UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Jeovano Pereira da Costa

Uma perspectiva de Resolução de Problemas aplicada à OBMEP sob a ótica dos Materiais Manipuláveis

MOSSORÓ – RN
2025

Jeovano Pereira da Costa

Uma perspectiva de Resolução de Problemas aplicada à OBMEP sob a ótica dos Materiais Manipuláveis

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Orientador: Fabrício de Figueredo Oliveira, Prof. Dr.

MOSSORÓ – RN

2025

C837p Costa, Jeovano Pereira da.
Uma perspectiva de Resolução de Problemas aplicada à OBMEP sob a ótica dos Materiais Manipuláveis / Jeovano Pereira da Costa. - 2025.
176 f. : il.

Orientador: Fabricio de Figueredo Oliveira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2025.

1. Resolução de Problemas. 2. Materiais Manipuláveis. 3. OBMEP. I. Oliveira, Fabricio de Figueredo, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automáto em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

Jeovano Pereira da Costa

Uma perspectiva de Resolução de Problemas aplicada à OBMEP sob a ótica dos Materiais Manipuláveis

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Defendida em: 23/09/2025.

BANCA EXAMINADORA

____
Fabrício de Figueredo Oliveira, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

____
Paulo Henrique das Chagas Silva, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

____
Aylla Gabriela Paiva de Araújo, Prof.ª. Dr.ª. (UERN)
Membro Examinador

*Dedico esta dissertação ao meu pai, Jesu Rodrigues da Costa (*in memoriam*) e à minha mãe, Maria das Graças Pereira.*

AGRADECIMENTOS

Ao dono de tudo que existe, quem me sustentou por essa árdua jornada e garantiu que todas as intempéries da vida não fizessem com que eu desistisse de tudo. Deus, obrigado.

Aos meus pais, Jesu Rodrigues da Costa *(in memoriam)* e Maria das Graças Pereira por contribuírem para quem eu sou hoje. Apesar da dor da ausência do meu pai, sempre serei por ti, mãe.

Em especial, às minhas tias Maria Rodrigues que sempre acreditou e me ajudou a chegar até aqui; e Genecilda Paiva *(in memoriam)* que, apesar da partida abrupta, sempre demonstrou o seu amor por mim.

Aos meus amigos de longas datas pelo companheirismo, amizade e boas risadas, em especial a Levi Rodrigo e Anderson Jefty que, desde o período da graduação, sempre me incentivaram a seguir adiante e estiveram comigo quando precisei. Minha gratidão pela amizade e parceria, saibam que podem contar comigo. Ao Grupo Abeliano, que estão presentes em todas as minhas conquistas.

Aos colegas de mestrado pelas risadas e sodalício durante as disciplinas, ao temido ENQ e na sua importância na finalização desse ciclo. Em especial, quero agradecer à Felipe Teixeira e Djalma Júnior, companheiros de estrada a quem tenho muito respeito e apreço.

Aos amigos que conheci em razão do concurso de Fortaleza – CE: os que fiz nas etapas do concurso – especialmente do grupo Mestres e Doutor –, os da Escola Municipal Padre Antônio Monteiro da Cruz – principalmente a Beatriz Fernandes e Samara Martins, que me acolheram como se fosse da família – e aos que fiz posteriormente, em especial ao meu grande amigo Natanael Teixeira, com quem posso contar.

A gestão da Escola Padre Antônio Monteiro da Cruz, por compreender a minha situação enquanto mestrando em outro estado e colaborar na realização desse sonho. Ao diretor Rubens e as coordenadoras Ednuzia e Cantalice, meus agradecimentos.

Ao meu orientador, Dr. Fabricio de Figueredo, que por muitas vezes foi além de suas atribuições, entendeu as minhas demandas e me incentivou a compreender e refletir sobre todo processo para que eu conseguisse concluir esse desafio. Um profissional exemplar e uma pessoa incrível. A você, toda minha gratidão.

Agradeço a Banca Examinadora pelo aceite e pelas contribuições significativas para avaliação, melhoria e conclusão desta pesquisa.

“Instrua o sábio, e ele se tornará mais sábio ainda; ensine o justo, e ele aumentará o seu saber”.

Provérbios 9:9

RESUMO

Esta pesquisa apresenta uma ampliação da teoria metodológica de Resolução de Problemas desenvolvida por Onuchic e Allevato (2012) intitulada de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e visa propor, por meio do uso dos Materiais Manipuláveis, auxílio nas resoluções de problemas da primeira fase, nível 2, da Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas Públicas. Objetiva-se, portanto, investigar como os materiais manipuláveis podem ser integrados à metodologia de Resolução de Problemas para elaboração de um material pedagógico de forma que auxilie alunos do 8º e 9º ano na preparação para a OBMEP. Para compor o aporte teórico desta pesquisa, recorreu-se dentre vários autores, a Pólya (1957) e Onuchic e Allevato (2012) para tratar da Resolução de Problemas como metodologia; Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) que apresenta os dados referentes à OBMEP e dispõe de todo material da OBMEP; e a Vale (2002) e Lorenzato (2012), que dialoga sobre os Materiais Manipuláveis. A pesquisa é de natureza aplicada, qualitativa, exploratória, descritiva e quanto aos procedimentos metodológicos foi realizada uma revisão da literatura de periódicos, que versa sobre o uso dos Materiais Manipuláveis na Resolução de Problemas, além da aplicação de algumas atividades acerca do uso de Materiais Manipuláveis para resolver problemas da OBMEP. Ademais, foi realizado um projeto nessa temática em uma escola de Fortaleza-CE para compreender se essa perspectiva gera resultados significativos. E, posteriormente, foi adotada a teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, inserindo o passo "demonstração no material manipulável" com o intuito de criar um material didático para se trabalhar essa perspectiva dentro do âmbito da Resolução de Problemas. Como resultados obtidos, destacam-se as premiações que a aluna participante do projeto ganhou, a melhora nos índices de matemática nas turmas dos 8º e 9º anos, bem como a produção do Caderno de Atividades voltado para os alunos e para os professores. Portanto, concluiu-se que os Materiais Manipuláveis contribuem significativamente para construção de conceitos enquanto recurso auxiliador na Resolução de Problemas no contexto da OBMEP.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Materiais Manipuláveis, OBMEP.

ABSTRACT

This research presents an expansion of the methodological theory of Problem Solving developed by Onuchic and Allevato (2012), titled "Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving." It aims to propose, through the use of Manipulative Materials, assistance in solving problems from the first phase, level 2, of the Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). The objective, therefore, is to investigate how manipulative materials can be integrated into the Problem Solving methodology to develop a pedagogical resource that assists 8th and 9th-grade students in their preparation for the OBMEP. To form the theoretical basis of this research, several authors were consulted, including Pólya (1957) and Onuchic and Allevato (2012) to address Problem Solving as a methodology; the Institute of Pure and Applied Mathematics (IMPA), which provides data regarding the OBMEP and makes all its materials available; and Vale (2002) and Lorenzato (2012), who discuss Manipulative Materials. The research is of an applied, qualitative, exploratory, and descriptive nature. Regarding methodological procedures, a literature review of journals was conducted, focusing on the use of Manipulative Materials in Problem Solving, in addition to the application of some activities involving the use of Manipulative Materials to solve OBMEP problems. Furthermore, a project on this theme was carried out at a school in Fortaleza-CE to understand if this approach yields significant results. Subsequently, the theory of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving was adopted, inserting the step "demonstration with manipulative material" with the goal of creating a didactic resource to work with this perspective within the scope of Problem Solving. Among the results obtained, the awards won by the student participating in the project, the improvement in mathematics scores in the 8th and 9th-grade classes, and the production of an Activity Book for students and teachers stand out. Therefore, it was concluded that Manipulative Materials contribute significantly to the construction of concepts as an auxiliary resource in Problem Solving within the context of the OBMEP.

Keywords: Problem-Solving, Manipulative Materials, OBMEP.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADR	Avaliação Diagnóstica de Rede
ATD	Análise Textual Discursiva
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CE	Ceará
COVID-19	*Corona Vírus Disease – 2019*
DPLP	Dicionário Priberam da Língua Portuguesa
GEPEM	Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas
IFRJ	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
MCTI	Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação
MD	Material Didático
NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
PIC	Programa de Iniciação Científica
PIC Jr	Programa de Iniciação Científica Júnior
RP	Resolução de Problemas
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará
TEA	Transtorno do Espectro Autista

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os debates acerca do Ensino da Matemática assumem especial relevância no contexto pós-pandêmico. Embora as dificuldades nesse processo educacional já fossem historicamente evidentes e amplamente debatidas, a pandemia da COVID-19 trouxe à tona os desafios enfrentados pela Educação Básica, de forma potencializada, além de novos outros. Inclusive, ao mesmo tempo que tentavam descobrir onde os alunos estavam, tanto física quanto academicamente, e do que eles precisavam, diversos docentes limitaram-se a transpor os formatos convencionais dos cursos presenciais para o ambiente virtual, deixando de explorar de maneira efetiva os recursos inovadores, isto é, apenas disponibilizaram digitalmente o material já utilizado no ensino presencial (Engelbrecht; Borba; Kaiser, 2023). Entretanto, a preocupação em garantir ao discente que este finalizará essa etapa da vida estudantil sabendo o "básico" é constante, principalmente quando se trata de Matemática.

O ensino das Ciências Exatas, em especial o da Matemática, exige dos estudantes além da manipulação de cálculos e memorização de fórmulas, requer também a capacidade de pensar criticamente, a abstração das situações e aplicabilidade daquilo aprendido no seu cotidiano para que a aprendizagem faça sentido para ele.

Diante das defasagens reais dos estudantes impulsionadas pelo período pandêmico, desenvolver o pensamento matemático crítico neles na perspectiva do processo de ensino e aprendizagem não é tarefa fácil, sobretudo quando se cogita contextos olímpicos voltados para Matemática, cujos problemas propostos demandam noções e experiências que, por fatores diversos, nem sempre são proporcionadas no contexto da sala de aula.

Partindo do pressuposto de que a Matemática é uma disciplina que "se aprende na prática", é importante pôr em prática os conhecimentos adquiridos afim de desenvolver competências e habilidades das quais colaborarão para o desenvolvimento de um cidadão com o pensamento matemático mais ampliado, com um melhor raciocínio lógico e com tratamento crítico dos acontecimentos e das informações que o cerca. E um recurso auxiliador para contribuir com o fomento dessa ideia é a utilização de Materiais Manipuláveis, que permite, através do tátil, entender e visualizar os problemas propostos além do abstrato.

A Resolução de Problemas como metodologia de ensino é uma grande aliada no processo e ensino e aprendizagem do estudante, uma vez que pode ser concebida como um elemento fundamental na dinâmica de elaboração do saber, além de auxiliar na construção da solução de maneira mais sólida e significativa (Câmara, 2016).

Considerando os problemas Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) como parte integrante da formação dos estudantes, em específico dos anos finais do Ensino Fundamental, pretende-se superar as barreiras e desafios advindos de diferentes contextos educacionais, utilizando estratégias que buscam trabalhar a resolução desses problemas através da idealização de significados.

Além disso, a pesquisa se mostra relevante por dialogar com pressupostos contemporâneos da Educação Matemática, que defendem um ensino investigativo, centrado na Resolução de Problemas, que é uma Tendência em Educação Matemática, e na valorização do protagonismo estudantil.

Ao explorar como os materiais manipuláveis podem potencializar essa metodologia — especialmente no contexto da preparação para a OBMEP —, o estudo contribui para ampliar o repertório didático dos professores, propor estratégias inovadoras e fortalecer a articulação entre teoria e prática. Investigar essa relação pode ainda oferecer subsídios para a elaboração de propostas pedagógicas mais inclusivas, equitativas e desafiadoras, que favoreçam a aprendizagem matemática de forma mais ativa e crítica, respeitando os diferentes ritmos e estilos de aprendizagem dos alunos.

Dessa forma, a presente pesquisa pretende buscar resposta para a seguinte inquietação: como a Resolução de Problemas pode ser potencializada pelo uso de materiais manipuláveis na abordagem de questões da OBMEP com alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental?

Para isso, também objetiva investigar, à luz da literatura e da teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, como os materiais manipuláveis podem ser integrados à metodologia de Resolução de Problemas para elaboração de um material pedagógico que auxilie alunos do 8º e 9º ano na preparação para a OBMEP – Nível 2.

De forma mais específica, pretende-se averiguar na literatura se uso dos materiais manipuláveis são utilizados nas teorias de Resolução de Problemas como recurso facilitador; apresentar a teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas sob a perspectiva dos materiais manipuláveis; e criar um material de apoio a partir de provas anteriores, voltado para os alunos, com o intuito de auxiliar na preparação da primeira fase da OBMEP, nível 2, baseado na teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

O primeiro capítulo vai tratar da fundamentação teórica na visão das três temáticas centrais do trabalho: a Resolução de Problemas enquanto metodologia de ensino, a OBMEP e os Materiais Manipuláveis; já o segundo capítulo apresenta uma Revisão de Literatura feita nos periódicos CAPES acerca do uso da Resolução de Problemas como teoria e os Materiais Manipuláveis como recurso auxiliador; o terceiro capítulo é destinado para discorrer sobre a metodologia adotada no trabalho; o quarto capítulo trata das discussões realizadas na aplicação da atividade inicial e na criação do produto educacional; e, por fim, será apresentado as considerações finais.

2 TEORIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: DIÁLOGO ACERCA DE DUAS CONCEPÇÕES

O presente capítulo fundamenta-se e estabelece diálogo com temáticas relevantes associadas a duas abordagens teóricas sobre a Resolução de Problemas (RP): uma sob a perspectiva de George Pólya (1887–1985) e outra desenvolvida por Lourdes de la Rosa Onuchic e seu grupo de pesquisa, o Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas[1] (GTERP).

As discussões realizadas neste capítulo versam sobre as teorias da RP, o debate parte das concepções de diferentes autores sobre o que é um problema com o intuito de contextualizar e entender um pouco da relevância dada a esse tema pelos autores das teorias escolhidas. Ainda nesse tópico, trazemos a informação de quem foram Pólya e Onuchic, suas respectivas teorias e como elas são trabalhadas no contexto da Educação Básica.

Afinal, o que é um problema? À primeira vista, essa pergunta pode parecer simples, mas definir com precisão o que caracteriza um problema requer uma compreensão mais profunda do pensamento humano. Sem delimitar claramente as especificidades do que se busca compreender, torna-se inviável encontrar caminhos para a resolução. A busca por uma resposta, portanto, depende da clareza do próprio questionamento.

Segundo Pólya (1957), um problema é algo que perturba o pensamento, que precisa ser resolvido, mas cuja solução não é evidente, em outros termos, um problema pode ser compreendido como toda situação que interrompe o curso natural do pensamento por ser não-trivial, o que provoca no indivíduo a necessidade de entender, analisar e encontrar uma solução.

Dante (1989, p. 10), define problema a partir do campo da Matemática e afirma que é “qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la”, ou seja, é toda circunstância que possa ser expressa numa linguagem matemática que, por meio dela, possa se chegar ao objetivo: a resolução. No pensamento de Dante (1989), é válido ressaltar que a Matemática se encontra como eixo central da definição escrita e que o pensamento e o conhecimento matemático têm papel preponderante na busca de estratégia para solução da questão.

Segundo Van de Walle (2009) a noção de problema se baseia na ideia de que ele representa tudo aquilo que ainda não sabemos como realizar, mas pelo qual demonstramos interesse em aprender. De acordo com essa perspectiva, um problema é caracterizado como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não dispõem de métodos ou regras pré-

---
[1] Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/#!/departamentos/educacao-matematica/gterp/.

estabelecidas ou memorizadas, nem possuem a percepção de que exista um procedimento específico para alcançar a solução correta.

A necessidade de analisar uma situação específica e delimitar o que se sabe e o que se deseja investigar estimula a razão crítica. Esse processo permite identificar um "problema verdadeiro", ou seja, não se trata de aceitar respostas prontas de forma dogmática, mas de investigar de maneira clara e objetiva, definindo os limites da pesquisa, confrontando ideias e testando hipóteses.

Essa ideia vai ao encontro das concepções de Kant (2000, p. 11), o qual relata que "a crítica da razão conduz, por fim, necessariamente, à ciência; o uso dogmático da razão sem crítica conduz, pelo contrário, a afirmações infundadas, que sempre podem ser contraditadas por outras não menos verossímeis, o que conduz ao ceticismo".

Diante disso, ao se deparar com um problema, é imprescindível averiguar todas as informações e os recursos utilizados para solucioná-lo, para que haja uma construção do conhecimento legítimo para além do mero entendimento de causalidade, mas que gere um aprendizado com a determinada situação e não produza afirmações frágeis, que possam ser facilmente refutadas, como na ausência de um pensamento não reflexivo.

Historicamente, a abordagem da Resolução de Problemas passou a ganhar destaque a partir dos anos 1980, como contraponto a diversas metodologias anteriormente propostas para o ensino da Matemática. No início do século XX, prevalecia uma concepção pedagógica centrada na repetição mecânica, na qual a memorização ocupava papel central no processo de aprendizagem, influenciada pelo positivismo[2]. A avaliação escolar baseava-se na capacidade do estudante de reproduzir fielmente os conteúdos transmitidos pelo professor. Contudo, esse método revelava-se ineficaz, pois os estudantes, em sua maioria, esqueciam rapidamente o que haviam decorado. Em um momento posterior, surgiu uma nova orientação didática que defendia a importância da compreensão conceitual na aprendizagem matemática. Nessa perspectiva, práticas como a repetição da tabuada passaram a ser desvalorizadas. Apesar de representar um avanço, essa proposta ainda limitava o envolvimento ativo do aluno na construção do próprio saber (Câmara, 2016).

Dessa forma, dedicado a promover a melhoria do ensino de Matemática nas escolas, com foco na equidade e na qualidade da aprendizagem, fundado em 1920, o *National Council*

---

[2] O positivismo, filosofia de Auguste Comte, influenciou profundamente a educação ao propor que o ensino fosse guiado por critérios científicos, ordenados e úteis à vida prática, em oposição a modelos abstratos ou centrados na tradição religiosa. Nos seus escritos, Comte enfatizou que ações educacionais devem ser precedidas por uma base teórica estruturada e metodologicamente sólida. (Souza, 2020)

of Teachers of Mathematics[3] (NCTM) é reconhecido como a maior e mais influente organização de Educação Matemática do mundo. Ao longo de sua trajetória, tem se dedicado a promover a melhoria do ensino de Matemática nas escolas. Sua atuação abrange a formação continuada de professores, o desenvolvimento de currículos e a disseminação de práticas pedagógicas inovadoras. Além disso, o NCTM exerce um papel estratégico na definição de diretrizes e no apoio a políticas educacionais que visam tornar o ensino da Matemática mais inclusivo, acessível e relevante para os desafios contemporâneos.

Neste papel impulsionador, na década de 1980, o NCTM teve papel bastante significativo nas discussões sobre o Ensino de Matemática e nos alicerces para fundamentar os objetivos a serem alcançados. A sua recomendação inicial é a de que o elemento central da Matemática deveria ser a Resolução de Problemas (Onuchic, 1999).

Nos anos 2000, o NCTM desenvolve um guia chamado *Principles and Standards for School Mathematics* – em português, Princípios e Padrões para Matemática Escolar, que dentre muitas funções, descreve os componentes essenciais de programa de Matemática escolar de alta qualidade e estabelece princípios, discorre sobre os cinco conteúdos de matemática fundamentais para uma formação básica – números e operações, álgebra, geometria, medição e análise de dados e probabilidade – bem como os cinco padrões ou formas para adquirir e aplicar o conhecimento obtido através do conteúdo, e a primeira delas é a Resolução de Problemas (NCTM, 2000).

Assim, refletir sobre a natureza dos problemas e a importância de sua resolução permite compreender o papel que esses elementos desempenham na construção do conhecimento. Enfrentar problemas matemáticos fortalece a capacidade analítica e favorece o desenvolvimento de estratégias para lidar com situações complexas.

Polya (1978, p. 65) já afirmava que

> resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. [...] se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom 'resolvedor de problemas' tem que resolver problemas.

Diante da concepção de Pólya (1978), a repetição da mesma tarefa por diversas vezes pressupõe o desenvolvimento da habilidade de resolução de problemas, isto é, a prática da atividade contribui para a melhoria do raciocínio cognitivo e dos conhecimentos necessários para se obter o resultado desejado ou pelo menos resultados satisfatórios até atingir o objetivo.

---

[3] Disponível em: https://www.nctm.org/

No contexto pedagógico, Veia (1996, p. 20) diz que "[...] quando os professores baseiam a sua prática pedagógica na resolução de problemas, proporcionam um contexto mais significativo para a aprendizagem e prática de capacidades (*skills*) de cálculo".

A visão de Veia (1996) corrobora com a noção de que os alunos procuram compreender a aplicabilidade da Matemática no seu cotidiano e ver sentido correlato nas aulas com suas respectivas vidas e a Resolução de Problemas pode proporcionar essa conexão entre o abstrato e o real por mais complicado que o problema possa parecer.

Como afirma Pólya (1981, p. ix) no prefácio de um de seus livros:

> "Resolver um problema significa encontrar uma saída para uma dificuldade, um caminho em torno de um obstáculo, alcançar um objetivo que não era imediatamente alcançável. Resolver problemas é a realização específica da inteligência, e a inteligência é o dom específico da humanidade: resolver problemas pode ser considerado a atividade mais caracteristicamente humana".

Para Pólya (1981), a Resolução de Problemas possui uma definição mais ampla e com sentido, vinculando-a não apenas a um processo racional de superação de dificuldades, mas também a uma característica da condição humana, uma qualidade distintiva do ser humano, uma manifestação direta da inteligência que se torna capaz de enfrentar o que é inicialmente inacessível, sugerindo uma perspectiva construtiva e dinâmica.

Van de Walle (2009, p. 23) afirma que "se a resolução de problemas é o foco da Matemática, o raciocínio é o pensamento lógico que nos ajuda a decidir se e por que as nossas respostas fazem sentido". Isto é, para o autor, a relação intrínseca entre a Resolução de Problemas e o raciocínio lógico fica evidenciado de maneira precisa, no momento em que se destaca o raciocínio como instrumento avaliador da coerência e da validade das soluções construídas, no intuito de desenvolver nos estudantes não apenas a capacidade de encontrar respostas, mas, sobretudo, de compreendê-las criticamente. Essa perspectiva está em consonância com propostas pedagógicas contemporâneas, que valorizam o pensamento reflexivo e a construção significativa do conhecimento matemático.

No próximo tópico, será apresentado um pouco mais sobre a vida e obras de George Pólya (1887 - 1985), bem como uma breve explanação acerca dos seus pensamentos e teoria de Resolução de Problemas que apresenta quatros passos para se resolver um problema matemático.

2.1 Perspectiva de George Pólya

George Pólya nasceu em um contexto familiar intelectualmente privilegiado, oriundo de uma linhagem composta por profissionais de destaque nas áreas acadêmica e jurídica. Seu pai, Jakab Pólya, advogado e economista de reputação consolidada, empenhou-se em oferecer aos filhos uma formação educacional de elevado nível. Entre os irmãos de George, sobressai-se Jenő Pólya, proeminente cirurgião húngaro, amplamente reconhecido pela comunidade científica internacional e agraciado com o título de membro honorário do American College of Surgeons (Frank, 2004).

Ainda segundo Frank (2004), a trajetória acadêmica de George Pólya foi marcada por uma diversidade de interesses: iniciou seus estudos superiores em Direito, migrando posteriormente para as áreas de línguas, literatura, filosofia e física, até encontrar na matemática seu campo definitivo de investigação, no qual obteve o título de doutor em 1912. Durante sua formação, foi aluno de Lipót Fejér, a quem atribuía papel decisivo na consolidação da tradição matemática húngara. Pólya reconhecia, ainda, a importância dos exames seletivos de matemática e da revista *Középiskolai Mathematikai Lapok* [4](Cadernos de Matemática para o Ensino Médio) na formação de gerações expressivas de matemáticos em seu país natal.

Dentre suas obras mais emblemáticas estão: A Arte de Resolver Problemas (*How to Solve It*) publicado em 1945, com várias edições posteriores, inclusive com tradução para o português; Matemática e Raciocínio Plausível (*Mathematics and Plausible Reasoning*) de 1954, dividido em dois volumes destinados a Indução e Analogia em Matemática e Padrões de Interferência Plausível, respectivamente; Descoberta Matemática: sobre entender, aprender e ensinar Resolução de Problemas (*Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*) de 1962 em dois volumes, mas reunido em um único volume em 1981; e Problemas e Teoremas em Análise (*Problems and Theorems in Analysis*) de 1925, com coautoria de Gábor Szegő, dividido em dois volumes.

Em sua obra *How to Solve it*, uma das mais famosas na Educação Matemática, Pólya (1957) apresenta alguns questionamentos sobre:

> O que é o desconhecido? Quais são os dados? Qual é a condição? É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar o desconhecido? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Desenhe uma figura. Introduza notação adequada. Desenhe uma figura. Introduza notação adequada. Separe as várias partes da condição. Você pode escrevê-las? (Pólya, 1957, p. xvi).

---

[4] Disponível em: https://www.komal.hu/home.h.shtml.

Esses questionamentos são relevantes no processo de investigação de uma situação cuja natureza está esclarecida, pois leva a compreender os motivos pelos quais isso se ocasionou. A ideia é mitigar a situação e elencar as informações necessárias para elaboração de uma estratégia que guie para solução do problema.

Sendo assim, como estratégia resolutiva de um problema, Pólya (1957) elenca quatro etapas metodológicas para construir a solução de um problema, que são elas: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e retrospecção.

1) Compreensão do Problema

Compreender o problema é importante para poder resolvê-lo, porque é a partir disso que o estudante consegue definir o objetivo com clareza, sem perder tempo com caminhos inúteis, com o intuito de direcionar melhor sua estratégia e escolher os métodos mais adequados para solucionar. Ademais, pode ajudar a reduzir a ansiedade e o bloqueio, pois na perspectiva do aluno, quando o problema é bem compreendido, se torna mais acessível, o que gera segurança para começar, além de estimular o raciocínio lógico, a leitura crítica e a autonomia.

Ao contrário de uma simples dúvida, que pode ser resolvida com uma consulta ou um dado isolado, um problema envolve obstáculos, incertezas ou múltiplas possibilidades. Ele precisa ser estruturado, compreendido e trabalhado, o que requer tempo, tentativa, erro e, sobretudo, criatividade. Assim, o problema se torna um motor do pensamento, um ponto de partida para o aprendizado significativo.

Pólya (1957) justifica a etapa da compreensão do problema, apresentando argumentos sobre a necessidade dela.

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado a (sic.) sua apresentação natural e interessante (Pólya, 1957, p. 4).

As situações descritas pelo autor são reais e frequentes ao longo do processo de ensino e aprendizagem do estudante, porque aquilo que se compreende é o que faz sentido diante do conhecimento adquirido e da capacidade de pensar, raciocinar e refletir acerca dos acontecimentos. Fazer com que o aluno resolva um problema, é preciso que seja interessante aos olhos, que instigue e seja desafiador.

Valério (2017, p. 38) salienta a relevância desta etapa ao afirmar que

> Destacar no problema quais são os dados e as incógnitas, ou seja, o que se tem e onde quer chegar, pode auxiliar na compreensão do mesmo. Assim como traçar figuras ou indicar a incógnita em figuras já existentes, montar esquemas e utilizar uma anotação adequada também contribuem para o sucesso da primeira etapa.

Para a autora, ao enfatizar a identificação clara dos dados e das incógnitas, o estudante evidencia uma habilidade ao raciocínio matemático: saber o que se tem e o que se busca. A partir dos conhecimentos prévios, conceber a ideia para se chegar ao entendimento da situação por meio de elementos distintos, para assim, inferir que resolver problemas não é apenas aplicar fórmulas, mas entender e estruturar o raciocínio desde o início.

2) Elaboração de um plano

Todo problema espera-se que se tenha uma solução, mesmo apesar desta não ser garantia. Todavia, na tentativa de chegar ao objetivo almejado, alguns processos são pensados de forma direcionada com o intuito da obtenção do sucesso, que na Resolução de Problemas de Pólya (1957) é a Elaboração do Plano de ação.

O próprio autor da teoria acredita que o percurso que se estende desde a compreensão inicial do enunciado até a definição de uma estratégia de resolução pode ser demorado e repleto de obstáculos. De fato, a etapa mais significativa na resolução de um problema é a formulação da ideia que orientará o plano de ação. Essa concepção pode emergir de forma progressiva ou, após diversas tentativas frustradas e um período de incerteza, manifestar-se de maneira súbita, como um *insight* ou uma solução inesperada (Pólya, 1957).

Dentro dos parâmetros pensados para elaboração do plano de ação para solucionar o problema, vários recursos podem vir à tona, como a criação de imagens e desenhos, utilização de fórmulas e equações, materiais manipuláveis e até mesmo a pesquisa de problemas semelhantes e suas respectivas soluções, com o objetivo de entender como o problema se comporta e como foi construída a sua solução.

Como afirma Pólya (1957, p. 114), "não se esqueça que a superioridade humana consiste em contornar um obstáculo que não pode ser superado diretamente, em bolar algum problema auxiliar adequado quando o original parece insolúvel".

Para Valério (2017), problemas relacionados frequentemente desempenham um papel fundamental na resolução de novas situações-problema, uma vez que experiências prévias e saberes matemáticos previamente construídos podem funcionar como suporte para a formulação de uma nova abordagem. Questionamentos como: *Você se recorda de um problema* *parecido? Tente lembrar de uma situação semelhante com a mesma incógnita ou estrutura semelhante*, representam instrumentos valiosos para a formulação da estratégia de resolução.

3) Execução do plano

Com a estratégia estabelecida, o momento é de pô-la em prática, implementar o plano feito e testar a sua validade, com base na compreensão do problema, verificando se todos os elementos selecionados e caminhos traçados conseguiram atingir o êxito esperado. O foco está na aplicação cuidadosa e sistemática das ações previstas, evitando desvios que comprometam a resolução.

Na visão de Pólya (1957), o plano fornece apenas um roteiro geral. É necessário estar convencido de que os detalhes se encaixam nesse roteiro e, para isso, devemos analisá-los um a um, com paciência, até que tudo esteja perfeitamente claro e não reste nenhum ponto obscuro onde um erro possa estar escondido.

A partir de uma analogia dos trabalhos de D'Ambrósio (1996) voltados para aspectos sociais, acredita-se que essa fase pode requerer do aluno não apenas conhecimentos técnicos, mas também persistência, disciplina e autoconfiança, uma vez que nem sempre os resultados surgem imediatamente. Segundo o autor, a resolução de problemas é também um processo formativo que envolve atitudes diante do erro e da incerteza, fortalecendo a autonomia do estudante.

De forma semelhante, Onuchic e Allevato (2011) destacam que, na execução do plano, o estudante deve ter liberdade para testar estratégias e reformular seus passos quando necessário, o que reforça o caráter investigativo e formativo da resolução de problemas. Uma fase de experimentação. Para as autoras, essa etapa é marcada por interações constantes entre pensamento lógico e tomada de decisão, aspectos fundamentais na construção do conhecimento matemático.

Portanto, a execução do plano vai além da simples aplicação mecânica de procedimentos previamente traçados. Trata-se de uma etapa dinâmica, em que o estudante deve mobilizar não apenas seus conhecimentos matemáticos, mas também habilidades como a reflexão contínua, o monitoramento consciente do processo, a capacidade de adaptação diante de obstáculos imprevistos e a persistência para revisar e ajustar sua trajetória sempre que necessário.

4) Retrospecção

Por fim, a fase da retrospecção consiste na averiguação se a compreensão do problema foi obtida de fato e plano de ação conseguiu alcançar as expectativas idealizadas por meio da execução do problema, ou seja, é a recapitulação dos passos anteriores a fim de investigar os motivos pelos quais o plano traçado deu certo e, no caso de negativa, elaborar um novo plano e executar.

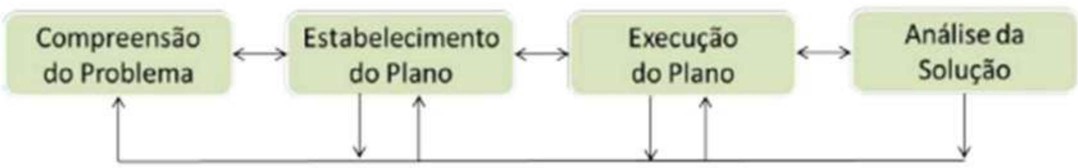
Na perspectiva de Pólya (1957) mesmo estudantes com desempenho satisfatório, ao chegarem à solução de um problema e registrarem sua justificativa, frequentemente encerram seus estudos e direcionam-se a novos conteúdos. Ao adotar essa postura, acabam por negligenciar uma etapa valiosa e formativa do processo de resolução. Se, em vez disso, realizassem uma análise retrospectiva da trajetória percorrida — revisitando tanto o desfecho quanto os procedimentos adotados —, poderiam fortalecer suas aprendizagens e aprimorar suas habilidades na resolução de problemas.

Para Bassi (2024, p. 23), nessa fase "temos que retornar à solução do problema e verificar cada passo dado para que se desenvolva a arte de resolver problemas. Ou seja, o trabalho não está pronto ao resolvê-lo. Isto só não ajuda a resolução de problemas, mas, também, a criar um pensamento crítico do aluno".

Ainda segundo a visão de Pólya (1957), é fundamental que o professor compreenda e transmita aos alunos a ideia de que nenhum problema está completamente encerrado após sua resolução. Sempre há espaço para novas descobertas. Mediante estudo aprofundado e reflexão, é possível refinar qualquer solução e ampliar a compreensão envolvida nesse percurso.

Ao estudar a metodologia de Pólya (1957) é possível perceber que os passos ou etapas propostas foge da rigidez intrínseca, mas conversam entre si, uma vez que para retornar a uma determinada etapa, não necessariamente precisa estar na etapa consecutiva. Há uma flexibilidade na proposta do autor em detrimento às dificuldades encontradas pelos estudantes, o que permite uma dinâmica mais natural e autêntica no processo de resolução, conforme mostra do fluxograma abaixo.

Figura 1: Interação entre as etapas propostas por Pólya.



Fonte: Valério (2017).

Esse caráter não-linear do método evidencia que o ato de resolver problemas não se dá de maneira estanque, mas sim como um processo de ida e volta entre as etapas, em que compreender melhor o enunciado pode surgir após tentativas iniciais de resolução, ou em que a revisão do plano pode ser necessária durante a execução.

Valério (2017, p. 39) diz:

> Note que essas etapas não se caracterizam como um modelo infalível na prática de resolução de problemas, mas muito podem auxiliar os alunos ao tentar resolvê-los. Essa lista certamente pode ser aperfeiçoada, sem que deixe de ser simples, natural, genérica e curta. Observe que em cada fase o professor pode auxiliar seus alunos, de forma discreta, fazendo indagações e sugestões.

Esse pensamento denota o trabalho em conjunto dos atores do processo de ensino e aprendizagem no contexto da sala de aula, sendo que o professor assume apenas o papel de mediador, incentivando e motivando os alunos durante a realização das etapas de Resolução de Problemas.

Ao falar sobre a metodologia de Pólya (1957), Souza (2018, p. 47) afirma que "todas as etapas mostram que o objetivo é enfatizar que na resolução de problemas deve-se ter sempre começo, meio e fim. Considerar sempre a variável, os meios e maneiras para encontrá-las e por fim, considerar a conclusão, ou seja, a validação da resolução".

Pólya (1957) enxerga a resolução de problemas como a atividade mais distintivamente humana, pois ela envolve não apenas inteligência, mas também imaginação, persistência e intuição. Ao resolver problemas, o indivíduo não só encontra respostas — ele se transforma no processo, desenvolvendo habilidades cognitivas e ampliando sua compreensão do mundo.

No próximo tópico será apresentada uma nova perspectiva da Resolução de Problemas enquanto metodologia, de acordo com as autoras Onuchic e Allevato (2012) que defendem o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a qual define 10 passos para se chegar à solução de um problema matemático.

2.2 Perspectiva da Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas elenca três grandes pilares do processo de formação dos alunos. É a base necessária para construção do saber e para o desenvolvimento de competências que extrapolam o domínio de conteúdo. Ao integrar o ensino, a aprendizagem e a avaliação de forma dialógica e interdependente, a presente metodologia rompe com a visão da formação fragmentada e transmissiva por meio de uma abordagem que insere aspectos participativos e sociais a uma especificidade na área exata.

Ela surge no âmbito do Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas – GTERP, que segundo Nunes (2010, p. 88) é

> [...] coordenado por Onuchic desde 1992, na UNESP de Rio Claro, tem por objetivo central desenvolver pesquisas que efetivamente atinjam a sala de aula e tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigação e de produção científica na linha de Resolução de Problemas em Educação Matemática e adota a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Isto é, um grupo de pesquisa que se preocupa em compreender como a Resolução de Problemas pode, enquanto metodologia de ensino e aprendizagem, ser usada nos mais diversos conteúdos matemáticos por meio de um roteiro de atividade que outrora será ampliada as discussões.

Idealizada inicialmente como uma atividade voltara para professores pela Drª Lourdes de la Rosa Onuchic no âmbito do Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas – GTERP, desenvolvida através do projeto, intitulado Ensinando Matemática através da Resolução de Problemas com elos em algumas universidades do estado de São Paulo ao longo do período de 1997 e 1998, a teoria teve seus primeiros passos através de uma dinâmica seguindo um roteiro que seria válido trabalhar com qualquer conteúdo matemático em sala de aula (Nunes, 2010).

A doutora Lourdes ganhou seu destaque enquanto pesquisadora na área de Resolução de Problemas. Silva (2023), no referencial teórico de sua tese, faz uma análise acerca dos principais autores citados em teses e dissertações brasileiras que dialogam e pesquisam sobre Resolução de Problemas. Aparecendo em terceiro lugar como nome mais referenciado nos trabalhos pesquisados. De acordo com ele,

> A pesquisadora brasileira Lourdes de la Rosa Onuchic também é um nome frequente em trabalhos voltados para a Resolução de Problemas. Através do GTERP, ela vem desenvolvendo pesquisas com foco nessa metodologia de ensino, com destaque para os processos de Ensino, Aprendizagem e Avaliação (Silva, 2023, p. 23).

Dessa forma, as presentes pesquisas também reconhecem a relevância da contribuição de Lourdes de la Rosa Onuchic para o campo da Resolução de Problemas, especialmente no contexto da Educação Matemática brasileira. Outrossim, ao mencionar o trabalho do GTERP, destaca-se não apenas a atuação individual da pesquisadora, mas também a construção coletiva de saberes pedagógicos que valorizam o ensino como um processo investigativo e centrado no estudante.

Quanto ao roteiro trabalhado no projeto, ele deu o pontapé inicial para formalização da teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas que foi finalizada pelas doutoras Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato, também integrante do GTERP, que apresenta a Resolução de Problemas por meio de dez passos:

> 1) Proposição do problema; 2) Leitura individual; 3) Leitura em conjunto; 4) Resolução do problema; 5) Observar e incentivar; 6) Registro das resoluções na lousa; 7) Plenária; 8) Busca do consenso; 9) Formalização do conteúdo e 10) Proposição e resolução de novos problemas (Onuchic et al 2014, p. 45).

Cada passo apresentado pelas autoras retrata um momento distinto do processo da aplicação da teoria metodológica proposta, mas que no final direcionam para uma estratégia de construção da solução. Há momentos reflexivos, como as leituras individuais e em conjunto e a busca do consenso; conceituais, como a formalização do conteúdo; e práticos, como o registro das resoluções na lousa e a resolução do problema em questão e de novos.

1) Proposição do Problema

A proposição do problema constitui o ponto de partida do processo investigativo, pois é o instante em que o desafio apresentado aos estudantes para ser analisado e solucionado, cujos estudantes são convidados a mobilizar seus conhecimentos prévios, confrontá-los com novas exigências cognitivas e identificar quais conceitos já dominam e quais precisam ser desenvolvidos.

Para Onuchic et al (2014, p. 45), "[...] esse problema inicial é chamado de problema gerador, pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda (sic.) não foi trabalhado em sala de aula"

Segundo Sousa (2022, p. 32),

> [...] associar a Proposição de Problemas à prática escolar exige do professor uma mediação adequada, de modo a regular a ação do discente e direcioná-lo, com base nos objetivos de aula, sendo necessário dominar conceitos matemáticos para captar as possibilidades existentes nas falas ou registros escritos dos estudantes.

A visão de Sousa (2022) depreende a ideia de a proposição do problema ser um catalisador no processo de aprendizagem, considerando o professor como agente mediador reflexivo, que posteriormente no decurso, acompanhe, escute e interprete cuidadosamente as produções dos alunos.

2) Leitura individual

Na leitura individual, cada estudante é responsável por analisar o enunciado do problema de forma autônoma, com o intuito de identificar elementos relevantes, informações já conhecidas e relações possíveis. Nesse momento, estimula-se o uso do raciocínio crítico e da interpretação ativa, os quais permitem que o aluno formule hipóteses iniciais e estabeleça conexões com seus conhecimentos anteriores, o que contribui significativamente para a compreensão do problema proposto.

Onuchic et al (2014, p. 45) defendem que “a ação, nessa etapa, é do aluno; ao ler individualmente, tem possibilidade de refletir, de colocar-se em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema proposto”, isto é, o aluno está no centro do processo de aprendizagem durante a leitura do problema.

Quando se trata do Ensino Fundamental, Santos (2006), diz:

> A leitura no ensino fundamental é essencial, porque proporciona a ampliação de horizontes para os estudantes dos últimos ciclos, tanto na trajetória escolar, sendo um instrumento futuramente utilizado no vestibular e no meio acadêmico, como na vida pessoal, contribuindo para a formação de valores, crenças, cultura, enfim, a maneira como o indivíduo se posiciona perante o mundo (Santos, 2006, p. 7).

Nessa perspectiva, a leitura assume um papel que ultrapassa a simples compreensão do enunciado. Considerada como “[...] uma prática social resultante de hábitos, de atitudes, de competências que deveriam ser começadas no ambiente familiar ou em outros espaços em que a escrita circula” (Soares, 2018, p. 38).

A leitura contribui para o desenvolvimento da autonomia intelectual do estudante, ao possibilitar uma investigação crítica das informações apresentadas e, com base naquilo já aprendido, pensar em caminhos e meios para organizar as ideias que levam a uma solução capaz.

