



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

FERNANDO JOSÉ OLIVEIRA DE QUEIROZ

**A MATEMÁTICA FINANCEIRA: UMA ABORDAGEM EDUCATIVA ASSOCIADA
AO USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS.**

MOSSORÓ/RN

2025

FERNANDO JOSÉ OLIVEIRA DE QUEIROZ

**A MATEMÁTICA FINANCEIRA: UMA ABORDAGEM EDUCATIVA ASSOCIADA
AO USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS.**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Linhares da Silva.

Co-orientadora: Prof^a Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo

MOSSORÓ/RN

2025

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Q3m Queiroz, Fernando José Oliveira de.
 A Matemática financeira: Uma abordagem
educativa associada ao uso de planilhas
eletrônicas / Fernando José Oliveira de Queiroz. -
2025.
 108 f. : il.

 Orientador: Paulo César Linhares da Silva.
 Coorientadora: Maria Joseane Felipe Guedes
Macêdo.
 Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em
, 2025.

 1. Aprendizagem. 2. Excel. 3. Tecnologias. 4.
Calculadora. I. Silva, Paulo César Linhares da ,
orient. II. Macêdo, Maria Joseane Felipe Guedes ,
co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

FERNANDO JOSÉ OLIVEIRA DE QUEIROZ

**A MATEMÁTICA FINANCEIRA: UMA ABORDAGEM EDUCATIVA ASSOCIADA
AO USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática.

Defendida em: 07 / 03 / 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo César Linhares da Silva. (UFERSA)
Presidente e Orientador

Profa. Dra. Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo. (UFERSA)
Co-orientadora

Profa. Dra. Suene Campos Duarte (UFERSA)
Membro Examinador

Prof. Dr. Álvaro Fabiano Macêdo (UFERSA)
Membro Examinador

Prof. Dr. Jonatan Floriano Peixoto da Silva (UFC)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por proporcionar, em minha vida, novas oportunidades e experiências, fortalecendo-me com saúde, paciência e esperança para a conclusão dessa etapa em minha vida como professor e estudante.

Agradeço à minha mãe e à minha irmã por me apoiarem nessa jornada de estudos e por terem compartilhado diversos momentos durante essa etapa.

Agradeço à minha esposa e às minhas filhas por estarem ao meu lado em todos os momentos durante esse mestrado. Através desse apoio, consegui seguir esse caminho com um pouco mais de tranquilidade.

Aos meus professores e orientadores, Paulo César Linhares da Silva e Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo, agradeço por estarem sempre disponíveis e dispostos a ajudar com esse projeto. Da mesma forma, agradeço a todos os professores do PROFMAT, dos quais fui aluno, que contribuíram significativamente para o meu aprendizado.

Agradeço à banca examinadora, que pôde avaliar meu trabalho e, com isso, possibilitou a aquisição de mais conhecimento.

Aos meus colegas de curso, com os quais compartilhei grandes momentos de felicidade e aprendizado, também deixo meu agradecimento.

Assim, agradeço a todos que tiveram participação nessa caminhada abençoada por Deus.

“Sem sonhos, a vida não tem brilho. Sem metas, os sonhos não têm alicerces. Sem prioridades, os sonhos não se tornam reais. Sonhe, trace metas, estabeleça prioridades e corra riscos para executar seus sonhos. Melhor é errar por tentar do que errar por se omitir!”.

Augusto Cury

RESUMO

A Matemática Financeira desempenha um papel essencial em vários aspectos da vida cotidiana, sendo uma ferramenta útil no ambiente escolar, no mercado de trabalho e em situações do dia a dia. Compreender seus conceitos e aplicações pode contribuir significativamente para a tomada de decisões financeiras mais conscientes e embasadas. Tendo isso em mente, este trabalho propõe a integração entre Matemática e tecnologia para criar um material de pesquisa que auxilie no ensino e aprendizado dessa área, utilizando a planilha eletrônica Excel como ferramenta pedagógica. O objetivo principal é desenvolver uma abordagem prática que facilite a realização de cálculos e a resolução de problemas financeiros. Para isso, foi conduzida uma pesquisa bibliográfica abrangente sobre os principais tópicos da Matemática Financeira, incluindo juros simples e compostos, taxas de juros, séries uniformes e sistemas de amortização. Esta análise foi estruturada com base em conceitos teóricos, definições detalhadas e demonstrações matemáticas, visando não apenas o entendimento básico, mas também um aprofundamento consistente do conteúdo. Complementarmente, foi elaborado um guia prático sobre o uso da planilha eletrônica Excel, com ênfase nas funções financeiras mais relevantes para o tema, como VF (Valor Futuro), VP (Valor Presente), TAXA, PGTO (Pagamento) e NPER (Número de Períodos). Esses recursos foram explorados para demonstrar como o Excel pode ser utilizado como uma ferramenta eficaz na solução de problemas financeiros. Com base nesse embasamento teórico e prático, foi desenvolvida uma calculadora financeira no Excel, projetada para realizar os principais cálculos abordados neste estudo. Essa calculadora, implementada exclusivamente com recursos nativos do software, permite que os usuários realizem simulações e experimentem diferentes cenários financeiros, promovendo um aprendizado interativo e aplicado. Além disso, foram incluídos exemplos práticos e estudos de caso que ilustram situações reais de utilização da Matemática Financeira. Por fim, o trabalho destaca a importância de aliar teoria e prática no ensino da Matemática Financeira, mostrando como ferramentas tecnológicas como o Excel podem contribuir para a construção de competências financeiras essenciais para a vida pessoal e profissional. Dessa forma, espera-se que este material se torne uma referência para educadores e estudantes interessados em aprofundar seus conhecimentos na área.

Palavras-chave: Aprendizagem; Excel; Tecnologias; Calculadora

ABSTRACT

Financial Mathematics plays an essential role in various aspects of everyday life, serving as a useful tool in the school environment, the job market, and daily situations. Understanding its concepts and applications can significantly contribute to making more conscious and well-founded financial decisions. With this in mind, this work proposes the integration of Mathematics and technology to create a research material that aids in teaching and learning this field, using the Excel spreadsheet as a pedagogical tool. The main objective is to develop a practical approach that facilitates performing calculations and solving financial problems. To achieve this, a comprehensive bibliographic research was conducted on the main topics of Financial Mathematics, including simple and compound interest, interest rates, uniform series, and amortization systems. This analysis was structured based on theoretical concepts, detailed definitions, and mathematical demonstrations, aiming not only at basic understanding but also at a consistent deepening of the content. Additionally, a practical guide was developed on using the Excel spreadsheet, emphasizing the most relevant financial functions for the subject, such as FV (Future Value), PV (Present Value), RATE, PMT (Payment), and NPER (Number of Periods). These resources were explored to demonstrate how Excel can be used as an effective tool for solving financial problems. Based on this theoretical and practical foundation, a financial calculator was developed in Excel, designed to perform the main calculations covered in this study. This calculator, implemented exclusively with the software's native resources, allows users to conduct simulations and experiment with different financial scenarios, promoting interactive and applied learning. Furthermore, practical examples and case studies were included to illustrate real-life situations involving the use of Financial Mathematics. Finally, the study highlights the importance of combining theory and practice in teaching Financial Mathematics, showing how technological tools like Excel can contribute to building essential financial skills for personal and professional life. Thus, this material is expected to become a reference for educators and students interested in deepening their knowledge in the field.

Keywords: Learning; Excel; Technologies; Calculator

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Forma de pagamento postecipado.....	34
Figura 2 – Forma de pagamento antecipado.....	35
Figura 3 – Comportamento das parcelas quando trazidas para o valor presente.....	36
Figura 4 – Obtenção do valor futuro	39
Figura 5 – Comportamento das parcelas para obtenção do valor presente em uma série de pagamentos antecipados	42
Figura 6 – Planilha eletrônica Microsoft Excel	53
Figura 7 – Visualização das linhas e colunas na planilha.....	53
Figura 8 – Visualização da barra de fórmulas e utilização do operador igualdade	55
Figura 9 – Estrutura das fórmulas como resultado da operação.....	56
Figura 10 – Barra para inserir funções próprias do Excel	57
Figura 11 – Comportamento das funções do item a) e seus resultados	58
Figura 12 – Estrutura da função NOMINAL na planilha Excel.....	59
Figura 13 – Estrutura da função EFETIVA na planilha Excel	59
Figura 14 – Estrutura da função “VP” na planilha Excel	60
Figura 15 – Estrutura da função “VF” na planilha Excel	60
Figura 16 – Estrutura da função “PGTO” na planilha Excel.....	61
Figura 17 – Estrutura da função “NPER” na planilha Excel	61
Figura 18 – Estrutura da função “VPL” na planilha Excel.....	62
Figura 19 – Resolução do Exemplo 20 utilizando a planilha Excel.....	63
Figura 20 – Cálculo dos juros e montante utilizando a planilha Excel	63
Figura 21 – Cálculo da taxa proporcional utilizando a planilha Excel.....	65
Figura 22 – Cálculo da taxa equivalente utilizando a planilha Excel.....	66
Figura 23 – Determinação do valor presente utilizando a Fórmula (8).....	67
Figura 24 – Determinação do valor presente utilizando a função “VP”	68
Figura 25 – Determinação do valor futuro utilizando a fórmula e operadores do Excel	69
Figura 26 – Determinação do valor futuro utilizando a função “VF” do Excel.....	70
Figura 27 – Determinação do valor das prestações utilizando os operadores do Excel.....	71
Figura 28 – Determinação do valor da prestação utilizando a função PGTO	72
Figura 29 – Determinação do valor da prestação utilizando a função PGTO	73
Figura 30 – Uso do SFA, através do Excel, para determinação dos juros e amortizações.....	74
Figura 31 – Cálculo para determinar o valor da amortização.....	75

Figura 32 – Uso do SAC, através do Excel, para determinação dos juros e prestações.....	76
Figura 33 – Uso do SAA, através do Excel, para determinar o valor dos juros, prestações e amortizações	77
Figura 34 – Painel inicial da Calculadora Financeira no Excel.....	79
Figura 35 – Visão do botão “Juros” para calcular juros simples e composto.	79
Figura 36 – Ícone que direciona para o painel de conversão de taxas proporcionais.....	80
Figura 37 – Painel de Conversão de taxas proporcionais.....	80
Figura 38 – Painel de opções para cálculo dos juros simples.....	81
Figura 39 – Determinando o juro no regime de capitalização simples	81
Figura 40 – Recorte com painéis quem mostram as opções para calcular capital, taxa e tempo referentes a juros simples	82
Figura 41 – Botão para converter taxas equivalentes	82
Figura 42 – Painel de opções para Juros Compostos.....	83
Figura 43 – Determinando o Montante e o Juro no regime de capitalização composta.....	83
Figura 44 – Recorte que mostra as abas para calcular o capital, taxa e tempo referentes a Juros Compostos	84
Figura 45 – Escolha da forma de pagamento ao clicar em Séries Uniformes	84
Figura 46 – Guia que mostra a escolha da opção em que o cálculo pode ser feito em função do VP ou VF	85
Figura 47 – Painel de opções das séries uniformes em função do VP	85
Figura 48 – Determinando o valor da prestação, em função do VP, nas séries uniformes	86
Figura 49 – Recorte que mostra as abas para determinar o VP, taxa e tempo dados em função do valor presente.....	86
Figura 50 – Painel de opções das séries uniformes em função do VF	87
Figura 51 – Determinando o valor da prestação, em função do VF, nas séries uniformes	87
Figura 52 – Recorte que mostra as abas para determinar o VF, taxa e tempo dados em função do valor futuro	87
Figura 53 – Opções de escolha entre SFA e SAC após clicar no botão “Séries Uniformes”...	88
Figura 54 – Primeira aba de opções do botão SFA	89
Figura 55 – Aba de antecipação de parcelas do SFA	90
Figura 56 – Primeira aba de opções do botão SAC	90
Figura 57 – Aba referente a antecipação de parcelas SAC.....	91
Figura 58 – Quantidade de meses em uma operação de juros simples.....	92
Figura 59 – Quantidade de meses em uma operação de juros compostos.....	93

Figura 60 – Montante no regime de juros compostos	94
Figura 61 – Quantidade de meses em uma operação de juros compostos.....	95
Figura 62 – Valor da prestação em uma série uniforme de pagamentos postecipados	96
Figura 63 – Valor presente em uma série uniforme de pagamentos postecipados.....	97
Figura 64 – Valor futuro em uma série uniforme de pagamentos postecipados	98
Figura 65 – Taxa de juros, em uma série uniforme de pagamentos postecipados, em função do valor presente.....	99
Figura 66 – Tempo (meses), de uma série uniforme de pagamentos postecipados, em função do valor futuro	100
Figura 67 – Determinação do valor da prestação e do total de juros pagos utilizando o SFA	101
Figura 68 – Cálculo da última parcela e do total de juros utilizando o sistema SAC	102
Figura 69 – Determinação do total de juros pagos no empréstimo utilizando o SFA.....	103
Figura 70 – Cálculo da antecipação utilizando o SFA	103

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sistema Francês de Amortização	47
Tabela 2 – Sistema de Amortização Constante	49
Tabela 3 – Sistema Americano de Amortização	51

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Representação da taxa e sua unidade de tempo	27
Quadro 2 – Amostra das transformações da taxa de 2% ao mês de acordo com a capitalização bimestral, semestral e anual.....	31
Quadro 3 – Amostra de operadores do Excel	54
Quadro 4 – Ordem que os operadores do Excel são executados	55

SUMÁRIO

SUMÁRIO	15
1 INTRODUÇÃO	17
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	20
2.1 O SURGIMENTO DO DINHEIRO	20
2.2. MATEMÁTICA FINANCEIRA	20
2.3 DEFINIÇÕES	21
2.4 JUROS SIMPLES	22
2.5 JUROS COMPOSTOS	24
2.6 ENTENDENDO AS TAXAS DE JUROS	26
2.6.1 Representação da unidade de tempo da taxa de juros	26
2.6.2 Taxa proporcional e equivalente.....	28
2.6.3 Taxa efetiva e taxa nominal.....	31
2.7 SÉRIE UNIFORME DE PAGAMENTOS	33
2.7.1 Série uniforme de pagamento postecipado e antecipado.....	34
2.7.2 Valor presente de uma série uniforme de pagamentos postecipados.	35
2.7.3 Valor futuro de uma série uniforme de pagamentos postecipados.....	39
2.7.4 Valor presente e valor futuro de uma série uniforme de pagamentos antecipada	41
2.8 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO	44
2.8.1 Sistema Francês de Amortização.....	44
2.8.2 Sistema de amortização constante	47
2.8.3 Sistema americano de amortização.....	49
3 MATEMÁTICA FINANCEIRA E PLANILHAS ELETRÔNICAS.....	52
3.1 CONCEITOS INICIAIS SOBRE A PLANILHA ELETRÔNICA EXCEL	52
3.1.1 Operadores do Excel.....	54
3.1.2 Fórmulas do Excel	54
3.1.3 Funções no Excel.....	56
3.2 A MATEMÁTICA FINANCEIRA APLICADA AO EXCEL	62
3.2.1 Os juros.....	62
3.2.2 Taxas de juros.....	64
3.2.3 Série uniforme de pagamentos	66
3.2.4 Sistemas de amortização.....	72
4 A CALCULADORA FINANCEIRA NO EXCEL	78

4.1 Conhecendo a Calculadora Financeira	78
4.1.1 Painel inicial da Calculadora Financeira	78
4.1.2 Juros na Calculadora Financeira	79
4.1.3 Séries Uniformes	84
4.1.4 Sistemas de Amortização	88
4.2 Uso da calculadora financeira em situações do cotidiano	91
5 CONCLUSÃO.....	104
REFERÊNCIAS	106
ANEXO A – LINK PARA BAIXAR A CALCULADORA FINANCEIRA.....	108

1 INTRODUÇÃO

A matemática financeira está presente na vida das pessoas seja na escola, ao ter que calcular uma taxa de juros durante a realização de uma prova, no trabalho em uma loja onde o vendedor oferece um desconto ao cliente ou até mesmo durante as compras em um supermercado onde as ofertas com descontos são analisadas. Ela está relacionada a diversas áreas da matemática envolvendo, por exemplo, juros, descontos e porcentagem, mas está diretamente ligada ao estudo do comportamento do dinheiro ao longo do tempo. Uma pesquisa divulgada no site gov.br mostra que as operações de créditos feitas em bancos públicos em 2023 superam R\$ 54 bilhões de reais, um total maior que nos quatro anos anteriores, mostrando que investimentos, empréstimos e financiamentos, cada vez mais, estão passando a fazer parte do cotidiano do brasileiro, logo o conhecimento de matemática financeira possibilita uma compreensão e aprendizagem desses temas, muitas vezes, vistos de forma negativa por parte da sociedade.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Educação Financeira faz parte do currículo da educação básica desde 2017, não como uma disciplina autônoma, mas trabalhada de forma interdisciplinar. Dessa forma, ela pode ser inserida juntamente com a matemática financeira para ensinar, por exemplo, os jovens a administrar, poupar e controlar seu dinheiro, melhorando seus hábitos de consumo, especialmente no ambiente doméstico. Isso contribui para que suas finanças sejam geridas de maneira mais eficiente (CORDEIRO; COSTA; SILVA, 2018).

Os resultados divulgados pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico), que avalia o desempenho daqueles que participaram do Pisa 2022, mostraram que 73% dos estudantes brasileiros possuem baixo desempenho em matemática, cujo foco da prova também é o letramento financeiro. Assim, através da matemática e de uma educação financeira, é possível adquirir um conhecimento básico que pode ser aplicado no cotidiano, economizando nas compras mensais, guardando parte do dinheiro na poupança e até mesmo realizando algum tipo de investimento.

Percebe-se com isso que a falta de conhecimento de conceitos de matemática financeira por parte da sociedade, seja no âmbito educacional, onde os estudantes precisam aprender esses temas, ou em situações práticas do cotidiano, como a realização de um empréstimo ou a compra de bens que envolvem juros, dificulta a tomada de decisões financeiras. Veja que a BNCC diz que o básico de economia e finanças deve ser abordado, principalmente conceitos relacionados a taxa de juros e aplicações financeiras, o que é diretamente trabalhado dentro da própria

matemática financeira. A ausência dessa compreensão pode ser prejudicial para o cidadão e resultar em más decisões financeiras, o que, por sua vez, pode gerar endividamentos e atrapalhar o planejamento de um bom futuro financeiro.

Além disso, assuntos mais técnicos e complexos que boa parte das pessoas não tem conhecimento estão inseridos dentro da matemática financeira, que é o caso dos juros compostos, taxas e sistemas de amortização. O entendimento deles é de suma importância para que não ocorram problemas ou imprevistos no funcionamento de diversas operações e mecanismos bancários que são utilizados pela sociedade em geral, como é o caso dos empréstimos e financiamentos.

De acordo com Oliveira; Moura e Sousa (2015), as TIC'S (Tecnologias da Informação e Comunicação) podem ser consideradas como toda forma de utilização das tecnologias que auxiliam no processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma possuem um papel indispensável, fazendo com que determinados conteúdos gerem mais interesse, praticidade e facilidade para estudá-los. Com isso, o uso de novas tecnologias tem se destacado cada vez mais na sociedade atual, contribuindo positivamente para a aprendizagem da Matemática. (BRASIL, 1997).

Assim, o objetivo desse trabalho é criar um material de pesquisa para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da matemática financeira através do desenvolvimento detalhado de seu conteúdo e aplicando-o através da planilha eletrônica Microsoft Excel como principal ferramenta. Além disso, contribuir para o aprimoramento dos conhecimentos de pessoas que já possuem um certo entendimento na área como também possibilitar a compreensão daquelas que estão iniciando seus estudos na matemática financeira, principalmente nos juros simples e compostos, taxas de juros, séries uniformes de pagamentos e sistemas de amortização.

A pesquisa bibliográfica foi fundamental para dar ênfase e precisão aos conceitos, deduções de fórmulas, demonstrações e resolução de questões que foram utilizadas nesse material, mostrando o caminho para compreensão e aplicação de cada assunto estudado. De acordo com Sousa; Oliveira e Alves (2021), esse tipo de pesquisa tem como objetivo o aprimoramento do aprendizado e atualização dos conhecimentos.

Visto isso, abordaremos uma ferramenta tecnológica da empresa Microsoft, a planilha eletrônica Excel, um software pago, cuja licença foi adquirida para o desenvolvimento deste trabalho. O objetivo principal dessa ferramenta é realizar cálculos matemáticos utilizando tabelas. Ela tem diversas formas de aplicação, podendo ser utilizadas por grandes empresas para organizar seus dados, por estudantes e professores nas atividades educativas, e pelo cidadão comum que pretende organizar suas finanças ou realizar algum cálculo. Dessa forma,

aprender sobre planilhas eletrônicas é muito importante, pois fará com que o cidadão possua mais responsabilidade e controle sobre seu dinheiro, além de aprender matemática com maior facilidade. (BORGES, 2023, p. 9)

Logo, além de trabalhar tópicos da matemática financeira de forma mais detalhada, ampliando o processo de ensino e aprendizagem, esse trabalho tem como objetivo uni-la à tecnologia, isto é, mostrar a utilização do Excel como ferramenta nas resoluções das fórmulas e questões que envolvem matemática financeira, conhecendo, também, algumas “funções financeiras” do Excel, e como utilizá-lo em situações comuns do dia a dia, determinando o valor final de um empréstimo, calculando taxas de juros e até o valor das parcelas de um determinado financiamento, transformando a planilha eletrônica em uma calculadora financeira.

Diante disso, esse trabalho foi dividido da seguinte forma: no Capítulo 1, temos a introdução, o qual nos mostra uma visão geral do que foi desenvolvido e quais os principais objetivos desse material; o Capítulo 2, fala sobre o surgimento do dinheiro, conceitos de matemática financeira, além de apresentar uma visão detalhada sobre juros, taxas de juros, séries de pagamento e sistemas de amortização, fundamentando a parte teórica através de deduções, demonstrações e aplicações das fórmulas, complementando com resolução de questões; no Capítulo 3, uma junção entre matemática financeira e tecnologia é feita através da utilização do Excel como ferramenta para aplicação das fórmulas matemáticas, desenvolvendo-as utilizando os próprios recursos da planilha através das funções e fórmulas com operadores matemáticos.

No Capítulo 4, transformaremos o Excel em uma calculadora financeira interativa, que será utilizada na resolução de questões baseadas em situações do dia a dia, calculando juros simples e compostos. Dentro das séries uniformes o valor presente e futuro, prestações, taxas e tempo, e nos sistemas de amortização, o SFA e SAC; no Capítulo 5, apresentamos as considerações finais referentes ao trabalho produzido.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No presente capítulo é apresentado um estudo sobre alguns dos principais conteúdos referentes a Matemática Financeira, abordando conceitos, definições e exemplos. Contribuindo para o aprimoramento da compreensão e interpretação do conteúdo.

2.1 O SURGIMENTO DO DINHEIRO

Para entender o surgimento do dinheiro e seu poder de compra, é importante observar que a compra e venda de produtos de valor é uma prática comum: todos nós precisamos de alimentos, vestimentas, moradia e outras necessidades inerentes ao ser humano. Veja que, para ter acesso a isso é necessário possuir dinheiro, um sistema de troca. No entanto, esse sistema de trocas não é uma novidade. Desde os primórdios das economias baseadas na divisão do trabalho, as pessoas perceberam a necessidade de trocar bens ou serviços por algo de valor equivalente.

De acordo com Dal Zot (2008), o dinheiro surgiu como uma solução para essa necessidade de troca. Inicialmente, as trocas eram feitas por meio do escambo, onde bens eram trocados diretamente. No entanto, esse sistema apresentava várias limitações, como a dificuldade de encontrar alguém que quisesse exatamente o que o outro tinha a oferecer. A introdução do dinheiro facilitou essas transações, funcionando como um meio universal de troca e um padrão de valor. Como Dal Zot (2008, p. 17) afirma: "A origem do dinheiro está na essência dos regimes econômicos baseados na divisão do trabalho, que conduzem as pessoas a sentirem a necessidade de realizar trocas de mercadorias."

2.2. MATEMÁTICA FINANCEIRA

A matemática financeira estuda e analisa o comportamento do dinheiro e suas alterações no decorrer do tempo (DAL ZOT, 2008, p. 21). O conhecimento dessa área amplia a capacidade das pessoas poderem ver o dinheiro não apenas como uma simples moeda de troca, mas também com interesse no seu crescimento através de investimentos. De acordo com IEZZI (2013, p. 37), o estudo da matemática financeira também está relacionado a área de financiamentos e empréstimos de bens móveis ou imóveis, gerenciamento e aplicações financeiras.

