhum zero.

Também é esperado que o estudante verifique se pensou em todas as possibilidades de ter um número com três setes e nenhum zero. Além disso, constatar que a posição do algarismo diferente de sete pode vir na unidade, dezena, centena ou unidade de milhar, ou seja, não há outras formas. Espera-se que a linguagem empregada pelo aluno seja formal e que a solução do problema esteja alicerçada em mecanismos de demonstração matemática.

Situação de Institucionalização: Durante as três fases iniciais na há uma intervenção direta do professor, pois ele somente oferece orientações mínimas quando necessário para prevenir de possíveis obstáculos. Agora, na fase de institucionalização, o professor “[...] expõe suas intenções de ensino e sintetiza o conhecimento” (Castro, 2023, p. 61). É o momento da formalização pelo professor do saber matemático construído nas três primeiras fases pelo aluno que e que será integrado no repertório formal de conhecimento.

É a fase de grande relevância, pois “[...] professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber” (Almouloud, 2007, p. 40). Uma vez que o professor interviu para consolidar a aprendizagem e conhecimento matemático construído, agora o aluno ou professor em conjunto organiza a solução de uma forma mais explicita. É momento da sistematização da solução da situação proposta.

Assim, identificam-se os quatro padrões possíveis para os algarismos — ou seja, 777X, 77X7, 7X77 e X777. Para cada padrão, determinam-se os dígitos válidos para a posição “X” — ou seja, todos de 1 a 9, com exceção do 0 e o 7, totalizando, assim, 8 números de quatro algarismos com exatamente três setes e sem o zero, em cada caso. Por fim, realizando-se a soma das possibilidades 8 + 8 + 8 + 8 = 32. Com base no enunciado, Marcelo comprou um total de 32 bilhetes. É nesta fase que a intenção do professor que sugeriu a situação didática olímpica é explicitada e o conhecimento obtido tem o caráter universal.

4.1.2 Situação Didática Olímpica 2

Conhecimentos Prévios:

- Noção de oposição espacial (noção de uma parede estar de frente para outra);
- Leitura e interpretação de restrições;
- Distribuição sem repetição de elementos (cada cor será utilizada uma única vez, sem repetir);
- Aplicar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

(Problema da OBMEP 2007 – Fase 1 – Nível 3 – Questão 11 – Item B) – Manoela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. Quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

(A) 8

(B) 16

(C) 18

(D) 20

(E) 24

Situação de Ação – Neste momento, o aluno inicia sua ação a partir do enunciado do problema proposto, bem como dos elementos contidos nele. Espera-se que o aluno se familiarize com as informações contidas no enunciado para que possa compreendê-lo. É a fase que "[...] prevalece o momento da intuição e o raciocínio matemático" (Maia, 2023, p. 1224). É o momento de o aluno tomar decisões a partir dos resultados observados na ação.

É nessa fase que o aluno identifica quais instrumentos são necessários para realizar a resolução do problema. É a etapa que se estabelece as condições essenciais para que ocorra o desenvolvimento do pensamento matemático, pois coloca o aluno numa posição de tomada de decisão, mesmo que, por vezes, não entenda muito bem suas razões (Brousseau, 2008). Espera-se que o aluno possa "[...] realizar a escolha que desejar e não é necessário se comunicar. Ele facilmente realiza o que é proposto" (Santiago, 2021, p. 52).

Espera-se que o aluno tente resolver o problema, agindo sobre ele para buscar uma solução inicial. Assim, o estudante tem um desafio de pintar as quatro paredes com cores diferentes — azul, rosa, verde e branco — sem que a cor azul e rosa fiquem em paredes opostas — Frente/Fundo ou Esquerda/Direita — o aluno inicia testando as possibilidades a partir da fixação de uma cor inicial para uma parede, por exemplo o azul.

Temos aqui um passo importante, pois é o momento “[...] em que o estudante tenta compreender e adaptar-se a um meio didático denominado por Brousseau de *milieu*, ao qual foi exposto, sendo então, levado a tomar decisões, analisar e verificar seus resultados” (Oliveira, 2019, p. 30). Nesse sentido, ao se deparar com a situação-problema proposta, o aluno escolhe arbitrariamente a cor azul e, ao considerar a parede oposta, aplica a restrição do problema, desconsiderando a cor rosa para essa parede.

Espera-se do aluno, ao iniciar com a restrição imposta, que faça a escolha das cores restantes, mostrando uma tentativa de dispor as possibilidades. É uma fase fundamental, porque propicia o envolvimento do estudante de forma direta com o problema, fazendo com ele se utilize dos conhecimentos prévios sobre noção de oposição espacial, distribuição das cores sem repetição, restrição e princípio multiplicativo.

Sendo assim, a fase de situação da ação se caracteriza como a experimentação inicial, em que a tentativa, bem como o erro conduz o aluno a possibilidade de explorar a estrutura do problema proposto. O professor não tem uma interferência direta na resolução do problema, ficando a cargo do aluno a interação com o meio e com os dados dispostos, mobilizando apenas seus conhecimentos prévios. É uma etapa que “[...] se predomina o aspecto experimental do conhecimmento.” (Lima, 2019, p. 38).

Situação de Formulação – Neste momento do processo, os alunos discutem entre seus pares, compartilhando e aprimorando ideias com o intuito de obter um modelo matemático para solucionar o problema proposta. É a etapa que o estudante apresenta as estratégias, além também de mostrar as ferramentas que foram utilizadas para se obter a solução do problema de forma oral ou escrita.

É a etapa que o estudante “[...] faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema, mas sem a intenção de julgamento sobre validade, embora contenham implicitamente intenções de validação (Machado, 1999, p. 79). Ainda, o aluno deve ser incentivado a descrever suas estratégias, comunicar as descobertas realizadas e, se possível, formular hipóteses para a resolução do problema.

É o momento em que o aluno utiliza diferentes regras operacionais sem, contudo, estar preparado para justificar a validade de suas decisões e ações. Ele pode formular uma sequência de passos lógicos: primeiro, escolhe a cor inicial; em seguida, lida com a restrição da parede oposta; por fim, preenche as restantes. Ao perceber que, feita à escolha da cor inicial — no caso, azul —, sobram duas opções de cor para pinta a parede oposta (verde ou branco). Dessa forma, observa-se a aplicação direta da restrição previamente estabelecida: a cor rosa não pode ser utilizada nessa posição.

Nesse sentido, ao descrever as escolhas de forma sequencial — 4 possibilidades para a primeira parede, 2 para a parede oposta, 2 para a terceira parede e 1 para a quarta e última —, o aluno elabora, mesmo de forma intuitiva, um modelo de solução combinatório para a resolução do problema proposto. É a etapa “[...] marcada pelas discussões e modelagem matemática realizada pelos alunos (Oliveira, 2016, p. 60).

O estudante, nesse momento, não somente reconhece as restrições, mas propõe uma sequência de decisões, explicitando sua linha de raciocínio, oral ou escrita. Dessa forma, a fase de formulação traduz a transição do nível de manipulação empírica para um raciocínio de natureza lógica, embora ainda não esteja formalizado o processo matemático envolvido.

Assim, espera-se que o aluno faça uso de uma linguagem que demonstre a tentativa de organizar o seu raciocínio, além de expressar as decisões que são tomas em cada fase do processo de pintura das paredes. Ainda que de forma incipiente, o aluno é capaz de formular as restrições impostas no problema, além de identificar as possibilidades recorrentes. “Como resultado, essa dialética permite criar um modelo explicito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas (Almouloud, 2007, p. 38).

Situação de Validação – Nesta fase, o estudante tem a incumbência de tentar provar que as suas formulações estão corretas ou buscar contra-exemplos. Espera-se que o aluno mostre “[...] a validade das possíveis soluções dos diversos modelos criados por eles em linguagem matemática (modelo da situação) submetendo à apreciação e ao julgamento de seus colegas de grupo ou de sala” (Oliveira Neto, 2019, p. 20).

A solução proposta é apresentada para que seja defendido pelo aluno, com o intuito testar e validar as suas estratégias utilizadas na resolução. Nesta fase, o estudante é estimulado a argumentar e justificar suas ideias diante do público, proporcionando uma reflexão coletiva. Espera-se que o aluno não só comunique “[...] uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado” (Brousseau, 2008, p. 27).

A fase de validação ocorre a partir do momento que o estudante examina de forma crítica sua solução, verificando se ela é ou não coerente ao problema proposto. O estudante busca validar as suas ideias das situações anteriores, a saber: de ação e de formulação. Nessa busca, ele precisa também justificar, por meio da linguagem matemática, a consistência das distintas soluções propostas nos modelos elaborados, submetendo à apreciação e juízo dos demais colegas (Almouloud, 2007).

A estrutura da solução apresentada para a Situação Didática Olímpica, ou seja, 4 x 2 x 2 = 16, considera-se a própria validação do raciocínio para a solução do problema apresentado. Espera-se do aluno que ele não somente mostre um número, mas divulgue o passo a passo de como obteve a solução, evidenciado a correção de suas escolhas. Os números multiplicados — 4, 2, 2 — representam a justificação matemática para o resultado.

Espera-se do aluno que ele reconheça que qualquer uma das 4 paredes pode ser a primeira a ser pintada de azul. Se a primeira parede foi pintada de azul, espera-se que o aluno perceba que a parede oposta a primeira só pode ser verde ou branca, pois o rosa faz parte da validação da restrição. Por fim, para as duas paredes adjacentes à parede azul — e não oposta a ela —, só restam duas cores. O "2" vem da escolha entre as duas cores restantes para a terceira parede, e o "1" implícito para a última parede.

Sendo assim, a sequência de multiplicações realizadas evidencia um encadeamento lógico de tomadas de decisões que leva o aluno ao total de 16 maneiras distintas para a pintura do quarto. Além disso, embora não esteja explicitamente nomeada, a solução da situação está empregando o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo. É o momento que o aluno está validando sua estratégia de resolução por meio de um cálculo combinatório.

Situação de Institucionalização – Nas fases precedentes, o papel do professor é de mínima intervenção, limitando-se a orientar o aluno para que não haja a possibilidade de bloqueios. É o momento que o professor pega a solução "4 x 2 x 2 = 16" e a generaliza, fazendo conexões aos conceitos matemáticos formais. Nesta fase, "[...] o conhecimento é claramente estabelecido pelo professor e passa a ser o conhecimento oficial que os alunos devem utilizar para resolver problemas" (Santiago, 2021, p. 55).

Na fase de institucionalização, o professor precisa assumir a função de sistematizador do conhecimento. É nessa ocasião que a linguagem informal emprega anteriormente pelo aluno é transformada em uma linguagem formal. É o momento que o professor pode retomar a estratégia utilizada pelo estudante e explicá-la por meio do Princípio Multiplicativo, reforçando o conceito de permutação com restrição, além de ter a oportunidade de apresentar outra abordagem, como por exemplo: calcular o total de permutações sem restrição 4! = 24 e subtrair os casos em que o azul e o rosa estão frente a frente — 2 pares opostos x 2 ordens x 2! Cores restantes = 8 —, encontrando o valor de 16 maneiras para pintar a parede.

Assim, o professor ao expor outras formas de resolução e comparação de estruturas, propicia a ampliação do campo de compreensão do estudante, além de inseri-lo no discurso matemático institucionalizado. É a etapa em que "[...] o professor fixa, convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber" (Almouloud, 2007, p. 40).

4.1.3 Situação Didática Olímpica 3

Conhecimentos Prévios:

- Compreensão e aplicação do Princípio Multiplicativo da Contagem;
- Domínio de combinação de elementos (binômio);
- Capacidade de identificar subconjuntos sem repetição e sem ordem;
- Leitura atenta e interpretação de problemas com condições;
- Habilidade de organizar e representar mentalmente agrupamentos.