3) Leitura em conjunto

Pode acontecer de, na leitura individual, o estudante deixar passar algumas informações ou até mesmo não conseguir interpretar corretamente o que o enunciado está querendo. Pensando nisso, as autoras desta metodologia pensaram na etapa da leitura em conjunto, a partir da criação de pequenos grupos, para propiciar a leitura compartilhada, onde uma entonação numa determinada palavra ou a forma como lê uma frase desperte uma percepção antes não vista na etapa anterior.

Na visão de Soares (2018), a apreensão do significado de um texto, bem como das ideias nele expressas, tende a ocorrer de forma mais efetiva quando essas são analisadas, debatidas e contextualizadas no espaço escolar, permitindo ao estudante atribuir sentido ao conteúdo abordado.

Onuchic et al (2014, p. 45) propõem que nesta etapa sejam formados grupos, pois “[...] nessa fase, exercitam a expressão de ideias, para o que necessitarão utilizar e aprimorar a linguagem, a fim de expressar-se com clareza e coerência e fazer-se entender”, isto é, os estudantes assumem o papel de protagonista da ação, o qual a responsabilidade maior recai para si na finalidade de desenvolver seu pensamento crítico e matemático.

Como formas de aperfeiçoar a compreensão, Pólya (1978) sugere os seguintes questionamentos:

> **Por onde começar?** Comece de novo pelo enunciado do problema, quando este estiver tão claro e tão bem gravado em sua mente que poderá até perdê-lo de vista por um momento, sem temor de perdê-lo por completo.
> **Que posso fazer?** Isole as partes principais de seu problema. A hipótese e a conclusão são as partes principais de um "problema de demonstração"; a incógnita, os dados e a condição são as partes principais de um "problema de determinação". Verifique as partes principais do seu problema, considere-as uma a uma e, em seguida, examine-as em várias combinações, relacionando cada detalhe com os outros detalhes, e cada um destes com a totalidade do problema.
> **Qual a vantagem em assim proceder?** Deve-se preparar e clarificar os detalhes que, mais tarde, terão uma função a desempenhar (Pólya, 1978, p. 25).

Embora a Matemática possua uma linguagem particular e comunicativa especificamente, torna-se importante compreender tanto sua linguagem quanto a língua materna, considerando suas múltiplas formas de representação, numa interação mútua e complementar (Lucena, 2022). Essa visão, ao reconhecer a interdependência entre os diferentes sistemas linguísticos, reforça a importância de práticas pedagógicas que promovam a articulação entre o pensamento matemático e a expressão verbal, que direcionando para leitura em conjunto, possibilita a troca de interpretações, a construção coletiva de sentidos e o enriquecimento do vocabulário matemático por meio do diálogo.

4) Resolução do Problema

Após as reflexões acerca do problema proposto por meio das leituras individuais e em conjunto, a quarta etapa corresponde à resolução do problema de forma escrita pelos grupos. É a aplicação prática da metodologia, na qual cada grupo são incentivados a elaborar estratégias de resolução, discutir possíveis caminhos e justificar suas escolhas com base nos conhecimentos construídos previamente, ou seja, apresentar a resolução do problema.

Para as autoras da metodologia, “entrando na quarta etapa, inicia-se a resolução do problema, propriamente dita. Os alunos, em seus grupos, tentam resolver o problema gerador, que lhes conduzirá à construção de conhecimento sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula” (Onuchic et al 2014, p. 45).

O trabalho realizado ao longo das concepções obtidas no percurso do problema, alavancam as ideias principais que colaboram para composição da solução. Uma vez pensado e refletido, o resolvedor possui uma bagagem cognitiva e contributiva a partir de aspectos destacados nas etapas anteriores.

Para Schoenfeld (1985, p. 12), “[...] qualquer desempenho na resolução de problemas matemáticos se baseia em uma fundação de conhecimentos matemáticos básicos, os quais chamo de *recursos* disponíveis para o indivíduo”, isto é, o sucesso da solução também está vinculado aos conhecimentos básicos desenvolvidos pelos estudantes. Não tem como um aluno calcular o perímetro de um quadrilátero sem saber somar.

Conforme Valério (2017), essa fase caracteriza-se como o momento de identificar possíveis equívocos e lacunas provenientes das etapas anteriores, reconhecê-los e, a partir disso, delinear estratégias para superá-los e alcançar a solução almejada. Diante do fato desta atividade ser desenvolvida em grupo, a ação colaborativa contribui significativamente nesse processo, favorecendo a troca de ideias, a escuta ativa e o pensamento coletivo direcionado a um objetivo comum.

5) Observar e incentivar

Enquanto os alunos estão ocupados resolvendo o problema proposto em seus respectivos grupos, o professor se coloca na posição de observador das situações, sem muitas interferências no processo de produção deles, colaborando para o protagonismo de cada um. Simultaneamente, incentiva-os a não desistir, auxilia na observação e consideração de conceitos matemáticos antes não ponderado.

> O professor age, enquanto isso, observando o trabalho dos alunos incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, e incentivando a troca de ideias. Auxilia nas dificuldades sem, contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos (Onuchic et al, 2014, p. 45-46).

De acordo com esse pensamento, as autoras acreditam que “Cabe ao professor observar atentamente os processos mentais mobilizados pelos alunos durante a resolução de problemas, de modo a intervir oportunamente, incentivando o desenvolvimento da autonomia e do raciocínio lógico” (Onuchic; Allevato, 2012, p. 23).

Nessa mesma direção, Perrenoud (2000, p. 37) destaca que é papel do professor "[...] incentivar os alunos a expor seus pensamentos, mesmo quando apresentarem erros, pois isso permite compreender como estão construindo o conhecimento e intervir de maneira significativa", o qual concorda com os pensamentos de Pólya (1978, p. 112), expressos anos antes, que já afirmava: "Mais do que ensinar técnicas, o papel do professor é ajudar o aluno a desenvolver estratégias pessoais para resolver problemas, respeitando seu ritmo e estilo de aprendizagem".

Ponte (2005) reforça que a resolução de problemas constitui um ambiente fértil para o pensamento, a argumentação e a construção de significados, sendo fundamental que o professor ofereça apoio contínuo e uma escuta qualificada para potencializar essa vivência. Dessa forma, evidencia-se a importância de uma prática pedagógica que observe, valorize e incentive os estudantes ao longo de todo o processo formativo.

6) Registro das resoluções na lousa

Ao terminar o registro das resoluções, cada grupo é convidado a apresentar os seus resultados na lousa, na frente de toda a turma, destacando os conceitos utilizados, a técnica escolhida e os procedimentos realizados. Enquanto isso, os demais estudantes observam a explanação do grupo e refletem acerca dos caminhos traçados e das noções consideradas. Isso "[...] favorece a construção coletiva do raciocínio, permitindo que todos acompanhem o percurso, validem estratégias e compreendam os diferentes caminhos possíveis" (Onuchic; Allevato, 2012, p. 58).

Para Machado (2008, p. 67), "O quadro-negro (ou lousa) funciona como espaço de memória coletiva, onde se constroem, com a mediação do professor, os saberes matemáticos que emergem da interação entre os alunos", uma vez que, "ao registrar os procedimentos e raciocínios dos alunos na lousa, o professor cria oportunidades para que todos visualizem, analisem e argumentem sobre os caminhos propostos, fortalecendo o diálogo matemático e a aprendizagem colaborativa" (Ponte, 2005, p. 21).

A escrita configura-se como uma importante ferramenta para a materialização dos processos mentais, já que permite que o pensamento, antes subjetivo, se torne passível de análise e comunicação. Nesse sentido, o registro das estratégias empregadas durante a resolução de problemas contribui significativamente para a organização lógica das ideias, promovendo maior clareza na construção do raciocínio (Borasi, 1994).

Nessa perspectiva, Smole, Diniz e Cândido (2003) defendem que difundir a forma matemática de pensar mediante a um público que possui experiências semelhantes, utilizando a escrita e a explicação na lousa, gera efeitos significativos no processo de ensino e aprendizagem do aluno, já que estima sua criação e colabora com a capacidade de pensar sobre o próprio pensamento.

7) Plenária

Na etapa seguinte, os alunos irão socializar seus resultados, comparar suas respectivas soluções com as dos demais colegas e refletir sobre as decisões tomadas. Para as autoras, "a plenária é o espaço privilegiado para socializar os caminhos percorridos, confrontar ideias e validar procedimentos matemáticos" (Onuchic; Allevato, 2012, p. 51).

A verbalização através da oratória das resoluções encontradas auxilia na compreensão de conceitos e na comunicação matemática, reescrever não apenas sua resposta, mas se expressar matematicamente. E a socialização em grupo contribui para análise das decisões tomadas, frente às demais soluções apresentadas, pois cada indivíduo integrante do processo precisa defender o respectivo ponto de vista de acordo com suas próprias estratégias. (Fiorentini; Miorim, 1990; Smole; Diniz, 2001; Bicudo; Borba 2006).

8) Busca do Consenso

A etapa anterior ocorre simultaneamente a esta, uma vez que, de acordo com Onuchic et al (2014, p. 46),

> [...] Em sessão plenária, ou seja, em um esforço conjunto, professor e alunos, tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo.

A partir dos debates e exposições das resoluções realizadas, o mediador – professor – conduz a turma a pensar se há uma ou mais resoluções corretas e se essa é ou será aquela que mais se adequa ao problema. É no consenso da turma que os processos cognitivos dos envolvidos receberão novas habilidades por meio de uma apuração e sintetização das estratégias adotadas.

> O consenso entre os alunos é fruto da escuta ativa e do respeito à diversidade de estratégias. Buscar o entendimento comum implica mobilizar a argumentação matemática em um contexto de cooperação. Quando os alunos discordam e tentam chegar a um acordo, ocorre um processo rico de aprendizagem. (Onuchic; Allevato, 2012, p. 62; Ponte; Brocardo; Oliveira, 2012, p. 44; Barbosa, 2001, p. 28).

Os autores destacam com sensibilidade o valor pedagógico do diálogo e da escuta ativa no ambiente escolar. Ao enfatizarem a busca do consenso como um processo de construção coletiva, revelam como a divergência e a argumentação favorecem o desenvolvimento do raciocínio e da autonomia dos alunos. Trata-se de uma perspectiva que fortalece a aprendizagem colaborativa e o protagonismo estudantil.

9) Formalização do conteúdo

O trabalho desenvolvido até antes desta etapa considerou os conhecimentos prévios dos estudantes acerca dos conteúdos necessários para se resolver o problema proposto. Os diálogos, a troca de ideias e experiências serviram como fonte de pesquisa matemática para compreensão e utilização de conceitos e estratégias. Agora, o professor mediador apresentará o conteúdo do problema com o devido rigor matemático de acordo com a série proposta, nem muito técnico, nem de maneira geral.

Para Vergnaud (1990, p. 78), "a compreensão de um conceito não está completa até que se consiga expressá-lo de forma clara e sistemática", a qual é estimulada e desenvolvida a partir da ótica dos elementos que compõe a Matemática que reveste o problema, que de acordo com a metodologia, se encontra nas etapas finais.

A etapa de sistematização representa uma fase de estruturação das ideias e de desenvolvimento da forma de expressão matemática. Ao concluir as atividades, é essencial que o docente auxilie os estudantes na identificação e na compreensão dos conceitos matemáticos explorados, promovendo uma consolidação significativa dos conhecimentos construídos durante o processo (Smole; Diniz, 2001; Pólya, 1978).

10) Proposição e Resolução de novos problemas

Por fim, os estudantes já dispõem de uma base mais sólida sobre os conteúdos envolvidos na questão inicialmente proposta, uma vez que passou pelas etapas referentes às leituras, resolução, reflexão, tomada de decisão e formalização. Desse modo, com o objetivo de ampliar e aprofundar o conhecimento construído, propõe-se novos problemas a partir da temática da situação inicial ou de outras situações que sejam agradáveis aos olhos dos alunos e causem o sentimento de ser desafiado.

Na perspectiva de Pólya (1978, p. 14), "criar novos problemas a partir de uma situação inicial é um exercício de criatividade e generalização", isto é, requer do aluno a expressividade da sua capacidade cognitiva, a exploração de suas ideias para construir meios baseados nos utilizados para resolver o problema proposto inicialmente e aplicar esses conhecimentos em situações que, embora pareçam distintas, mas possibilitam o emprego de conhecimentos antes usados.

Pólya (1957, p. 108) ainda defende que:

> No entanto, quando passamos de um problema para outro, muitas vezes observamos que é mais fácil lidar com o novo problema, mais ambicioso. É

> possível que seja mais fácil responder a muitas perguntas do que a uma só. O teorema mais abrangente pode ser fácil de demonstrar; o problema mais genérico, mais fácil de resolver.

Propor novos problemas requer que os estudantes reflitam sobre os conteúdos mobilizados e sobre as estruturas matemáticas envolvidas, uma vez que “[...] eles possibilitam analisar se forma compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores [...]” (Onuchic et al, 2014, p. 46). Isso faz com que o aluno demonstre compreensão conceitual e habilidade para transitar entre diferentes representações, por se tratar de uma atividade que demanda iniciativa, pensamento crítico e domínio dos elementos que compõem a situação-problema sugerida.

Em síntese, as discussões entre a teoria clássica de Polya e a abordagem contemporânea de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas evidencia a relevância do diálogo entre perspectivas distintas sobre o processo de resolução. Enquanto Polya oferece um modelo estruturado, focado nas etapas de compreensão, planejamento, execução e verificação, a abordagem mais recente amplia a compreensão ao integrar avaliação, construção de conhecimento e desenvolvimento de competências matemáticas no contexto escolar. O contraste entre a tradição e a inovação ressalta a importância de considerar tanto princípios consolidados quanto novas práticas pedagógicas, permitindo que educadores desenvolvam estratégias mais reflexivas para a aprendizagem matemática centrada em problemas.

3 A OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP

Este capítulo é destinado para falar um pouco sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, competição essa que também abre disponibilidade para rede privada de educação participar também. Os pontos debatidos referem-se ao regulamento da competição, objetivos, um breve histórico dos principais acontecimentos e as possibilidades que os estudantes têm ao obter êxito nas fases da olimpíada.

A OBMEP é uma competição nacional de Matemática organizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) que é uma instituição de pesquisa ligada ao Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI). Os recursos utilizados para realização da competição são do próprio MCTI e do Ministério da Educação (IMPA, 2025, p. 1).

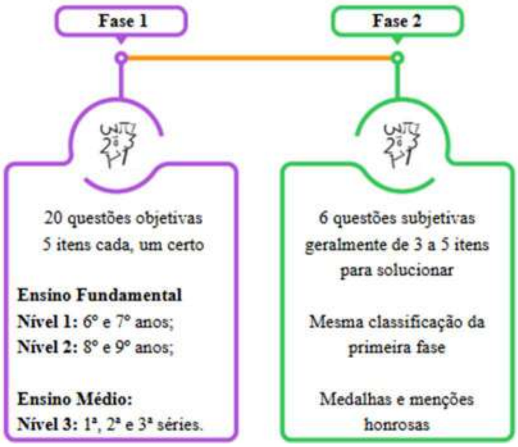
A Olimpíada é voltada para alunos da Educação Básica, tanto da rede pública quanto privada, sendo esta última integrada a partir de 2017. De acordo com o regulamento, os objetivos pretendidos pela competição são:

> 1.4.1 Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil; 1.4.2 Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade; 1.4.3 Promover a difusão da cultura matemática; 1.4.4 Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas; 1.4.5 Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas e privadas, contribuindo com a sua valorização profissional; 1.4.6 Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas; e 1.4.7 Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento. (IMPA, 2025, p. 1).

Os sete objetivos descritos pela OBMEP, elencam características importantes para que o desenvolvimento do conhecimento matemático e a própria estimulação para pesquisas na área possam ser cada vez mais disseminadas, já que envolve os principais atores do processo educativo – estudantes e professores – bem como a disponibilidade de materiais didático de qualidade e parcerias com instituições de ensino superior.

A primeira edição da OBMEP ocorreu no ano de 2005, voltada para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio e, nesse ano, foram realizadas duas etapas chamadas de Fases. A primeira fase é uma prova objetiva, com 20 questões, que foi categorizada em níveis: nível 1 para alunos dos 6º e 7º anos; nível 2 para alunos dos 8º e 9º anos; e nível 3 para alunos das séries do Ensino Médio – 1ª, 2ª e 3ª séries e os problemas apresentados em cada nível. Já a segunda fase, é uma prova discursiva, composta por 6 questões que também versam sobre conteúdos básicos da Matemática, cada uma de acordo com seu nível. Esse modelo adotado de seleção segue até os dias atuais.

Figura 2: Organograma dos exames da OBMEP.



Fonte: Autoria própria.

Em 2018, a OBMEP resolveu criar uma avaliação voltada para o 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, categorizada dentro do sistema da olimpíada de "Nível A", onde houve ainda três avaliações sendo nos anos de 2018, 2019 e 2021, já que em 2020 ocorreu a pandemia da COVID-19 e apenas uma fase, que foi a primeira.

Essas três edições do exame do nível A, configurou-se como um estudo realizado pelo IMPA para analisar a possibilidade de incluir os anos iniciais do Ensino Fundamental na competição da olimpíada e as viabilidades para isso. Assim, as avaliações dos três anos ocorreram de formas diferentes: a edição de 2018 foi uma prova de 20 questões objetivas, com 5 alternativas cada, seguindo o mesmo padrão OBMEP; o exame de 2019 reduziu a quantidade de problemas objetivos para 15 e propôs um problema "aberto" com uma situação problema para os alunos solucionarem; e, por fim, o exame de 2021 se assemelhou à edição de 2019, sendo 15 problemas objetivos e um discursivo.

Diante dos dados obtidos, em 2022 o IMPA decidiu separar a Olimpíada Mirim – OBMEP da própria OBMEP, permanecendo o padrão de elaboração das questões, mas sendo olimpíadas independentes. As duas olimpíadas possuem datas de inscrições distintas e a Mirim ampliou o público, contemplando os estudantes do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental, alcançando em sua terceira edição, 2024, o acumulado de 4,4 milhões de participantes de um total de 4.037 municípios em todo território nacional (IMPA, 2025).

Figura 3: Breve linha do tempo da OBMEP.

Fonte: Autoria própria.

Já nas primeiras aplicações dos exames voltado para os anos finais do Ensino Fundamental e Médio, as escolas recebiam um material impresso para usar como apoio na preparação dos estudantes para prova, chamado de Banco de Questões. O primeiro banco produzido foi o da edição de 2006 e eles traziam problemas contextualizados, com a mesma proposta da olimpíada, dividido também em níveis e, no final do livro, mostrava uma solução para o problema proposto. Todos os problemas eram abertos, a fim de promover a reflexão dos resolvedores quanto a questão e aos recursos necessários para resolvê-la. Todavia, esses bancos foram deixados de ser enviados às escolas e, a partir de 2020, por causa de cortes de recursos destinados à educação, a olimpíada parou de produzi-los. No site da OBMEP é possível conferir todos os bancos[5] produzidos, no formato digital, referentes às edições de 2006 a 2020, gratuitamente

Ademais, além dos Bancos de Questões disponíveis, o site da OBMEP[6], na aba "Material Didático" contém diversos outros materiais de apoio que, tanto os docentes quanto discentes podem usufruir, como as provas anteriores com suas respectivas soluções; apostilas do Programa de Iniciação Científica (PIC); simulados; videoaulas; informações sobre a Matemática mundo à fora, que apresenta páginas de sites e outros materiais voltados para o conhecimento matemático, tanto em Português, quanto em outras línguas; e *links* institucionais e de outras olimpíadas no Brasil e no Exterior. Os portais também são grandes aliados na preparação, uma vez que complementam a base teórica e didática dos estudantes que vislumbram um resultado satisfatório no exame.

A cada ano, a OBMEP atinge patamares recordes em relação à participação das escolas e, consequentemente, dos estudantes. O aumento do número de escolas participantes de 2005 à

---

[5] Disponível em: http://www.obmep.org.br/banco.htm.
[6] Disponível em: http://www.obmep.org.br/

2025 na primeira fase foi de 84,44%, isso porque as escolas privadas puderam participar da olimpíada a partir de 2017. Esse aumento ao longo do tempo corresponde a 26.191 escolas novas participando e 8.096.505 novos alunos em busca de uma premiação da olimpíada (IMPA, 2025). Silva (2023) elenca a quantidade de estudantes inscritos nas duas fases do exame da OBMEP, bem como a quantidade de escolas, de 2005 a 2022, baseado nos dados divulgados pelo IMPA. Abaixo, seguindo a mesma proposta, a tabela criada por Silva (2022) será atualizada com os dados de 2023 a 2025.

Tabela 1: Dados numéricos da OBMEP.

Ano	Primeira Fase			Segunda Fase		
	Alunos	Escolas	Municípios	Alunos	Escolas	Municípios
2005	10.520.831	31.031	93,5%	457.725	29.074	91,9%
2006	14.181.705	32.655	94,5%	630.864	29.661	92,4%
2007	17.341.732	38.450	98,1%	780.333	35.483	96,9%
2008	18.326.029	40.397	98,7%	789.998	35.913	96,9%
2009	19.198.710	43.854	99,1%	841.139	39.387	98,1%
2010	19.665.928	44.717	99,16%	863.000	39.929	98,3%
2011	18.720.068	44.691	98,9%	818.566	39.935	98,1%
2012	19.166.371	46.728	99,42%	823.871	40.770	98,5%
2013	18.762.859	47.144	99,35%	954.926	42.480	98,83%
2014	18.192.526	46.711	99,41%	907.446	41.302	99,41%
2015	17.972.333	47.580	99,48%	889.018	42.316	97,62%
2016	17.839.424	47.474	99,59%	913.889	43.232	99,05%
2017*	18.240.497	53.231	99,57%	941.630	49.617	99,23%
2018	18.237.996	54.498	99,44%	952.782	50.183	98,89%
2019	18.158.775	54.831	99,71%	949.240	50.663	99,03%
2020**	17.774.636	53.374	99,84%	–	–	–
2021	17.774.936	53.375	99,84%	566.285	35.075	88,65%
2022	18.159.636	54.488	99,87%	834.742	46.602	97,79%
2023	18.369.125	55.383	99,87%	846.708	48.759	97,79%
2024***	18.498.709	56.516	99,89%	899.355	49.654	-
2025****	18.617.336	57.222	99,93%	-	-	-

* A partir desse ano, as escolas particulares passaram a serem contempladas pela OBMEP.
** Nesse ano, houve a realização das inscrições, mas, devido a pandemia causada pela COVID-19, decidiu-se não realizar a olimpíada.
*** O site não informa a porcentagem de municípios participantes da segunda fase.
**** O resultado dos dados da segunda fase ainda não foi divulgado até a data da pesquisa.

Fonte: Silva (2023); IMPA (2025).

Frente aos dados apresentados, Silva (2023), aponta que, para fins comparativos, os dados do Censo Escolar de 2020, divulgados pelo Inep[7], indicam que o número total de

[7] Disponível em: Disponível em:

estudantes matriculados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, nas redes pública e privada de ensino do Brasil, foi de 19.479.168. Esse dado permite inferir que, aproximadamente, 91,2% dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental à 3ª série do Ensino Médio participaram da OBMEP 2020.

A premiação da olimpíada contempla alunos, professores, escolas e secretarias de educação, de acordo com o desempenho dos participantes. As escolas concorrentes, públicas e privadas, disputam medalhas, menções honrosas e a possibilidade de ter alunos participantes do Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC Jr) com a possibilidade do recebimento de bolsa na modalidade aluno e sem bolsa na modalidade ouvinte.

Dentre as escolas públicas, o regulamento destaca as Escolas Públicas Não Seletiva, que são todas as que os alunos não precisam passar por exame de admissão para ter sua matrícula efetivada, e as Escolas Públicas Seletivas, definidas por:

> As escolas públicas que, na admissão de alunos, realizam processo de seleção exclusivamente por meio de provas, sorteio ou concursos em qualquer um dos níveis e/ou que admitam exclusivamente filhos de militares ou de outras categorias profissionais específicas serão consideradas escolas seletivas (IMPA, 2025, p. 2).

Os alunos das Escolas Privadas concorrem entre si e possuem uma quantidade específica de premiação destinada aos estudantes que mais se destacarem. Na edição de 2025, as Escolas Públicas Seletivas passarão a ter a premiação distinta dos demais alunos da rede pública que não tem os mesmos acessos e possibilidades que os alunos das outras instituições, visando um exame mais equitativo e emancipatório para todos.

A seguir, a tabela apresenta a quantidade de premiações referentes a medalhas e menções honrosas das escolas participantes e suas respectivas modalidades destinadas aos alunos e seu desempenho.

Tabela 2: Premiação dos alunos na OBMEP de acordo com seu desempenho.

Prêmio Nacional	**Critério**	**Nível 1**			**Nível 2**			**Nível 3**		
		EPnS*	**EPS***	**EPr*****	**EPnS**	**EPS**	**EPr**	**EPnS**	**EPS**	**EPr**
Medalha de Ouro	Nacional	160	Até 40	50	160	Até 40	50	50	Até 50	50

https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/notas_estatisticas_censo_escolar_2020.pdf

Prêmio Nacional	Critério	Nível 1			Nível 2			Nível 3		
		EPnS*	**EPS***	**EPr****	**EPnS**	**EPS**	**EPr**	**EPnS**	**EPS**	**EPr**
Medalha de Prata	Nacional	400	Até 100	150	400	Até 100	150	250	Até 250	150
Medalha de Bronze	Nacional	1.800	Até 150	450	1.300	Até 150	450	750	Até 350	450
Menção Honrosa	Nacional	15.000		2.000	15.000		2.000	15.000		2.000
Total	Nacional	Até 20.300			Até 19.800			Até 19.350		

** EPnS = Escola Pública não Seletiva; ** EPS = Escola Pública Seletiva; *** EPr = Escola Privada.*

Fonte: OBMEP, 2025 (adaptação).

De acordo com o site o oficial da OBMEP[8], além de medalhas e menções honrosas, a OBMEP conta com a parceria de três instituições oferecem bolsas para alunos medalhistas da olimpíada:

a) **Fundação Behring – OBMEP:** A bolsa é um programa desenvolvido pela Fundação Behring[9], fundação familiar brasileira, sem fins lucrativos, em colaboração com a OBMEP, com o objetivo de incentivar a formação acadêmica de jovens talentos em áreas tecnológicas. A iniciativa contempla estudantes medalhistas de qualquer edição da OBMEP que estejam ingressando no primeiro período de cursos de graduação em áreas tecnológicas, oferecidos por universidades públicas, sejam federais ou estaduais. As bolsas visam apoiar financeiramente esses alunos durante sua trajetória no ensino superior, estimulando a permanência e o desempenho acadêmico em carreiras estratégicas para o desenvolvimento científico e tecnológico do país.

b) **Bolsa IHS – OBMEP:** A bolsa é uma iniciativa da empresa IHS Towers[10], uma empresa multinacional especializada na construção e gestão de infraestrutura de torres de telecomunicações, em parceria com a OBMEP, que tem como finalidade oferecer apoio financeiro a jovens meninas com destacado desempenho acadêmico. O programa é voltado a estudantes que se identificam com as áreas de Ciências e/ou Exatas e que desejam ingressar no ensino superior, contribuindo para ampliar a representatividade feminina

[8] Disponível em: http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm.
[9] Disponível em: https://fundacaobehring.org/quem-somos/
[10] Disponível em: https://www.ihstowers.com/br-pt

nesses campos do conhecimento e favorecer a permanência e o êxito acadêmico ao longo da graduação.

c) **Bolsa IDOR – Ciência Pioneira – OBMEP:** A bolsa é uma iniciativa promovida pela Ciência Pioneira[11], uma iniciativa filantrópica que visa promover o desenvolvimento da ciência no Brasil, com foco em áreas inovadoras e de fronteira, especialmente nas interfaces entre as ciências biomédicas e as ciências exatas, em parceria com a OBMEP, que tem como finalidade oferecer apoio financeiro a estudantes com destacado desempenho acadêmico e interesse nas áreas de Ciências Biológicas e Médicas. O programa é voltado a medalhistas de qualquer edição da OBMEP que estejam ingressando no primeiro período de cursos de graduação, em universidades públicas, sejam elas federais ou estaduais, no ano de abertura das inscrições. A iniciativa busca ampliar o acesso ao ensino superior e incentivar a formação de novos talentos científicos em áreas essenciais para a saúde e o desenvolvimento do país.

Isso denota uma valorização a disseminação e desenvolvimento do conhecimento matemático, começando na Educação Básica; reconhecimento do trabalho docente e escolar, bem como os esforços para garantir que os estudantes finalizem o Ensino Fundamental e Médio sabendo um pouco além daquilo considerado básico na Matemática, mas terminem com uma aprendizagem de qualidade, que possibilite a abertura de oportunidades ao longo de sua trajetória estudantil e, posteriormente, profissional.

Silva (2017, p. 13) destaca "[...] a forte tendência da OBMEP em oferecer aos participantes inúmeras e significativas oportunidades de experienciarem situação de aprendizado, seja na preparação, através de ações cooperativas, e até mesmo após a Olimpíada", o que permite inferir que a olimpíada é uma importante estratégia pedagógica de incentivo ao pensamento crítico, ao trabalho coletivo e à valorização do conhecimento, contribuindo efetivamente para o aprimoramento do ensino e da aprendizagem no país.

Todavia, alguns aspectos metodológicos no que tange a sua elaboração devem ser revistos. De acordo com Vilarinho (2015), durante a sua pesquisa, a partir da entrevista com um coordenador da OBMEP, o qual lhe comunicou que a olimpíada não se fundamenta em nenhuma matriz de referência.

Conforme Rabelo (2013), a matriz de referência constitui-se como um instrumento essencial que expressa os fundamentos teóricos e metodológicos que orientam o processo de avaliação em larga escala. Ela delimita os conteúdos, as habilidades e as competências a serem

[11] Disponível em: https://cienciapioneira.org/sobre/

avaliadas, servindo como base para a construção dos instrumentos de medição e para a interpretação dos resultados educacionais.

Assim, Vilarinho (2015) demonstrou preocupação com o quesito aprendizagem da competição, visto que

> [...] a inexistência da matriz pode estar colaborando para a elaboração de um instrumento que faz uma avaliação dispersa, não focada, sem deixar claro se o propósito é a criação de um instrumento focado no domínio de determinados conteúdos, não especificados em nenhum local de domínio público, ou no desenvolvimento de certas habilidades mentais importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático, tais como as capacidades de se fazer inferências dedutivas, indutivas e analógicas, entre outras (Vilarinho, 2015, p. 85).

Sendo assim, de acordo com a autora, a elaboração dos problemas a partir de uma matriz de referência permitiria uma compreensão maior dos conteúdos cobrados no exame, das habilidades necessárias para que os competidores pudessem desenvolver e como pensar matematicamente acerca das questões propostas.

Em linhas gerais, a OBMEP desempenha papel significativo no fortalecimento da aprendizagem matemática, estimulando o raciocínio lógico e a resolução de problemas de uma forma diferente da apresentada nos livros didáticos. Além de valorizar talentos, a competição promove a difusão de práticas pedagógicas inovadoras e incentiva a reflexão crítica sobre estratégias de ensino. Os números anuais de participação e desempenho refletem não apenas a abrangência do projeto em diferentes regiões do país, mas também evidenciam tendências de engajamento, aprendizado e evolução do ensino da matemática nas escolas públicas.

4 OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS

No decurso da história humana, a necessidade da utilização de objetos para representar e compreender determinadas situações do cotidiano fica evidente principalmente quando se trata da ideia de contagem. Cordas, pedras, paus e até a própria sombra feita através da luz do sol era a principal tecnologia viável que os povos antigos possuíam para contar.

Segundo Launay (2019, p. 21), alguns séculos após o quarto milênio a.C., que passaram a utilizar fichas de argila como instrumentos de contagem, com a finalidade de registrar quantidades de objetos diversos ou rebanhos, segundo seus formatos específicos e padrões simbólicos previamente estabelecidos.

Essa visão do uso de instrumentos concretos ao longo da história revela uma característica marcante da cognição humana: a necessidade de recorrer a objetos físicos para representar e organizar o pensamento. O tipo de representação mostrada anteriormente, não se limitava a um simples registro material, mas constituía uma mediação entre o mundo real e as ideias abstratas em formação. Essa prática ancestral, observada em diversas civilizações, estabelece uma ponte direta com os fundamentos da aprendizagem contemporânea, sobretudo destacando a relevância do tátil no processo de ensino e aprendizagem no contexto da Matemática.

Ao considerar o desenvolvimento do conhecimento por meio do tato, ou seja, por meio da manipulação de objetos concretos, essa perspectiva ganha destaque como estratégia metodológica que respeita os estágios do desenvolvimento cognitivo, especialmente na Educação Básica. Para Argyropoulos (2002), a construção de significados por meio da percepção tátil fundamenta-se na articulação entre a exploração das texturas e os gestos realizados durante essa interação, o que possibilita a elaboração de representações mentais de elevada complexidade.

Apesar de que, na concepção de Izar (2023, p. 63), "a visualização gera imagens mentais sem a presença física do objeto no campo visual do observado" e isso contribuir positivamente para Resolução de Problema em Matemática, a presença do objeto tátil extrapola as noções abstratas e colabora para compreensão do conteúdo, por meio de assimilações com os conhecimentos prévios dos estudantes e para o desenvolvimento de habilidades motoras e cognitivas.

Diante disso, percebe-se que o uso de recursos táteis no processo de ensino e aprendizagem dos discentes, principalmente no contexto de Resolução de Problemas, tem potencial significativo na concretização de noções e conceitos. Assim, segundo Lorenzato

(2012), o Material Manipulável enquanto categoria do Material Didático pode assumir a função de instrumento colaborativo na formação do indivíduo.

Lorenzato (2012, p. 18-19), elucida que “Material Didático (MD) é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem” e que o Material Manipulável é uma subcategoria do MD, pois “[...] permite uma maior participação do aluno [...] dinâmicos, que, permitindo transformações por continuidade, facilitam ao aluno a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem”.

Alguns autores acreditam que Material Didático, Material Manipulável, Material Concreto têm o mesmo significado e direcionam para uma definição comum. Vale (2002, p. 7) considera que Material Didático e Manipulável são “todos os materiais a que recorremos para promover o ensino-aprendizagem da Matemática”. E ainda complementa dizendo que:

> Os materiais manipuláveis são materiais concretos, de uso comum ou educacional, que permitem que durante uma situação de aprendizagem apelem para os vários sentidos dos alunos devendo ser manipulados e que se caracterizam pelo envolvimento activo (sic.) dos alunos p.e. ábaco, geoplano, folhas de papel (Vale, 2002, p. 8).

Na concepção de Reys (1982), os Materiais Manipuláveis correspondem a recursos táteis que permitem ao estudante interagir fisicamente por meio do toque, da movimentação e da manipulação. Podem consistir em objetos concretos do cotidiano ou em representações simbólicas utilizadas para ilustrar determinados conceitos. Serrazina (1991) diz que são considerados elementos mediadores do ensino — como objetos, instrumentos ou diferentes tipos de mídia — capazes de favorecer a exploração, a compreensão e a consolidação de conceitos relevantes ao longo das distintas etapas do processo de aprendizagem

Nesse sentido, os materiais manipuláveis, ao aliarem características táteis a um potencial pedagógico mediador, mostram-se elementos fundamentais no contexto de ambientes que favoreçam a aprendizagem ativa e significativa. Sua utilização permite transitar entre o concreto e o abstrato, promovendo experiências didáticas mais envolventes e contextualizadas. Essa característica os torna especialmente apropriados para espaços dedicados à experimentação e ao ensino investigativo, como é o caso do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), onde ganham ainda mais protagonismo como instrumentos facilitadores da construção do conhecimento matemático.

O Material Manipulável é um recurso presente no LEM que, na perspectiva de Lorenzato (2012, p. 6),

> Poderia ser um local para guardar materiais essenciais [...] um depósito/arquivo de instrumentos [...]; um local da escola reservado preferencialmente não só para as aulas regulares de matemática, mas também para tirar dúvidas de alunos; para os professores de matemática planejarem suas atividades [...]; um local para criação e desenvolvimento de atividades experimentais.

Isto é, qualquer espaço da escola que possibilite a construção pedagógica do saber e as interações entre professores e alunos por meio da troca de experiências e conhecimentos, que pode ser compreendido como um ambiente educativo legítimo, aquele que extrapola a sala de aula tradicional e contribui significativamente para o desenvolvimento integral dos estudantes.

Lorenzato (2012, p. 9–10), acredita que os recursos do LEM direcionados a fase educacional do Ensino Fundamental devem, além de incluir estímulos que possam ser vistos e tocados, priorizar a expansão de conceitos, a investigação de propriedades, a percepção da necessidade de utilizar termos ou símbolos, e a compreensão de algoritmos, que estejam relacionados aos fundamentos matemáticos. Ademais, o LEM precisa também oferecer materiais que desafiem o pensamento lógico-dedutivo, como paradoxos e ilusões de ótica, abrangendo os campos da aritmética, geometria, álgebra, trigonometria e estatística, promovendo, assim, um aprofundamento e refinamento das habilidades matemáticas dos estudantes.

Do ponto de vista docente, o uso desses materiais contribui para a diversificação das estratégias pedagógicas e favorece a mediação no processo ensino-aprendizagem, especialmente quando se trata de conteúdos abstratos ou de difícil compreensão, que de acordo com Moura (1992), tais recursos oferecem ao professor uma possibilidade concreta de desenvolver o raciocínio lógico, estimular a resolução de problemas e promover a aprendizagem por descoberta.

Rocha et al (2024, p. 6) corrobora com esse pensamento ao discorrer:

> Quando o professor adota uma postura alternativa nas suas aulas trazendo mecanismos diferentes para ensino de matemática, ele não só desperta a atenção dos educandos, mas transforma a sala de aula em um ambiente de aprendizagem significativo, onde o aluno passa a ser parte do processo de ensino e aprendizagem.

Entretanto, essa postura alternativa sugerida pelo autor requer do professor uma disposição para planejar atividades que vão além da simples manipulação, promovendo a reflexão, o debate e a sistematização dos conceitos. A atividade precisa fazer sentido para o aluno e produzir a sensação da descoberta de uma nova percepção acerca da situação proposta.

Isso requer do docente uma formação continuada e compreensão clara sobre o papel pedagógico desses recursos no processo de ensino e aprendizagem.

Todavia, a utilização desses recursos potencializa aspectos cognitivos e sociais por contribuir para a inclusão ao oferecer diferentes formas de representação do conhecimento matemático, especialmente para alunos com dificuldades de abstração ou com necessidades educacionais específicas. Para Fiorentini e Miorim (1990), o material concreto, ao ser manipulado em situações problematizadoras, potencializa o desenvolvimento da autonomia intelectual e do raciocínio lógico.

> Além da criatividade e do raciocínio lógico, aqueles que se propõem a trabalhar com inovação costumam apresentar características pessoais marcantes, tais como curiosidade, iniciativa, pró-atividade (sic.), persistência, abertura ao novo, autorregulação, capacidade de trabalhar de forma colaborativa e multidisciplinar (Borges; Fagundes, 2016, p. 243).

Essas características também se revelam sua significância na prática docente que envolve o uso de Materiais Manipuláveis, uma vez que sua aplicação requer planejamento criativo, adaptação constante e sensibilidade às necessidades dos alunos. Ao explorar esses recursos, o professor atua como um mediador dinâmico do conhecimento, mobilizando competências que vão além do domínio técnico da disciplina.

5 REVISÃO DE LITERATURA: RESOLUÇÃO DE PROBLEMA E MATERIAIS MANIPULÁVEIS

O presente tópico faz um estudo da literatura atual, do repositório Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que versa sobre a metodologia de Resolução de Problemas e o uso de Materiais Manipuláveis no processo de solução. A escolha desta revisão ser feita após o referencial teórico foi para compreender se os trabalhos publicados em periódicos utilizam a Resolução de Problemas como metodologia e, se sim, verificar se o embasamento teórico é sob a perspectiva de Pólya (1957) ou Onuchic et al (2014); e o motivo de escolher apenas essas duas vertentes é para reforçar os debates realizados anteriormente por meio das publicações recentes sobre o assunto.

Foram considerados os trabalhos publicados de 2014 a 2024, afim de averiguar quais trabalhos utilizaram os materiais manipuláveis em alguma das teorias de RP escolhidas para discussão neste trabalho e como eles dialogam com a temática. Para entender o tipo de estudo é interessante ressaltar que, a pesquisa feita é, acima de tudo, denominada de bibliográfica uma vez que apresenta como principal benefício a possibilidade de o pesquisador acessar e analisar uma variedade significativamente maior de fenômenos do que seria viável por meio da investigação direta (Gil, 2002).

A escolha dos trabalhos publicados nos periódicos deu-se pelo fato da relevância dos trabalhos por se tratar de pesquisas confiáveis e recentes, uma vez que é levada em consideração o uso de técnicas para garantir a qualidade do trabalho publicado no periódico, como a revisão por pares, por exemplo; a abrangência multidisciplinar, haja vista que a pesquisa devolve também resultados das mais diversas áreas que conversam sobre a temática do objeto de estudo em questão; e a atualização constante, permitindo embasar a pesquisa com autores recentes.

Esse estudo toma como base as publicações retornadas através da pesquisa realizada na plataforma, o qual foi realizado a partir de uma revisão dessas devolutivas. A pesquisa nos Periódicos CAPES teve realização no período de 10 a 18 de abril do corrente ano, referente ao uso de Materiais Manipuláveis na Resolução de Problemas, fazendo uma breve observação das considerações da literatura atual sobre a temática em questão, afim de entender como os pesquisadores dialogam acerca dessas duas temáticas, quais aspectos estão sendo considerados ao longo da pesquisa, como estão correlacionando-as e como essas discussões podem ser acrescidos no escopo do presente trabalho.

Segundo Severino (2013, p. 112), a Revisão de Literatura é o “[...] processo necessário para que se possa avaliar o que já se produziu sobre o assunto em pauta, situando-se, a partir daí, a contribuição que a pesquisa projetada pode dar ao conhecimento do objeto a ser pesquisado". Em outras palavras, pode ser compreendido como uma etapa fundamental da investigação científica, pois permite compreender o estado atual do conhecimento sobre o tema, identificar lacunas existentes, evitar redundâncias e fundamentar teoricamente a nova pesquisa, conferindo-lhe maior rigor e relevância.

As ideias de Siena et al (2024, p. 81) corroboram com as de Severino (2013), ao falar que

> A revisão de literatura é realizada por meio de pesquisa bibliográfica, tendo por base a análise do material já publicado em forma de livros, revistas, artigos, teses e dissertações. Consiste na identificação e análise do que já foi publicado sobre o tema e o problema de pesquisa e deve refletir o nível de envolvimento do autor com o tema (Siena et al, 2024, p. 81).