2.3 DEFINIÇÕES

De acordo com Dal Zot e Castro (2015, p.7), alguns conceitos e nomenclaturas são importantes para o melhor entendimento do tema abordado, são eles:

- a) **Capital (C):** É a quantia inicialmente investida, também conhecida como capital inicial, valor presente (VP), valor atual (VA).
- b) **Juros (J):** Rendimento proporcionado pelo capital. “De maneira geral, o juro pode ser entendido como o preço pago pelo uso de um capital por certo período de tempo. Em outras palavras, representa o valor da remuneração de um investimento ou o valor pago pelo empréstimo de um capital”. (NETO; 2023, p. 13).
- c) **Montante (M):** A soma do capital aplicado com os juros gerado na aplicação.

$$M = C + j$$

- d) **Prazo (t):** Período ou tempo que dura a aplicação financeira.
- e) **Taxa (i):** “Define-se como taxa de juros o quociente entre o valor dos juros gerados no primeiro período pelo valor do capital emprestado”. (DAL ZOT; CASTRO, 2015, p.7).

$$i = \frac{J}{C}$$

- f) **Empréstimos e financiamento:** O primeiro é um recurso financeiro que, de certa forma, não precisa ser justificado para utilizá-lo, porém o segundo necessita ter alguma justificativa, ou seja, como será utilizado. (BRANCO, 2015, p. 207).
- g) **Capitalização de juros:** “Denomina-se capitalização de juros o ato de adicionar juros ao capital”. (DAL ZOT; CASTRO, 2015, p.7).

Existem dois tipos de capitalização que devem ser dados destaque: capitalização simples e composta. O primeiro possui a incidência do juro sobre o capital investido inicialmente e o segundo, sobre o montante. Assim temos:

- I. **Capitalização simples:** o juro incide sobre o capital inicial.
- II. **Capitalização composta:** o juro incide sobre o montante

Outro ponto importante, que não devemos esquecer, está relacionado à taxa de juros. Ela pode ser representada em sua forma percentual ou unitária, isto é: por exemplo, 20% e 0,2.

2.4 JUROS SIMPLES

O juro simples está relacionado ao regime de capitalização simples, como visto na Seção 2.3. “Quando o regime é de juros simples, a remuneração pelo capital inicial aplicado (também chamado de principal) é diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação. O fator de proporcionalidade é a taxa de juros”. (MATHIAS e GOMES, 2009, p. 6). A fórmula para o cálculo do juro simples possui os seguintes elementos: capital inicial (C), juros (J) e taxa de juros (i), sabendo que o “ i ” está na sua forma unitária.

$$J = C \cdot i \cdot t \quad (1)$$

Dedução: Suponha um capital C investido a uma determinada taxa i em um período de tempo t no regime de capitalização simples, temos:

$$J_1 = C \cdot i \cdot 1 \text{ (Juros para o 1º período)}$$

$$J_2 = C \cdot i \cdot 2 \text{ (Juros para o 2º período)}$$

$$J_3 = C \cdot i \cdot 3 \text{ (Juros para o 3º período)}$$

...

$$J_t = C \cdot i + C \cdot i + \dots + C \cdot i \text{ (Juros para um período de tempo } t \text{)}$$

Daí,

$$J = (C \cdot i) \cdot t$$

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Para fortalecer ainda mais o resultado obtido, utilizaremos o **Princípio da Indução Finita** para demonstrar a fórmula de Juros Simples.

Demonstração: Mostraremos que $J_t = C \cdot i \cdot t$ é verdadeiro para todo $t \in \mathbb{N}$.

- i. Para $t = 1$, temos: $J_1 = C \cdot i \cdot 1 = C \cdot i$, que é verdade.
- ii. Seja $t = k$, sabemos que $J_k = C \cdot i \cdot k$ é verdadeira, logo, queremos mostrar que $t = k + 1$ também é verdadeira, isto é $J_{k+1} = C \cdot i \cdot (k + 1)$.

Veja:

$$J_{k+1} = J_k + C \cdot i = C \cdot i \cdot k + C \cdot i = C \cdot i \cdot (k + 1)$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, a fórmula é verdadeira para todo $t \in \mathbb{N}$.

A fórmula definida acima pode ser usada para calcular não somente o juro, mas também o capital, a taxa, o tempo e o montante, como veremos nos exemplos abaixo que levarão em consideração o regime de capitalização simples.

Exemplo 1: Um determinado investidor aplicou por 3 meses um capital de R\$ 1000,00 a uma taxa de 5% ao mês. Determine o juro do período e o montante.

Solução: Usando a fórmula (1) e sabendo que $M = C + J$ temos:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$J = 1000 \cdot 0,05 \cdot 3 = 150.$$

Calculando o montante:

$$M = C + J$$

$$M = 1000 + 150$$

$$M = 1150$$

Assim o juro acumulado no período é R\$ 150,00 e o montante R\$ 1.150,00.

Exemplo 2: Um determinado capital C fica aplicado por 5 anos a uma taxa de 2% ao ano e rende R\$ 250,00 de juros. Qual o capital aplicado?

Solução: Substituindo os valores em $J = C \cdot i \cdot t$ e isolando o capital C , tem-se:

$$250 = C \cdot 0,02 \cdot 5$$

$$C = \frac{250}{0,02 \cdot 5} = \frac{250}{0,1} = 2500$$

Logo, o capital investido foi R\$ 2500,00.

Exemplo 3: Um professor investiu um capital de R\$ 5.000,00 durante 12 meses em um banco X a uma taxa mensal i , obtendo um juro de R\$ 600,00 no período. Qual a taxa utilizada pelo banco?

Solução: Basta utilizar a Fórmula (1).

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow$$

$$600 = 5000 \cdot i \cdot 12 \Rightarrow$$

$$i = \frac{600}{5000 \cdot 12} = \frac{600}{60000} = 0,01$$

Assim a taxa unitária no período é 0,01 e a percentual de 1%.

Exemplo 4: Qual o período t que devemos investir um capital de R\$ 10.000,00 a uma taxa de 1% ao mês para alcançar um juro de R\$ 1.500,00 no período?

Solução: Aqui precisamos determinar o período (t) que deverá ser em meses.

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 1500 = 10000 \cdot 0,01 \cdot t \Rightarrow t = \frac{1500}{100} = 15 \text{ meses.}$$

2.5 JUROS COMPOSTOS

Os juros compostos incidem sobre o montante do período anterior, possibilitando um aumento de capital superior ao dos juros simples, nos quais a incidência ocorre apenas sobre o capital inicial (principal). Para que a compreensão seja completa, é necessário ter um bom entendimento dos conceitos relacionados ao estudo dos juros simples e ao que será abordado neste tópico, evitando possíveis confusões. “Juros compostos são juros calculados com base no principal original acrescido dos juros anteriormente calculados” (DAL ZOT; CASTRO, 2015, p. 23).

$$\text{Para determinar apenas os juros} \rightarrow J = C \cdot [(1 + i)^t - 1] \quad (2)$$

$$\text{Em função do montante} \rightarrow M = C \cdot (1 + i)^t \quad (3)$$

Dedução: Suponha um capital C investido a uma determinada taxa i em um período de tempo t no regime de capitalização composta.

Sabendo que $M = C + J$

- **1º período:** aqui o juro incidirá sobre o capital inicial para gerar o primeiro montante M_1 .

Observe que $J_1 = C \cdot i \cdot 1$, assim

$$M_1 = C + J_1 = C + C \cdot i$$

$$M_1 = C(1 + i).$$

- a) **2º período:** será formado um novo montante M_2 que é obtido pela soma do montante anterior M_1 acrescido do juro J_2 e assim, temos:

$$M_2 = M_1 + J_2$$

$$\begin{aligned}
 M_2 &= M_1 + M_1 \cdot i \\
 M_2 &= M_1(1 + i) \\
 M_2 &= C(1 + i) \cdot (1 + i) \\
 M_2 &= C(1 + i)^2
 \end{aligned}$$

b) **3º período:** aqui teremos J_3 que incide sobre M_2 , formando o montante M_3 , isto é, $J_3 = M_2 \cdot i$ e assim:

$$\begin{aligned}
 M_3 &= M_2 + J_3 \\
 M_3 &= M_2 + M_2 \cdot i \\
 M_3 &= M_2(1 + i) \\
 M_3 &= C(1 + i)^2 \cdot (1 + i) \\
 M_3 &= C(1 + i)^3.
 \end{aligned}$$

Logo, para o período de tempo t , temos:

$$\begin{aligned}
 M_t &= M_{t-1} + J_t \\
 M_t &= M_{t-1} + M_{t-1} \cdot i \\
 M_t &= M_{t-1} \cdot (1 + i) \\
 M_t &= C(1 + i)^{t-1} \cdot (1 + i) \\
 M_t &= C \cdot (1 + i)^t.
 \end{aligned}$$

Da mesma forma que demonstramos a fórmula de juros simples utilizando o **Princípio da Indução Finita**, faremos com a fórmula de juros compostos.

Demonstração: Mostraremos que $M_t = C \cdot (1 + i)^t$ é verdadeira para todo $t \in \mathbb{N}$.

- i. Para $t = 1$, temos: $M_1 = C \cdot (1 + i)^1 = C \cdot (1 + i)$. (Verdadeira)
- ii. Seja $t = k$, sabemos que $M_k = C \cdot (1 + i)^k$ é verdadeira, logo, queremos mostrar que $t = k + 1$ também é verdadeira, isto é: $M_{k+1} = C \cdot (1 + i)^{k+1}$.

$$M_{k+1} = M_k + M_k \cdot i = C \cdot (1 + i)^k + C \cdot (1 + i)^k \cdot i = C \cdot (1 + i)^k \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^{k+1}.$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $M_t = C \cdot (1 + i)^t$ é verdadeira para todo $t \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5: Qual o montante que um capital de R\$ 50.000,00 gera investido durante 6 meses a uma taxa de juro composto de 5% a.m?

Solução:

$$C = R\$ 50.000,00$$

$$i = 5\% \text{ a.m}$$

$$t = 6 \text{ meses}$$

$$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 50000. (1,05)^6 \Rightarrow M \cong 50000.1,34 = 67000.$$

2.6 ENTENDENDO AS TAXAS DE JUROS

Para ampliar o entendimento sobre os juros, deve-se também entender o comportamento das taxas de acordo com o período ao qual será aplicada. Existem diversas interpretações relacionadas a essas taxas, porém, as que serão abordadas estão diretamente ligadas à comparação entre elas e à sua capitalização. Esse entendimento será fundamental para ampliar o conhecimento e a correta aplicação dos conceitos de juros simples e compostos. A comparação entre as diferentes taxas é essencial para compreender a real incidência dos juros, especialmente em operações financeiras de longo prazo. A capitalização, que pode ocorrer em diferentes frequências (anual, semestral, mensal ou diária), influencia diretamente o valor final dos montantes acumulados.

Na prática comercial e bancária, o termo taxa tem sido utilizado com diversos significados e em diferentes situações. Assim, é importante distinguir algumas dessas situações para que possam aplicar os conceitos e as fórmulas adequadamente. (DAL ZOT; CASTRO, 2015, p.33).

2.6.1 Representação da unidade de tempo da taxa de juros

Quando o assunto é taxa de juros, é necessário saber qual a unidade de tempo a qual está relacionada, assim uma representação anual pode ser feita da seguinte forma: 10 % a.a, isto é, 10% ao ano. No Quadro 1 temos alguns exemplos.

Quadro 1 – Representação da taxa e sua unidade de tempo

Unidade de tempo	Taxa 10 %
Mensal	10% a.m
Bimestral	10% a.b
Trimestral	10% a.t
Semestral	10% a.s
Anual	10% a.a

Fonte: Autor (2024)

Outro ponto importante ao qual se deve dar atenção está relacionado ao período de tempo e à taxa de juros ao qual um determinado capital estará submetido. Tanto no juro simples quanto no composto, devemos tratar o período de tempo (t) e a taxa de juros (i) na mesma escala temporal. Dessa forma, ao ter uma taxa de 25% ao mês, o período de tempo necessariamente também deverá estar no formato mensal.

É fundamental lembrar que a interpretação correta da taxa de juros e da unidade de tempo a qual se encontra é essencial para um cálculo preciso dos juros, evitando erros que podem comprometer a realização de um simples cálculo. Essa uniformidade assegura que os resultados sejam coerentes. Observe no Exemplo 6 o que deve ser feito para não interpretar erroneamente uma questão que envolve juros, resolvendo-a utilizando tanto a capitalização simples como a composta.

Exemplo 6: Um capital de R\$ 25.000,00 será investido em um Banco X durante 6 meses a uma taxa de juro de 1% a.b. Qual o juro obtido ao fim do período?

Solução: Para resolver essa questão devemos transformar 6 meses em bimestre, isto é, 6 meses é o mesmo que 3 bimestres. Dessa forma podemos submeter a um regime de capitalização simples ou composta. Veja:

a) Capitalização simples

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 25000 \cdot 3 \cdot 0,01 \Rightarrow J = 750$$

b) Capitalização composta

$$J = C \cdot [(1 + i)^t - 1] \Rightarrow J = 25000 \cdot [(1,01)^3 - 1]$$

$$J = 25000 \cdot [1,030301 - 1]$$

$$J = 25000.0,030301$$

$$J = 757,525$$

2.6.2 Taxa proporcional e equivalente

De acordo com Azevedo (2015, p. 32), para que duas taxas sejam proporcionais ou equivalentes, ambas devem produzir o mesmo montante quando o período de tempo for o mesmo. Assim, pode-se considerar que a primeira está relacionada ao juro simples e a segunda ao juro composto. Nos itens a seguir, mostraremos como chegar a uma fórmula, aplicando-a em dois exemplos para facilitar o entendimento das taxas proporcional e equivalente, respectivamente.

a) Taxa proporcional: Juros simples

Para entender melhor, observe que 1 ano é igual a 12 meses, ou 1 semestre é igual a 3 bimestres. Perceba que as unidades de tempo são distintas, mas representam o mesmo período. Visto que geram um mesmo montante, como mencionado no parágrafo anterior, para obter uma fórmula basta igualar os montantes e realizar a substituição, observando as transformações mostradas no Quadro 1 e seguindo os passos conforme descrito abaixo.

Considerações

- a) M_x e M_y os montantes gerados nos respectivos períodos x e y
- b) $i_{a,x}$ e $i_{a,y}$ as taxas de juros que são capitalizadas nos períodos x e y , considerando uma delas como a taxa que se deseja encontrar e a outra como a proporcional.
- c) t_x e t_y representam o tempo nos respectivos períodos x e y

Assim:

Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$, logo

$$M - C = C \cdot i \cdot t$$

$$M = C + C \cdot i \cdot t$$

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Daí,

$$M_x = M_y$$

$$C \cdot (1 + i_{a,x} \cdot t_x) = C \cdot (1 + i_{a,y} \cdot t_y)$$

$$i_{a,x} \cdot t_x = i_{a,y} \cdot t_y \quad (4)$$

Observe agora a aplicação da fórmula em um exemplo de transformação de taxas proporcionais.

Exemplo 7: Calcular a taxa bimestral proporcional a 12% a.a.

Solução:

Utilizaremos (4) para solucionar esse problema. Veja que devemos encontrar a relação para que os períodos de tempo sejam iguais, assim, observando que 1 ano possui o mesmo período que 6 bimestres, temos:

$$i_{a,x} \cdot t_x = i_{a,y} \cdot t_y$$

$$i_{a,b} \cdot t_b = i_{a,a} \cdot t_a$$

$$i_{a,b} \cdot 6 = 0,12 \cdot 1$$

$$i_{a,b} = \frac{0,12}{6}$$

$$i_{a,b} = 0,02$$

$$i_{a,b} = 2\%$$

b) Taxa Equivalente: Juros Compostos

Devemos seguir o mesmo raciocínio e informações dadas no item a), porém considerando o regime de juros compostos.

Sabemos que $M = C \cdot (1 + i)^t$

Daí,

$$M_x = M_y$$

$$C \cdot (1 + i_{a,x})^{t_x} = C \cdot (1 + i_{a,y})^{t_y}$$

$$\begin{aligned}
 (1 + i_{a.x})^{t_x} &= (1 + i_{a.y})^{t_y} \\
 [(1 + i_{a.x})^{t_x}]^{\frac{1}{t_x}} &= [(1 + i_{a.y})^{t_y}]^{\frac{1}{t_x}} \\
 1 + i_{a.x} &= (1 + i_{a.y})^{\frac{t_y}{t_x}}
 \end{aligned}$$

Obtemos agora uma nova fórmula, porém relacionada a transformação de taxas equivalentes.

$$1 + i_{a.x} = (1 + i_{a.y})^{\frac{t_y}{t_x}} \quad (5)$$

Observe a aplicação da fórmula através de um exemplo.

Exemplo 8: Determinar a taxa trimestral equivalente a 1% ao mês no regime de capitalização composta.

Solução: Seguindo o mesmo raciocínio do Exemplo 7, porém levando em consideração que o juro é composto e utilizando (5), temos:

Sabe-se que 1 trimestre é igual a 3 meses, logo basta substituir as informações.

$$\begin{aligned}
 1 + i_{a.x} &= (1 + i_{a.y})^{\frac{t_y}{t_x}} \\
 1 + i_{a.t} &= (1 + i_{a.m})^{\frac{t_y}{t_x}} \\
 1 + i_{a.t} &= (1 + 0,01)^3 \\
 1 + i_{a.t} &= (1,01)^3 \\
 1 + i_{a.t} &= 1,030301 \\
 i_{a.t} &= 0,030301.
 \end{aligned}$$

Temos então que 1% a.m é equivalente a 3,0301% a.t.

Após conhecer as diferenças entre taxas proporcionais e equivalentes, observe a construção do quadro abaixo que mostra algumas transformações utilizando como base uma taxa de 2% capitalizada mensalmente.

Quadro 2 – Amostra das transformações da taxa de 2% ao mês de acordo com a capitalização bimestral, semestral e anual

Taxa 2% mensal		
Capitalização	Taxa proporcional	Taxa equivalente
Bimestral	4% a.b	4,04 a.b
Semestral	12% a.s	12,61 a.s
Anual	24% a.a	26,82 a.a

Fonte: Autor (2024)

2.6.3 Taxa efetiva e taxa nominal

Ambas as taxas podem ser diferenciadas observando o período de capitalização e a unidade de tempo da taxa em questão. Dessa forma, quando o período de capitalização é igual a unidade de tempo da taxa, nos referimos à taxa efetiva, e quando for forem diferentes, taxa nominal. (DAL ZOT; CASTRO, 2015, p.38)

Para perceber essa diferença basta observar o período de capitalização se ele é diferente ou não da unidade de tempo da taxa, como nos itens abaixo:

a) Taxa efetiva:

Temos, por exemplo, uma taxa de 10% ao ano capitalizada anualmente ou 10% a.a/a.a, como são iguais é suficiente escrever 10% a.a, logo:

- ✓ 10% a.a
- ✓ 5% a.m
- ✓ 1,5% a.s
- ✓ 2,8% a.t

b) Taxa Nominal

Diferente a efetiva, essa deve ser escrita utilizando o período de capitalização e a unidade de tempo, isto é: 10% ao ano capitalizada mensalmente ou 10% a.a/a.m. Observe outros exemplos:

- ✓ 5% a.s/a.m
- ✓ 15% a.t/a.m

✓ 12% a.a/a.b

✓ 2% a.s/a.m

Assim, quando temos a taxa efetiva não há a necessidade de fazer alterações pois já mostra seu valor real, porém quando se aplica uma taxa nominal não teremos o juro ou montante verdadeiro que deveria ser formado ao fazer uma determinada aplicação. Dessa forma precisamos *determinar a taxa proporcional à taxa nominal e depois calcular a taxa equivalente que será a taxa efetiva*, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 9: Calcular a taxa efetiva anual correspondente a uma taxa de 30% a.s capitalizada bimestralmente.

Solução: Primeiro observe que o período de capitalização da taxa é diferente da unidade de tempo informada, logo se trata de uma taxa nominal. Para resolução do problema utilizaremos dois passos: transformar em taxa proporcional e depois descobrir a taxa equivalente.

Taxa efetiva anual → (?)

Taxa nominal → 30% a.s capitalizada bimestralmente.

I. Primeiro transformaremos 30% a.s na sua taxa proporcional bimestral:

De acordo com o Exemplo 7 e utilizando (4) temos:

✓ $i_{a.x} \rightarrow$ taxa que buscamos $\rightarrow i_{a.b}$ (bimestral).

✓ $i_{a.y} \rightarrow$ taxa a qual $i_{a.x}$ é proporcional $\rightarrow i_{a.s}$ (semestral).

✓ t_y e t_x que são os prazos semestral e bimestral, respectivamente, os quais devemos observar que 1 semestre é igual a 3 bimestres.

$$i_{a.x} \cdot t_y = i_{a.y} \cdot t_x$$

$$i_{a.b} \cdot t_b = i_{a.s} \cdot t_s$$

$$i_{a.b} \cdot 3 = 0,3 \cdot 1$$

$$i_{a.b} = \frac{0,3}{3}$$

$$i_{a.b} = 0,1 = 10 \% \text{ a. b.}$$

Dessa forma, 30% a.s é proporcional a 10% a.b.

II. Ao descobrir a taxa proporcional, deve-se encontrar a taxa equivalente.

Assim como o Exemplo 8 e utilizando (5) temos:

- ✓ $i_{a,x} \rightarrow$ taxa que buscamos $\rightarrow i_{a,a}$ (anual).
- ✓ $i_{a,y} \rightarrow$ taxa a qual $i_{a,x}$ é equivalente $\rightarrow i_{a,b}$ (bimestral).
- ✓ t_y e t_x que são os prazos bimestral e anual, respectivamente, os quais devemos observar que 1 ano é igual a 6 bimestres.

$$1 + i_{a,x} = (1 + i_{a,y})^{\frac{t_y}{t_x}}$$

$$1 + i_{a,a} = (1 + i_{a,b})^{\frac{6}{1}}$$

$$1 + i_{a,a} = (1 + 0,1)^6$$

$$1 + i_{a,a} = 1,1^6$$

$$1 + i_{a,a} = 1,771561$$

$$i_{a,a} = 0,771561 = 77,1561\%$$

Dessa forma, 10% a.b é equivalente a 77,1561% a.a, que é a taxa efetiva que buscamos.

2.7 SÉRIE UNIFORME DE PAGAMENTOS

O estudo dos tópicos anteriores nos mostrou como entender o funcionamento dos juros e suas taxas em diversas situações. No entanto, é preciso analisar situações em que pagamos ou recebemos determinados valores financeiros, seja através de compras, empréstimos, investimentos ou até mesmo um financiamento. Na matemática financeira o estudo e entendimento das séries de pagamentos é tão importante quanto o estudo dos juros simples e compostos. “As Séries uniformes de pagamentos são aquelas em que os pagamentos ou recebimentos são constantes e ocorrem em intervalos iguais” e parcelas iguais. (BRANCO, 2015, p. 130).

2.7.1 Série uniforme de pagamento postecipado e antecipado

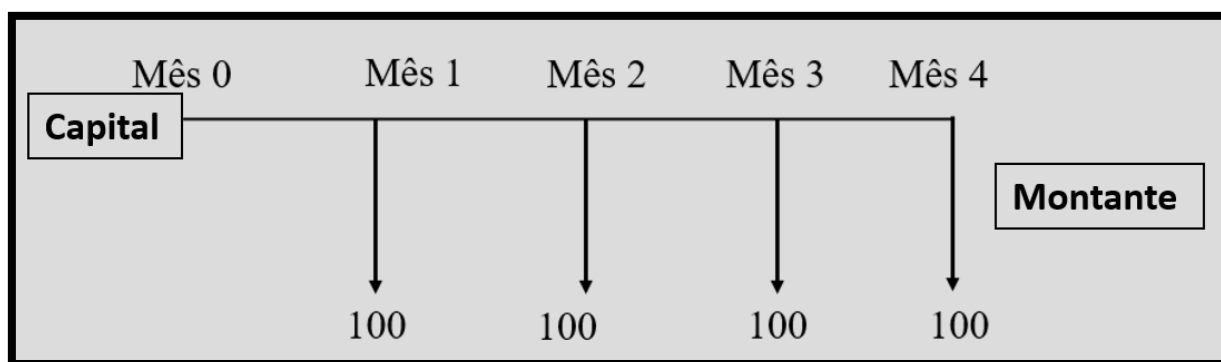
As séries de pagamentos ocorrem de duas formas e o conceito delas é indispensável para que este assunto seja compreendido e aplicado corretamente. Assim, deve-se observar a forma de pagamento, que pode ocorrer de duas maneiras: quando ele é feito no ato da compra, *antecipado*, e após a compra, *postecipado*, ou seja, ao fim do período. (BRANCO, 2015, p. 130).

Para ampliar um pouco mais esse entendimento vamos analisar dois exemplos utilizando fluxo de caixa, um instrumento que podemos visualizar de maneira clara o comportamento do capital, no caso em questão, as parcelas de uma compra. (GAZZONI, 2003, p. 13).

Exemplo 10: Um cliente da loja Y fez uma compra por um valor C que foi parcelado em 4 vezes de R\$ 100,00, sabendo que a primeira parcela foi paga após a compra, ou seja, no mês seguinte.

Observação: Dessa forma entende-se que os pagamentos da compra são postecipados, como disposto na Figura 1 disponível nesta seção.