(Problema da OBMEP 2024 – Fase 1 – Nível 3 – Questão 9 – Item C) Um mágico tem quatro coelhos de cores diferentes e quatro cartolas numeradas de 1 a 4. De quantas maneiras distintas dois coelhos podem ficar em uma mesma cartola e os outros dois em outra?

(A) 360
(B) 72
(C) 36
(D) 16
(E) 4

Situação de Ação – Trata-se da fase em que o aluno começa a ter ação a partir do contato inicial com o enunciado, utilizando somente as construções que são providas por ele. “As relações e os significados matemáticos devem ser depurados na etapa inicial” (Alves, 2016, p. 87). É a fase em que o professor propõe problemas na forma de questões matemáticas, nas quais os estudantes possam agir, individualmente ou em coletivo, na busca das soluções sem a intervenção do professor.

É o momento que o aluno, a partir de suas interações com o *milieu* e nas retroações, tem condições de avaliar os efeitos de suas próprias ações, propiciando ajustes, melhoramentos ou até rejeição do modelo proposto inicialmente. É a etapa do processo que o estudante tem contato com a situação-problema proposta sem a intervenção direta do professor. Nela, as ações do estudante estão voltadas, sobretudo para a tomada de decisões diante dos problemas propostos.

Espera-se que nesta fase, a ênfase esteja na ação, na tentativa, no erro e na observação das consequências das ações do aluno. É uma etapa crucial para que o estudante possa "[...] exprimir suas escolhas e decisões sobre o milieu" (Almouloud, 2007, p. 38). Nesse contexto, ao ler o enunciado do problema, o aluno necessita interpretar que existem quatro coelhos diferentes (Branco, Cinza, Preto e Rosa), quatro cartolas e que apenas duas delas serão utilizadas, sendo que cada uma dessas cartolas deve conter exatamente dois coelhos.

Espera-se que o aluno comece a agir tentando formar pares de coelhos, associando esses pares as cartolas, e a partir daí listar as possibilidades. O *milieu* (meio), nesse caso, é constituído pelas regras da situação-problema e pelos objetos que fazem parte, ou seja, os coelhos, as cartolas e os pares. A interação do aluno com o meio deve ser intensa, para que ele possa perceber as regularidades e limitações, como o fato de que a ordem dos coelhos dentro da cartola não importa, além de que a escolha da primeira dupla determina à segunda.

Sendo assim, espera-se que o aluno reconheça quais conhecimentos e conteúdos já possui que podem ser mobilizados para que possa ser utilizado na resolução do problema proposta, possibilitando-o a agir em sua solução. "Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário" (Almouloud, 2007, p. 37). O estudante tem a oportunidade de estruturar suas próprias estratégias de resolução ao interagir com a situação.

Situação de Formulação – Nesta etapa, os estudantes estão empenhados com seus colegas, buscando estruturar uma representação matemática que os faça chegar à resolução do problema apresentado. É o momento de o aluno trocar informações com os outros colegas, individual ou coletivamente, por meio de mensagens orais ou escritas (Brousseau, 2008). Essa etapa versa sobre a criação de um ambiente favorável à elaboração de uma linguagem pelo aluno que seja pouco a pouco compreensível para os demais envolvidos.

É o momento que o aluno deve organizar suas ideias e externalizá-las, além de criar uma linguagem que lhe propicie a comunicação da estratégia utilizada na resolução do problema. Espera-se nesta etapa que o aluno possa construir seus próprios modelos de forma implícita, empregando uma linguagem acessível aos demais estudantes. É o momento de favorecimento tanto da comunicação entre os alunos quanto da orientação coletiva para que haja o desenvolvimento de estratégias de resoluções para que sejam compartilhadas.

Espera-se que o estudante, do ponto de vista combinatório, formule a seguinte estratégia de resolução do problema: Em primeiro lugar, a escolha de duas cartolas entre as quatro disponíveis para colocar os coelhos, ou seja, $C_{4,2} = 6$ possibilidades. Em seguida, a escolha de dois coelhos para ocupar uma das cartolas escolhidas, ou seja, $C_{4,2} = 6$ possibilidades. Por fim, as escolha dos dois coelhos restantes vão automaticamente para a outra cartola. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, tem-se: 6 (pares de cartolas) x 6 (pares de coelhos) = 36 formas diferentes.

Além disso, o aluno pode tentar outra possível formulação ao perceber que existem três maneiras de formar dois pares de coelhos diferentes, pois a ordem dos pares não influencia. Além disso, para cada divisão, há quatro cartolas possíveis para o primeiro par e, em seguida, três opções restantes para o segundo par, totalizando pelo Princípio Multiplicativo: 3 x 4 x 3 = 36 formas distintas.

Almouloud (2007) ressalta que a etapa de formulação "[...] consiste em proporcionar ao aluno condições para que este construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos, que considere os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática" (Almouloud, 2007, p. 38). Neste momento, há uma tentativa pelo aluno de construir sentido matemático, por meio dos conceitos da Análise Combinatória.

Sendo assim, espera-se que o aluno por meio de uma linguagem compreensível possa expressar aos demais colegas a construção de um raciocínio matemático com base nos conceitos como combinação, distribuição e o princípio multiplicativo para resolver a Situação Didática Olímpica proposta. É o momento não só de se expressar uma solução de forma oral ou escrita, mas também compreender os fundamentos matemáticos que a sustentam, proporcionando, assim, o pensamento matemático do aluno.

Situação de Validação – É a fase que o aluno deve demonstrar a validade das suas possíveis soluções (Oliveira Neto, 2019). Neste momento, o estudante deve procurar submeter sua solução em linguagem matemática à crítica, discutindo com o professor, comparando com a solução dos outros colegas ou por meio da reavaliação de seus próprios passos. Espera-se que o aluno verifique se faz sentido considerar a ordem das cartolas ou dos coelhos apresentados no enunciado do problema, e se há repetições nas combinações realizadas.

Esta etapa é um excelente recurso didático para explicitar aos alunos a relevância de se argumentar de forma lógica, baseado em evidências coerentes e sólidas. Também, oferece uma boa ocasião para que os estudantes desenvolvam suas habilidades de raciocínio lógico, além da compreensão significativa dos conteúdos matemáticos abordados.

Nesse sentido, a finalidade desta etapa no processo de construção do conhecimento matemático diz respeito à "[...] validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação, podendo se referir a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática" (Almouloud, 2007, p. 40). As duas soluções apresentadas na fase de formulação ressaltam um excelente ponto para trabalhar a validação, pois na primeira estratégia de solução, partiu-se da contagem combinatória direta, ou seja, escolher pares de cartolas e pares de coelhos. Na segunda, consideram-se as divisões possíveis dos coelhos em dois pares distintos e, em seguida, distribui essas duplas em cartolas, analisando a quantidade de maneiras possíveis.

Assim, espera-se que o aluno perceba que ambas as estratégias de resolução levam ao mesmo resultado, ou seja, 36 maneiras distintas, reforçando o argumento e validando a resposta obtida. Espera-se que o aluno reconheça que distintas abordagens de resolução podem ser matematicamente válidas, desde que estejam de acordo com os princípios formais de contagem. É a etapa que exige do estudante o exercício crítico, da comparação e da argumentação matemática, justificando sua resposta com rigor conceitual.

Situação de Institucionalização – Nesta fase, evitando interferências diretas nas etapas anteriores, o professor tem a sua atuação de forma pontual apenas para impedir bloqueios por parte do aluno. É o momento que "[...] o professor pesquisador entra em cena com a formalização do conhecimento matemático associado à construção" (Araújo Filho, 2019, p. 48). É onde acontece a sistematização dos saberes construídos durante a resolução da Situação Didática Olímpica apresentada e discutida nas fases anteriores.

Nesse sentido, cabe ao professor ao finalizar o processo, justamente na etapa de institucionalização, atribuir ao conhecimento construído pelos alunos o status de saber válido e compartilhado, proporcionando que os estudantes possam substituir suas concepções anteriores por novas compreensões do problema para aplicações futuras (Brousseau, 2008).

Na fase de institucionalização, o professor "[...] faz o fechamento retomando o controle das atividades, sintetizando os conhecimentos e as ligações com o saber cultural dos alunos" (Maia, 2021, p. 55). Nesse sentido, após a exploração, comunicação e validação dos alunos, o professor intervém, explicitando e correlacionando o problema a um conteúdo formal do currículo matemático. A Situação Didática Olímpica descrita constitui uma excelente tarefa eficaz para que o aluno vá da exploração empírica inicial ao processo de validação de diversas estratégias, propiciando a consolidação de seus conhecimentos em contagem e Análise Combinatória.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Engenharia Didática associada à Teoria das Situações Didáticas tem relevantes contribuições para o ensino da Matemática, especialmente, no que diz respeito ao conteúdo de Análise Combinatória. A Engenharia Didática, como metodologia de investigação científica, centra-se no contexto de experimentação em sala de aula, tal abordagem favorece um caráter que leva em conta a reflexão interna e contínua sobre a ação prática do professor, possibilitando um aprimoramento cíclico constante do ensino.

Compreender como os alunos aprendem e avançam é o foco principal da Engenharia Didática, pois ela se dedica na observação e análise do comportamento dos estudantes, buscando entender como eles interagem com o conteúdo, no caso da presente pesquisa, a Análise Combinatória, e progridem em seu processo de aprendizado. A Engenharia Didática Clássica, nesse sentido, se apoia nos pilares do triângulo didático, a saber: a relação entre o aluno, o professor e o conhecimento, investigando a dinâmica desses três elementos no intuito de encontrar caminhos mais eficazes no que diz respeito ao aprendizado significativo.

Nesse sentido, a Engenharia Didática em suas duas primeiras fases, foi utilizada como metodologia de pesquisa em correlação com a Teoria das Situações Didáticas, como metodologia de ensino para a elaboração de Situações Didáticas Olímpicas com foco no conteúdo matemático de Análise Combinatória. Propôs-se a utilização de problemas do nível 3 da OBMEP que abordam questões de contagem, salientando o que se espera do aluno e professor em cada uma das quatro etapas da Teoria das Situações Didáticas.

Constatou-se no presente estudo que a Teoria das Situações Didáticas é imprescindível para compreender e modelar os processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, especialmente os associados à Análise Combinatória. Na articulação das quatro etapas da teoria – ação, formulação, validação e institucionalização – foi possível evidenciar a participação efetiva do aluno na construção de conhecimento, bem como a mediação do professor de forma estratégica na organização e proposta de situações que proporcionem a aprendizagem significativa e eficaz para potencializar o ensino de matemática.

Os fundamentos da Teoria das Situações Didáticas, de acordo com Guy Brousseau, descrito pelo trabalho de Almouloud (2007) demonstraram ser uma abordagem em Didática da Matemática que promove um contexto de interação dinâmica entre o professor, aluno e o saber matemático. Tal abordagem reforça a importância de ações pedagógicas que levem em conta o tempo e o ritmo de aprendizagem de cada aluno.

Um ponto relevante constado é que a centralidade do estudo não está no aluno ou professor, mas na situação didática olímpica em si, onde acontecem às interações entre o professor, o estudante e saber. Tal forma de ensino propicia a construção do conhecimento matemático, o diálogo e interação por meio de situações didáticas olímpicas que exploram habilidades críticas, criativas, além de desenvolver potencialmente o raciocínio lógico

Vale salientar que a elaboração e aplicação de sequências didáticas que proporcionem a inserção do aluno em um contexto dinâmico de aprendizagem ativa, autônoma e contínua em matemática é um dos princípios fundamentais para a prática pedagógica em sala de aula exitosa. A Teoria das Situações Didáticas oportuniza o entendimento aprofundado de como determinadas concepções, conceitos e ideias são formadas em sala de aula, possibilitando a análise mais apropriada do processo de aprendizagem do aluno e a contribuição do professor na construção do saber do estudante.