Entretanto, Teixeira (2023, p. 5) afirma que,

> Quando os estudos de revisão focalizam a produção mais recente é comum chamá-los de Estados da Arte, dado que alguns autores consideram que as revisões são efetuadas com o propósito de verificar o estágio teórico em que um determinado assunto se encontra na atualidade. A nosso ver, essa é uma posição equivocada, em função do caráter exploratório, parcial e subordinado das revisões em relação ao tema principal de cada trabalho.

Ou seja, para Teixeira (2023), o Estado da Arte é um tipo de pesquisa de análise da literatura que vai além da revisão dos trabalhos atuais em uma única área. As pesquisas em outros campos podem conversar com o objeto estudado através de outras perspectivas, possibilitando o surgimento de outras hipóteses por meio de fontes diversas (Gil, 2002, p. 35)

Siena *et al* (2024, p. 81) defende que, no Estado da Arte, "[...] o pesquisador procura mostrar através da literatura já publicada o que já sabe sobre o tema, quais as lacunas existentes e onde se encontram os principais entraves teóricos ou metodológicos", que é o que procura-se compreender com a presente pesquisa, se os autores dos trabalhos elencados conseguem verificar que há significância utilizar os materiais manipuláveis para solucionar problemas matemáticos, embasados em uma teoria sólida de Resolução de Problemas.

Ademais, ao fazer uma varredura no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, Santos *et al* (2020) encontra mais de 400 pesquisas que relatam fazer um Estado da Arte, mas que ao longo das respectivas pesquisas, os autores atribuem outra classificação para esse tipo de levantamento que tem sentido sinonímico ao falado aqui. Segundo ele,

> [...] as terminologias são as mais diversas: estado da questão, pesquisa bibliográfica, investigação bibliográfica, levantamento crítico, estudo exploratório bibliométrico, estudo bibliométrico, revisão sistemática, revisão de literatura, revisão integrativa, revisão narrativa, pesquisa de pesquisas, pesquisando pesquisas, estudo focado nas pesquisas, análise estilística, análise descritivo-interpretativa, análise comparativa, metassíntese, metanálise e pesquisa metateórica (Santos *et al*, 2020, p. 208).

Diante disso, a presente pesquisa será considerada uma breve revisão de literatura, condizendo com as ideias de Severino (2013) e Siena *et al* (2024) por se tratar de apenas um repositório, considerar trabalhos já publicados em periódicos nacionais considerados e avaliados pela CAPES e com a busca de obras delimitadas por parâmetros estabelecidos previamente e descritos a seguir.

Para isso, como técnica de pesquisa, foram utilizadas as palavras-chave “Materiais Manipuláveis” *and* “Resolução de problemas” para encontrar todos os trabalhos que possuem essas palavras como foco central, isto é, a ideia é encontrar trabalhos publicados nos periódicos cuja temática central possua vinculação entre alguma Teoria de Resolução de Problemas com o uso de Materiais Manipuláveis.

Ao realizar a pesquisa, foi retornado 15 publicações referentes ao período de 2014 a 2024, sendo 14 artigos de acesso aberto, 11 nacionais e 7 revisados por pares, conforme a tabela abaixo:

Tabela 3: Listagem dos artigos devolvidos da pesquisa realizada no Periódicos CAPES.

Nº	AUTOR(ES)/ANO	TÍTULO	REVISTA
01	Carneiro e Pinto (2024)	Aritmética para ensinar em manuais pedagógicos na formação de professores primários no Brasil (1930 – 1960)	Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
02	Martins *et al* (2024)	Articulações entre tendências em educação matemática e resolução de problemas	Educação Matemática em Revista
03	Rocha *et al* (2024)	O ensino de probabilidade mediado por materiais didático manipuláveis: experiências formativas	Revista Foco
04	Silva, Silva e Pietropaolo (2024)	Refletindo sobre apreensões figurais na resolução de problemas geométricos: perspectivas de alunos do 8º ano	Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática
05	Almeida e Uliana (2023)	Inventário de teses e dissertações sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática para estudantes com TEA (2000 – 2020)	REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática

Nº	AUTOR(ES)/ANO	TÍTULO	REVISTA
06	Barbosa e Costa (2023)	Análise de erros em resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos numa turma de segundo ano do ensino médio da rede pública.	Revista Paranaense de Educação Matemática
07	Oliveira (2023)	Resolução de Problemas sobre planificação do cubo: uma abordagem através de materiais manipuláveis.	Revista Baiana de Educação Matemática
08	Silva e Vieira (2023)	Explorando caminhos para o Ensino e Aprendizagem de Matemática: Contribuições da Revista Baiana de Educação Matemática	Revista Baiana de Educação Matemática
09	Duarte e Yamamoto (2022)	Trincas pitagóricas e números figurados: um enfoque histórico para o ensino do Teorema de Pitágoras	Revista Paranaense de Educação Matemática
10	Fiorentini *et al* (2021)	O estágio curricular supervisionado em Matemática nos contextos de ensino presencial remoto e híbrido – Dossiê temático.	Revista Baiana de Educação Matemática
11	Araújo e Santos (2020)*	"Eles me ajudam a não esquecer o que coloquei": o uso de materiais manipuláveis na resolução de problemas de arranjo e combinação por uma aluna com deficiência visual.	Educação Matemática em Revista
12	Silva, Cunha e Pessoa (2020)**	As faces da combinatória no cotidiano	Revista Paranaense de Educação Matemática
13	Silva e Bôas (2019)	Contribuições do uso de materiais manipuláveis como estratégia na resolução de problemas sobre o princípio multiplicativo	Ensino em foco
14	Silva, Cunha e Pessoa (2015)**	As faces da combinatória no cotidiano	Revista Paranaense de Educação Matemática
15	Vale e Barbosa (2014)	Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria	Boletim GEPEM

** O artigo não possui documento disponível para leitura na plataforma da revista.*
*** Os artigos encontram-se repetidos, mas publicados em anos distintos na mesma revista.*

Fonte: Autoria Própria.

Para essa investigação foi necessário realizar uma leitura minuciosa dos trabalhos encontrados, onde foram destacados o objetivo geral, a metodologia e os resultados obtidos nas discussões e se os pesquisadores utilizaram alguma metodologia de Resolução de Problemas pautada no seguimento de etapas ou passos coerentes, principalmente se baseados nas ideias de Pólya (1957) e Onuchic e Allevato (2012), e se, no processo, foram utilizados materiais manipuláveis para solucionar tais problemas.

O retorno da averiguação tem o intuito de registrar a frequência com que os trabalhos do Pólya (1957) e da Onuchic e Alevato (2012) são referenciados e utilizados para fins de fundamentação teórica e metodologia por essas devolutivas da pesquisa. A seguir, estão as revisões da literatura encontrada.

Em sua pesquisa denominada "Aritmética para ensinar em manuais pedagógicos na formação de professores primários no Brasil (1930 – 1960)" e publicada na Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Carneiro e Pinto (2024) traz uma análise histórica e cultural das práticas pedagógicas no ensino de Matemática, principalmente na formação de professores primários e na construção do saber ensinar na Educação Matemática brasileira, com foco na aritmética e nos manuais pedagógicos publicados entre 1930 e 1960.

O objetivo é "[...] analisar elementos dos saberes profissionais, considerando a aritmética *para* ensinar, presentes em manuais de Didática da Matemática, especificamente nos editados, no Brasil, entre 1930 e 1960", isto é, compreender como os conhecimentos profissionais e conteúdos disciplinares foram apresentados e articulados nos manuais pedagógicos de Didática da Matemática, refletindo as práticas pedagógicas, as políticas educacionais e a formação de professores ao longo do tempo, especialmente durante o auge do Movimento da Escola Nova.

Os autores abordam o tema por meio de uma análise histórico-cultural, investigando documentos pedagógicos e obras acadêmicas relacionadas à história, didática e formação de professores e dentre os resultados obtidos, os autores destacam a hipótese de:

> [...] que a profissionalização dos docentes que ensinaram aritmética nas escolas primárias no período analisado (1930 a 1960) requeria a compreensão dos distintos saberes – saberes *a* e saberes *para ensinar* –, envolvidos na formação docente e como estes foram mobilizados e se articularam na construção de um novo saber [...] (Carneiro; Pinto, 2024, p. 14).

Observando as conclusões e o restante do trabalho, pode-se notar que os autores não destinaram sua pesquisa em debater a Resolução de Problemas como uma metodologia. Foi constado por eles que, nos manuais considerados, o uso dos materiais manipuláveis e a Resolução de Problemas norteou o trabalho docente da época no contexto da Aritmética e, apesar de não estabelecerem critérios, passos e etapas de como utilizar esses materiais dentro de uma perspectiva metodológica de Resolução de Problemas, principalmente em conformidade com os quatro passos de Pólya (1957), já existente na época em que o manual "Metodologia da Matemática (1951)" havia sido lançado ou uma adaptação para a metodologia apresentada pelas autoras Onuchic e Allevato (2012) o trabalho possui sua relevância dentro da proposta utilizada.

O trabalho de Martins *et al* (2024), denominado "Articulações entre tendências em educação matemática e resolução de problemas" e publicado na Educação Matemática em Revista aborda a Resolução de Problemas a partir de uma análise das Tendências da Educação Matemática, por meio de uma revisão de literatura realizada em teses e dissertações brasileiras produzidas dentro do período de 2016 a 2020.

Com este trabalho, Martins *et al* (2024, p. 3) objetiva

> "[...] apresentar compreensões que emergiram da utilização da resolução de problemas no contexto das tendências metodológicas da Educação Matemática - Etnomatemática, História da Matemática, Modelagem Matemática, Investigação Matemática, utilização de Materiais Manipuláveis, Jogos e Tecnologias Digitais - a partir da análise de teses e dissertações brasileiras produzidas no período de 2016 a 2020".

Esse objetivo fica destacado ao longo do texto a partir das discussões realizadas em torno das Tendências em Educação Matemática quando os autores dialogam com os Materiais Manipuláveis e a Resolução de Problemas com algumas Tendências Metodológicas da Educação Matemática como, por exemplo, a Etnomatemática, História da Matemática e a Modelagem Matemática.

Os pesquisadores adotaram a metodologia de Análise Textual Discursiva (ATD) por meio da utilização do software IRaMuTeQ, que permite a identificação de categorias e tendências nas dissertações e teses baseados nos parâmetros da ATD. A ATD é uma metodologia de análise de informações que se integra ao modelo de pesquisas analisadas de forma qualitativamente por meio de duas vertentes: a análise do discurso e a análise do conteúdo. E pode ser compreendida como um método que tem início com a identificação de unidades de significado de elementos textuais como termos, frases ou parágrafos, classificado como 'unitarização', que decompõem o material analisado. Em seguida, após essa etapa exigente de imersão, ocorre a 'categorização', onde unidades com sentidos convergentes são interligadas, permitindo a elaboração de categorias analíticas em diferentes níveis de abstração (Moraes; Galiazzi, 2006).

É válido frisar que na perspectiva da Etnomatemática, a História da Matemática, o uso de tecnologias como o GeoGebra e materiais manipuláveis, os autores concluíram que estes são aliados importantes na Resolução de Problemas, auxiliando na compreensão de significados para os conceitos matemáticos e otimizando o processo de construção do conhecimento matemático.

Em sua base referencial, Martins et al (2024) concordam com as opiniões de Pólya (1957) e Onuchic e Allevato (2012) quanto a relevância da Resolução de Problemas, inclusive conversando numa perspectiva enquanto tendência da Educação Matemática. Todavia, em conformidade com os parâmetros da investigação dessa revisão, fica registrado que os pesquisadores não optaram pela utilização de ao menos uma metodologia proposta por esses pesquisadores em seu trabalho, tampouco usar os materiais manipuláveis como recurso auxiliador em alguma dessas metodologias de Resolução de Problemas, o que evidencia a revisão literária produzida.

O trabalho de Rocha et al (2024) cujo título é "O ensino de probabilidade mediado por materiais didático manipuláveis: experiências formativas" publicado na Revista Foco aborda o ensino do conteúdo de Probabilidade do Ensino Médio por meio de recursos concretos, focando em metodologias e estratégias que buscam melhorar a compreensão dos estudantes quanto a essa temática.

Segundo Rocha et al (2024, p. 4-5), o objetivo do trabalho foi "[...] verificar as contribuições do uso de materiais didático manipuláveis para o aprendizado de probabilidade com os estudantes do 2° ano do ensino médio da rede pública de ensino da cidade de Parambu-CE". Isto é, os autores se propuseram em investigar se o uso de materiais manipuláveis contribuiu para resultados mais significativos de aprendizagem em probabilidade com alunos da série supracitada, verificando o conhecimento prévio, construindo materiais, e avaliando o aprendizado após a intervenção educativa.

O estudo realizado pelos autores consistiu na aplicação de um pré-teste com o intuito de diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes; da implementação de oficinas pedagógicas com o uso de materiais manipuláveis, jogos e resolução de problemas; e na aplicação de um pós-teste para verificar os avanços obtidos. A coleta de dados foi conduzida por meio de questionários, diários de bordo, depoimentos e registros fotográficos. Os resultados revelaram uma melhora significativa na compreensão do conteúdo, evidenciada pelo aumento no percentual de acertos, que passou de 25% no pré-teste para 78% no pós-teste, indicando que a utilização de materiais manipuláveis contribuiu de forma efetiva para a aprendizagem de probabilidade (Rocha et al, 2024).

Embora Rocha et al. (2024) reconheçam o potencial dos materiais manipuláveis como recurso facilitador na busca por soluções às questões propostas, observa-se que a abordagem adotada pelos autores não se ancora em uma metodologia sistematizada de Resolução de

Problemas, estruturada em etapas ou fases definidas como, por exemplo, as metodologias de Pólya (1957) e Onuchic e Allevato (2012). E, consequentemente, embora tenham tratado do uso dos materiais manipuláveis, não discorreram a utilização desses materiais nas perspectivas metodológicas de Resolução de Problemas dos autores citados anteriormente. Entretanto, o viés adotado destaca a relevância do uso dos Materiais Manipuláveis para o desenvolvimento do conhecimento matemático dos estudantes e levanta possibilidades de aplicações.

Em seu trabalho intitulado Refletindo sobre apreensões figurais na resolução de problemas geométricos: perspectivas de alunos do 8º ano, publicado na Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, Silva, Silva e Pietropaolo (2024), apoiados na tese de doutorado de Silva (2023), procuraram entender o papel das figuras e das apreensões perceptivas e discursivas na compreensão e resolução de problemas geométricos dos alunos, que estuda a teoria de Duval (1994, 2012), que destaca o papel das figuras na resolução de problemas.

> "Duval (1994, 2012) contribui para a compreensão do papel das figuras na resolução de problemas geométricos, ressaltando os motivos pelos quais elas conseguem ou não auxiliar na resolução dos problemas. O autor considera de fundamental importância desenvolver a capacidade de criar registros semióticos, de modo a representar esses objetos e resolver as situações em que se inserem" (Silva; Silva; Pietropaolo, 2024, p. 197 *apud* Duval, 1994, 2012).

Os autores descrevem que, na pesquisa, os estudantes utilizaram materiais manipuláveis, como quadrados de papel, para montar subfiguras, calcular áreas sobrepostas e explorar as formas geométricas relacionadas ao problema proposto. Além disso, foram realizadas observações, registros em vídeo e áudio, e protocolos de resolução de problemas, tanto presencialmente quanto de forma híbrida, devido ao contexto da pandemia COVID-19 (Silva; Silva; Pietropaolo, 2024)

Os pesquisadores não se detiveram em estabelecer passos rigorosos para resolução de problemas, mas compreender como os alunos viam as figuras geométricas e quais as dificuldades na percepção e descrição para solucionar os problemas propostos, uma vez que o problema norteador da pesquisa foi "quais são as possibilidades de apreensão proporcionada a estudantes que resolveram um determinado problema geométrico?" (Silva; Silva; Pietropaolo, 2024, p. 197).

Como resultado da pesquisa, os autores concluíram que

> [...] a manipulação direta com figuras potencializa o desenvolvimento das apreensões figurais, em especial para compreender conceitos geométricos; incentiva a exploração de estratégias; estimula a visualização espacial e o raciocínio dedutivo; proporcionando aos alunos uma aprendizagem mais significativa [...] (Silva; Silva; Pietropaolo, 2024, p. 195).

Isso significa que, para os autores, o uso de figuras geométricas, enquanto recurso visual, desempenhou um papel fundamental no processo de Resolução dos Problemas propostos. Sua utilização não apenas contribuiu para a compreensão dos enunciados, como também favoreceu a mobilização de diferentes formas de apreensão figural por parte dos estudantes — dentre elas, a perceptiva, a discursiva, a sequencial e a operatória (Silva; Silva; Pietropaolo, 2024)

Embora os autores não tenham escolhido seguir a metodologia apresentada por Pòlya (1957) ou Onuchic (2012), conseguiram apresentar a Resolução de Problemas sob uma outra ótica a partir das dificuldades dos alunos na interpretação das figuras geométricas e, consequentemente, na sua resolução. Ainda, conseguiram utilizar os materiais manipuláveis como ferramenta auxiliadora no processo de compreensão do problema, o que desempenhou papel significativo na aprendizagem dos estudantes, como destaca Silva, Silva e Pietropaolo (2024, p. 205): “por meio dos comentários, o pesquisador pôde constatar que a dinâmica de trabalho com as apreensões e material manipulativo ampliou a compreensão tanto dos estudantes que já tinham resolvido corretamente a situação como dos demais”.

O trabalho de Almeida e Uliana (2023) trata-se de um “Inventário de teses e dissertações sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática para estudantes com TEA (2000 – 2020)” publicado na revista da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática – REAMEC. Eles reúnem teses e dissertações brasileiras de repositórios digitais afim de investigar os diálogos das pesquisas do período mencionado que versam sobre o processo de ensino e aprendizagem de matemática para estudantes com TEA, com foco em metodologias inclusivas, adaptações e materiais didáticos adequados (Almeida; Uliana, 2023).

Segundo os autores, o objetivo principal do trabalho é analisar as estratégias, materiais e metodologias adotadas pelos autores das dissertações e teses encontradas que favorecem a aprendizagem de Matemática por estudantes com TEA, destacando a importância da mediação docente e da adaptação de materiais.

Na investigação conduzida por Almeida e Uliana (2023), procedeu-se inicialmente à leitura exploratória dos títulos e resumos dos trabalhos identificados. Com base nessa triagem preliminar, foram selecionadas 27 produções acadêmicas, compostas por 3 teses de doutorado e 24 dissertações de mestrado. Em um segundo momento, realizou-se a leitura integral dos textos selecionados, com o intuito de aprofundar a compreensão das abordagens investigativas adotadas, bem como de identificar os elementos teórico-metodológicos mais recorrentes.

Para a análise dos dados, os autores fundamentaram-se nos pressupostos metodológicos da Análise de Conteúdo, conforme delineada por Bardin (2011), cuja proposta contempla procedimentos rigorosos de descrição e interpretação do conteúdo das mensagens. Em outras palavras, trata-se de um arcabouço metodológico composto por um conjunto estruturado de técnicas voltadas à análise das comunicações, cujo propósito é extrair, por meio de procedimentos sistemáticos e objetivamente delineados de descrição do conteúdo textual, indicadores — sejam eles de natureza quantitativa ou qualitativa — que possibilitem a inferência de saberes relacionados às condições em que as mensagens foram produzidas e/ou recebidas, considerando-se, portanto, as variáveis subjacentes a esses contextos comunicacionais (Bardin, 2011).

Em suas discussões, não optam citar as concepções de Pólya (1957) acerca da Resolução de Problemas, porém conversam com a ideia de Onuchic (1999) concernente com a concepção de que a RP pode ser interpretado como algo concreto ao considerar problemas do cotidiano e como algo abstrato, por utilizar representações simbólicas e técnicas específicas para realizar operações com esses símbolos.

Apesar disso, como o trabalho realizado é um inventário, fica evidente que os autores não se preocuparam em embasar a pesquisa em alguma teoria metodológica de Resolução de Problemas, haja vista que o intuito era realizar a reunião desses trabalhos encontrados e comentar sobre eles na ótica escolhida por eles.

Os autores Barbosa e Costa (2023) investigaram a análise de erros dos alunos de segunda série de Ensino Médio quanto a resolução de problemas de geometria espacial, dando ênfase nos conteúdos de áreas de superfícies e volumes de sólidos geométricos, os quais fundamentaram e justificaram os resultados da pesquisa na teoria de Resolução de Problemas de George Pólya (1957).

Barbosa e Costa (2023) aplicaram uma atividade diagnóstica para averiguar os conhecimentos prévios dos alunos, fizeram aulas de revisão sobre os conteúdos a serem trabalhados e depois solucionaram a atividade diagnóstica junto com os alunos, usando a estratégia de Pólya (1957). Por fim, os pesquisadores apresentaram algumas listas de exercícios, sólidos geométricos e incentivou os alunos a buscarem a solução dos problemas dessas listas.

Durante a aplicação da pesquisa, Barbosa e Costa (2023, p. 260) observaram que "[...] durante as correções, o professor estimulava a participação dos alunos, questionando-os sobre a forma que eles pensaram para resolver cada problema, construindo assim uma estratégia para a resolução de cada um deles, à luz de Pólya (1945)".

O material manipulável usado pelos autores foi a planificação de sólidos geométricos e, de acordo com o trabalho, o seu uso foi crucial na resolução dos problemas propostos, pois foi notado que antes do uso desses materiais, os alunos fizeram uma lista de exercícios diagnóstica e obtiveram resultados não favoráveis e, logo após o contato com tais materiais, obtiveram resultados mais satisfatórios em outras listas, agora solucionando em grupos de dois ou três (Barbosa; Costa, 2023).

Assim, o trabalho mostrou que uma abordagem dialógica em sala de aula, atividades em grupo e o uso dos materiais manipuláveis na resolução de problemas sob a metodologia de Pólya (1945) têm resultados significativos na construção do conhecimento matemático, investigado e explorado através do coletivismo e do protagonismo. É válido ressaltar que a relevância do trabalho não se detém exclusivamente pelo uso da perspectiva de Pólya, uma vez que não é o foco principal desta pesquisa, mas sim registrar as ocorrências desse evento.

Oliveira (2023, p. 2 – 3) realiza sua pesquisa intitulada "Resolução de Problemas sobre Planificação do cubo: uma abordagem através de materiais manipuláveis" e publicada na Revista Baiana de Educação Matemática com "[...] alunos da disciplina Metodologia do Ensino de Matemática do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), campus Paracambi" e faz o levantamento de debates acerca de métodos para ensinar o conteúdo de planificações de sólidos geométricos, especificamente o cubo, utilizando materiais manipuláveis na resolução dos problemas propostos.

Centrado no objetivo de promover reflexões e discussões sobre o ensino da planificação do cubo, utilizando materiais manipulativos e práticas experimentais, com o intuito de facilitar a compreensão dos alunos e contribuir para uma aprendizagem significativa (Oliveira, 2023, p. 16), a autora estuda como os futuros professores de Matemática aplicariam esse tipo de atividade em turmas de 6º ano do Ensino Fundamental, como prevê a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Como resultado, destaca-se que as abordagens utilizadas na realização da atividade mostraram-se válida e significativa na procura por métodos de ensino diferenciados, a fim de contribuir de forma mais relevante no processo de aprendizagem dos estudantes (Oliveira, 2023).

É importante destacar ainda que, para a autora,

> [...] Nem sempre a compreensão dos conceitos tridimensionais é imediata, então utilizar materiais manipuláveis que ajudem na visualização melhor pode fazer a diferença no ensino e aprendizagem de sólidos geométricos. Esses recursos didáticos são facilitadores para uma aula dinâmica e mais interativa, a manipulação desses materiais, além de apresentar as características do sólido, estimula a atenção dos alunos para que possam operar com mais clareza e assim perceber os detalhes (Oliveira, 2023, p. 16).

A fala da pesquisadora, evidencia a importância da visualização do problema através dos materiais manipuláveis no ensino de sólidos geométricos, uma vez que a construção concreta da figura tridimensional colabora para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, permitindo a exploração de propriedades, fixação de imagens mentais mais precisas e detalhes de forma ativa e investigativa.

E essa ideia corrobora com os pensamentos de Dienes (1973) e Bruner (2001), os quais defendem que o uso de materiais concretos no processo de ensino-aprendizagem contribui para a construção de significados, especialmente quando se respeita a progressão dos níveis de representação — do concreto ao simbólico. Esses recursos, portanto, não apenas dinamizam as aulas, como também auxiliam na formação de conceitos geométricos mais sólidos e duradouros.

Ao longo da pesquisa, constatado que a autora faz menção a algumas discussões à luz das ideias de Pólya (2006) e Allevato e Onuchic (2019) e optou por seguir a pesquisa utilizando os quatros passos da Teoria de Resolução de Problemas de Pólya (2006), como ela diz: “Para cada problema proposto, foi realizada uma reflexão pensando nas quatro fases propostas por Polya e como seria a correção de um problema como os apresentados a partir dessas fases, ou seja, como identificar em que estágio o aluno se encontra” (Oliveira, 2023, p 15).

Embora tenha citado Allevato e Onuchic (2019), a autora não se deteve aos processos metodológicos para solucionar um problema, ou seja, explorar a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, mas quis destacar a relevância de inserir os contextos de Resolução de Problemas na formação inicial dos estudantes da Educação Básica. Isso levanta questionamentos sobre os motivos da autora não ter fundamentado a metodologia da sua pesquisa nos passos de resolução de problemas de Allevato e Onuchic (2019).

Em seu trabalho denominado “Explorando caminhos para o Ensino e Aprendizagem de Matemática: Contribuições da Revista Baiana de Educação Matemática” e publicado na Revista Baiana de Educação Matemática, Silva e Vieira (2023) fazem o levantamento e a discussão dos trabalhos publicados na Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM), a qual eles têm gerido no período de 2020 a 2023, data que foi publicado o trabalho. Em sua pesquisa, eles organizam 21 trabalhos no volume 4 da revista e realizam a análise de práticas, experiências e contribuições na formação de professores de Matemática, bem como na investigação de abordagens didáticas e o uso de tecnologias no ensino da disciplina.

Em síntese, Silva e Vieira (2023) analisam os trabalhos aprovados que possuem os mais variados temas: ensino de matemática com foco na inclusão de alunos com necessidades especiais, como aqueles com síndrome de Down; metodologias inovadoras; uso de tecnologias digitais; estratégias pedagógicas; formação de professores; e práticas para superar dificuldades de aprendizagem.

Os autores dizem que a sua pesquisa se trata de um "editorial" (Silva; Vieira, 2023, p. 1) que, apesar de ser reconhecido como um tipo de texto jornalístico, no meio acadêmico pode ser compreendido como sendo um "artigo de fundo ou artigo destacado num periódico, geralmente com as ideias e opiniões da direção do periódico", segundo o segundo o Dicionário Priberam da Língua Portuguesa (DPLP)[12].

Dentre os trabalhos discutidos, Silva e Vieira (2023, p. 5) citam o trabalho de Oliveira (2023), o qual foi debatido anteriormente, o qual apresentou "[...] uma atividade experimental realizada com alunos da disciplina Metodologia do Ensino de Matemática" e que utilizou as etapas de Resolução e Problemas (RP) da Teoria de Pólya (1978) em sua pesquisa.

Dessa forma, de acordo com a metodologia usada neste artigo de Silva e Vieira (2023), pode-se inferir que eles não explanaram a utilização dos materiais manipuláveis na Resolução de Problemas, mas apresentaram brevemente a visão de alguns autores, por se tratar de um editorial. Apesar disso, pela temática e relevância da pesquisa, preferiu-se registrar para enriquecer essa discussão.

Duarte e Yamamoto (2022) desenvolveram o trabalho "Trincas pitagóricas e números figurados: um enforque histórico para o ensino do Teorema de Pitágoras", disseminado por meio da Revista Paranaense de Educação Matemática e focaram em dialogar acerca da utilização de práticas pedagógicas inovadoras no ensino de matemática, com ênfase no uso de recursos históricos, visuais, manipuláveis e tecnológicos para promover uma aprendizagem mais significativa e motivadora.

A pesquisa teve como propósito articular diferentes abordagens didático-pedagógicas — tais como a História da Matemática, a Resolução de Problemas, o uso de materiais manipuláveis e de recursos digitais — por meio de uma proposta de ensino centrada na exploração da origem aritmética do Teorema de Pitágoras (Duarte; Yamamoto, 2022, p. 505).

---

[12] **"editorial"**, *in* Dicionário Priberam da Língua Portuguesa [em linha], 2008-2025, https://dicionario.priberam.org/editorial.

Os autores abordam o trabalho por meio de uma reflexão sobre estratégias pedagógicas, destacando o uso de animações, materiais manipuláveis, discussões dialogadas, recursos multimídia e atividades investigativas, além de relatar experiências práticas e resultados obtidos com essas abordagens, os quais demonstraram-se bastante favoráveis e significativos, já que afirmaram: " Consideramos que as atividades aplicadas tenham logrado êxito: a intenção de articular os diversos recursos pedagógicos em uma só sequência didática pareceu cumprir seu objetivo, dado que foi capaz de capturar a atenção e o interesse de quase a totalidade dos alunos" (Duarte; Yamamoto, 2022, p 523).

A opinião dos autores sobre como os materiais manipuláveis podem facilitar a compreensão de conceitos matemáticos, enquanto recursos que envolvem o uso de objetos físicos, a partir das observações feitas na execução das atividades. Além disso, destacam a importância desses materiais na motivação e na investigação dos alunos, uma vez que essa abordagem não possui limitação de faixa etária e pode ser utilizada em qualquer ano escolar (Duarte; Yamamoto, 2022, p. 524).

A fins de registros, os autores ainda citam Pólya (1977) e Onuchic e Allevato (2012) para complementar sua discussão sobre a Resolução de Problemas ao longo trabalho, mas preferem não utilizar pelo menos uma de suas respectivas teorias como metodologia do trabalho, ou seja, não seguem os passos e nem os critérios para solucionar os problemas propostos na aplicação das atividades desenvolvidas.

A pesquisa de Fiorentini et al (2021) intitulada de "O estágio curricular supervisionado em Matemática nos contextos de ensino presencial remoto e híbrido – Dossiê temático" e publicada na Revista Baiana de Educação Matemática é realizada no formato de editorial e faz um apanhado dos trabalhos desenvolvidos ao longo do Estágio Curricular Supervisionado em Matemática

> "[...] que foi desenvolvido em diferentes contextos de ensino presencial, remoto e híbrido, totalizando 26 trabalhos, sendo 19 Artigos e sete (7) Relatos de Experiência. Esses estudos foram produzidos por pesquisadores e pesquisadoras de instituições públicas e privadas, provenientes de todas as regiões do país" (Fiorentini *et al*, 2021, p. 1)

Ao fazer a reunião desses trabalhos, os autores apontam as ações, experiências e desafios enfrentados na realização do Estágio Curricular Supervisionado em Matemática, especialmente no contexto do ensino remoto, emergencial ou híbrido, ocasionado pela pandemia de COVID-19, considerando as práticas pedagógicas, formação de futuros professores e as condições de trabalho dos envolvidos.

O objetivo da pesquisa de Fiorentini et al (2021), apesar de não está destacado no trabalho, é a promoção de uma reflexão acerca das ações empreendidas, dos desafios enfrentados e das estratégias delineadas no contexto da formação de professores de Matemática durante o período pandêmico, com ênfase na vivência e na ressignificação do estágio supervisionado.

Os autores se detiveram apenas apresentar e discutir brevemente os trabalhos desenvolvidos durante o Estágio Curricular Supervisionado tratando de questões como condições de trabalho, estratégias adotadas, dificuldades enfrentadas e as diferentes perspectivas dos envolvidos (estudantes, supervisores, professores).

Todavia, apesar dos estudos discutirem a adoção da Resolução de Problemas no ensino remoto emergencial, com o intuito de promover a aula de matemática como um espaço de investigação, leitura, escrita e socialização de estratégias de resolução, não houve uma explanação acerca da Resolução de Problemas baseado em alguma teoria metodológica para as atividades desenvolvidas no ambiente escolar.

Ao realizar a pesquisa no portal dos Periódicos CAPES, o trabalho de Araújo e Santos (2020), intitulado "Eles me ajudam a não esquecer o que coloquei": o uso de materiais manipuláveis na resolução de problemas de arranjo e combinação por uma aluna com deficiência visual", publicado na Educação Matemática em Revista, foi o primeiro a ser retornado. Todavia, ao entrar no site da revista, até a data da pesquisa, o documento não se encontrava disponível completo para leitura, estando apenas o resumo do trabalho. Isso inviabilizou a leitura e análise do trabalho para as discussões deste capítulo. Ainda foi tentado pesquisar em outros repositórios ou até mesmo em outros sites, mas não foi obtido sucesso na busca.

Ao realizar a pesquisa nos periódicos da CAPES usando a metodologia descrita anteriormente, constatou-se que o trabalho de Silva, Cunha e Pessoa obteve dois retornos do mesmo trabalho, isto é, o artigo "As faces da combinatória no cotidiano" foi publicado na Revista Paranaense de Educação Matemática, nos anos de 2015 e 2020, pelos mesmos autores. Para fins de citação, será considerado o ano da primeira publicação que foi 2015.

De acordo com o artigo, os autores se detiveram à aplicação prática e pedagógica da combinatória no cotidiano, enfatizando o uso de materiais manipuláveis e contextos reais para facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos, especialmente as operações combinatórias como produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação (Silva, Cunha e Pessoa, 2015).

O objetivo principal da pesquisa de Silva, Cunha e Pessa (2015), embora apresentado apenas no resumo do trabalho, é a promoção para uma compreensão mais efetiva dos conceitos de combinatória por meio da elaboração e resolução de problemas com materiais manipuláveis e exemplos cotidianos, estimulando a capacidade dos alunos de organizar, elaborar e resolver problemas relacionados ao raciocínio combinatório. Segundo eles, "[...] a oficina aqui relatada pretendeu trabalhar problemas combinatórios (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação) e estimular a capacidade de organizar e elaborar problemas que envolvam o raciocínio combinatório" (Silva, Cunha e Pessoa, 2015, p.225).

Os autores desenvolvem seu trabalho por meio da descrição de oficinas pedagógicas nas quais os participantes resolvem problemas combinatórios com o auxílio de materiais manipuláveis. Durante essas atividades, são discutidas as estratégias utilizadas, as dificuldades enfrentadas, bem como realizadas a classificação e a caracterização dos distintos tipos de problemas. Os autores enfatizam a relevância de contextualizar os problemas em situações próximas ao cotidiano dos alunos, com o intuito de facilitar a compreensão e promover o trabalho em grupo, por meio do uso de cartões ilustrativos a partir da categorização dos problemas com base em critérios propostos por outros pesquisadores da área.

É válido frisar que Silva, Cunha e Pessoa (2015) utilizam a classificação dos problemas de raciocínio combinatório proposta por Pessoa e Borba (2009), a qual distingue os problemas em quatro categorias: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. Tal categorização contribui para uma melhor organização e análise das estratégias adotadas pelos participantes nas oficinas, possibilitando uma compreensão mais precisa das estruturas lógicas envolvidas em cada tipo de problema.

No entanto, observa-se que o estudo dos pesquisadores não se ancora explicitamente em uma teoria consolidada de Resolução de Problemas, o que limita a profundidade da análise teórica. Os autores optam por concentrar-se na descrição e discussão das etapas de desenvolvimento da oficina, priorizando aspectos práticos de sua implementação — desde a concepção das atividades até a aplicação em sala —, com ênfase na observação das interações entre os participantes, nos recursos didáticos empregados e nos resultados obtidos a partir da experimentação.

Voltado para a ementa de Matemática do Ensino Médio, os autores Silva e Bôas (2019), em seu trabalho intitulado "Contribuições do uso de materiais manipuláveis como estratégia na resolução de problemas sobre o princípio multiplicativo" publicado na Revista em Foco, desenvolveram sua pesquisa visando analisar a forma de como a utilização de materiais manipuláveis pode contribuir para a resolução de problemas relacionados ao Princípio Fundamental da Contagem, com a intenção de tornar as aulas mais atrativas e favorecer uma aprendizagem mais significativa e divertida dos conteúdos de Análise Combinatória.

Os autores escrevem que os participantes da pesquisa foram convidados a resolver os problemas propostos do assunto de Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e que, apesar de nem todos chamados participaram efetivamente, os que fizeram as tarefas propostas se dedicaram fielmente ao experimento (Silva; Bôas, 2019)

Apesar do título do trabalho indicar a Resolução de Problemas como parte integrante da pesquisa, os autores optaram por não fundamentar a pesquisa em alguma metodologia que estabelecesse um alicerce sólido para se apoiar no momento da experimentação. Apenas propuseram as questões, ora os estudantes resolvem usando materiais manipuláveis, ora não (Silva; Bôas, 2019).

É relevante salientar que, dentre os problemas propostos, um deles foi retirado de uma apostila preparatória para OBMEP do autor Paulo Cezar Pinto Carvalho[13] que trata sobre os Métodos de Contagem. Silva e Bôas (2019) não citam tal documento, mas utilizam um problema dele que trata sobre sentar crianças em cadeiras ordenadas e, ao sugestionar para os alunos, viram que mesmo com dificuldades aritméticas ao resolver o desafio no papel, os alunos conseguiram compreender melhor o problema usando o material manipulável. Assim, é válido afirmar que a manipulação do problema por meio de materiais concretos teve eficácia no processo de compreensão e, consequentemente, na aprendizagem.

No trabalho de Vale e Barbosa (2014, p. 8), "Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria, publicado no Boletim GEPEM, as autoras visam compreender o desempenho de futuros professores na utilização de materiais manipuláveis, especialmente papel, para trabalhar conceitos de geometria, promovendo uma aprendizagem mais significativa e explorando diferentes estratégias de resolução de problemas.

A aplicação da pesquisa teve como público-alvo professores de 2º ciclo (que trabalham com alunos de 3 a 12 anos) aos quais foram apresentadas algumas situações problemas que envolviam a manipulação de papeis para se trabalhar algum conceito geométrico. Para isso, os participantes foram analisados quanto ao desempenho com o uso desses materiais em contextos de ensino do Ensino Fundamental, a fim de destacar a importância de uma preparação cuidadosa e de uma abordagem ativa, construtivista e exploratória na formação docente (Vale; Barbosa, 2014).

---

[13] Formou-se em Engenharia Civil pelo Instituto Militar de Engenharia (IME) em 1975. Em 1980, ele obteve o título de Mestre em Estatística pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Em 1984, concluiu seu doutorado em Pesquisa Operacional pela *Cornell University*. Ele é Pesquisador Associado no IMPA, onde atua desde 1979. Atualmente, é consultor da TecGraf (na PUC-Rio), da Fundação Cesgranrio e do Colégio Bahiense. e membro do Comitê da Olimpíada Brasileira de Matemática, que promove competições matemáticas no Brasil. Fonte: https://w3.impa.br/~pcezar/bio.html.

Isso gerou alguns debates acerca do uso dessa metodologia de ensino em sala de aula, que gerou ideias de aplicações em outras etapas da Educação Básica, como afirmam Vale e Barbosa (2014, p. 13):

> Nesse sentido, foi referido que esta tarefa poderia promover o recurso a várias representações (concreta, pictórica, gráfica) e poderia ser explorada até ao ensino secundário com recurso à calculadora como aplicação da função exponencial. Os alunos evidenciaram satisfação ao constatar que uma proposta de trabalho tão simples e interessante poderia aglomerar tantas idéias (sic.) matemáticas. Foi-lhes referido que esta é uma das finalidades da matemática, que os alunos consigam matematizar situações desta natureza.

Ainda é válido ressaltar que a pesquisa de Vale e Barbosa (2014) não focou em discutir alguma teoria de Resolução de Problemas para fundamentar sua pesquisa, pois apesar da proposição de problemas, as autoras se detiveram em apenas discutir acerca dos materiais manipuláveis, a sua utilização na resolução de problemas de geometria plana e como isso poderia ser trabalhado em sala de aula.

Ao longo das investigações realizadas nas pesquisas debatidas até o presente momento, notou-se que apenas um trabalho utilizou a metodologia de Resolução de Problemas definida por Pólya (1945), nenhuma pesquisa se apropriou da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas da Onuchic e Allevato (2012), um trabalho citou outra teoria de Resolução de problemas e a maioria optou por não utilizar uma das metodologias dos autores citados neste parágrafo, conforme ilustra a tabela abaixo.

Tabela 4: Frequência do uso da Teoria de Resolução de Problemas como metodologia.

TEORIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	
METODOLOGIA	**UTILIZADA POR**
Teoria de Resolução de Problemas Pólya (1945)	Barbosa e Costa (2023)
Teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas Onuchic e Alevato (2012)	-
Teoria do uso da semiótica para Resolução de Problemas Duval (1994)	Silva, Silva e Pietropaolo (2024)

METODOLOGIA	UTILIZADA POR
Não utiliza nenhuma teoria de Resolução de Problemas como metodologia/não consta	Carneiro e Pinto (2024) Martins *et al* (2024) Rocha *et al* (2024) Araújo e Santos (2020) Almeida e Uliana (2023) Oliveira (2023) Silva e Vieira (2023) Duarte e Yamamoto (2022) Fiorentini *et al* (2021) Silva, Cunha e Pessoa (2020, 2015) Silva e Bôas (2019) Vale e Barbosa (2014)

Fonte: Autoria própria.

Portanto, diante das pesquisas analisadas, em sua maioria, não adotaram explicitamente as metodologias de Resolução de Problemas propostas pelos autores Pólya (1945) ou Onuchic e Allevato (2012), que têm grande destaque na área. O intuito das discussões levantas na “breve análise” realizada em cada artigo, foi apenas registrar as ocorrências do uso dos Materiais Manipuláveis ancorado em uma das duas metodologias de Resolução de Problemas escolhidas para pesquisa.

Os resultados obtidos destacam que há uma grande lacuna; ou uma preferência por abordagens alternativas ou não sistematizada no uso de Materiais Manipuláveis dentro de uma visão de Resolução de Problemas estruturadas em etapas ou passos. Isso também abre possibilidades para que novas pesquisas nessas áreas possam surgir.

6 METODOLOGIA DA PESQUISA

Quanto à natureza desta pesquisa, considera-se aplicada tendo em vista que "objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos" (Prodanov; Freitas, 2013, p. 51). Já a abordagem é classificada como qualitativa uma vez que "considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números" (Prodanov; Freitas, 2013, p. 70). Ou seja, isso corrobora com as discussões acerca da necessidade dos conhecimentos prévios dos alunos e dos resultados obtidos fazendo ligações entre abstração e o concreto, utilizando como ponte, os materiais manipuláveis.