Figura 1 – Forma de pagamento postecipado

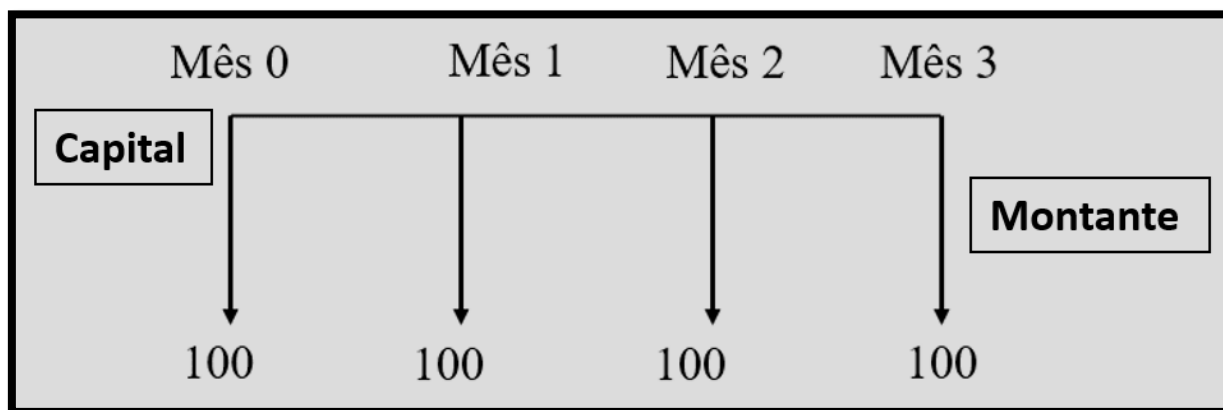


Fonte: Autor (2024)

Exemplo 11: Um cliente de uma loja X comprou um produto por um valor C que foi parcelado em 4 vezes de R\$ 100,00. Observando que a primeira parcela foi dada no ato da compra, ou seja, de forma antecipada.

Observações: a representação a seguir mostra a visão de quem pagou as 4 parcelas

Figura 2 – Forma de pagamento antecipado



Fonte: Autor (2024)

2.7.2 Valor presente de uma série uniforme de pagamentos postecipados.

Observe nos Exemplos 10 e 11 que a soma total das parcelas gera um determinado montante, esse montante quando trazido para a data inicial é chamado de valor presente, que é o capital. Esse valor é obtido trazendo cada um dos termos ou parcelas para uma data focal, isto é, para o presente ou data zero. (BRANCO, 2015, p. 132).

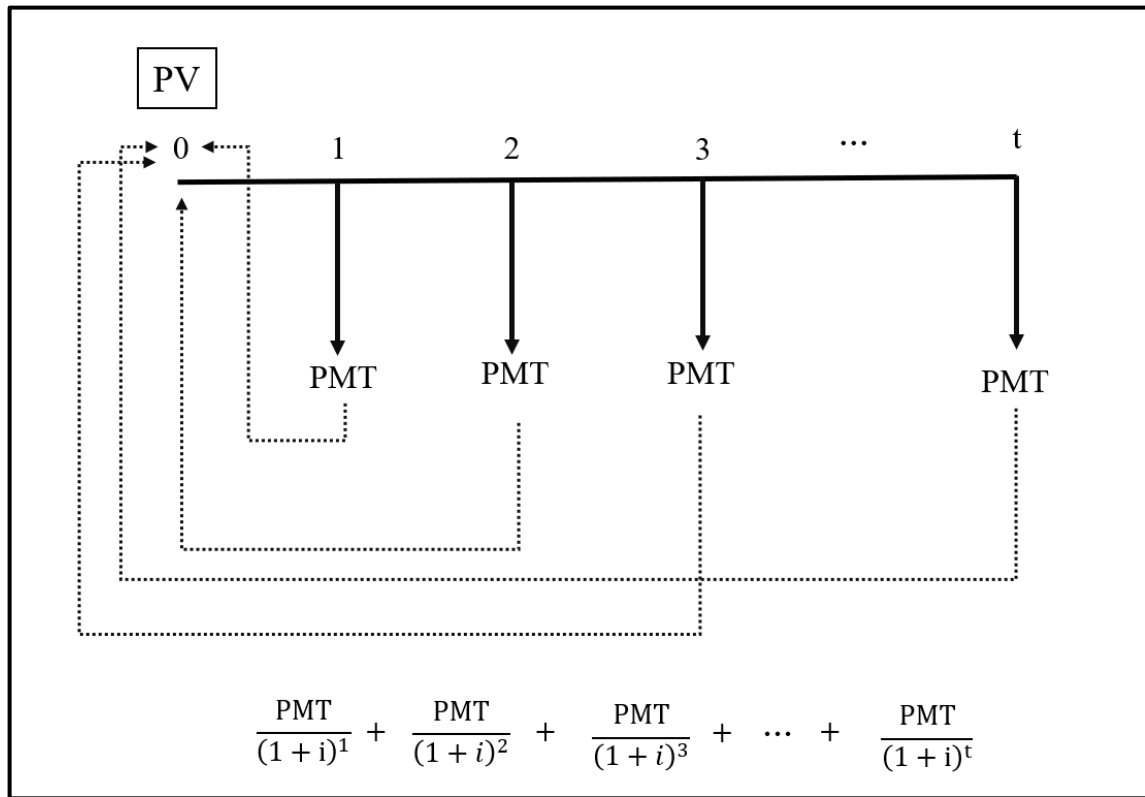
Temos também, outra forma de nomenclatura, que é a de valor atual, pois, dependendo da situação podemos nos deparar com as duas. “É o valor que um compromisso tem em uma data que antecede ao seu vencimento. (MATHIAS e GOMES, 2009, p. 19)

Considere o capital como (PV), isto é o valor presente da série de pagamentos postecipados, e (PMT) como o valor da parcela e (t) é a quantidade de parcelas. Assim, para obter o valor presente basta trazer cada parcela para a data zero, isto é, dividindo cada uma pelo fator de capitalização. Na imagem abaixo podemos visualizar de maneira clara como isso ocorre.

Observações sobre a Figura 3

- Perceba que todas as parcelas precisam ser trazidas para a data zero
- Após todas as parcelas estarem na data zero, ao somar todas elas, obtemos o valor presente.
- As setas apenas indicam que as parcelas foram trazidas para data zero, não devendo ter outra forma de interpretação.

Figura 3 – Comportamento das parcelas quando trazidas para o valor presente



Fonte: Autor (2024)

Dessa forma, através da Figura 3 podemos descrever uma soma que utilizaremos para obter uma fórmula básica para o cálculo do valor presente.

$$\begin{aligned}
 PV &= \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PMT}{(1+i)^t} \\
 PV &= \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PMT}{(1+i)^t} \\
 PV &= PMT \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^t} \right].
 \end{aligned} \tag{6}$$

Observe acima que temos entre colchetes a soma de t termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$. Assim, utilizando a soma dos termos de uma PG dada em (7), encontraremos essa soma e a substituiremos na Equação (6).

$$S_t = a_1 \cdot \frac{1 - q^t}{1 - q} \Rightarrow \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
S_t &= \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^t}{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)} = \frac{\left[1 - \frac{1}{(1+i)^t}\right]}{\left[(1+i) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+i}\right)\right]} \Rightarrow \\
S_t &= \frac{\left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t}\right]}{\left[(1+i) \cdot \left(\frac{i}{1+i}\right)\right]} = \frac{\left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t}\right]}{i} \Rightarrow \\
S_t &= \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t}\right] \cdot \frac{1}{i} \Rightarrow \\
S_t &= \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i}\right]
\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^t} = \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i}\right]$$

Fazendo a substituição desta última igualdade na fórmula (6), obtemos:

$$\begin{aligned}
PV &= PMT \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^t}\right] \Rightarrow \\
\mathbf{PV} &= \mathbf{PMT} \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i}\right]. \tag{8}
\end{aligned}$$

Obtemos acima a *fórmula do valor presente de uma série de pagamentos postecipados*.

Veja a aplicação no exemplo abaixo:

Exemplo 12: Determine valor de um financiamento a ser quitado mediante seis pagamentos mensais de R\$ 1.000,00 com o vencimento da primeira parcela a 30 dias da liberação dos recursos, sendo de 3,5% a.m a taxa de juros negociada na operação. (BRANCO, p. 133).

Solução: Temos aqui uma situação em que precisamos descobrir o valor da quitação do financiamento, isto é, o valor presente. Observe que as parcelas são iguais os pagamentos, postecipados. Para resolução utilizaremos a Fórmula (8) e alguns valores estão arredondados devido quantidade de casas decimais.

Dados: PMT = R\$ 1.500,00, i = 3,5% a.m e t = 6.

$$\begin{aligned}
 PV &= PMT \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right] \\
 PV &= 1500 \left[\frac{(1+0,035)^6 - 1}{(1+0,035)^6 \cdot 0,035} \right] \\
 PV &= 1500 \left[\frac{(1,035)^6 - 1}{(1,035)^6 \cdot 0,035} \right] \\
 PV &\cong 1500 \left[\frac{0,229}{0,043} \right] \cong 1500 \cdot 5,325 \cong 7987,5 \\
 PV &\cong 7.987,5
 \end{aligned}$$

Além de determinar diretamente o valor presente, podemos utilizar a Fórmula (8) para encontrar o valor da parcela (PMT) apenas isolando-a, como podemos observar logo abaixo.

$$\begin{aligned}
 PV &= PMT \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right] \\
 PMT &= \frac{PV}{\left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right]} = PV \cdot \left[\frac{(1+i)^t \cdot i}{(1+i)^t - 1} \right] \Rightarrow \\
 \mathbf{PMT} &= \mathbf{PV} \cdot \left[\frac{(1+i)^t \cdot i}{(1+i)^t - 1} \right]. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Agora podemos observar através do resultado obtido acima *como determinar o valor da parcela utilizando o valor do capital inicial (valor presente)*.

Exemplo 13: Uma empresa financiou um capital de R\$ 445,00 em 5 parcelas iguais a uma taxa de 4% ao mês. Sabendo que a primeira parcela foi paga após 1 mês. Determine o valor de cada prestação.

Solução: Usaremos a Fórmula (9), substituindo as informações obtidas abaixo. Nos cálculos, usamos arredondamentos até 3 casas decimais para facilitar a resolução.

$$\begin{aligned}
 PMT &= PV \cdot \left[\frac{(1+i)^t \cdot i}{(1+i)^t - 1} \right] = 455 \cdot \left[\frac{(1+0,04)^5 \cdot i}{(1+0,04)^5 - 1} \right] \Rightarrow \\
 PMT &= 455 \cdot \left[\frac{(1,04)^5 \cdot 0,04}{(1,04)^5 - 1} \right] = 455 \cdot [0,2247] \Rightarrow \\
 PMT &= 455 \cdot [0,2247] \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$PMT = 102,23$$

Logo o valor de cada parcela é de R\$ 102,23.

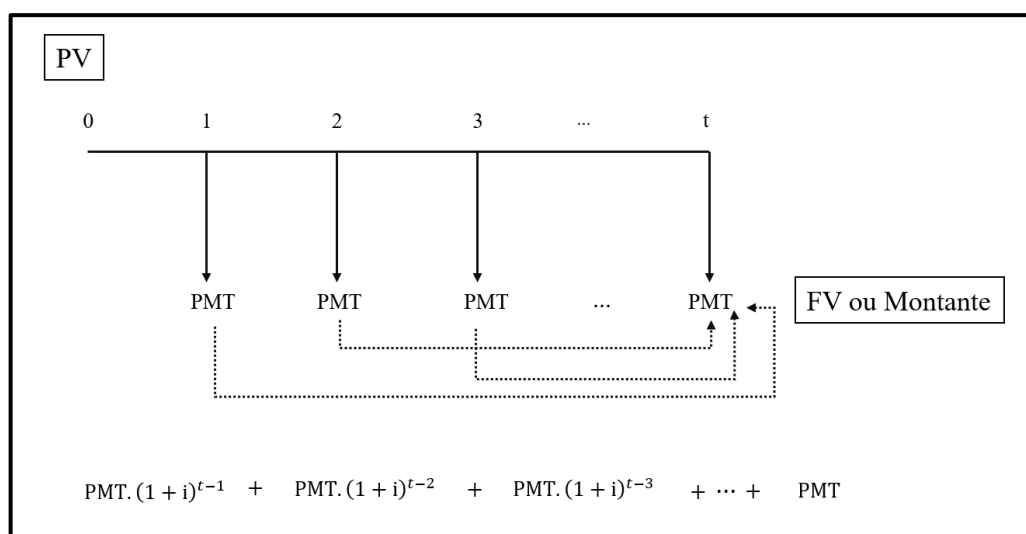
2.7.3 Valor futuro de uma série uniforme de pagamentos postecipados

Segundo Sobrinho (2018, p. 8), o valor futuro, representado por (FV), nada mais é que o montante gerado ao fim do período. Mesmo estando tratando de parcelas constantes devemos observar que cada uma delas será capitalizada cada mês, até chegar ao fim do período. Observe a formação do valor futuro na Figura 4 e note que a primeira parcela deve ser capitalizada um período $t-1$ até chegar ao fim, a segunda parcela $t-2$ e assim sucessivamente, porém a última parcela não precisa ser capitalizada pois já está no último período.

Observações sobre a Figura 4

- Perceba que a última parcela não precisa ser capitalizada, pois já se encontra na data final.
- As demais parcelas são capitalizadas de acordo com o período que se encontram.
- No final do período, ao somar todas as parcelas, obtemos o valor futuro ou montante.
- As setas apenas indicam que as parcelas foram levadas para data fim, não devendo ter outra forma de interpretação.

Figura 4 – Obtenção do valor futuro



Fonte: Autor (2024)

Com isso podemos obter a *fórmula para encontrar o valor da parcela em função do valor futuro* utilizando o conceito de juro composto visto na Seção 2.5 e a Fórmula (8) referente a valor presente.

Dedução: Utilizando a fórmula (3) e considerando o montante como FV e o capital como PV, basta substituir $PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right]$, isolando a parcela (PMT).

$$\begin{aligned}
 M &= C \cdot (1+i)^t \\
 FV &= PV \cdot (1+i)^t \\
 FV &= PMT \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right] \cdot (1+i)^t \\
 PMT &= \frac{FV}{\left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right] \cdot (1+i)^t} \\
 PMT &= FV \cdot \left[\frac{(1+i)^t \cdot i}{(1+i)^t - 1} \right] \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \\
 PMT &= FV \cdot \left[\frac{(1+i)^t \cdot i}{(1+i)^t - 1} \right] \cdot \frac{1}{(1+i)^t} = FV \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^t - 1} \right] \Rightarrow \\
 PMT &= FV \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^t - 1} \right]. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Dessa forma, a fim de encontrar o valor da parcela em função do valor futuro, observe a aplicação da fórmula obtida acima através de um exemplo.

Exemplo 14: Encontre o valor das parcelas (PMT) mensais de um investimento que durou 5 meses a uma taxa de 3% a.m, observando o regime de juros compostos, e produziu um montante (FV) de R\$ 10.000,00.

Solução: Queremos encontrar o valor das parcelas PMT. Utilizaremos arredondamento até 3 casas decimais para facilitar o cálculo

Dados:

$$i = 3\% \text{ a.m} = 0,03$$

$$t = 5 \text{ meses}$$

$$FV = 10000$$

$$\begin{aligned}
 \text{PMT} &= \text{FV} \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^t - 1} \right] \\
 \text{PMT} &= 10000 \cdot \left[\frac{0,03}{(1+0,04)^5 - 1} \right] \\
 \text{PMT} &= 10000 \cdot \left[\frac{0,03}{(1,04)^5 - 1} \right] \\
 \text{PMT} &= 10000 \cdot \left[\frac{0,03}{0,216} \right] \\
 \text{PMT} &= 10000 \cdot (0,138) \\
 \text{PMT} &= 1380
 \end{aligned}$$

Temos que o valor das parcelas é de R\$ 1.380,00.

2.7.4 Valor presente e valor futuro de uma série uniforme de pagamentos antecipada

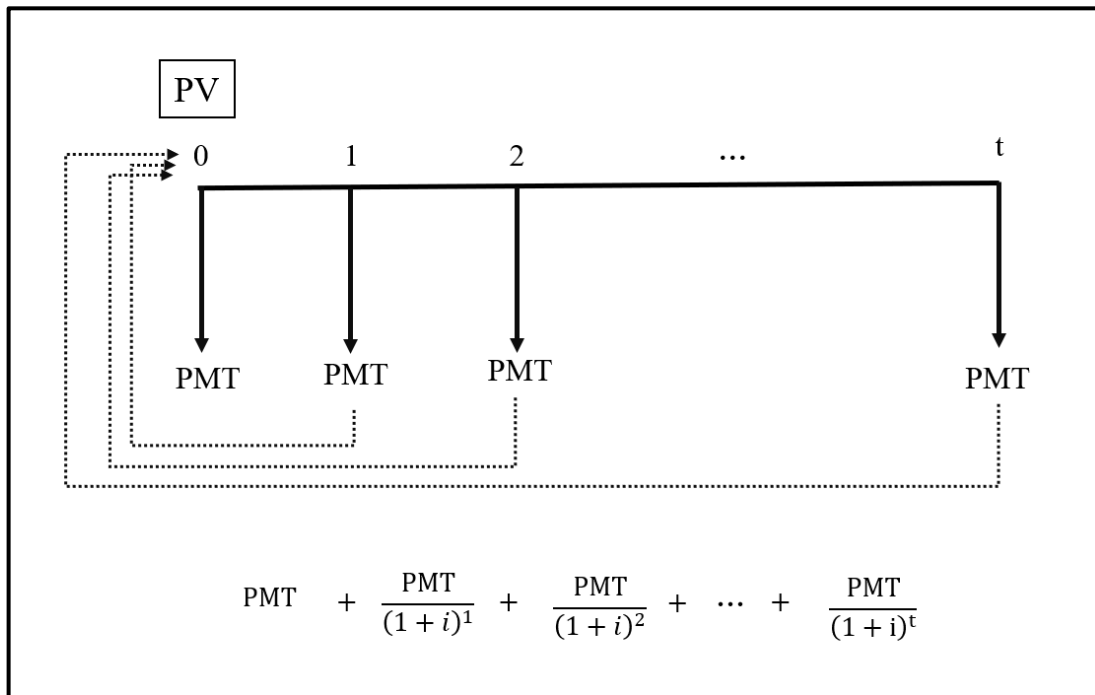
O conceito de valor presente e valor futuro, que será estudado neste tópico, é o mesmo visto nos tópicos anteriores, porém devemos observar que agora o pagamento será feito de forma antecipada, isto é, no momento da compra. Dessa forma devemos observar algumas mudanças que ocorrerão nas fórmulas de valor presente e valor futuro.

Como o primeiro pagamento é feito no ato da compra, então os juros incidirão apenas a partir da segunda parcela. Com isso, para encontrar o valor presente, basta fazer como foi feito na Seção 2.7.2, trazendo para data zero todas as parcelas e somando-as. Observe a Figura 5 para entender como obter o valor presente quando a forma de pagamento é antecipada.

Observações sobre a Figura 5

- Perceba que a primeira parcela não precisa ser descapitalizada, pois já se encontra na data zero.
- As demais parcelas são descapitalizadas de acordo com o período que se encontram.
- Atentar-se para que no final da antecipação somar todas as parcelas.
- As setas apenas indicam que as parcelas foram trazidas para data zero, não devendo ter outra forma de interpretação.

Figura 5 – Comportamento das parcelas para obtenção do valor presente em uma série de pagamentos antecipados



Fonte: Autor (2024)

Para encontrar o valor presente basta somar as parcelas.

$$PV = PMT + \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PMT}{(1+i)^t}$$

$$PV = PMT \left[1 + \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^t} \right]$$

Temos uma PG de t termos cuja razão é $\frac{1}{1+i}$. Na Seção 2.7.2 vimos que a soma dos termos dessa PG é dada por $S_t = \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right]$ logo, fazendo a substituição obteremos a fórmula para encontrar o valor presente em função do valor da parcela. Observe logo abaixo.

$$PV = PMT \cdot \left[1 + \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right]$$

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^t \cdot i + (1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right]$$

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^t \cdot (i+1) - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right]$$

$$\begin{aligned}
 PV &= \text{PMT} \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t(1+i)^{-1} \cdot i} \right] \\
 \mathbf{PV} &= \mathbf{PMT} \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^{t-1} \cdot i} \right].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Como já sabemos calcular o valor presente (PV), também podemos determinar o valor da parcela apenas isolando-a em (10). Observe:

$$\begin{aligned}
 PV &= \text{PMT} \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^{t-1} \cdot i} \right] \\
 \text{PMT} &= \frac{PV}{\left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^{t-1} \cdot i} \right]} \\
 \mathbf{PMT} &= \mathbf{PV} \cdot \left[\frac{(1+i)^{t-1} \cdot i}{(1+i)^t - 1} \right].
 \end{aligned} \tag{12}$$

Para obter o *valor futuro*, basta fazer $FV = PV \cdot (1+i)^t$ como na Seção 2.7.3, porém, observando o fato de a forma de pagamento ser antecipada ao substituir o valor presente. Observe a construção nos cálculos a seguir.

$$\begin{aligned}
 FV &= PV \cdot (1+i)^t \\
 FV &= \text{PMT} \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^{t-1} \cdot i} \right] \cdot (1+i)^t \\
 \mathbf{FV} &= \mathbf{PMT} \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^{t-1} \cdot i} \right] \cdot (1+i)^t.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Exemplo 15: Uma dívida é negociada em 4 pagamentos iguais de R\$ 100,00; sabendo-se que a taxa de juro cobrada é de 10% a.m, e que um dos pagamentos foi considerado como entrada, determine o preço à vista dessa mercadoria. (BRANCO, p. 158)

Solução: A forma de pagamento adotada é antecipada e queremos determinar o valor presente (PV), isto é, o preço à vista. Utilizaremos a Equação (13) com aproximação de até 3 casas decimais. Sabemos que a parcela (PMT) é R\$ 100,00 em 4 meses (t) a uma taxa (i) de 10% a.m.

$$PV = \text{PMT} \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^{t-1} \cdot i} \right]$$

$$PV = 100. \left[\frac{(1 + 0,1)^4 - 1}{(1 + 0,1)^3 \cdot 0,1} \right]$$

$$PV = 100. \left[\frac{(1,1)^4 - 1}{(1,1)^3 \cdot 0,1} \right]$$

$$PV = 100. \left[\frac{1,464 - 1}{1,331 \cdot 0,1} \right]$$

$$PV = 100. \left[\frac{0,464}{0,133} \right]$$

$$PV = 348,8$$

Logo o preço da mercadoria, à vista, é R\$ 348,80.

2.8 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Nos tópicos anteriores estudamos pontos importantes que são pré-requisitos para o entendimento deste que abordaremos. Tomando como base um empréstimo parcelado, o conceito de amortizar pode ser entendido como o ato de reduzir do saldo devedor o valor pago em cada parcela, isto é, em cada pagamento feito. (BRANCO, 2015, p. 208).

A maneira de amortizar não está restrita apenas a um único modelo, dessa forma iremos tratar de três: Sistema Francês de Amortização (SFA), Sistema de Amortização Constante (SAC) e Sistema de Amortização Americano (SAA). Desses modelos, o SFA e SAC são os mais utilizados no Brasil. (SILVA, 2023, p. 10)

2.8.1 Sistema Francês de Amortização

De acordo com Sobrinho (2018, p. 128) o sistema francês de amortização (SFA) ou sistema Price, como também é conhecido, tem as seguintes características: prestações (P ou PMT) constantes, juros (J) decrescentes que são obtidos multiplicando o saldo devedor do período anterior pela taxa (i), saldo devedor de um período que obtemos subtraindo saldo devedor e amortização referentes ao período anterior e a amortização (A) que é obtida através da subtração entre a prestação e o juros do mesmo período. Devemos observar com atenção que os juros são obtidos multiplicando a taxa (i) pelo saldo devedor imediatamente anterior. Observe abaixo.

$$\text{Juros} \rightarrow J_{n+1} = SD_n \cdot i \quad (14)$$

$$\text{Saldo devedor} \rightarrow SD_{n+1} = SD_n - A_n \quad (15)$$

$$\text{Amortização} \rightarrow A_n = P - J_n \quad (16)$$

Para entender o funcionamento com mais precisão analisaremos a aplicação do sistema através de um exemplo.

Exemplo 16: Um estudante precisou realizar um empréstimo no valor de R\$ 20.000,00 para terminar de construir seu apartamento, que deve ser quitado em 6 prestações mensais de mesmo valor, sabendo que a primeira parcela vence um mês após o recebimento do dinheiro e a taxa de juros cobrada é de 4% ao mês. Qual o valor das prestações, juros acumulados no período e montante?

Solução: Primeiro precisamos encontrar o valor da prestação utilizando a Fórmula (9), sabendo que o pagamento das parcelas é postecipado. Usaremos aproximação com 3 casas decimais para resolução da questão.