Além disso, as fases da teoria possibilitam a compreensão de como o aluno envolvido com as situações didáticas olímpicas aprendem matemática por meio da resolução de problemas no contexto olímpico diligentemente planejado. Na situação de ação, o estudante interage com o meio, na situação de formulação, organiza e busca expressar suas ideias, na situação de validação, testa suas hipóteses para verificar se o que pensou está correto. Por fim, na situação de institucionalização, o professor entre em cena para sistematizar o saber matemático, alcançado nas interações das três fases anteriores.

É uma abordagem metodológica de ensino que favorece a elaboração de sequências didáticas mais nítidas e palpáveis, do ponto de vista pedagógico e didático, porque promove um alinhamento imprescindível entre as perspectivas do professor e aluno. E no contexto da Análise Combinatória, a partir de problemas oriundos da OBMEP, a aplicação dessa teoria se mostra particularmente bem-sucedido.

Tal proposta tende a desafiar o processo de ensino e aprendizagem tradicional, apontando para uma educação mais inclusiva, democrática e transformadora, reconhecendo que todo aluno tem potencial de aprender e seja o protagonista do seu processo formativo. O professor tem um papel relevante na qualidade de mediador de processos significativos como um agente que propicia condições para que o estudante construa o próprio conhecimento de modo ativo e contextualizado.

Por esses motivos levaram à proposição de determinadas situações didáticas olímpicas destinadas ao ensino da Análise Combinatória, envolvendo problemas extraídos de edições da OBMEP, com o aporte metodológico investigativo da Engenharia Didática associada à Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, com possibilidade de aplicação nas três séries do

Ensino Médio, conforme sugerido na BNCC (2018), com a finalidade de propiciar o desenvolvimento das habilidades do aluno orientadas à aplicação das técnicas de contagem.

Dessa forma, constatou-se que a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau, e utilizadas neste trabalho na elaboração das três Situações Didáticas Olímpicas, proporciona uma base teórica consistente para compreender e modelar a relação entre o aluno, o professor e o saber por meio de situações específicas de ensino e aprendizagem da Matemática. Tal teoria propõe a elaborações de situações didáticas, em que há a mediação intencional do professor, além das situações adidáticas, nas quais o estudante atua de forma autônoma diante de um problema, sem a intervenção direta do professor, embora a situação tenha sido planejada por ele.

Além disso, as Situações Didáticas Olímpicas estruturadas com base na Teoria das Situações Didáticas Olímpicas propiciam que a ação do aluno em interação com as situações seja o elemento precípuo do processo de aprendizagem, fazendo com que haja a internalização dos conceitos e conteúdos trabalhados, além de propiciar a transformação do conhecimento científico em saber escolar.

Cumpre destacar, ainda, que novas pesquisas sobre Situações Didáticas Olímpicas e Engenharia Didática aplicada à Análise Combinatória no contexto da OBMEP poderão surgir a partir de diferentes abordagens e enfoques matemáticos. Dessa forma, outros estudos e análises relacionados ao assunto podem ser desenvolvidos, evidenciando que o presente estudo não busca exaurir as possibilidades investigativas acerca do tema.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Mate**mática. ED. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. **Engenharia didática**: evolução e diversidade. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: https://revemat.ufsc.br/. Acesso em: 4 fev. 2025.

ALVES DA SILVA, José Gleison; VIEIRA ALVES, Francisco Régis; MENEZES, Daniel Brandão. Engenharia Didática (ED) aplicada a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e privadas (OBMEP): Situações Didáticas Olímpicas (SDO) para o ensino de geometria Euclidiana plana. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], v. 17, p. e020047, 2020. DOI: 10.37001/remat25269062v17id416. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/168. Acesso em: 19 nov. 2025.

ALVES, F. R. V. Visualizing the Olympic Didactical Situation (ODS): Teaching Mathematics with support of GeoGebra software. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n. 2, p. 97-116, 2019. DOI: 10.24193/adn.12.2.8.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia didática de formação (edf): Repercussões para a formação do professor de matemática no brasil. **Educação matemática em revista**, [s. l.], v. 2, n. 18, p.121–137, 2017.

ALVES, Francisco Regis Vieira. SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA (SDO): APLICAÇÕES DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE OLIMPÍADAS. **Revista Contexto & Educação**, [S. l.], v. 36, n. 113, p. 116–142, 2021. DOI: 10.21527/2179-1309.2021.113.116-142. Disponível em: https://revistas.unijui.edu.br/index.php/contextoeducacao/article/view/7992. Acesso em: 16 nov. 2025.

ALVES, Francisco Regis Vieira. **Transição Complexa Do Cálculo - Tcc:** Engenharia Didática Para As Noções De Sequências, Séries E Série De Potências. **Educação Matemática em Revista - RS**, [S. l.], v. 1, n. 17, 2016. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/1530. Acesso em: 25 jul. 2025.

ALVES, Francisco Régis Vieira; DIAS, Marlene Alves. Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). **REVEMAT:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 192-209, 2018. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2017v12n2p192/36380. Acesso em: 25 fev. 2025.

AMÉRICO, Gilmar Virgolino. **Resolução de problemas sobre Análise Combinatória para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2013.

AMORIM, Anderson Cardoso de. **Utilização de teodolitos manuais na educação básica:** Uma abordagem de ensino de trigonometria com Engenharia Didática. 2023. 118 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) - Universidade Regional do Cariri – URCA, Cariri, 2023.

ANSELMO, C. A. de F.; BARONI, A. K. C. Mapeando o pensamento combinatório na BNCC: conexões explícitas e implícitas. **Revista Ciência em Evidência** , [S. l.], v. 5, n. FC, p. e024002, 2024. DOI: 10.47734/rce.v5iFC.2572. Disponível em: https://ojs.ifsp.edu.br/cienciaevidencia/article/view/2572. Acesso em: 1 maio. 2025.

ARAÚJO FILHO, José Ednaldo. **Situações Didáticas Olímpicas (SDO) para o ensino de Geometria Plana:** um contributo da Engenharia Didática, 2019. 65f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2019.

ARAÚJO, Péricles Bedrethuck. **Situações de Aprendizagem:** a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o Geogebra. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, [s. l.], v. 9, n. 3, p. 281–308, 1988.

ARTIGUE, Michelle. **Engenharia didática:** didáticas das matemáticas (Dir. Jean Brun). Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget; Horizontes Pedagógicos, 1996.

ARTIGUE, Michèlle. Ingenieria Didática. In: Artigue, Michèlle; Douady, R.; Moreno, L; Gomez, P. **Ingeniéria didática em Educacion Matemática.** Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, cap. 4, p. 33-59.

BASTOS, A. C. O Ensino da Análise Combinatória em Sala de Aula, a Partir de Situações-Problema e Sob uma Abordagem Histórica. In: **XVII Encontro Nacional de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**, Instituto Federal do Espírito Santo, 2013.

BATISTA DA SILVA, Vanúbya; MARTINS, Glêndara Aparecida de Sousa; TEIXEIRA, Paulo Cléber M.; SILVA, Warley Gramacho da. A IMPORTÂNCIA DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO NO CONTEXTO DA COMPREENSÃO DE CONTEÚDOS. DESAFIOS - Revista **Interdisciplinar da Universidade Federal do Tocantins**, [S. l.], v. 9, n. Especial, p. 59–70, 2022. DOI: 10.20873/uftsupl2022- 12807. Disponível em: https://sistemas.uft.edu.br/periodicos/index.php/desafios/article/view/12807. Acesso em: 05 dez. 2024.

BEZERRA, Mírian Fran Santos. **O Papel da OBMEP na Estimulação do Aprofundamento no Estudo da Matemática Entre Alunos Premiados.** 2024. 56 f., il. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Caruaru, 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC):** educação é base. Brasília, DF: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior**. Diretoria de Avaliação. Documento de área: Área 46 – Ensino. Brasília, DF:

CAPES, 2019. Disponível em: <https://www.capes.gov.br/avaliacao/instrumentos-de-apoio/documentos-de-area>. Acesso em: 2 mai 2025.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches em didactique des mathématiques, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, Guy. **Ingéniere didactique.** D'un problème à létude à priori d'une situation didactique. Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques, Olivet, 39-60, 1982.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas:** Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 13, n. 1, p. 87–120, 2005. DOI: 10.20396/zet.v13i23.8646981. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646981. Acesso em: 27 set. 2024.

CASTRO, Emanuela Moura de Melo. **O ensino da proporcionalidade na perspectiva da teoria das situações didáticas:** uma engenharia didática com estudantes do 9º ano do ensino fundamental. 2023. 155 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2023.

COCCO, Eliane Maria. **Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas e avaliação em larga escala: possíveis interlocuções.** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Frederico Westphalen, 2013.

COSTA, Jaldir de Oliveira. **Guia de ensino para análise combinatória a partir dos livros didáticos, ENEM e BNCC.** Campina Grande, 2021. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Temas e debates. In: D'AMBRÓSIO, Beatriz. **Como ensinar Matemática hoje.** 1989 ed. Brasília: SBEM, 1989. p. 15-19.

DIAS, Reinaldo Amirato; FREITAS, Adriano Vargas; VICTER, Eline das Flores. Noções de análise combinatória na Educação Básica: atividades interdisciplinares. **Educação Matemática Debate,** Montes Claros, v. 1, n. 3, p. 296–313, 2017. DOI: 10.24116/emd25266136v1n32017a03. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/39. Acesso em: 21 jul. 2025.

DOUADY, Régine. **A Universidade e a Didática da Matemática**. Caderno da RPM, v.1, n.1, 1993.

FERNANDES, Alessandra dos Santos. **Resolução de problemas olímpicos envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade através da Metodologia de Polya.** 2021. 223 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Pura e Aplicada) – Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Blumenau, 2021.

FERREIRA, Francinária Parente. **Análise combinatória no ensino médio:** uma abordagem sem o uso de fórmulas. 2013. 80 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2013.

FILHO, Kleber Silva. **Combinatória na OBMEP**: uma análise de questões da primeira fase do nível 3. 2020. 84 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 3, n. 1, p. 1–38, 1995. DOI: 10.20396/zet.v3i4.8646877. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877. Acesso em: 11 jan. 2025.

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA (IMPA). **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).** Disponível em: https://www.obmep.org.br/. Acesso em: 14 out. 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA (IMPA). **Regulamento da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP 2025**. Rio de Janeiro: IMPA, 2025. Disponível em: https://www.obmep.org.br/regulamento.htm. Acesso em: 17 jul. 2025.
Interciência, 1995.

LIMA, Ana Paula Barbosa. **Princípio fundamental da contagem**: conhecimentos de professores de matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. 2015. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

LIMA, Maria Luziana Oliveira. **Situações didáticas olímpicas para o ensino de sequências numéricas: um contributo da engenharia didática.** 2019. 87 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

LIMA. Francisco Daniel Souza de. **Situações didáticas olímpicas para o ensino de funções: o contributo da engenharia didática de segunda geração**. 2019. 122 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

MACHADO, S.D.A. (org.). **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

MAIA, Beatriz Maria Pereira. O ensino de polígonos de Brahmagupta com o amparo do software Geogebra: um contributo da engenharia didática. 2021. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.

MAIA, Lucas Emanuel de Oliveira. **Construções de situações didáticas utilizando o software Modellus e sua conexão com a engenharia didática e a modelagem matemática à luz do objeto de conhecimento de funções do SPAECE.** 2023. 191 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2023.

MARANHÃO, Tatiana de P. A. **Avaliação de Impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP - 2005/2009).** In: BRASIL. Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas escolas públicas (OBMEP). Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011.
Matemática)-Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 1999.