Quanto aos objetivos, entende-se como um misto de exploratória por "proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses" (Gil, 2002, p. 41) e descritiva, porque "[...] visa a descrever as características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis" (Prodanov; Freitas, 2013, p. 52).

Já em relação aos processos metodológicos classifica-se como um misto entre a pesquisa bibliográfica por conta da revisão de literatura, por Gil (2002, p. 44) defender que esse tipo de pesquisa "[...] é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos"; e a pesquisa de campo que consiste na investigação realizada diretamente no local onde o fenômeno ocorre, com a finalidade de obter informações ou conhecimentos que permitam esclarecer um problema ou verificar uma hipótese previamente formulada (Prodanov; Freitas, 2013).

As fontes de pesquisa utilizadas para embasar e referenciar as ideias presentes neste trabalho foram acessadas nos Periódicos CAPES e Banco Digital Brasileiro de Teses e Dissertações (BDTD); livros físicos dos principais autores e dos demais; sites oficiais, principalmente o da OBMEP que contém as informações mais confiáveis; e, artigos de revistas.

A curadoria deste material foi realizada considerando a temática central do trabalho, a fim de assegurar a relevância e a profundidade das discussões. Levou-se em conta, principalmente, a necessidade de apresentar uma diversidade de opiniões, que, embora distintas em alguns pontos, compartilham uma mesma perspectiva teórica, contribuindo para um entendimento mais amplo e enriquecido dos debates propostos.

A metodologia adotada se baseia na concepção de Resolução de Problemas da teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas de Onuchic e Allevato (2012), que trata de dez passos sistemáticos para se resolver um problema com mais convicção da validade de sua solução, possibilitando ocorrer, no ambiente da sala de aula, os três pilares da teoria: o ensino, a aprendizagem e a avaliação.

Entretanto, a metodologia proposta neste trabalho acrescenta um passo aos dez já descritos por Onuchic e Allevato (2012), que é o da **demonstração no material manipulável**, que está inserido entre o "registro das soluções na lousa" e a "plenária". Ao solucionar o problema na lousa, o estudante representante do grupo, apresentará a estratégia utilizada para se chegar à resolução utilizando o material manipulável determinado, no caso o Geoplano. A forma como cada aluno utilizará pode variar de acordo com a estratégia tomada, já que podem usar o material, por exemplo, para reproduzir uma forma geométrica; compreender quais lados de uma figura são congruentes; mudar a posição de figuras (ou girá-las); raciocinar acerca de ângulos; dentre outras possibilidades.

Figura 4: Ampliação da teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Fonte: Autoria própria.

A palavra "demonstração" pode causar espanto, à priori, mas está sendo considerada com o intuito de representar a resolução de um problema por meio do material concreto – que é entendido aqui como Material Manipulável – uma vez que essa relação entre as demonstrações em Matemática e os Materiais Manipuláveis muitas vezes não é considerada na literatura (Bispo; Assis, 2021).

A partir do acréscimo da teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a proposta do presente trabalho é a criação de um Caderno de Atividades referente à prova da OBMEP, edição 2024, fase 1, nível 2, destinada aos alunos dos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental onde foram selecionados seis problemas para este caderno e cada questão da olimpíada é tratada por meio da metodologia adotada.

Ao pensar neste caderno, buscou-se investigar inicialmente como os Materiais Manipuláveis poderiam auxiliar na Resolução de Problemas – sem necessariamente basear em uma teoria metodológica – e se essa perspectiva poderia gerar resultados positivos. Dessa forma, foi trabalhado em uma escola do município de Fortaleza – CE um projeto que visava solucionar problemas das provas anteriores da primeira fase da OBMEP, nível 2, por meio de materiais manipuláveis.

O projeto teve como público-alvo os alunos dos 8º e 9º anos da escola, dos turnos matutino e vespertino, aos quais foram propostos – uma vez por semana durante quatro meses – três problemas para serem solucionados de duas maneiras: a primeira, apenas com seus conhecimentos prévios e a segunda construindo e usando um material manipulável auxiliador, proposto no próprio problema (ver anexo). Os problemas selecionados apresentavam situações que possibilitava a criação de um recurso auxiliador para sua solução. A culminância do projeto foi a realização da I Feira de Matemática da escola, onde os alunos das séries participantes construíram jogos centrados no raciocínio lógico e/ou conteúdos matemáticos.

É importante apresentar que, ao longo das aulas de proposição dos problemas, nas 7 turmas participantes, mais de 60% dos 39 alunos de cada turma demonstraram interesse na atividade proposta, principalmente diante da maneira que foi apresentada; e na I Feira da Matemática, a participação dos alunos foi bastante significativa. A tabela abaixo mostra a quantidade de jogos criados pelos alunos de cada turma e turno.

Tabela 5: Quantidade de jogos e alunos que apresentaram jogos na I Feira de Matemática.

TURMA	TURNO	QUANTIDADE DE JOGOS	QUANTIDADE DE PARTICIPANTES
8º ano A	Matutino	9	26
8º ano B	Matutino	9	35
9º ano A	Matutino	10	30
	Vespertino	6	20
9º ano B	Matutino	7	19
	Vespertino	8	27
9º ano C	Vespertino	4	20

Fonte: Autoria própria.

Como a participação dos alunos e os resultados foram satisfatórios – no sentido de engajamento –, foi decidido criar o Caderno de Atividades baseado em um acréscimo à abordagem da Teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, onde o caderno está estruturado da seguinte forma: começa com a proposição dos Materiais Manipuláveis que serão utilizados para solucionar os problemas, bem como algumas instruções de como construí-los. Os modelos que possuírem versão impressa, serão inseridos como anexo no caderno. Em seguida, vem a apresentação dos problemas por meio da metodologia adotada no formato de sequência didática. Cada sequência didática possui: o enunciado da questão; os espaços para registrar as compreensões das leituras realizadas (individuais e coletivas), a resolução do problema e as dicas e sugestões dadas pelo professor; a pausa determinada para que os estudantes realizem os registros das soluções na lousa, demonstração da solução no Material Manipulável, a plenária e chegar a um consenso da solução que mais se parece com a correta; a formalização do conteúdo trabalhado na respectiva questão, de maneira sucinta; e, por fim, a proposição de novos problemas semelhantes ao problema trabalhado. O leitor pode conferir o caderno nos apêndices da presente pesquisa.

7 DISCUSSÕES SOBRE O PROJETO DESENVOLVIDO E O CADERNO DE ATIVIDADES

O presente capítulo trata, inicialmente, das discussões referentes a aplicação do projeto em uma escola de Fortaleza – CE, que utilizou os materiais manipuláveis para solucionar os problemas de provas anteriores da OBMEP. Ao longo do tópico, serão abordados o público alvo, o período de execução do projeto, a metodologia adotada de forma detalhada, os debates relativos aos resultados obtidos e as considerações finais.

Já na segunda subseção, o autor destaca o material produzido, apresentando algumas características relevantes do caderno de atividades e discorre acerca das possibilidades docentes de se trabalhar os problemas da OBMEP, cujo material manipulável proposto é o Geoplano. Nessa parte, são dadas sugestões de possíveis questionamentos e atitudes que o docente pode ter ao aplicar o material seguindo a teoria metodológica adotada.

7.1 O uso de Materiais Manipuláveis na Resolução de Problemas da OBMEP

Diante do observado ao longo do ano de 2023, foi constatado que uma amostra significativa dos alunos da escola demonstrou interesse pela OBMEP. Em paralelo a isso, foi notado também que os rendimentos em Matemática refletidos através das avaliações internas e externas decresceram de forma significativa. Todavia, estratégias metodológicas vêm sido tomadas para não somente transformar essa realidade de forma positiva, mas para que estes alunos possam obter êxito nas avaliações internas, externas, chegar no ensino médio com uma base em Matemática bem fundamentada e, ainda, conquistar a tão sonhada medalha na OBMEP.

Para isso, esse projeto é pensado como uma forma de desenvolver alguns assuntos importantes e o pensamento matemático em todos os alunos contemplados afim de que haja uma aprendizagem, uma vez que “a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor” (Onuchic et al, 2014, p. 40).

Apesar da escola não ter um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), segundo Lorenzato (2012, p. 6), o laboratório, não necessariamente precisa ser um espaço físico no ambiente escolar, mas algo ou algum lugar que propicie o armazenamento e a conservação dos materiais desenvolvidos ou necessários para auxiliar na compreensão do conteúdo matemático, para que, quando aplicado, haja aprendizagem.

Quanto aos materiais, “devem compor o LEM aqueles materiais que desafiam o raciocínio lógico-dedutivo (paradoxos, ilusões de ótica) nos campos aritmético, geométrico, algébrico, trigonométrico e estatístico (Lorenzato, 2012, p. 10)”.

Segue, então, uma descrição da experiência inovadora do projeto "Matemática e OBMEP: uma prática inclusiva com Materiais Manipuláveis". Realizado com o objetivo de desenvolver conceitos importantes da Matemática, por meio da construção de materiais manipuláveis, com o intuito de auxiliar na Resolução de Problemas da OBMEP, o projeto explorou o potencial dos materiais manipuláveis como ferramentas para a construção do conhecimento matemático.

O público-alvo foi definido de acordo com a classificação que a equipe da OBMEP define para o nível 2, que são as turmas de 8º (oitavo) e 9º (nono) anos. No caso da escola, foram escolhidas as duas turmas de 8º ano do turno matutino (A e B), as duas turmas de 9º ano do turno matutino (A e B) e as três turmas do 9º ano do turno vespertino (A, B e C).

O projeto aconteceu todo em sala de aula e foi dividido em alguns momentos:

- ***1º Momento:*** *Apresentação.*

Durante este momento, foi explicado o que iria acontecer nas próximas aulas, um panorama dos conteúdos trabalhados e de como iriam acontecer as atividades relativas ao projeto. Foi explicado que algumas aulas seriam utilizadas para execução das atividades do projeto, mas que estariam de acordo com a ementa da sua respectiva série. Foram necessárias duas aulas em cada turma para explicar todo o projeto, um pouco acerca das atividades e do que os alunos precisariam trazer nas aulas seguintes.

- ***2º Momento:*** *Simulado introdutório.*

Neste momento, foi realizado um simulado de questões da OBMEP, contendo questões do nível 2, de até 5 (cinco) anos anteriores, das quais contiveram os assuntos mais diversos de geometria plana, geometria espacial e operações aritméticas que, mais adiante no projeto, eles irão perceber que é possível resolvê-las usando algum material manipulável. Foi destinada duas aulas em cada turma.

- ***3º Momento:*** *Revisão.*

Neste momento, foi realizada uma revisão de alguns conteúdos necessários de geometria, álgebra, trigonometria e aritmética para solucionar os problemas e apresentação de algumas questões da OBMEP e dos materiais construídos para auxiliar na resolução. Foi destinada quatro aulas em cada turma.

- ***4º Momento:*** *Resolução das atividades.*

Cada aula, o professor entregou aos alunos uma atividade contendo três questões da OBMEP para que eles pudessem ler, interpretar, resolver matematicamente e, por fim, resolver utilizando um material manipulável. Foi destinada 14 aulas em cada turma. Algumas das atividades trabalhadas em sala seguem nos anexos.

- ***5º Momento:*** *Reteste.*

Neste momento, os alunos fizeram o primeiro reteste de acordo com o primeiro simulado introdutório. As questões foram as mesmas, mas dessa vez eles tiveram, junto com o simulado, alguns materiais para resolver os problemas propostos. Foi destinada 2 aulas em cada turma.

- ***6º Momento:*** *Culminância.*

A culminância do projeto ocorreu através da I Feira da Matemática, onde todos os alunos dos 8º e 9º anos da escola, contemplados pelo nível 2 da OBMEP, apresentaram para os demais alunos da escola – do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental – com o intuito de mostrar um pouco do que foi desenvolvido e as possibilidades da Matemática para além de uma disciplina conteudista. Foi destinada quatro aulas em cada turma.

Ocorrido no período de agosto à dezembro do ano de 2024, destacam-se dentre os resultados obtidos com o projeto, o primeiro deles pode-se comentar a melhora significativa no rendimento escolar dos alunos, tanto na disciplina propriamente dita, quanto nas avaliações externas da escola e internas do município, como é o exemplo da Avaliação Diagnóstica de Rede (ADR), que analisa os rendimentos dos alunos da rede por meio de três provas diagnósticas – inicial, intermediária e final – nos componentes de Português e Matemática.

Diante dos dados obtidos no ano de 2024, é possível fazer um comparativo das ADR's, e assim notar que todas as turmas obtiveram um rendimento bastante significativo na ADR da etapa final em comparação as demais ADR's. Segundo os dados do Sistema de Avaliação do Ensino Fundamental (SAEF) de Fortaleza (2024), é possível destacar que turma do 9º ano B do turno matutino, no corrente ano, se sobressaiu e alcançou o percentual de rendimento de 50,73% em Matemática na ADR da etapa final, superando as médias dos 9º anos da própria escola (41,36%), do Distrito de Educação 05 (50%) e de todas as escolas da própria rede municipal (47,71%).

O segundo resultado foi o recebimento positivo do projeto para com os alunos, haja vista que, segundo relatos deles, perceberam a aula mais dinâmica e divertida, uma vez que o foco da transmissão do conhecimento não era mais restrito a lousa, mas todo ambiente da sala de aula foi palco do protagonismo dos alunos. Muitos vieram dizer que poderiam haver mais aulas nesse formato e afirmaram que conseguiram aprender os nomes das formas geométricas – nas atividades que envolveram o Tangram – além de vários outros conteúdos.

Ainda é válido destacar que os alunos laudados com alguma deficiência, que participaram do projeto, se sentiram mais acolhidos e à vontade ao longo das aulas, como também demonstraram um avanço na socialização e na coordenação motora, uma vez que muitas das atividades consistiram em cortar papeis para construir os materiais para resolução dos problemas propostos.

Como terceiro resultado, os alunos que participaram das aulas de modo afinco, tiveram a oportunidade de explorar um pouco mais do universo contido no site do Clubes de Matemática da OBMEP e as potencialidades que o site oferece. Eles encontraram desafios, jogos online, materiais para estudo e muito mais (OBMEP, 2010). Deste site, eles retiraram as ideias para culminância do projeto.

E, por fim, como um último resultado, a culminância do projeto acarretou na I Feira da Matemática da escola: os alunos se dividiram em grupo – e alguns até mesmo individual – criaram e confeccionaram jogos e desafios matemáticos baseados em tudo que foi trabalhado durante o projeto. Essa feira aconteceu na própria escola, na semana de 02/12 a 05/12, nas turmas de 8º e 9º anos.

Cada sala apresentou em média 10 trabalhos, os quais foram avaliados pelo professor do projeto e por outros professores da escola. A apresentação dos alunos aconteceu nas suas respectivas salas e contou com a visitação das demais salas: desde o fundamental 1 (1º ao 5º ano, dos dois turnos), para incentivar as crianças a ingressarem no maravilhoso mundo da Matemática, como também as demais turmas do fundamental 2 (do 6º ao 9º ano). A Feira contou com premiação para os três trabalhos melhores avaliados da escola.

Ainda como resultado, é que a feira acarretou na produção de dezenas de desafios e jogos matemáticos que comporão o Laboratório de Ensino de Matemática da escola que, na presente data, encontra-se inexistente. Porém, a criação do espaço na escola é um desejo do professor autor deste trabalho e que, após uma curadoria dos materiais apresentados, incluirá parte desses trabalhos como recurso didático-pedagógico ao Laboratório de Ensino de Matemática afim de contribuir no processo de ensino e aprendizagem em Matemática dos discentes da escola.

E, por fim, é válido registrar uma das participantes do projeto foi medalhista de bronze a nível regional e recebeu certificado de menção honrosa a nível nacional. Apesar de uma única aluna ser premiada, conseguir despertar em jovens o interesse pela Matemática num período pós-pandêmico, mesmo diante das dificuldades, foi uma conquista bastante significativa.

Isso ainda acarretou na redução na abstenção dos alunos na 2ª fase da OBMEP. Em comparação ao ano anterior, houve uma queda significativa nas ausências, indicando maior motivação e envolvimento dos estudantes com a competição. Embora os resultados finais ainda estejam pendentes, esse indicador já reflete uma mudança positiva no comportamento dos alunos.

Diante dos resultados notáveis obtidos, o projeto pôde impactar diretamente o desempenho acadêmico e o engajamento dos alunos com a Matemática, com uma abordagem inovadora e inclusiva, o que possibilitou a criação de um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e significativo, evidenciado pelo aumento do rendimento escolar, tanto nas avaliações internas quanto externas. A realização da I Feira de Matemática consolidou a proposta pedagógica ao unir criatividade, prática e socialização, gerando impacto positivo não apenas nas turmas participantes da visão macro, mas em cada aluno que se dedicou e participou com proatividade e protagonismo durante a execução do projeto, e também os das demais séries da escola, incentivando o interesse pela disciplina desde os anos iniciais.

Além dos resultados imediatos, o projeto mostrou potencial na promoção de mudanças estruturais na maneira como a Matemática é abordada no ambiente escolar. A redução das abstenções na 2ª fase da OBMEP, por exemplo, demonstra maior envolvimento dos alunos e sinaliza um caminho promissor para competições futuras. De maneira análoga, a exploração de recursos digitais, como o Clube de Matemática da OBMEP, aponta para a relevância de integrar tecnologias e materiais complementares no ensino, ampliando horizontes e possibilitando novas formas de aprendizado.

O sucesso deste projeto reforça a importância de dar continuidade e ampliar o alcance de trabalhos na mesma temática, construindo um legado educacional sólido e inspirador. Como projetos futuros, será buscado ampliar o projeto de modo a criar o Laboratório de Ensino de Matemática da escola e que este espaço seja de reflexão acerca dos assuntos da Matemática, de aprendizagem, inspiração e também de criação.

No próximo tópico, serão apresentados os cadernos de atividades desenvolvidos para os alunos e professores, no intuito de ajudá-los na preparação para OBMEP, bem como as questões do exame utilizadas para compor os materiais.

7.2 Caderno de Atividades: Resolução de Problemas da OBMEP

7.2.1 Conhecendo o Caderno de Atividades: estudantes e professores

O Caderno de Atividades do estudante foi pensado exclusivamente para os alunos utilizarem em sala de aula, baseado numa ampliação da Teoria de Resolução de Problemas proposta pela Onuchic e Allevato (2012), seguindo os passos de Resolução de Problemas acrescido um passo, envolvendo o uso de Materiais Manipuláveis, conforme está descrito na metodologia deste trabalho.

O caderno foi produzido através da plataforma de *design* gráfico *online* Canva[14] e o leitor pode conferi-lo integralmente nos apêndices deste trabalho. A capa do caderno, embora de caráter minimalista, foi elaborada com o intuito de incorporar elementos geométricos que organizassem visualmente informações essenciais, tais como o título principal, a temática central, a edição da prova da OBMEP utilizada e a identificação do autor, conforme as convenções normalmente adotadas.

Figura 5: Capa do Caderno do Estudante.

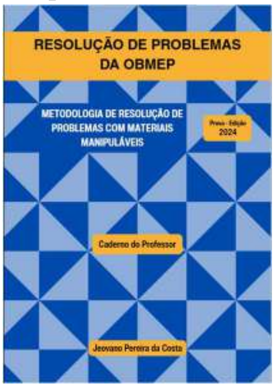
Fonte: Autoria própria.

Os elementos que compõem o caderno de atividades do estudante são: a apresentação do caderno, que descreve os aspectos gerais da proposta; os materiais manipuláveis sugeridos em cada problema, contendo uma breve explicação sobre o que se trata, o criador – quando necessário –, a listagem dos recursos necessários para confeccioná-los e as etapas da construção; os problemas propostos, que são as vinte questões da prova da primeira fase da OBMEP, nível 2, edição 2024, sendo cada um estruturado dentro da perspectiva teórica-metodológica adotada; e, por fim, o gabarito final dos problemas, bem como dos novos problemas propostos.

Já o caderno do professor contém as mesmas páginas que o caderno do aluno traz, todavia, algumas sugestões de questionamentos – sendo alguns deles descritos ao longo das discussões dos problemas, ainda nesse capítulo –, de soluções escritas de todos os problemas apresentados e ainda a sugestão de solução do problema por meio do material manipulável Geoplano. A capa do caderno do professor segue abaixo.

[14] Disponível em: canva.com.

Figura 6: Capa do Caderno do Professor.



Fonte: Autoria própria.

Na parte da proposição dos problemas, segue a sequência proposta pela teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, acrescida a etapa da demonstração da solução com – ou no – Material Manipulável. Então, estruturalmente, o problema é apresentado e, em seguida, o material a ser utilizado para auxiliar na resolução do problema.

Junto à proposição do material, vem algumas sugestões de como considera-lo na construção da solução do problema. Em seguida, traz espaços destinados às impressões compreendidas a partir das leituras individuais e coletivas, com o propósito de ajudar a guardar as ideias para reflexão dos caminhos a serem traçados. Ademais, destina-se o espaço para a resolução do problema propriamente dito. Seguem-se as dicas e sugestões fornecidas pelo mediador da atividade, o docente da disciplina. Os alunos registram suas soluções na lousa, de acordo com seus respectivos grupos. Em seguida, ocorre a demonstração da solução utilizando o Material Manipulável, diante de toda a turma.

Adiante, Realiza-se a plenária e a busca pelo consenso, de modo que a formalização do conteúdo seja dialogada e escrita pelo mediador. Por fim, a atividade se encerra com a proposição de outros problemas da OBMEP relacionados ao problema inicial, que podem ser resolvidos utilizando o mesmo Material Manipulável.

7.2.2 Possibilidades docentes com o Geoplano

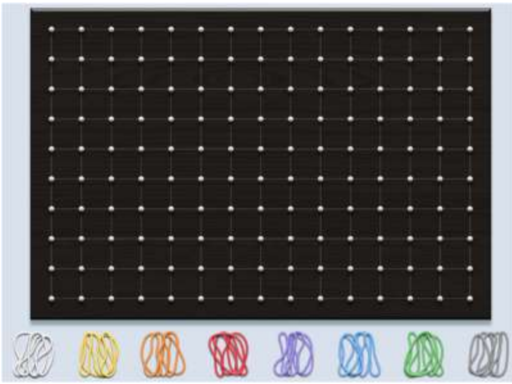
Dentre todos os Materiais Manipuláveis propostos para construção no Caderno de Atividades e, posteriormente, utilização para resolução dos problemas, foi escolhido o

Geoplano para abrir breves discussões sobre as oportunidades que os docentes têm de trabalhar esse recurso dentro da sala de aula, inserida dentro da metologia adotada.

A escolha se deu pela versatilidade do Geoplano no ensino de conteúdos geométricos e pela sua capacidade de tornar visíveis conceitos abstratos por meio da experimentação e da construção ativa do conhecimento. Além disso, por ser um recurso de fácil confecção e manuseio, possibilita ao professor explorar noções como área, perímetro, simetria e frações, adaptando-se a diferentes níveis de ensino e estilos de aprendizagem.

Desenvolvido por Caleb Gattegno, educador e matemático nascido na Etiópia, em meados da década de 1950, o Geoplano é um recurso didático manipulável utilizado no ensino da Geometria, que “[...] tem por objetivo principal levar os alunos a explorar figuras poligonais através da construção e visualização, facilitando o desenvolvimento das habilidades de exploração espacial” (Carvalho, 2016, p. 43).

Figura 7: Geoplano.



Fonte: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

O Geoplano é um objeto de superfície plana (sendo madeira ou outro material rígido) na qual são dispostos pinos (que podem ser pregos) equidistantes que formam uma malha regular - usualmente no formato quadrado, mas podendo também ser triangular ou isométrica. Sobre essa malha, elásticos são esticados entre os pinos para representar figuras geométricas planas, como triângulos, quadriláteros, polígonos em geral, entre outros.

O Geoplano foi proposto como Material Manipulável na resolução de seis questões do Caderno de Atividades, sendo os problemas de número 1, 2, 4, 6, 15, 19. No material construído, as atividades estão preparadas para perspectiva do aluno e os momentos didáticos preparados de acordo a teoria abordada, com espaços destinados para os registros que levarão à solução do problema e compreensão do conteúdo por trás dela.

No Caderno de Atividades, após a proposição do problema, é indicado o Material Manipulável junto com algumas orientações para resolvê-lo. O professor mediador pode seguir por dois caminhos: ou realizar a leitura dessas orientações ou deixar à cargo dos alunos com o intuito de promover o protagonismo e incentivar a autonomia na busca do entendimento e reconhecimento do conteúdo. As orientações não são autossuficientes por conta própria, portanto é capaz dos estudantes perceberem outros caminhos mais viáveis para compreender o problema através do Material Manipulável. O docente pode considerar essas sugestões – e fazer as devidas adaptações – ao trabalhar todos problemas listados aqui, tendo em vista que cada um necessita de uma forma diferente de utilização do Geoplano.

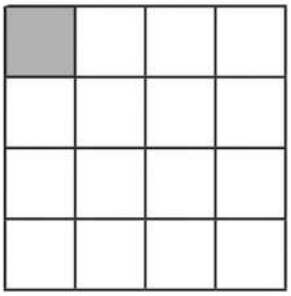
Os registros relacionados aos momentos da leitura individual e coletiva devem ser feitos destacando apenas as ideias principais notadas durante essa etapa. O mediador pode organizar a sala em grupos e já solicitar que cada estudante faça sua leitura individual e depois um representante de cada grupo ler em voz alta para sala toda. Dessa forma, todos participam de forma equitativa da atividade.

A condução da plenária deve priorizar a socialização das diferentes estratégias adotadas pelos grupos a partir da visão de cada um sobre a resolução do problema usando o Material Manipulável. Espera-se surgir debates sobre as comparações entre os procedimentos utilizados e a argumentação matemática utilizada. É importante que o professor valorize as justificativas apresentadas, esclareça possíveis dúvidas e, quando necessário, sistematize os conceitos explorados, favorecendo a construção coletiva do conhecimento. Assim, pode ser aberto uma espécie de votação para que escolham qual solução mais adequada para o problema, com a interferência final do professor que julgará a validade da solução.

A seguir, serão abordados os problemas da edição de 2024 da OBMEP, fase 1, nível 2, com base na proposta metodológica apresentada no Caderno de Atividades. É válido frisar que esses problemas não foram aplicados nas oficinas por conta da quantidade de aulas destinadas para execução do projeto que foram poucas por conta do cumprimento do currículo escolar, mas a ideia serviu para criar os cadernos de atividades.

As sugestões dos cadernos são direcionadas a partir da perspectiva docente, considerando não apenas a interpretação das questões, mas também as possibilidades pedagógicas que emergem de sua aplicação em sala de aula. Busca-se, com isso, refletir sobre as estratégias de mediação que o professor pode adotar, os caminhos de resolução possíveis e o potencial formativo dessas atividades no desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

1) **Questão 1:** Quantos quadrados têm seus lados sobre as linhas do quadriculado, mas não contêm o quadradinho cinza?



A) 26
B) 24
C) 15
D) 19
E) 18

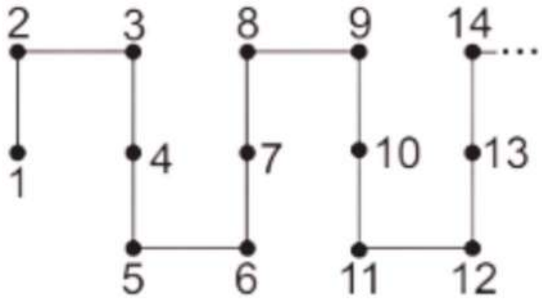
Nessa fase, o professor não interfere o trabalho dos grupos dos alunos. Todavia ao observá-los, pode fazer questionamentos como: *qual é a dimensão do quadriculado? O que é dimensão? O que está incluso no termo "quadrados com lados sobre as linhas do quadriculado"? "Não contêm o quadradinho cinza" significa o quê?* Isso acarreta na contemplação de ideias, por parte dos estudantes, ao observar o quadriculado e identificar quantos quadrados diferentes é possível formar; ao levantar hipóteses antes de começarem a contar; montar todos os quadrados possíveis sem sobrepor o quadrado cinza; justificar por que eliminaram certos quadrados e refletir sobre como calcular quantos quadrados de cada tamanho cabem no quadriculado.

Antes de registrar as soluções na lousa, o mediador, dentre várias possibilidades pode projetar a imagem do quadriculado na lousa para que cada grupo mostre a construção através do tracejo do pincel; desenhar a figura na lousa; solicitar que o representante do grupo desenhe; ou pedir que cada grupo acompanhe ideia no seu Geoplano, sendo que essa última pode ser também um pedido do representante do grupo.

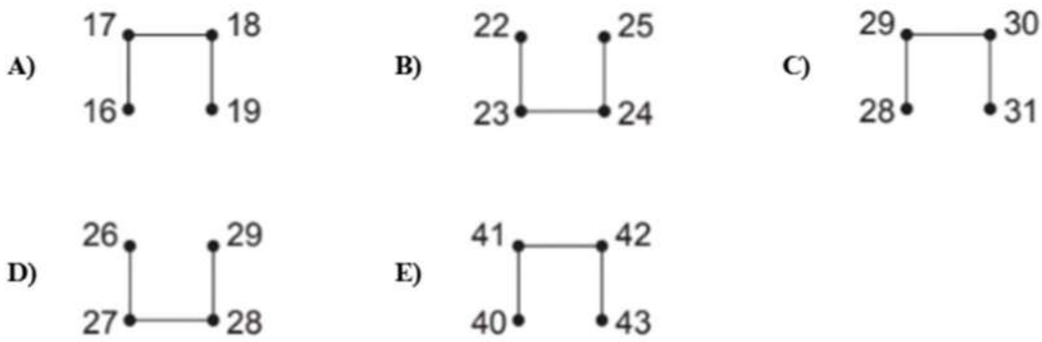
Ao fazer a demonstração da resolução do problema no material, é esperado que cada grupo mostre os quadrados possíveis de formação e os que devem ser descartados, conforme a posição do quadradinho cinza, justificando suas escolhas com base em observações visuais, argumentos geométricos e registros feitos no Geoplano. O intuito dessa sugestão é para que os estudantes desenvolvam a capacidade de argumentar matematicamente por meio da explicação dos seus raciocínios de forma clara e coerente. Além disso, o compartilhamento das estratégias adotadas permite a construção coletiva do conhecimento e favorece a comparação entre diferentes caminhos de resolução e a valorização da diversidade de pensamentos dentro da sala de aula.

Quanto a formalização do conteúdo, o professor pode dar um destaque as propriedades relativas à regularidade e simetria, já propostos no Caderno de Atividades dos alunos, extrapolar além do que está escrito, construindo os conceitos e definições a partir da visão formal da Matemática, mas também das suas experiências e da concepção da questão. Isso, contribuirá para resolução dos novos problemas e, com as habilidades desenvolvidas ao longo da atividade, fixação de conceitos.

2) **Questão 2:** Os números de 1 a 50 foram escritos numa linha zigue-zague, de acordo com o padrão indicado na figura.



Qual das alternativas mostra uma parte desse zigue-zague?



Neste problema, o professor pode levantar alguns questionamentos como: *É possível reproduzir a situação completa no Geoplano? Se sim, como? Se não, por quê? Há algum padrão identificável? As ligas conseguem fazer o trajeto completo? Posso separar o problema em partes?* São questionamentos que podem direcionar os alunos a entender as limitações do Material Manipulável e ajudar a traçar estratégias para contornar esses percalços.

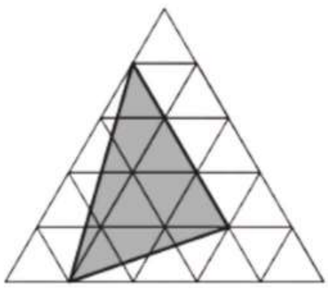
Diferente do problema anterior, os estudantes não precisarão se preocupar com propriedades da geometria plana, mas identificar o comportamento da liga em relação aos pinos numerados. Assim, o mediador pode sugerir utilizar elásticos de cores distintas para simular o problema em outras partes do Geoplano, uma vez que o problema não exige a utilização de todo espaço do material.

Para o registro na lousa, a projeção do problema ou o seu desenho – seja realizado pelo professor ou estudante – pode ser uma viabilidade de acordo com o tempo destinado para aula ou com as condições da escola. Todavia, como forma alternativa, o aluno pode utilizar pedaços de barbante ou cordão com fitas adesivas e reconstituir o problema na lousa de maneira mais visual, colaborando para compreensão dos demais colegas. Embora essa possibilidade tenha potencial considerável para compreensão do problema e dos caminhos que levam a sua solução, é preciso que o mediador espere essa perspectiva partir dos estudantes.

Contudo, os alunos podem optar por apresentar no próprio Geoplano, que é o próximo passo da atividade. Assim, espera-se que eles reconstituam o problema no material, separando as situações em partes, identifiquem os padrões, justifiquem os motivos das decisões tomadas de acordo com seus conhecimentos prévios, observem a numeração dos pinos, a direção e o formato dos elásticos postos no tabuleiro do Material Manipulável.

A formalização do conteúdo propõe discutir a respeito de múltiplos de números naturais, por conta dos padrões de multiplicidade que aparecem no problema. A ideia aqui é que os estudantes compreendam o que é um múltiplo de um número natural, como se determina e suas representações. Assim, na proposição dos novos problemas possam identificar essas características e aplicar nas estratégias produzidas para soluciona-los.

3) **Questão 4:** A figura apresenta uma malha triangular formada por triângulos equiláteros pequenos, cada um com área igual a 1 cm². Qual é a área, em centímetros quadrados, da região cinza?



A) 11
B) 7
C) 10
D) 8
E) 9

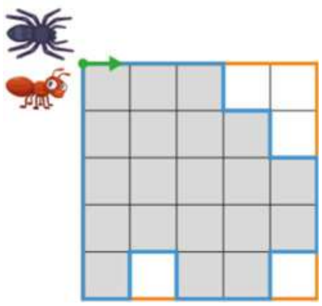
Note que a proposta da utilização do Geoplano neste problema é diferente dos demais, tendo em vista que os elásticos, quando ligados, formam triângulos equiláteros, paralelogramos regulares, trapézios, dentre outras formas. O professor pode questionar o seguinte para seus alunos: *podemos usar o Geoplano do problema anterior para resolver este? Por quê? Quais são as características desse problema? A figura apresentada pode ser modificada? Quais* *propriedades geométricas podem ser utilizadas para compreender o problema? É possível desfazer partes do triângulo e refazer em outro lugar com a ideia de complementar?* São sugestões de questionamentos que podem ser feitos na realização da atividade de acordo com a observação do professor com a turma, quando averiguar o grau de dificuldade da questão para os alunos.

Após essas reflexões e a solução do problema pronto, professor pode projetar a figura na lousa, os alunos podem desenhar ou usar o Geoplano, como sugerido nos problemas anteriores. Ao demonstrar com o Material Manipulável, espera-se que o discente possa concluir que, ao pegar um vértice do triângulo, passar um segmento de reta do vértice ao lado oposto a ele formando dois triângulos, esses triângulos formados, quando juntos, terão a mesma área do triângulo inicial. Esse tipo de observação evita de o aluno fazer cálculos desnecessários a partir das fórmulas de área.

Na formalização do conteúdo, a proposta do Caderno de Atividades é justamente apresentar as noções de área de triângulos para além da simples memorização de fórmulas. Nem sempre é necessário que o estudante conheça, de imediato, a equação específica para calcular a área de um triângulo para conseguir resolvê-la. A situação-problema apresentada na questão da OBMEP exemplifica como a compreensão da área pode ser desenvolvida por meio de outras propriedades matemáticas.

Logo, essa mesma ideia pode ser estendida para os novos problemas propostos e, assim, permitir que os estudantes explorem diferentes estratégias de resolução, como decomposição de figuras, uso de simetrias, contagem de unidades e comparação com áreas conhecidas a partir dos conhecimentos adquiridos com a estratégia de resolução de problemas adotada neste.

4) **Questão 6:** Uma formiga e uma aranha partem juntas do ponto indicado no quadriculado de 5 metros por 5 metros, no sentido horário, e caminham sempre 1 metro por minuto. A formiga anda na borda do quadriculado e a aranha na borda da região cinza, até retornarem ao ponto de partida. Durante quanto tempo elas andarão juntas, lado a lado?



A) 11 minutos

B) 6 minutos

C) 12 minutos

D) 7 minutos

E) 10 minutos

Este problema permite refletir sobre alguns aspectos curiosos: *A formiga e a aranha poderiam andar por outros segmentos não especificados na questão? Em quais momentos elas andam juntas e em quais momentos não? Elas estão juntas sempre no segmento de mesma direção – horizontal ou vertical? Se elas fizerem o trajeto indicado na questão, conseguirão chegar juntas no ponto de partida? Por quê?* São perguntas interessantes a serem feitas pelo professor mediador da atividade.

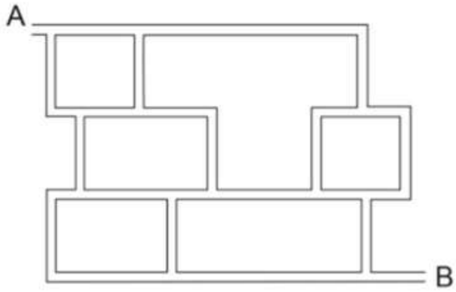
Durante a socialização das soluções na lousa, o professor deve estar atento aos resultados finais apresentados pelos alunos e aos caminhos percorridos por eles ao resolver o problema. Questões como “em quais momentos a formiga e a aranha caminham juntas?” ou “elas seguem por segmentos com a mesma direção?” abrem espaço para o desenvolvimento de argumentações fundamentadas e justificadas com o auxílio do Geoplano no momento da demonstração no Material Manipulável.

O professor pode esperar que uma das primeiras atitudes dos grupos sejam reproduzir os trajetos feitos pela formiga e aranha, com elásticos na base do Geoplano. Entretanto, eles podem usar representações variadas, como desenhos esquemáticos, setas e codificações de percursos, em papel, para buscar visualizar e compreender melhor o problema. Assim, é válido ressaltar que esses registros são importantes indicadores da compreensão espacial e da capacidade dos estudantes em acompanhar trajetórias simultâneas.

Na formalização do conteúdo, o professor pode retomar os questionamentos previamente lançados para sistematizar noções relacionadas à orientação espacial, direção e sentido de segmentos, bem como à ideia de simultaneidade e decomposição de movimentos. Ao explorar as diferenças e semelhanças nos trajetos das personagens (formiga e aranha), o docente pode introduzir, de maneira significativa, conceitos como coordenadas cartesianas em nível introdutório, identificação de segmentos horizontais e verticais, e até mesmo noções básicas de simetria e equivalência de caminhos, todas apresentadas e propostas no Caderno de Atividades que, consequentemente, contribuirão para solução dos novos problemas.

5) **Questão 15:** A formiguinha da OBMEP mora em um formigueiro com túneis horizontais e verticais, conforme mostrado na figura. Quantos são os caminhos possíveis

para a formiguinha ir do ponto A ao ponto B, sempre percorrendo os túneis verticais de cima para baixo e sem passar mais de uma vez pelo mesmo lugar nos túneis horizontais?



A) 18

B) 36

C) 12

D) 24

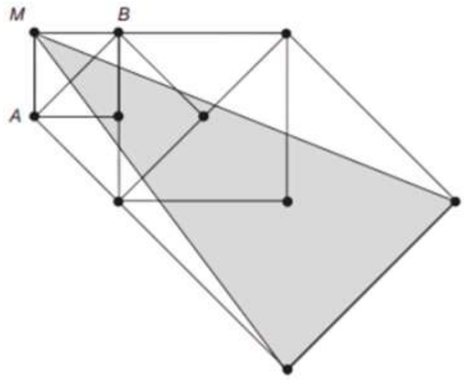
E) 10

Semelhante ao problema anterior, a presente questão busca investigar o trajeto realizado pela formiguinha, do ponto A ao ponto B, diferindo apenas que nesse ela pode trilhar por vários caminhos diferentes, o que gera algumas dúvidas: *Quais caminhos a formiguinha pode seguir? Há algum caminho que não leva do ponto A ao ponto B? Faz sentido ela voltar por um mesmo caminho que seguiu? É possível perceber algum padrão no formato do caminho que ajude a encontrar a solução?*

A análise de possibilidades dos caminhos tomados pela formiguinha é uma excelente oportunidade para desenvolver o raciocínio combinatório dos alunos, mesmo sem recorrer a fórmulas ou técnicas algébricas. Durante a resolução na lousa, o professor pode estimular que os estudantes registrem os diversos trajetos encontrados conforme as decisões feitas a cada bifurcação. Diante desses registros, o aluno agora apresenta sua solução no Geoplano e espera-se que ele não foque apenas na quantidade de caminhos identificados, mas também na clareza da representação e na justificativa das escolhas, promovendo a argumentação matemática que venha auxiliar a compreensão dos demais colegas.

A formalização do conteúdo, conforme propõe o Caderno de Atividades, aborda o conceito de perímetro de figuras planas como ponto de partida para a compreensão da contagem de caminhos. Essa abordagem pode colaborar com a organização das possibilidades de deslocamento e para que os alunos desenvolvam estratégias sistemáticas de resolução. À medida que essas estratégias se consolidam, é possível avançar para representações mais abstratas e generalizações, cujas habilidades podem ser desenvolvidas e aprimoradas na resolução de novos problemas semelhantes ao inicial.

6) Questão 19: A figura é formada por quatro quadrados, o primeiro com diagonal AB e os demais construídos sobre a diagonal do anterior. O segmento AB mede 1 cm. Qual é a área, em cm², do triângulo sombreado?



A) $\frac{7}{2}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{5}{2}$

D) 4

E) 3

O presente problema apresenta quatro quadrados formados a partir das diagonais dos demais e, a partir disso, cria o triângulo cinza. Ao interpretar o problema e visualizar a imagem, o mediador pode levantar os seguintes questionamentos: *como os quadrados foram construídos a partir do segmento AB? Todos os quadrados têm lados iguais? O que muda de um quadrado para o outro? Qual é a posição dos quadrados em relação ao anterior? Eles giram? Se sim, de quantos graus? Podemos decompor o triângulo sombreado em outras figuras conhecidas? Há simetrias ou propriedades que podemos usar para facilitar o cálculo da área?*

No registro da solução na lousa, o professor pode sugerir aos alunos que representem com precisão os pontos e segmentos envolvidos e, com o Geoplano, identifiquem os quadrados construídos sobre as diagonais, destaquem as medidas conhecidas e utilizem elásticos ou marcações para evidenciar o triângulo sombreado. Além disso, pode orientá-los a descrever, oralmente, o raciocínio adotado na construção da figura e no cálculo da área com o intuito de compartilhar com os colegas a estratégia adotada e ajudar no entendimento do problema.

