UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Wellysson de Souza Silva

A utilização de tarefas formativas para a análise do conhecimento especializado do professor de matemática sob a ótica do MTSK no âmbito das frações

MOSSORÓ
2025

Wellysson de Souza Silva

A utilização de tarefas formativas para a análise do conhecimento especializado do professor de matemática sob a ótica do MTSK no âmbito das frações

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira.

Coorientadora: Profa. Dra. Mariana de Brito Maia.

MOSSORÓ

2026

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas
da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586u Silva, Wellysson de Souza.
A utilização de tarefas formativas para a análise do conhecimento especializado do professor de matemática sob a ótica do MTSK no âmbito das frações / Wellysson de Souza Silva. - 2025.
98 f. : il.

Orientador: Fabricio de Figueredo Oliveira.
Coorientadora: Mariana de Brito Maia.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em , 2025.

1. Conhecimento especializado do professor de matemática. 2. MTSK. 3. Tarefas para formação. 4. Frações. I. Oliveira, Fabricio de Figueredo , orient. II. Maia, Mariana de Brito , co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a). Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

Wellysson de Souza Silva

A utilização de tarefas formativas para a análise do conhecimento especializado do professor de matemática sob a ótica do MTSK no âmbito das frações.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semiárido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Defendida em: 28/11/2025.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira (Orientador) (UFERSA)
Presidente

____

Profa. Dra. Mariana de Brito Maia. (Coorientadora) (UFERSA)
Membro Examinador

____

Profa. Dra. Luiza Helena Félix de Andrade (UFERSA)
Membro Examinador

____

Prof. Dr. Carlos Miguel da Silva Ribeiro (UNICAMP)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

“Primeiramente dou graças ao meu Deus por Jesus Cristo, acerca de vós todos, porque em todo o mundo é anunciada a vossa fé” (Romanos 1:8).

À memória de minha mãe, Maria do Socorro, minha eterna fonte de apoio incondicional, deixo minha homenagem e gratidão.

Agradeço às minhas filhas, Noelly Vitória e Lys Eloá, que me inspiram a perseverar na caminhada da vida com amor e esperança.

Meu reconhecimento ao meu sogro e à minha sogra, pela força e energia positiva com que sempre me acolheram.

À minha querida e companheira Noabia Kelly, expresso profundo agradecimento pelo amor e incentivo, pelo apoio constante desde o início da jornada do curso — especialmente nos momentos difíceis — e pela paciência e dedicação na minuciosa revisão deste trabalho.

Agradeço ao estimado amigo Felipe Mariano, por sua motivação e palavras encorajadoras em meio a uma das tarefas mais árduas da minha vida.

Ao meu orientador, o Prof. Dr. Fabrício de Figueiredo Oliveira, agradeço a orientação sempre solícita e pelas valiosas sugestões de melhoria na construção deste trabalho. Da mesma forma, agradeço à minha coorientadora, Profa. Dra. Mariana de Brito Maia, pelo apoio e contribuições significativas.

Registro minha gratidão aos colegas de curso, com quem tive a honra de aprender e compartilhar experiências. Em especial, agradeço a amizade e parceria do colega José Eronildes (Eron).

Ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA), deixo meu agradecimento, na pessoa de seus professores, pela partilha generosa de saberes, e à coordenação e aos funcionários, pelo cuidado constante com nossa vida acadêmica.

Por fim, e não menos importante, agradeço ao Governo do Estado do Rio Grande do Norte, por ter me concedido a licença de um dos vínculos, permitindo a dedicação necessária à realização deste curso.

“Ninguém pode ensinar aquilo que não sabe!”.
Saviani

RESUMO

Nos anos finais do Ensino Fundamental, o Rio Grande do Norte (RN) ocupa a última posição, no cenário nacional, em relação aos resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB). Em 2023, alcançou índice de 3,7, numa escala que varia de 0 a 10. Considerando esse resultado, observamos a necessidade de desenvolver habilidades nos estudantes para saírem do atual nível 2 na escala de proficiências do IDEB em que se encontram. As mais recentes pesquisas em Educação Matemática apontam o conhecimento matemático especializado do professor como principal foco para melhoria da qualidade do aprendizado dos estudantes. Assim, este trabalho tem como propósito apresentar a análise por meio do Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), considerando o domínio matemático Mathematics Knowledge (MK), de uma tarefa formativa no âmbito das frações, em específico, a relação parte-todo, visto que, no RN, os conhecimentos dos alunos apresentam defasagem em torno desse tópico. Foi construída e aplicada uma tarefa para formação (TpF) visando a reflexão em torno das especificidades do conhecimento especializado do professor de matemática sob a ótica do MTSK, visando o desenvolvimento de habilidades indicadas em resultado apresentados pela avaliação aplicada pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). A TpF é constituída de duas partes, que são Parte Preliminar e Parte I, as quais possuem como ferramenta teórica e analítica o MTSK e tiveram como suporte a utilização de materiais manipuláveis. Apesar do desconforto inicial dos docentes, por estarem em um contexto formativo desafiador, a aplicação das tarefas, através da análise, revelou que os professores tinham defasagem em torno das frações e em relação ao tópico relação parte-todo.

Palavras-chave: conhecimento especializado do professor de matemática; MTSK; tarefas para formação; frações.

ABSTRACT

In the final years of elementary education, the state of Rio Grande do Norte (RN) ranks last at the national level with regard to the results of the Basic Education Development Index (IDEB). In 2023, the state achieved a score of 3.7 on a scale ranging from 0 to 10. Considering this outcome, there is a clear need to develop students' skills so that they can move beyond the current Level 2 of the IDEB proficiency scale in which they are situated. Recent research in Mathematics Education highlights teachers' specialized mathematical knowledge as a central factor in improving the quality of students' learning. Thus, this study aims to present an analysis, grounded in the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) framework and focusing on the Mathematics Knowledge (MK) domain, of a formative task related to fractions, specifically the part–whole relationship, given that students in RN show significant learning gaps in this topic. A formative task was designed and implemented with the purpose of fostering reflection on the specificities of mathematics teachers' specialised knowledge from the perspective of the MTSK framework, aiming at the development of skills indicated by the results of the assessment conducted by Basic Education Assessment System (SAEB). The formative task (FT) consists of two components—a preliminary section and Part I—both of which adopt MTSK as their theoretical and analytical framework and are supported by the use of manipulative materials. Despite the initial discomfort experienced by teachers, due to the challenging nature of the formative context, the implementation and analysis of the tasks revealed that the participants exhibited gaps in their understanding of fractions, particularly with regard to the part–whole relationship.

Keywords: Teacher-Specific Knowledge of Mathematics (MTSK): Training Activities on Fractions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CI	Conhecimento interpretativo
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
KFLM	Conhecimento das Características da Aprendizagem de Matemática
KMLS	Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Matemática
KMT	Conhecimento do Ensino de Matemática
KoT	Conhecimento dos tópicos de Matemática
KPM	*Knowledge of Practices in Mathematics*
KSM	Conhecimento da Estrutura da Matemática
MEC	Ministério da Educação
MK	Conhecimento matemático
MTSK	*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*
PCK	Conhecimento do Conteúdo Pedagógico Especializado
PEM	Professor de (e que ensina) matemática
RN	Rio Grande do Norte
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
TI	Tarefas Interpretativas
TpF	Tarefa para formação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A educação matemática, no decorrer dos anos, tem passado por muitas transformações, e, a cada dia, devido às demandas e os avanços tecnológicos, a educação brasileira tem exigido ainda mais conhecimento que vão além dos conhecimentos escolares, abrangendo os aspectos da especificidade do conhecimento do professor. Outro fato que ocorre é a necessidade de mudança nas abordagens em torno do conhecimento do professor de (e que ensina) matemática (PEM), pois o que tem sido feito não tem surtido efeito adequado (Ribeiro, 2021), o que é possível ver nos resultados dos indicadores nacionais e internacionais, que medem a qualidade das proficiências em matemática.

O conhecimento do PEM, é especializado para sua prática docente, e considerando que este é algo fundante para a aprendizagem significativa dos alunos (Ribeiro; Gibim; Alves, 2021), e que este conhecimento não se adquire na prática (Ribeiro *et al.*, 2013), são motivos pelos quais se deve tê-lo como um foco, isto é, nas especificidades do PEM, as quais dizem respeito ao fato de que o conhecimento do professor é diferente do conhecimento de outras profissões que usam a matemática como ferramenta e, nesse aspecto a aplicação de tarefas formativas em contexto formativo se destaca como uma ferramenta muito potente para discussões que possibilitam o desenvolvimento dessas especificidades, não somente no aspecto específico da matemática ou no aspecto pedagógico, mas considera esses conhecimentos de forma imbricada (Ribeiro; Almeida, 2022), isto é, esses andam de mãos dadas no desenvolvimento da aprendizagem dos discentes.

Nesse cenário, para professores de matemática que lecionam no Ensino Fundamental, Anos Iniciais e Anos Finais, o contexto formativo, com a utilização dessas tarefas formativas, associadas aos materiais manipuláveis com base no conhecimento matemático (MK) especializado, podem contribuir para que os professores ampliem ainda mais as possibilidades de promoção de aprendizagem dos alunos, além de aplicações práticas na construção do conhecimento, bem como a ampliação dos horizontes no desenvolvimento do conhecimento especializado do professor, o que possibilita a articulação da teoria e da prática. Mas, que para isso aconteça há uma necessidade de um ponto de partida, e este é o MK especializado que pode ser revelado pelo professor. Desse modo, qual o conhecimento revelado pelo professor de matemática no tópico das frações em torno da relação parte-todo?