Dados:

$i = 4\% \text{ a. m}$

$t = 6 \text{ meses}$

a) Determinação do valor da prestação

Valor presente (PV) = R\$ 20.000,00

$$\text{PMT} = \text{PV} \cdot \left[\frac{(1+i)^t \cdot i}{(1+i)^t - 1} \right]$$

$$\text{PMT} = 20000 \cdot \left[\frac{(1+0,04)^6 \cdot 0,04}{(1+0,04)^6 - 1} \right]$$

$$\text{PMT} = 20000 \cdot \left[\frac{(1,04)^6 \cdot 0,04}{(1,04)^6 - 1} \right]$$

$$\text{PMT} = 20000 \cdot \left[\frac{1,265 \cdot 0,04}{1,265 - 1} \right]$$

$$\text{PMT} = 3815,24 \text{ (valor arredondado)}$$

b) Determinando os juros, amortização e saldo devedor referente a cada período utilizando as Fórmulas (14), (16) e (15), respectivamente nessa ordem.

$$J_1 = \text{SD}_0 \cdot i = 20000 \cdot 0,04 = \text{R\$ } 800,00$$

$$A_1 = P - J_1 = 3815,24 - 800 = \text{R\$ } 3.015,24$$

$$SD_1 = SD_0 - A_1 = 20000 - 3015,24 = R\$ 16.984,76$$

$$J_2 = SD_1 \cdot i = 16984,76 \cdot 0,04 = R\$ 679,39$$

$$A_2 = P - J_2 = 3815,24 - 679,39 = R\$ 3.135,85$$

$$SD_2 = SD_1 - A_2 = 16984,76 - 3015,24 = R\$ 13.848,91$$

$$J_3 = SD_2 \cdot i = 16984,76 \cdot 0,04 = R\$ 553,96$$

$$A_3 = P - J_3 = 3815,24 - 553,96 = R\$ 3.261,28$$

$$SD_3 = SD_2 - A_3 = 13848,91 - 3261,28 = R\$ 10.587,63$$

$$J_4 = SD_3 \cdot i = 10587,63 \cdot 0,04 = R\$ 423,51$$

$$A_4 = P - J_4 = 3815,24 - 423,51 = R\$ 3.391,73$$

$$SD_4 = SD_3 - A_4 = 10587,63 - 3391,73 = R\$ 7.195,89$$

$$J_5 = SD_4 \cdot i = 7195,89 \cdot 0,04 = R\$ 287,84$$

$$A_5 = P - J_5 = 3815,24 - 287,84 = R\$ 3.527,40$$

$$SD_5 = SD_4 - A_5 = 7195,86 - 3527,40 = R\$ 3668,50$$

$$J_6 = SD_5 \cdot i = 3668,50 \cdot 0,04 = R\$ 146,74$$

$$A_6 = P - J_6 = 3815,24 - 146,74 = R\$ 3.668,50$$

$$SD_6 = SD_5 - A_6 = 3668,50 - 3668,50 = R\$ 0,00$$

Temos que o valor de cada parcela é R\$ 3.815,24. Para mostrar como funciona o SFA utilizaremos as instruções do primeiro parágrafo deste tópico e as fórmulas (14), (15) e (16).

Observe na Tabela 1 o comportamento do saldo devedor, juros e amortizações que foram obtidos utilizando o sistema francês.

Tabela 1 – Sistema Francês de Amortização

Nº Parcelas	Prestação	Saldo Devedor	Juros	Amortização
0	-	$SD_0 = R\$ 20.000,00$	-	-
1	R\$ 3.815,24	$SD_1 = R\$ 16.984,76$	$J_1 = 800$	$A_1 = 3.015,24$
2	R\$ 3.815,24	$SD_2 = R\$ 13.848,91$	$J_2 = 679,39$	$A_2 = 3.135,85$
3	R\$ 3.815,24	$SD_3 = R\$ 10.587,63$	$J_3 = 553,96$	$A_3 = 3.261,28$
4	R\$ 3.815,24	$SD_4 = R\$ 7.195,89$	$J_4 = 423,51$	$A_4 = 3.391,73$
5	R\$ 3.815,24	$SD_5 = R\$ 3.668,50$	$J_5 = 287,84$	$A_5 = 3.527,40$
6	R\$ 3.815,24	$SD_6 = R\$ 0,00$	$J_6 = 146,74$	$A_6 = 3.668,50$

Fonte: Autor (2024)

Analisando as informações obtidas temos:

$PMT \rightarrow 3815,24$

Juros acumulados $\rightarrow J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 = 2891,44$

Montante $\rightarrow$ Soma da quantidade de parcelas $3815,24 \cdot 2891,44 = \mathbf{22.891,44}$

2.8.2 Sistema de amortização constante

Esse sistema tem a amortização (A) constante que podemos encontrá-la dividindo o saldo devedor inicial (SD_0) pela quantidade de prestações e descontando-a do saldo devedor imediatamente anterior para obtenção do próximo. Para obter o valor da prestação (P) basta somar o juro (J), referente ao mesmo período, com a amortização e, o juro, podemos determiná-lo multiplicando a taxa (i) pelo saldo devedor anterior. (NETO, 2022, p. 2007).

Assim, considerando o período como “n” e através das observações acima, podemos obter as seguintes fórmulas:

$$\text{Amortização} \rightarrow A = \frac{(SD_0)}{n^{\circ} \text{ de prestações}} \quad (17)$$

$$\text{Saldo devedor} \rightarrow SD_{n+1} = SD_n - A \quad (18)$$

$$\text{Valor da prestação} \rightarrow P_n = J_n + A \quad (19)$$

$$\text{Juros} \rightarrow J_{n+1} = i \cdot SD_n \quad (20)$$

Para entender a aplicação desse sistema observaremos a resolução do exemplo a seguir:

Exemplo 17: Um professor fez um empréstimo no valor de R\$ 20.000,00, com a taxa de 5% ao mês, que serão pagas em 5 parcelas mensais, sabendo que a primeira parcela ocorrerá ao fim de um mês. Utilizando o Sistema de Amortização Constante (SAC), determine o valor das prestações, amortização e juros na operação.

Solução: Para solução deste problema iremos colher os principais dados do enunciado, calcular algebricamente o valor da amortização, saldo devedor, juros, prestações e finalizar com a montagem da tabela.

Dados:

Saldo devedor inicial = R\$ 20.000,00

Número de prestações = 5

Taxa de juros = 5% a.m

a) Determinação da Amortização:

$$A = \frac{SD_0}{n^\circ \text{ de prestações}}$$

$$\frac{20000}{5} = \text{R\$ } 4.000,00$$

b) Determinação do Saldo Devedor: $SD_{n+1} = SD_n - A$.

$$SD_0 = \text{R\$ } 20.000,00$$

$$SD_1 = 20000 - 4000 = \text{R\$ } 16.000,00$$

$$SD_2 = 16000 - 4000 = \text{R\$ } 12.000,00$$

$$SD_3 = 12000 - 4000 = \text{R\$ } 8.000,00$$

$$SD_4 = 8000 - 4000 = \text{R\$ } 4.000,00$$

$$SD_5 = 4000 - 4000 = 0$$

c) Cálculo dos juros: $J_{n+1} = i \cdot SD_n$.

$$J_1 = i \cdot SD_0 = 0,05 \cdot 20000 = \text{R\$ } 1.000,00$$

$$J_2 = i \cdot SD_1 = 0,05 \cdot 16000 = \text{R\$ } 800,00$$

$$J_3 = i \cdot SD_2 = 0,05 \cdot 12000 = \text{R\$ } 600,00$$

$$J_4 = i \cdot SD_3 = 0,05 \cdot 8000 = \text{R\$ } 400,00$$

$$J_5 = i \cdot SD_4 = 0,05 \cdot 4000 = \text{R\$ } 200,00$$

$$\text{Total} = \text{R\$ } 3.000,00$$

d) Cálculo das prestações: $P_n = J_n + A$

$$P_1 = J_1 + A = 1000 + 4000 = \text{R\$ } 5.000,00$$

$$P_2 = J_2 + A = 800 + 4000 = \text{R\$ } 4.800,00$$

$$P_3 = J_3 + A = 600 + 4000 = \text{R\$ } 4.600,00$$

$$P_4 = J_4 + A = 400 + 4000 = \text{R\$ } 4.400,00$$

$$P_5 = J_5 + A = 200 + 4000 = \text{R\$ } 4.200,00$$

Com os valores obtidos acima montaremos a Tabela 2 a fim de analisar o comportamento dos valores obtidos.

Tabela 2 – Sistema de Amortização Constante

Nº Parcelas	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	$SD_0 = \text{R\$ } 20.000,00$	-	-	-
1	$SD_1 = \text{R\$ } 16.000,00$	$\text{R\$ } 4.000,00$	$J_1 = 1.000,00$	$\text{R\$ } 5.000,00$
2	$SD_2 = \text{R\$ } 12.000,00$	$\text{R\$ } 4.000,00$	$J_2 = 800,00$	$\text{R\$ } 4.800,00$
3	$SD_3 = \text{R\$ } 8.000,00$	$\text{R\$ } 4.000,00$	$J_3 = 600,00$	$\text{R\$ } 4.600,00$
4	$SD_4 = \text{R\$ } 4.000,00$	$\text{R\$ } 4.000,00$	$J_4 = 400,00$	$\text{R\$ } 4.400,00$
5	$SD_5 = \text{R\$ } 0,00$	$\text{R\$ } 4.000,00$	$J_5 = 200,00$	$\text{R\$ } 4.200,00$

Fonte: Autor (2024)

Observe na Tabela 2 que o saldo devedor é decrescente, a amortização constante e os juros e prestações são decrescentes.

2.8.3 Sistema americano de amortização

Observe que o SAA é bem mais simples de entender que os estudados até o momento pois o saldo devedor é amortizado em uma única vez ao fim do período, assim ele permanece o mesmo até ser quitado. Os juros devem ser pagos periodicamente sobre o saldo devedor, dessa forma o valor das prestações são os próprios juros pagos mensalmente. (AZEVEDO, 2015, p. 140).

Exemplo 18: Um banco realizou um empréstimo no valor de R\$ 10.000,00 com taxa de 2% a.m que deverá ser quitado em 5 meses utilizando o SAA. Monte uma tabela com as informações.

Solução: Para resolução deste problema utilizaremos as Fórmulas (14) e (16) que se referem a juros e amortização. Observe que o saldo devedor permanece constante até ser quitado no final, os juros ocorrem mensalmente e o montante formado no final será amortizado, observe:

Saldo devedor = R\$ 10.000

Taxa de juros = 2% a.m

Juros mensais = $0,02 \cdot 10000 = \text{R\$ } 200,00$

Período de tempo = 5 meses

a) A amortização é feita de uma única vez no último período.

$$A_1 = \text{R\$ } 0,00$$

$$A_2 = \text{R\$ } 0,00$$

$$A_3 = \text{R\$ } 0,00$$

$$A_4 = \text{R\$ } 0,00$$

$$A_5 = \text{R\$ } 10.000,00$$

$$\text{Total} = \text{R\$ } 10.000,00$$

b) Saldo devedor é amortizado de uma única vez no último período

$$SD_0 = \text{R\$ } 10.000,00$$

$$SD_1 = \text{R\$ } 10.000,00$$

$$SD_2 = \text{R\$ } 10.000,00$$

$$SD_3 = \text{R\$ } 10.000,00$$

$$SD_4 = \text{R\$ } 10.000,00$$

$$SD_5 = SD_0 - A_5 = 10000 - 10000 = \text{R\$ } 0,00$$

c) Os juros incidem mensalmente sobre o saldo devedor, logo:

$$J_1 = i \cdot SD_0 = 0,02 \cdot 10000 = \text{R\$ } 200,00$$

$$J_2 = i \cdot SD_1 = 0,02 \cdot 10000 = \text{R\$ } 200,00$$

$$J_3 = i \cdot SD_2 = 0,02 \cdot 10000 = R\$ 200,00$$

$$J_4 = i \cdot SD_3 = 0,02 \cdot 10000 = R\$ 200,00$$

$$J_5 = i \cdot SD_4 = 0,02 \cdot 10000 = R\$ 200,00$$

$$\text{Total de juros} = R\$ 1.000,00$$

d) Sabemos que para encontrar o valor da prestação é somando a amortização com os juros, logo:

$$P_1 = A_1 + J_1 = 0 + 200 = R\$ 200,00$$

$$P_2 = A_2 + J_2 = 0 + 200 = R\$ 200,00$$

$$P_3 = A_3 + J_3 = 0 + 200 = R\$ 200,00$$

$$P_4 = A_4 + J_4 = 0 + 200 = R\$ 200,00$$

$$P_5 = A_5 + J_5 = 10000 + 200 = R\$ 10.200,00$$

$$\text{Total} = R\$ 11.000,00$$

Dessa forma, com as informações obtidas acima, podemos construir a seguinte tabela:

Tabela 3 – Sistema Americano de Amortização

Mês de referência	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	SD ₀ = R\$ 10.000,00	-	-	
1	SD ₁ = R\$ 10.000,00	R\$ 0,00	J ₁ = 200,00	P ₁ = 200,00
2	SD ₂ = R\$ 10.000,00	R\$ 0,00	J ₂ = 200,00	P ₂ = 200,00
3	SD ₃ = R\$ 10.000,00	R\$ 0,00	J ₃ = 200,00	P ₃ = 200,00
4	SD ₄ = R\$ 10.000,00	R\$ 0,00	J ₄ = 200,00	P ₄ = 200,00
5	SD ₅ = R\$ 0,00	R\$ 10.000,00	J ₅ = 200,00	P ₅ = 10.200,00
Total	-	R\$ 10.000,00	R\$ 1.000,00	R\$ 11.000,00

Fonte: Autor (2024)

3 MATEMÁTICA FINANCEIRA E PLANILHAS ELETRÔNICAS

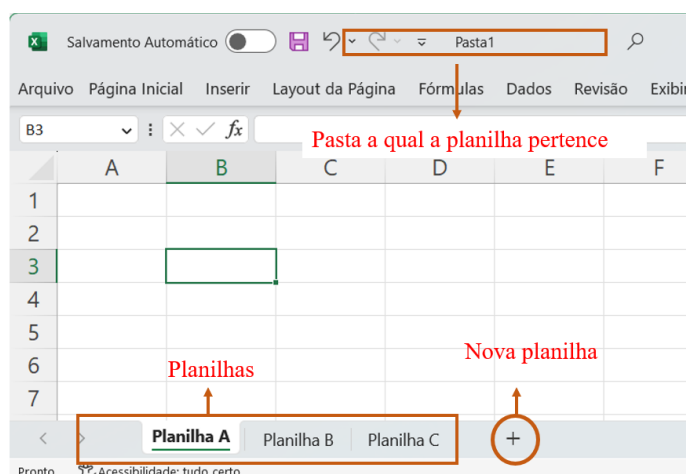
O objetivo deste capítulo é explorar os principais tópicos de matemática financeira apresentados no capítulo anterior, utilizando a planilha eletrônica Microsoft Excel como ferramenta metodológica principal. Serão abordadas diversas funcionalidades e aplicações práticas do Excel, como o uso de fórmulas financeiras, tabelas e gráficos, para facilitar a compreensão e resolução dos conceitos matemáticos discutidos. Além disso, serão destacadas técnicas que podem otimizar o processo de cálculo, como o uso de funções e a automatização de processos financeiros.

3.1 CONCEITOS INICIAIS SOBRE A PLANILHA ELETRÔNICA EXCEL

Uma planilha eletrônica é composta, principalmente, por linhas, colunas e células. Cada célula é identificada utilizando como referência a intersecção entre coluna e linha, que são representadas pelas sequências (A,B,C, ...) e (1,2,3, ...), respectivamente (FERREIRA, 2020, p. 8). Além disso, ela pode ser associada e aplicada ao estudo de matrizes, que também possuem linhas e colunas para identificação e localização de cada termo de sua formação. É uma ferramenta bastante utilizada nos cálculos matemáticos, principalmente no que se refere a criação de gráficos, organização de dados e aplicações financeiras, mostrando ser uma ferramenta capaz de facilitar a execução e interpretação dessas atividades. “Desde que as planilhas eletrônicas popularizaram-se, tornou-se muito mais fácil e simples fazer análises de investimentos” (BRUNI; FAMÁ, 2016, p. 93).

Pode-se considerar também como o espaço onde ocorre todo o trabalho utilizando as fórmulas e funções matemáticas que são inseridas de forma precisa utilizando os conceitos que serão abordados logo a frente. Observe, também, que podem ser criadas várias planilhas para serem trabalhadas de forma simultânea em uma mesma pasta, por exemplo: na *pasta 1* temos as *planilhas A, B e C*, onde podem ser criadas várias outras clicando no sinal de mais (+), ao lado, de acordo com a Figura 6.

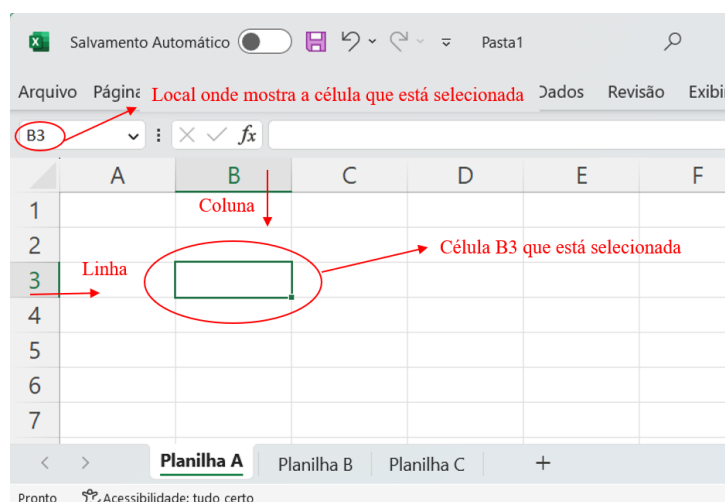
Figura 6 – Planilha eletrônica Microsoft Excel



Fonte: Autor (2024)

De maneira complementar, devemos conhecer um pouco mais sobre a célula, que é o local na planilha onde inserimos os dados ou comandos desejados. As células são identificadas pela combinação única de letras e números, onde as letras representam colunas e os números, linhas, como visto nesta seção. Ao clicarmos em uma célula, visualizamos a intersecção entre uma linha e uma coluna, formando um endereço específico. Dessa forma, para selecionar uma célula qualquer, como, por exemplo, a célula B3, deve-se observar que ela se refere à linha 3 e à coluna B, nessa ordem. Essa convenção facilita a organização e a localização de dados dentro da planilha, permitindo que fórmulas e funções façam referências exatas. Veja na figura 7 como fica a visualização.

Figura 7 – Visualização das linhas e colunas na planilha



Fonte: Autor (2024)

3.1.1 Operadores do Excel

Os operadores, de maneira geral, auxiliam na criação de fórmulas. Existem vários tipos de operadores, como os aritméticos, de comparação e de referência. O primeiro serve basicamente para combinar números na realização de cálculos; o segundo, para comparar dois ou mais números e até sequências textuais; e o último, para combinar intervalos ou referências de células (MCFEDRIES, 2021, p. 28).

Quadro 3 – Amostra de operadores do Excel

Operadores Aritméticos		Operadores de Comparação		Operadores de Referência	
*	Multiplicação	>	Maior do que	:	Cria um intervalo entre uma seleção de duas ou mais células
^	Exponenciação	<	Menor do que		
+	Soma	<=	Menor ou igual a	,	Cria um intervalo que é união entre intervalos
-	Subtração	>=	Maior ou igual a		
%	Porcentagem	<>	Diferente de	(espaço)	Cria um intervalo que que é intersecção entre intervalos
/	Divisão	=	Igual a		

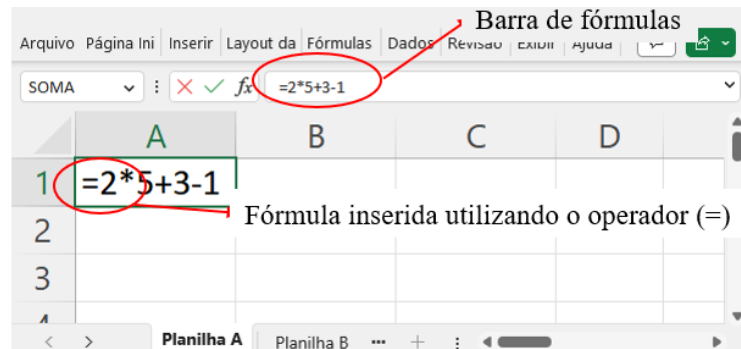
Fonte: Mcfedries (2021)

3.1.2 Fórmulas do Excel

Após conhecer alguns dos operadores fica bem fácil o processo de criação das fórmulas. Primeiro conheceremos a barra de fórmulas que é o local onde aparecerá o corpo ou estrutura da fórmula que foi inserida em uma célula específica, deixando bem claro que para iniciá-la é necessário a utilização do operador (=). Observe a Figura 8 que mostra a barra de fórmulas e a utilização de alguns operadores listados no subtópico 3.1.2.

Após conhecer alguns operadores, o processo de criação de fórmulas torna-se mais simples. Primeiramente, vamos explorar a barra de fórmulas, que é o local onde aparece a estrutura da fórmula inserida em uma célula específica. É importante lembrar que toda fórmula deve começar com o operador igual (=). A Figura 8 ilustra a barra de fórmulas e o uso de alguns operadores mencionados na Seção 3.1.1.

Figura 8 – Visualização da barra de fórmulas e utilização do operador igualdade



Fonte: Autor (2024)

A ordem dos operadores na fórmula segue um determinado padrão de execução apresentado no Quadro 4. (MCFEDRIES, 2021, p. 32).

Quadro 4 – Ordem que os operadores do Excel são executados

Operadores	Ordem de execução
:	1º
(Espaço)	2º
,	3º
-	4º
%	5º
^	6º
* e /	7º
+ e -	8º
(operadores de comparação) < > =	9º

Fonte: Adaptado de MCFEDRIES (2021)

Exemplo 19: Resolução da seguinte expressão numérica utilizando o Excel:

a) $2 + 3.4 - 5 = 9$

b) $\frac{2.3^2}{3} = 6$

c) $2. \left(\frac{2^3.3}{2^3+4} \right) = 4$

Solução: Para iniciar a resolução e o Excel reconheça como fórmula, devemos apenas lembrar de iniciar com o operador (=) e observar o Quadro 3 para trabalhar bem a ordem dos valores e utilização dos parênteses a fim de não errar o processo.

Observações:

- *Na primeira fórmula devemos observar que o produto tem prioridade de resolução diante da soma e subtração.*
- *A segunda fórmula deve-se resolver primeiro a potência, restando o produto e a divisão que independem da ordem para resolução.*
- *Quanto a última fórmula, utilizou-se dos parênteses para indicar que o 2 multiplica a divisão por completa, e não apenas o numerador. Dessa maneira, segue o mesmo padrão de prioridade.*

Figura 9 – Estrutura das fórmulas como resultado da operação

	A		A
1	=2+3*4-5	1	9
2	=2*3^2/3	2	6
3	=2*((3*2^3)/(2^3+4))	3	4

Fonte: Autor (2024)

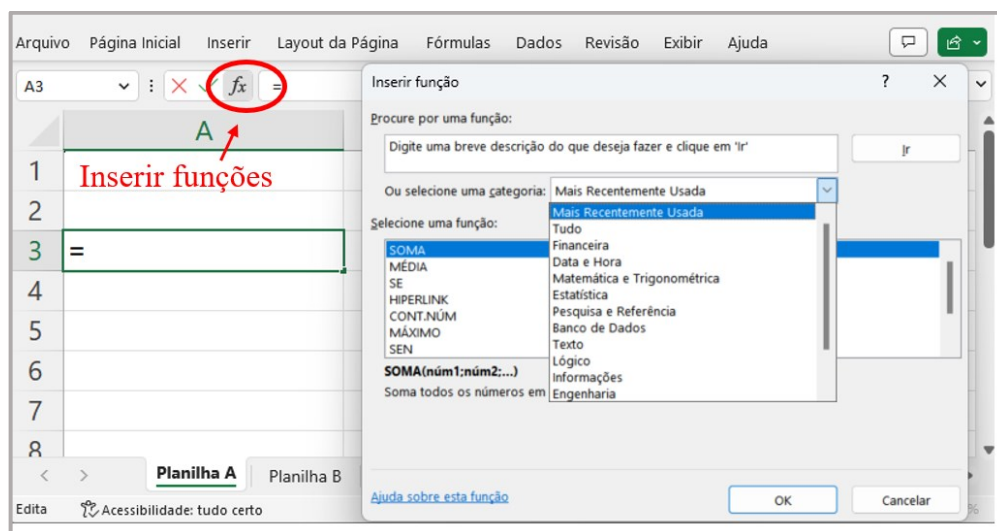
3.1.3 Funções no Excel

Quando se é trabalhado algo complexo em uma planilha, a principal preocupação é facilitar ou agilizar o trabalho que está sendo realizado. Assim as funções surgem, basicamente, como uma forma reduzida e simplificada de se construir uma fórmula afim de gerar praticidade. “Funções são fórmulas predefinidas pelo Excel. Elas são projetadas para nos levar além da aritmética básica e das fórmulas de texto que vimos até agora”. (MCFEDRIES, 2021, p. 92).

Dessa forma, deve-se considerar uma função como uma ferramenta capaz de auxiliar na execução de cálculos que poderiam ser mais demorados para montar suas fórmulas de maneira básica. De acordo com Mcferdries (2021), a estrutura básica de uma função é da seguinte forma: “= FUNÇÃO(argumento1; argumento2; ...)”, onde ao digitar a função o Excel fará o reconhecimento de forma automática, necessitando apenas inserir as informações solicitadas.