MOREIRA, M. A. O **mestrado (profissional) em ensino. Revista Brasileira de Pós-Graduação**, [S. l.], v. 1, n. 1, 2011. DOI: 10.21713/2358-2332.2004.v1.26. Disponível em: https://rbpg.capes.gov.br/rbpg/article/view/26. Acesso em: 2 maio. 2025.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta.** 3. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2022.

MORGADO, Augusto César. **Análise Combinatória e probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NORO, Ana Paula. **Contribuições da engenharia didática para o ensino e aprendizagem de poliedros.** 2012. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão Área de Ciências Tecnológicas, Centro Universitário Franciscano -UNIFRA, Santa Maria, 2012.

OLIVEIRA NETO. João Evangelista de. **Situações didáticas olímpicas aplicadas a problemas de geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).** 2019. 64 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

OLIVEIRA, Cícera Carla do Nascimento. **Olimpíadas de Matemática: concepção e descrição de "situações olímpicas" com o recurso do software Geogebra.** 2016. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

OLIVEIRA, Meirivâni Menezes de. **Ensino de funções por meio da videoanalise:** um contributo da engenharia didática. 2019. 135 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.
para as noções de Sequências, Séries e Séries de Potências. Educação Matemática em Revista, RS, v.1, n. 17, p. 83-97, 2016.

PASSOS MACHADO VIEIRA, R.; VIEIRA ALVES, F. R.; MACHADO CRUZ CATARINO, P. M. O Estudo Do Modelo Combinatório De Padovan Por Meio Da Engenharia Didática. Revista Binacional Brasil-Argentina: **Diálogo entre as ciências**, [S. l.], v. 12, n. 01, p. 397-416, 2023. DOI: 10.22481/rbba.v12i01.11698. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/index.php/rbba/article/view/11698. Acesso em: 5 mar. 2025.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.** 2009. 267 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CE. Educação, 2009.

PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.** São Paulo, 2013. Disponível em:< http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf>. Acesso em: 01 mar. 2025.

SANTIAGO, Paulo Vitor da Silva. **Olimpíada Internacional de Matemática:** situações didáticas olímpicas no ensino de geometria plana. 2021. 160 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.

SANTOS, A. P. R. A.; ALVES, F. R. V. A teoria das Situações Didáticas no ensino das Olimpíadas de Matemática: Uma Aplicação do Teorema de Pitot. **Revista Indagatio Didactica**, v.9, n.4, p.279-296, 2017.

SILVA, B. **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

SILVA, J. G. A. da; ALVES, F. R. V.; MENEZES, D. B. Situação Didática Olímpica - SDO: um problema olímpico aplicado à teoria das situações didáticas. **Revista Thema**, Pelotas, v. 19, n. 2, p. 265–278, 2021. DOI: 10.15536/thema.V19.2021.265-278.1725. Disponível em: https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/1725. Acesso em: 14 nov. 2025.

SOUSA, Jose Claudimar de. **A importância do ensino do princípio multiplicativo na educação básica [recurso eletrônico].** 2023. 51 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profissional) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Sobral, 2023.

STURM, Wilton. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa.** 1999. 94 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: 20.500.12733/1590495. Acesso em: 2 dez. 2025.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 21, n. 1, p. 155–168, 2014. DOI: 10.20396/zet.v21i39.8646602. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646602. Acesso em: 5 mar. 2025.

VIEIRA, Renata Passos Machado; ALVES, Francisco Regis Vieira; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. **A engenharia didática na formação inicial de professores de matemática:** o estudo da generalização e complexificação da sequência de Padovan. Fortaleza: EDIFCE, 2023.

APÊNDICE A – CONCEPÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS

CONCEPÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS

FELIPE TEIXEIRA VIEIRA
FABRÍCIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA

2025

1 APRESENTAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

O Produto Educacional (PE) consiste em um instrumento pedagógico produzido no âmbito de uma pesquisa científica com o objetivo de articular teoria e prática, promovendo a melhoria do ensino e aprendizagem de um determinado tema ou conteúdo. É um recurso didático para se aplicar o conhecimento teórico e prático adquirido ao longo do mestrado para resolver situações reais do contexto educacional (Oliveira Neto, 2019).

Ainda, a orientação voltada para a aplicação na prática de conhecimentos produzidos em programas profissionais é de que o requisito fundamental das pesquisas desenvolvidas tenha como alvo precípuo a elaboração de:

> [...] um processo ou produto educativo e aplicado em condições reais de sala de aula ou outros espaços de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser, por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, uma exposição, entre outros. A dissertação/tese deve ser uma reflexão sobre a elaboração e aplicação do produto educacional respaldado no referencial teórico metodológico escolhido (Brasil, 2019, p.15).

O presente capítulo tem por finalidade a descrição de um conjunto de três situações didáticas olímpicas (SDO) que abordam conteúdos de Análise Combinatória, compostas com problemas oriundos da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Tais situações foram selecionadas e dispostas com o objetivo de explorar conceitos fundamentais, a saber, o princípio multiplicativo, permutações e combinações, proporcionando ao aluno desenvolver habilidades específicas, o raciocínio lógico, argumentação matemática precisa, bem como a autonomia no processo de resolução dos problemas típicos do contexto olímpico.

2 DESCRIÇÕES DE TRÊS SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS (SDO)

Apresentam-se, a seguir, três Situações Didáticas Olímpicas (SDO), desenvolvidas com a finalidade de potencializar a aprendizagem de conceitos e estratégias de resolução de problemas de matemática oriundos da OBMEP concernentes ao conteúdo de Análise Combinatória, à luz da Teoria das Situações Didáticas e da metodologia de pesquisa denominada de Engenharia Didática de primeira geração. Uma SDO, nesse sentido, consiste na associação de uma metodologia de ensino, no caso, a Teoria das Situações Didáticas, a um Problema Olímpico, extraído de algumas edições da OBMEP, nível III.

2.1 SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA 1

Conhecimentos Prévios:

- Compreensão de números naturais de 4 algarismos;
- Noção de restrições, ou seja, saber excluir o algarismo zero e limitar a quantidade de vezes que um determinado dígito aparece;
- Aplicar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

(Problema da OBMEP 2005 – Fase 1 – Nível 3 – Questão 9 – Item A) - Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 000 a 9 999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

(A) 32

(B) 36

(C) 45

(D) 46

(E) 48

Situação de Ação: Nesta fase, o aluno tem o contato inicial com o enunciado da Situação Didática Olímpica proposta. Presume-se que o estudante elabore uma estratégia de resolução do problema com os conhecimentos matemáticos que já possui. É o momento "[...] essencial para o aluno exprimir suas escolhas e decisões por ações sobre o *milieu* (o meio). Nela, as interações estão centralizadas na tomada de decisões" (Almouloud, 2007, p. 38).

É nesse momento que a tomada de decisão do aluno é relevante para a investigação e interpretação do problema a ser solucionado. Espera-se que o estudante ao entrar em contato com a situação proposta, utilize os conteúdos prévios de contagem de algarismos na formação de números naturais, o princípio multiplicativo, a restrição na contagem e saber distinguir as expressões "ao menos", "no máximo" e "exatamente" expresso no enunciado, além da restrição exigida em relação à presença ou não do zero.

O aluno é colocado diante uma situação-problema olímpica sem que haja a intervenção de forma direta do professor no que diz respeito a explicações ou procedimentos pré-definidos para se resolver. O objetivo é fazer com que estudante interaja livremente com o meio e as informações disponíveis, e tente resolver o problema com os recursos que dispõe. É a fase que o conhecimento ainda não está formalizado, mas está imergindo das interações.

Nesta presente fase, portanto, espera-se que o aluno ao entrar em contato com a situação, leia o enunciado do problema e perceba que ele exige que os números a serem formados sejam com quatro algarismo de 1.000 a 9.999, em que o algarismo 7 apareça exatamente três vezes e o zero não apareça. O aluno testa a primeira restrição que é a presença do zero — ou seja, o número 7770 — e sabe que não pode ser utilizado. Na segunda tentativa, ele testa a restrição de ter exatamente três setes — ou seja, 7777 — e percebe que não pode haver quatro setes, conforme o enunciado.

Na terceira tentativa, o aluno testa os seguintes casos: 7771, 7772, 7773, 7774, 7775, 7776, 7778, 7779 e percebe que obteve sucesso ao encontrar um bilhete válido. Após a tentativa de êxito, espera-se que o aluno reconheça as outras posições que o 7 pode ocupar e que comece a listar as possíveis configurações para a posição dos três dígitos 7 e o algarismo distinto, ou seja, os números da seguinte forma: 777X, 77X7, 7X77 e X777, em que o "X" representa o algarismo diferentes.

Sendo assim, a fase da dialética da ação coloca o aluno ante uma situação-problema sem a interferência direta do professor, para que ele possa interagir de forma livre com o meio e informações disponíveis, buscando resolver o problema por meio da exploração e experimentação, mobilizando apenas seus conhecimentos prévios. O estudante também "[...] pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar outro" (Almouloud, 2007, p. 37).

Situação de Formulação: O aluno, nesta fase, ao entrar em contato com a situação proposta, tem a oportunidade de trocar "[...] informações com uma ou várias pessoas, que serão os emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais" (Almouloud, 2007, p. 38). É a fase que se caracteriza por uma intensificação no diálogo dos alunos com os demais colegas, que colaboram entre si na busca de estratégias e um modelo matemático mais adequado à resolução do problema proposto na situação didática.

É a fase em que o mais importante é a troca de informações (Almouloud, 2007). Espera-se que, neste momento do processo, os alunos troquem mensagens entre si, escritas ou verbais, sobre os prováveis padrões observados na fase anterior no processo de resolução do problema. O aluno tende a organizar, expressar e expor suas ideias e estratégias sobre a questão por meio de uma linguagem natural ou mesmo matemática.

Espera-se que, neste momento, o aluno individualmente ou coletivamente com seus colegas explicite quais instrumentos foram utilizados para se chegar à solução procurada, bem como a solução propriamente dita. O objetivo dessa fase é fazer com que o estudante tenha condições de construir "[...] progressivamente, uma linguagem compreensível por todos, que considere os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática ((Almouloud, 2007, p. 38).

Na fase de formulação, o aluno já é capaz de organizar e estruturar seu raciocínio, além de reconhecer a importância de comunicar sua solução de forma compreensível e devidamente justificada. Espera-se, nesse sentido, que o estudante articule e comunique sua descoberta e generalize a partir de agora as regras e observações inferidas na fase anterior.

Estima-se que a partir desse momento do processo, o aluno perceba a regra sobre o dígito “X” — ou seja, não ser o zero e o sete — e comece a verificar quais números podem ser formados com os padrões encontrados na etapa anterior: 777X, 77X7, 7X77 e X777. O estudante fazer a contagem das possibilidades para “X”, ou seja, se o “X” não pode ser zero e sete, e os algarismos são de 0 a 9, então “X” pode ser: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. Isso dá 8 possibilidades para “X”. O aluno confirma a validade da regra encontrada para a formação dos números com as restrições impostas no enunciado.

Assim, os estudantes envolvidos na Situação Didática Olímpica estão na ocasião central do processo de aprendizagem, em que os alunos comunicam as hipóteses e estratégias alcançadas com os demais colegas. Nessa interação há o favorecimento da construção de modelos de resolução bem mais estruturados e consistentes. Essa comunicação passa a ser uma ferramenta imprescindível para a validação conjunta e progresso no entendimento da situação didática (Castro, 2023).

Situação de Validação: Esta fase tem como finalidade a “[...] validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e formulação” (Almouloud, 2007, p. 40). É o momento de o aluno apresentar sua solução do problema no intuito de convencer os demais colegas e professor por meio de uma linguagem matemática. Espera-se que as pessoas envolvidas se comuniquem ativamente pra verificar se suas conclusões ou proposições coincidam com as dos demais participantes (Lima, 2019).