A educação do Rio Grande do Norte (RN), no âmbito da matemática, encontra-se no nível 2[1], na escala das proficiências, o que é preocupante, esta avaliação é aplicada pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e que mede o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB). Nesse nível englobam habilidades básicas dos eixos de conhecimentos: números e operações, álgebra e funções e tratamento da informação.

Nesse contexto, as tarefas formativas, são instrumentos de coleta de dados que servem para obter acesso, através do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), ao MK especializado do professor (Almeida; Ribeiro, 2021), considerando esses eixos de conhecimentos e as habilidades neles inseridos que englobam as frações em especial o tópico da relação parte-todo.

Ademais, o contexto formativo, com tal abordagem também serviu para a reflexão em torno dos conhecimentos matemáticos especializados com foco na relação parte-todo, o que foi importante, pois é uma prática diferenciada do que tem sido realizado nos contextos formativos, e o que possibilitará um efeito na nossa prática a curto, médio e longo prazo, consequentemente, nas aprendizagens dos alunos.

Este trabalho tem o objetivo de criar e implementar tarefa formativa, bem como realizar a análise do conhecimento especializado que pode ser revelado pelos professores nas suas resoluções, tomando como parâmetro para implementação e análise o MTSK (Carrillo-Yañez *et al.,* 2018), com o intuito de obter acesso ao conhecimento especializado do PEM e que assim durante as discussões futuras possa ajudar no desenvolvimento do conhecimento especializado desses participantes, e que durante as discussões no decorrer do processo formativo possibilite e ajude em sua tomada de decisões durante sua prática em sala de aula em torno do tópico das frações (relação parte-todo), os quais são apresentados como tópico em defasagem nas proficiências em matemática na avaliação externa aplicada pelo o SAEB. Vale salientar que a tarefa para formação (TpF) teve como recurso também os materiais manipuláveis, os quais foram fundamentais durante as discussões.

As tarefas formativas foram aplicadas a professores que atuam na rede pública municipal de ensino, que lecionam no Ensino Fundamental, Anos Iniciais e Anos Finais, na cidade de Felipe Guerra, mas o objetivo das tarefas formativas não se restringe somente a este público, podendo também ser aplicada a professores em formação inicial. A aplicação da oficina formativa ocorreu em uma escola da rede pública municipal. Na oportunidade, houve

[1] No âmbito do SAEB, o Nível 2 corresponde a um patamar inicial de proficiência, no qual o estudante demonstra domínio restrito de habilidades básicas, limitando-se a tarefas de baixa complexidade e situando-se aquém do nível de aprendizagem esperado para a etapa de escolaridade.

40 participantes (entre esses, gestão, coordenação e professores do Ensino Fundamental dos Anos Iniciais e Anos Finais).

Esta pesquisa caracteriza-se como aplicada quanto à sua natureza, pois ela propõe uma implementação e intervenções na prática profissional do docente. Quanto aos objetivos, a pesquisa possui um caráter exploratório, pois visa obter acesso ao conhecimento revelado nas tarefas aplicadas no contexto formativo, com a finalidade de obter mais informações. Nesta é adotada uma abordagem qualitativa, pois visa analisar e obter acesso ao conhecimento especializado do PEM no âmbito das frações (relação parte-todo) e na sua prática em um contexto formativo. No entorno dos procedimentos técnicos, a pesquisa é caracterizada como um estudo de caso, pois consiste em coletar e analisar informações sobre determinado indivíduo, uma família, um grupo ou uma comunidade, a fim de estudar aspectos variados de sua vida, de acordo com o assunto da pesquisa (Prodanov; Freitas, 2013).

No capítulo seguinte, no marco teórico, foi feito uma breve descrição do IDEB e são apresentados os resultados do IDEB a nível nacional e os resultados do Estado do RN, focando principalmente nas proficiências em matemática, como justificativa do desenvolvimento deste trabalho. Nesse mesmo capítulo, também são apresentados os materiais manipuláveis, definição, critérios para criação e uso como recurso para o ensino, os quais foram fundamentais no processo formativo. Em seguida, fez-se uma apresentação histórica e conceitual da formação e a importância de se buscar constantemente a inovação das práticas em sala de aula. Após a apresentação desse contexto, passou-se à descrição da fundamentação teórica para criação e implementação da tarefa formativa, sendo neste tópico apresentado o MTSK, bem como os conhecimentos matemáticos especializados em torno do tópico das frações (relação parte-todo).

No capítulo três, é descrito o contexto e a metodologia do trabalho, bem como são apresentados alguns dos procedimentos da formação continuada realizada com professores da rede municipal de Felipe Guerra – RN, voltada ao ensino de matemática nos Anos Iniciais e Anos Finais do Ensino Fundamental, no âmbito das frações (relação parte-todo), conteúdo em que os alunos do estado apresentam dificuldades segundo o SAEB/IDEB. A formação foi conduzida por meio de oficinas com materiais manipuláveis, discussões coletivas e tarefas formativas organizadas em etapas, tendo como pano de fundo o MTSK.

Por fim, após a descrição da metodologia, no capítulo quatro, são apresentados os resultados e discussões, a partir das análises que indicam que os professores possuem lacunas persistentes em relação ao domínio conceitual, uso de recursos e capacidade de articular diferentes representações matemáticas, ressaltando a importância da continuidade de ações formativas dessa natureza. No mais, serão apresentadas as considerações finais e as referências.

2 DISCUSSÕES TEÓRICAS

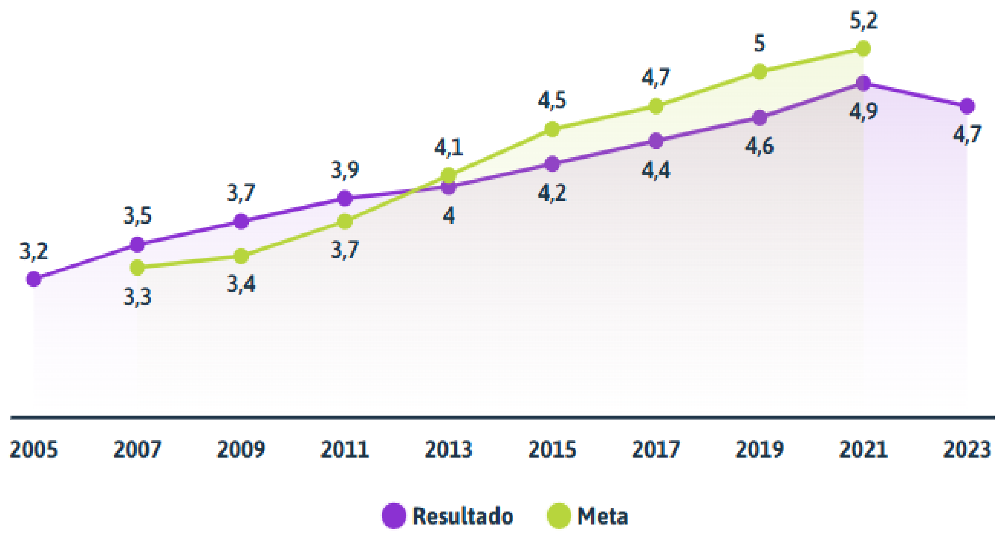
Neste capítulo será apresentada a fundamentação teórica pela qual este trabalho está apoiado, dentre os quais estão: os resultados do SAEB no Brasil e no RN, que justificam a escolha do tópico no âmbito das frações em torno da relação parte-todo trata também sobre os materiais manipuláveis, que são definidos e apresentados os critérios de criação e uso. Também é feita uma descrição sobre a formação de professores em torno dos aspectos históricos e conceituais, desde o berço das civilizações até os dias atuais, que focam no MK especializado do professor. Ainda neste capítulo, são apresentados os critérios para criação e implementação das tarefas, bem como a apresentação das tarefas formativas seguindo estes critérios.

2.1 Resultados do SAEB no Brasil e no Rio Grande do Norte

Nesta subseção, são apresentados os resultados analisa dos a partir do IDEB, de acordo com a realidade das escolas da rede pública dos Anos Finais do Ensino Fundamental. De acordo com o anuário da educação para os Anos Finais do Ensino Fundamental, "o IDEB dos Anos Finais do Ensino Fundamental caiu em 2023, em comparação a 2021; além disso, as crianças estão aprendendo menos: o indicador de aprendizagem teve uma redução importante" (Brasil, 2024, n.p.).

Esta análise nos permite concluir que há uma série de fatores que podem estar contribuindo para que o índice de aprendizagem esteja baixo, como por exemplo: os alunos podem estar compreendendo pouco ou não estar compreendendo os conteúdos, as avaliações das habilidades e até a medição destas, podem estar sendo mal feitas, o alinhamento pedagógico do professor com os conteúdos abordados, falta de interesse por parte dos alunos, falta de planejamento por parte dos professores, entre outros fatores, como a evasão (Soares, 2015), por exemplo, consequentemente o IDEB é afetado (Gráfico 1).

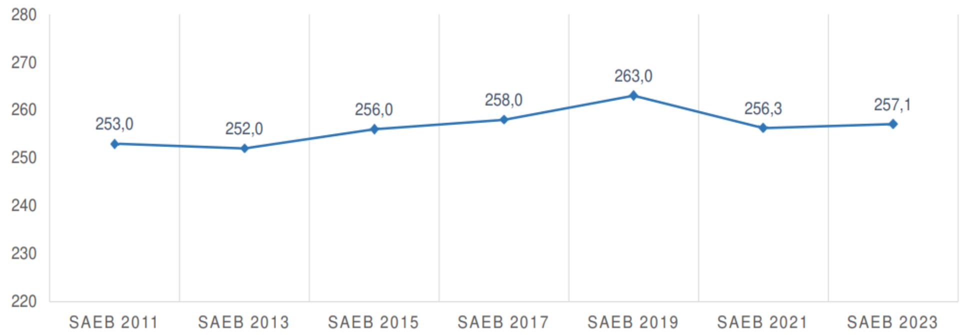
Gráfico 1 – Histórico do IDEB de 2005 a 2023 dos Anos Finais do Ensino Fundamental



Fonte: Elaborado com base no Anuário da Educação (2024).