Além de conhecer a forma geral de uma função, o Excel dispõe de uma ferramenta chamada “*inserir funções*”, onde o usuário tem acesso a vários tipos e categorias de funções.

Figura 10 – Barra para inserir funções próprias do Excel



Fonte: Autor (2024)

Existe uma variedade de funções prontas para uso, porém o objetivo principal é trabalhar as funções financeiras. Dessa forma, vamos conhecer algumas funções que, de modo geral, irão nos dar uma visão mais clara do seu funcionamento. E, sequencialmente, dar ênfase as funções financeiras.

Observação:

*Para evitar confusões entre alguns conceitos, nesta seção utilizaremos letra maiúscula ao nos referirmos a uma **função do Excel** e letra minúscula para o **argumento** contido nela.*

- a) De acordo com o Excel, as funções SOMA, MÉDIA e SE, podem ser entendidas da seguinte maneira:
- =SOMA (núm1; núm2; ...): soma todos os números em um intervalo de células.
 - =MÉDIA (núm1; núm2; ...): retorna a média dos argumentos selecionados.
 - =SE (teste lógico; X se o teste lógico é verdadeiro; Y se o teste lógico é falso): verifica se uma condição foi satisfeita, retornando o valor X se for *verdadeiro* e um valor Y se for *falso*.

Observações:

Cada função, descrita no item a) acima, foi desenvolvida seguindo uma sequência lógica, como mostra a Figura 11

- Na função soma, selecionamos o intervalo de B2 até B6, obtendo a soma total dos preços dos livros que totaliza R\$ 380,00.
- Na função média, o comportamento é bem parecido, selecionando o intervalo contendo os valores e obtendo a média aritmética que é R\$ 76,00.
- A função SE tem uma pequena diferença, é um tipo de função condicional, nela selecionamos os valores dos livros que se encontram no intervalo B2 até B6 e colocamos uma condição a ser seguida que é um valor maior que R\$ 80,00. Se os valores observados forem verdadeiros, isto é, maior que 80, então retorna a palavra “caro”, se forem menores, no caso, falso, retorna a palavra “barato”.

Figura 11 – Comportamento das funções do item a) e seus resultados

The figure consists of three screenshots of an Excel spreadsheet. Each screenshot shows a table with columns 'Livros' (Books) and 'Preço' (Price). The data is as follows:

Livros	Preço
X	R\$ 50,00
Y	R\$ 75,00
V	R\$ 105,00
W	R\$ 110,00
Z	R\$ 40,00

First Screenshot (SUM function): The formula bar shows `=SOMA(B2:B6)`. The result in cell B8 is **R\$ 380,00**.

Second Screenshot (AVERAGE function): The formula bar shows `=MÉDIA(B2:B6)`. The result in cell B8 is **R\$ 76,00**.

Third Screenshot (IF function): The formula bar shows `=SE(B2:B6>80;"caro";"barato")`. The results in column C are:

Livros	Preço	Resultado
X	R\$ 50,00	barato
Y	R\$ 75,00	barato
V	R\$ 105,00	caro
W	R\$ 110,00	caro
Z	R\$ 40,00	barato

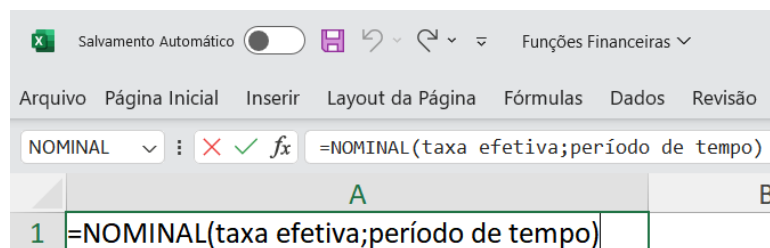
Fonte: Autor (2024)

b) Algumas funções financeiras do Excel e suas respectivas estruturas:

- **NOMINAL:** retorna a taxa de juros nominal anual.

A função, como mostra a Figura 12, tem como primeiro argumento a taxa efetiva anual referente ao período e, como segundo, a quantidade de períodos.

Figura 12 – Estrutura da função NOMINAL na planilha Excel

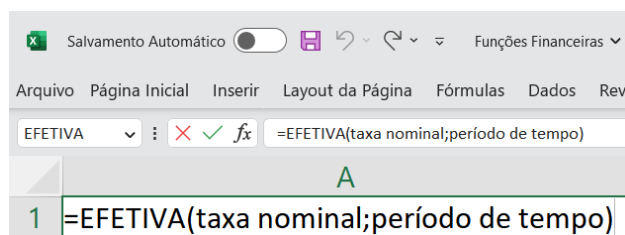


Fonte: Autor (2024)

- **EFETIVA:** retorna a taxa de juros efetiva anual.

Essa função possui como primeiro argumento a taxa nominal referente ao período e, como segundo, a quantidade de períodos, de acordo com a Figura 13.

Figura 13 – Estrutura da função EFETIVA na planilha Excel

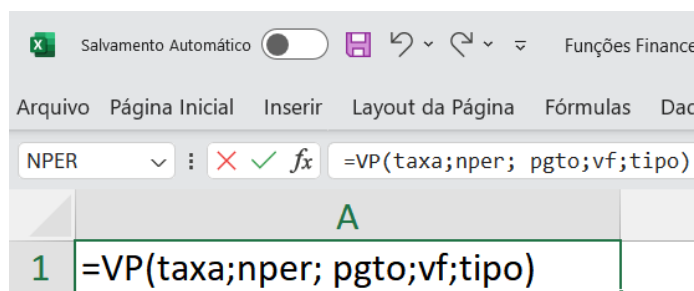


Fonte: Autor (2024)

- **VP:** retorna o valor presente em uma série uniforme de pagamentos.

A função **VP** possui quatro argumentos: *taxa* de juros, número de prestações (*nper*), valor da prestação (*pgto*), que é a mesma em todo o período, valor futuro (*vf*) e *tipo* o qual mostra se a forma dos pagamentos ocorre no início, representado pelo dígito “1”, ou no fim, representado pelo dígito “0”, de cada período. Deve-se observar também que o valor futuro é opcional, mas para não o utilizar na função precisamos inserir o valor das prestações, como veremos na Figura 14.

Figura 14 – Estrutura da função “VP” na planilha Excel



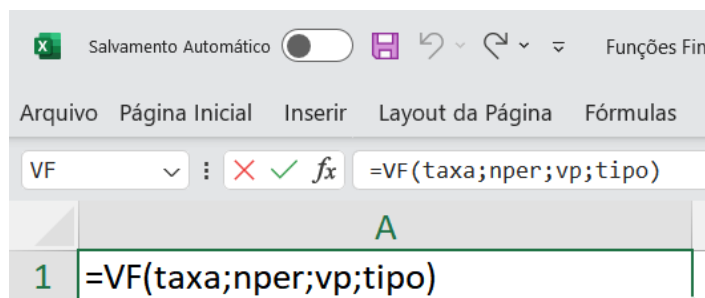
Fonte: Autor (2024)

- **VF:** retorna o valo futuro em uma série uniforme de pagamentos.

Observação: o argumento “*tipo*” segue o mesmo raciocínio dado na função anterior e servirá para as funções PGTO, NPER e TAXA que serão citadas nos próximos pontos.

Na Figura 15, podemos ver que a função possui quatro argumentos: *taxa*, número de prestações (*nper*), valor da prestação (*pgto*), valor presente (*vp*) e *tipo*.

Figura 15 – Estrutura da função “VF” na planilha Excel

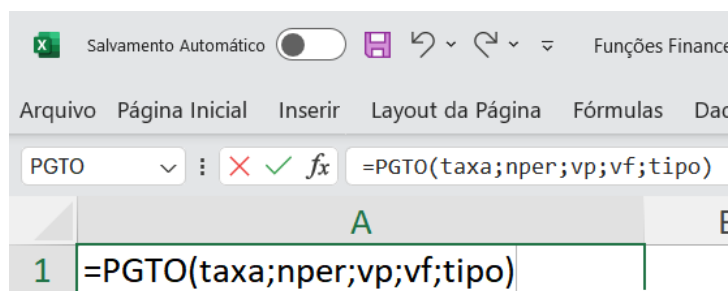


Fonte: Autor (2024)

- **PGTO:** determina o valor da prestação em uma operação de empréstimo com uma taxa de juros constante.

Essa função possui cinco argumentos: *taxa*, número de prestações (*nper*), valor presente (*vp*), valor futuro (*vf*) e *tipo*, observando que o valor futuro não tem uso obrigatório na função, o que indica que é deve-se pôr o dígito “0” em seu lugar caso não necessite utilizá-lo, o que é válido para outras funções na mesma situação, como mostra a Figura 16.

Figura 16 – Estrutura da função “PGTO” na planilha Excel

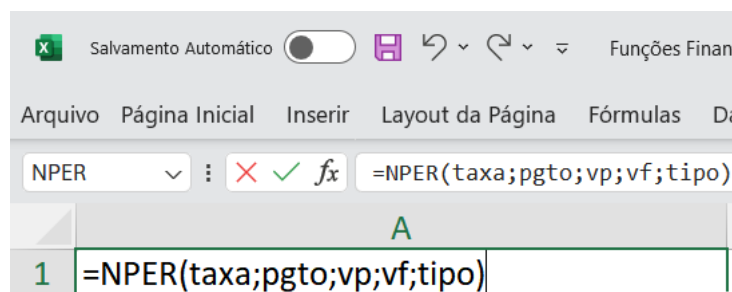


Fonte: Autor (2024)

- **NPER:** retorna o número de períodos em uma operação onde as parcelas são constantes e periódicas a uma determinada taxa de juros.

Possui cinco argumentos: *taxa*, valor da prestação (*pgto*), valor presente (*vp*), valor futuro (*vf*) e *tipo*, atentando-se, também, para o valor futuro que não é obrigatório, como podemos observar na Figura 17.

Figura 17 – Estrutura da função “NPER” na planilha Excel

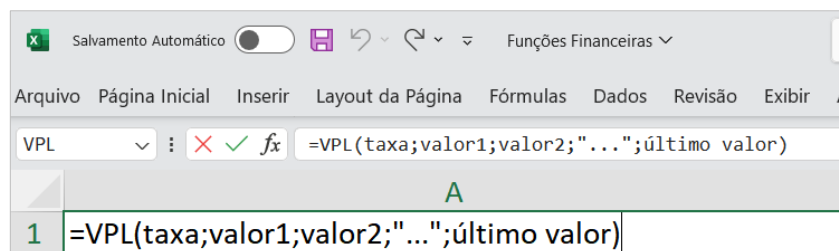


Fonte: Autor (2024)

- **VPL:** retorna o valor presente líquido, porém as prestações aqui não são constantes como na função VP.

Essa função possui como primeiro argumento a taxa de juros e os demais são os valores das prestações que seguem a ordem valor1, valor 2, ..., último valor, isto é, a quantidade de argumento depende da quantidade de prestações, como podemos ver na Figura 18.

Figura 18 – Estrutura da função “VPL” na planilha Excel



Fonte: Autor (2024)

3.2 A MATEMÁTICA FINANCEIRA APLICADA AO EXCEL

A maior parte dos conceitos e definições referentes à matemática financeira e ao uso da planilha eletrônica estudados até esse ponto serão desenvolvidas em conjunto, utilizando-se resoluções de questões a fim de mostrar o uso da planilha eletrônica nos principais conteúdos referentes à matemática financeira.

3.2.1 Os juros

Será feito o desenvolvimento das duas fórmulas referentes a juros simples e composto estudadas nas Subseções 2.4 e 2.5 utilizando um exemplo para cada fórmula e observando, principalmente, a ordem dos operadores descritos no Quadro 4.

a) Juros simples: $J = C \cdot i \cdot t$

Exemplo 20: Determine os juros obtidos em uma operação financeira onde o capital aplicado foi de R\$ 50.000,00 a uma taxa de juros de 5% a.m durante 10 meses.

Observações:

Para resolução dessa questão organizaremos cada informação em uma célula da planilha, isto é, A2 = capital, B2 = taxa, C2 = tempo e, por último, D2 = juros, local onde inserimos a fórmula. Dessa forma, pode-se realizar o cálculo sem o uso de funções, usando apenas as células como referência e o operador (*) que funciona como multiplicação, como podemos visualizar na Figura 19.

Figura 19 – Resolução do Exemplo 20 utilizando a planilha Excel

	A	B	C	D
1	Capital (C)	taxa(i)	período (t)	Juros
2	R\$ 50.000,00	5%	10	=A2*B2*C2

	A	B	C	D
1	Capital (C)	taxa(i)	período (t)	Juros
2	R\$ 50.000,00	5%	10	R\$ 25.000,00

Fonte: Autor (2024)

- b) Juros compostos: $J = C \cdot [(1 + i)^t - 1]$ e $M = C \cdot (1 + i)^t$ são fórmulas para determinar o juro e o montante, respectivamente.

Exemplo 21: Determine os juros e o montante gerados por um empréstimo no valor de R\$ 20.000,00 a uma taxa de 1,5% a.m durante o período de 36 meses.

Observações:

Atribuímos os valores como sendo a célula A2 = capital, B2 = taxa, C2 = tempo, D2 = juros e E2 = montante, em que essas duas últimas são as células para inserir as fórmulas. Para a criação delas devemos ficar atento ao uso dos operadores multiplicação (*) e potência (^), devendo-se observar bem o uso dos parênteses durante a formação da equação. Observe a Figura 20 que nas células D2 e E2 resolve-se logo a potência para depois realizar a multiplicação ou o que está dentro dos parênteses.

Figura 20 – Cálculo dos juros e montante utilizando a planilha Excel

	A	B	C	D	E
1	Capital (C)	Taxa (i)	Tempo (t)	Juros (J)	Montante (M)
2	R\$ 20.000,00	1,5%	36	=A2*((1+B2)^C2-1)	=A2*(1+B2)^C2

	A	B	C	D	E
1	Capital (C)	Taxa (i)	Tempo (t)	Juros (J)	Montante (M)
2	R\$ 20.000,00	1,5%	36	R\$ 14.182,79	R\$ 34.182,79

Fonte: Autor (2024)

3.2.2 Taxas de juros

As taxas que abordaremos serão as proporcionais e equivalente que estão dentro do conceito de juros simples e compostos, respectivamente, estudadas na Seção 2.6.2.

a) Taxa proporcional: $i_{a.x} \cdot t_x = i_{a.y} \cdot t_y$

Exemplo 22: Calcular a taxa anual proporcional a 6% a.m. (NETO, 2022, p. 7).

Observações:

- $i_{a.x} = i_{a.a}$: taxa anual que buscamos.
- $t_x = t_a$: período de tempo que se encontra a taxa que buscamos, ou seja, anual.
- $i_{a.y} = i_{a.m}$: a taxa de 6% a.m, a qual a taxa anual é proporcional.
- $t_y = t_m$: o período em meses referente a taxa anual que buscamos, isto é, 12 meses.

Para gerar praticidade na resolução iremos utilizar a Fórmula (4) isolando a taxa que se quer descobrir, isto é, $i_{a.x} = \frac{i_{a.y} \cdot t_y}{t_x}$ que, substituído as informações, será $i_{a.a} = \frac{i_{a.m} t_m}{t_a} \Rightarrow i_{a.a} = \frac{0,06 \cdot 12}{1} = 0,72 \Rightarrow i_{a.a} = 72\% \text{ a. a.}$ Agora veja: buscamos uma taxa $i_{a.a}$ que é proporcional a $i_{a.m} = 0,06$, sabendo que $t_m = 12$ e $t_a = 1$, isto é 1 ano é igual a 12 meses. Os valores ficaram atribuído da seguinte forma: A3 = taxa mensal de 6%, B3 = período de 12 meses, C3 = período de 1 ano e D3 sendo a taxa proporcional buscada. Observe na célula D3 que os operadores (*) e (/) possuem mesma prioridade de uso, isto é, a ordem que são executados não influencia no resultado. Observe a Figura 21.

Figura 21 – Cálculo da taxa proporcional utilizando a planilha Excel

	A	B	C	D
1	Determine a taxa anual proporcional a 6% a.m			
2	i_{a.m}	t_m (meses)	t_{a.a} (ano)	i_{a.a}
3	0,06	12	1	=A3*B3/C3

	A	B	C	D
1	Determine a taxa anual proporcional a 6% a.m			
2	i_{a.m}	t_m (meses)	t_{a.a} (ano)	i_{a.a}
3	0,06	12	1	0,72

Fonte: Autor (2024)

b) Taxa equivalente: $i_{a.x} + 1 = (i_{a.y} + 1)^{\frac{t_y}{t_x}}$

Exemplo 23: Determine a taxa anual equivalente a 2% a.m.

Observações:

Para facilitar o cálculo isolaremos a taxa, isto é, $i_{a.x} = (i_{a.y} + 1)^{\frac{t_y}{t_x}} - 1$ que utilizaremos como referência para construir a fórmula. Devemos observar com atenção as seguintes informações:

- $i_{a.x} = i_{a.a}$: taxa anual que buscamos.
- $t_x = t_a$: período de tempo que se encontra a taxa que buscamos, ou seja, 1 ano.
- $i_{a.y} = i_{a.m}$: a taxa de 2% a.m, a qual a taxa anual é equivalente.
- $t_y = t_m$: o período em meses referente a um ano, isto é, 12 meses.

Assim, vamos encontrar a taxa anual $i_{a.a}$ equivalente a 2% a.m ($i_{a.m}$), sabendo que o período de 1 ano (t_a) é igual a 12 meses (t_m). Substituindo essas informações na planilha, onde A2 = 2%, B2 = 12 meses, C2 = 1 mês e inserindo a formula na célula D2, devemos observar um fator importante para que a execução esteja correta: a expoente é uma fração, logo ficará

entre parênteses para que o Excel reconheça como um único resultado a ser executado primeiro por ter prioridade diante dos outros operadores envolvidos na fórmula.

Figura 22 – Cálculo da taxa equivalente utilizando a planilha Excel

	A	B	C	D
1	$i_{a.m}$	t_m	t_a	$i_{a.a}$
2	2%	12	1	$=(A2+1)^(B2/C2)-1$

	A	B	C	D
1	$i_{a.m}$	t_m	t_a	$i_{a.a}$
2	2%	12	1	26,82%

Fonte: Autor (2024)

3.2.3 Série uniforme de pagamentos

Trataremos das séries de pagamentos em que as parcelas são constantes. Aqui, neste tópico, determinaremos o *valor presente*, *valor futuro* e *prestação*, onde cada um será desenvolvido, através de exemplos, utilizando os operadores básicos e a função específica do Excel estudados nas Seções 3.1.2 e 3.1.3, respectivamente.

- a) **Valor presente:** O primeiro exemplo irá utilizar os operadores matemáticos básicos do Excel, baseando-se na equação (8) do Capítulo 2, enquanto o segundo, a função “VP” que foi detalhada no item b) da Seção 3.1.3.

Exemplo 24: Um empréstimo de um valor X foi pago em 5 prestações iguais, ao fim de cada mês, no valor de R\$ 500,00. Sabendo que a taxa de juros na operação foi de 2% a.m, determine o valor do empréstimo.

Solução 1: Usando operadores matemáticos do Excel.

Dados:

$X \rightarrow$ valor do empréstimo (PV)

$PMT = R\$ 500,00 \rightarrow$ Valor das prestações

Taxa de juros $\rightarrow i = 2\% a.m$

Utilizando a fórmula $PV = PMT \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right]$ e inserindo as informações no Excel, considerando as células A2 = R\$ 500,00, B2 = 2%, C2 = 5 e D2 onde a fórmula será inserida, observando a prioridade dos operadores, podemos determinar o valor presente. Como mostra a Figura 23:

Figura 23 – Determinação do valor presente utilizando a Fórmula (8)

	A	B	C	D
1	PMT	Taxa de Juros (i)	Período de tempo (t)	PV
2	R\$ 500,00	2%	5	=A2*((1+B2)^C2-1)/((1+B2)^C2*B2)

	A	B	C	D
1	PMT	Taxa de Juros (i)	Período de tempo (t)	PV
2	R\$ 500,00	2%	5	R\$ 2.356,73

Fonte: Autor (2024)

Solução 2: Utilizando a **função** do Excel “= VP (taxa; per; pgto; vf; tipo)”.

Dados:

$VP \rightarrow$ valor X , isto é, o valor presente que buscamos

taxa $\rightarrow 2\% a.m$

per $\rightarrow$ período de tempo: 5 meses

pgto $\rightarrow$ valor da prestação

vf $\rightarrow$ opcional (atribuímos “0”)

tipo $\rightarrow$ os pagamentos ocorrem ao fim de cada mês (atribuímos “0”)

Os valores serão atribuídos da seguinte forma: A2 = 2%, B2 = 5 meses, C2 = R\$ 500,00, D2 = 0, E2 = 0 e F2 será a célula que inserimos a função.

Dessa forma, durante a construção devemos observar alguns pontos importantes como a utilização dos valores referente ao **vf** e **tipo**, que atribuímos “zero”. Não menos importante, observe também que o valor do **pgto** está negativo, pois devemos interpretar que estamos realizando o pagamento, isto é, o dinheiro está saindo de quem adquiriu o empréstimo, porém, isso não interfere no resultado como valor, apenas na questão do sinal, retornando o **valor presente** positivo, como mostra a Figura 24.

Figura 24 – Determinação do valor presente utilizando a função “VP”

	A	B	C	D	E	F
1	Taxa	Período de tempo	PGTO	VF	TIPO	VP
2	2%	5	-R\$ 500,00	0	0	=VP(A2;B2;C2;D2;E2)
	A	B	C	D	E	F
1	Taxa	Período de tempo	PGTO	VF	TIPO	VP
2	2%	5	-R\$ 500,00	0	0	R\$ 2.356,73

Fonte: Autor (2024)

- b) **Valor futuro:** No Exemplo 25 utilizaremos a *fórmula* $FV = PMT \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right] \cdot (1+i)^t$, que foi descrita na Seção 2.7.3, utilizando os operadores básicos e a *função* “VF”, estudada no item b) do subtópico 3.1.3, como formas de resolução do problema.

Exemplo 25: Determine o valor futuro de um empréstimo realizado em um banco que será pago em 4 parcelas iguais, no fim de cada mês, no valor de R\$ 800,00 a uma taxa de juro de 4% a.m.

Solução 1: Utilização da fórmula $FV = PMT \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t \cdot i} \right] \cdot (1+i)^t$ com os operadores do Excel.

Dados:

$PMT \rightarrow R\$ 800,00$

$Taxa \rightarrow 4\% \text{ a.m}$

$Tempo (t) \rightarrow 4 \text{ meses}$

$FV \rightarrow \text{Valor futuro que devemos determinar}$

Atribuímos os valores acima nas células da seguinte forma: A2 = R\$ 800,00, B2 = 4%, C2 = 4 e na célula D2 inserimos a fórmula. Utilizando os operadores matemáticos determinamos o resultado.

Figura 25 – Determinação do valor futuro utilizando a fórmula e operadores do Excel

	A	B	C	D
1	PMT	Taxa	Tempo	FV
2	R\$ 800,00	4%	4	R\$ 3.397,17

Fonte: Autor (2024)

Solução 2: Utilizando a **função do Excel** “= VF(taxa;nper;pgto;vp;tipo)”.

Dados:

VF → Queremos determinar.

taxa → 4% a.m

nper → 4 prestações

pgto → R\$ 800,00 (ficará negativo como forma de representar um valor que está sendo pago)

vp → Atribuímos o valor 0 (zero), pois não é obrigatório.

tipo → Atribuímos o valor 0 (zero), visto que a forma de pagamento ocorre ao fim do período.

Para utilizar a função, as células foram organizadas da seguinte forma: A2 = 4%, B2 = 4, C2 = -800, D2 = 0, E2 = 0 e F2 o local onde a fórmula será inserida, a fim de facilitar a visualização das informações que serão utilizadas, como podemos ver na Figura 26.

Figura 26 – Determinação do valor futuro utilizando a função “VF” do Excel

	A	B	C	D	E	F
1	taxa	nper	pgto	vp	tipo	VF
2	4%	4	-R\$ 800,00	0	0	=VF(A2;B2;C2;D2;E2)

	A	B	C	D	E	F
1	taxa	nper	pgto	vp	tipo	VF
2	4%	4	-R\$ 800,00	0	0	R\$ 3.397,17

Fonte: Autor (2024)

- c) **Valor da prestação:** Para determinar o valor da prestação em função do valor presente utilizaremos a fórmula $PMT = PV \cdot \left[\frac{(1+i)^t \cdot i}{(1+i)^t - 1} \right]$, que será construída com os operadores e a função PGTO.

Exemplo 26: Um capital no valor de R\$ 20.000,00 foi tomado como empréstimo para ser pago em 10 parcelas iguais a uma taxa de 3% a.m. Sabendo que são constantes e pagas ao fim de cada mês, determine o valor das prestações.

Solução 1: Utilizando a fórmula $PMT = PV \cdot \left[\frac{(1+i)^t \cdot i}{(1+i)^t - 1} \right]$.