Espera-se que, na etapa da formalização do conteúdo, os alunos consigam sistematizar as propriedades geométricas observadas durante a exploração do Material Manipulável, com o Geoplano. Para isso, é necessário o professor destaque as relações entre lados, ângulos, diagonais e áreas de figuras planas. A visualização concreta e interativa proporcionada por esse recurso pode acarretar na construção de conceitos de forma significativa, uma vez que permite aos estudantes identificarem regularidades, testar hipóteses e validar suas descobertas por meio da experimentação.

A partir dessa base conceitual, os alunos devem ser capazes de aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de novos problemas que seguem a metodologia da OBMEP, transferindo estratégias e raciocínios desenvolvidos em situações anteriores para contextos distintos, o que contribui para a consolidação da aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento geométrico.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da trajetória investigativa percorrida, constatou-se que o objetivo geral da pesquisa foi alcançado, tendo em vista que a investigação, à luz da literatura e da teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas de como os materiais manipuláveis podem ser integrados à metodologia de Resolução de Problemas foi realizada por meio da revisão de literatura e das atividades aplicadas em sala de aula, na execução do projeto Boas Práticas, até culminar na criação dos cadernos de atividades auxiliadores – tanto para os alunos do 8ºe 9ºanos, quanto aos professores – na preparação para OBMEP – Nível 2.

A pesquisa esclarece que a literatura recente encontrada nos Periódicos da CAPES aponta poucos estudos voltados para o uso dos Materiais Manipuláveis embasados em alguma teoria de Resolução de Problemas matemáticos e esse aspecto evidencia que muitos autores optam por conduzir o processo investigativo de forma não sistematizada, possibilitando o surgimento de lacunas conceituais na formação do discente. Apesar desse fato não ser via de regra, mas acredita-se que essas duas vertentes precisam ser mais aplicadas em sala de aula e disseminada no meio acadêmico.

Assim, a proposta pautada na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas permitiu construir um roteiro teórico e prático para Resolução dos Problemas escolhidos da OBMEP que consideram todo percurso exploratório da questão: a proposição, a leitura, compreensão, estratégia, resolução, debate, apresentação, recurso auxiliador, formalização e desenvolvimento das habilidades necessárias para resolver outros problemas, na visão da teoria adotada. Esse material foi potencializado por meio do uso de materiais manipuláveis – especificamente o Geoplano – na abordagem dos problemas selecionados em sua estrutura.

Diante do fato de que a OBMEP não é um exame simples, os Materiais Manipuláveis como recurso auxiliador na Resolução dos Problemas, se demonstrou bastante eficaz quando, a execução do projeto realizado no âmbito de uma escola municipal de Fortaleza – CE gerou resultados significativos para formação dos alunos participantes. Assim, espera-se que o Caderno de Atividades desenvolvido a partir das observações do resultado do projeto e baseado na ampliação da teoria metodológica mostrada na presente pesquisa venha proporcionar uma aprendizagem mais significativa, auxilie o trabalho docente e colabore com a expansão do conhecimento matemático dos discentes.

Ademais, a metodologia empregada colaborou para compreender, a partir da revisão de literatura, como os pesquisadores atuais abordam as teorias de Resolução de Problemas. Diante do resultado de que nenhum dos trabalhos encontrados utilizou a teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em sua base metodológica, principalmente em conjunto com o uso de materiais manipuláveis, compreende-se que mais trabalhos acadêmicos possam dialogar e aplicar essa teoria no âmbito da Educação Matemática a fim de confirmar sua significância nos diferentes contextos de aprendizagem.

Ainda, diante dos resultados do projeto aplicado e das atividades desenvolvidas, notou-se um grande engajamento dos estudantes participantes – 8º e 9º anos – o que permitiu avançar nas pesquisas referentes à melhoria do processo de ensino e aprendizagem deles e também alcançar o objetivo da criação do material de apoio baseado na teoria de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, por meio do uso de materiais manipuláveis na resolução de problemas da OBMEP voltado para esse público.

Quanto aos cadernos de atividades voltados para alunos e professores podem ser replicados e adaptados conforme a necessidade e realidade de cada professor, principalmente tendo em vista o desenvolvimento de habilidades específicas na formação do discente e quanto aos conhecimentos que precisam adquirir. Entende-se que cada realidade tem suas próprias peculiaridades, então fazer com que os alunos aprendam por meio de passos pré-estabelecidos e com recursos auxiliadores – por exemplo, o uso dos materiais manipuláveis – pode facilitar o processo e atingir os objetivos almejados.

Com isso, pretende-se futuramente ampliar a pesquisa para outros exames de seleção importantes que envolvem o componente de Matemática, como é o caso do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) por exemplo, com o intuito de verificar se a teoria também se demonstrará eficaz para a construção do conhecimento matemático e o desenvolvimento de habilidades.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, José Carlos, ULIANA, Márcia Rosa. Inventário de teses e dissertações sobre o processo de ensino e aprendizagem de matemática para estudantes com TEA (2000-2020). **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 11, n. 1, p. 1 – 23, jan./dez. 2023. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/15123. Acesso em: 12 abr. 2025.

ARGYROPOULOS, Vassilios S. Tactual shape perception in relation to the understanding of geometrical concepts by blind students. ***British Journal of Visual Impairment,*** London, v. 20, n. 1, p. 7-16, 2002. Disponível em: https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/026461960202000103. Acesso em: 28 jul. 2025.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. A resolução de problemas e a construção de competências. In: FIORENTINI, Dario (Org.). **O professor e a construção do saber**. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2001. p. 25-39.

BARBOSA, Aline Mauricio; SILVA DA COSTA, Marcos Vinícius. Análise de erros em Resolução de Problemas envolvendo sólidos geométricos numa turma de segundo ano do Ensino Médio da Rede Pública. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 12, n. 27, p. 251–275, jan./abr. 2023. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/7307. Acesso em: 12 abr. 2025.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011, 229 p.

BASSI, Marcos Edgar. **O papel da resolução de problemas no desenvolvimento do pensamento crítico na educação matemática.** Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2024.

BISPO, Bruno Leal; ASSIS, Elias Santiago de. A utilização de materiais manipuláveis na construção de demonstrações da geometria espacial de posição. **INTERMATHS**, Vitória da Conquista – BA, v. 2, n. 2, p. 268 – 288, jul./dez. 2021. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/intermaths/article/view/9827/6480. Acesso em: 09 jul. 2025.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação matemática: pesquisa e prática**. São Paulo: Cortez, 2006. 192 p.

BORASI, Raffaella. **Reflexões sobre o ensino da matemática:** explorando alternativas. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Ática, 1994. 160 p.

BORGES, Karen Selbach; FAGUNDES, Léa da Cruz. A teoria de Jean Piaget como princípio para o desenvolvimento das inovações. **Educação***,* Porto Alegre, v. 39, n. 2, p. 242-248, set./dez. 2016. Disponível em: http://dx.doi.org/10.15448/1981-2582.2016.2.21804. Acesso em: 30 jul. 2025.

BRUNER, Jerome. **O processo da educação.** 7. ed. São Paulo: Nacional, 2001.

CÂMARA, Rivelino de Sousa. **Resolução de Problemas**: uma proposta metodológica. 2016. 94 f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE.

CARNEIRO, Rogerio dos Santos; PINTO, Neuza Bertoni. Aritmética para ensinar em manuais pedagógicos na formação de professores primários no Brasil (1930-1960). **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Brasília, v. 14, n. 1, p. 1 – 17, jan./abr. 2024. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/ripem/article/view/3608. Acesso em: 12 abr. 2025.

CARVALHO, Wesley da Silva. **Cálculo das Fórmulas de Euler e Pick no Geoplano e no GeoGebra**, 2016. 52 f. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Goiás, Goiânia, GO.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 1996. 123 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática.** São Paulo: Editora Ática, 1989. 176 p.

DIENES, Zoltan Paul. **A construção do conceito de número: um ensaio sobre a aprendizagem da matemática**. São Paulo: Pioneira, 1973. 112 p.

DUARTE, Augusto Mendes; YAMAMOTO, Fábio Seidi Osiro. Trincas pitagóricas e números figurados: um enfoque histórico para o ensino do Teorema de Pitágoras. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão – PR, v.11, n.24, p. 505 – 526, jan./abr. 2022. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6732/4791. Acesso em: 13 abr. 2025.

ENGELBRECHT, Johann; BORBA, Marcelo C.; KAISER, Gabriele. *Will we ever teach mathematics again in the way we used to before the pandemic? ZDM –* ***Mathematics Education***, v. 55, p. 1-16, 2023. DOI: 10.1007/s11858-022-01460-5.

FIORENTINI, Dario *et al.* O Estágio Curricular Supervisionado em Matemática nos contextos de ensino presencial, remoto e híbrido - Dossiê Temático. **Revista Baiana de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 2, n. 01, p. 01 – 09, jan./dez. 2021. Disponível em: https://www.revistas.uneb.br/index.php/baeducmatematica/article/view/13318. Acesso em: 12 abr. 2025.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. A formação do professor de matemática: repensando a prática em ciclos de formação. **Educação Matemática em Revista***,* São Paulo, n. 1, p. 80-91, 1990.

FORTALEZA. **Sistema de Avaliação do Ensino Fundamental de Fortaleza.** Disponível em: < https://saef.sme.fortaleza.ce.gov.br/saef/relatorios/relatorios.jsf>. Acesso em: 27 out. 2024.

FRANK, Tibor. *George Pólya and the Heuristic Tradition*. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 19 – 36, abr./set. 2004. Disponível em: https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/240. Acesso em: 3 jul. 2025.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 4. ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2002. 216 p.

IMPA. **Clubes de Matemática da OBMEP**, 2005. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/sobre/. Acesso em: 20 nov. 2024.

IMPA. **Regulamento da 20ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP 2025**. Rio de Janeiro, 2025. Disponível em: https://www.obmep.org.br/. Acesso em: 9 jul. 2025.

IZAR, Soraya Barcellos. **Transformações geométricas:** linguagens híbridas e interações para promover aprendizagens de estudantes no ensino remoto. 2023. 52 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ.

KANT, Immanuel. **Crítica da Razão Pura**. Tradução: J. Rodrigues de Merege. Acrópolis, 2000. 520 p.

LAUNAY, Mickael. **A fascinante história da matemática:** da pré-história aos dias de hoje. Trad. Clóvis Marques. – 1a ed. – Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

LORENZATO, Sérgio. (org.) **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** 3 ed. Campinas – SP: Autores Associados, 2012. 178 p.

LUCENA, Vilalba Andréa Vieira de. **Matemática e Leitura: uma análise a partir de um livro paradidático para ensino de Matemática.** 2022. 66 f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual Da Paraíba, Campina Grande, PB.

MACHADO, Silvia Dias. **Professor reflexivo:** práticas em construção no ensino da matemática. Campinas: Autores Associados, 2008. 136 p.

MARTINS, Kaique Nascimento et. al. Articulações entre Tendências em Educação Matemática e Resolução de Problemas. **Educação Matemática em Revista**, *[S. l.]*, v. 29, n. 85, p. 1 – 15, out./dez. 2024. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/3918. Acesso em: 12 abr. 2025.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. Análise textual discursiva: processo reconstrutivo de múltiplas faces. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 12, n. 1, p. 117–128, 2006. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/wvLhSxkz3JRgv3mcXHBWSXB/. Acesso em: 23 mai. 2025.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. O uso de materiais concretos no ensino da matemática. In: MACHADO, Silvia Dias (Org.). **Didática da Matemática:** reflexões psicopedagógicas. São Paulo: Atual, 1992. p. 37-56.

NUNES, Célia Barros. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática.** 2010. 430 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.

OLIVEIRA, Deumara Galdino de. Resolução de problemas sobre Planificação do cubo: uma abordagem através de materiais manipuláveis. **Revista Baiana de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 4, n. 01, p. 01 – 18, jan./dez. 2023. Disponível em: https://www.revistas.uneb.br/index.php/baeducmatematica/article/view/17720. Acesso em: 12 abr. 2025.

ONUCHIC, Maria de Lourdes de La Rosa *et al* (org.). **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí - SP: Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, Maria de Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes**. A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas:** teoria e prática na formação de professores. 2. ed. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2012. 208 p.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectivas. Rio Claro: Unesp, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, Maria de Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Resolução de Problemas:** uma abordagem de ensino-aprendizagem. São Paulo: Editora da UNESP, 2011. 176 p.

ONUCHIC, Maria de Lourdes da Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Resolução de problemas:** uma proposta de integração entre teoria e prática no processo de ensino-aprendizagem de matemática. Campinas: Editora da Unicamp, 2012. 208 p.

PERRENOUD, Philippe. **Avaliação:** da excelência à regulação das aprendizagens. Tradução de Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2000. 183 p.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4., **Anais.** Brasília, 2009. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/sipemIV.pdf. Acesso em: 13 abr. 2025

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. 172 p.

POLYA, G. ***How to solve it***. Princeton: Doubleday, 1945.

PÓLYA, George. ***How to Solve it:*** *a new aspect of mathematical method.* New York: Doubleday Anchor Books, 1957. 272 p.

PÓLYA, George. ***Mathematical Discovery:*** *On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. New York: John Wiley & Sons, 1981. 220 p.

PONTE, João Pedro da. **Investigação em educação matemática:** compreender para ensinar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 150 p.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigar para ensinar matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. 168 p.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. 276 p.

RABELO, M. **Avaliação Educacional:** Fundamentos, Metodologia e Aplicações no Contexto Brasileiro. Rio de Janeiro. SBM, 2013. 248 p.

REYS, Robert. Considerations for teaching using manipulative materials. In: ______. ***Teaching made aids for elementary school mathematics***. Reston: NCTM, 1982.

ROCHA, Daniel Cleberson da Conceição *et al*. O ensino de probabilidade mediado por materiais didático manipuláveis: experiências formativas. **Revista foco**, *[s. L.]*, v. 17, n. 4, p. 01 – 18, [jan./dez.]. 2024. Disponível em: https://ojs.focopublicacoes.com.br/foco/article/view/4895. Acesso em: 12 abr. 2025.

SANTOS, Juliana Ormastroni de Carvalho. **Leitura e produção de textos escritos na formação do professorando do curso de Pedagogia.** 2006. 125 f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de Campinas, Campinas, SP.

SANTOS et al. Estado da arte: aspectos históricos e fundamentos teórico-metodológicos. **Revista Poiesis,** v. 1, n. 1, p. 201–220, [jul./dez.]. 2020. Disponível em: https://editora.sepq.org.br/rpq/article/view/215. Acesso em: 25 mai. 2025.

SCHOENFELD, Alan H. ***Mathematical Problem Solving***. Orlando, Florida: Academic Press, 1985. 425 p.

SERRAZINA, Lurdes. **Aprendizagem da Matemática:** a importância da utilização dos materiais. Noesis, Lisboa. 1991.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico.** 24. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

SIENA et al. **Metodologia da Pesquisa Científica e Elementos para Elaboração e Apresentação de Trabalhos Acadêmicos**. Belo Horizonte: Editora Poisson, 2024.

SILVA, Paulo Henrique das Chagas. **A Resolução de Problemas na introdução de conteúdos e conceitos matemáticos: um olhar a partir das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. 2023. 293 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

SILVA, Nerivaldo Virgínio da. **Um estudo acerca do desempenho do Estado do Piauí na OBMEP no período de 2005 à 2016**. 2017. 52 f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Piauí, Teresina, PI.

SILVA, Luciane Ribeiro da.; BÔAS, Jamille Vilas. Contribuições do uso de materiais manipuláveis como estratégia na resolução de problemas sobre o princípio multiplicativo. **Revista Ensino em Foco**. [*S. l.*], v. 2, n. 4, p. 85 – 98, abr. 2019. Disponível em: https://publicacoes.ifba.edu.br/ensinoemfoco/article/view/473/371. Acesso em: 12 abr. 2025.

SILVA, Antônio Alexandre Aparecido da; SILVA, Angelica da Fontoura Garcia; PIETROPAOLO, Ruy Cesar. Refletindo sobre apreensões figurais na resolução de problemas geométricos: perspectivas de alunos do 8.º ano. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 9, n. 4, p. 195 – 213, jul./dez. 2024. Disponível em: https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/20984. Acesso em: 12 abr. 2025.

SILVA, Américo Junior Nunes da.; VIEIRA, André Ricardo Lucas. Explorando Caminhos para o Ensino e Aprendizagem de Matemática: Contribuições da Revista Baiana de Educação Matemática. **Revista Baiana de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 4, n. 01, p. 01 – 09, jan./dez. 2023. Disponível em: https://www.revistas.uneb.br/index.php/baeducmatematica/article/view/19858. Acesso em: 12 abr. 2025.

SILVA, Pablo Egidio Lisboa da; CUNHA, Maria de Jesus Gomes da; PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos. As faces da combinatória no cotidiano. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 4, n. 7, p. 225–244, jul./dez. 2015. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/6003. Acesso em: 12 abr. 2025.

SILVA, Pablo Egidio Lisboa da; CUNHA, Maria de Jesus Gomes da; PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos. As faces da combinatória no cotidiano. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 4, n. 7, p. 225–244, jul./dez. 2020. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/6003. Acesso em: 12 abr. 2025.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **A resolução de problemas na aprendizagem da matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001. 144 p.

SOARES, Magda. **Letramento: um tema em três gêneros**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2018.

SOUSA, Ana Beatriz Afonso de. **Pesquisas em proposição de problemas:** convergências e potencialidades. 2022. 88 f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB.

SOUZA, Daniele Cristina de. O positivismo de Auguste Comte e a Educação Científica no cenário brasileiro. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 8, n. 1, p. 29 – 42, jan./abr. 2020. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/9493/pdf. Acesso em: 17 ago. 2025

SOUZA, Helena Tavares. **Resolução de Problemas - enfoque metodológico e teórico.** 2018. 133 f. Tese (Doutorado). Programa de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Patrícia. **Ensinar e aprender matemática:** modos de fazer. Porto Alegre: Artmed, 2003. 192 p.

TEIXEIRA, Elizabeth. **As três metodologias:** acadêmica, da ciência e da pesquisa. 8. ed. Petrópolis: Vozes, 2023.

VALE, I. **Materiais manipuláveis**. Viana do Castelo: ESEVC-LEM, 2002.

VALE, Isabel; BARBOSA, Ana. Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria. **Boletim GEPEM**. *[S. l.]*, n. 65, p. 3 – 6, jul./dez. 2014. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/28. Acesso em: 12 abr. 2025.

VALÉRIO, Wiviane. **Resolução de problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula**. 2017. 87 f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática:** como ensinar na educação elementar e no ensino médio. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VEIA, Luciano. Qual é o problema? **Educação e Matemática**. Portugal, n. 40, p. 20 – 24, out/dez. 1996. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/561/555. Acesso em: 03. jul. 2025.

VERGNAUD, Gérard. A teoria dos campos conceituais. In: LINS, Romulo Campos (Org.). **Piaget, Vygotsky e a Didática da Matemática**. Campinas: Papirus, 1990. p. 143-170.

VILARINHO, Ana Paula Lima. **Uma proposta de análise de desempenho dos estudantes e de valorização da primeira fase da OBMEP**. 2015. 99 f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Universidade de Brasília, Brasília, DF.

APÊNDICE A – CADERNO DE ATIVIDADES – VERSÃO ALUNO(A)

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA OBMEP

METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Prova - Edição 2024

Caderno do Estudante

Jeovano Pereira da Costa
Fabrício de Figueredo Oliveira

APRESENTAÇÃO

Olá, estudante!

Esperamos que esteja tudo bem com você. É com grande entusiasmo que lhes apresentamos este material, elaborado especialmente para apoiar a sua jornada na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP).

Nesta edição, você encontrará seis problemas propostos da primeira fase, nível 2 (voltado para alunos do 8º e 9º anos), do ano de 2024 de uma forma interativa, onde o seu professor ou professora irá conduzi-lo à construção do conhecimento matemático necessário para encorajá-lo às estratégias de resolução de problemas. Nosso propósito é que cada página desperte a curiosidade, incentive o raciocínio independente e fortaleça a sua confiança na resolução de desafios matemáticos. Mas não se preocupe! Seu professor ou professora irá mediar o caminho para que você alcance o seu objetivo de resolver o problema.

Ao longo desta obra, adotaremos uma ampliação à Metodologia de Resolução de Problemas fundamentada no tripé Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proposto por Onuchic e Allevato. A resolução dos problemas propostos seguirão onze passos para se alcançar a compreensão dos assuntos que o envolvem, passos esses que são: (1) proposição do problema; (2) Leitura Individual; (3) Leitura coletiva; (4) resolução do problema; (5) observar e incentivar; (6) registro das soluções na lousa; (7) demonstração do problema com o material manipulável; (8) plenária; (9) consenso; (10) formalização do conteúdo; (11) proposição de novos problemas.

Sabemos que parece desafiador, mas essa abordagem organiza o processo investigativo em passos claros e interligados, permitindo que você planeje estratégias, teste hipóteses, revise percursos e valide resultados. O Material Manipulável adotado será o Geoplano e este atuará como ponte entre a teoria e a prática, favorecendo a visualização de padrões, a descoberta de relações e o desenvolvimento do pensamento crítico.

Esperamos que este Caderno se torne seu companheiro de explorações matemáticas, oferecendo desafios instigantes, momentos de cooperação e, sobretudo, a alegria de “ver e tocar” conceitos que antes pareciam distantes. Aceitem o convite para experimentar, persistir e celebrar cada conquista — pequena ou grande — porque é na jornada, e não apenas na chegada, que se constrói o verdadeiro prazer pela matemática.

Bons estudos!

SUMÁRIO

MATERIAIS MANIPULÁVEIS

GEOPLANO

O QUE É?

Desenvolvido por Caleb Gattegno (1911 - 1988), educador e matemático nascido na Etiópia, em meados da década de 1950, o Geoplano é um recurso didático manipulável utilizado no ensino da Geometria, com o objetivo de favorecer a compreensão de conceitos geométricos por meio da experimentação e da visualização concreta.

Ele é um objeto de superfície plana (sendo madeira ou outro material rígido) na qual são dispostos pinos (que podem ser pregos) equidistantes que formam uma malha regular - usualmente no formato quadrado, mas podendo também ser triangular ou isométrica. Sobre essa malha, elásticos são esticados entre os pinos para representar figuras geométricas planas, como triângulos, quadriláteros, polígonos em geral, entre outros.

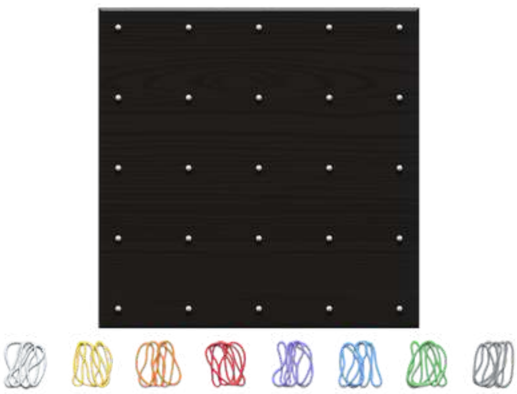


Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

Para auxiliar nos problemas desse caderno de atividades, será indicado a seguir a construção de dois Geoplanos, 10 x 10 pinos ou pregos, um com base quadrada e o outro com base no formato de paralelogramo, cujos espaços sejam suficientes para auxiliar nas soluções dos problemas que esses materiais serão propostos.

GEOPLANO DE BASE QUADRADA

Para construir o Geoplano de base quadrada é preciso saber que um quadrado possui todos os lados iguais e isso vai acarretar também que todos os "pinos" serão igualmente espaçados, tanto na horizontal quanto na vertical. Assim, a seguir, listaremos os materiais necessários para confecção do Geoplano.

MATERIAIS MANIPULÁVEIS

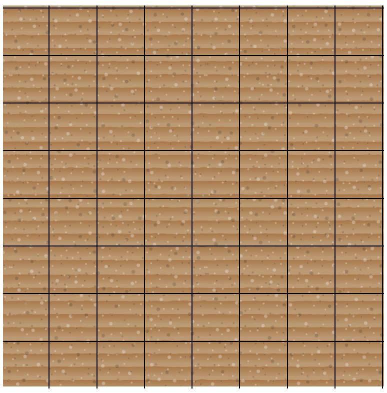
GEOPLANO

RECURSOS NECESSÁRIOS

- Folha de isopor quadrada, de lado 22 cm (dimensões 22 cm × 22 cm);
- Folha de papelão quadrada, de lado 22 cm (dimensões 22 cm × 22 cm);
- Palitos de churrasco;
- Estilete (com a supervisão do adulto);
- Cola para isopor;
- Esquadro;
- Lápis;
- Elásticos de diferentes cores e tamanhos.

COMO CONSTRUIR?

Passo 1) No papelão, use o lápis e o esquadro para desenhar uma malha quadriculada, distanciando as linhas horizontais e verticais, entre si, em 2 cm. Você obterá algo parecido com a imagem abaixo:



Passo 2) Nas intersecções entre as linhas horizontais e verticais (pontos de encontro das linhas) faça furos circulares com a ajuda do estilete, lápis ou os palitos de churrasco, sem danificar o papelão. Neles passarão os palitos que serão os pinos.

Passo 3) Cole o papelão no isopor e espere secar bem. Se necessário, tente fixar mais passando cola nas laterais. Ponha um livro ou algo com certo peso para fazer com o papelão fique mais firme no isopor.

MATERIAIS MANIPULÁVEIS

GEOPLANO

Passo 4) Cole o papelão no isopor e espere secar bem. Se necessário, tente fixar mais passando cola nas laterais. Ponha um livro ou algo com certo peso para fazer com o papelão fique mais firme no isopor.

Passo 5) Corte os palitos em tamanhos que contemple toda espessura do isopor, adicionada à do papelão, sobrando 1,5 cm na parte externa do tabuleiro do Geoplano.

Passo 6) Com todos os palitos cortados, perfure o isopor através dos buracos circulares já feitos no papelão. Após isso, despeje um pouco da cola e, em seguida, fixe o palito. Repita esse processo em todas as aberturas e espere secar.

Passo 7) Por fim, teste a firmeza dos palitos com os elásticos e veja se o processo ocorreu conforme as orientações. Caso necessário, sempre reforce mais com cola para que, tanto a base quanto os palitos fiquem firmes.

GEOPLANO DE BASE PARALELOGRAMO

Para construir o Geoplano cuja base será um paralelogramo recorreremos aos conceitos de régua e compasso, uma vez que a disposição dos “pinos” (palitos, no caso) formam triângulos equiláteros. Assim, é necessário saber que um triângulo equilátero possui seus lados com medidas iguais e seus ângulos com medidas iguais a 60º, ou seja, é requerido conhecimentos sobre propriedades relevantes dos triângulos regulares para confecção da base.

RECURSOS NECESSÁRIOS

- Folha de isopor no formato de paralelogramo regular de lado 22 cm (dimensões 22 cm × 22 cm);
- Folha de papelão no formato de paralelogramo regular, de lado 22 cm (dimensões 22 cm × 22 cm);
- Palitos de churrasco;
- Estilete (com a supervisão do adulto);
- Cola para isopor;
- Régua, transferidor e lápis;
- Elásticos de diferentes cores e tamanhos.

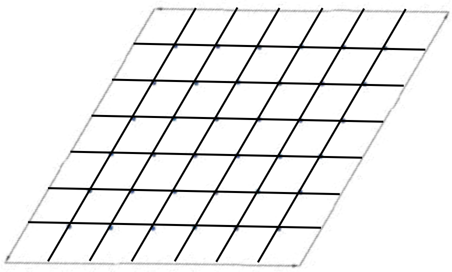
MATERIAIS MANIPULÁVEIS

GEOPLANO

COMO CONSTRUIR?

Na construção do tabuleiro - recorte do isopor e papelão - utilize o transferidor para fazer a medição do ângulo de 60º dos lados adjacentes do paralelogramo, pois esse fator é importante para distribuição e disposição dos palitos.

Passo 1) No papelão, utilize a régua para espaçar, em 2 cm, as linhas horizontais entre si e sobre elas, com o transferidor, medir 60º da direita para esquerda (ou 120º da esquerda para direita) para fazer as marcações espaçadas também em 2 cm e assim construir as linhas verticais. A forma criada ficará mais ou menos assim:



Passo 2) Nas intersecções entre as linhas horizontais e verticais (pontos de encontro das linhas) faça furos circulares com a ajuda do estilete, lápis ou os palitos de churrasco, sem danificar o papelão. Neles passarão os palitos que serão os pinos.

Passo 3) Cole o papelão no isopor e espere secar bem. Se necessário, tente fixar mais passando cola nas laterais. Ponha um livro ou algo com certo peso para fazer com o papelão fique mais firme no isopor.

Passo 4) Corte os palitos em tamanhos que contemple toda espessura do isopor, adicionada à do papelão, sobrando 1,5 cm na parte externa do tabuleiro do Geoplano.

Passo 5) Com todos os palitos cortados, perfure o isopor através dos buracos circulares já feitos no papelão. Após isso, despeje um pouco da cola e, em seguida, fixe o palito. Repita esse processo em todas as aberturas e espere secar.

Passo 6) Por fim, teste a firmeza dos palitos com os elásticos e veja se o processo ocorreu conforme as orientações. Caso necessário, sempre reforce mais com cola para que, tanto a base quanto os palitos fiquem firmes.

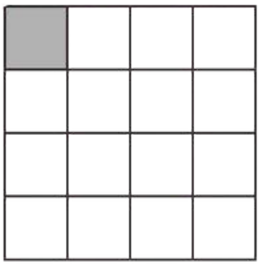
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 **FASE 1** **NÍVEL 2** **QUESTÃO 1**

A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

Quantos quadrados têm seus lados sobre as linhas do quadriculado, mas não contêm o quadradinho cinza?



A) 26
B) 24
C) 15
D) 19
E) 18

MATERIAL MANIPULÁVEL

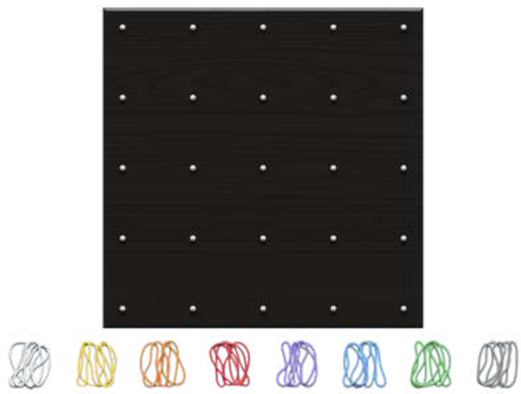


Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

Para resolução deste problema, será proposto o uso do **Geoplano**. Utilize o Geoplano para identificar e representar todos os quadrados que podem ser formados no tabuleiro, observando seus tamanhos e posições. Para facilitar a visualização, use ligas elásticas de cores diferentes, atribuindo uma cor para cada quadrado. Veja que isso ajudará a comparar os quadrados, perceber padrões e evitar confusões.

Com base nas formas construídas, pense em estratégias que possam ajudar a resolver o problema. Observe as regularidades, experimente mudar a posição dos quadrados e registre o que for descobrindo.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 1**

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 1**

DICAS E SUGESTÕES

Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa,** a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA | **DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL** | **PLENÁRIA** | **CONSENSO**

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

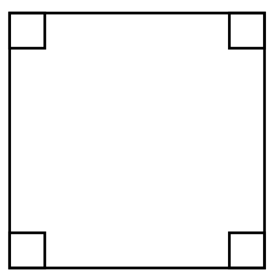
O problema proposto aborda quadrados escritos sob a malha quadriculada. Para isso, compreendamos melhor o que é um quadrado, a malha quadriculada e como realizar a contagem desses quadrados.

O que é um quadrado?

Matematicamente, um quadrado é uma figura geométrica plana fechada classificada como um polígono regular de quatro lados, com as seguintes propriedades definidoras:

- Quatro lados congruentes (ou seja, todos os lados com o mesmo comprimento);
- Dois ângulos opostos de 90º.

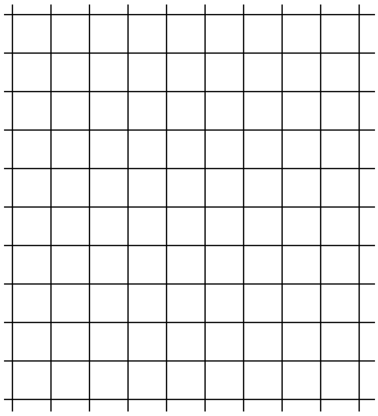
Por consequência, todos os ângulos serão de 90º.



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 1**

Uma malha quadriculada (ou grade quadrada) é uma subdivisão regular do plano, composta por linhas horizontais e verticais igualmente espaçadas, que formam uma rede de quadrados congruentes, chamados de **células** ou **quadrículas**.



A malha quadriculada possui duas propriedades interessantes:

- **Regularidade:** todos os quadrados da malha são congruentes, pois possuem lados de mesmo comprimento e ângulos retos.
- **Simetria:** a malha tem simetrias horizontais, verticais e rotacionais (em 90°, 180°, etc.), refletindo a estrutura dos inteiros no plano.

Uma habilidade importante na resolução do problema é saber quantos quadrados diferentes podem ser formados em uma malha de tamanho conhecido. Para isso, usa-se o seguinte raciocínio:

- Em um tabuleiro com 4 linhas e 4 colunas (formando uma grade 4×4), podemos formar:
  - 16 quadrados de lado 1 (um em cada célula),
  - 9 quadrados de lado 2 (cada um ocupa uma área 2×2),
  - 4 quadrados de lado 3,
  - 1 quadrado de lado 4.

A regra geral para encontrar quantos quadrados de lado n cabem em uma malha m × m é:
$(m - n + 1)^2$

Exemplo: Considerando o tabuleiro anterior (4×4), vamos encontrar quantos quadrados de lado 2 é possível formar:

- $m = 4$
- $n = 2$

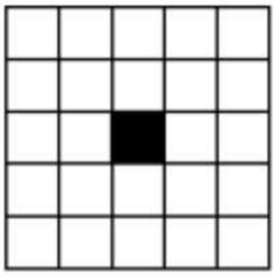
$$(m - n + 1)^2 = (4 - 2 + 1)^2 = 3^2 = 9.$$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

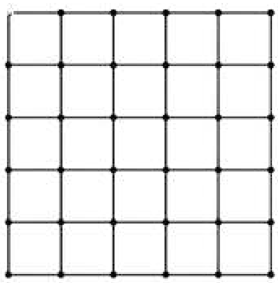
2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 1

PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

(Banco de Questões da OBMEP 2018 - N1 - Q2): Quadrado cheio de quadrados.
Na figura a seguir, temos um quadrado 5×5 que contém um quadrado preto central. Existe uma coleção de quadrados com lados paralelos aos lados do tabuleiro com dimensões que variam de 1×1 a 5×5 formados pelos quadradinhos da figura. Quantos elementos dessa coleção contém o quadrado escuro preto?



(Banco de Questões da OBMEP 2018 - N1 - Q11): São muitos quadrados.
O quadriculado da figura abaixo é composto por 25 pequenos quadrados unitários. Determine quantos quadrados com vértices sobre os pontos da figura e lados sobre os segmentos da figura existem?



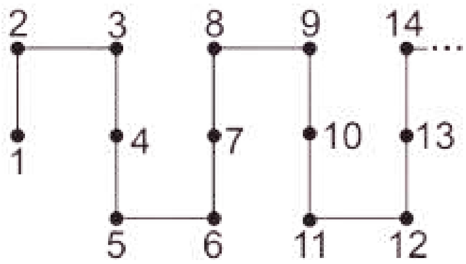
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 2**

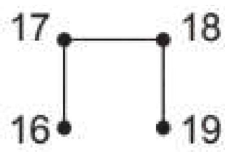
A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

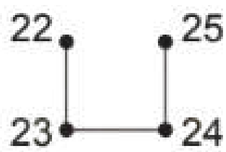
PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

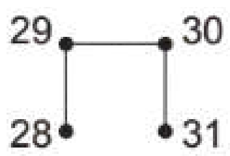
Os números de 1 a 50 foram escritos numa linha zigue-zague, de acordo com o padrão indicado na figura.

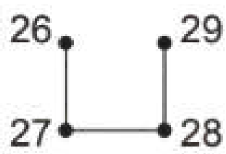


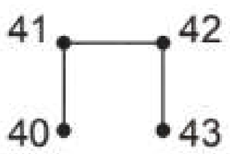
Qual das alternativas mostra uma parte desse zigue-zague?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

MATERIAL MANIPULÁVEL

Para resolução deste problema, será proposto o uso do **Geoplano**. Utilize o Geoplano para compreender como a linha em zigue-zague se comporta. Observe a possibilidade de padrões e anote todas as observações realizadas. Elabore estratégias que podem auxiliar na solução do problema.

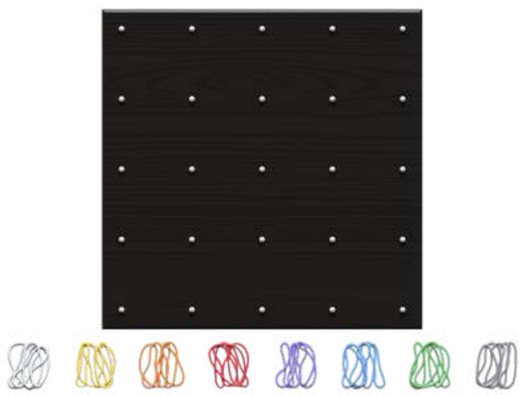


Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 **FASE 1** **NÍVEL 2** **QUESTÃO 2**

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 2**

DICAS E SUGESTÕES

Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

____

____

____

____

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa,** a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA | **DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL** | **PLENÁRIA** | **CONSENSO**

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

O problema proposto traz à tona a ideia de múltiplos, no caso, de números naturais. Para isso, entendamos o que é um múltiplo de um número natural.

Definição: Dizemos que um número natural **a** é múltiplo de um número natural **b** quando existe um outro número natural **k**, tal que

$$a = b \times k$$

Em outras palavras, um múltiplo de um número é o resultado da multiplicação desse número por um número natural (0, 1, 2, 3...). Denotamos por **M(b)** como sendo os "múltiplos do número natural **b**.

Exemplo: Múltiplos de 4.
M(4) = {0, 4, 8, 12, ...} $\Rightarrow$ M(4) = {4 × 0, 4 × 1, 4 × 2, 4 × 3, ...}

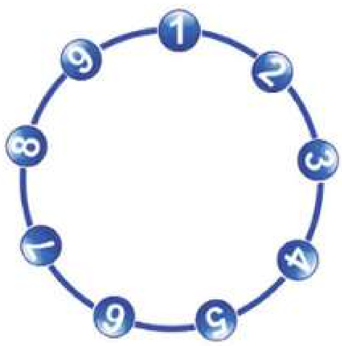
Dito isto, perceba que os múltiplos de um número natural possuem um determinado ***padrão*** para encontrar qualquer múltiplo deste número natural específico. Por exemplo: 54 é múltiplo de 9, pois o 9 é *adicionado a ele mesmo* 6 vezes (9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9). Esse é o padrão que é falado aqui: a soma sucessiva de um valor fixo numa quantidade determinada de vezes.

Vejamos a aplicação desse conceito em outros problemas. Fique à vontade de usar o Geoplano para visualizar melhor e compreender os próximos problemas.

PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

(OBMEP 2023 - F1 - N2 - Q4): José utilizou exatamente 2023 peças quadradas de 1 cm de lado para preencher vários tabuleiros retangulares de 7 cm por 17 cm. Quantos tabuleiros José conseguiu preencher?
A) 717
B) 177
C) 117
D) 71
E) 17

(OBMEP 2016 - F1 - N2 - Q11): Luciana marcou os números de 1 a 9 em uma circunferên - cia, como na figura. A partir do número 1, ela começou a pular de 4 em 4. No primeiro pulo ela foi do 1 ao 5, no segundo, do 5 ao 9, no terceiro do 9 ao 4 e assim por diante. Depois e pular 1000 vezes, em que número ela parou?
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



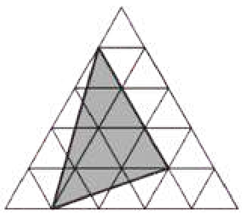
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 4**

A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

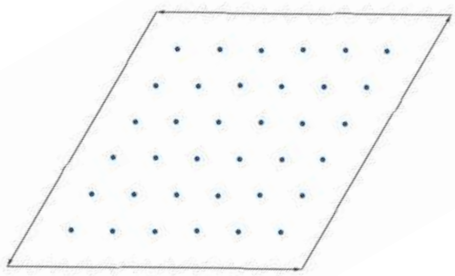
A figura apresenta uma malha triangular formada por triângulos equiláteros pequenos, cada um com área igual a 1 cm². Qual é a área, em centímetros quadrados, da região cinza?



A) 11
B) 7
C) 10
D) 8
E) 9

MATERIAL MANIPULÁVEL

Para resolução deste problema, será proposto a adaptação de um Geoplano: o **Geoplano de Base Paralelogramo Regular**. Possui basicamente as mesmas características do Geoplano tradicional, porém, ao invés das ligas formarem quadrados, elas formarão triângulos equiláteros. Utilize o Material para visualizar o problema, enxergar as características dos triângulos equiláteros mais de perto, bem como na manipulação deles através do Geoplano. Anote a estratégia utilizada e as observações realizadas ao longo do raciocínio do problema.



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 4**

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

____

____

____

____

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

____

____

____

____

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 4**

DICAS E SUGESTÕES

Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

___

___

___

___

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa,** a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA | **DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL** | **PLENÁRIA** | **CONSENSO**

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

O problema em questão trata da ideia de triângulos, especificamente o triângulo equilátero, e suas propriedades. Para essa compreensão, entendamos o que é um triângulo equilátero e como identificar as suas propriedades.

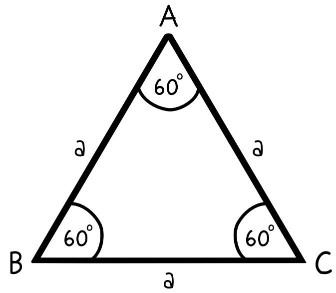
Em Geometria Euclidiana, triângulo é uma figura geométrica plana formada por três segmentos de reta que se encontram dois a dois em três pontos não colineares. Esses pontos são denominados vértices, e os segmentos que os unem são os lados do triângulo. A figura também possui três ângulos internos, determinados pela interseção dos lados.