Compondo este resultado do IDEB estão as proficiências em matemática e português, além da taxa de aprovação. Os resultados das proficiências medidas pelo SAEB, disponibilizado pelo Ministério da Educação (MEC), referentes à aprendizagem da Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental no ano de 2019, indicam que a pontuação média nacional dos estudantes foi de 263,0. Em 2021 a pontuação foi de 256,3, o que nos mostra que nesse período de 2019 a 2021, houve uma queda de 6,7 na avaliação das proficiências de matemática. Já em 2023, a pontuação dos estudantes nos Anos Finais, na prova do SAEB, foi de 257,1, assim no período de 2021 a 2023, houve um pequeno crescimento de 0,8 na proficiência, porém o resultado foi menor, em 5,9, em relação ao resultado de 2019, o que torna o país nível 3 na proficiência em matemática, segundo a Escala de Proficiências (Gráfico 2 e Quadro 1).

Gráfico 2 – Proficiências avaliadas pelo SAEB no período de 2011 a 2023 dos Anos Finais do Ensino Fundamental



Fonte: Elaborado com base no Anuário da Educação (2024).

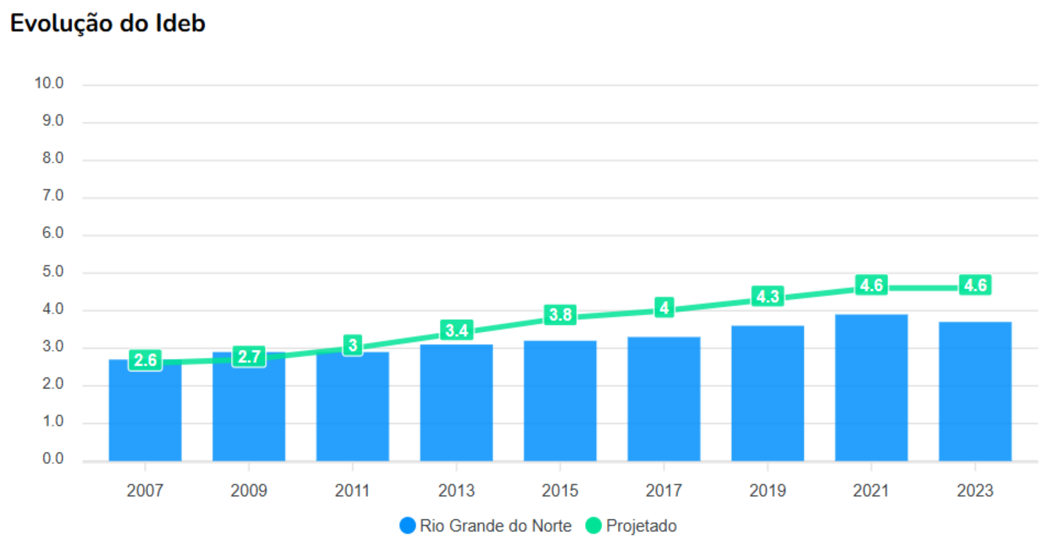
Quadro 1 – Fragmento da escala de proficiência de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental

NÍVEL 3 **Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275**	**Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:** **ESPAÇO E FORMA** • Reconhecer o ângulo de giro que representa a mudança de direção na movimentação de pessoas/objetos. • Reconhecer a planificação de um sólido simples, dado através de um desenho em perspectiva. • Localizar um objeto em representação gráfica do tipo planta baixa, utilizando dois critérios: estar mais longe de um referencial e mais perto de outro. **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** • Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por sete. • Determinar a soma, a diferença, o produto ou o quociente de números inteiros em situações-problema. • Localizar o valor que representa um número inteiro positivo associado a um ponto indicado em uma reta numérica. • Resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números inteiros. **TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES** • Associar dados apresentados em tabela a gráfico de setores. • Analisar dados dispostos em uma tabela simples. • Analisar dados apresentados em um gráfico de linha com mais de uma grandeza representada.

Fonte: Elaborado com base em Brasil (2020).

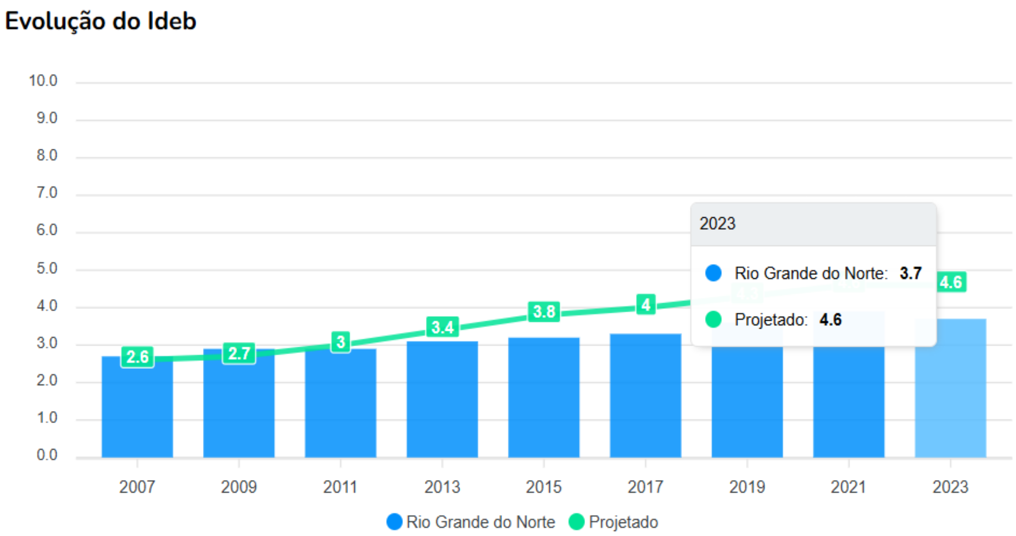
Em relação aos estados e considerando o Ideb da rede de ensino do RN, podemos concluir que ele é o “lanterna”. Em termos de resultados, o estado alcançou um índice de 3,7 na escala do Ideb, que varia de 0 a 10, isto é, o estado está muito aquém do desejado. Em termos de proficiências em matemática, o estado alcançou um índice de 235,11, que, de acordo com a escala de proficiências, o estado se encontra no nível 2, isto é, está abaixo do nível 3, que é o nível nacional (Gráficos 3, 4 e 5).

Gráfico 3 – Histórico do IDEB do RN de 2007 a 2023 dos Anos Finais do Ensino Fundamental



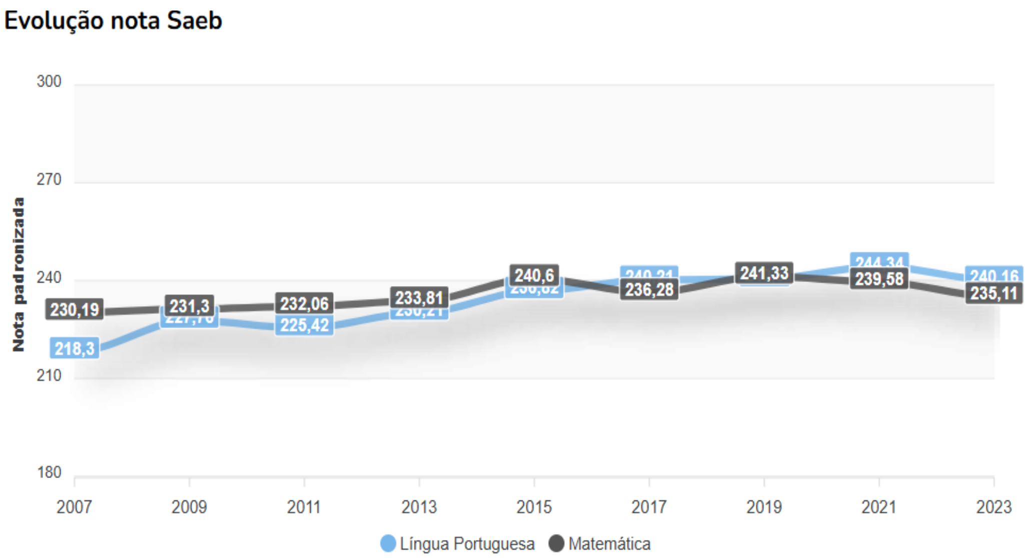
Fonte: Elaborado com base em QEdu (2024).

Gráfico 4 – Histórico do IDEB do RN de 2007 a 2023 dos Anos Finais do Ensino Fundamental



Fonte: Elaborado com base em QEdu (2024).

Gráfico 5 – Histórico das proficiências em português e matemática no IDEB do RN de 2007 a 2023 dos Anos Finais do Ensino Fundamental



Fonte: Elaborado com base em QEdu (2024).

Assim, com esses resultados das proficiências em matemática na rede pública, e por ter obtido um índice de 235,11, conclui-se de acordo com a tabela de níveis, que o RN, está no nível 2, o qual aborda as dimensões: Números e Operações; Álgebra e Funções; e Tratamento da Informação (Quadro 2).