Dados:

$PV \rightarrow R\$ 20.000,00$

$Tempo (t) \rightarrow 10 \text{ meses}$

$Taxa \rightarrow 3\% \text{ a.m}$

$PMP \rightarrow \text{Valor das parcelas que queremos determinar}$

Na Figura 27, temos a construção da fórmula descrita na **Solução 1** no Excel, onde as células ficaram organizadas da seguinte forma: A2 = 20000, B2 = 10, C2 = 0,03 e D2 é a célula onde a fórmula será inserida.

Figura 27 – Determinação do valor das prestações utilizando os operadores do Excel

	A	B	C	D
1	PV	Tempo	Taxa	PMT
2	R\$ 20.000,00	10	3%	$=A2*(((1+C2)^{B2}*C2))/((1+C2)^{B2}-1)$
				R\$ 2.344,61

Fonte: Autor (2024)

Solução 2: Utilizando a função “= PGTO (taxa;nper;vp;vf;tipo)”.

Dados:

PGTO → Queremos determinar

taxa → 3 % a.m

nper → 10 meses

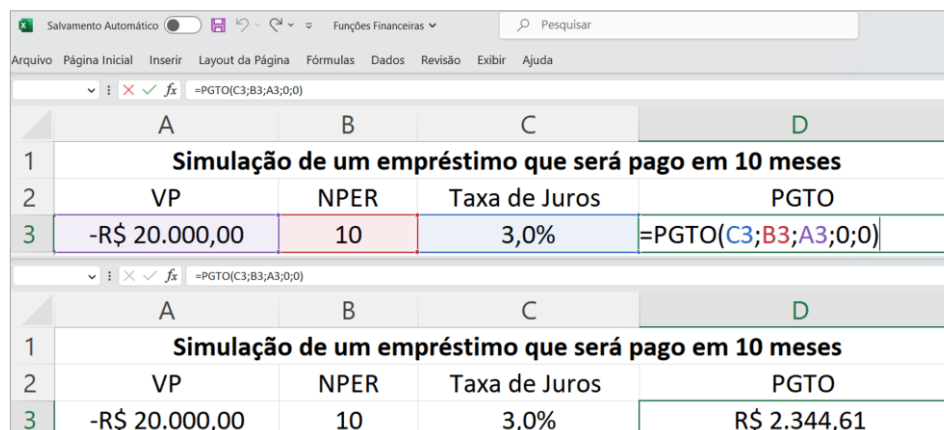
vp → R\$ 20.00,00 (o valor aparecerá na fórmula com sinal negativo para indicar que é um saldo devedor)

vf → É opcional para esse cálculo, logo não é essencial para o que a questão pede, então atribuiremos o valor zero

tipo → Como o pagamento ocorre ao fim de cada mês, o argumento utilizado será o número zero.

Considerando as observações acima, a fim de simular o empréstimo, organizamos as células da seguinte forma: A3 = -20000, B3 = 10, C3 = 0,03 e D3 como sendo o local onde inserimos a função PGTO. Veja como fica organizada na Figura 28.

Figura 28 – Determinação do valor da prestação utilizando a função PGTO



	A	B	C	D
1	Simulação de um empréstimo que será pago em 10 meses			
2	VP	NPER	Taxa de Juros	PGTO
3	-R\$ 20.000,00	10	3,0%	=PGTO(C3;B3;A3;0;0)
				R\$ 2.344,61

Fonte: Autor (2024)

3.2.4 Sistemas de amortização

Trataremos aqui de três sistemas de amortização: Sistema Francês de Amortização, Sistema de Amortização Constante e Sistema Americano de Amortização, utilizando a planilha eletrônica Excel como ferramenta para construção das fórmulas, e um exemplo como base para aplicação dos três sistemas.

Questão 1: Um empréstimo no valor de R\$ 40.000,00 deve ser quitado em cinco prestações anuais iguais, em que a primeira vence daqui a um ano, a uma taxa de 8% ao ano. Identifique os valores das prestações, dos juros e das amortizações durante esse período. (AZEVEDO, 2015, p. 128).

Solução 1: Utilizando o Sistema Francês de Amortização

Para entender a aplicação utilizaremos as fórmulas e conceitos estudados nas Seções 2.8.1 e 3.1.3 que tratam das fórmulas matemáticas, dentro da matemática financeira, e funções do Excel referentes ao sistema francês, respectivamente.

Dessa forma, para o uso do SFA precisamos do valor da prestação que é R\$ 10.018,00, descoberta utilizando a função PGTO, vista no item c) da Seção 3.2.3, como mostra a seguir na Figura 29.

Figura 29 – Determinação do valor da prestação utilizando a função PGTO

	A	B	C	D
1	VP	NPER	Taxa de Juros	PGTO
2	-R\$ 40.000,00	5	8,0%	=PGTO(C2;B2;A2;0;0)

	A	B	C	D
1	VP	NPER	Taxa de Juros	PGTO
2	-R\$ 40.000,00	5	8,0%	R\$ 10.018,26

Fonte: Autor (2024)

Com o valor da prestação descoberto precisamos destacar alguns pontos que servirão de base para a construção do sistema de amortização na planilha Excel.

- $J_{n+1} = SD_n \cdot i \rightarrow$ Para determinar os juros.
- Taxa de Juros: 8% a.a.
- $SD_{n+1} = SD_n - A_n \rightarrow$ Para determinar o saldo devedor após cada amortização.
- $SD_0 = R\$ 40.000,00$.
- $A_n = P - J_n \rightarrow$ Para determinar a amortização.

Utilizando as informações acima, com aproximação de uma casa decimal, podemos iniciar a construção da planilha colocando primeiro os valores iniciais que já sabemos, isto é, as prestações no intervalo de células B4:B8 e o saldo devedor inicial $SD_0 = R\$ 40.000,00$ na célula D3. Com esses valores fixados devemos executar as fórmulas na seguinte sequência: juros, amortização e saldo devedor, pois um valor depende do outro para ser determinado, obtendo primeiro $J_1 = SD_0 \cdot i$, na célula F4, depois $A_1 = P - J_1$ na H4 e $SD_1 = SD_0 - A_1$ na D4. Utilizando os operadores matemáticos do Excel para determiná-los tem-se: $J_1 = D3 * 0,08$, $A_1 = B4 - F4$ e $SD_1 = D3 - H4$, e após isso basta continuar a sequência até a última parcela ser paga, como mostra a Figura 30.

Figura 30 – Uso do SFA, através do Excel, para determinação dos juros e amortizações

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$SD_{n+1} = SD_n - A_n$			$J_{n+1} = SD_n \cdot i$		$A_n = P - J_n$		
2	Parcelas	Prestação	Saldo Devedor	Juros		Amortização		
3	0	-	SD ₀	R\$ 40.000,00		-		
4	1	R\$ 10.018,26	SD ₁	=D3-H4	J ₁	=D3*0,08	A ₁	=B4-F4
5	2	R\$ 10.018,26	SD ₂	=D4-H5	J ₂	=D4*0,08	A ₂	=B5-F5
6	3	R\$ 10.018,26	SD ₃	=D5-H6	J ₃	=D5*0,08	A ₃	=B6-F6
7	4	R\$ 10.018,26	SD ₄	=D6-H7	J ₄	=D6*0,08	A ₄	=B7-F7
8	5	R\$ 10.018,26	SD ₅	=D7-H8	J ₅	=D7*0,08	A ₅	=B8-F8

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$SD_{n+1} = SD_n - A_n$			$J_{n+1} = SD_n \cdot i$		$A_n = P - J_n$		
2	Parcelas	Prestação	Saldo Devedor	Juros		Amortização		
3	0	-	SD ₀	R\$ 40.000,0		-		
4	1	R\$ 10.018,3	SD ₁	R\$ 33.181,7	J ₁	R\$ 3.200,0	A ₁	R\$ 6.818,3
5	2	R\$ 10.018,3	SD ₂	R\$ 25.818,0	J ₂	R\$ 2.654,5	A ₂	R\$ 7.363,7
6	3	R\$ 10.018,3	SD ₃	R\$ 17.865,2	J ₃	R\$ 2.065,4	A ₃	R\$ 7.952,8
7	4	R\$ 10.018,3	SD ₄	R\$ 9.276,2	J ₄	R\$ 1.429,2	A ₄	R\$ 8.589,0
8	5	R\$ 10.018,3	SD ₅	R\$ 0,0	J ₅	R\$ 742,1	A ₅	R\$ 9.276,2

Fonte: Autor (2024)

Assim, de acordo com a Figura 30, podemos determinar os juros e o valor de cada amortização durante todo o período.

Solução 2: Utilizando o Sistema de Amortização Constante

Com os mesmos dados da questão anterior e fazendo as adaptações necessárias para utilizarmos o Sistema de Amortização constante, determinaremos os valores das prestações, juros e amortizações.

Primeiro destacaremos algumas informações referentes ao sistema de amortização, vistas no subtópico 2.6.2, e a própria questão proposta, pois são fundamentais para resolução do problema.

- $A = \frac{SD_0}{n^\circ \text{ de prestações}}$ → Para determinar a amortização
- $SD_0 = R\$ 40.000,00$
- $SD_{n+1} = SD_n - A$ → Para determinar o saldo devedor
- Taxa de Juros: 8% a.a
- $J_{n+1} = i \cdot SD_n$ → Para determinar os juros

- $P_n = J_n + A \rightarrow$ Para determinar o valor das prestações

Inicialmente precisamos determinar o valor da amortização, visto que se trata de um sistema em que as amortizações são iguais. Assim, organizamos as células da seguinte forma: A3 = 5, B3 = 40000 e C3 o local onde inserimos a fórmula do Excel, como mostra a Figura 31.

Figura 31 – Cálculo para determinar o valor da amortização

	A	B	C
1	$A = \frac{(SD_0)}{n^\circ \text{ de prestações}}$		
2	Nº de Parcelas	Saldo Devedor	Amortização
3	5	R\$ 40.000,00	=B3/A3

Fonte: Autor (2024)

Com o valor da amortização determinado basta agora realizar a sequência de cálculos e organizar as células a fim de determinar primeiro o $J_1 = SD_0 \cdot i$, na célula G4, depois $P_1 = A + J_1$, na H4 e o $SD_1 = SD_0 - A$ na célula C4, devendo obter os valores nessa ordem para que não ocorra erro nas referências do Excel. Essas informações, utilizando os operadores matemáticos do Excel e suas referências nas células podem ser organizados da seguinte forma: $J_1 = C3 \cdot 0,08$, $P_1 = E4 + G4$ e o $SD_1 = C3 - E4$, seguindo o mesmo raciocínio para determinar as outras informações, como mostra a Figura 32.

Figura 32 – Uso do SAC, através do Excel, para determinação dos juros e prestações

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$SD_{n+1} = SD_n - A$			$J_{n+1} = i \cdot SD_n$			$P_n = J_n + A$		
2	Parcelas	Saldo Devedor	Amortização	Juros		Prestação			
3	0	SD_0	R\$ 40.000,0				-		-
4	1	SD_1	$=C3-E4$	A_1	R\$ 8.000,0	J_1	$=C3*0,08$	P_1	$=E4+G4$
5	2	SD_2	$=C4-E5$	A_2	R\$ 8.000,0	J_2	$=C4*0,08$	P_2	$=E5+G5$
6	3	SD_3	$=C5-E6$	A_3	R\$ 8.000,0	J_3	$=C5*0,08$	P_3	$=E6+G6$
7	4	SD_4	$=C6-E7$	A_4	R\$ 8.000,0	J_4	$=C6*0,08$	P_4	$=E7+G7$
8	5	SD_5	$=C7-E8$	A_5	R\$ 8.000,0	J_5	$=C7*0,08$	P_5	$=E8+G8$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$SD_{n+1} = SD_n - A$			$J_{n+1} = i \cdot SD_n$			$P_n = J_n + A$		
2	Parcelas	Saldo Devedor	Amortização	Juros		Prestação			
3	0	SD_0	R\$ 40.000,0				-		-
4	1	SD_1	R\$ 32.000,0	A_1	R\$ 8.000,0	J_1	R\$ 3.200,0	P_1	R\$ 11.200,0
5	2	SD_2	R\$ 24.000,0	A_2	R\$ 8.000,0	J_2	R\$ 2.560,0	P_2	R\$ 10.560,0
6	3	SD_3	R\$ 16.000,0	A_3	R\$ 8.000,0	J_3	R\$ 1.920,0	P_3	R\$ 9.920,0
7	4	SD_4	R\$ 8.000,0	A_4	R\$ 8.000,0	J_4	R\$ 1.280,0	P_4	R\$ 9.280,0
8	5	SD_5	R\$ 0,0	A_5	R\$ 8.000,0	J_5	R\$ 640,0	P_5	R\$ 8.640,0

Fonte: Autor (2024)

Solução 3: Utilizando Sistema Americano de Amortização

Para aplicação desse sistema à Questão 1 precisamos destacar alguns dados e adaptá-los ao sistema proposto na solução.

- $SD_0 = R\$ 40.000,00$ permanece o mesmo até ser amortizado de uma única vez ao fim do período.
- $SD_{n+1} = SD_n - A \rightarrow$ Para determinar o saldo devedor
- Taxa de Juros: 8% a.a
- Juros constantes
- Amortização apenas no último período
- $J_{n+1} = i \cdot SD_n \rightarrow$ Para determinar os juros
- $P_n = J_n + A \rightarrow$ Para determinar o valor das prestações

Com essas informações devemos determinar primeiro os juros, que será o mesmo em todo o período, depois o valor das amortizações e o valor das prestações, seguindo para o saldo devedor, devendo observar o que foi estudado sobre o SAA na Seção 2.8.3.

Assim atribuímos os juros no intervalo G4:G8, as amortizações, E4:E8, prestações, I4:I8, e saldo devedor no intervalo C4:C8. Com isso, as fórmulas podem ser elaboradas, utilizando os operadores matemáticos, da seguinte forma: $J_1 = C3 * 0,08$, $P_1 = E4 + G4$ e $SD_1 = C3 - E4$, seguindo o mesmo raciocínio para os demais dados e observando atentamente a amortização nas células $A1:A4 = 0$ e $A5 = 10000$, que devem seguir as características do sistema americano de amortização como mostra a Figura 33.

Figura 33 – Uso do SAA, através do Excel, para determinar o valor dos juros, prestações e amortizações

Salvamento Automático Aplicações de cada tópico Pesquisar									
Arquivo Página Inicial Inserir Layout da Página Fórmulas Dados Revisão Exibir Ajuda									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$SD_{n+1} = SD_n - A_n$ $A_n = P - J_n$ $J_{n+1} = SD_n \cdot i$ $P_n = J_n + A$								
2	Parcelas	Saldo Devedor		Amortização		Juros		Prestação	
3	0	SD ₀	R\$ 40.000,0		-		-		-
4	1	SD ₁	=C3-E4	A ₁	R\$ 0,0	J ₁	=C3*0,08	P ₁	=E4+G4
5	2	SD ₂	=C4-E5	A ₂	R\$ 0,0	J ₂	=C4*0,08	P ₂	=E5+G5
6	3	SD ₃	=C5-E6	A ₃	R\$ 0,0	J ₃	=C5*0,08	P ₃	=E6+G6
7	4	SD ₄	=C6-E7	A ₄	R\$ 0,0	J ₄	=C6*0,08	P ₄	=E7+G7
8	5	SD ₅	=C7-E8	A ₅	R\$ 40.000,0	J ₅	=C7*0,08	P ₅	=E8+G8
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$SD_{n+1} = SD_n - A_n$ $A_n = P - J_n$ $J_{n+1} = SD_n \cdot i$ $P_n = J_n + A$								
2	Parcelas	Saldo Devedor		Amortização		Juros		Prestação	
3	0	SD ₀	R\$ 40.000,0		-		-		-
4	1	SD ₁	R\$ 40.000,0	A ₁	R\$ 0,0	J ₁	R\$ 3.200,0	P ₁	R\$ 3.200,0
5	2	SD ₂	R\$ 40.000,0	A ₂	R\$ 0,0	J ₂	R\$ 3.200,0	P ₂	R\$ 3.200,0
6	3	SD ₃	R\$ 40.000,0	A ₃	R\$ 0,0	J ₃	R\$ 3.200,0	P ₃	R\$ 3.200,0
7	4	SD ₄	R\$ 40.000,0	A ₄	R\$ 0,0	J ₄	R\$ 3.200,0	P ₄	R\$ 3.200,0
8	5	SD ₅	R\$ 0,0	A ₅	R\$ 40.000,0	J ₅	R\$ 3.200,0	P ₅	R\$ 43.200,0

Fonte: Autor (2024)

4 A CALCULADORA FINANCEIRA NO EXCEL

Este capítulo tem como objetivo mostrar a utilização do Excel como uma calculadora financeira, em que juros, taxas, simulações de empréstimos, financiamentos e amortizações podem ser calculados de maneira automática apenas inserindo as informações, sabendo que os cálculos servem apenas como referência e não levam em consideração outras variantes como inflação ou taxas atreladas a operação realizada.

Perceba, agora, que todos os conteúdos trabalhados nos Capítulos dois e três são essenciais, pois estarão diretamente relacionados à construção da calculadora por meio dos conceitos e fórmulas da matemática financeira, bem como dos operadores, fórmulas e funções do Excel. Para mostrar essa aplicação, serão utilizadas questões que simulam algumas situações do dia a dia e envolvem a vida financeira do cidadão.

4.1 CONHECENDO A CALCULADORA FINANCEIRA

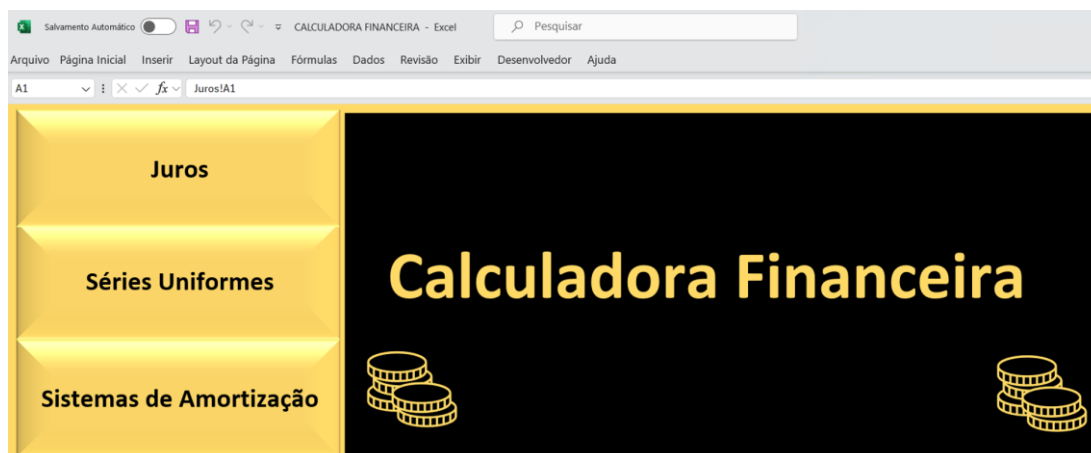
Alguns autores que escrevem sobre matemática financeira têm em sua obra o uso da própria calculadora científica para realizar os cálculos e, de forma separada, utilizam o Excel ou outra planilha eletrônica para realização dos mesmos cálculos, como é o caso do autor Anísio Costa Castelo Branco e José Dutra Vieira Sobrinho. Eles tratam desse assunto de forma separada, mostrando a utilização e aplicação dessas ferramentas dentro da matemática financeira.

Como visto no capítulo anterior, o Excel é uma ferramenta capaz de executar os cálculos que envolvem matemática financeira. Assim, utilizando apenas recursos de edição, formatação e aplicação de fórmulas e funções financeiras pertencentes essa planilha, elaboramos uma calculadora, automatizada, capaz de realizar cálculos extensos de forma prática e rápida apenas inserindo as informações desejadas. Com isso, trabalhando essa junção, podemos conhecer os diversos cálculos que podem ser realizados por ela.

4.1.1 Painel inicial da Calculadora Financeira

A calculadora tem como visão inicial as opções de cálculo de Juros, Séries uniformes e Sistemas de amortização. As teclas são interativas e clicando nelas o usuário será direcionado para outra aba com mais opções de acesso referentes a cada uma das escolhas, como mostra a Figura 34.

Figura 34 – Painel inicial da Calculadora Financeira no Excel



Fonte: Autor (2024)

4.1.2 Juros na Calculadora Financeira

Ao clicar na primeira opção da tela inicial “Juros”, temos disponíveis os botões juros simples e compostos, mostrados na Figura 35. Além deles, existe um pequeno botão com o nome “*início*”, que está disponível nas outras abas com a mesma funcionalidade de retornar para o painel inicial da calculadora, como mostra a Figura 34.

Figura 35 – Visão do botão “Juros” para calcular juros simples e composto.



Fonte: Autor (2024)

Observe agora, na Figura 36, após clicar em Juros Simples, contém um ícone com o símbolo de porcentagem, clicando nele seremos direcionados para um painel de conversão de taxas. Como trata-se de juros simples, a transformação é de taxas proporcionais.

Figura 36 – Ícone que direciona para o painel de conversão de taxas proporcionais



Fonte: Autor (2024)

Após clicar no botão para converter taxas, podemos visualizar um painel, conforme mostrado na Figura 37. Para realizar a conversão, basta inserir a taxa fornecida, selecionar sua capitalização e, em seguida, escolher a taxa desejada no campo “Taxa que buscamos”, definindo também a respectiva capitalização. As opções disponíveis para conversão nas duas opções são: mensal, bimestral, trimestral, quadrimestral e semestral.

Figura 37 – Painel de Conversão de taxas proporcionais



Fonte: Autor (2024)

Na Figura 38, após escolher “Juros Simples”, visualizamos do painel em que temos as opções para determinar o *juro* (J), *capital* (C), *taxa* (i) e *tempo* (t).

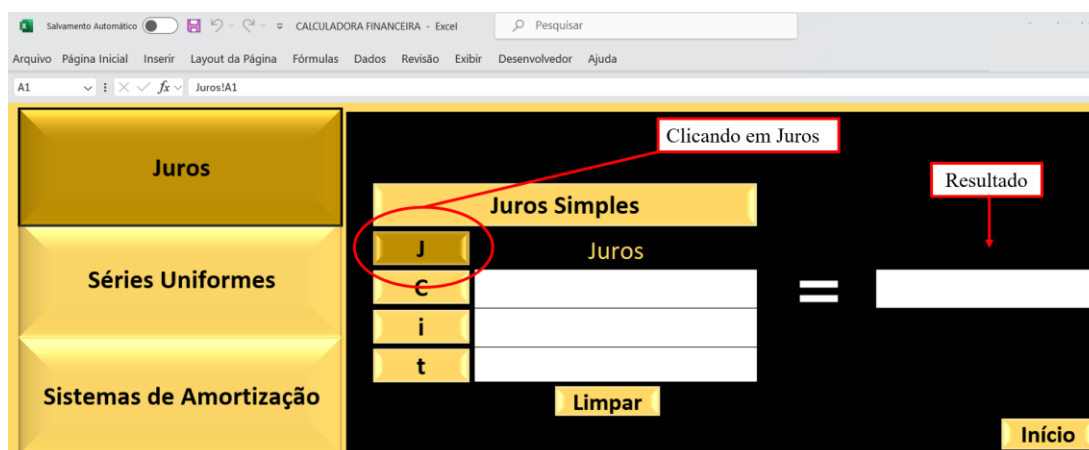
Figura 38 – Painel de opções para cálculo dos juros simples



Fonte: Autor (2024)

Suponha que desejamos calcular os “juros”, assim devemos clicar no botão “J” e observar que aparecerão lacunas que devem ser preenchidas com o valor do *capital*, *taxa* e *tempo*, como mostra a Figura 39. Algo muito importante e que devemos observar é que ao inserir o valor da taxa e do tempo, ambos devem estar no mesmo período, por exemplo: a taxa está 2% a.a, logo, o tempo deve estar em anos. Esse mesmo raciocínio segue para situações, na calculadora, em que devemos preencher a taxa e o tempo.

Figura 39 – Determinando o juro no regime de capitalização simples



Fonte: Autor (2024)

Assim, para determinar as demais opções, como mostra a Figura 40, ao clicar em capital deve-se preencher os campos juros, taxa e tempo, seguindo da mesma forma para determinar a taxa, em que as opções que surgem para preencher são juros, capital e tempo, e finalmente, para calcular o tempo, as opções a serem preenchidas são juros, capital e taxa. Visto isso, quando se

pretende determinar qualquer uma das opções ofertadas em juros simples, ao selecioná-la, ela ficará destacada, e o restante ficará disponível para preencher os dados necessários.

Figura 40 – Recorte com painéis quem mostram as opções para calcular capital, taxa e tempo referentes a juros simples

The figure shows three panels for Simple Interest (Juros Simples) calculations. Each panel displays the formula $J = C \cdot i \cdot t$. The first panel has 'Capital' selected, the second has 'Taxa' selected, and the third has 'Tempo' selected. Each panel includes input fields for J, C, i, and t, a 'Limpar' button, and an 'Início' button.

Fonte: Autor (2024)

Agora, clicando em Juros Compostos, botão descrito na Figura 35, surgirá uma outra aba, que podemos, caso necessário, converter taxas equivalentes. Para isso, clicamos no ícone que contém o símbolo da porcentagem, como mostra a Figura 41.