É esperado do aluno, nesta etapa, que ele justifique suas escolhas realizadas nas fases anteriores e especifique as estratégias matemáticas empregadas na solução da situação que lhe foi proposta. É o momento dedicado à revisão crítica dos raciocínios com a finalidade de eliminar as possíveis inconsistências presentes no processo, além das prováveis contradições das estratégias matemáticos que por ventura não tenha sido observada nas fases anteriores.

Ressalta-se que, neste estágio, o aluno tente validar suas formulações por meio de argumentos consistentes ou que ofereça algum contra-exemplo para que demonstre a solidez da situação proposta. A situação didática guia-os por “[...] um processo para garantir que eles usem estratégias certas. Dessa forma, a falha é o ponto de partida, o processo de construção de conhecimento" (Araújo Filho, 2019, p. 34).

É esperado do estudante que ele verifique se a sua solução abrange todos os casos possíveis e que não faça a inclusão de situações inválidas. Espera-se que o aluno verifique cada configuração de número formado com tais restrições contidas no enunciado. No caso, 777X, o dígito que "X" assume pode ser 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, tem-se oito números. Todos com exatamente três setes e nenhum zero. Seguindo a mesma lógica, verifica-se para os casos 77X7, 7X77 e X777, sendo também oito números para cada caso. Totalizando 32 números com exatamente três setes e nenhum zero.

Também é esperado que o estudante verifique se pensou em todas as possibilidades de ter um número com três setes e nenhum zero. Além disso, constatar que a posição do algarismo diferente de sete pode vir na unidade, dezena, centena ou unidade de milhar, ou seja, não há outras formas. Espera-se que a linguagem empregada pelo aluno seja formal e que a solução do problema esteja alicerçada em mecanismos de demonstração matemática.

Situação de Institucionalização: Durante as três fases iniciais na há uma intervenção direta do professor, pois ele somente oferece orientações mínimas quando necessário para prevenir de possíveis obstáculos. Agora, na fase de institucionalização, o professor "[...] expõe suas intenções de ensino e sintetiza o conhecimento" (Castro, 2023, p. 61). É o momento da formalização pelo professor do saber matemático construído nas três primeiras fases pelo aluno que e que será integrado no repertório formal de conhecimento.

É a fase de grande relevância, pois "[...] professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber" (Almouloud, 2007, p. 40). Uma vez que o professor interviu para consolidar a aprendizagem e conhecimento matemático construído, agora o aluno ou professor em conjunto organiza a solução de uma forma mais explicita. É momento da sistematização da solução da situação proposta.

Assim, identificam-se os quatro padrões possíveis para os algarismos — ou seja, 777X, 77X7, 7X77 e X777. Para cada padrão, determinam-se os dígitos válidos para a posição "X" — ou seja, todos de 1 a 9, com exceção do 0 e o 7, totalizando, assim, 8 números de quatro algarismos com exatamente três setes e sem o zero, em cada caso. Por fim, realizando-se a soma das possibilidades 8 + 8 + 8 + 8 = 32. Com base no enunciado, Marcelo comprou um total de 32 bilhetes. É nesta fase que a intenção do professor que sugeriu a situação didática olímpica é explicitada e o conhecimento obtido tem o caráter universal.

2.2 SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA 2

Conhecimentos Prévios:

- Noção de oposição espacial (noção de uma parede estar de frente para outra);
- Leitura e interpretação de restrições;
- Distribuição sem repetição de elementos (cada cor será utilizada uma única vez, sem repetir);
- Aplicar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

(Problema da OBMEP 2007 – Fase 1 – Nível 3 – Questão 11 – Item B) – Manoela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. Quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

(A) 8

(B) 16

(C) 18

(D) 20

(E) 24

Situação de Ação – Neste momento, o aluno inicia sua ação a partir do enunciado do problema proposto, bem como dos elementos contidos nele. Espera-se que o aluno se familiarize com as informações contidas no enunciado para que possa compreendê-lo. É a fase que “[...] prevalece o momento da intuição e o raciocínio matemático” (Maia, 2023, p. 1224). É o momento de o aluno tomar decisões a partir dos resultados observados na ação.

É nessa fase que o aluno identifica quais instrumentos são necessários para realizar a resolução do problema. É a etapa que se estabelece as condições essenciais para que ocorra o desenvolvimento do pensamento matemático, pois coloca o aluno numa posição de tomada de decisão, mesmo que, por vezes, não entenda muito bem suas razões (Brousseau, 2008). Espera-se que o aluno possa “[...] realizar a escolha que desejar e não é necessário se comunicar. Ele facilmente realiza o que é proposto” (Santiago, 2021, p. 52).

Espera-se que o aluno tente resolver o problema, agindo sobre ele para buscar uma solução inicial. Assim, o estudante tem um desafio de pintar as quatro paredes com cores diferentes — azul, rosa, verde e branco — sem que a cor azul e rosa fiquem em paredes opostas — Frente/Fundo ou Esquerda/Direita — o aluno inicia testando as possibilidades a partir da fixação de uma cor inicial para uma parede, por exemplo o azul.

Temos aqui um passo importante, pois é o momento "[...] em que o estudante tenta compreender e adaptar-se a um meio didático denominado por Brousseau de *milieu*, ao qual foi exposto, sendo então, levado a tomar decisões, analisar e verificar seus resultados" (Oliveira, 2019, p. 30). Nesse sentido, ao se deparar com a situação-problema proposta, o aluno escolhe arbitrariamente a cor azul e, ao considerar a parede oposta, aplica a restrição do problema, desconsiderando a cor rosa para essa parede.

Espera-se do aluno, ao iniciar com a restrição imposta, que faça a escolha das cores restantes, mostrando uma tentativa de dispor as possibilidades. É uma fase fundamental, porque propicia o envolvimento do estudante de forma direta com o problema, fazendo com ele se utilize dos conhecimentos prévios sobre noção de oposição espacial, distribuição das cores sem repetição, restrição e princípio multiplicativo.

Sendo assim, a fase de situação da ação se caracteriza como a experimentação inicial, em que a tentativa, bem como o erro conduz o aluno a possibilidade de explorar a estrutura do problema proposto. O professor não tem uma interferência direta na resolução do problema, ficando a cargo do aluno a interação com o meio e com os dados dispostos, mobilizando apenas seus conhecimentos prévios. É uma etapa que "[...] se predomina o aspecto experimental do conhecimmento." (Lima, 2019, p. 38).

Situação de Formulação – Neste momento do processo, os alunos discutem entre seus pares, compartilhando e aprimorando ideias com o intuito de obter um modelo matemático para solucionar o problema proposta. É a etapa que o estudante apresenta as estratégias, além também de mostrar as ferramentas que foram utilizadas para se obter a solução do problema de forma oral ou escrita.

É a etapa que o estudante "[...] faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema, mas sem a intenção de julgamento sobre validade, embora contenham implicitamente intenções de validação (Machado, 1999, p. 79). Ainda, o aluno deve ser incentivado a descrever suas estratégias, comunicar as descobertas realizadas e, se possível, formular hipóteses para a resolução do problema.

É o momento em que o aluno utiliza diferentes regras operacionais sem, contudo, estar preparado para justificar a validade de suas decisões e ações. Ele pode formular uma sequência de passos lógicos: primeiro, escolhe a cor inicial; em seguida, lida com a restrição da parede oposta; por fim, preenche as restantes. Ao perceber que, feita à escolha da cor inicial — no caso, azul —, sobram duas opções de cor para pinta a parede oposta (verde ou branco). Dessa forma, observa-se a aplicação direta da restrição previamente estabelecida: a cor rosa não pode ser utilizada nessa posição.

Nesse sentido, ao descrever as escolhas de forma sequencial — 4 possibilidades para a primeira parede, 2 para a parede oposta, 2 para a terceira parede e 1 para a quarta e última —, o aluno elabora, mesmo de forma intuitiva, um modelo de solução combinatório para a resolução do problema proposto. É a etapa “[...] marcada pelas discussões e modelagem matemática realizada pelos alunos (Oliveira, 2016, p. 60).

O estudante, nesse momento, não somente reconhece as restrições, mas propõe uma sequência de decisões, explicitando sua linha de raciocínio, oral ou escrita. Dessa forma, a fase de formulação traduz a transição do nível de manipulação empírica para um raciocínio de natureza lógica, embora ainda não esteja formalizado o processo matemático envolvido.

Assim, espera-se que o aluno faça uso de uma linguagem que demonstre a tentativa de organizar o seu raciocínio, além de expressar as decisões que são tomas em cada fase do processo de pintura das paredes. Ainda que de forma incipiente, o aluno é capaz de formular as restrições impostas no problema, além de identificar as possibilidades recorrentes. “Como resultado, essa dialética permite criar um modelo explicito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas (Almouloud, 2007, p. 38).

Situação de Validação – Nesta fase, o estudante tem a incumbência de tentar provar que as suas formulações estão corretas ou buscar contra-exemplos. Espera-se que o aluno mostre “[...] a validade das possíveis soluções dos diversos modelos criados por eles em linguagem matemática (modelo da situação) submetendo à apreciação e ao julgamento de seus colegas de grupo ou de sala” (Oliveira Neto, 2019, p. 20).

A solução proposta é apresentada para que seja defendido pelo aluno, com o intuito testar e validar as suas estratégias utilizadas na resolução. Nesta fase, o estudante é estimulado a argumentar e justificar suas ideias diante do público, proporcionando uma reflexão coletiva. Espera-se que o aluno não só comunique “[...] uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado” (Brousseau, 2008, p. 27).

A fase de validação ocorre a partir do momento que o estudante examina de forma crítica sua solução, verificando se ela é ou não coerente ao problema proposto. O estudante busca validar as suas ideias das situações anteriores, a saber: de ação e de formulação. Nessa busca, ele precisa também justificar, por meio da linguagem matemática, a consistência das distintas soluções propostas nos modelos elaborados, submetendo à apreciação e juízo dos demais colegas (Almouloud, 2007).

A estrutura da solução apresentada para a Situação Didática Olímpica, ou seja, 4 x 2 x 2 = 16, considera-se a própria validação do raciocínio para a solução do problema apresentado. Espera-se do aluno que ele não somente mostre um número, mas divulgue o passo a passo de como obteve a solução, evidenciado a correção de suas escolhas. Os números multiplicados — 4, 2, 2 — representam a justificação matemática para o resultado.

Espera-se do aluno que ele reconheça que qualquer uma das 4 paredes pode ser a primeira a ser pintada de azul. Se a primeira parede foi pintada de azul, espera-se que o aluno perceba que a parede oposta a primeira só pode ser verde ou branca, pois o rosa faz parte da validação da restrição. Por fim, para as duas paredes adjacentes à parede azul — e não oposta a ela —, só restam duas cores. O "2" vem da escolha entre as duas cores restantes para a terceira parede, e o "1" implícito para a última parede.

Sendo assim, a sequência de multiplicações realizadas evidencia um encadeamento lógico de tomadas de decisões que leva o aluno ao total de 16 maneiras distintas para a pintura do quarto. Além disso, embora não esteja explicitamente nomeada, a solução da situação está empregando o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo. É o momento que o aluno está validando sua estratégia de resolução por meio de um cálculo combinatório.

Situação de Institucionalização – Nas fases precedentes, o papel do professor é de mínima intervenção, limitando-se a orientar o aluno para que não haja a possibilidade de bloqueios. É o momento que o professor pega a solução "4 x 2 x 2 = 16" e a generaliza, fazendo conexões aos conceitos matemáticos formais. Nesta fase, "[...] o conhecimento é claramente estabelecido pelo professor e passa a ser o conhecimento oficial que os alunos devem utilizar para resolver problemas" (Santiago, 2021, p. 55).