Quadro 2 – Fragmento da escala de proficiência de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental

NÍVEL 2 **Desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250**	**Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:**
	NÚMEROS E OPERAÇÕES, ÁLGEBRA E FUNÇÕES • Reconhecer a fração que corresponde à relação parte-todo entre uma figura e suas partes hachuradas. • Associar um número racional que representa uma quantia monetária, escrito por extenso, à sua representação decimal. • Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por três. **TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES** • Interpretar dados apresentados em um gráfico de linha simples. • Associar dados apresentados em gráfico de colunas a uma tabela.

Fonte: Elaborado com base em Brasil (2020).

Diante desses resultados, a proposta desse trabalho é criar e implementar uma TpF de PEM, com auxílio de materiais manipuláveis, no âmbito das frações, abordando a relação parte-todo, de modo que, a partir da participação dos professores em um contexto formativo, seja possível obter acesso ao MK especializado e promover uma discussão reflexiva durante o processo formativo, isto é, obter acesso ao MK especializado revelado na resolução das tarefas. A tarefa será elaborada seguindo uma série de critérios, que também serão abordados no decorrer deste trabalho.

A formação com esse tipo de tarefa possibilita, ao PEM, reflexão acerca do MK especializado, através da resolução das tarefas, discussões e reflexões orientadas pelo professor formador durante esse processo formativo, possibilitando o diagnóstico de dificuldades apontadas durante a resolução da tarefa e as formas como eles enxergam determinados problemas matemáticos e, a partir desse MK especializado revelado, o professor formador também poderá tomar uma decisão, podendo assim contribuir significativamente para o desenvolvimento do conhecimento especializados dos participantes e, consequentemente, a aprendizagem dos alunos. A tarefa que será apresentada, abordará uma das habilidades (reconhecer a fração que corresponde à relação parte-todo entre uma figura e suas partes hachuradas), em defasagem e que é apontada nas dimensões do nível 2.

Com os resultados apontados pelas avaliações externas nacionais e internacionais, também é visível que o atual sistema de ensino tem se mostrado insatisfatório, no que diz respeito à aprendizagem e no desenvolvimento das proficiências em matemática dos discentes, deste modo, dentre as muitas variáveis existentes, destaca-se a necessidade de reaver os métodos de ensino atuais, buscando novos métodos, que possam complementar os já existentes. Desse modo, possibilitando que o aluno seja figura ativa no processo de ensino e aprendizagem, isto é, que o aluno não apenas codifique o que lhe é escrito pelo professor, e de forma automática, sem saber o real sentido e aplicação daquele conhecimento no cotidiano na resolução daquele problema. Segundo Freire (2009), essa prática reflete uma "educação bancária", em que o estudante é tratado como um recipiente vazio a ser preenchido, em vez de ser um sujeito ativo e crítico no processo de construção do saber.

Assim, pensar em um ensino fazendo essa busca, por novos métodos, possibilitará a mudança que a educação necessita, pois para se estabelecer uma educação inovadora dependerá de uma reflexão a respeito das atitudes pedagógicas e dos propósitos pelos quais o contexto educacional é caracterizado (Lorenzato, 2012.).

Diante dos resultados apresentados nos parágrafos anteriores, é evidente que os métodos até então usados não têm surtido bons efeitos e considerando que as pesquisas mostram que o conhecimento do professor é essencial para a aprendizagem dos discentes (Ribeiro; Gibim; Alves, 2021), deve-se haver uma busca por um formato de ensino que favoreça ao discente ser protagonista do processo de ensino aprendizagem, dessa forma possibilitando o prazer em aprender. Assim, a produção de Tarefas formativas para o PEM, com o auxílio de materiais manipuláveis, pode proporcionar ao professor um leque de estratégias, que através do MK especializado do PEM, podem instigar ao aluno, a investigar e analisar problemas e possíveis estratégias para sua resolução de problemas que possam surgir, tanto no âmbito da matemática escolar, como também na matemática vista no seu cotidiano (Grando, 2000).

Dito isso, a seguir, serão apresentados os critérios que servirão de base para a criação e uso dos materiais manipuláveis como recursos usados durante o processo formativo.

2.2 Materiais manipuláveis como recursos nas tarefas para formação

O que se busca, por meio das tarefas para formação (TpF), com auxílio de materiais manipuláveis, no processo formativo, é que o indivíduo seja capaz de obter e construir o MK especializado, a partir de uma atitude questionadora, levando-o a pensar em padrões e desenvolvendo também a atitude investigativa no desenvolvimento da prática em sala de aula (Lorenzato, 2012). Desse modo, para a criação dessas tarefas, foram pesquisados problemas da Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que pudessem servir de base para a criação das tarefas do aluno (elemento fundamental na TpF) e, que essa tarefa pudesse ter como auxílio os materiais manipuláveis para serem utilizado durante a formação. A TpF teve como pano de fundo para criação e análise o domínio do MK do MTSK. Na oficina que foi elaborada para formação de professores, buscou-se abordar, buscar e estimular o MK especializado dos participantes, por meio de tarefas e explicações que utilizam elementos do cotidiano dos discentes, além de servirem como instrumentos de coleta de dados para análise.

Durante a aplicação das tarefas, na oficina, foram usados os materiais manipuláveis. Mas, o que são materiais manipuláveis? Antes de descrever tal definição, é importante definir o que são materiais didáticos.

Os materiais didáticos são definidos, de acordo com Vale (2002), como aqueles pelos quais é possível recorrer durante o processo de ensino-aprendizagem, permitindo que durante esse processo os professores possam mostrar de maneira concreta, pictórica ou de forma simbólica, facilitando assim a visualização e entendimento dos conteúdos planejados pelo professor. Ele ainda descreve, que estes materiais didáticos podem ser caracterizados como: Manipuláveis Ativos, que são os concretos comuns ou educacionais, os Materiais Manipuláveis Passivos, e os Não-Manipuláveis. Os materiais manipuláveis são aqueles em que o indivíduo pode sentir, tocar, manipular e movimentar (Vale, 2002).

Os materiais manipuláveis ativos são os modelos concretos, como por exemplo geoplano, barras de Cuisenaire entre outros, que permitem uma manipulação direta. Já os materiais manipuláveis passivos são os de modelos do tipo pictórico, isto é, aqueles pelos quais o aluno se torna agente passivo do processo, observando apenas o professor fazer a demonstração dos processos. Os não-manipuláveis, são os de modelo simbólico ou abstrato, que permitem que os alunos ouçam, leiam e escrevam com papel e lápis, possibilitam ainda uma ideia matemática através de símbolos que indicam relações matemáticas ou operações, e estão presentes, mas não podem ser tocados, nem manipulados (Vale, 2002).

Como definido por Vale (2002), os materiais manipuláveis ativos podem ser caracterizados como materiais concretos comuns ou educacionais. No entanto, no decorrer desse trabalho nos deteremos aos materiais manipuláveis educacionais, que são aqueles construídos especificamente para serem usados na sala de aula para os fins educativos.

O uso de materiais manipuláveis, propostos durante a formação, que serão ferramentas auxiliares, também será usado para o ensino da matemática, pois possibilitam um papel mais ativo e participativo dos discentes no processo de ensino, ressaltando que o participante será o intermediário para que esses materiais cheguem até os discentes. Os quais de forma independente, possam buscar possíveis soluções para determinados tarefas apresentadas. Nesta aplicação, o participante desempenha a função de coadjuvante nesse processo, atuando apenas para questionar como chegou à determinada solução e, caso o discente tenha alguma dificuldade, esta poderá ser sanada pelo professor/formando, promovendo assim o ensino e cooperando com a aprendizagem do aluno.

O uso de jogos e desafios, como metodologia ativa, provoca nos discentes, principalmente no Ensino Fundamental, maior curiosidade e interesse, tornando-os mais receptivo à atividade e ao conteúdo que está sendo estudado.

> Essa metodologia representa, em sua essência, uma mudança de postura em relação ao que é ensinar matemática, ou seja, ao adotá-la, o professor será um espectador do processo de construção do saber pelo seu aluno, e só irá interferir ao final do mesmo, quando isso se fizer necessário através de questionamentos, por exemplo, que levem os discentes a mudanças de hipóteses, apresentando situações que forcem a reflexão ou para a socialização das descobertas dos grupos, mas nunca para dar a resposta certa. Ao aluno de acordo com essa visão, caberá o papel daquele que busca e constrói o seu saber através da análise das situações que se apresentam no decorrer do processo (Borin, 2004, p. 10–11).

No ambiente educacional, o uso de materiais manipuláveis deve ser planejado de acordo com os comportamentos e atitudes despertadas pelos discentes, a fim de obter os resultados desejados com a utilização de tais materiais. Apesar de existirem registros de uso dos jogos desde a antiguidade, na atualidade é preciso considerar essas categorias, pois ambos necessitam de certas habilidades, percepções e, principalmente, do envolvimento dos discentes, sendo que o professor, no jogo, desempenha um papel um pouco mais passivo, como um árbitro.

Essa proposta de inserção de materiais manipuláveis traz diversos benefícios ao serem implementadas, pois além de contribuírem para a aprendizagem dos conteúdos, também contribuirá de forma significativa para o desenvolvimento de outras habilidades, tais como: cooperação, interação e a maturidade na resolução de problemas do cotidiano.

> [..] se os professores considerassem o lúdico como um recurso associado à motivação, talvez o exercício ou a tarefa se tornassem mais desafiantes, provocadoras de curiosidade, [...] permitindo maior envolvimento e compromisso com o desafio do conhecimento da realidade, de si mesmo e do outro, facilitando o aprender a aprender. (Emerique, 1999, p. 190).