Formalmente, um triângulo é a união de três pontos A, B e C no plano, tais que os segmentos AB, BC e CA são segmentos distintos, com A, B e C não colineares.

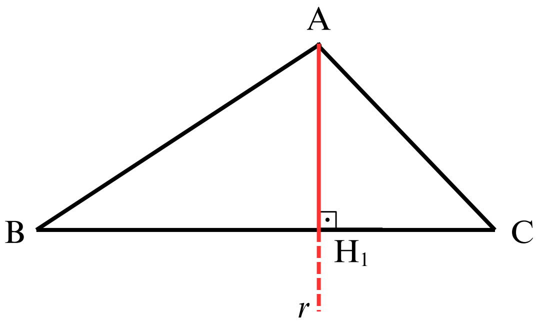
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 **FASE 1** **NÍVEL 2** **QUESTÃO 4**

Um triângulo equilátero é um tipo especial de triângulo com os três lados congruentes, ou seja, todos os lados têm a mesma medida. Isso significa que o triângulo ABC é isósceles se, e somente se, os segmentos AB = BC = CD. Consequentemente, os três ângulos internos também são iguais, cada um medindo exatamente 60º, uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º

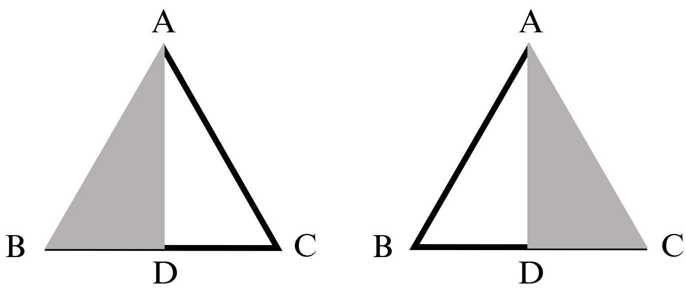


Altura de um triângulo: Num triângulo ABC, tracemos pelo ponto A uma reta *r* perpendicular à reta que contém o lado BC. Chamemos de H_1 o ponto de encontro da reta *r* com a reta $\overline{BC}$ e destaquemos o segmento $\overline{AH_1}$.



O segmento $\overline{AH_1}$ é uma altura do triângulo ABC.

Uma propriedade importante do triângulo equilátero: Veja a imagem abaixo:



Perceba que quando selecionamos o vértice A e um ponto D perpendicular a A sobre o lado BC, formam-se dois triângulos: ABD e ADC. Considerando a área dos triângulos ABC, ABD e ADC, temos as seguintes relações:

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

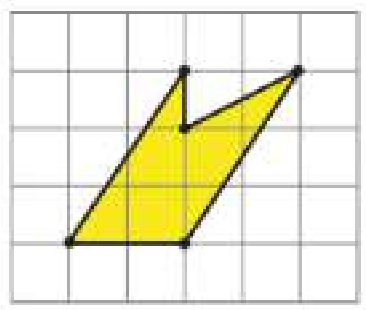
2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 4

- $A_{ABC} - A_{ABD} = A_{ADC}$
- $A_{ABC} - A_{ADC} = A_{ABD}$
- $A_{ABD} + A_{ADC} = A_{ABC}$

Isto é, A_{ABD} e A_{ADC} são triângulos congruentes.

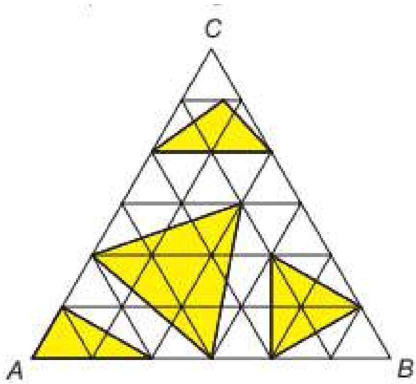
PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

(OBMEP 2023 - F1 - N2 - Q9): A área do polígono amarelo com vértices em pontos do quadriculado é 30 cm². Qual é a área, em cm², de cada quadradinho do quadriculado?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

(OBMEP 2016 - F1 - N2 - Q10): O triângulo equilátero ABC da figura é formado por 36 triângulos equiláteros menores, cada um deles com área 1. Qual é a soma das áreas dos quatro triângulos amarelos?



A) 13
B) 14
C) 15
D) 16
E) 17

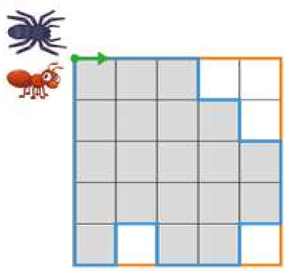
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 6**

A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

Uma formiga e uma aranha partem juntas do ponto indicado no quadriculado de 5 metros por 5 metros, no sentido horário, e caminham sempre 1 metro por minuto. A formiga anda na borda do quadriculado e a aranha na borda da região cinza, até retornarem ao ponto de partida. Durante quanto tempo elas andarão juntas, lado a lado?



A) 11 minutos
B) 6 minutos
C) 12 minutos
D) 7 minutos
E) 10 minutos

MATERIAL MANIPULÁVEL

Para resolução deste problema, será proposto o uso do **Geoplano**. Utilize o Geoplano para simular os caminhos da formiga e aranha, por meio de ligas de cores diferentes. Busque padrões e observe as características e possibilidades do problema. Elabore estratégias que podem auxiliar na solução do problema.

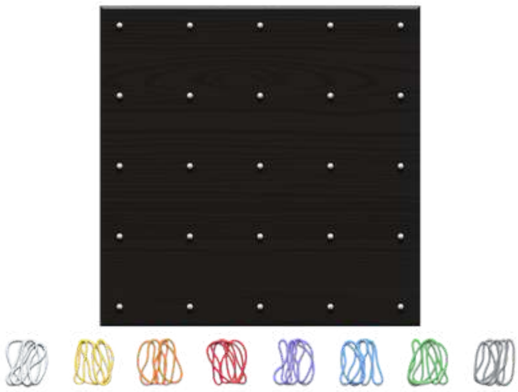


Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 6**

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 6**

DICAS E SUGESTÕES

Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

____

____

____

____

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa,** a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

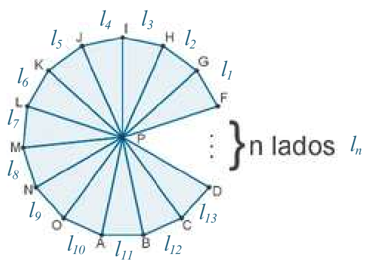
REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA | **DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL** | **PLENÁRIA** | **CONSENSO**

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Nesta questão, o assunto trabalhado é o de **Perímetro** de figura geométrica, especificamente, é considerado apenas uma parte do perímetro, aquele que a formiga e a aranha andam juntas. Para isso, vamos entender o que é perímetro.

Perímetro é a medida da extensão da fronteira de uma figura plana. No caso de polígonos, é definido como a soma dos comprimentos de seus lados consecutivos. Já para curvas fechadas, o perímetro corresponde ao comprimento total da curva. Representamos dessa forma:



$$2p = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n$$

$2p$ = perímetro

l_k = lados, com $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

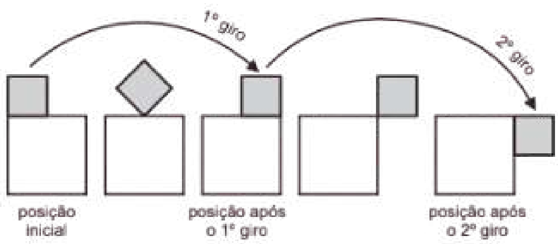
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 6**

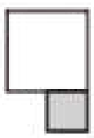
PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

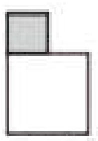
(Banco de Questões 2018 - N1 - Q18) Formigas... Sempre formigas!
Uma formiga está no vértice A de um retângulo ABCD e faz um movimento em direção a B seguindo o lado do retângulo. Após um segundo movimento, vai da mesma maneira para C. Depois de 3 movimentos, do mesmo modo ela chega a D e no quarto, mantendo o caminho sobre o lado, voltará para A. Depois de 2018 movimentos análogos aos anteriores, em qual vértice a formiga estará?

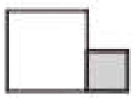
(OBMEP 2012 - F1 - N2 - Q3) Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.

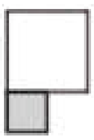


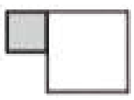
Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

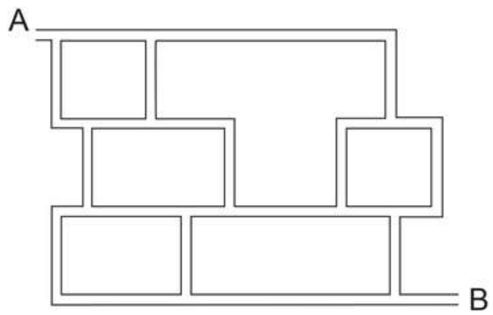
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 15**

A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

A formiguinha da OBMEP mora em um formigueiro com túneis horizontais e verticais, conforme mostrado na figura. Quantos são os caminhos possíveis para a formiguinha ir do ponto A ao ponto B, sempre percorrendo os túneis verticais de cima para baixo e sem passar mais de uma vez pelo mesmo lugar nos túneis horizontais?



A) 18
B) 36
C) 12
D) 24
E) 10

MATERIAL MANIPULÁVEL

Para resolução deste problema, será proposto o uso do **Geoplano**. Utilize o Geoplano para reproduzir os caminhos possíveis tomados pela formiguinha no formigueiro. Observe característi-cas e padrões importantes e relevantes. Elabore estratégias que podem auxiliar na solução do problema.

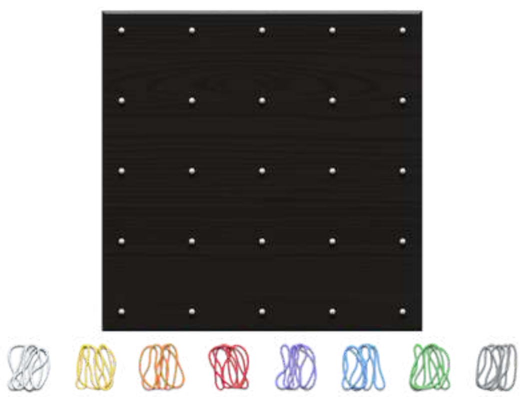


Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 15**

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 15**

DICAS E SUGESTÕES

Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa,** a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA | **DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL** | **PLENÁRIA** | **CONSENSO**

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Neste problema, o assunto trabalhado é o **Princípio Fundamental da Contagem,** pois trata das possibilidades da formiguinha sair de um ponto para outro, por meio de caminhos distintos. A seguir, apresentaremos uma breve formalização do conteúdo.

O **Princípio Fundamental da Contagem** (também chamado de **Princípio Multiplicativo**) é uma regra básica da combinatória que permite determinar o número total de possibilidades quando um evento é composto por etapas sucessivas e independentes.
Se um evento ocorre em k etapas, onde:

- A 1ª etapa tem n_1 possibilidades,
- A 2ª etapa tem n_2 possibilidades,
- ...

A k-ésima etapa tem n_k possibilidades, Então, o número total de maneiras distintas de o evento ocorrer é dado pelo produto:

$$N = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$$

Características relevantes:

1. **Independência das Etapas:** as escolhas em uma etapa não podem influenciar as opções das etapas seguintes.
   Exemplo:
   - Se você está escolhendo um sorvete (3 sabores) e uma cobertura (2 opções), a escolha do sabor não afeta as opções de escolha de cobertura.

   ! **Cuidado:** Se uma escolha eliminar opções futuras (ex.: "se escolher sorvete de limão, só pode usar mel como cobertura"), o PFC não se aplica diretamente.

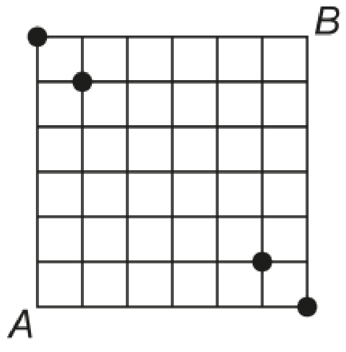
2. **Propriedade Comutativa:** advém da multiplicação, já que o total de possibilidades é o mesmo, independentemente da ordem em que as etapas são consideradas.
   Exemplo:
   - Calcular o número de *outfits* com 2 camisetas e 3 calças:
     - $2 \times 3 = 6$
     - $3 \times 2 = 6$ (o resultado é idêntico).

   ! ***Outfit:*** conjunto completo de roupas e acessórios usados em uma ocasião específica ou para expressar um determinado estilo.

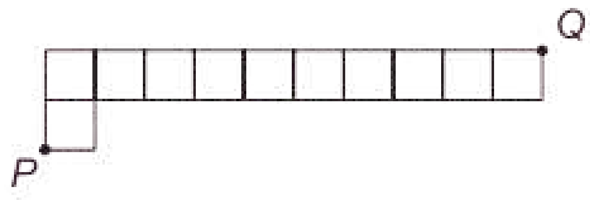
PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

1. (OBMEP 2023 - F1 - N2 - Q14) Uma formiga, inicialmente no vértice A, anda sobre as linhas do quadriculado da figura, sempre para a direita ou para cima, até chegar ao vértice B. De quantas maneiras ela pode fazer isso passando por algum dos quatro pontos destacados?

A) 4
B) 32
C) 36
D) 64
E) 74



2. (OBMEP 2018 - F1 - N2 - Q19) Para fazer um percurso do ponto P ao ponto Q da figura, uma formiguinha deve andar sobre os segmentos horizontais sempre para a direita e nunca passar duas vezes por um mesmo segmento vertical. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer esse percurso?



A) 3
B) 10
C) 20
D) 1024
E) 1536

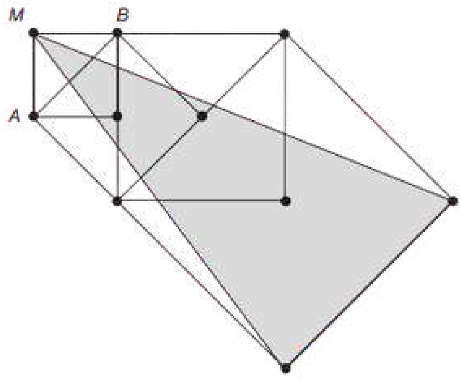
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 19

A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

A figura é formada por quatro quadrados, o primeiro com diagonal AB e os demais construídos sobre a diagonal do anterior. O segmento AB mede 1 cm. Qual é a área, em cm² , do triângulo sombreado?



A) $\frac{7}{2}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{5}{2}$

D) 4

E) 3

MATERIAL MANIPULÁVEL

Para resolução deste problema, será proposto o uso do **Geoplano**. Utilize o Geoplano para reproduzir a figura, observe padrões referentes ao crescimento dos lados, propriedades conhecidas, recrie o triângulo sombreado. Se necessário, use fórmulas.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 19**

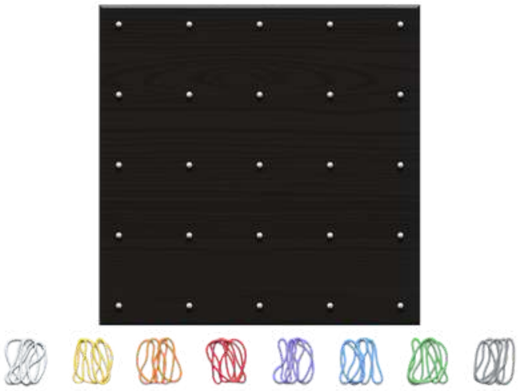


Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 **FASE 1** **NÍVEL 2** **QUESTÃO 19**

Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

DICAS E SUGESTÕES

Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa,** a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA **DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL** **PLENÁRIA** **CONSENSO**

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 19**

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

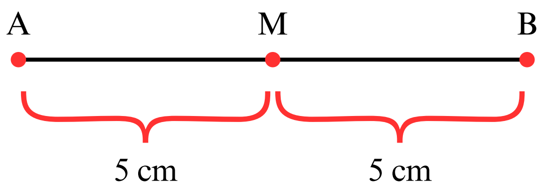
O problema proposto vem tratar de aspectos e propriedades relevantes da Geometria Plana, que tratam das ideias de **Ponto Médio, Postulado das Paralelas de Euclides, Área de Triângulo** e **Diagonais de um quadrado.** A seguir, vejamos um pouco mais sobre esses conteúdos.

1. Ponto Médio

O Ponto Médio M de um segmento é um ponto que pertence ao segmento e o divide em dois segmentos congruentes.

Exemplo:

- Seja o segmento $\overline{AB} = 10$ cm. Assim, $\overline{AM} = \overline{MB} = 5$ cm.

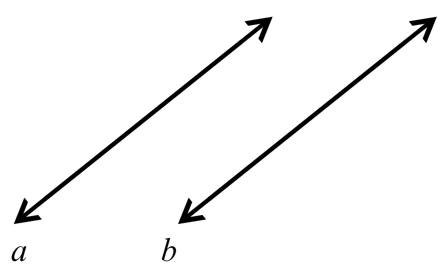


! Atenção: *Congruentes* significa "de mesma medida".

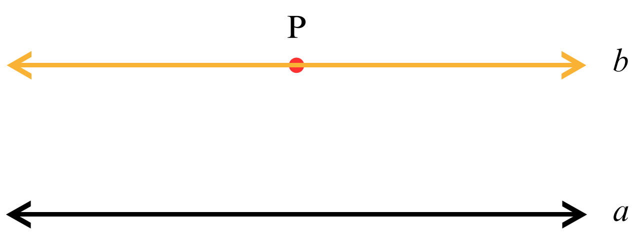
2. Postulado das Paralelas

Ao considerar que duas ou mais retas são paralelas, no mesmo plano, quando não possuem nenhum ponto em comum, há uma propriedade interessante chamado de Axioma de Euclides ou Postulado das Paralelas, que diz o seguinte:

*Por um ponto **P** fora de uma reta **a** passa uma única reta **b** paralela à reta **a**.*



Retas Paralelas

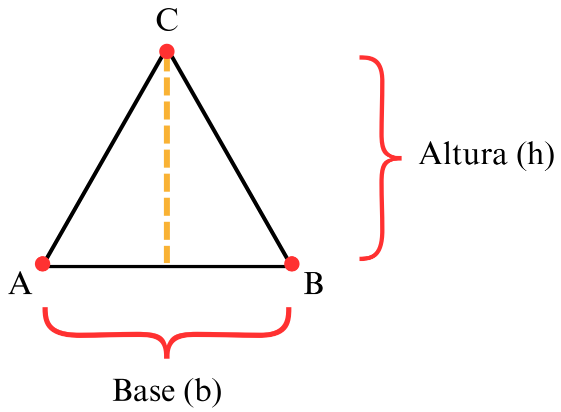


Postulado das Paralelas

3. Área de um triângulo

Dados três pontos A, B e C, não colineares, chama-se triângulo ABC a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

Exemplo:



> **!** **Atenção:** Os triângulos possuem uma condição de existência. Em qualquer triângulo, cada lado é menor do que a soma dos outros dois.

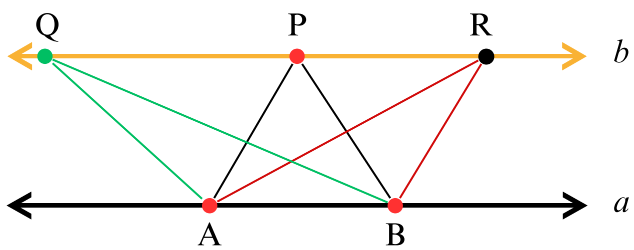
A área de um triângulo (A) é igual ao produto da medida da base pela medida da altura dividido por dois.

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Exemplo:

- Um triângulo cuja base é 10 cm e altura 4 cm, a sua área será a metade de 10×4 = metade de 40 cm², ou seja, 20 cm².

> **!** **Atenção:** Considere duas retas paralelas *a* e *b*. Fixando dois pontos A e B não coincidentes em *a*, para qualquer ponto tomado em *b*, todos os possíveis triângulos formados por esses três pontos possuirão a mesma área (A).



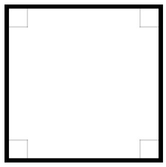
$A_{ABP} = A_{ABR} = A_{ABQ}$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 **FASE 1** **NÍVEL 2** **QUESTÃO 19**

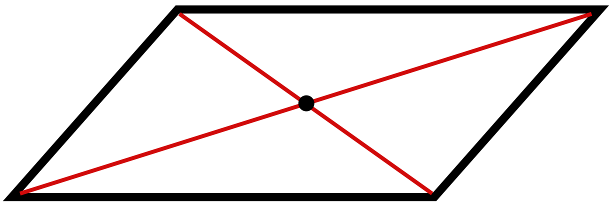
4. Quadrado

Um quadrado é um quadrilátero cujos quatro lados são congruentes e cujos dois ângulos opostos são retos (medem 90º), conforme mostrado ao lado.

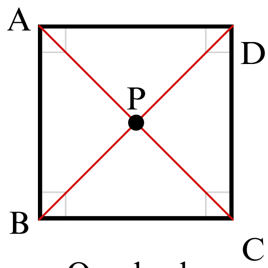


Os quadrados possuem uma propriedade interessante, decorrente dos **Paralelogramos**, uma vez que retângulos, losangos e quadrados são casos particulares de paralelogramos. Ela fala o seguinte:

Em qualquer paralelogramo (e também quadrado), as diagonais se cortam ao meio.



Paralelogramo



Quadrado

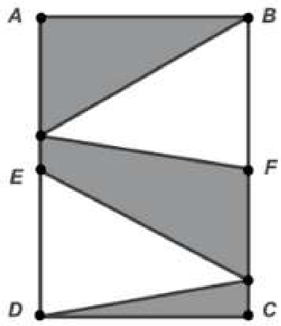
Perceba que:

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} = \overline{DP}$$

PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

1. (OBMEP 2021 - F1 - N4 - Q7) O retângulo ABCD da figura tem lados que medem 40 cm e 50 cm. Os pontos E e F são pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente. Qual é a soma das áreas das três partes de cor cinza?

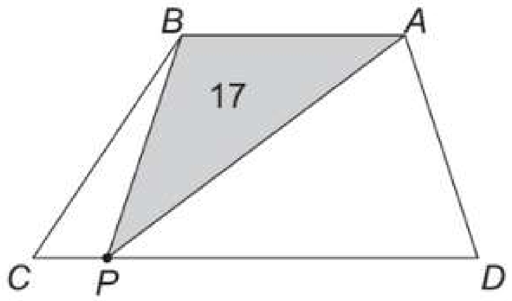
A) 400 cm²
B) 500 cm²
C) 900 cm²
D) 1.000 cm²
E) 2.000 cm²



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 19**

2. (OBMEP 2018 - F1 - N2 - Q11) No trapézio ABCD da figura, os lados AB e CD são paralelos e o comprimento de CD é o dobro do comprimento de AB. O ponto P está sobre o lado CD e determina um triângulo ABP com área igual a 17. Qual é a área do trapézio ABCD?



A) 32
B) 34
C) 45
D) 51
E) 68

GABARITO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

PROBLEMA 01

Questão 1
A) 26

Problema proposto 1
19

Problema proposto 2
55

PROBLEMA 02

Questão 2
B)

Problema proposto 1
E) 17

Problema proposto 2
E) 5

PROBLEMA 03

Questão 4
E) 9

Problema proposto 1
E) 6

Problema proposto 2
B) 14

PROBLEMA 04

Questão 6
D) 7 minutos

Problema proposto 1
Vértice C

Problema proposto 2
A

PROBLEMA 05

Questão 15
A) 18

Problema proposto 1
E) 74

Problema proposto 2
E) 1536

PROBLEMA 06

Questão 19
A) $\frac{7}{2}$

Problema proposto 1
D) 1.000 cm^2

Problema proposto 2
D) 51

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é a Matemática?** Uma abordagem elementar de suas ideias e métodos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. 568 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações – Volume Único.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. 936 p.

GATTEGNO, Caleb. **The Geoboard.** London: Educational Explorers, 1960. 32 p.

IEZZI, Gelson *et al*. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Combinatória e Probabilidade. v. 5, 10. ed., v. 5. São Paulo: Atual Editora, 2013.

IEZZI, Gelson; MACHADO, Antônio; DOLCE, Osvaldo. **Geometria Plana:** conceitos básicos. 1. ed. São Paulo, Atual, 2008. 215 p.

KAPLAN, Wilfred. **Geometria e Álgebra Linear.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1984. 392 p.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc Lars. **Matemática Discreta**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática.** 5. ed. Campinas: Autores Associados, 2006. 160 p.

MORGADO, Augusto César de Oliveira *et al*. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006.

SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2012.

THE MATH LEARNING CENTER. **Geoboard**. [2025]. Aplicativo online. Disponível em: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/. Acesso em: 25 ago. 2025.

APÊNDICE B – CADERNO DE ATIVIDADES – VERSÃO PROFESSOR(A)

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA OBMEP

METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Prova - Edição 2024

Caderno do Professor

Jeovano Pereira da Costa
Fabrício de Figueredo Oliveira

APRESENTAÇÃO

Olá, Professor(a)!

Esperamos que esteja tudo bem com você. É com grande entusiasmo que lhes apresentamos este material, elaborado especialmente para apoiá-lo (a) na jornada de preparação de seus estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP).

Nesta edição, você encontrará seis problemas propostos da primeira fase, nível 2 (voltado para alunos do 8º e 9º anos), do ano de 2024 de uma forma interativa, onde os quais possuem comentários e sugestões de questionamentos para serem feitos aos estudantes ao longo da realização da atividade.

Foi adotada uma ampliação à Metodologia de Resolução de Problemas fundamentada no tripé Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proposto por Onuchic e Allevato. A resolução dos problemas propostos seguirão onze passos para se alcançar a compreensão dos assuntos que o envolvem, passos esses que são: (1) proposição do problema; (2) Leitura Individual; (3) Leitura coletiva; (4) resolução do problema; (5) observar e incentivar; (6) registro das soluções na lousa; (7) demonstração do problema com o material manipulável; (8) plenária; (9) consenso; (10) formalização do conteúdo; (11) proposição de novos problemas.

Sabemos que parece desafiador, mas essa abordagem organiza o processo investigativo em passos claros e interligados, permitindo que os alunos planejem estratégias, testem hipóteses, revisem percursos e validem resultados. O Material Manipulável adotado será o Geoplano e este atuará como ponte entre a teoria e a prática, favorecendo a visualização de padrões, a descoberta de relações e o desenvolvimento do pensamento crítico.

Esperamos que este Caderno se torne seu material auxiliador no incentivo aos alunos de explorarem a Matemática por outra ótica, oferecendo desafios instigantes, momentos de cooperação e, sobretudo, a alegria dos alunos em “ver e tocar” conceitos que antes pareciam distantes. Que seus alunos aceitem o convite para experimentar, persistir e celebrar cada conquista — pequena ou grande — porque é na jornada, e não apenas na chegada, que se constrói o verdadeiro prazer pela matemática.

Boa aula!

SUMÁRIO

MATERIAIS MANIPULÁVEIS

GEOPLANO

O QUE É?

Desenvolvido por Caleb Gattegno, educador e matemático nascido na Etiópia, em meados da década de 1950, o Geoplano é um recurso didático manipulável utilizado no ensino da Geometria, com o objetivo de favorecer a compreensão de conceitos geométricos por meio da experimentação e da visualização concreta.

Ele é um objeto de superfície plana (sendo madeira ou outro material rígido) na qual são dispostos pinos (que podem ser pregos) equidistantes que formam uma malha regular - usualmente no formato quadrado, mas podendo também ser triangular ou isométrica. Sobre essa malha, elásticos são esticados entre os pinos para representar figuras geométricas planas, como triângulos, quadriláteros, polígonos em geral, entre outros.

Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

Para auxiliar nos problemas desse caderno de atividades, será indicado a seguir a construção de dois Geoplanos, 10 x 10 pinos ou pregos, um com base quadrada e o outro com base no formato de paralelogramo, cujos espaços sejam suficientes para auxiliar nas soluções dos problemas que esses materiais serão propostos.

GEOPLANO DE BASE QUADRADA

Para construir o Geoplano de base quadrada é preciso saber que um quadrado possui todos os lados iguais e isso vai acarretar também que todos os "pinos" serão igualmente espaçados, tanto na horizontal quanto na vertical. Assim, a seguir, listaremos os materiais necessários para confecção do Geoplano.

Esta parte do caderno de atividades é destinada à compreensão do que é um Geoplano, seus elementos e como podemos interpretá-los matematicamente.

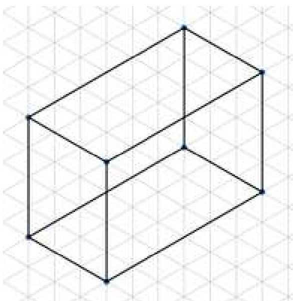
Alguns questionamentos podem ser levantados pelos alunos ou pelo próprio mediador da atividade, os quais são sugeridas as respostas abaixo:

1. O que é uma superfície plana?
Uma superfície plana pode ser considerada como aquela que não apresenta curvaturas, ou seja, todos os seus pontos estão no mesmo plano geométrico.

2. O que são objetos equidistantes?
Quando dizemos que algo é equidistante, significa que a medida da distância entre ele e cada um dos elementos de comparação é igual.

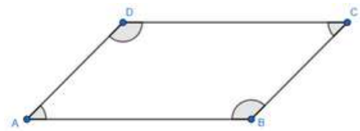
3. O que é o formato isométrico?
Formato isométrico é uma forma de representar objetos tridimensionais em um desenho bidimensional, preservando suas proporções.

Exemplo



4. O que é um paralelogramo?
É um quadrilátero que tem os lados opostos paralelos, com as seguintes características:

- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
- $A + B + C + D = 360^o$
- *Perímetro* $= AB + BC + CD + DA$
- *Podemos ver um paralelogramo ABCD como um tipo particular de trapézio em que, além das bases (*$\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$*), os outros dois lados (*$\overline{BC}$ *e* $\overline{DA}$*) também são paralelos.*



É interessante que o mediador esteja preparado para esses questionamentos, para preencher as lacunas de aprendizagem que possam advir da aplicação da atividade.

MATERIAIS MANIPULÁVEIS

GEOPLANO

RECURSOS NECESSÁRIOS

- Folha de isopor quadrada, de lado 22 cm (dimensões 22 cm × 22 cm);
- Folha de papelão quadrada, de lado 22 cm (dimensões 22 cm × 22 cm);
- Palitos de churrasco;
- Estilete (com a supervisão do adulto);
- Cola para isopor;
- Esquadro;
- Lápis;
- Elásticos de diferentes cores e tamanhos.

COMO CONSTRUIR?

Passo 1) No papelão, use o lápis e o esquadro para desenhar uma malha quadriculada, distanciando as linhas horizontais e verticais, entre si, em 2 cm. Você obterá algo parecido com a imagem abaixo:

Passo 2) Nas intersecções entre as linhas horizontais e verticais (pontos de encontro das linhas) faça furos circulares com a ajuda do estilete, lápis ou os palitos de churrasco, sem danificar o papelão. Neles passarão os palitos que serão os pinos.

Passo 3) Cole o papelão no isopor e espere secar bem. Se necessário, tente fixar mais passando cola nas laterais. Ponha um livro ou algo com certo peso para fazer com o papelão fique mais firme no isopor.

Importante que, tanto na folha de isopor quanto na de papelão, sejam feitas demarcações com auxílio da régua, com o intuito de garantir precisão nos cortes.

Para construir as bases de isopor e papelão, aconselha-se o uso de estilete.

Durante a confecção do Geoplano, especificamente na sequência dos passos, é interessante que o professor mediador, vá introduzindo alguns conceitos de forma indireta, no levantamento de questionamentos para serem trabalhados com os estudantes.

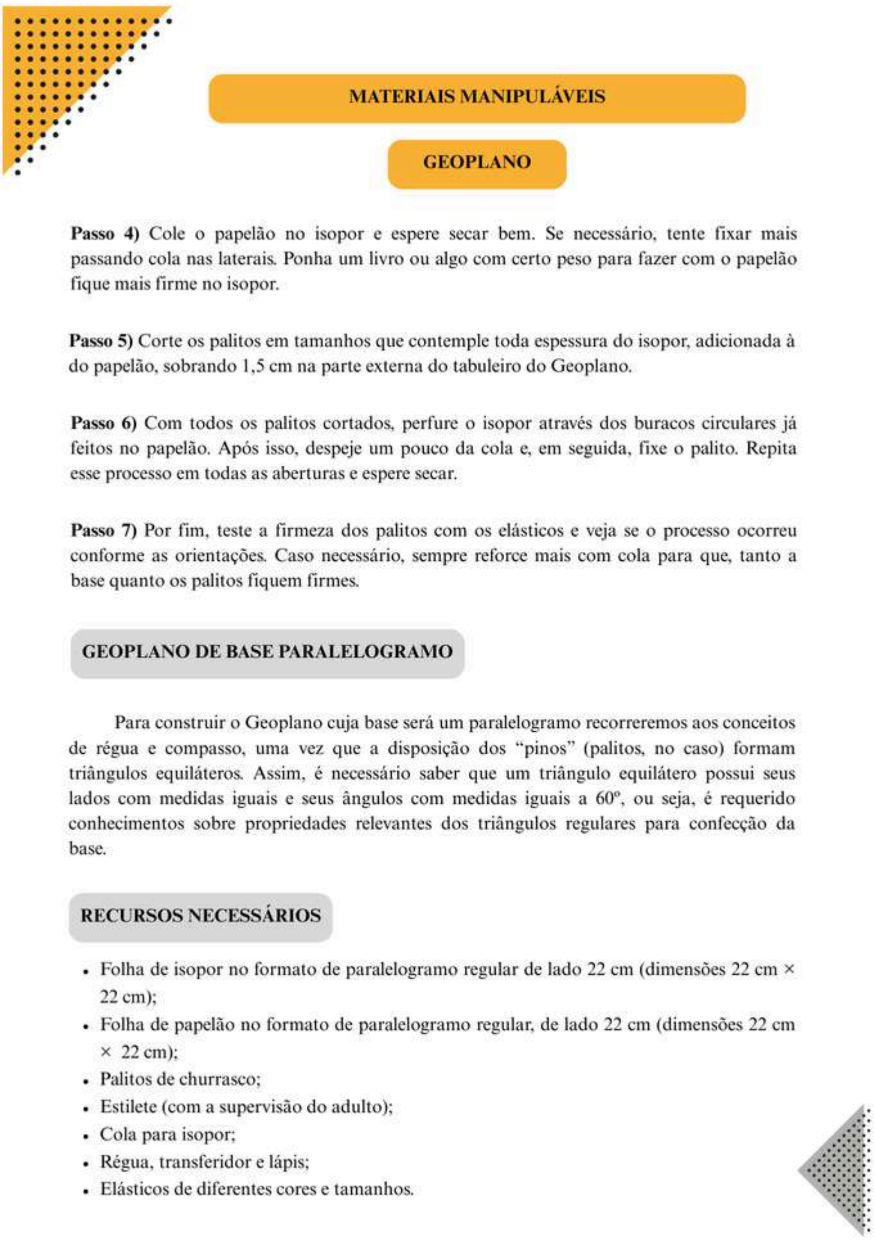
Por exemplo:

- *Que tipos de retas podem ser utilizadas na construção de uma malha quadriculada? Quais as características? Como construir? Do que preciso para construir essas retas?*

São conceitos matemáticos interessantes de propor.

Garanta que as duas bases, após coladas, estejam bastante firmes assim como os pinos, pois ao usar os elásticos eles farão força e poderão descolar os pinos, ou dependendo do tamanho do elástico e da figura, até a base.

Para essa parte da atividade, é interessante que o professor destine duas aulas para construir o Geoplano de base quadrada, antes de introduzi-lo na resolução dos problemas, já que ele será essencial no processo de solução.


MATERIAIS MANIPULÁVEIS

GEOPLANO

Passo 4) Cole o papelão no isopor e espere secar bem. Se necessário, tente fixar mais passando cola nas laterais. Ponha um livro ou algo com certo peso para fazer com o papelão fique mais firme no isopor.

Passo 5) Corte os palitos em tamanhos que contemple toda espessura do isopor, adicionada à do papelão, sobrando 1,5 cm na parte externa do tabuleiro do Geoplano.

Passo 6) Com todos os palitos cortados, perfure o isopor através dos buracos circulares já feitos no papelão. Após isso, despeje um pouco da cola e, em seguida, fixe o palito. Repita esse processo em todas as aberturas e espere secar.

Passo 7) Por fim, teste a firmeza dos palitos com os elásticos e veja se o processo ocorreu conforme as orientações. Caso necessário, sempre reforce mais com cola para que, tanto a base quanto os palitos fiquem firmes.

GEOPLANO DE BASE PARALELOGRAMO

Para construir o Geoplano cuja base será um paralelogramo recorreremos aos conceitos de régua e compasso, uma vez que a disposição dos "pinos" (palitos, no caso) formam triângulos equiláteros. Assim, é necessário saber que um triângulo equilátero possui seus lados com medidas iguais e seus ângulos com medidas iguais a 60º, ou seja, é requerido conhecimentos sobre propriedades relevantes dos triângulos regulares para confecção da base.

RECURSOS NECESSÁRIOS

- Folha de isopor no formato de paralelogramo regular de lado 22 cm (dimensões 22 cm × 22 cm);
- Folha de papelão no formato de paralelogramo regular, de lado 22 cm (dimensões 22 cm × 22 cm);
- Palitos de churrasco;
- Estilete (com a supervisão do adulto);
- Cola para isopor;
- Régua, transferidor e lápis;
- Elásticos de diferentes cores e tamanhos.

Acompanhe os passos de perto com os alunos e observe-os no processo de criação do Geoplano de base quadrada.

No recorte dos palitos, veja como eles calculam as medidas dos tamanhos dos palitos e como eles cortam.

Questione:

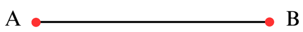
- *Qual a espessura do isopor?*
- *Qual a espessura do papelão?*
- *1,5 cm a mais é suficiente para colocar os elásticos?*
- *Afinal, quanto deve ser o tamanho de cada palito?*

Esses questionamentos ajudam a perceber que a Matemática está sendo usada ao longo de todo processo.

Já no Geoplano de base paralelogramo, é interessante que os alunos façam primeiro um teste no caderno ou numa folha separada, compreenda a construção da figura para que, com a prática, construam sem erros a base do próximo paralelogramo.

Passos para construção de um Paralelogramo com régua e compasso:

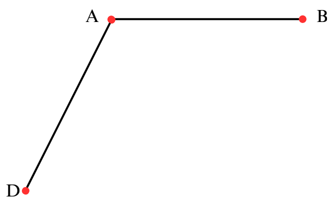
1. Desenhe um segmento de reta AB.



2. Considere o mesmo tamanho do lado adjacente do paralelogramo.

3. No ponto A, construa uma semirreta que forme um ângulo de 60º.

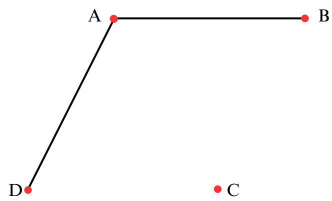
4. Com o compasso, marque nessa direção a medida do outro lado e chame esse ponto de D.



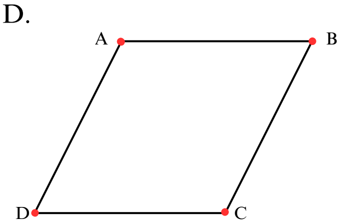
5. Com centro em D e abertura igual a AB, trace um arco.

6. Agora, com centro em B e abertura igual a AD, trace outro arco que intercepte o anterior.

7. Marque o ponto de interseção como C.



8. Una os pontos B e C, depois C e D.



9. O quadrilátero ABCD formado é um paralelogramo.

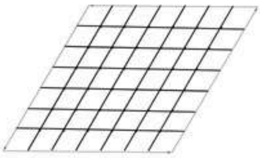
MATERIAIS MANIPULÁVEIS

GEOPLANO

COMO CONSTRUIR?

Na construção do tabuleiro - recorte do isopor e papelão - utilize o transferidor para fazer a medição do ângulo de 60º dos lados adjacentes do paralelogramo, pois esse fator é importante para distribuição e disposição dos palitos.

Passo 1) No papelão, utilize a régua para espaçar, em 2 cm, as linhas horizontais entre si e sobre elas, com o transferidor, medir 60º da direita para esquerda (ou 120º da esquerda para direita) para fazer as marcações espaçadas também em 2 cm e assim construir as linhas verticais. A forma criada ficará mais ou menos assim:



Passo 2) Nas intersecções entre as linhas horizontais e verticais (pontos de encontro das linhas) faça furos circulares com a ajuda do estilete, lápis ou os palitos de churrasco, sem danificar o papelão. Neles passarão os palitos que serão os pinos.

Passo 3) Cole o papelão no isopor e espere secar bem. Se necessário, tente fixar mais passando cola nas laterais. Ponha um livro ou algo com certo peso para fazer com o papelão fique mais firme no isopor.

Passo 4) Corte os palitos em tamanhos que contemple toda espessura do isopor, adicionada à do papelão, sobrando 1,5 cm na parte externa do tabuleiro do Geoplano.

Passo 5) Com todos os palitos cortados, perfure o isopor através dos buracos circulares já feitos no papelão. Após isso, despeje um pouco da cola e, em seguida, fixe o palito. Repita esse processo em todas as aberturas e espere secar.

Passo 6) Por fim, teste a firmeza dos palitos com os elásticos e veja se o processo ocorreu conforme as orientações. Caso necessário, sempre reforce mais com cola para que, tanto a base quanto os palitos fiquem firmes.

Nas dicas sobre a construção da base do Geoplano - página anterior - perceba que foi necessário usar um ângulo de 60º graus.

Sugira o uso do transferidor para desenhar esse ângulo e, com o compasso, fazer a devida abertura.

Nessa parte da construção, vários conceitos podem ser trabalhados, principalmente envolvendo lados e ângulos, como por exemplo:

- *Lados adjacentes;*
- *Retas paralelas;*
- *Cálculo do ângulo a partir do transferidor;*
- *Ângulos suplementares;*
- *Ângulos alternos e internos.*

Os mesmos diálogos considerados na confecção dos "pinos" do Geoplano de base quadrada podem ser refeitos nessa parte.

É válido ressaltar que, como sugestão, a construção desse Geoplano seja em dias diferentes do anterior, para averiguar se os alunos conseguiram fixar as ideias de construção do Geoplano de base quadrada e extrapolá-las na construção do presente material.