Na fase de institucionalização, o professor precisa assumir a função de sistematizador do conhecimento. É nessa ocasião que a linguagem informal emprega anteriormente pelo aluno é transformada em uma linguagem formal. É o momento que o professor pode retomar a estratégia utilizada pelo estudante e explicá-la por meio do Princípio Multiplicativo, reforçando o conceito de permutação com restrição, além de ter a oportunidade de apresentar outra abordagem, como por exemplo: calcular o total de permutações sem restrição 4! = 24 e subtrair os casos em que o azul e o rosa estão frente a frente — 2 pares opostos x 2 ordens x 2! Cores restantes = 8 —, encontrando o valor de 16 maneiras para pintar a parede.

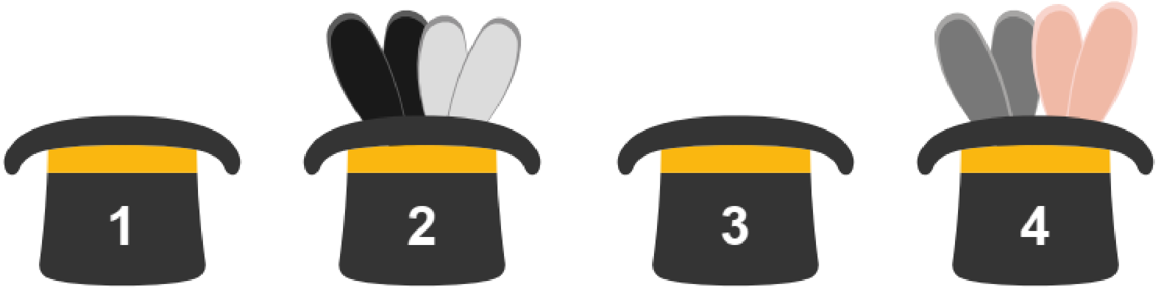
Assim, o professor ao expor outras formas de resolução e comparação de estruturas, propicia a ampliação do campo de compreensão do estudante, além de inseri-lo no discurso matemático institucionalizado. É a etapa em que "[...] o professor fixa, convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber" (Almouloud, 2007, p. 40).

2.3 SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA 3

Conhecimentos Prévios:

- Compreensão e aplicação do Princípio Multiplicativo da Contagem;
- Domínio de combinação de elementos (binômio);
- Capacidade de identificar subconjuntos sem repetição e sem ordem;
- Leitura atenta e interpretação de problemas com condições;
- Habilidade de organizar e representar mentalmente agrupamentos.

(Problema da OBMEP 2024 – Fase 1 – Nível 3 – Questão 9 – Item C) Um mágico tem quatro coelhos de cores diferentes e quatro cartolas numeradas de 1 a 4. De quantas maneiras distintas dois coelhos podem ficar em uma mesma cartola e os outros dois em outra?



(A) 360
(B) 72
(C) 36
(D) 16
(E) 4

Situação de Ação – Trata-se da fase em que o aluno começa a ter ação a partir do contato inicial com o enunciado, utilizando somente as construções que são providas por ele. “As relações e os significados matemáticos devem ser depurados na etapa inicial” (Alves, 2016, p. 87). É a fase em que o professor propõe problemas na forma de questões matemáticas, nas quais os estudantes possam agir, individualmente ou em coletivo, na busca das soluções sem a intervenção do professor.

É o momento que o aluno, a partir de suas interações com o *milieu* e nas retroações, tem condições de avaliar os efeitos de suas próprias ações, propiciando ajustes, melhoramentos ou até rejeição do modelo proposto inicialmente. É a etapa do processo que o estudante tem contato com a situação-problema proposta sem a intervenção direta do professor. Nela, as ações do estudante estão voltadas, sobretudo para a tomada de decisões diante dos problemas propostos.

Espera-se que nesta fase, a ênfase esteja na ação, na tentativa, no erro e na observação das consequências das ações do aluno. É uma etapa crucial para que o estudante possa "[...] exprimir suas escolhas e decisões sobre o milieu" (Almouloud, 2007, p. 38). Nesse contexto, ao ler o enunciado do problema, o aluno necessita interpretar que existem quatro coelhos diferentes (Branco, Cinza, Preto e Rosa), quatro cartolas e que apenas duas delas serão utilizadas, sendo que cada uma dessas cartolas deve conter exatamente dois coelhos.

Espera-se que o aluno comece a agir tentando formar pares de coelhos, associando esses pares as cartolas, e a partir daí listar as possibilidades. O *milieu* (meio), nesse caso, é constituído pelas regras da situação-problema e pelos objetos que fazem parte, ou seja, os coelhos, as cartolas e os pares. A interação do aluno com o meio deve ser intensa, para que ele possa perceber as regularidades e limitações, como o fato de que a ordem dos coelhos dentro da cartola não importa, além de que a escolha da primeira dupla determina à segunda.

Sendo assim, espera-se que o aluno reconheça quais conhecimentos e conteúdos já possui que podem ser mobilizados para que possa ser utilizado na resolução do problema proposta, possibilitando-o a agir em sua solução. "Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário" (Almouloud, 2007, p. 37). O estudante tem a oportunidade de estruturar suas próprias estratégias de resolução ao interagir com a situação.

Situação de Formulação – Nesta etapa, os estudantes estão empenhados com seus colegas, buscando estruturar uma representação matemática que os faça chegar à resolução do problema apresentado. É o momento de o aluno trocar informações com os outros colegas, individual ou coletivamente, por meio de mensagens orais ou escritas (Brousseau, 2008). Essa etapa versa sobre a criação de um ambiente favorável à elaboração de uma linguagem pelo aluno que seja pouco a pouco compreensível para os demais envolvidos.

É o momento que o aluno deve organizar suas ideias e externalizá-las, além de criar uma linguagem que lhe propicie a comunicação da estratégia utilizada na resolução do problema. Espera-se nesta etapa que o aluno possa construir seus próprios modelos de forma implícita, empregando uma linguagem acessível aos demais estudantes. É o momento de favorecimento tanto da comunicação entre os alunos quanto da orientação coletiva para que haja o desenvolvimento de estratégias de resoluções para que sejam compartilhadas.

Espera-se que o estudante, do ponto de vista combinatório, formule a seguinte estratégia de resolução do problema: Em primeiro lugar, a escolha de duas cartolas entre as quatro disponíveis para colocar os coelhos, ou seja, $C_{4,2} = 6$ possibilidades. Em seguida, a escolha de dois coelhos para ocupar uma das cartolas escolhidas, ou seja, $C_{4,2} = 6$ possibilidades. Por fim, as escolha dos dois coelhos restantes vão automaticamente para a outra cartola. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, tem-se: 6 (pares de cartolas) x 6 (pares de coelhos) = 36 formas diferentes.

Além disso, o aluno pode tentar outra possível formulação ao perceber que existem três maneiras de formar dois pares de coelhos diferentes, pois a ordem dos pares não influencia. Além disso, para cada divisão, há quatro cartolas possíveis para o primeiro par e, em seguida, três opções restantes para o segundo par, totalizando pelo Princípio Multiplicativo: 3 x 4 x 3 = 36 formas distintas.

Almouloud (2007) ressalta que a etapa de formulação "[...] consiste em proporcionar ao aluno condições para que este construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos, que considere os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática" (Almouloud, 2007, p. 38). Neste momento, há uma tentativa pelo aluno de construir sentido matemático, por meio dos conceitos da Análise Combinatória.

Sendo assim, espera-se que o aluno por meio de uma linguagem compreensível possa expressar aos demais colegas a construção de um raciocínio matemático com base nos conceitos como combinação, distribuição e o princípio multiplicativo para resolver a Situação Didática Olímpica proposta. É o momento não só de se expressar uma solução de forma oral ou escrita, mas também compreender os fundamentos matemáticos que a sustentam, proporcionando, assim, o pensamento matemático do aluno.

Situação de Validação – É a fase que o aluno deve demonstrar a validade das suas possíveis soluções (Oliveira Neto, 2019). Neste momento, o estudante deve procurar submeter sua solução em linguagem matemática à crítica, discutindo com o professor, comparando com a solução dos outros colegas ou por meio da reavaliação de seus próprios passos. Espera-se que o aluno verifique se faz sentido considerar a ordem das cartolas ou dos coelhos apresentados no enunciado do problema, e se há repetições nas combinações realizadas.

Esta etapa é um excelente recurso didático para explicitar aos alunos a relevância de se argumentar de forma lógica, baseado em evidências coerentes e sólidas. Também, oferece uma boa ocasião para que os estudantes desenvolvam suas habilidades de raciocínio lógico, além da compreensão significativa dos conteúdos matemáticos abordados.

Nesse sentido, a finalidade desta etapa no processo de construção do conhecimento matemático diz respeito à "[...] validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação, podendo se referir a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática” (Almouloud, 2007, p. 40). As duas soluções apresentadas na fase de formulação ressaltam um excelente ponto para trabalhar a validação, pois na primeira estratégia de solução, partiu-se da contagem combinatória direta, ou seja, escolher pares de cartolas e pares de coelhos. Na segunda, consideram-se as divisões possíveis dos coelhos em dois pares distintos e, em seguida, distribui essas duplas em cartolas, analisando a quantidade de maneiras possíveis.

Assim, espera-se que o aluno perceba que ambas as estratégias de resolução levam ao mesmo resultado, ou seja, 36 maneiras distintas, reforçando o argumento e validando a resposta obtida. Espera-se que o aluno reconheça que distintas abordagens de resolução podem ser matematicamente válidas, desde que estejam de acordo com os princípios formais de contagem. É a etapa que exige do estudante o exercício crítico, da comparação e da argumentação matemática, justificando sua resposta com rigor conceitual.

Situação de Institucionalização – Nesta fase, evitando interferências diretas nas etapas anteriores, o professor tem a sua atuação de forma pontual apenas para impedir bloqueios por parte do aluno. É o momento que “[...] o professor pesquisador entra em cena com a formalização do conhecimento matemático associado à construção” (Araújo Filho, 2019, p. 48). É onde acontece a sistematização dos saberes construídos durante a resolução da Situação Didática Olímpica apresentada e discutida nas fases anteriores.

Nesse sentido, cabe ao professor ao finalizar o processo, justamente na etapa de institucionalização, atribuir ao conhecimento construído pelos alunos o status de saber válido e compartilhado, proporcionando que os estudantes possam substituir suas concepções anteriores por novas compreensões do problema para aplicações futuras (Brousseau, 2008).

Na fase de institucionalização, o professor “[...] faz o fechamento retomando o controle das atividades, sintetizando os conhecimentos e as ligações com o saber cultural dos alunos” (Maia, 2021, p. 55). Nesse sentido, após a exploração, comunicação e validação dos alunos, o professor intervém, explicitando e correlacionando o problema a um conteúdo formal do currículo matemático. A Situação Didática Olímpica descrita constitui uma excelente tarefa eficaz para que o aluno vá da exploração empírica inicial ao processo de validação de diversas estratégias, propiciando a consolidação de seus conhecimentos em contagem e Análise Combinatória.