Pensar em desafios matemáticos, em materiais manipuláveis, como atividades que, para serem concluídas, o discente terá que seguir uma série de passos, os quais dependem de conhecimento prévios e dos conhecimentos adquiridos durante o processo, o que é uma excelente maneira de estimular o aluno no desenvolvimento de determinadas habilidades e posturas, as quais ele ainda não tenha desenvolvido.

Confirma Grando (2000, p. 17), que:

> [...] as posturas, atitudes e emoções demonstradas pelas crianças, enquanto se joga, são as mesmas desejadas na aquisição do conhecimento escolar. Espera-se um aluno participativo, envolvido na atividade de ensino, concentrado, atento, que elabore hipóteses sobre o que interage, que estabeleça soluções alternativas e variadas, que se organize segundo algumas normas e regras e, finalmente, que saiba comunicar o que pensa, as estratégias de solução de seus problemas.

Um fato importante a ser considerado é que a aplicação desses tipos de materiais na sala de aula pode funcionar como uma forma de introdução a conceitos iniciais até a aplicação de conceito mais gerais, além de ajudar na visualização e na habilidade de formular e organizar o pensamento (Lorenzato, 2012).

Lorenzato (2012, p. 61) ainda afirma que o material manipulável educacional ou concreto possibilita maior aprendizagem, além de outras características importantes para o desenvolvimento do discente:

> [...] material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico. crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos.

É importante ressaltar que as palavras não alcançam o mesmo efeito que conseguem os materiais manipuláveis.

> Palavras não alcançam o mesmo efeito que conseguem os objetos ou imagens, estáticas ou em movimento. Palavras auxiliam, mas não são suficientes para ensinar. [...] o fazer é mais forte que o ver ou ouvir. [...] o “ver com as mãos” é mais popular do que geralmente se supõe. [...] as pessoas precisam “pegar pra ver”, como dizem as crianças. Então, não começar o ensino pelo concreto é ir contra a natureza humana. (Lorenzato, 2010, p. 17–19).

Na verdade, de acordo com Batista e Spinilo (2008), poucos estudos revelam o efeito dos materiais manipuláveis, porém o que se sabe é que no pouco das investigações o uso do material manipulável causa muito mais efeito do que somente palavras.

> Os poucos estudos que especificamente investigam o efeito dos suportes de representação sobre a resolução de problemas com estrutura multiplicativa fazem comparações entre material concreto e lápis e papel. Um exemplo é a pesquisa realizada por Selva (1998) em que crianças (6 a 8 anos) resolviam problemas de divisão inexata em três situações distintas: material concreto (fichas), papel e lápis, e cálculo oral. Como esperado, o desempenho foi melhor com lápis e papel e com material concreto do que por meio do cálculo oral. Os dados mostraram que o uso de fichas e de lápis e papel levava a um desempenho semelhante, porém, superior àquele observado na situação sem material; indicando que a situação gráfica favorecia o desempenho da mesma forma que o material concreto. Observou-se, ainda, que as

> representações gráficas produzidas com lápis e papel propiciavam estratégias mais flexíveis e apropriadas do que a manipulação das fichas. Enquanto as fichas levavam as crianças a fazer uma representação direta do enunciado do problema, as representações gráficas favoreciam o uso de estratégias que contemplavam, de forma mais efetiva, os elementos do problema e suas relações (Batista; Spinillo, 2008, p. 2).

Contudo, para o uso de materiais manipuláveis, assim como em qualquer outra ferramenta, exigem-se certos cuidados, isto é, há a necessidade de planejamento, além de saber manipulá-los, pois o mal uso pode, assim como um bisturi nas mãos de um mal profissional de saúde, ocasionar sérios danos. Um exemplo claro de um dano é entender que o acerto significa compreensão, isso é extremante prejudicial durante o processo de aprendizagem, pois o que se deve entender, como descreve Lorenzato, é que só há ensino se houver aprendizagem (Lorenzato, 2010).

Lorenzato (2012) afirma que se deve haver planejamento e pensar em um fim pedagógico, pois o mal uso pode ocasionar uma inversão didática e explica que a inversão didática ocorre quando se pensa que o material, de forma isolada, pode resolver o problema da aprendizagem. Outro erro, descrito por ele, é considerar os materiais manipuláveis apenas pela sua ludicidade, o que significa que se deve considerar o processo formador do conhecimento nele inserido.

Ainda para Lorenzato (2012), o professor não pode ter em sua cabeça, nem repassar para o discente, que o material manipulável é a definição formal dos conceitos, pois isso pode levar o indivíduo a um bloqueio e/ou dificuldade durante o processo da aprendizagem. Mas, funcionam como pontos de partida para conceitos mais gerais. Além disso, ao se criar um material manipulável, é importante estudá-lo para que esses bloqueios também não venham à tona.

Existem também alguns mitos que permeiam o uso dos materiais manipuláveis, que são destacados por Lorenzato (2012, p. 60):

> [...] mitos e preconceitos acompanham os materiais didáticos, especialmente os de matemática: custam caro, existem poucos, aumentam o rendimento escolar, dificultam a abstração, facilitam a tarefa do professor, retardam o processo de aprendizagem. São essas algumas das frequentes desculpas para o não uso de materiais concretos em sala de aula.

Isso posto, podemos dizer que ao adotar alguns desses mitos o professor pode cair no pedantismo de não usar os materiais manipuláveis, e assim poderá ficar atraído pelo seu esmerado conjunto de abstrações e que este poderá resolver todos os seus problemas no processo de ensino, o que o torna “douto” (Pullias, 1976), mas de forma singularizada, pois não considera que outras formas de ensino podem alcançar os melhores resultados nesse processo.

Mas, quais os objetivos da criação dos materiais manipuláveis? Dentre os vários objetivos do uso dos materiais manipuláveis destaca-se o de tornar os alunos mais ativos, estimulando-os a serem indivíduos questionadores, além de observadores de padrões e os impelir como sujeitos investigadores no desenvolvimento do seu MK.

Mas, quais os critérios a serem observados na criação de um bom material manipulável? De acordo com Lorenzato (2012, p. 88), os critérios são:

> - os materiais devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas;
> - os materiais devem representar claramente o conceito matemático;
> - os materiais devem ser motivadores;
> - os materiais, se possível, devem ser apropriados para usar quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de formação de conceitos;
> - os materiais devem proporcionar uma base para a abstração;
> - os materiais devem proporcionar manipulação individual.

Além de um material bem planejado, dois outros fatores devem também ser considerados: a individualidade, no que diz respeito aos conhecimentos prévios dos envolvidos, e o ambiente, no qual serão aplicados esses materiais. De acordo com Pullias (1976), todo professor deve conhecer bem o seu estudante, pois a partir desse conhecimento é possível guiá-lo nessa viagem do aprendizado. Porém, não se deteremos a esses fatores.

Nesse sentido, pensar em material manipulável, exige do professor/formador reflexões teórico-pedagógicas, pois é quase impossível alguém ensinar o que não se aprendeu, tal que esse tipo de reflexão deve ser discutido, refletido, disseminado durante a formação do professor, possibilitando o seu uso pelos professores/formandos.

É importante considerar que as atividades práticas, podem proporcionar aos professores/formandos a oportunidade de complementar o que não foi ministrado para eles durante sua formação inicial; com isso, é colocado diante deles a chance dessa experimentação, o que pode estimulá-los a uma maior sensibilidade para os aspectos que interferem no processo de construção do conhecimento.

A experimentação e a argumentação apresentam-se como algo fundante na discussão e elaboração do significado matemático, o que leva os professores a refletirem (Lorenzato, 2012).

Uma observação importante a se fazer é que, de acordo com Lorenzato (2010), assim como qualquer outro recurso para o ensino, os materiais manipuláveis não conseguem na maioria das vezes abranger todo o programa, porém ele poderá funcionar como um auxílio dos demais métodos, como por exemplo, é um erro pensar que os materiais manipuláveis podem anular o livro didático, no entanto, estes podem auxiliar durante o processo.

Durante o processo de uso dos materiais manipuláveis, é possível que haja situações pelas quais sejam imprevisíveis em seu planejamento, porém o professor como protagonista de seu desenvolvimento profissional, não pode se desesperar, mas sim continuar a refletir sobre suas práticas e garantir, assim, um ensino com significado. Mesmo diante de tais situações, o professor ainda estará em pleno desenvolvimento do seu MK especializado. Sobre isso, Lorenzato (2012, p. 121) afirma que "dificuldades surgirão no exercício do magistério, pois o magistério é a arte da reflexão, isto é, além de ser artista, o professor precisa refletir sobre sua própria prática pedagógica".

Ele afirma ainda que a falta dessa reflexão sobre as práticas pedagógicas pode garantir um ensino destituído de significado. Assim, além de o professor ter que assumir tal postura, há a necessidade da busca, além da reflexão, constante de aprimoramento através de pesquisas e possíveis formações na sua área de abrangência profissional.

Mas, qual o problema que pode ser ocasionado ao ensinar matemática e esta não ter um significado válido para o indivíduo? Um ensino de matemática sem um significado é um convite à mera memorização e ao surgimento de crendices na cabeça do aluno, que se constituem em vários aspectos em relação à concepção, à aprendizagem, ao ensino e em relação aos conteúdos de matemática, além de outras que são citadas por (Lorenzato, 2010).

Para Pullias, dar significado ao que se ensina é uma das tarefas mais sutis, difíceis e importantes no processo do ensino. Sutil, pois o aprendizado não se dá por força, nem por violência, mas com delicadeza, bom planejamento, fazendo com que o aluno seja conduzido durante o percurso em busca do aprendizado.