Se a turma demonstrar proatividade e engajamento, o mediador pode instigá-los a entender mais sobre espessuras de formas geométricas, sobre qual elemento das formas geométricas tridimensionais podemos associá-las: lado, comprimento ou altura.

As quantidades dos outros materiais também podem ser trabalhadas com o intuito de otimizar o processo, evitando desperdícios desnecessários.

Instigá-los: *como a Matemática pode ajudar a evitar o desperdício de materiais? Como otimizar o processo?*

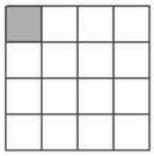
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 1**

A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

Quantos quadrados têm seus lados sobre as linhas do quadriculado, mas não contêm o quadradinho cinza?



A) 26
B) 24
C) 15
D) 19
E) 18

MATERIAL MANIPULÁVEL

Para resolução deste problema, será proposto o uso do **Geoplano**. Utilize o Geoplano para identificar e representar todos os quadrados que podem ser formados no tabuleiro, observando seus tamanhos e posições. Para facilitar a visualização, use ligas elásticas de cores diferentes, atribuindo uma cor para cada quadrado. Veja que isso ajudará a comparar os quadrados, perceber padrões e evitar confusões.

Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

Com base nas formas construídas, pense em estratégias que possam ajudar a resolver o problema. Observe as regularidades, experimente mudar a posição dos quadrados e registre o que for descobrindo.

O problema a seguir é a questão 1, da prova de 2024, fase 1, nível 2.

Neste momento, todos os grupos já podem está formados. Fique à vontade de dividir a turma em quantos grupos achar necessário.

Analise seu ambiente e veja qual a melhor forma de proceder.

Aqui, peça para os alunos lerem a parte **MATERIAL MANIPULÁVEL,** para que vejam as orientações e dicas de como usar o material para ajudar na solução do problema.

Para essa atividade pode ser destinada duas aulas de 50 minutos cada, pois além da solução ainda haverá os registros feitos pelos alunos, a resolução do problema, demonstração no material, a plenária, a formalização do conteúdo e os novos problemas propostos parecidos com o problema atual.

"Utilizar o Geoplano para identificar e representar todos os quadrados que podem ser formados no tabuleiro [...]"

Pretende-se que os alunos percebam através do Material Manipulável as possibilidades de construção dos quadrados propostos no problema, o casos que podem ser considerados e os que não.

"[...] observando seus tamanhos e posições. [...]"

Os quadrados formados podem ter tamanhos diferentes. Considerando o quadrado cujo menor lado seja 1 unidade de medida (u.m.), teremos:

- quadrado de lado 1 u.m.;
- quadrado de lado 2 u.m.;
- quadrado de lado 3 u.m.

Um questionamento intrigante: *por quê não pode existir quadrado de lado 4 u.m.?*

"[...] Observe as regularidades, experimente mudar a posição dos quadrados e registre o que for descobrindo."

Perceba, no problema, onde se pode construir os quadrados de lados 1 u.m., 2 u.m. e 3 u.m., e com isso, questionamentos podem surgir:

- *Pode ser em qualquer lugar?*
- *Todas as possibilidades são favoráveis?*

O registro é para que os estudantes não se percam no raciocínio


RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 1

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

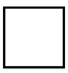
Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

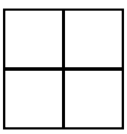
Para esse problema, o docente pode questionar:

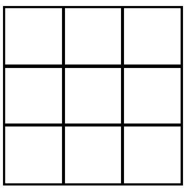
- *Qual é a dimensão do quadriculado? O que é dimensão?*
- *O que está incluso no termo "quadrados com lados sobre as linhas do quadriculado"?*
- *"Não contêm o quadradinho cinza" significa o quê?*
- *Existe mais de uma forma de começar a contagem?*
- *Se aumentarmos o quadriculado, o que muda na quantidade de quadrados possíveis?*
- *Há alguma regularidade ou padrão que podemos usar para não precisar contar um por um?*
- *Como garantir que nenhum quadrado foi contado duas vezes?*

PROPOSTA DE SOLUÇÃO ESCRITA

Veja abaixo as possibilidades de quadrados que podemos construir:


1 u.m.


2 u.m.


3 u.m.

Note que pode-se formar:

- 15 quadrados de lado 1 u.m.;
- 8 quadrados de lado 2 u.m.;
- 3 quadrados de lado 3 u.m.

que não contém o quadrado cinza.

Logo,

$$15 + 8 + 3 = 26 \text{ u.m.}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra A) 26.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 1

DICAS E SUGESTÕES

Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa**, a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA | DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL | PLENÁRIA | CONSENSO

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

O problema proposto aborda quadrados escritos sob a malha quadriculada. Para isso, compreendamos melhor o que é um quadrado, a malha quadriculada e como realizar a contagem desses quadrados.

O que é um quadrado?

Matematicamente, um quadrado é uma figura geométrica plana fechada classificada como um polígono regular de quatro lados, com as seguintes propriedades definidoras:

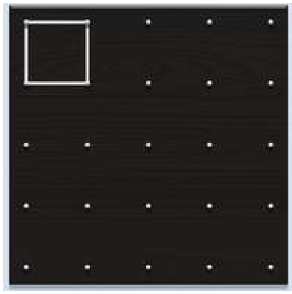
- Quatro lados congruentes (ou seja, todos os lados com o mesmo comprimento);
- Dois ângulos opostos de 90º.

Por consequência, todos os ângulos serão de 90º.

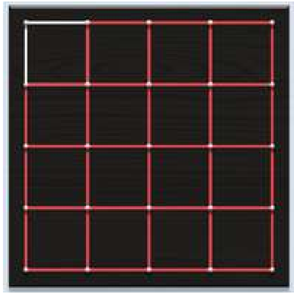
PROPOSTA DE SOLUÇÃO COM O GEOPLANO

Com o auxílio do Geoplano, os estudantes podem estruturar a solução anterior da seguinte forma:

Usando uma liga cinza, construir o quadrado no canto superior esquerdo do Geoplano.

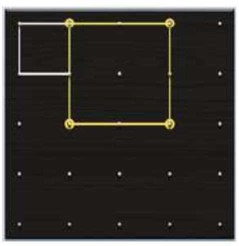


Com elásticos vermelhos, construir os quadrados de lado 1 u.m.



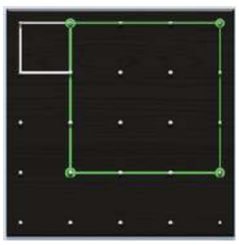
Com elásticos amarelos, construir os quadrados de lado 2 u.m.
Podemos criar, na horizontal:

- dois, onde o quadrado amarelo está;
- três, descendo uma linha;
- três descendo mais uma linha.



Por fim, com elásticos verdes, construir os quadrados de lado 3 u.m.
Podemos criar, na horizontal:

- um, onde o quadrado verde está;
- Dois, descendo uma linha.



Essa é uma solução possível dentre as possíveis construídas pelos alunos.

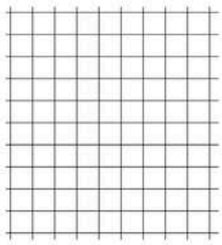
Na plenária, deve ser discutidas e refletidas sobre todas as soluções e deve-se priorizar a solução mais adequada.

Na formalização do conteúdo, é importante que os estudantes observem a ministração do professor e anotem aquilo que não está contido no material.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 1**

Uma malha quadriculada (ou grade quadrada) é uma subdivisão regular do plano, composta por linhas horizontais e verticais igualmente espaçadas, que formam uma rede de quadrados congruentes, chamados de **células** ou **quadrículas**.



A malha quadriculada possui duas propriedades interessantes:

- **Regularidade:** todos os quadrados da malha são congruentes, pois possuem lados de mesmo comprimento e ângulos retos.
- **Simetria:** a malha tem simetrias horizontais, verticais e rotacionais (em 90°, 180°, etc.), refletindo a estrutura dos inteiros no plano.

Uma habilidade importante na resolução do problema é saber quantos quadrados diferentes podem ser formados em uma malha de tamanho conhecido. Para isso, usa-se o seguinte raciocínio:

- Em um tabuleiro com 4 linhas e 4 colunas (formando uma grade 4×4), podemos formar:
    - 16 quadrados de lado 1 (um em cada célula),
    - 9 quadrados de lado 2 (cada um ocupa uma área 2×2),
    - 4 quadrados de lado 3,
    - 1 quadrado de lado 4.

A regra geral para encontrar quantos quadrados de lado n cabem em uma malha m × m é: $(m-n+1)^2$

Exemplo: Considerando o tabuleiro anterior (4×4), vamos encontrar quantos quadrados de lado 2 é possível formar:

- m = 4
- n = 2

$$(m - n + 1)^2 = (4 - 2 + 1)^2 = 3^2 = 9.$$

A ideia de formalizar o conteúdo de **Malha Quadriculada** e abordar as propriedades de **Regularidade** e **Simetria** se faz necessário, para que os alunos compreendam que podem construir quadrados congruentes em outras posições no tabuleiro proposto do problema.

A regularidade dos quadrados de 1 u.m., 2 u.m. e 3 u.m. de lado, que podem ser construídos seguindo a proposta do problema.

A simetria no que tange a orientação da construção dos novos quadrados: acima, abaixo, à esquerda ou à direita.

Já a propriedade de existir $(m - n + 1)^2$ quadrados de lado n em uma malha m × m garante a quantidade de lados 1 u.m., 2 u.m. e 3 u.m..

O problema tem 4 linhas e 4 colunas (4 × 4), sendo que um quadrado de lado 1 u.m. não pode ser considerado.

Assim, temos:

- **Lado 1 u.m.**

$$(4 - 1 + 1)^2 = 4^2 = 16$$

Mas há um quadrado a ser desconsiderado. Então,

$$16 - 1 = 15$$

- **Lado 2 u.m.**

$$(4 - 2 + 1)^2 = 3^2 = 9$$

Mas há um quadrado menor que interfere na construção de um novo quadrado de lado 2 u.m.. Então,

$$9 - 1 = 8$$

- **Lado 3 u.m.**

$$(4 - 3 + 1)^2 = 2^2 = 4$$

Mas há um quadrado menor que interfere na construção de um novo quadrado de lado 3 u.m.. Então,

$$4 - 1 = 3$$

Portanto, 15 + 8 + 3 = 26 quadrados.

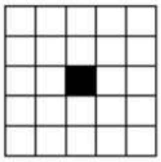
No Geoplano, pode ser percebido ao construir os quadrados dos lados mencionados (veja a página anterior).

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

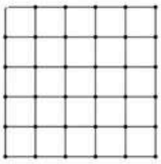
2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 1**

PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

(Banco de Questões da OBMEP 2018 - N1 - Q2): Quadrado cheio de quadrados.
Na figura a seguir, temos um quadrado 5 × 5 que contém um quadrado preto central. Existe uma coleção de quadrados com lados paralelos aos lados do tabuleiro com dimensões que variam de 1 × 1 a 5 × 5 formados pelos quadradinhos da figura. Quantos elementos dessa coleção contém o quadrado escuro preto?



(Banco de Questões da OBMEP 2018 - N1 - Q11): São muitos quadrados.
O quadriculado da figura abaixo é composto por 25 pequenos quadrados unitários. Determine quantos quadrados com vértices sobre os pontos da figura e lados sobre os segmentos da figura existem?

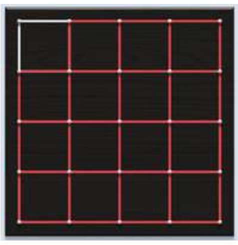


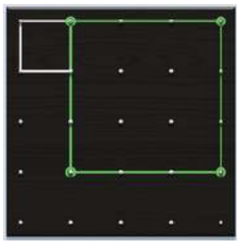
No primeiro e no segundo problema é possível construir algo semelhante ao problema original proposto, a partir do Geoplano.

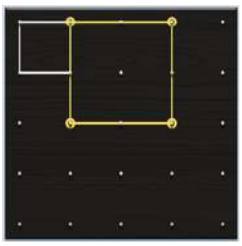
Nessa parte, o docente pode dialogar com os alunos, a partir dos seguintes questionamentos:

- *Como esses problemas se relacionam com o problema inicial?*
- *Quais propriedades é possível usar nesses problemas?*
- *A utilização do Geopla-no será da mesma forma?*
- *Como a construção da figura no Geoplano influencia na solução?*

Como observações, o professor pode sugerir o retorno às anotações realizadas pelos alunos e às reconstruções dos quadrados criados pelo Geoplano no problema inicial.







Nessa atividade, proposta pela questão 1 e pelos novos problemas, o Geoplano torna visível a contagem de quadrados, que possibilita aos alunos a percepção de padrões e regularidades, conectando a manipulação concreta à abstração matemática.

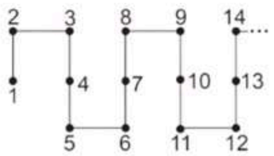
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 2

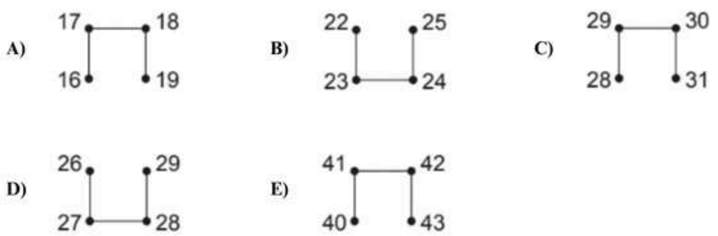
A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

Os números de 1 a 50 foram escritos numa linha zigue-zague, de acordo com o padrão indicado na figura.



Qual das alternativas mostra uma parte desse zigue-zague?



MATERIAL MANIPULÁVEL

Para resolução deste problema, será proposto o uso do **Geoplano**. Utilize o Geoplano para compreender como a linha em zigue-zague se comporta. Observe a possibilidade de padrões e anote todas as observações realizadas. Elabore estratégias que podem auxiliar na solução do problema.

Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

O problema a seguir é a questão 2, da prova de 2024, fase 1, nível 2.

Neste momento, todos os grupos já podem está formados. Fique à vontade de dividir a turma em quantos grupos achar necessário.

Analise seu ambiente e veja qual a melhor forma de proceder.

Aqui, peça para os alunos lerem a parte MATERIAL MANIPULÁVEL, para que vejam as orientações e dicas de como usar o material para ajudar na solução do problema.

Para essa atividade pode ser destinada duas aulas de 50 minutos cada, pois além da solução ainda haverá os registros feitos pelos alunos, a resolução do problema, demonstração no material, a plenária, a formalização do conteúdo e os novos problemas propostos parecidos com o problema atual.

"[...] utilize o Geoplano para compreender como a linha em zigue-zague se comporta. [...]"

Essa orientação é sugerida para que o aluno perceba como a linha se comporta no Geoplano e assim, gerar ideias para construção da estratégia de solução. Notar características e, por meio dos conhecimentos prévios e do raciocínio lógico, chegar na solução do problema proposto.

"[...] Observe a possibilidade de padrões e anote todas as observações realizadas. [...]"

Essa sugestão é dada com o intuito dos alunos observarem os pinos de posições ímpares e pares do Geoplano, averiguar padrões e por meio da multiplicidade chegar numa solução viável.

A anotação é sugerida como forma de registro para que o aluno possua, caso necessite mais adiante.

"[...] Elabore estratégias que podem auxiliar na solução do problema".

As estratégias traçadas serão de acordo com a compreensão do problema, da sua interpretação e dos conhecimentos prévios adquiridos ao longo de sua trajetória estudantil.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 2

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

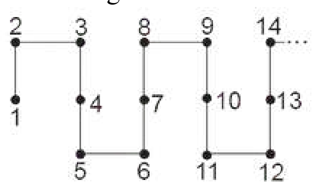
Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

Para esse problema, o docente pode questionar:

- *É possível reproduzir a situação completa no Geoplano? Se sim, como? Se não, por quê?*
- *Há algum padrão identificável?*
- *Os elásticos conseguem fazer o trajeto completo?*
- *Posso separar o problema em partes?*
- *Existe mais de uma maneira de representar essa situação no Geoplano?*
- *O que acontece se eu mudar o ponto de partida?*
- *Quais caminhos possíveis podem ser traçados?*
- *Há simetria na construção realizada?*

PROPOSTA DE SOLUÇÃO ESCRITA

Observe a figura:



Notamos o seguinte padrão nos pontos da linha central e a posição das linhas seguintes:

↑ ↓ ↑ ↓ ↑

1 - 4 - 7 - 10 - 13 - ...

+3 +3 +3 +3 +3

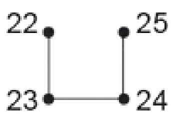
Seguindo esse padrão, teremos:

↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑

... - 16 - 19 - 22 - 25 - 28 - 31 - ...

+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3

Portanto, observando o padrão teremos que a resposta é o item **B.**



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 2**

DICAS E SUGESTÕES

Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa**, a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA | **DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL** | **PLENÁRIA** | **CONSENSO**

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

O problema proposto traz à tona a ideia de múltiplos, no caso, de números naturais. Para isso, entendamos o que é um múltiplo de um número natural.

Definição: Dizemos que um número natural **a** é múltiplo de um número natural **b** quando existe um outro número natural **k**, tal que

$$a = b \times k$$

Em outras palavras, um múltiplo de um número é o resultado da multiplicação desse número por um número natural (0, 1, 2, 3...). Denotamos por **M(b)** como sendo os "múltiplos do número natural **b**.

Exemplo: Múltiplos de 4.
$M(4) = \{0, 4, 8, 12, ...\} \Rightarrow M(4) = \{4 \times 0, 4 \times 1, 4 \times 2, 4 \times 3, ...\}$

PROPOSTA DE SOLUÇÃO COM O GEOPLANO

Note que a reprodução do problema no Geoplano, por meio de elásticos coloridos denotam uma repetição (de 6 em 6 ligações) e formará um padrão:

O número da posição será 6 vezes o da posição da figura anterior.

Por exemplo: A direção do lado formado pelo elástico esticado nos pinos 4 e 5 se repetirá no lado formado pelo elástico esticado nos pinos 10 e 11 (4 + 6 = 10 e 5 + 6 = 11).

Então, basta repetir o padrão seguindo o mesmo formato de construção, observando a posição e direção dos elásticos. Logo, repetindo o padrão, chega-se à alternativa **B.**

A necessidade de formalizar o conteúdo de Múltiplos de Números Naturais está relacionada a identificação das regularidades do trajeto construído, sendo que a cada certa quantidade de vezes, uma mesma figura começa a ser formada e a posição dos pinos obedecerá a uma soma sucessiva, que remete à ideia de múltiplos.

Nessa parte, o docente pode levar mais alguns exemplos, caso reste dúvidas ainda durante a explicação.

Pode abordar também a infinidade dos múltiplos de um número, sendo que a reta dos números naturais possui um ponto de origem e segue infinitamente para o lado positivo.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 **FASE 1** **NÍVEL 2** **QUESTÃO 2**

Dito isto, perceba que os múltiplos de um número natural possuem um determinado ***padrão*** para encontrar qualquer múltiplo deste número natural específico. Por exemplo: 54 é múltiplo de 9, pois o 9 é *adicionado a ele mesmo* 6 vezes (9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9). Esse é o padrão que é falado aqui: a soma sucessiva de um valor fixo numa quantidade determinada de vezes.

Vejamos a aplicação desse conceito em outros problemas. Fique à vontade de usar o Geoplano para visualizar melhor e compreender os próximos problemas.

PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

(OBMEP 2023 - F1 - N2 - Q4): José utilizou exatamente 2023 peças quadradas de 1 cm de lado para preencher vários tabuleiros retangulares de 7 cm por 17 cm. Quantos tabuleiros José conseguiu preencher?

A) 717
B) 177
C) 117
D) 71
E) 17

(OBMEP 2016 - F1 - N2 - Q11): Luciana marcou os números de 1 a 9 em uma circunferên - cia, como na figura. A partir do número 1, ela começou a pular de 4 em 4. No primeiro pulo ela foi do 1 ao 5, no segundo, do 5 ao 9, no terceiro do 9 ao 4 e assim por diante. Depois e pular 1000 vezes, em que número ela parou?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

1º PROBLEMA:
No primeiro problema, os estudantes podem representar os tabuleiros no Geoplano usando a ideia de proporção, uma vez que o material sugerido a construção foi 10 u.m. × 10 u.m.

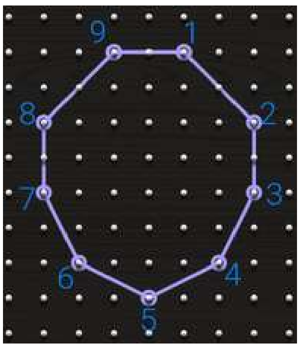
Todavia, podem perceber que são 7 × 17 = 119 peças quadradas para construir um tabuleiro e o Geoplano construído comporta 100.

O docente pode levantar os seguintes questionamentos:

- *Quais conhecimentos de Geometria podem ser usados para resolver o problema?*
- *Precisa-se de quantas peças para construir um tabuleiro? E dois?*
- *Eu precisaria de quantos Geoplanos inteiros para encontrar a solução?*
- *Será possível encaixar essas 2023 peças nos tabuleiros construídos sem sobrar nenhuma?*

2º PROBLEMA:
Já no problema 2, um dos desafios maiores para os alunos pode ser a construção de uma figura "circular" no Geoplano, que permite apenas a construção de polígonos e seus respectivos lados.

Portanto, o máximo que os alunos conseguirão construir será um eneágono não regular, semelhante ao da figura ao lado.



Após isso, poderão perceber os padrões de repetição ao notar que a marcação de Luciana ocorre de 4 em 4 números.

Os estudantes podem ser incentivados a anotar as observações ou utilizar algum dos passos realizados na solução da questão 2.

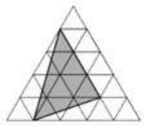
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 4**

A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

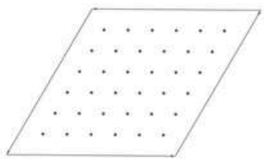
A figura apresenta uma malha triangular formada por triângulos equiláteros pequenos, cada um com área igual a 1 cm². Qual é a área, em centímetros quadrados, da região cinza?



A) 11
B) 7
C) 10
D) 8
E) 9

MATERIAL MANIPULÁVEL

Para resolução deste problema, será proposto a adaptação de um Geoplano: o **Geoplano de Base Paralelogramo Regular**. Possui basicamente as mesmas características do Geoplano tradicional, porém, ao invés das ligas formarem quadrados, elas formarão triângulos equiláteros. Utilize o Material para visualizar o problema, enxergar as características dos triângulos equiláteros mais de perto, bem como na manipulação deles através do Geoplano. Anote a estratégia utilizada e as observações realizadas ao longo do raciocínio do problema.



O problema a seguir é a questão 4, da prova de 2024, fase 1, nível 2.

Neste momento, todos os grupos já podem está formados. Fique à vontade de dividir a turma em quantos grupos achar necessário.

Analise seu ambiente e veja qual a melhor forma de proceder.

Aqui, peça para os alunos lerem a parte MATERIAL MANIPULÁVEL, para que vejam as orientações e dicas de como usar o material para ajudar na solução do problema.

Para essa atividade pode ser destinada duas aulas de 50 minutos cada, pois além da solução ainda haverá os registros feitos pelos alunos, a resolução do problema, demonstração no material, a plenária, a formalização do conteúdo e os novos problemas propostos parecidos com o problema atual.

"[...] Utilize o Material para visualizar o problema, enxergar as características dos triângulos equiláteros [...]"

Essa sugestão é bastante relevante diante das possibilidades de construção nesse tipo de Geoplano.

Note que, ao considerar duas linhas consecutivas de pinos e fixando dois pontos em uma das linhas, consegue-se formar um triângulo equilátero com um único pino na linha seguinte.

"[...] manipulação deles através do Geoplano"

A manipulação citada aqui é a dos triângulos equiláteros.

No Geoplano de formato paralelogramo, é possível verificar as características dos triângulos, ter uma angulação de 60° (conforme a construção proposta).

Isso colabora para resolução do problema proposto ao perceber a sua figura.

"[...] Anote a estratégia utilizada e as observações realizadas ao longo do raciocínio do problema"

Essa solicitação da anotação é sugerida para que se garanta a reunião das ideias para solução e que não corra o risco do estudante esquecê-la ao longo das etapas da solução do problema.

Uma forma de reunir não só as suas, mas as dos seus colegas de grupo.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 4**

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

____

____

____

____

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

____

____

____

____

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

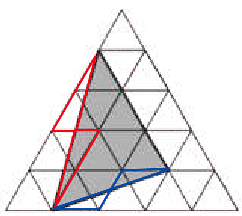
Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

Para esse problema, o docente pode questionar:

- *Podemos usar o Geoplano do problema anterior para resolver este? Por quê?*
- *Quais são as características desse problema?*
- *A figura apresentada pode ser modificada?*
- *Quais propriedades geométricas podem ser utilizadas para compreender o problema?*
- *É possível desfazer partes do triângulo e refazer em outro lugar com a ideia de complementar?*

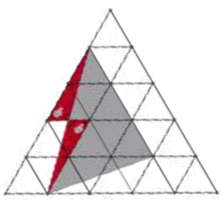
PROPOSTA DE SOLUÇÃO ESCRITA

Observa-se na figura os triângulos que estão dentro da área da região cinza e os que são ao seu redor e nota-se ainda um padrão, conforme a figura do retângulo abaixo:

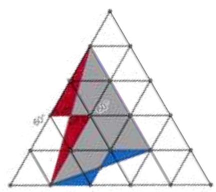


Os triângulos vermelhos são congruentes entre si pelo caso ALA (Ângulo, Lado, Ângulo) e os azuis também entre si, pelo caso ALA (Ângulo, Lado, Ângulo).

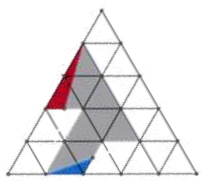
Vermelho
Ângulo: 60°.
Lado: de um dos triângulos equiláteros.
Ângulo: oposto pelo vértice.



Azul
Ângulo: 120°.
Lado: de um dos triângulos equiláteros.
Ângulo: oposto pelo vértice.



Portanto, com as manipulações realizadas chega-se à seguinte imagem:



Logo, como a área de cada triângulo é 1 cm², temos que o resultado será 9 cm². Item **E**.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 4**

DICAS E SUGESTÕES

Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

____

____

____

____

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa**, a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA | **DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL** | **PLENÁRIA** | **CONSENSO**

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

O problema em questão trata da ideia de triângulos, especificamente o triângulo equilátero, e suas propriedades. Para essa compreensão, entendamos o que é um triângulo equilátero e como identificar as suas propriedades.

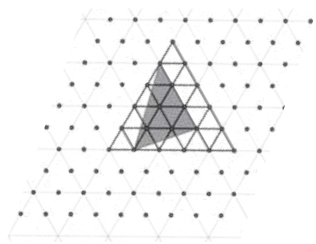
Em Geometria Euclidiana, triângulo é uma figura geométrica plana formada por três segmentos de reta que se encontram dois a dois em três pontos não colineares. Esses pontos são denominados vértices, e os segmentos que os unem são os lados do triângulo. A figura também possui três ângulos internos, determinados pela interseção dos lados.

Formalmente, um triângulo é a união de três pontos A, B e C no plano, tais que os segmentos AB, BC e CA são segmentos distintos, com A, B e C não colineares.

PROPOSTA DE SOLUÇÃO COM O GEOPLANO

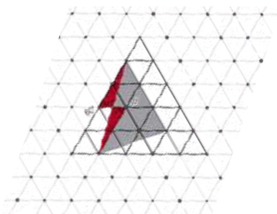
A solução no Geoplano não foge da solução apresentada anteriormente.

Inicialmente espera-se que os alunos reproduzam a imagem do problema no material.

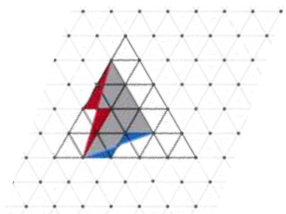


Em seguida, conforme a resolução escrita anteriormente, constrói os triângulos vermelhos, usando os elásticos de cor referente, averiguando as medidas das áreas iguais por meio do caso de congruência de triângulos, especificamente o ALA (Ângulo, Lado, Ângulo).

Aconselha-se que construa os dois triângulos usando dois elásticos de mesma cor, no caso, vermelha, conforme a figura a seguir.



Analogamente, faz o processo com os triângulos azuis. Observa-se o padrão dos triângulos inferiores, que agora serão construídos com elásticos azuis, notando sua congruência pelo mesmo caso ALA (Ângulo, Lado, Ângulo).



Note que, enquanto nos triângulos vermelhos, um dos ângulos congruentes é de 60° e nos azuis é de 120°. Isso se deve ao fato de que em um, há apenas um ângulo de "uma das pontas" do triângulo equilátero e no outro há a junção de duas dessas "pontas", logo, 60° + 60° = 120°.

Assim, temos:

O que resulta em 9 triângulos preenchidos, sendo cada um medindo área de 1 cm².

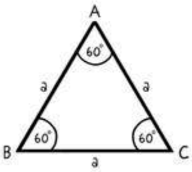
Portanto, $9 \times 1 = 9$ cm².

Letra **E**.

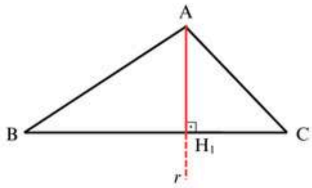
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 4**

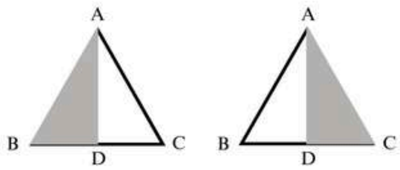
Um triângulo equilátero é um tipo especial de triângulo com os três lados congruentes, ou seja, todos os lados têm a mesma medida. Isso significa que o triângulo ABC é isósceles se, e somente se, os segmentos AB = BC = CD. Consequentemente, os três ângulos internos também são iguais, cada um medindo exatamente 60º, uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º



Altura de um triângulo: Num triângulo ABC, tracemos pelo ponto A uma reta r perpendicular à reta que contém o lado BC. Chamemos de H_1 o ponto de encontro da reta r com a reta $\overline{BC}$ e destaquemos o segmento $\overline{AH_1}$.



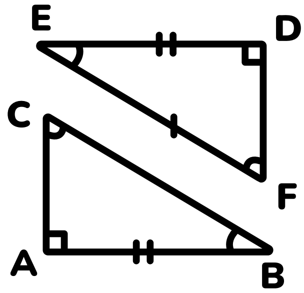
O segmento $\overline{AH_1}$ é uma altura do triângulo ABC.
Uma propriedade importante do triângulo equilátero: Veja a imagem abaixo:



Perceba que quando selecionamos o vértice A e um ponto D perpendicular a A sobre o lado BC, formam-se dois triângulos: ABD e ADC. Considerando a área dos triângulos ABC, ABD e ADC, temos as seguintes relações:

Apesar do material do aluno não trazer o conteúdo de congruência, aqui sugerimos algumas definições importantes para comentar em sala de aula. O docente pode conferir o conteúdo na íntegra através da obra de Iezzi, Machado e Dolce (2008, p. 32 - 36) [ver referências bibliográficas].

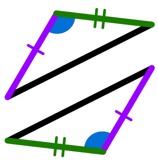
Congruência: dois triângulos são congruentes quando os lados e os ângulos de um deles são respectivamente congruentes aos lados e aos ângulos do outro.



CASOS DE CONGRUÊNCIA

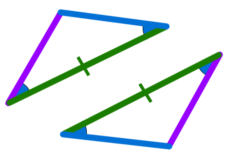
Caso LAL (Lado - Ângulo - Lado): Se dois triângulos possuem dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

Exemplo:

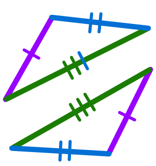


Caso ALA (Ângulo - Lado - Ângulo): Se dois triângulos possuem um lado e os dois ângulos a ele adjacentes respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

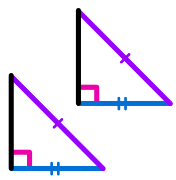
Exemplo:



Caso LLL (Lado - Lado - Lado): Se dois triângulos possuem os três lados respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



Caso especial: Se dois triângulos possuem um cateto e a hipotenusa respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.



Há mais um caso de congruência que é o LAA_o **(Lado - Ângulo adjacente - Ângulo oposto)**, mas não será discutido aqui [ver referências].

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

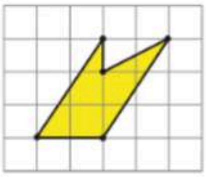
2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 4**

- $A_{ABC} - A_{ABD} = A_{ADC}$
- $A_{ABC} - A_{ADC} = A_{ABD}$
- $A_{ABD} + A_{ADC} = A_{ABC}$

Isto é, A_{ABD} e A_{ADC} são triângulos congruentes.

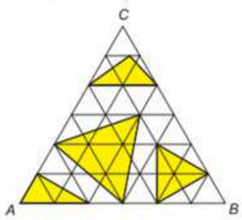
PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

(OBMEP 2023 - F1 - N2 - Q9): A área do polígono amarelo com vértices em pontos do quadriculado é 30 cm². Qual é a área, em cm², de cada quadradinho do quadriculado?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(OBMEP 2016 - F1 - N2 - Q10): O triângulo equilátero ABC da figura é formado por 36 triângulos equiláteros menores, cada um deles com área 1. Qual é a soma das áreas dos quatro triângulos amarelos?

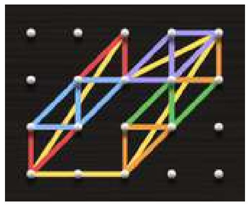


A) 13
B) 14
C) 15
D) 16
E) 17

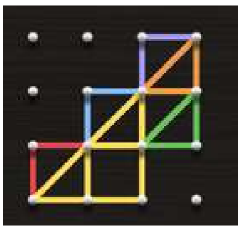
1º PROBLEMA:
O objetivo nesse problema é encontrar o número de quadrados que são possíveis formar com a área amarela.

Semelhante ao problema original - porém, com a utilização do Geoplano de base quadrada - o presente problema pode ser construído por meio do material, conforme a figura abaixo.

Agora, com os elásticos coloridos, observemos os possíveis triângulos congruentes.

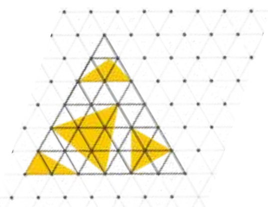


O elástico amarelo é o da figura original e os vermelhos, azuis, verdes, laranjas e lilás complementam entre si, sendo que o quadrado do lado superior direito é formado por um pedaço de área amarela, a complementação laranja e lilás.

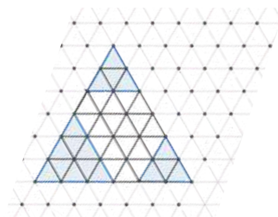


O interessante é que, no Geoplano, nem sempre dá para verificar a área da figura formada ou que sobra. Portanto, usamos os conceitos vistos anteriormente para construir, observar e inferir acerca das situações propostas. Logo, são 5 quadrados. Se ao todo são 30 cm², conclui-se que cada quadrado possui 6 cm² de área. Alternativa **E**.

2º PROBLEMA:
No Geoplano de base paralelogramo fica assim a reprodução.



Considere duas retas paralelas, dois pontos fixos A e B em uma delas, e tome um ponto C na outra reta. O triângulo ABC, independente da posição de C sobre a outra reta, possuirá o valor de sua área fixa. Assim, fazendo as devidas manipulações temos:



Portanto, a soma das áreas será: $8 + 4 + 4 = 16$ unidades de área.

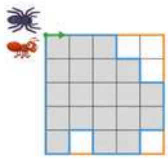
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 6**

A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

Uma formiga e uma aranha partem juntas do ponto indicado no quadriculado de 5 metros por 5 metros, no sentido horário, e caminham sempre 1 metro por minuto. A formiga anda na borda do quadriculado e a aranha na borda da região cinza, até retornarem ao ponto de partida. Durante quanto tempo elas andarão juntas, lado a lado?



A) 11 minutos
B) 6 minutos
C) 12 minutos
D) 7 minutos
E) 10 minutos

MATERIAL MANIPULÁVEL

Para resolução deste problema, será proposto o uso do **Geoplano**. Utilize o Geoplano para simular os caminhos da formiga e aranha, por meio de ligas de cores diferentes. Busque padrões e observe as características e possibilidades do problema. Elabore estratégias que podem auxiliar na solução do problema.

Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

O problema a seguir é a questão 6, da prova de 2024, fase 1, nível 2.

Neste momento, todos os grupos já podem está formados. Fique à vontade de dividir a turma em quantos grupos achar necessário.

Analise seu ambiente e veja qual a melhor forma de proceder.

Aqui, peça para os alunos lerem a parte MATERIAL MANIPULÁVEL, para que vejam as orientações e dicas de como usar o material para ajudar na solução do problema.

Para essa atividade pode ser destinada duas aulas de 50 minutos cada, pois além da solução ainda haverá os registros feitos pelos alunos, a resolução do problema, demonstração no material, a plenária, a formalização do conteúdo e os novos problemas propostos parecidos com o problema atual.

“[...] Utilize o Geoplano para simular os caminhos da formiga e aranha, por meio de ligas de cores diferentes”

Essa sugestão foi dada porque, ao notar o trajeto da formiga e da aranha, nota-se que em alguns momentos elas não caminham juntas, o que acontece dois fenômenos: um elas se afastam, mas à frente se encontram e o outro momento é que elas se afastam, mas não se encontram mais.

“[...] Busque padrões e observe as características e possibilidades do problema”

Os padrões é compreender qual foi o trajeto traçado e conseguir reproduzir isso no material. Faça aos alunos os seguintes questionamentos:

- *Como reproduzir isso?*
- *É necessário fazer todo trajeto?*
- *Quais são as situações que posso recriar?*
- *Isso faz sentido?*

“[...] Elabore estratégias que podem auxiliar na solução do problema”

As estratégias a serem tomadas condizem com os conhecimentos prévios dos alunos quanto ao assunto e quanto ao Geoplano e suas habilidades de manipulação.

A tarefa mais difícil pode ser recriar o problema do quê resolvê-lo. Por isso, é importante compreender para solucionar.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 6**

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

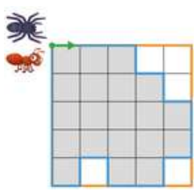
Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

Para esse problema, o docente pode questionar:

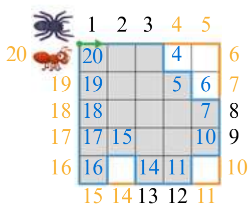
- *Há outros caminhos possíveis para que a formiga e a aranha se encontrem?*
- *Em algum momento elas percorrem o mesmo ponto, mas em direções diferentes?*
- *O trajeto de uma interfere no trajeto da outra?*
- *É possível prever antecipadamente onde elas vão se encontrar? Como?*
- *Se alterarmos o ponto de partida, o comportamento delas se mantém?*
- *O número de segmentos percorridos por cada uma é o mesmo?*
- *Em algum trecho uma delas percorre mais caminho que a outra?*
- *Se elas fizerem o trajeto indicado na questão, conseguirão chegar juntas no ponto de partida?*

PROPOSTA DE SOLUÇÃO ESCRITA

Observe os caminhos: note que a formiga faz o caminho tracejado de laranja e a aranha de azul.



Numerando os trajetos, teremos o caminho representados na figura a seguir:



Veja que os números na cor preta representam o momento em que a formiga e a aranha estavam caminhando juntas sob o mesmo lado do quadradinho menor.

Portanto, diante do resultado, conclui-se que elas caminharam juntas durante 7 minutos.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 6

DICAS E SUGESTÕES

Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa**, a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

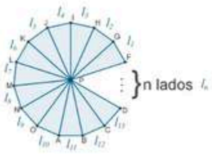
REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA | **DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL** | **PLENÁRIA** | **CONSENSO**

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Nesta questão, o assunto trabalhado é o de **Perímetro** de figura geométrica, especificamente, é considerado apenas uma parte do perímetro, aquele que a formiga e a aranha andam juntas. Para isso, vamos entender o que é perímetro.

Perímetro é a medida da extensão da fronteira de uma figura plana. No caso de polígonos, é definido como a soma dos comprimentos de seus lados consecutivos. Já para curvas fechadas, o perímetro corresponde ao comprimento total da curva. Representamos dessa forma:



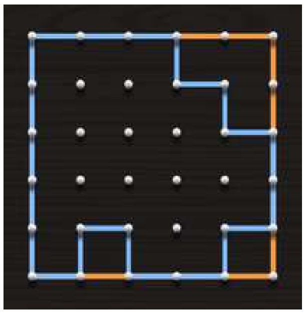
$$2p = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n$$

$2p$ = perímetro

l_k = lados, com $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

PROPOSTA DE SOLUÇÃO COM O GEOPLANO

No Geoplano, propõe-se recriar o problema usando elásticos de acordo com o sugerido.

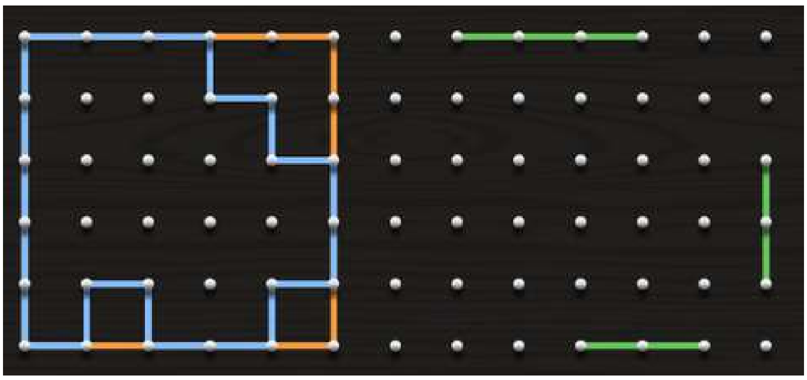


Agora, é só observar quando a formiga e aranha andam juntas sob o caminho traçado.

Nessa observação, pode-se questionar:

- Depois de se afastarem, se encontrarão novamente?
- Isso sempre ocorre?

Para tentar responder isso, utilizemos elásticos da cor verde para mostrar o caminho em que elas andam juntas.



Portanto, a formiga e a aranha só andaram lado a lado durante 7 minutos.

Item **D**.