APÊNDICE B – ARTIGO SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS EM PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA DA OBMEP

SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS EM PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA DA OBMEP

FELIPE TEIXEIRA VIEIRA
FABRÍCIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA

2025

SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS EM PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA DA OBMEP: UMA PERSPECTIVA A PARTIR DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS DE GUY BROUSSEAU E DA ENGENHARIA DIDÁTICA

RESUMO

O presente trabalho examina a relevância e o potencial das Situações Didáticas Olímpicas, abalizadas em problemas oriundos da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), como recurso pedagógico na promoção de uma aprendizagem significativa em Análise combinatória. O objetivo precípuo deste estudo versa em investigar como as situações didáticas, elaboradas a partir de problemas de Análise combinatória da OBMEP, embasada na Teoria das Situações didáticas de Guy Brousseau, bem como na Engenharia Didática, podem contribuir para uma aprendizagem significativa nessa área da Matemática. Adotou-se como percurso metodológico os pressupostos da Engenharia Didática, priorizando as duas primeiras etapas, a saber: a análise preliminar e a concepção e análise a priori. Sendo assim, por meio da combinação desses aportes teóricos e metodológicos, busca-se entender de que forma as Situações Didáticas Olímpicas (SDO) a partir de problemas da OBMEP, podem proporcionar um processo de aprendizagem expressivo em Análise Combinatória, estimulando no aluno o raciocínio lógico, autonomia e estratégias heurísticas.

Palavras-chaves: Análise Combinatória. Engenharia Didática. OBMEP. Situações Didáticas.

ABSTRACT

This study examines the relevance and potential of Olympic Didactic Situations, based on problems from OBMEP (Brazilian Public School Mathematics Olympiad), as a pedagogical resource for promoting meaningful learning in Combinatorics. The main objective of this study is to investigate how these didactic situations, developed from OBMEP combinatorics problems and grounded in Guy Brousseau's Theory of Didactic Situations and Didactic Engineering, can contribute to significant learning in this area of Mathematics. The methodological approach adopted follows the principles of Didactic Engineering, prioritizing its first two phases: the preliminary analysis, and the conception and a priori analysis. By combining these theoretical and methodological frameworks, this research seeks to understand how Olympic Didactic Situations (ODS), using OBMEP problems, can provide a meaningful learning process in Combinatorics, stimulating the student's logical reasoning, autonomy, and heuristic strategies.

Keywords: Combinatorics. Didactic Engineering. OBMEP. Didactic Situations.

INTRODUÇÃO

A abordagem de diversos tópicos da matemática, como a Análise Combinatória, tem se mostrado, em muitos casos, um grande desafio não só para professores, mas também para estudantes. A despeito dessas dificuldades, o conhecimento matemático é essencial para todas as pessoas, em razão de sua ampla aplicabilidade em diversos contextos da sociedade atual, de modo inclusivo o educacional (BNCC, 2018).

No contexto educacional, especialmente o de ensino e aprendizagem da Matemática, vem passando por transformações expressivas por conta do avanço da tecnologia e das diversas propostas de abordagens (Oliveira Neto, 2019). Essas mudanças demandam um conhecimento matemático significativo e indispensável para que o aluno possa exercer plenamente seus direitos e deveres numa sociedade justa, organizada e participativa.

A necessidade de melhorar o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória no contexto brasileiro justifica esta pesquisa, que, historicamente, tem sido desempenhada de maneira descontextualizada, priorizando a memorização de fórmulas ao invés de incentivar os estudantes a desenvolverem o raciocínio lógico e a alcançarem uma compreensão matemática significativa. O estudo propõe um tratamento matemático, baseado na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986) e na Engenharia Didática (Artigue, 1995), com o objetivo de explorar os problemas oriundos da OBMEP DE Análise Combinatória.

Nessa perspectiva, construiu-se uma questão que orienta o trabalho, a saber: De que forma as Situações Didáticas Olímpicas (SDO), elaboradas a partir de problemas de Análise Combinatória da OBMEP, podem favorecer o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos, à luz das teorias de Brousseau e da Engenharia Didática?

O objetivo geral deste estudo, neste sentido, consiste em investigar como as situações didáticas, elaboradas a partir de problemas de Análise combinatória da OBMEP, embasada na Teoria das Situações didáticas de Guy Brousseau, bem como na Engenharia Didática, podem contribuir para uma aprendizagem significativa nessa área da Matemática.

O percurso metodológico para alcançar o objetivo se apoia na Engenharia Didática, uma abordagem de pesquisa qualitativa que se destaca pela sua natureza cíclica e prática. Essa metodologia permite não só a investigação, mas também a concepção e efetivação de situações de ensino. Complementarmente, a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau servirá como base teórica para a criação e a análise das atividades propostas, utilizando suas quatro etapas para estruturar a sequência didática.

1 ENTRE A TEORIA E PRÁTICA: OBMEP, ANÁLISE COMBINATÓRIA E SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP é um dos maiores e relevantes projetos no cenário educacional brasileiro, cujo objetivo é estimular o estudo da matemática e identificar novos talentos entre os alunos de escolas públicas e privadas do país (IMPA, 2025). A competição acontece em duas fases, onde são apresentadas questões que demandam do aluno raciocínio lógico, criatividade e, em alguns casos, conhecimentos matemáticos bem mais elevados, fugindo do padrão de exercícios de fixação.

As provas são aplicadas anualmente, desde 2005, a estudantes participantes de todo o Brasil e divididas em três níveis. O nível 1 é direcionado para alunos matriculados no 6º e 7º ano do Ensino Fundamental; nível 2, para os do 8º e 9º ano; e o nível 3, para os estudantes do Ensino Médio A primeira fase ocorre nas escolas inscritas, com a participação de alunos de todos os níveis. Já a segunda fase é exclusiva para os estudantes que foram classificados e é realizada em locais designados pela comissão organizadora responsável pelo o evento.

A OBMEP disponibiliza em seu site na internet uma gama de informações e materiais de apoio, caracterizando um recurso precioso tanto para alunos quanto para professores do país. Esses conteúdos disponíveis incluem provas com suas respectivas soluções de edições anteriores, banco de questões para treinamento, videoaulas e apostilas por assuntos exigidos nas provas. Essa variedade de recursos proporciona uma preparação mais efetiva dos alunos, além de propiciar ferramentas didáticas para os professores.

Além disso, Bezerra (2024), ao considerar os conteúdos tradicionalmente cobrados nas provas da OBMEP, salienta que:

> Ao analisar as provas disponíveis no site da OBMEP, é possível observar que temas como Aritmética, Geometria, Análise Combinatória e Raciocínio Lógico aparecem com frequência nas questões. Para resolver a maioria delas, não é necessário memorizar fórmulas, mas sim compreender conceitos e aplicá-los de forma lógica (Bezerra, 2024, p. 32).

Assim, dentre os temas que aparecem com frequência nas questões de edições da OBMEP está a Análise Combinatória, que versa sobre problemas de contagem e que pertence ao ramo da Matemática Discreta. A Análise Combinatória, nesse sentido, consiste em ser "[...] a parte da Matemática que analise estruturas e relações discretas" (Morgado; Carvalho; Fernandes, 1991, p. 1). Os problemas desse tema olímpico são significantes e relevantes, porque geralmente não carecem necessariamente do uso de fórmulas, mas, sim, do aguçamento do raciocínio lógico para se chegar à solução desejada.

A Análise Combinatória, embora tenha um destaque nas provas da OBMEP, não se limita apenas ao contexto das olimpíadas de matemática. É também parte integrante da matriz curricular do Ensino Médio, na área de Matemática (Brasil, 2018). Nesse sentido, não obstante a Análise Combinatória ter a sua disposição "[...] técnicas gerais que permite atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema" (Morgado; Carvalho; Fernandes, 1991, p. 2).

Espera-se que o aluno munido com os conceitos e das técnicas da Análise Combinatória tenha a capacidade de resolver determinados problemas que envolvam a contagem de elementos utilizando o princípio aditivo e multiplicativo, fatorial, arranjo e combinação. Na Análise Combinatória, como sugerida pelo próprio termo, "[...] consiste numa análise cuidadosa da situação, observação do contexto e formulação da resolução através das técnicas estudadas" (Costa, 2021, p. 12).

Nessa perspectiva, a presença da Análise Combinatória tanto na OBMEP quanto no currículo de Matemática do Ensino Médio exige a proposta de metodologias que propiciem uma aprendizagem significativa, tornando-se importante recorrer às contribuições da Didática da Matemática. A Teoria das Situações Didáticas, desenvolvidas por Guy Brousseau (1986), nesse sentido, oferece um aporte teórico-metodológico imprescindível, pois propõe a possibilidade de compreender o processo de ensino-aprendizagem da matemática por meio da interação entre o aluno, professor e o conhecimento matemático (Almouloud, 2007).

Na Teoria das Situações Didáticas, o foco central do estudo "[...] não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber" (Almouloud, 2007, p. 32). Dessa forma, a teoria procura descrever e analisar os processos de aprendizagens que ocorrem no âmbito de sala de aula, ressaltando a interação da tríade professor-aluno-saber como elemento estruturante da prática pedagógica (Oliveira Neto, 2019).

Além disso, Brousseau (1986) faz a distinção de dois tipos de situações: a situação didática e a situação adidática. Na situação didática as condições de aprendizagem são organizadas e controladas pelo professor, direcionando o aluno para o saber. Já a situação adidática é uma “[...] situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar” (Almouloud, 2007, p. 33)

Nesse sentido, a situação didática se apresenta quando o professor organiza de forma intencional uma prática de ensino com vistas ao alcance de uma aprendizagem significativa do aluno. Na situação adidática, o estudante é posto diante de situações que proporcionam a construção autônoma do seu conhecimento, cabendo ao professor o papel de mediador do processo. Exige-se ainda que “[...] o professor, na condução da atividade, crie previamente um ambiente favorável para a aprendizagem do aluno” (Oliveira Neto, 2019, p. 14).

Vale salientar que na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), a ênfase recai na situação didática, que é o contexto em que acontece a aprendizagem. Dentro dela tem a parte essencial que é a situação adidática (Almouloud, 2007), em que o aluno é posto em contato direto com um problema, por exemplo, de Análise Combinatória, sem que o professor explicite sua intenção de ensino. Ainda que essa intenção não seja explicitada ao estudante, ela permanece de forma implícita, uma vez que cabe ao professor organizar, planejar e criar condições favoráveis para que o aluno venha construir por si próprio o conhecimento.

Além disso, a Teoria das Situações Didáticas divide o processo de aprendizagem em quatro etapas distintas, mas que são interligadas e observadas em tempos dominantes, a saber: ação, formulação, validação e institucionalização (Almouloud, 2007). Esses quatro momentos observados recebem o nome de dialética, pois diz respeito a tipos de relação que o aluno tem com o saber dentro da situação didática.

A primeira fase é a dialética da ação, em que é apresentado “[...] um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar; o aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação” (Almouloud, 2007, p. 37). Trata-se de uma etapa da teoria em que a tomada de decisões constitui o eixo central da ação exercida pelo aluno, distinguindo-se pelo predomínio do aspecto empírico.

A segunda fase é a dialética da formulação, em que há um fluxo de informações “[...] com uma ou várias pessoas, que serão os emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais. [...]. É o momento em que o aluno ou grupo de alunos explicita por escrito ou oralmente, as ferramentas que utilizou e a solução encontrada” (Almouloud, 2007, p. 38). É possível observar nessa fase, o aluno explicar seus raciocínios, compartilhar estratégias com outros e descrever procedimentos utilizados por ele para resolver o problema proposto.

A terceira fase é a dialética da validação, em que o aluno deve assinalar “[...] a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor. [...]. O objetivo é a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e formulação" (Almouloud, 2007, p. 39-40). É a etapa na qual se verifica se a resposta obtida pelo aluno faz sentido, se testa a consistência dos argumentos sugeridos e é realizada a comparação com outras possíveis soluções.

A quarta e última fase é a dialética da institucionalização, que de acordo com Almouloud (2007, p. 40) em "[...] sua primeira formulação, a teoria só apresentava as três primeiras etapas". Essa fase compreende as situações em que "[...] o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto do saber" (Almouloud, 2007, p. 40). É o momento na qual o professor intervém para formalizar o saber construído, ou seja, o conhecimento é reconhecido como um saber matemático institucionalizado.