Contudo, é importante destacar que a aquisição desse MK especializado não se adquire apenas na prática docente (Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2021), o que mostra que há necessidade de contexto formativo, e nesse processo serão utilizados materiais manipuláveis em conjunto com as tarefas formativas, este material manipulável é constituído pela tarefa do aluno construída em madeira, com o painel contendo o modelo da praça, tampinhas adesivadas com letras de A até E, do alfabeto latino e réguas de frações[2], de modo que os alunos possam manipular.

Já apresentada a definição dos materiais manipuláveis e os materiais pelos quais serão utilizados, serão iniciadas as apresentações da estrutura de uma tarefa ou das TpF.

[2] A régua de frações (ou réguas fracionárias) é um material didático manipulável utilizado para facilitar o ensino e a compreensão do conceito de frações, proporções e equivalências.

2.3 Estruturando as tarefas para formação

Antes da estruturação das TpF, é importante a apresentação do modelo teórico MTSK e da estrutura das tarefas formativas.

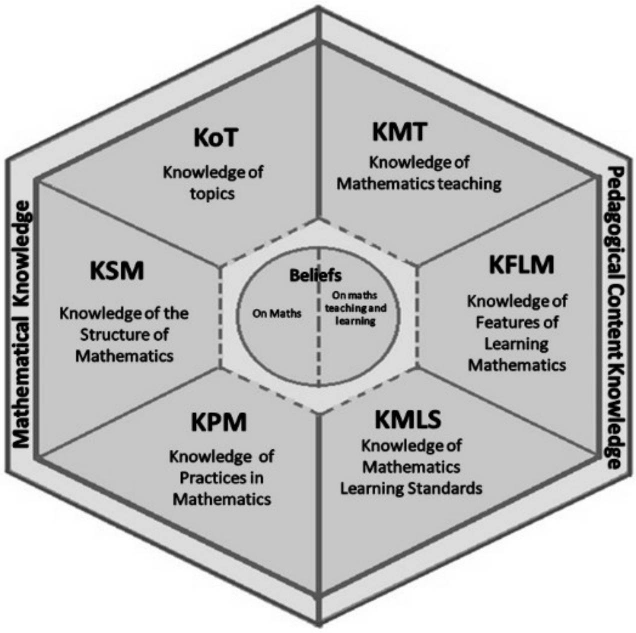
2.3.1 Mathematics Teachers' Specialized Knowledge

Para esse conhecimento especializado do PEM, Ribeiro e outros autores apresentam um modelo teórico, que é o MTSK (Carrillo-Yañez *et al.,* 2018), que traduzido em português significa: Conhecimento Especializado do Professor de Matemática. Dessa forma, o MTSK é um modelo teórico destinado a caracterizar o conhecimento profissional específico e especializado que um professor possui ou necessita possuir, para o ensino de matemática (Carrillo-Yañez *et al*., 2018).

Para Carrillo Yañez *et al*. (2018), o modelo MTSK adota um foco analítico e tem por objetivo a compreensão do MK especializado do professor, especificamente em relação aos elementos que o constituem e as interações entre eles. Desse modo, trata-se, portanto, de um modelo voltado prioritariamente para o estudo do conhecimento que o professor efetivamente mobiliza em sua prática em sala de aula.

Esse é formado por dois grandes domínios: o MK e, o Conhecimento do Conteúdo Pedagógico Especializado *(Pedagogical Content Knowledge — PCK)*. Esses dois grandes domínios são subdivididos cada um em três subdomínios, os quais são articulados pelas crenças que o PEM tem (Figura 1).

Figura 1 – Modelo de conhecimento especializado do professor de matemática



Fonte: Carrillo (2018).

O domínio do MK especializado é subdividido em três subdomínios que são: o Conhecimento dos tópicos de Matemática (*Knowledge of Topics* – KoT), o Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM) e o *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM).

O *KoT*, é definido por Ribeiro (2022), como o conhecimento do professor que se associa ao que se faz, como se faz e por qual objetivo se faz de determinada maneira. Este inclui características do resultado e diferentes modos de registros de representação em torno do tópico, bem como permite entender as formas diversas de definir equivalentemente um conceito, e ainda entender os fenômenos e as aplicações as quais estão associadas.

Ainda de acordo com Silva *et al.* (2023, p. 321), “o KoT relaciona-se ao conhecimento sobre as grandes ideias matemáticas e os tópicos a serem ensinados”. Compreende o MK para além do saber fazer em nível de conhecimento do aluno.

Segundo o autor, o KoT é composto por: a) procedimentos; b) definições, propriedades e fundamentos; c) registros de representação; e d) fenomenologia e aplicações.

Os procedimentos estão intimamente ligados aos conhecimentos do tópico que será trabalhado em sala de aula e como o professor poderá abordá-lo, usando estratégias convencionais ou não, mas que não fujam do rigor matemático. Esses se referem ao conhecimento de como proceder em matemática, com a utilização de algoritmos, sejam eles convencionais, alternativos ou com estratégias (Silva, 2023).

As definições matemáticas contemplam o conhecimento de um conjunto mínimo de propriedades do tópico. Com este conhecimento, o PEM pode identificar dificuldades ou erros de procedimentos por parte do aluno e assim intervir para correção. Ao PEM, o conhecimento das diferentes representações, procedimentos e abordagens é requerido para prosseguimento das interpretações na resolução dos alunos. Os registros de representações englobam o conhecimento das diferentes maneiras de representar um tópico, conceito, processo ou procedimento. Para isso, os registros podem ser aritméticos, concretos, gráficos, pictóricos, envolvendo linguagem verbal ou simbólica (Silva, 2023).

Em cada tópico há possíveis aplicações e o aparecimento de alguns fenômenos, e estes precisam ser interpretados para que o aluno consiga assimilar o que se quer que ele entenda. Desse modo, o PEM precisa conhecer bem esses fenômenos, bem como interpretá-los e aplicá-los. Tais fenômenos e aplicações estão diretamente relacionados ao conhecimento dos conceitos do tópico, aos diferentes fenômenos que estão envolvidos, assim como ao significado dessas manifestações e interpretações em diferentes contextos para o ensino de tal tópico (Silva, 2023).

O KSM é definido por Ribeiro (2022) como o conhecimento associado às conexões matemáticas entre os distintos tópicos matemáticos. O KSM é constituído por: a) conexões de complexificação; b) conexões de simplificação; c) conexões transversais; e d) conexões auxiliares.

Para Silva (2023) as conexões de complexificação envolvem uma perspectiva mais complexa do que as que as discussões específicas requeridas no contexto. Já as conexões de simplificação requerem atenção aos aspectos mais simples de cada tópico. A categoria conexões transversais está relacionada ao conhecimento da natureza de alguns conceitos, que surgem ao abordar diferentes conceitos ao longo da matemática escolar. Além dessas categorias, as conexões auxiliares emergem quando o professor utiliza conceitos ou tópicos diferentes, que não eram algo principal da discussão, acrescentando um elemento para contribuir e sustentar a discussão matemática (Silva, 2023).

Ribeiro (2022) define o KPM como o conhecimento do professor relacionado às diferentes formas de demonstração, aos critérios que garantem a validade de uma generalização, às diferentes táticas de resolução de problemas ou de modelagem matemática, bem como à compreensão do papel de definições, axiomas e teoremas como elementos constitutivos da matemática. Além disso, as categorias estão definidas em quatro itens: a) diferentes formas de demonstrar; b) distintos critérios de validação de uma generalização; c) múltiplas estratégias de resolução de problemas e de modelagem matemática; e d) o significado de definição, axioma ou teorema como elementos constituintes da matemática.

Já o domínio, do *PCK está* subdividido em três subdomínios: Conhecimento do Ensino de Matemática *(Knowledge of Mathematics Teaching* — KMT), o Conhecimento das Características da Aprendizagem de Matemática *(Knowledge of Features of Learning Mathematics* — KFLM) e o Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Matemática *(Knowledge of Mathematics Learning Standards* — KMLS).

No que tange ao KMT,

> [...] é formado pelo conhecimento relativo à (i) sequenciação das tarefas e questões (vencedoras) que irão maximizar a qualidade das discussões matemáticas para possibilitar o entendimento de cada tópico matemático; (ii) analogias e metáforas mais adequadas para cada situação e contexto e como e quando empregá-las de forma adequada e matematicamente correta; (iii) diferentes recursos e estratégias de ensino de cada um dos tópicos que nos permita escolher e utilizar os mais adequados em cada momento, e da melhor forma, de modo a alcançar o objetivo de aprendizagens matemáticas delineado. (Ribeiro, 2022, p. 15).

Em relação ao KFLM,

> [...] inclui o conhecimento pedagógico do professor, associado a cada tópico matemático relativo(i) as formas de interação dos alunos com o tópico matemático em discussão (processos e estratégias empregadas; linguagem; vocabulário matemático usualmente empregado); (ii) as maiores dificuldades ou facilidades e os erros típicos dos alunos que impedem ou facilitam a sua aprendizagem em cada tópico; (iii) as concepções dos alunos sobre a matemática e os seus principais interesses e expectativas em relação aos tópicos matemáticos específicos; (iv) as características de aprendizagem de cada um dos distintos tópicos matemáticos; (v) as teorias de aprendizagem pessoais ou institucionais (Ribeiro, 2022, p. 16).

No que concerne ao subdomínio KMLS,

> [...] refere-se ao conhecimento do conteúdo dos documentos oficiais que guiam a elaboração dos currículos, dos próprios currículos, e dos últimos resultados de pesquisa sobre o ensino e as aprendizagens matemáticas de cada um dos temas e tópicos matemáticos que nos cumpre abordar e de outros que com eles se relacionam (Ribeiro, 2022, p. 16).