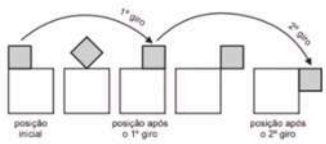
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 6**

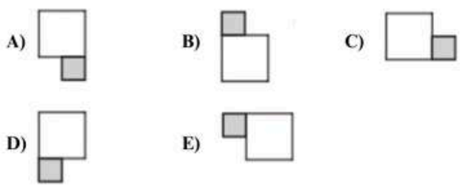
PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

(Banco de Questões 2018 - N1 - Q18) Formigas... Sempre formigas!
Uma formiga está no vértice A de um retângulo ABCD e faz um movimento em direção a B seguindo o lado do retângulo. Após um segundo movimento, vai da mesma maneira para C. Depois de 3 movimentos, do mesmo modo ela chega a D e no quarto, mantendo o caminho sobre o lado, voltará para A. Depois de 2018 movimentos análogos aos anteriores, em qual vértice a formiga estará?

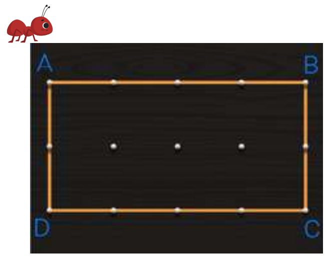
(OBMEP 2012 - F1 - N2 - Q3) Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.



Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?



1° PROBLEMA:
Construa-se o retângulo no Geoplano de base quadrada.



Assim, nota-se que a formiga faz 4 movimentos para sair do vértice A e voltar para ele.

Dessa forma, tem-se:

$$A \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \\ 20 \\ \ldots \\ A + r(2018 \div 4) \end{array} \right.$$

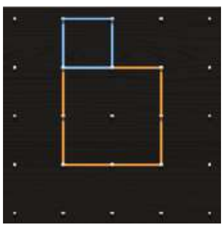
onde A + r(2018 ÷ 4) é a posição inicial da formiga no vértice A adicionado ao resto da divisão de 2018 por 4.

Daí, temos:

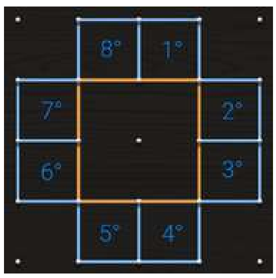
$$2018 = 4 \times 504 + 2$$

Portanto, a formiga vai parar no vértice **C**.

2° PROBLEMA:
Construa-se a situação do problema no Geoplano.



Note que o quadrado azul que está na posição 0 e somente após o giro que ele irá para posição 1. Logo, teremos a seguinte situação:



A cada 8 posições, o movimento do quadrado será repetido.

Dessa forma, basta saber qual é o múltiplo mais próximo do número 2012.

Fazendo os devidos cálculos, chegamos ao seguinte:

$$2012 = 251 \times 8 + 4$$

Portanto, o quadrado estará na 4ª posição.

Alternativa **A**.

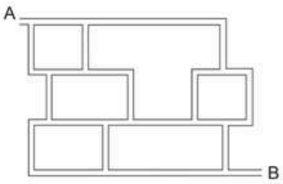
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 15**

A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

A formiguinha da OBMEP mora em um formigueiro com túneis horizontais e verticais, conforme mostrado na figura. Quantos são os caminhos possíveis para a formiguinha ir do ponto A ao ponto B, sempre percorrendo os túneis verticais de cima para baixo e sem passar mais de uma vez pelo mesmo lugar nos túneis horizontais?



A) 18
B) 36
C) 12
D) 24
E) 10

MATERIAL MANIPULÁVEL

Para resolução deste problema, será proposto o uso do **Geoplano**. Utilize o Geoplano para reproduzir os caminhos possíveis tomados pela formiguinha no formigueiro. Observe características e padrões importantes e relevantes. Elabore estratégias que podem auxiliar na solução do problema.

Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

O problema a seguir é a questão 15, da prova de 2024, fase 1, nível 2.

Neste momento, todos os grupos já podem está formados. Fique à vontade de dividir a turma em quantos grupos achar necessário.

Analise seu ambiente e veja qual a melhor forma de proceder.

Aqui, peça para os alunos lerem a parte MATERIAL MANIPULÁVEL, para que vejam as orientações e dicas de como usar o material para ajudar na solução do problema.

Para essa atividade pode ser destinada duas aulas de 50 minutos cada, pois além da solução ainda haverá os registros feitos pelos alunos, a resolução do problema, demonstração no material, a plenária, a formalização do conteúdo e os novos problemas propostos parecidos com o problema atual.

"[...] Utilize o Geoplano para reproduzir os caminhos possíveis tomados pela formiguinha no formigueiro"

A construção do trajeto percorrido pela formiguinha, proposto no problema, pode proporcionar aos alunos ideias de como solucionar e quais abordagens testar.

Além dos caminhos, o terreno completo é repleto de formas geométricas.

"[...] Observe características e padrões importantes e relevantes"

Os padrões pode está relacionado a qual rota vertical ou horizontal considerar primeiro e analisar todas as possibilidades decorrentes dessa tomada de decisão inicial.

Proponha um momento de reflexão de como recriar isso no Geoplano e como os caminhos são considerados.

"[...] Elabore estratégias que podem auxiliar na solução do problema"

As estratégias devem ter como base a utilização do Geoplano. Fazer rota a rota utilizando elásticos de cores diferentes pode ser uma saída intrigante e pode levar a compreender de fato o problema e, assim, chegar à sua solução.


RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 15

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

Para esse problema, o docente pode questionar:

- *Quais caminhos a formiguinha pode seguir?*
- *Há algum caminho que não leva do ponto A ao ponto B?*
- *Faz sentido ela voltar por um mesmo caminho que seguiu?*
- *É possível perceber algum padrão no formato do caminho que ajude a encontrar a solução?*
- *Existem caminhos mais curtos ou mais longos entre o ponto A e o ponto B?*
- *Se a formiguinha mudar a ordem dos passos, ela ainda chegará ao ponto B?*
- *É possível representar todos os caminhos possíveis de forma organizada? Como?*

PROPOSTA DE SOLUÇÃO ESCRITA

Observe que na primeira linha horizontal, a formiguinha tem 3 possibilidades de caminhos verticais.

O primeiro caminho vertical da acesso a outros dois, o segundo também e o terceiro também.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos até então:

$$3 \times 2 = 6$$

Todavia, cada um desses caminhos verticais, dá acesso à outros três caminhos verticais.

Portanto, novamente pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$6 \times 3 = 18 \text{ possibilidades}$$

Alternativa **A.**

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 15**

DICAS E SUGESTÕES

Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

____

____

____

____

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa,** a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA | **DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL** | **PLENÁRIA** | **CONSENSO**

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Neste problema, o assunto trabalhado é o **Princípio Fundamental da Contagem,** pois trata das possibilidades da formiguinha sair de um ponto para outro, por meio de caminhos distintos. A seguir, apresentaremos uma breve formalização do conteúdo.

O **Princípio Fundamental da Contagem** (também chamado de **Princípio Multiplicativo**) é uma regra básica da combinatória que permite determinar o número total de possibilidades quando um evento é composto por etapas sucessivas e independentes.

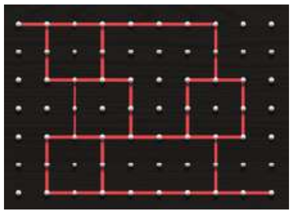
Se um evento ocorre em k etapas, onde:

- A 1ª etapa tem n_1 possibilidades,
- A 2ª etapa tem n_2 possibilidades,
- ...

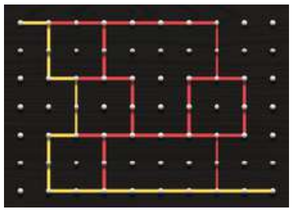
A k-ésima etapa tem n_k possibilidades,

PROPOSTA DE SOLUÇÃO COM O GEOPLANO

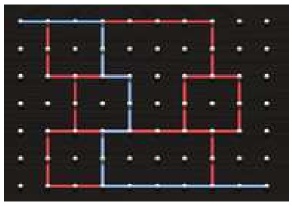
Inicialmente, construa-se o problema no material.



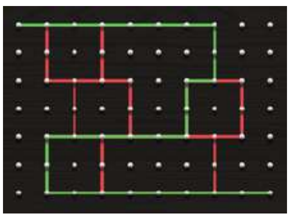
Em seguida, usemos elásticos de cores diferentes para entender os trajetos possíveis.



O elástico amarelo foi usado para representar um caminho possível traçado pela formiguinha, caso pegue o primeiro túnel vertical.



O elástico azul foi usado para representar um caminho possível traçado pela formiguinha, caso pegue o segundo túnel vertical.



O elástico verde foi usado para representar um caminho possível traçado pela formiguinha, caso pegue o terceiro túnel vertical.

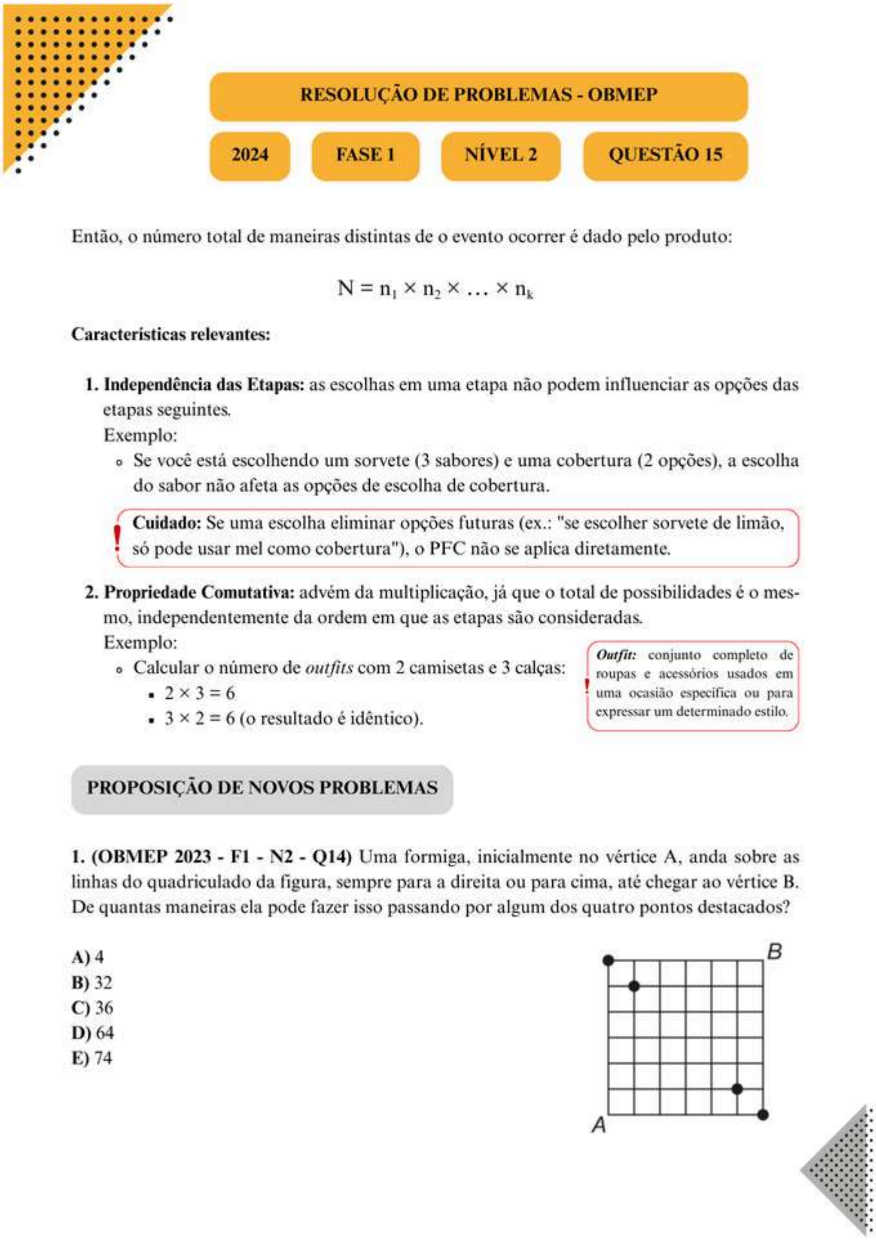
Assim, é percebido o mesmo padrão visto na solução escrita.

Serão três túneis iniciais verticais, cada um com outros dois túneis verticais e cada um desses últimos com outros três túneis verticais.

Assim, teremos:

$$3 \times 2 \times 3 = 18.$$

Item **A**.


RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 15

Então, o número total de maneiras distintas de o evento ocorrer é dado pelo produto:

$$N = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$$

Características relevantes:

1. **Independência das Etapas:** as escolhas em uma etapa não podem influenciar as opções das etapas seguintes.
   Exemplo:
   - Se você está escolhendo um sorvete (3 sabores) e uma cobertura (2 opções), a escolha do sabor não afeta as opções de escolha de cobertura.

   ! **Cuidado:** Se uma escolha eliminar opções futuras (ex.: "se escolher sorvete de limão, só pode usar mel como cobertura"), o PFC não se aplica diretamente.

2. **Propriedade Comutativa:** advém da multiplicação, já que o total de possibilidades é o mesmo, independentemente da ordem em que as etapas são consideradas.
   Exemplo:
   - Calcular o número de *outfits* com 2 camisetas e 3 calças:
     - $2 \times 3 = 6$
     - $3 \times 2 = 6$ (o resultado é idêntico).

   ! ***Outfit:*** conjunto completo de roupas e acessórios usados em uma ocasião específica ou para expressar um determinado estilo.

PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

1. (OBMEP 2023 - F1 - N2 - Q14) Uma formiga, inicialmente no vértice A, anda sobre as linhas do quadriculado da figura, sempre para a direita ou para cima, até chegar ao vértice B. De quantas maneiras ela pode fazer isso passando por algum dos quatro pontos destacados?

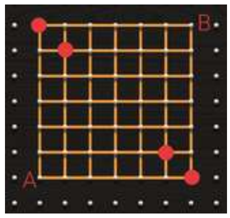
A) 4
B) 32
C) 36
D) 64
E) 74

B

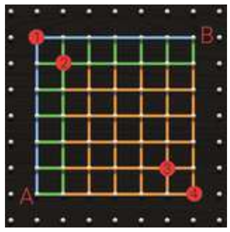
A

1º PROBLEMA:

Recriando o problema no Geoplano, temos:



Usemos os elásticos de outras cores para compreender as possibilidades de caminho que essa formiga pode traçar.

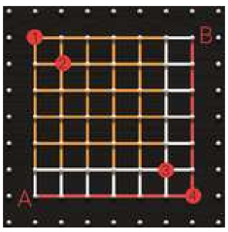


Com o elástico azul, podemos notar que há apenas **uma possibilidade** de sair de A até B, passando pelo ponto 1.

Já pelo ponto 2, há 6 possibilidades na lateral esquerda e 6 na parte superior. Então, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$6 \times 6 =$ **36 possibilidades.**

De forma análoga, considerando os pontos inferiores 3 e 4, temos:



Note que há apenas **uma possibilidade** de sair de A até B passando pelo ponto 4. Já pelo ponto 3, há 6 possibilidades na parte inferior e 6 caminhos diferentes para ser tomados pela lateral direita. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$6 \times 6 =$ **36 possibilidades.**

Portanto, no total são

$1 + 36 + 1 + 36 =$
74 possibilidades

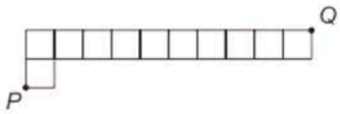
Alternativa **E.**

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 15**

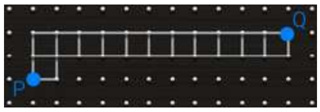
2. (OBMEP 2018 - F1 - N2 - Q19) Para fazer um percurso do ponto P ao ponto Q da figura, uma formiguinha deve andar sobre os segmentos horizontais sempre para a direita e nunca passar duas vezes por um mesmo segmento vertical. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer esse percurso?

A) 3
B) 10
C) 20
D) 1024
E) 1536



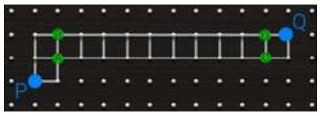
2° PROBLEMA:

Semelhantemente aos problemas propostos anteriormente, construa-o no Geoplano.

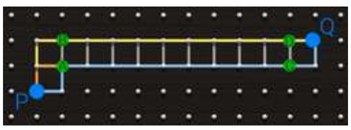


Agora, analisemos as possibilidades de trajeto que a formiguinha pode traçar.

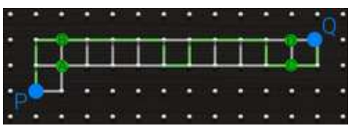
Fixemos os pontos A, B, C e D para organizar todas as possibilidades, tendo em vista que apenas os movimentos horizontais que são determinados. Assim, temos a figura que se segue:



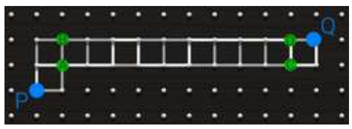
Há **3** formas distintas de a formiga chegar, saindo de P, a um dos pontos A ou B sem andar pelo segmento vertical AB (duas maneiras de chegar a A – horizontal/vertical ou vertical/horizontal – e uma só de chegar a B – vertical/vertical/horizontal).



A partir de A, fazendo percursos do tipo H (horizontal) ou VH (vertical - horizontal), a formiga chega de 2^8 formas distintas a um dos pontos C ou D, sem passar pelo segmento CD. Um caminho possível é representado pelo elástico verde abaixo:



Além disso, a partir de cada ponto C ou D há duas formas distintas de chegar até Q (sendo agora permitido passar pelo segmento CD), conforme um exemplo abaixo, feito com um elástico branco.



Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há um total de

$$2^8 \times 2 = \mathbf{2^9}$$

percursos distintos que a formiguinha pode fazer para chegar de A até Q.

Raciocínios similares nos dão um total de 2^9 percursos distintos que a formiga pode fazer para chegar de B até Q.

Considerando os casos I) e II), segue do Princípio Fundamental da Contagem que há um total de

$$3 \times 2^9 = \mathbf{1536}$$

percursos diferentes que a formiga pode fazer para sair de P e chegar a Q, seguindo as regras do enunciado. Item **E**.

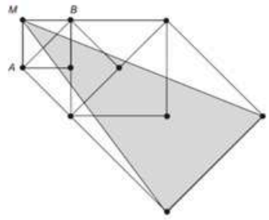
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 19

A seguir serão apresentados o problema proposto e o material manipulável a ser utilizado para resolução do problema. Fique atento(a) às instruções ao longo da atividade.

PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

A figura é formada por quatro quadrados, o primeiro com diagonal AB e os demais construídos sobre a diagonal do anterior. O segmento AB mede 1 cm. Qual é a área, em cm², do triângulo sombreado?



A) $\frac{7}{2}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{5}{2}$

D) 4

E) 3

MATERIAL MANIPULÁVEL

Para resolução deste problema, será proposto o uso do **Geoplano**. Utilize o Geoplano para reproduzir a figura, observe padrões referentes ao crescimento dos lados, propriedades conhecidas, recrie o triângulo sombreado. Se necessário, use fórmulas.

O problema a seguir é a questão 19, da prova de 2024, fase 1, nível 2.

Neste momento, todos os grupos já podem está formados. Fique à vontade de dividir a turma em quantos grupos achar necessário.

Analise seu ambiente e veja qual a melhor forma de proceder.

Aqui, peça para os alunos lerem a parte MATERIAL MANIPULÁVEL, para que vejam as orientações e dicas de como usar o material para ajudar na solução do problema.

Para essa atividade pode ser destinada duas aulas de 50 minutos cada, pois além da solução ainda haverá os registros feitos pelos alunos, a resolução do problema, demonstração no material, a plenária, a formalização do conteúdo e os novos problemas propostos parecidos com o problema atual.

"[...] Utilize o Geoplano para reproduzir a figura [...]"

Note que há muitos triângulos e quadrados construídos sobre lados de outros. Pode ser que, *à priori,* os estudantes se confundam com a quantidade de informação da imagem.

Por isso que a construção é sugerida, pois pode facilitar a compreensão do problema ao entender como a figura é criada.

"[...] observe padrões referentes ao crescimento dos lados, propriedades conhecidas [...]"

A observação do crescimento dos lados pode levar à propriedades da geometria plana que colaboram para construção da resolução do problema.

Enquanto lado ou diagonal, o segmento analisado pode propiciar um retorno aos conhecimentos prévios dos estudantes e despertar ideias para traçar soluções.

"[...] recrie o triângulo sombreado".

Como já falado, as propriedades observadas pode se estender para o triângulo em questão, tendo em vista que não há apenas o triângulo sombreado na figura, mas há outros triângulos retângulos e isósceles também.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 19**

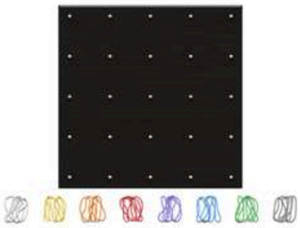


Imagem: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

IMPRESSÕES PÓS LEITURA INDIVIDUAL

Após a leitura individual, registre aqui o que você entendeu.

____
____
____
____

IMPRESSÕES PÓS LEITURA COLETIVA

Após a leitura coletiva, registre aqui o que você entendeu.

____
____
____
____

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Chegou a hora da solução. Registre neste espaço a solução encontrada para o problema.

____
____
____
____
____

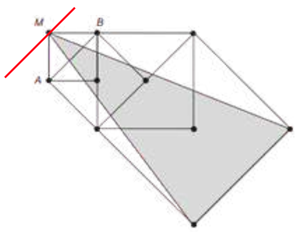
Para esse problema, o docente pode questionar:

- *Como os quadrados foram construídos a partir do segmento AB?*
- *Todos os quadrados têm lados iguais?*
- *O que muda de um quadrado para o outro?*
- *Qual é a posição dos quadrados em relação ao anterior?*
- *Eles giram? Se sim, de quantos graus?*
- *Podemos decompor o triângulo sombreado em outras figuras conhecidas?*
- *Há simetrias ou propriedades que podemos usar para facilitar o cálculo da área?*

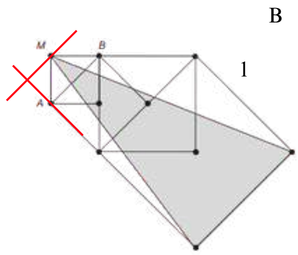
PROPOSTA DE SOLUÇÃO ESCRITA

Analisemos separadamente cada dado que o problema oferece.

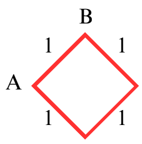
Tomemos uma reta paralela à base do triângulo sombreado, que passe pelo ponto M.



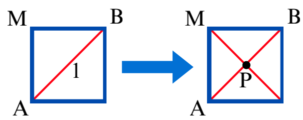
Tomemos agora uma reta paralela ao ponto B que passe pelo ponto A.



Veja:

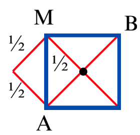


Se considerarmos:



$\overline{BP} = \overline{PA} = ½$

E ainda:



[Continua na próxima página...]

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 19**

Ao longo do registro da solução, você perceberá que o(a) professor(a) dará algumas dicas e sugestões baseados nos seus conhecimentos anteriores e, assim, colaborar na sua estratégia de solução do problema, principalmente, utilizando o Material Manipulável. Diante disso, a próxima etapa caberá ao registro das principais dicas dadas, se julgar necessário.

DICAS E SUGESTÕES

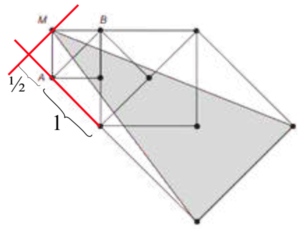
Registre aqui as dicas dadas, se necessário.

A partir de agora acontecerão os **Registros das resoluções na lousa,** a **demonstração** da estratégia de solução **no Material Manipulável** e a **Plenária** de todos os grupos participantes. Apresente sua solução, observe as soluções dos colegas, os processos utilizados e reflita sobre as exposições. Após isso, sua solução junto com as dos seus colegas formarão as possíveis soluções naquele momento. Agora, com o(a) professor(a), vocês chegarão a um **Consenso** de qual solução está mais próxima da correta.

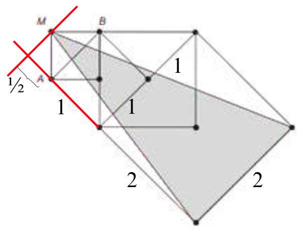
REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA | **DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL MANIPULÁVEL** | **PLENÁRIA** | **CONSENSO**

Depois desse caminho trilhado, vamos à **Formalização do Conteúdo**!

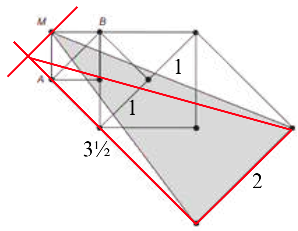
Então,



Agora, veja que:



Pelo postulado das paralelas, podemos ter:



O triângulo vermelho terá a mesma área do triângulo sombreado.

Logo, temos:

$$A_T = \frac{(b \times h)}{2}$$

$$A_T = \frac{(3\frac{1}{2}) \times 2}{2} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

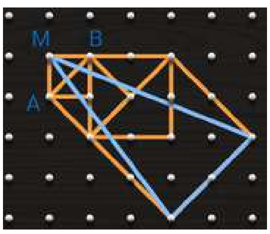
Portanto, a área do triângulo sombreado será de:

$$\frac{7}{2}cm^2$$

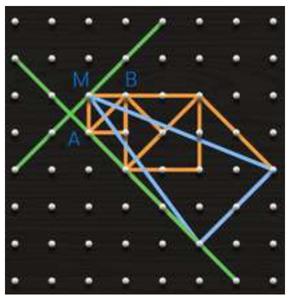
Item **A**.

PROPOSTA DE SOLUÇÃO COM O GEOPLANO

Construamos o problema no Geoplano.



Note que, se criarmos um segmento paralelo à base do triângulo azul, passando por M e um paralelo ao ponto B passando por A, teremos (ver elásticos verdes).



Perceba que o ponto de intersecção entre os elásticos verdes representa a metade do valor da distância entre os pinos ligados pelo elástico verde que vale 1 cm. Isto é, a distância entre a intersecção entre os elástico verde e um pino consecutivo vale ½ cm e a distância entre os pinos vale 1 cm.

Veja ainda que, sobre o elástico verde que passa pelo vértice A, a distância entre a intersecção entre os elásticos verdes e o vértice esquerdo do triângulo azul vale 3,5 cm, e este segmento representa exatamente a altura do triângulo azul, cuja base é 2 cm.

Sabendo que:

$$A_T = \frac{(b \times h)}{2}$$

Temos:

$$A_T = \frac{3,5 \times 2}{2} = 3,5 = \frac{7}{2} cm^2$$

Item **A**.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 19**

FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO

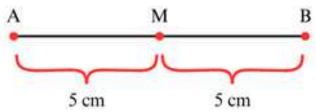
O problema proposto vem tratar de aspectos e propriedades relevantes da Geometria Plana, que tratam das ideias de **Ponto Médio, Postulado das Paralelas de Euclides, Área de Triângulo** e **Diagonais de um quadrado.** A seguir, vejamos um pouco mais sobre esses conteúdos.

1. Ponto Médio

O Ponto Médio M de um segmento é um ponto que pertence ao segmento e o divide em dois segmentos congruentes.

Exemplo:

- Seja o segmento $\overline{AB} = 10$ cm. Assim, $\overline{AM} = \overline{MB} = 5$ cm.

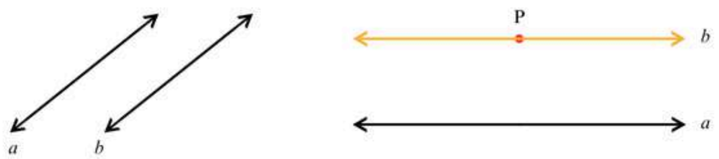


Atenção: *Congruentes* significa "de mesma medida".

2. Postulado das Paralelas

Ao considerar que duas ou mais retas são paralelas, no mesmo plano, quando não possuem nenhum ponto em comum, há uma propriedade interessante chamado de Axioma de Euclides ou Postulado das Paralelas, que diz o seguinte:

*Por um ponto **P** fora de uma reta **a** passa uma única reta **b** paralela à reta **a**.*



Retas Paralelas | Postulado das Paralelas

Rascunho

Rascunho

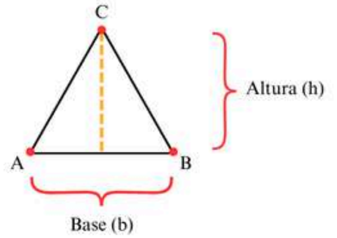
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 19**

3. Área de um triângulo

Dados três pontos A, B e C, não colineares, chama-se triângulo ABC a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

Exemplo:



Atenção: Os triângulos possuem uma condição de existência. Em qualquer triângulo, cada lado é menor do que a soma dos outros dois.

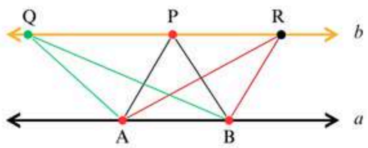
A área de um triângulo (A) é igual ao produto da medida da base pela medida da altura dividido por dois.

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Exemplo:

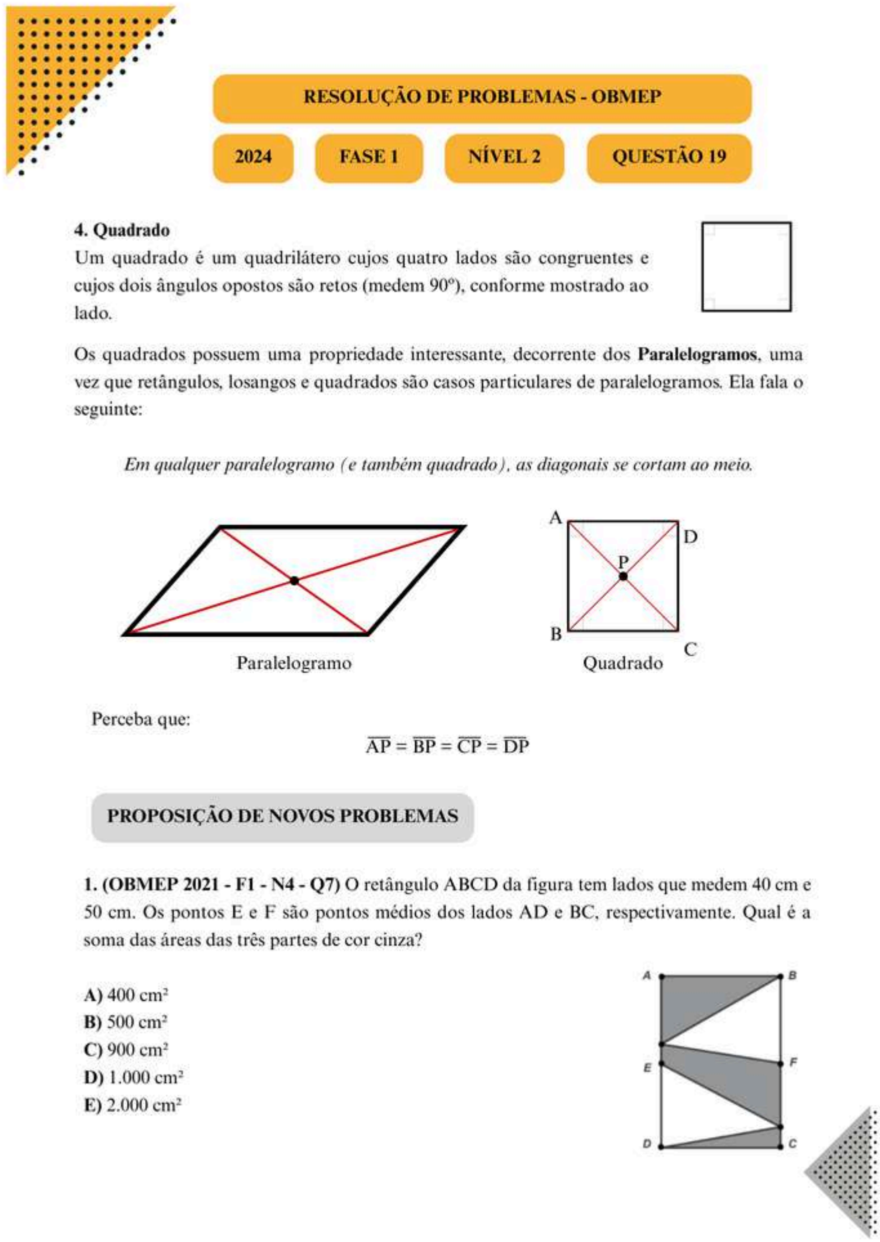
- Um triângulo cuja base é 10 cm e altura 4 cm, a sua área será a metade de $10 \times 4 =$ metade de 40 cm², ou seja, 20 cm².

Atenção: Considere duas retas paralelas *a* e *b*. Fixando dois pontos A e B não coincidentes em *a*, para qualquer ponto tomado em *b*, todos os possíveis triângulos formados por esses três pontos possuirão a mesma área (A).



$A_{ABP} = A_{ABR} = A_{ABQ}$

Rascunho


RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | FASE 1 | NÍVEL 2 | QUESTÃO 19

4. Quadrado
Um quadrado é um quadrilátero cujos quatro lados são congruentes e cujos dois ângulos opostos são retos (medem 90º), conforme mostrado ao lado.

Os quadrados possuem uma propriedade interessante, decorrente dos **Paralelogramos**, uma vez que retângulos, losangos e quadrados são casos particulares de paralelogramos. Ela fala o seguinte:

Em qualquer paralelogramo (e também quadrado), as diagonais se cortam ao meio.

Paralelogramo

A, D, P, B, C

Quadrado

Perceba que:

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} = \overline{DP}$$

PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS

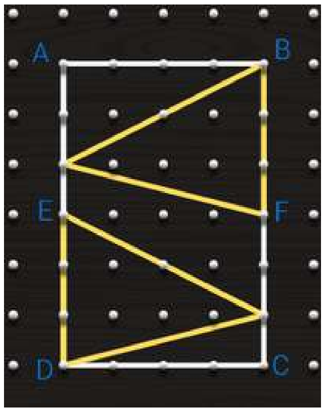
1. (OBMEP 2021 - F1 - N4 - Q7) O retângulo ABCD da figura tem lados que medem 40 cm e 50 cm. Os pontos E e F são pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente. Qual é a soma das áreas das três partes de cor cinza?

A) 400 cm²
B) 500 cm²
C) 900 cm²
D) 1.000 cm²
E) 2.000 cm²

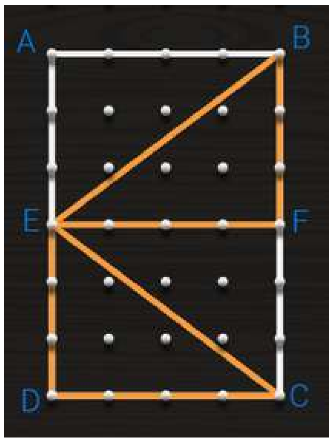
A, B, E, F, D, C

1º PROBLEMA:

Recriando o problema no Geoplano, temos:



Como o lado BC é paralelo à AD, pelo postulado das paralelas, podemos ter os triângulos laranjas abaixo, com a mesma área dos triângulos amarelos.



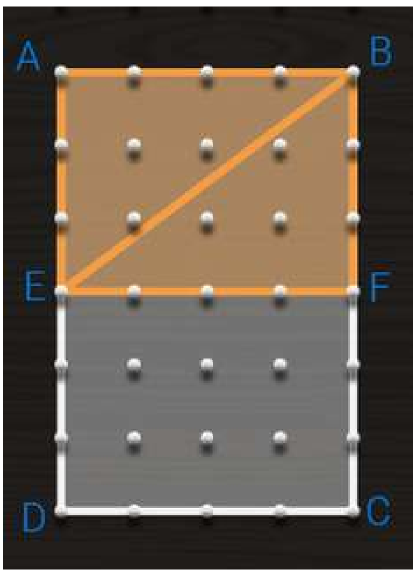
Note que os triângulos formados, quando juntados, representam metade da área do retângulo ABCD, que também será a área da região cinza (A_{RC}). Sendo assim, temos:

$$A_{RC} = \frac{largura \times comprimento}{2}$$

$$A_{RC} = \frac{50 \times 40}{2} = \frac{2000}{2}$$

Portanto, a área da região cinza é de 1000 cm².

Alternativa **D**.

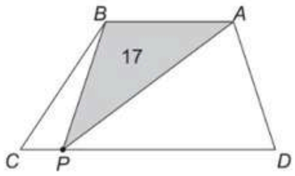


RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - OBMEP

2024 | **FASE 1** | **NÍVEL 2** | **QUESTÃO 19**

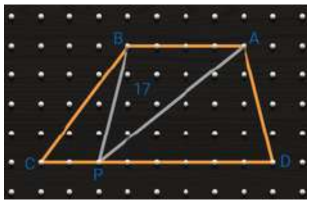
2. (OBMEP 2018 - F1 - N2 - Q11) No trapézio ABCD da figura, os lados AB e CD são paralelos e o comprimento de CD é o dobro do comprimento de AB. O ponto P está sobre o lado CD e determina um triângulo ABP com área igual a 17. Qual é a área do trapézio ABCD?

A) 32
B) 34
C) 45
D) 51
E) 68

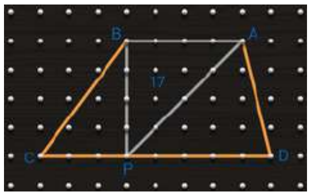


2º PROBLEMA:

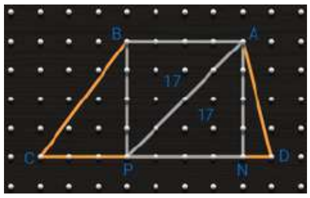
Construamos no Geoplano.



Arrastando o ponto P sobre o segmento CD, de forma que BP seja perpendicular à CD, temos:

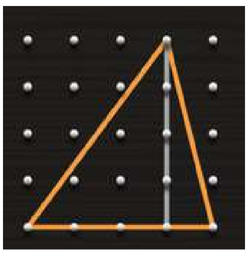


Marcando o ponto N sobre CD, de forma que AN seja perpendicular à CD, formaremos o retângulo ABPN, que terá área 2 × 17 = 34 cm².



Sabendo que o segmento CD é o dobro de AB, temos que a junção dos triângulos BCP e AND formará outro triângulo, de base igual ao lado AB e de altura igual à do triângulo ABP.

Logo, esse novo triângulo terá área igual a 17 cm².



Portanto, a área do trapézio ABCD será:

$$3 \times 17 = 51 \text{ cm}^2$$

Alternativa **D**.

GABARITO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

PROBLEMA 01

Questão 1
A) 26

Problema proposto 1
19

Problema proposto 2
55

PROBLEMA 02

Questão 2
B)

Problema proposto 1
E) 17

Problema proposto 2
E) 5

PROBLEMA 03

Questão 4
E) 9

Problema proposto 1
E) 6

Problema proposto 2
B) 14

PROBLEMA 04

Questão 6
D) 7 minutos

Problema proposto 1
Vértice C

Problema proposto 2
A

PROBLEMA 05

Questão 15
A) 18

Problema proposto 1
E) 74

Problema proposto 2
E) 1536

PROBLEMA 06

Questão 19
A) $\frac{7}{2}$

Problema proposto 1
D) 1.000 cm^2

Problema proposto 2
D) 51

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é a Matemática?** Uma abordagem elementar de suas ideias e métodos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. 568 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações – Volume Único.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. 936 p.

GATTEGNO, Caleb. **The Geoboard.** London: Educational Explorers, 1960. 32 p.

IEZZI, Gelson *et al*. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Combinatória e Probabilidade. v. 5, 10. ed., v. 5. São Paulo: Atual Editora, 2013.

IEZZI, Gelson; MACHADO, Antônio; DOLCE, Osvaldo. **Geometria Plana:** conceitos básicos. 1. ed. São Paulo, Atual, 2008. 215 p.

KAPLAN, Wilfred. **Geometria e Álgebra Linear.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1984. 392 p.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc Lars. **Matemática Discreta**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática.** 5. ed. Campinas: Autores Associados, 2006. 160 p.

MORGADO, Augusto César de Oliveira *et al*. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006.

SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2012.

THE MATH LEARNING CENTER. **Geoboard**. [2025]. Aplicativo online. Disponível em: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/. Acesso em: 25 ago. 2025.

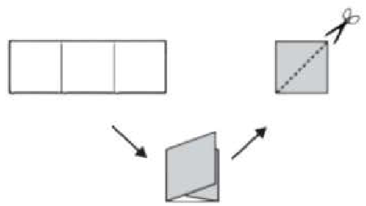
ANEXOS – EXEMPLO DE ATIVIDADE IMPRESSA DESENVOLVIDA NO PROJETO

Boas Práticas - OBMEP e Materiais Manipuláveis
Atividade 03 - Dobraduras, sobreposições e áreas de figuras
Profº Esp. Jeovano Costa

NOME:
SÉRIE:
DATA:

2012F1N1Q14

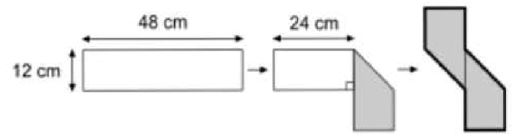
Juliana cortou uma tira de papel de 4 cm por 12 cm e a dobrou do modo indicado na fi gura, obtendo assim um quadrado. Em seguida, ela cortou o quadrado diagonalmente, como mostra a figura. Com os pedaços obtidos, ela montou dois novos quadrados. Qual é a diferença entre as áreas desses quadrados?



a) 9 cm²
b) 12 cm²
c) 16 cm²
d) 18 cm²
e) 32 cm²

2008F1N2Q4

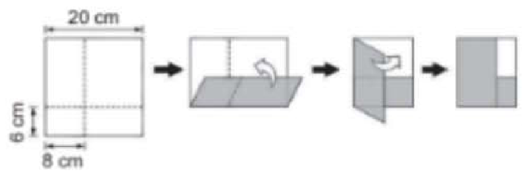
Uma tira retangular de cartolina, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura, formando um polígono de 8 lados. Qual é a área desse polígono?



a) 216 cm²
b) 264 cm²
c) 348 cm²
d) 432 cm²
e) 576 cm²

2010F1N2Q8

Um quadrado de papel de 20 cm de lado, com a frente branca e o verso cinza, foi dobrado ao longo das linhas pontilhadas, como na figura. Qual é a área da parte branca que ficou visível?



a) 18 cm²
b) 32 cm²
c) 36 cm²
d) 72 cm²
e) 84 cm²