Figura 41 – Botão para converter taxas equivalentes

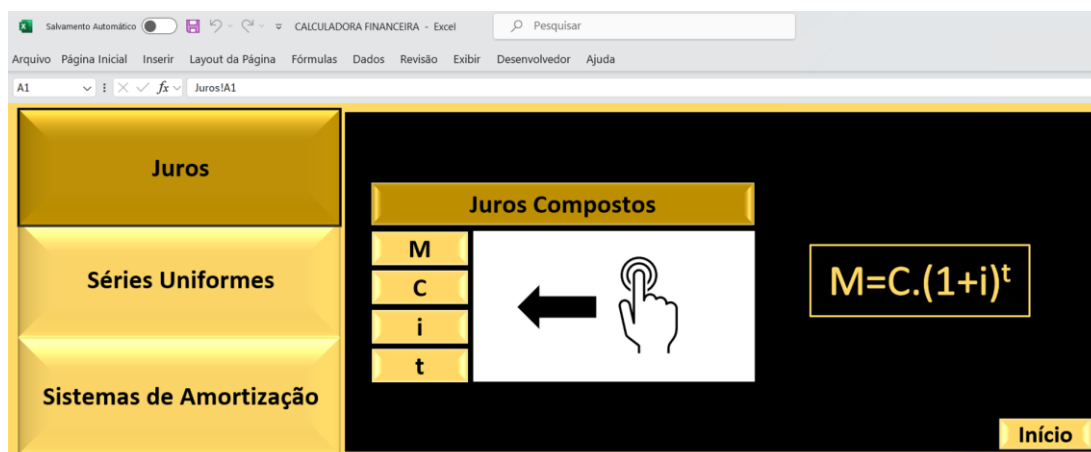
The figure is a screenshot of the 'CALCULADORA FINANCEIRA - Excel' application. It shows the 'Juros Compostos' panel. A red circle highlights a percentage icon button, with a red box and arrow pointing to it labeled 'Botão para conversão de taxas.' The panel also shows input fields for M, C, i, and t, a hand icon, and the formula $M = C \cdot (1 + i)^t$.

Fonte: Autor (2024)

A opção de conversão de taxas equivalentes, referente a Juros Compostos, segue os mesmos passos dados para converter taxas proporcionais vistos na Figura 37.

Agora, com a visualização do painel referente a juros compostos (Figura 42) e sabendo que os mesmos passos, referentes a juros simples, servem para serem aplicados aqui, as opções que aparecem são: montante (M), capital (C), taxa (i) e tempo (t), determinando de forma automática o juro da operação.

Figura 42 – Painel de opções para Juros Compostos



Fonte: Autor (2024)

Como primeira opção a se calcular, escolhemos o valor do montante (Figura 43), que inserindo o capital, taxa e tempo encontramos o montante e o valor dos juros gerados na operação.

Figura 43 – Determinando o Montante e o Juro no regime de capitalização composta



Fonte: Autor (2024)

Além do Montante, pode-se determinar o restante das informações, clicando em uma das opções e preenchendo as demais lacunas da mesma forma como foi feita nas opções

referentes a “juros simples” mostrados nas Figuras 39 e 40. Para se ter uma visualização mais clara dessas informações observe a Figura 44.

Figura 44 – Recorte que mostra as abas para calcular o capital, taxa e tempo referentes a Juros Compostos

Fonte: Autor (2024)

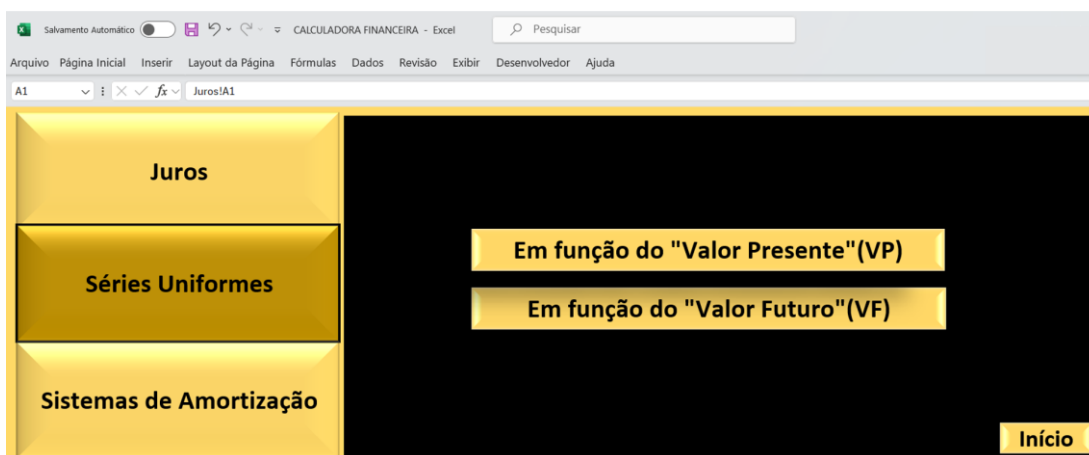
4.1.3 Séries Uniformes

Agora falaremos sobre a opção de “Séries Uniformes”, que ao clicar nela temos por escolher a forma de pagamento postecipado ou antecipado (Figura 45) e cada um desses a opção de cálculo será calculada em função do valor presente ou futuro (Figura 46).

Figura 45 – Escolha da forma de pagamento ao clicar em Séries Uniformes

Fonte: Autor (2024)

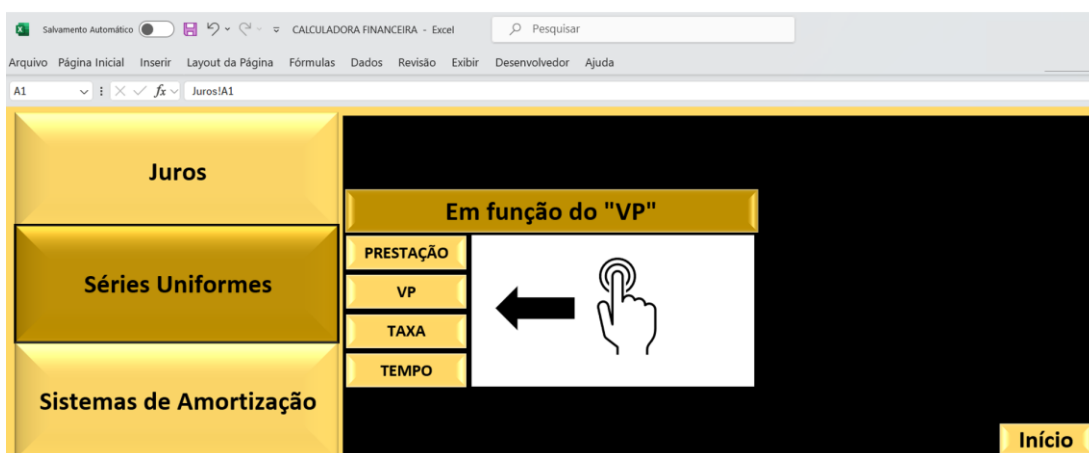
Figura 46 – Guia que mostra a escolha da opção em que o cálculo pode ser feito em função do VP ou VF



Fonte: Autor (2024)

Ao escolher uma das opções nas Figuras 45 e 46 podemos determinar várias informações como: o valor da prestação, valor presente (VP), valor futuro (VF), taxa e tempo, sendo necessário apenas clicar na opção que queira determinar e inserir o restante das informações que são solicitadas pela calculadora. Suponha que a escolha seja pagamento postecipado, deixando claro que os mesmos passos são válidos para pagamento antecipado, e depois em função do VP, como mostra a Figura 47.

Figura 47 – Painel de opções das séries uniformes em função do VP

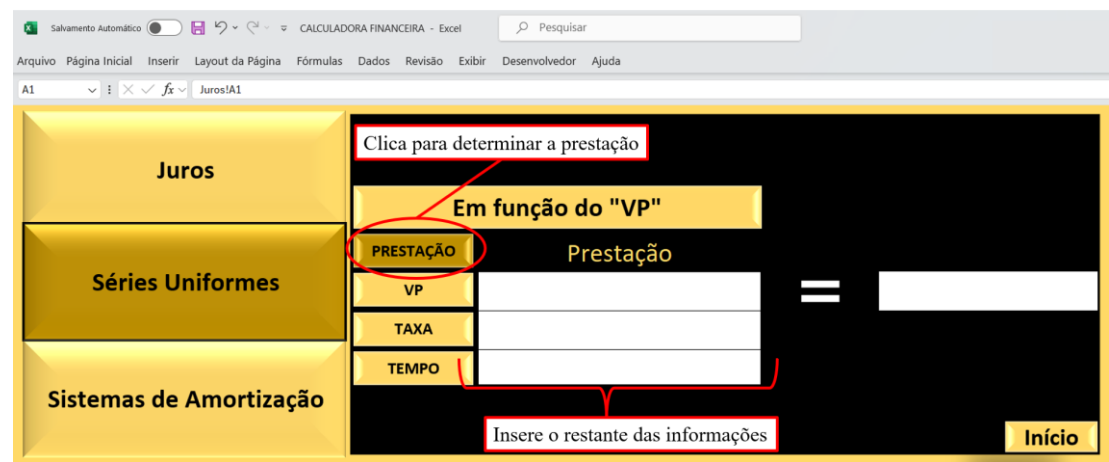


Fonte: Autor (2024)

Após essa escolha, os procedimentos para calcular o valor da prestação (Figura 48) são simples: basta inserir os dados em VP, taxa e tempo. Para calcular as outras variáveis (Figura 49), ao clicar em VP, é necessário preencher os campos de prestação, taxa e tempo. Para

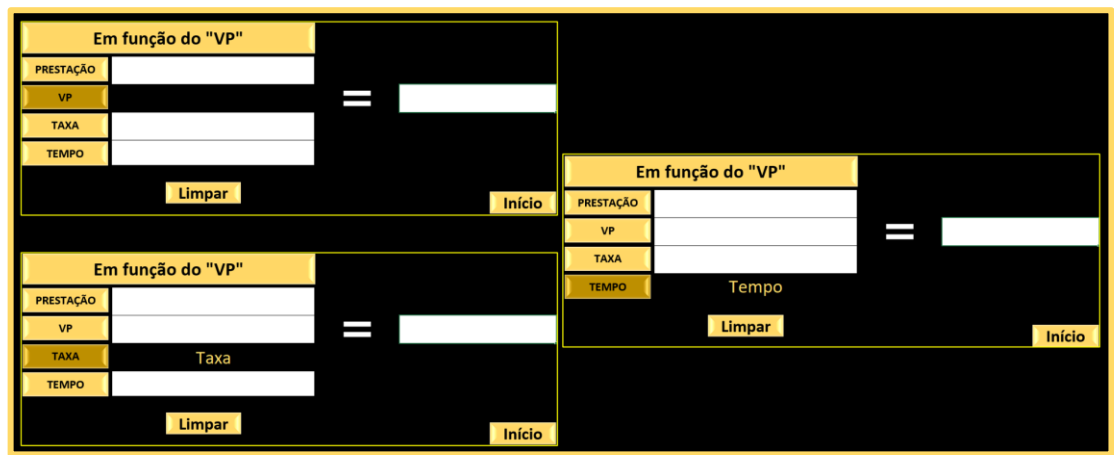
encontrar a taxa, selecione-a e, em seguida, insira as informações em prestação, VP e tempo. Por fim, para determinar o tempo, ao clicar nessa opção, devem ser preenchidos os campos de prestação, VP e taxa.

Figura 48 – Determinando o valor da prestação, em função do VP, nas séries uniformes



Fonte: Autor (2024)

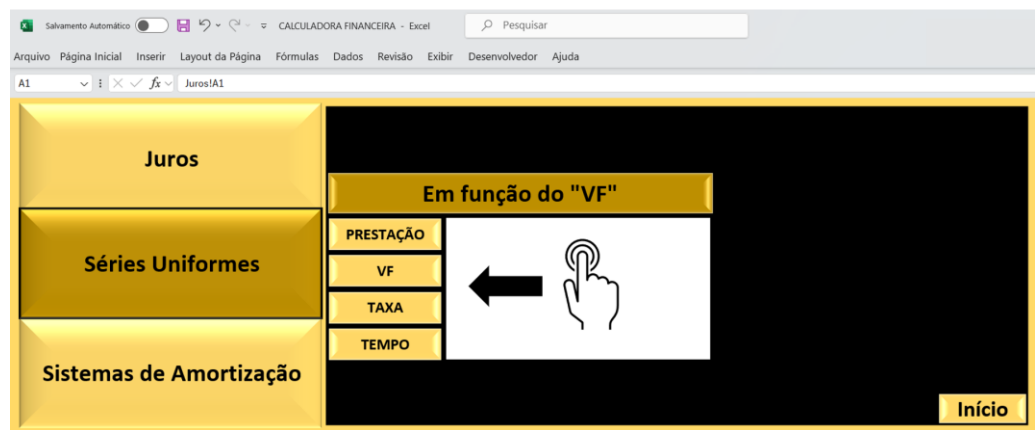
Figura 49 – Recorte que mostra as abas para determinar o VP, taxa e tempo dados em função do valor presente



Fonte: Autor (2024)

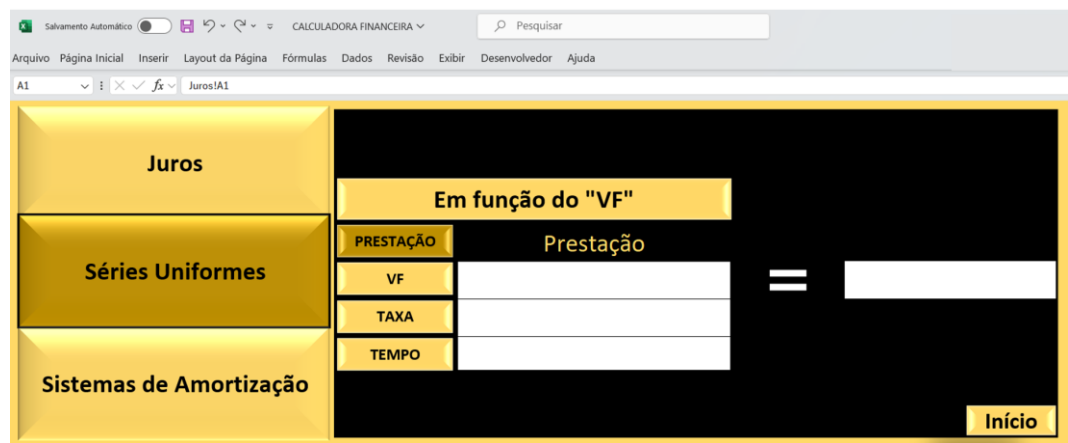
Agora suponha que a escolha seja em função do VF, neste caso após o clique surge o seu painel de opções (Figura 50). Para determinar a *prestação*, VF, *taxa* e tempo, basta seguir o mesmo procedimento realizado no VP, como citado anteriormente, porém agora no lugar do VP aparece VF como uma das opções. As Figuras 51 e 52 mostram esses passos de forma detalhada.

Figura 50 – Painel de opções das séries uniformes em função do VF



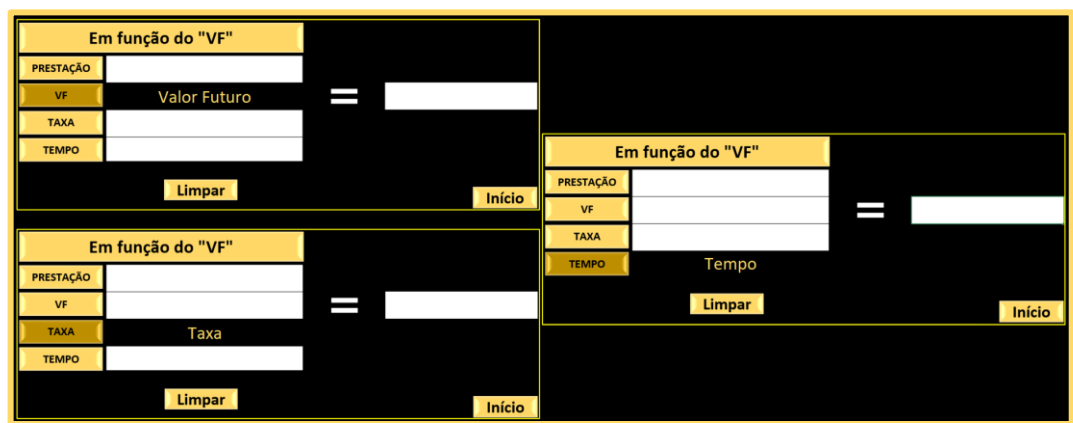
Fonte: Autor (2024)

Figura 51 – Determinando o valor da prestação, em função do VF, nas séries uniformes



Fonte: Autor (2024)

Figura 52 – Recorte que mostra as abas para determinar o VF, taxa e tempo dados em função do valor futuro



Fonte: Autor (2024)

4.1.4 Sistemas de Amortização

Temos como terceira e última opção da calculadora o botão “Sistemas de Amortização” que nos disponibilizará os cálculos que utilizam o Sistema Francês de Amortização, Sistema de Amortização Constante, realização de antecipação de pagamentos e a visualização dos juros e montantes decorrentes do cálculo. Veja que o objetivo não é trabalhar esses sistemas de forma detalhada, calculando cada informação, como foi feito no Capítulo 2, mas sim determinar valores específicos que mostraremos daqui para frente. Ao clicar no botão *Sistemas de Amortização* temos o quadro que mostra duas opções de escolha, isto é, SFA ou SAC, como mostra a Figura 53.

Figura 53 – Opções de escolha entre SFA e SAC após clicar no botão “Séries Uniformes”



Fonte: Autor (2024)

No sistema de amortização, a calculadora funciona um pouco diferente das situações estudadas até o momento, inclusive com relação à forma como escolhemos as opções e inserimos os dados, sendo necessário inserir todas as informações solicitadas para que o resultado seja calculado de forma correta e automática.

Assim, iniciando pelo SFA (Figura 54), quando se clica nessa opção, surge a primeira aba em que devemos preencher com o valor do capital, taxa de juros e número de prestações, a fim de obter os seguintes valores: *prestação*, *valor final* da operação e *total de juros pagos*, como na figura a seguir.

Figura 54 – Primeira aba de opções do botão SFA

Fonte: Autor (2024)

Uma opção adicional, disponível na mesma aba, pode ser acessada ao clicar na seta no canto superior direito, conforme ilustrado na Figura 54. Essa funcionalidade permite visualizar o impacto de amortizações extras, além das previstas pelo sistema, possibilitando antecipações durante o período do empréstimo ou financiamento.

Dessa forma, temos opções adicionais de amortização dentro do SFA. Para acessá-las, basta clicar na seta para abrir a aba “Antecipar Parcelas”, que contém dois campos: “Parcela do Mês” e “Número de Parcelas”, correspondendo, respectivamente, à parcela que está sendo paga e ao número de parcelas que se deseja antecipar. É importante observar que esse cálculo considera as informações inseridas no painel anterior, conforme ilustrado na Figura 54. Com essas informações preenchidas, obtemos os seguintes valores: *total a pagar*, *juros totais a pagar*, *total a pagar com antecipação*, *juros totais com antecipação* e *economia final*. Em outras palavras, são apresentados os valores e as diferenças entre montantes e juros sem antecipação e com as antecipações, evidenciando o quanto foi economizado ao realizar as antecipações. Esses passos podem ser visualizados na Figura 55.

Figura 55 – Aba de antecipação de parcelas do SFA

Salvamento Automático CALCULADORA FINANCEIRA 2.0.0.0

Arquivo Inserir Layout Juros

"SFA" Antecipar parcela Voltar

Parcela do mês Nº de parcelas

Total a pagar R\$ 0,00 Juros total a pagar R\$ 0,00

Total a pagar com antecipação R\$ 0,00 Juros total com antecipação R\$ 0,00

Economizou no final R\$ 0,00 Limpar Início

Botão que volta para a aba anterior

Inserir o número (mês) da parcela que está sendo paga

Inserir a quantidade de parcelas que deseja antecipar

Fonte: Autor (2024)

Agora, ao escolher o SAC, conforme mostrado na Figura 53, uma nova aba será disponibilizada (Figura 56), na qual será necessário inserir o valor do capital, a taxa de juros e a quantidade de prestações, a fim de determinar a amortização, o valor final da operação, o total de juros pagos e as prestações. Embora as prestações sejam diferentes, é possível escolher uma parcela específica digitando o mês de referência ao lado.

Figura 56 – Primeira aba de opções do botão SAC

Salvamento Automático CALCULADORA FINANCEIRA 2.0.0.0

Arquivo Página Inicial Inserir Layout Juros

"SAC" Inserir informações Antecipar parcelas

Capital Taxa de Juros Nº Prestações

Amortização R\$ 0,00 Limpar

Exibir Parcela Nº R\$ 0,00

Valor final da operação R\$ 0,00

Total de Juros Pagos R\$ 0,00

Resultados obtidos

Informações que devem ser inseridas

Inserir mês de referência da prestação que deseja visualizar

Fonte: Autor (2024)

Além disso, clicando na opção “Antecipar parcelas”, disponível na Figura 56, será disponibilizado uma outra aba que precisamos inserir a quantidade de parcelas que estão sendo pagas e a quantidade de parcelas que se deseja antecipar. Após inserir essas informações obtemos o valor total pago com e sem antecipação, juros totais pagos, também com e sem antecipação, e por último, mostra o quanto economizou ao realizar uma antecipação. Após isso,

caso queira retornar para a aba anterior, basta clicar no botão voltar. Observe a Figura 57 que mostra de forma clara as informações acima citadas.

Figura 57 – Aba referente a antecipação de parcelas SAC

The screenshot shows the 'Antecipar parcela' worksheet for the 'SAC' system. On the left, there is a sidebar with three yellow buttons: 'Juros', 'Séries Uniformes', and 'Sistemas de Amortização'. The main area has a header with 'SAC' and 'Antecipar parcela'. Below this, there are two input fields: 'Parcelas Pagas' and 'Antecipar'. To the right of these fields is a 'Voltar' button. Below the input fields, there are four calculation rows, each with an equals sign followed by a text label and a value in a white box: 'Total a pagar' (R\$ 0,00), 'Juros total a pagar' (R\$ 0,00), 'Total a pagar com antecipação' (R\$ 0,00), and 'Juros total com antecipação' (R\$ 0,00). At the bottom, there is a row for 'Economizou no final' (R\$ 0,00) and two buttons: 'Limpar' and 'Início'. Red annotations include a box around the top input field labeled 'Insere o número (mês) da parcela que está sendo paga', a box around the bottom input field labeled 'Insere a quantidade de parcelas que deseja antecipar', and a box around the 'Voltar' button labeled 'Botão que volta para a aba anterior'.

Fonte: Autor (2024)

4.2 USO DA CALCULADORA FINANCEIRA EM SITUATÇÕES DO CONTIDIANO

As questões desta subseção são resolvidas utilizando a Calculadora Financeira, porém é importante ressaltar que alguns resultados podem ser arredondados, a critério do usuário, em algumas casas decimais, utilizando as próprias configurações de formatação do Excel, visto que suas configurações e edições são liberadas para o usuário. Perceba, por exemplo, que ao realizar um cálculo em que o resultado obtido foi 2,99 meses, esse valor pode ser arredondado para 3 meses.

(Questão 1): Um senhor recebeu uma quantia no valor de R\$ 25.000,00 referente a direitos de aposentadoria, porém ele queria deixar esse valor em uma determinada conta que rendia 0,5% de mensais. Durante quanto tempo esse dinheiro deve ficar investido, a juros simples, para que esse valor tenha gerado um montante de R\$ 30.000,00. Nas mesmas condições, porém no regime de juros compostos, qual seria o período de investimento?

Dados:

Capital (C): R\$ 25.000,00

Taxa de juros (i): 0,5% a.m

Montante (M): R\$ 30.000,00

Juros (J): R\$ 5.000,00

Solução I

Utilização do juro simples na calculadora. No Painel inicial da Calculadora clicamos no botão “Juros”, depois clicamos em juros simples, obtendo o acesso a nova guia com as informações que precisamos. Como queremos o tempo, clicamos no botão (t) e inserimos os valores referentes ao Capital, taxa de juros e juros, mostrados nos dados acima, obtendo ao lado a quantidade de meses que esse dinheiro deve ficar investido nessa conta, que pelos cálculos foram de 40 meses, como mostra a Figura 58.

Figura 58 – Quantidade de meses em uma operação de juros simples

The screenshot shows the 'CALCULADORA FINANCEIRA 2.0' application. On the left sidebar, the 'Juros' button is selected. The main panel is titled 'Juros Simples' and contains the following elements:

Juros Simples	
J	R\$ 5.000,00
C	R\$ 25.000,00
i	0,50%
t	Tempo

To the right of the input fields, there is an equals sign (=) followed by a box containing the value '40'. Below the input fields are two buttons: 'Limpar' and 'Início'.

Fonte: Autor (2024)

Solução II

Utilizando o regime de juros compostos. Seguindo os passos iniciais da ***Solução I***, porém agora escolhendo a opção de juros compostos. Ao clicar nessa opção teremos que inserir o montante (M), capital (C) e a taxa de juros (i), disponíveis nos dados obtidos acima, assim obteremos ao lado a quantidade de meses e, de forma automática, os juros da operação. Observe que agora, de acordo com a calculadora, foram 37 meses, visto que o regime é de juros compostos, precisando de menos tempo para gerar o montante desejado, como mostra a Figura 59.