Assumindo explicitamente que o nosso MK e o nosso conhecimento pedagógico necessitam ser especializados para a prática profissional de possibilitar que os alunos entendam matemática (Carrillo *et al*., 2018; Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013), o propósito deste trabalho é a criação e implementação de uma TpF para a formação de professores (inicial ou continuada) de (e que ensinam) matemática. A tarefa também servirá de instrumento de coleta de dados para a análise do MK especializado revelado e possibilitará uma reflexão em torno do MK especializado no âmbito das frações (relação parte-todo), a partir das resoluções dos participantes, tendo como suporte o modelo MTSK e o auxílio de materiais manipuláveis. Antes de descrever a tarefa formativa, na próxima seção será apresentado como uma tarefa formativa deve ser estruturada.

2.3.2 Tarefas formativas

As tarefas formativas, definidas por Ribeiro, seguem uma série de critérios (documentos) que serão considerados e que são constituídas por: TpF; cinco dimensões fundamentais para a implementação da tarefa do aluno; documento do professor e documento do formador (Ribeiro, 2022, p.18).

Ribeiro (2022) define TpF como a tarefa que vai ser implementada no contexto formativo e tem como ponto de partida uma situação da prática matemática do professor. Esta por sua vez esta é composta por uma tarefa para os alunos ou brincadeira para as crianças acompanhada de um conjunto de questões direcionadas para o (futuro) professor desenvolver o seu MK especializado (Almeida; Ribeiro, 2023).

Almeida, embasada em Ribeiro, define que a TpF pode ser composta por duas ou três partes. A formada por duas partes, é composta pela Parte Preliminar e a Parte I, que tem por objetivo o desenvolvimento do MK especializado do PEM. Já a formada por três partes, é composta pelas duas partes já mencionadas e uma Parte II, que visa o desenvolvimento do conhecimento interpretativo (CI).

Ela destaca que o tipo de TpF apresentada por Ribeiro, a qual possui uma terceira parte, foca no desenvolvimento do CI e se denomina de tarefas interpretativas (TI) (Ribeiro; Silva, 2024), essa parte é constituída por resoluções das tarefas aplicadas aos alunos (escritas, em vídeo, discussões de sala de aula) que são escolhidas e que potencializam as discussões matemáticas entre os envolvidos na formação, promovendo o desenvolvimento em torno do CI, e, nessa etapa, o professor terá que interpretar e fornecer um *feedback* construtivo.

> Parte Preliminar é proposta quando a tarefa é de introdução ao tópico e associa-se ao objetivo de aceder ao conhecimento do professor sobre o tópico foco da discussão, atentando a alguma dimensão do conhecimento matemático ou pedagógico e procura estabelecer um ponto de partida para as discussões a serem efetuadas. A Parte I é estruturada a partir de uma tarefa para o aluno (indicada dentro de um retângulo) seguida de questões para o professor, visando desenvolver o seu Conhecimento Especializado (Almeida; Silva; Ribeiro, 2023, p. 159).

As cinco dimensões fundamentais para a implementação da tarefa do aluno Ribeiro e Silva (2024) definem como um documento que possui um conjunto de orientações para que a tarefa dos alunos possa ser implementada. Além disso, para que possa possibilitar que os alunos entendam o que fazem e por que o fazem, a cada momento.

De acordo com Ribeiro e Almeida (2023), essas cinco dimensões referem-se a:

a) **objetivo de aprendizagem matemática que se persegue com a tarefa** — refere-se ao conteúdo matemático específico que se espera que os alunos desenvolvam ao resolver e discutir a tarefa, excluindo objetivos gerais, como trabalho em grupo ou habilidades de argumentação, por serem transversais a todas as atividades;
b) **habilidade da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)** — indicar a habilidade da BNCC mais relacionada ao objetivo matemático da tarefa, entendendo-a como um "saber fazer" que representa um objetivo final de aprendizagem, e não uma etapa inicial ou intermediária do processo de construção do conhecimento;
c) **os recursos necessários e forma de trabalho dos alunos** — listar os recursos físicos e tecnológicos necessários para o desenvolvimento ou implementação da tarefa, incluindo materiais dos alunos, organização da sala e forma de trabalho esperada, de modo que outro professor possa visualizar como a tarefa deve ser conduzida em sala de aula;
d) **maiores dificuldades dos alunos** — identificar e analisar as principais dificuldades matemáticas inicialmente que são comuns e que os alunos podem apresentar durante a tarefa, incluindo possíveis erros e obstáculos no desenvolvimento do conhecimento, com base na literatura e na experiência da prática em sala de aula;
e) **comentários para a implementação** — reunir todas as informações essenciais para que qualquer professor, familiarizado com o desenvolvimento do conhecimento especializado no tópico, possa aplicar a tarefa conforme o objetivo matemático proposto.

Já em relação **ao documento do professor,** Ribeiro (2022) define como uma síntese do MK especializado que se configura como necessário e suficiente para que o professor possa implementar a tarefa dos alunos.

Este documento associa-se a um dos mais recentes resultados de pesquisa com foco no conhecimento dos alunos e do professor no âmbito do tópico específico em discussão, e a sua elaboração associa-se à pesquisa que se realiza associada a cada TpF (Ribeiro, 2022).

Almeida destaca que esse documento reúne elementos fundamentais do MK especializado relacionados ao tópico da TpF que se pretende desenvolver no PEM que está em formação (Inicial ou continuada), como definições, registros de representação, procedimentos e vinculações possíveis com outros tópicos (Almeida; Silva; Ribeiro, 2023).

O quarto e último item, **documento do formador**, é definido como as indicações para que o formador de professores (idealmente pesquisador do CI e especializado do professor) possibilite a implementação da formação de modo que possam ser alcançados os objetivos formativos estabelecidos (Almeida; Ribeiro, 2023).

Esse documento serve de bússola ao formador para aplicar a TpF, indicando o foco principal a ser seguido nos processos formativos e de pesquisa, além de tratar sobre as especificidades da formação proposta. Delineia os objetivos de cada questão, o MK especializado a ser desenvolvido, apresenta exemplos de respostas esperadas, os conhecimentos envolvidos e orientações sobre como conduzir as discussões em cada etapa (Almeida; Ribeiro, 2023).

Nesse contexto, a tarefa que será apresentada e aplicada considera os documentos já mencionados, bem como outros que servirão de referência para a estruturação e o desenvolvimento de todo o processo formativo.

As TpF do PEM tem como objetivo principal obter acesso ao MK especializado que o formando possui sobre o tópico abordado, além de desenvolver esse conhecimento especializado (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021). As TpF são compostas por duas ou três partes: Parte Preliminar, Parte I e Parte II.

A Parte Preliminar em geral é proposta quando se quer introduzir um tópico e está associada ao objetivo de obter acesso ao conhecimento prévio do professor acerca do tópico abordado na discussão durante a formação, considerando sempre alguma dimensão do MK ou do conhecimento pedagógico e sempre procurando um ponto de partida para as discussões a serem realizadas (Almeida; Silva; Ribeiro, 2023).

A Parte I é constituída de uma tarefa do aluno, que é destacada em uma retângulo, acompanhada de questões para o professor em formação, e esta visa obter acesso ao seu conhecimento especializado (Almeida; Silva; Ribeiro, 2023).

A TpF composta por três partes ainda possui um conjunto de questões voltadas para o desenvolvimento do CI do professor, essa é denominada Parte II, que são as TI, compostas por tarefas resolvidas pelos alunos, que podem ser de forma escrita, em vídeo ou discussões realizadas em sala de aula e são escolhidas previamente por serem matematicamente potentes para as discussões e, consequentemente, para o desenvolvimento do CI, e, após essas discussões, possibilitam ao professor fornecer feedback construtivo (Mellone *et al*., 2020), mas estas tarefas não são o foco deste trabalho.

Visto isso, considerando que a prática do PEM sustenta-se na implementação de tarefas em sala de aula (Ribeiro; Silva, 2024), as quais são denominadas tarefas para o aluno, estas são recursos pedagógicos intencionais para ensinar matemática, que possibilitam que os alunos entendam o que fazem e o porquê fazem em determinado tópico de matemática abordado em cada momento (Ribeiro; Silva, 2024) e que para o desenvolvimento da TpF exige-se que haja esta Ta, passaremos a estruturá-la observando as cinco dimensões fundamentais.

Vale salientar que as tarefas para o aluno, que aqui serão apresentadas podem ser usadas em diferentes momentos: Introdução, revisão, consolidação ou avaliação, conforme planejamento do professor. Contudo, aconselha-se o uso deste recurso na introdução do tópico abordado, pois é neste momento que o professor exterioriza de forma evidente o seu conhecimento especializado (Ribeiro; Silva, 2024).

Para que o professor possa escolher, adaptar ou elaborar uma tarefa para o aluno, de tal modo que esta possa potencializar as discussões matemáticas, o professor deverá deter o conhecimento especializado e esse conhecimento especializado deve estar embasado segundo MTSK (Ribeiro; Silva, 2024).

Nesse contexto, Ribeiro (2024, p. 4, grifo nosso) defende que:

> [...] um recurso formativo que tem se mostrado propício para desenvolver o conhecimento especializado do professor são as Tarefas para a Formação – TpF– que são um dos elementos constituintes das denominadas Tarefas Formativas. Por ser entendida como elemento central a ser discutido na formação, a estrutura típica das TpF assume como primordial uma **tarefa para o aluno**, pois, a partir dessa tarefa para o aluno, podemos discutir o conhecimento do professor para resolver a tarefa (conhecimento de saber fazer do nível dos alunos) e, por meio das discussões que são propostas, desenvolver seu conhecimento especializado. Além disso, espera-se que a tarefa para o aluno contida na TpF seja implementada posteriormente pelos professores em suas turmas, efetuando uma modelação das experiências que vivenciou no contexto formativo, incorporando o tipo e foco das discussões na sua prática matemática com os alunos – transformando as suas práticas em práticas matemáticas emocionantes, mas essencialmente matematicamente inovadoras.