2 PERCURSO METODOLÓGICO: A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO CAMINHO DE INVESTIGAÇÃO

O presente estudo adota como caminho metodológico a abordagem qualitativa, pois se apresenta adequada para análise e interpretação de fenômenos complexos, como os processos de ensino e aprendizagem em Matemática. "Segundo esta perspectiva, um fenômeno pode ser melhor compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte, devendo ser analisado numa perspectiva integrada" (Godoy, 1995, p. 21).

Conforme Denzin e Lincoln (2006), a abordagem qualitativa assume um ponto de vista interpretativo da realidade, na qual o pesquisador analisa os fenômenos em seus contextos naturais, procurando compreender os acontecimentos a partir dos significados que os indivíduos lhes atribuem. Busca-se também entender os processos de aprendizagem baseado nas interações dos alunos com problemas matemáticos e com o meio didático.

A Engenharia Didática foi adotada como metodologia de investigação neste estudo, com ênfase na aplicação das duas primeiras etapas que a compõem, a saber: análise preliminar e concepção e análise a priori. Assim como um engenheiro, ao elaborar um projeto, precisa de conhecimentos científicos e submeter a eles, o professor também em sua prática pedagógica não pode ser diferente, ou seja, ele necessita dominar determinados saberes específicos (Artigue, 1995).

Ainda, segundo Almouloud (2007), a Engenharia Didática numa perspectiva de metodologia de investigação:

> [...] é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste (Almouloud, 2007, p. 171).

Além disso, a Engenharia Didática organiza-se em quatro fases diferentes, a saber: análises preliminares (prévias), análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Todas essas fases serão descritas neste trabalho, ainda que, para os fins desta pesquisa, somente as duas primeiras – análises preliminares e análise a priori – sejam aqui efetivamente aplicadas (Almouloud, 2007).

A primeira etapa da Engenharia Didática é a de análises preliminares, que consiste em "[...] identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questão(ões), hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa" (Almouloud, 2007, p .72). Faz parte de a presente etapa pesquisar as concepções dos alunos, as restrições do contexto, as práticas de ensino tradicional e a epistemologia do conteúdo (Artigue, 1995). Observa-se nessa fase, a investigação do conhecimento em matemática sob três aspectos: epistemológico, cognitivo e didático.

A segunda etapa é a de análise a priori consiste em "[...] determinar com as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido" (Almouloud; Coutinho, 2008, p. 67). A partir das análises preliminares, elabora-se a Sequência Didática Olímpica que desafiará o aluno a construir seu conhecimento por si próprio, além de possibilitar ao pesquisador fazer a previsão do que pode acontecer durante a aplicação da sequência.

A terceira etapa é a da experimentação, consistindo no "[...] momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo cosntruído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade" (Almouloud; Coutinho, 2008, p. 67). É o momento em que a sequência didática, nesse trabalho a Situação Didática Olímpica, é aplicada no contexto de sala de aula com um grupo de estudantes, registrando tudo o que ocorre, preparando material suficiente para a fase de análise.

A quarta e última etapa é a de análise a posteriori e validação que consiste no "[...] conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo" (Almouloud, 2007, p. 177). É o momento que o pesquisador se dedica à análise minuciosa do material empírico coletado na etapa de experimentação, confrontando os resultados obtidos com as hipóteses formuladas na análise a priori, propiciando, assim, a validação ou refutação.

Embora as quatro etapas sejam descritas de forma sequencial, o processo é cíclico e dialógico, propiciando ao pesquisador que retome e revise as etapas conforme a pesquisa exija e quantas vezes achar necessário. Além disso, a etapa de experimentação em sala de aula e análises a posterior da insfromações não são a ênfase central deste trabalho, somente as duas primeiras etapas, a saber: análise preliminar e análise a priori.

3 OS QUATRO MOMENTOS DA SITUAÇÃO DIDÁTICA DE BROUSSEAU APLICADOS À ANÁLISE COMBINATÓRIA NUMA QUESTÃO DA OBMEP

A presente seção propõe uma Situação Didática Olímpica que versa sobre o conteúdo de Análise Combinatória com um problema proveniente da edição da OBMEP de 2007, estruturado com base nas quatro dialéticas da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (986). O problema proposto cria uma situação na qual o aluno precisa recorrer a conhecimentos prévios, tais como noção básica do Princípio Multiplicativo, compreensão de condições restritivas em questões de contagem, representação espacial – entender o que significa paredes opostas - e estratégias de resolução.

A seguir, tem se a proposta de um problema de Análise Combinatória da primeira fase da OBMEP, edição de 2007, que será analisado e desenvolvido sob a ótica das quatro fases da Teoria das Situações Didáticas. O da utilização do problema é transformá-la em uma Situação Didática Olímpica, de modo que o aluno tanto resolva a situação matemática e também possa vivenciar sua aplicação pedagógica como ferramenta formativa no processo de ensino e aprendizagem matemática.

(Problema da OBMEP 2007 – Fase 1 – Nível 3 – Questão 11 – Item B) Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto

A) 8

B) 16

C) 8

D) 20

E) 24

Na **dialética da ação**, o estudante entre em contato com o problema para tentar resolvê-lo de uma maneira espontânea e sem a intervenção imediata do professor. “A partir de suas ações sobre o *milieu*, e das retroações ocorridas, o aluno poderá ajustar o resultado de suas ações e melhorar ou abandonar seu modelo, provocando uma aprendizagem por adaptação” (Lima, 2019, p. 38). O estudante, inicialmente, pode desenhar um quarto e tentar colorir as paredes de formas distintas, listar algumas possibilidades, testando a restrição de que a parede de cor azul e rosa não fique frente a frente e observar a dificuldade que há de listar todos as possibilidades sem perder ou repetir algum caso.

Na **dialética da formulação**, ao reconhecer a complexidade envolvida ao listar manualmente todas as possibilidades, o aluno começa a formular meios mais organizados. “O aluno busca apresentar um modelo matemático para a solução, através de sinais e regras comuns. Nesse momento o discente verbaliza suas estratégias, retomando sua ação para que os outros a compreendam” (Lima, 2019, p. 38). Nessa fase, o estudante explicita suas ideias, de forma oral ou escrita. Como possíveis formulações têm-se a fixação da cor de uma parede – por exemplo, azul –, pensar na parede oposta que não pode ter a cor rosa, restando, assim, a cor verde ou branca. Perceber que para as duas paredes que restaram só há duas opções de ordenação.

Na **dialética da validação**, o aluno deve justificar se a sua estratégia de contagem está correta, verificando se houve repetição de casos ou se todas as possibilidades foram consideradas. Assim, o “[...] emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática. O receptor, por sua vez, pode pedir mais explicações ou rejeitar as mensagens que não entende ou de que discorda, justificando sua rejeição” (Almouloud, 2007, p. 39). Na etapa de validação da situação didática, o estudante deve confrontar os distintos métodos de resolução, tais como a listagem exaustiva dos casos e a aplicação do Princípio Multiplicativo. Uma solução consiste e simples consiste na fixação de uma das quatro paredes para receber a cor azul, o que gera com 4 possibilidades. Para a parede oposta, restam somente duas opções viáveis que é a escolha da cor verde ou branca. Para as duas paredes ainda livres, existem duas maneiras de distribuir as cores restantes. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, obtém-se 4 x 2 x 2 = 16 maneiras distintas de pintar o quarto solicitado no enunciado do problema.

Na dialética da institucionalização, “[...] feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-se assim disponível para a utilização na resolução de problemas matemáticos” (Almouloud, 2007, p. 40). É o momento que o professor intervém formalizando e consolidando o saber matemático envolvido, demonstrando que o Princípio Multiplicativo é mais eficiente do que listar os casos manualmente e reforçando que os problemas com restrições são frequentes em Análise Combinatória e olimpíadas.

De acordo com Almouloud (2007, p. 40), a dialética de institucionalização é aquela na qual o "[...] o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto do saber. Uma vez cosntruído e validado, o novo conhecimmento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe, embora não tenha ainda o estatuto de saber social". Cabe salientar que, nessa etapa, o professor reassume condução da atividade e formaliza o conhecimmento construído pelo aluno, consolidando-o como resultado do processo de aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo teve como objetivo investigar a potencialidade das Situações Didáticas Olímpicas, elaboradas com base em problemas da OBMEP, visando à melhoria e o avanço da aprendizagem significativa em Análise Combinatória. Observa-se que tais situações se apresentam com elevado potencial pedagógico, pois propiciam uma melhor compreensão conceitual do tema em apreço, além de desenvolver o raciocínio lógico, a criatividade e o pensamento crítico do estudante.

Foi proposta a utilização da Engenharia Didática, em suas duas primeiras etapas, como metodologia de investigação associada à Teoria das Situações Didáticas, com a finalidade de elabora Situação Didática Olímpica com vistas ao conteúdo de Análise Combinatória com o problema extraído de uma edição da OBMEP. Nesse sentido, as etapas de análises preliminares e análises a priori possibilitaram a elaboração de forma consistente da situação propostas, além propiciar um caminho metodológico sólido.

Já a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986), em complementaridade com a Engenharia Didática, mostrou-se pertinente para analisar e compreender como se dá as interações entre professor, aluno e conhecimento matemático, destacando o papel crucial do aluno na construção do conhecimento de forma autônoma. O estudante

O uso das Situações Didáticas Olímpicas no contexto de sala de aula acarreta contribuições significativas para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois favorece o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais ao aluno, tais como o raciocínio lógico aguçado, o emprego de formas heurísticas, além da capacidade de resolver problemas matemáticos de diferentes níveis de complexidade, proporcionando ao aluno uma formação mais sólida, abrangente e significativa em Matemática.

Dessa forma, torna-se vital que o professor em sua prática pedagógica possa vir a explorar e fazer uso de problemas desafiadores de Análise Combinatória oriundo das OBMEP como recurso pedagógico que vá além da simples memorização de procedimentos e fórmulas, valorizando, assim, o processo de ensino que une desafio, criatividade, bem como rigor conceitual matemático mais significativo.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008. Disponível em: Acesso em: 21 set. 2025.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTIGUE, Michèlle. Ingenieria Didática. In: Artigue, Michèlle; Douady, R.; Moreno, L; Gomez, P. **Ingeniéria didática em Educacion Matemática.** Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, cap. 4, p. 33-59.

BEZERRA, Mírian Fran Santos. **O Papel da OBMEP na Estimulação do Aprofundamento no Estudo da Matemática Entre Alunos Premiados.** 2024. 56 f., il. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Caruaru, 2024.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curric*ular*.** Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 10 set. 2025.

BROUSSEAU, Guy. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques**. Recherches em didactique des mathématiques, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

COSTA, Jaldir de Oliveira. **Guia de ensino para análise combinatória a partir dos livros didáticos, ENEM e BNCC.** Campina Grande, 2021. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

DENZIN, N. K. e LINCOLN, Y. S. Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, N. K. e LINCOLN, Y. S. (Orgs.). **O planejamento da pesquisa**

qualitativa: teorias e abordagens. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 15-41.

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa Qualitativa. Tipos Fundamentais. **RAE – Revista de Administração de Empresas,** São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

IMPA. **Regulamento da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas** – **OBMEP 2025**. Rio de Janeiro: IMPA, 2025. Disponível em: https://www.obmep.org.br/regulamento.htm. Acesso em: 17 jul. 2025.

LIMA, Maria Luziana Oliveira. **Situações didáticas olímpicas para o ensino de sequências numéricas: um contributo da engenharia didática.** 2019. 87 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. C.; FERNANDEZ, P. Análise combinatória e probabilidade: com as soluções dos exercícios. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

OLIVEIRA NETO, João Evangelista de. **Situações didáticas olímpicas aplicadas a problemas de geometria plana da olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (OBMEP).** 2019. 62 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.