Figura 59 – Quantidade de meses em uma operação de juros compostos

The image shows a financial calculator application. On the left is a sidebar with three yellow buttons: 'Juros', 'Séries Uniformes', and 'Sistemas de Amortização'. The main area has a black background with yellow text and buttons. At the top, it says 'Juros Compostos'. Below this are four input fields: 'M' with the value 'R\$ 30.000,00', 'C' with 'R\$ 25.000,00', 'i' with '0,50%', and 't' which is empty. To the right of these fields is an equals sign and a result box showing 'Juros' as 'R\$ 5.000,00' and 't' as '37'. At the bottom of the main area are two yellow buttons: 'Limpar' and 'Início'. The top of the application has a menu bar with options like 'Arquivo', 'Página Inicial', 'Inserir', 'Layout da Página', 'Fórmulas', 'Dados', 'Revisão', 'Exibir', 'Desenvolvedor', and 'Ajuda'. There is also a search bar labeled 'Pesquisar'.

Fonte: Autor (2024)

(Questão 2): Um empréstimo no valor de R\$ 90.000,00 a uma taxa de 1% ao mês, no regime de juros compostos, foi contratado para ser pago em 60 meses. Qual o valor final depois de serem pagas todas as parcelas? E os juros?

Dados:

Capital (C): R\$ 90.000,00

Taxa de juros (i): 1% ao mês

Tempo: 60 meses

Solução

Selecionando novamente a opção de juros compostos, clicando em “M” para determinar o montante, inserimos o capital, taxa de juros e tempo, como nos dados acima. Encontraremos um montante no valor de R\$ 184.108,25 que gerou juros de R\$ 94.108,25. Veja na Figura 60 o resultado determinado pela calculadora financeira.

Figura 60 – Montante no regime de juros compostos

Salvamento Automático ☐ CALCULADORA FINANCEIRA 2.0 Pesquisar

Arquivo Página Inicial Inserir Layout da Página Fórmulas Dados Revisão Exibir Desenvolvedor Ajuda

Juros

Séries Uniformes

Sistemas de Amortização

Juros Compostos

M			
C	R\$ 90.000,00	=	R\$ 184.108,25
i	1%		
t	60		

Juros
R\$ 94.108,25

Limpar **Início**

Fonte: Autor (2024)

(Questão 3): Um atleta recebeu um prêmio no valor de R\$ 20.000,00 por vencer uma pequena competição, porém ele não quis gastar o dinheiro e depositou em uma conta simples que rendia 1,5% a.m no regime de capitalização composta. Um certo tempo depois ao conferir a quantia foi surpreendido com o valor de R\$ 32.206,49 disponível na conta. Durante quanto tempo esse dinheiro ficou rendendo juros?

Dados

Capital (C): R\$ 20.000,00

Taxa (i): 1,5% a.m

Montante (M): R\$ 32.206,49

Solução

Trata-se de uma questão de juros compostos para determinar a quantidade de meses que o capital ficou rendendo juros na conta. Utilizando a calculadora, escolhemos a opção referente a juros compostos e clicamos no botão referente a tempo (t) e inserimos as informações referentes a capital, taxa e montante, disponíveis nos dados coletados acima. Com isso obtemos o tempo igual a 32 meses. Veja a resolução na Figura 61.

Figura 61 – Quantidade de meses em uma operação de juros compostos

The screenshot shows a financial calculator application. On the left, there is a sidebar with three main categories: 'Juros' (Interest), 'Séries Uniformes' (Uniform Series), and 'Sistemas de Amortização' (Amortization Systems). The main workspace is titled 'Juros Compostos' (Compound Interest). It contains a table with four rows: 'M' (Monthly payment) with value 'R\$ 32.206,49', 'C' (Initial capital) with value 'R\$ 20.000,00', 'i' (Interest rate) with value '1,50%', and 't' (Time in months) with value '32'. To the right of this table is an equals sign followed by a box showing '32'. Above this box is another box showing 'Juros R\$ 12.206,49'. At the bottom of the main workspace, there is a 'Limpar' (Clear) button and an 'Início' (Start) button.

Fonte: Autor (2024)

(Questão 4): Um anúncio em uma loja mostra um carro no valor de R\$ 150.000,00 que pode ser comprado em 60 parcelas iguais, pagas no final de cada mês, com taxa de juros de 1,2%. Determine o valor dessa prestação.

Dados

Valor presente (VP): R\$ 150.000,00

Tempo (t): 60 meses

Taxa de juros (i): 1,2% a.m

Solução

Observe que existe um capital inicial, as parcelas são constantes e o pagamento ocorre ao fim de cada mês, logo trata-se de “Séries Uniformes” em função do valor presente, em que os pagamentos são postecipados. Assim, na calculadora clica-se em “Séries Uniformes”, depois, “Pagamento postecipado” e “Em função do valor presente”, observando o exposto nas figuras 41, 42 e 43, escolhendo a opção “PRESTAÇÃO”. Dessa forma, inserimos o valor presente (VP), TAXA e TEMPO, a fim de obter o valor da prestação que será de R\$ 3.521,42. Veja na Figura 62.

Figura 62 – Valor da prestação em uma série uniforme de pagamentos postecipados

PRESTAÇÃO	Prestação
VP	R\$ 150.000,00
TAXA	1,20%
TEMPO	60

= R\$ 3.521,42

Início

Fonte: Autor (2024)

(Questão 5): Um empréstimo realizado em um banco a uma taxa de juros de 3% a.m. Negociado para ser pago em 90 parcelas iguais de R\$ 1.500,00, pagas ao fim de cada mês. Determine o valor desse empréstimo.

Dados:

Prestação: R\$ 1.500,00

Taxa de juros (i): 3% a.m

Tempo (t): 90 meses

Solução:

Para essa questão, utilizaremos os mesmos passos da questão anterior, porém clicando em “VP” e inserindo as informações referentes a prestação, TAXA de juros e TEMPO, obtendo assim o valor do empréstimo que é R\$ 46.503,61 como mostra a Figura 63.

Figura 63 – Valor presente em uma série uniforme de pagamentos postecipados

The image shows a financial calculator interface. On the left, there is a sidebar with three yellow buttons: 'Juros', 'Séries Uniformes' (which is selected), and 'Sistemas de Amortização'. The main area has a black background with yellow text and input fields. At the top, it says 'Em função do "VP"'. Below this, there are three rows of input fields: 'PRESTAÇÃO' with the value 'R\$ 1.500,00', 'TAXA' with '3,0%', and 'TEMPO' with '90'. To the right of these fields is an equals sign followed by a box containing the result 'R\$ 46.503,61'. At the bottom right, there is a yellow button labeled 'Início'.

Fonte: Autor (2024)

(Questão 6): Um cidadão, pensando no futuro, decide realizar uma aplicação e depositar todo fim de mês uma quantia de R\$ 1.000,00 durante 5 anos a uma taxa de 1,8% a.m. Quanto será o montante final que essa pessoa terá no final de seu investimento?

Dados:

Prestação: R\$ 1.000,00

Taxa de juros (i): 1,8% a.m

Tempo (t): 5 anos que equivale a 60 meses

Solução:

Observe que nessa questão solicita-se o montante, isto é, o valor futuro (VF), e informa que os pagamentos ocorrem no fim do mês. Assim, na calculadora clicamos em “Séries Uniformes”, depois, “Pagamento postecipado” e “Em função do valor futuro”, selecionando, por último o “ VF ”, que é o que iremos determinar. Após isso, as informações referentes a $PRESTAÇÃO$, $TAXA$ e $TEMPO$, obtidas nos dados acima, são inseridas para calcular o valor futuro da operação que foi de R\$ 106.473,98, como mostra a Figura 64.

Figura 64 – Valor futuro em uma série uniforme de pagamentos postecipados

Em função do "VF"	
PRESTAÇÃO	R\$ 1.000,00
VF	Valor Futuro
TAXA	1,80%
TEMPO	60

= R\$ 106.473,98

Limpar Início

Fonte: Autor (2024)

(Questão 7): Um valor de R\$ 28.000,00 foi negociado para ser pago em 90 parcelas iguais, pagas no final de cada mês, de R\$ 530,00. Qual foi a taxa de juros envolvida na operação?

Dados:

Prestação: R\$ 530,00

Valor presente (VP): R\$ 28.000,00 (valor do empréstimo)

Taxa de juros: Queremos determinar a taxa mensal

Tempo: 90 meses

Solução:

Como as parcelas são constantes e pagas ao fim de cada mês, tem-se uma série uniforme de pagamentos postecipados. Na Calculadora Financeira escolhemos a opção “Séries Uniformes”, depois clicamos em “Pagamento Postecipado” e “Em função do valor presente”. Dessa forma poderemos acessar a aba com as opções *PRESTAÇÃO*, *VP*, *TAXA* e *TEMPO*. Com isso, clicamos em *TAXA* e preenchemos o restante das informações com os valores disponíveis no enunciado da questão, obtendo uma taxa de 1,3% a.m, como mostra a Figura 65.

Figura 65 – Taxa de juros, em uma série uniforme de pagamentos postecipados, em função do valor presente

The image shows a financial calculator interface with a sidebar on the left containing three main categories: "Juros", "Séries Uniformes", and "Sistemas de Amortização". The "Séries Uniformes" category is selected. The main area is titled "Em função do 'VP'" and contains a table with the following data:

PRESTAÇÃO	VP	TAXA	TEMPO
R\$ 530,00	R\$ 28.000,00	Taxa	90

To the right of the table, an equals sign "=" is followed by the result "1,30%". At the bottom of the main area, there are two buttons: "Limpar" and "Início".

Fonte: Autor (2024)

(Questão 8): Um casal tem livre R\$ 700,00 para ser depositando todo fim de mês em uma conta que rende 1,5% a.m. Durante quanto tempo eles devem ficar fazendo esse depósito para juntar uma quantia no valor de R\$ 130.000,00?

Dados:

Prestação: R\$ 556,18

Valor Futuro (VF): R\$ 130.000,00

Taxa de juros: 1,9 % a.m

Tempo ou quantidade de parcelas: Queremos determinar (meses)

Solução:

As parcelas são constantes e pagas ao fim de cada mês, temos uma série uniforme de pagamentos postecipados, observando que será em função do *valor futuro*. Na Calculadora Financeira escolhemos a opção “Séries Uniformes”, depois clicamos em “Pagamento Postecipado” e “Em função do valor futuro”. Com isso poderemos acessar aba com as opções *PRESTAÇÃO*, *VF*, *TAXA* e *TEMPO*. Escolhendo a opção *TEMPO*, inserimos o restante das informações obtidas do enunciado da questão. O resultado obtido foi de 90 meses, como mostra a Figura 66.

Figura 66 – Tempo (meses), de uma série uniforme de pagamentos postecipados, em função do valor futuro

Salvamento Automático ☐ CALCULADORA FINANCEIRA

Arquivo Página Inicial Inserir Layout da Página Fórmulas Dados Revisão Exibir Desenvolvedor Ajuda

Juros

Séries Uniformes

Sistemas de Amortização

Em função do "VF"

PRESTAÇÃO	R\$ 556,18	=	90
VF	R\$ 130.000,00		
TAXA	1,90%		
TEMPO	Tempo		

Limpar **Início**

Fonte: Autor (2024)

(Questão 9): Um financiamento de uma casa que custa R\$ 150.000,00 será feito por um banco que utiliza o Sistema Francês de Amortização. Sabendo que o prazo é de 90 meses e a taxa de juros é de 1,2% ao mês, determine o valor da parcela e o total de juros a serem pagos ao final do financiamento.

Dados:

Capital: R\$ 150.000,00

Taxa de juros: 1,2% a.m

Número de prestações: 90

Solução:

Como o sistema adotado é o SFA, logo as parcelas são iguais. Na calculadora clicaremos em “Sistemas de Amortização”, escolhemos a opção “*Sistema Francês de Amortização*” e inserimos as informações referentes a “*Capital, Taxa de juros e Número de prestações*”. Após inserir essas informações, a calculadora nos mostrará o valor da prestação e o total de juros pagos, que foram R\$ 2.734,67 e R\$ 96.120,45, respectivamente como mostra a Figura 67.

Figura 67 – Determinação do valor da prestação e do total de juros pagos utilizando o SFA

"SFA"		Antecipar parcelas	
Capital	R\$ 150.000,00	Prestação	R\$ 2.734,67
Taxa de Juros	1,20%	Valor final da operação	R\$ 246.120,45
Nº Prestações	90	Total de Juros Pagos	R\$ 96.120,45

Fonte: Autor (2024)

(Questão 10): Um empréstimo de R\$ 100.000,00 deve ser pago em 120 parcelas mensais utilizando o Sistema de Amortização Constante. Sabendo que a taxa de juros é 0,8% determine o valor da última parcela e o total de juros que foram pagos no término do empréstimo.

Dados:

Capital: R\$ 100.000,00

Taxa de juros: 0,8% a.m

Número de prestações: 120

Solução:

Como devemos considerar que é uma questão que utiliza um sistema de amortização, basta clicar no botão “Sistema de Amortização” e escolher o sistema SAC. Após escolhê-lo devemos inserir as informações referentes a “Capital, Taxa de juros e Número de prestações, disponíveis no enunciado da questão. Para determinar a última parcela, sabendo que o número de prestações é 120, basta inserir esse valor no espaço “Mês de referência”, como mostra a Figura 53 para obter da parcela específica que é de R\$ 840,00. O total de juros pagos na operação foi R\$ 48.400,00, como mostra a Figura 68.

Figura 68 – Cálculo da última parcela e do total de juros utilizando o sistema SAC

The screenshot shows a financial calculator application. On the left, a sidebar contains three yellow buttons: 'Juros', 'Séries Uniformes', and 'Sistemas de Amortização'. The main area is titled '"SAC"' and contains several input and output fields. Inputs include 'Capital' (R\$ 100.000,00), 'Taxa de Juros' (0,80%), and 'Nº Prestações' (120). Calculated outputs include 'Amortização' (R\$ 833,33), 'Total de Juros Pagos' (R\$ 48.400,00), and 'Valor final da operação' (R\$ 148.400,00). There are also buttons for 'Inserir informações', 'Antecipar parcelas', 'Exibir Parcela', 'Limpar', and 'Início'.

Fonte: Autor (2024)

(Questão 11): Um banco oferece um empréstimo no valor de R\$ 250.000,00 a ser pago em 90 meses utilizando uma taxa de juros mensais de 1,5%, utilizando o SFA. Um cliente que adquiriu esse empréstimo já pagou 35 parcelas, porém quando ele for pagar a de número 36, junto com ela, irá antecipar 20 parcelas. Determine quanto será economizado nessa operação de antecipação, sabendo que após isso todas as parcelas serão pagas normalmente.

Dados:

Capital: R\$ 250.000,00

Taxa de juros: 1,5% a.m

Número de prestações: 90

Solução:

Essa questão será resolvida em duas partes: a primeira servirá para que a calculadora tenha acesso as *informações principais*; e a segunda, a *realização da antecipação*, que é feita em outro painel da Calculadora Financeira.

- 1) Clicamos em “Sistemas de Amortização” e escolhemos o SFA para liberar o painel e inserir o “Capital, Taxa de juros e Número de prestações. Com isso, teremos acesso a várias informações que ficarão inseridas para serem utilizadas no próximo painel, como mostra a Figura 69.

Figura 69 – Determinação do total de juros pagos no empréstimo utilizando o SFA

Salvamento Automático ☐ CALCULADORA FINANCEIRA

Arquivo Página Inicial Inserir Layout da Página Fórmulas Dados Revisão Exibir Desenvolvedor Ajuda

Juros

Séries Uniformes

Sistemas de Amortização

"SFA"

Inserir informações

Capital R\$ 250.000,00

Taxa de Juros 1,50%

Nº Prestações 90

Antecipar parcelas **Prestação**

R\$ 5.080,28

Valor final da operação

R\$ 457.225,49

Total de Juros Pagos

R\$ 207.225,49

Limpar **Início**

Fonte: Autor (2024)

2) Com as informações principais inseridas na calculadora, clicamos em “Antecipar parcelas” e teremos acesso a um painel para inserir o mês de referência da parcela que está sendo paga, isto é, a 37, pois já foram pagas 36. Após isso, inserimos a quantidade de parcelas que desejamos antecipar, ou seja 20. Nesse painel teremos acesso ao total de juros economizados, que foi R\$ 48.242,15, assim como mostra a Figura 70.

Figura 70 – Cálculo da antecipação utilizando o SFA

Salvamento Automático ☐ CALCULADORA FINANCEIRA

Arquivo Página Inicial Inserir Layout da Página Fórmulas Dados Revisão Exibir Desenvolvedor Ajuda

Juros

Séries Uniformes

Sistemas de Amortização

"SFA" **Antecipar parcela** **Voltar**

Parcela do mês 37 Nº de parcelas 20

Total a pagar

R\$ 457.225,49

Juros total a pagar

R\$ 207.225,49

Total a pagar com antecipação

R\$ 408.983,34

Juros total com antecipação

R\$ 158.983,34

Economizou no final

R\$ 48.242,15

Limpar **Início**

Fonte: Autor (2024)

5 CONCLUSÃO

Percebe-se que a sociedade apresenta uma carência significativa de conhecimentos relacionados à matemática financeira, observando também os resultados, abaixo da média, mostrados pela OCDE. Para enfrentar esse desafio e desenvolver uma base sólida de aprendizado, realizamos uma pesquisa bibliográfica com o objetivo de identificar e organizar os principais conteúdos da área. Essa base teórica é fundamental, pois abrange, de forma detalhada, conceitos essenciais, fórmulas, demonstrações e a resolução de exemplos práticos, com o intuito de aprofundar o conhecimento e facilitar a compreensão por parte dos estudantes e profissionais interessados.

Além do embasamento teórico, exploramos a aplicação da matemática financeira utilizando a planilha eletrônica Excel, uma ferramenta amplamente difundida e de grande utilidade prática. Inicialmente, apresentamos os conceitos básicos, as fórmulas e as funções do Excel, destacando suas principais funcionalidades. Em seguida, os principais tópicos abordados na fundamentação teórica, incluindo fórmulas e equações matemáticas, foram trabalhados diretamente no Excel. Essa abordagem visa complementar as possibilidades de aprendizado, proporcionando uma experiência mais interativa e aplicada.

Como parte dessa abordagem tecnológica, desenvolvemos uma calculadora financeira no Excel, que está disponível no ANEXO A, através de um link. Ela é projetada para realizar cálculos de juros simples e compostos, taxas de juros, séries uniformes e sistemas de amortização, como o Sistema de Amortização Francês (SAF) e o Sistema de Amortização Constante (SAC). Essa ferramenta não apenas agiliza os cálculos, mas também reduz significativamente o tempo necessário para resolver problemas que, de outra forma, demandariam métodos manuais com papel e caneta. Assim, a calculadora é útil tanto para fins educacionais quanto para aplicações cotidianas e profissionais.

Perceba que o trabalho engloba o estudo da Matemática Financeira aliado ao uso da planilha eletrônica Excel, complementando com o uso de uma calculadora que é construída com o aprendizado desses conteúdos. Assim, para trabalhos futuros a ideia é desenvolver um produto educacional, baseado na planilha, e que seja um facilitador no ensino e na aprendizagem da matemática financeira. Essa metodologia permite que professores integrem o Excel às aulas, utilizando-o como uma ferramenta didática para trabalhar sequencialmente tópicos como juros, taxas e descontos. Essa abordagem contribui para a compreensão dos conceitos e para a aplicação prática das fórmulas, além de promover maior engajamento por parte dos alunos.

Dessa forma, acreditamos que este trabalho pode servir como uma fonte de informação valiosa para o estudo e a aprendizagem da matemática financeira associada ao uso da planilha eletrônica Excel. Esperamos que ele incentive positivamente a sociedade, seja no âmbito acadêmico, profissional ou pessoal, beneficiando tanto aqueles que já possuem algum conhecimento na área quanto os que estão iniciando seus estudos e precisam desenvolver competências essenciais em matemática financeira.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Gustavo Henrique WD. **Matemática financeira: princípios e aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2015. E-book. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788502632202/>, acesso em: 30 maio. 2024.

BORGES, RODRIGO DA SILVA LIMA. **A utilização de planilhas eletrônicas como instrumento didático no processo de ensino e aprendizagem da matemática : uma análise bibliográfica** / Rodrigo da Silva Lima Borges. - João Pessoa, 2023.

BRANCO, Anísio Costa Castelo. **Matemática financeira aplicada: método algébrico, HP-12C e Microsoft Excel**. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. 1997. p.142. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 26 julho 2024.

BRASIL. Casa Civil da Presidência da República. **Investimentos dos bancos públicos batem recorde e chegam a R\$ 56 bilhões em operações de créditos a estados e municípios**. 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/casacivil/pt-br/assuntos/noticias/investimentos-dos-bancos-publicos-batem-recorde-e-chegam-a-r-56-bilhoes-em-operacoes-de-creditos-a-estados-e-municipios>. Acesso em: 09 agosto 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=78631-pcp015-17-pdf&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 28 jul. 2024.

BRUNI, Adriano Leal; FAMÁ, Rubens. **Matemática Financeira com HP12C e Excel. (Série Finanças na Prática)**. 5. ed. São Paulo. Atlas, 2016. E-book. ISBN 9786559775545. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9786559775545/>. Acesso em: 16 jun. 2024.

CORDEIRO, N. J. N.; COSTA, M. G. V.; SILVA, M. N. da. **EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO BRASIL: UMA PERSPECTIVA PANORÂMICA. Ensino da Matemática em Debate, [S. l.]**, v. 5, n. 1, p. 69–84, 2018. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/36841>. Acesso em: 21 jul. 2024.

DAL ZOT, Wili. **Matemática financeira**. 5. ed. Porto Alegre: UFRGS, 2008.

DAL ZOT, Wili; CASTRO, Manuela L. **Matemática financeira: Fundamentos e aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2015. E-book. ISBN 9788582603338. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582603338/>, acesso em: 28 maio. 2024.

FERREIRA, Maria C. **Excel® 2019 – Aprenda de Forma rápida**. Rio de Janeiro: Expressa, 2020. E-book. p.1. ISBN 9788536533858. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788536533858/>. Acesso em: 01 nov. 2024.

GAZZONI, Elizabeth Inez. **Fluxo de Caixa: Ferramenta de Controle Financeiro para a Pequena Empresa**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, p. 96 fls. 2003.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar: Matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva**. Vol. 03. 9.ed. São Paulo: Atual, 2013.

INEP. **Resultados do PISA 2022: Letramento Financeiro dos Estudantes**. 2023.

Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022>. Acesso em: 12 out. 2024.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, Jose Maria. **Matemática financeira: com + de 600 exercícios resolvidos e propostos**. 6. ed. São Paulo, SP: Atlas, 2009. xi, 416 p. ISBN 9788522452125.

MCFEDRIES, Paulo. **Microsoft Excel 2019: Fórmulas e funções**. Rio de Janeiro. Alta Books, 2021. E-book. ISBN 9786555204148. Disponível em: <http://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9786555204148/>. Acesso em: 20 jun. 2024.

NETO, Alexandre Assaf. **Matemática Financeira – Edição Universitária**. 2. ed. Barueri. Atlas, 2023. E-book. ISBN 9786559774432. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9786559774432/>. Acesso em 08 jun. 2024.

NETO, Alexandre Assaf. **Matemática Financeira e suas Aplicações**. 15. ed. Barueri. Atlas, 2022. E-book. ISBN 9786559773244. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9786559773244/>. Acesso em 08 jun. 2024.

OLIVEIRA, C.; MOURA, S. P.; SOUSA, E. R. de. Tic's Na Educação: A Utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação na Aprendizagem do Aluno. **Pedagogia em Ação**, v.7, n.1, 2015. Disponível em: <https://periodicos.pucminas.br/index.php/pedagogiacao/article/view/11019/8864>. Acesso em: 28 jul. 2024.

SILVA, Sara Simão. **Sistemas de amortização: compreensão das tabelas SAC, SAF, SAA e SAM e comparação entre os sistemas de amortização mais usados no Brasil**. 2023. 78 fls TCC (Trabalho de conclusão de curso) – Licenciatura em matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Goiânia, 2023.

SOBRINHO, José Dutra V. **Matemática Financeira**. São Paulo: Atlas Ltda, 2018. E-book. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788597015461/>. Acesso em: 31 maio. 2024.

SOUSA, A. S.; OLIVEIRA, S. O.; ALVES, L H. A PESQUISA BIBLIOGRÁFICA: PRINCÍPIOS E FUNDAMENTOS. **Cadernos da FUCAMP**, v.20, n.43, p.64-83/2021. Disponível em: <https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2336>. Acesso em: 23 jul. 2024.

ANEXO A – LINK PARA BAIXAR A CALCULADORA FINANCEIRA

Para baixar a calculadora, basta clicar no link disponível logo abaixo e será direcionado para uma guia, e nela, solicitar a permissão para compartilhamento.

<https://drive.google.com/drive/folders/1ckbtYb-AL8ek3cpcLmLXsdgGIHKyYsOV?usp=sharing>