A tarefa para o aluno é o componente fundamental da tarefa formativa, pois através desse instrumento o formador poderá desenvolver a TpF. Nesse sentido, será descrita a tarefa para os alunos que aborda o tópico no âmbito das frações (relação parte-todo). De modo que, essa tarefa para os alunos possibilite o desenvolvimento de habilidades básicas previstas no nível 2, na escala de proficiência do SAEB, conforme descrita anteriormente.

Para implementação da tarefa para o aluno é necessário que se segam os critérios que são denominados "Cinco Dimensões Fundamentais para Implementação da Tarefa" (Ribeiro, 2021), contribuindo assim para que, a partir desta, o professor comece a desenvolver ou aprimorar o seu conhecimento especializado (Ribeiro; Silva, 2024).

Seguindo esses critérios, a partir de agora passaremos a apresentar a tarefa para o aluno.

2.3.3 Construção da tarefa: relação parte-todo de um trajeto

Como visto anteriormente a relação parte-todo é um dos tópicos que mais gera dificuldades nos alunos no Ensino Fundamental Anos Finais. Desse modo, a aplicação da Tarefa do aluno é fundamental para que possibilite o desenvolvimento de habilidades que possam estar em defasagem.

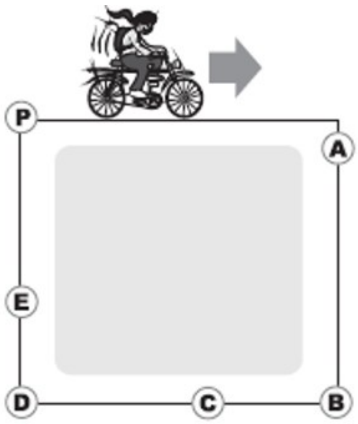
A tarefa para o aluno foi elaborada utilizando uma questão de nível 1 da OBMEP do ano de 2021.

Enunciado original da questão (OBMEP 2021 – nível 1 – 6º e 7º anos):

Sueli resolveu dar uma volta em torno de uma praça quadrada. Ela partiu do vértice P, no sentido indicado pela flecha, e caiu ao atingir $\frac{3}{5}$ do percurso total. Qual ponto indica o lugar em que Sueli caiu? (Figura 2)

SUPORTE:

Figura 2 – Imagem da Sueli se movimentando ao redor da praça



Fonte: OBMEP (2021).

A partir da questão original, foi elaborada a tarefa para o aluno, que será apresentada a seguir (Quadro 3).

Quadro 3 – Tarefa para o aluno

Tarefa: Relação parte-todo de um trajeto.

(Você deve explicar sempre o seu raciocínio descrevendo o processo que usara para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

A seguir é apresentada uma praça de formato quadrado:

Figura 3 – Imagem vertical da praça onde Sueli se movimentou ao redor da praça

Fonte: Elaboração própria.

Imagine que Sueli partirá de moto de um dos cantos da pista ao redor da praça e dará uma volta completa na pista ao seu redor.

a) Quais os possíveis pontos de partida de Sueli? Justifique Sua resposta.
b) Marque os cantos com as letras A, B, C, P, escolha P como ponto de partida. E escolha também um sentido de partida. Descreva sua escolha.
c) Sueli partiu do canto e sentido escolhidos:
   (i) Em qual dos outros cantos ela estará após andar $\frac{1}{2}$ do percurso? Justifique resposta.
   (ii) E se Sueli andar $\frac{3}{4}$ do percurso, a partir do ponto P, em qual dos cantos ela parará? Justifique sua resposta.
d) Ela partiu do vértice P, no sentido escolhido, e caiu ao atingir $\frac{3}{5}$ do percurso total. Marque com a letra D o ponto que indica o lugar em que Sueli caiu.
e) Descreva a ideia que utilizou na resolução usando o material manipulável apresentado pelo professor.

Fonte: Elaboração própria.

2.3.4 Tarefa para aluno seguindo as cinco dimensões fundamentais

As tarefas matemáticas que serão apresentadas e implementadas com os alunos precisam estar associadas claramente a um objetivo de aprendizagem matemática, pois este é um dos pilares que se perseguem para a implementação (Ribeiro, 2024). Apresentaremos abaixo as cinco dimensões fundamentais associadas a esta tarefa.

2.3.4.1 Objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue com a tarefa para aluno

Com esta tarefa, pretende-se desenvolver o MK dos alunos relativo ao entendimento das relações entre as partes e o todo (perímetro do quadrado), utilizar o conhecimento sobre o perímetro, associar e aplicar a ideia de deslocamento ao conceito de parte de um todo, além do entendimento sobre sequenciação e ordenação seguindo um percurso em uma figura geométrica.

2.3.4.2 Recursos necessários e forma de trabalho dos alunos

a) **Recursos** — os alunos devem ter a tarefa em material manipulável construída em madeira, com o painel contendo o modelo da praça e réguas de frações, de modo que os alunos possam manipular. Além disso, devem ter uma cópia da tarefa em uma folha de papel sulfite para resolução e, nesta também o aluno escreverá suas possíveis soluções da tarefa.
b) **Forma(s) de trabalho** — individual ou em pequenos grupos e, posteriormente, discutida em grande grupo. Esse tipo de abordagem pedagógica possibilita que os alunos tomem decisões e apresentem argumentações matemáticas para as suas respostas em confrontação com as respostas dos colegas contribuindo assim para que todos sejam responsáveis pelas aprendizagens de todos (Ribeiro, 2024).

2.3.4.3 Competências e habilidade matemática dos documentos oficiais associadas à tarefa

De acordo com Ribeiro (2024), a referência às habilidades da BNCC que mais se aproximam do objetivo de aprendizagem matemática é necessária, já que esse é o atual documento oficial vigente. No entanto, é importante destacar que a habilidade, por estar ligada principalmente a um “saber fazer”, possui um escopo mais limitado do que o objetivo de aprendizagem matemática propriamente dito. Assim, a seguir é apresentado as habilidades pelas quais se pretende desenvolver no aluno durante a aplicação da tarefa para o aluno (Quadro 4).

Quadro 4 – Eixo do conhecimento, competências e habilidades da BNCC

<table>
<tr><th>EIXO DO CONHECIMENTO</th><th>COMPETÊNCIAS GERAIS DA BNCC</th><th>HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC E COMENTÁRIO</th></tr>
<tr><td rowspan="8">NÚMEROS
GEOMETRIA
GRANDEZAS E MEDIDAS</td><td rowspan="8">Competência específica 2 – Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
Competência específica 8 - Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.</td><td>(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.</td></tr>
<tr><td>A questão exige a compreensão do perímetro do quadrado e sua aplicação para determinar a distância percorrida e ainda a ideia de ponto médio.</td></tr>
<tr><td>(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.)</td></tr>
<tr><td>A análise da posição onde Sueli caiu envolve raciocínio espacial e deslocamento ao longo dos lados do quadrado.</td></tr>
<tr><td>(EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.</td></tr>
<tr><td>A questão exige que o aluno intérprete e calcule uma fração do percurso total.</td></tr>
<tr><td>(EF08MA13) – Resolver problemas que envolvem grandezas proporcionais, utilizando diferentes estratégias</td></tr>
<tr><td>O cálculo de 3/5 do perímetro envolve proporção e divisão do percurso total.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado com base em Brasil (2018).

2.3.4.4 Maiores dificuldades matemáticas dos alunos

Aqui são apresentadas possíveis dificuldades dos alunos que podem surgir no decorrer da implementação da tarefa e, com isso em mãos, o professor já terá uma ideia para sua tomada de decisões.

De acordo com Ribeiro (2024), as dificuldades devem e necessitam ser entendidas, para que a partir das discussões matemáticas elas, possam ser erradicadas.

> Enquanto professores, necessitamos assumir as dificuldades dos alunos para as discussões matemáticas de modo a possibilitar que essas dificuldades sejam erradicadas e os alunos possam entender matemática e passem a ter prazer em aprender, pois efetivamente entendem o que fazem e por que o fazem, a cada momento (Ribeiro, 2024, p. 105–106).

Não consideramos questões de cunho transversal e de contextos não matemáticos, mas focamos exclusivamente nas maiores dificuldades matemáticas que os alunos podem enfrentar. (Ribeiro, 2024, p. 105).

De acordo com Ribeiro (2024), quando se trata das maiores dificuldades dos alunos no contexto das frações, são identificadas:

a) entender o que é fração;
b) entender o que as frações representam;
c) comparar quantidades em representação fracionária;
d) localizar quantidades na reta numerada;
e) efetuar operações envolvendo quantidades fracionárias;

Diante dessas dificuldades, ao trabalhar essa tarefa do aluno, objetivamos suprir estas lacunas existentes no conhecimento do aluno.

2.3.4.5 Comentários para a implementação, relativamente a possíveis formas de implementação e discussões matemáticas associadas

A prática profissional enquanto PEM é considerada como especializada, o que implica que para que haja uma implementação de uma tarefa matematicamente significativa faz-se necessário ter o foco em discussões matemáticas que viabilizem, maximizem e garantam uma aprendizagem matemática com qualidade. Desse modo, de forma imbricada todas as discussões devem permear de forma transversal cada uma das demais dimensões (Ribeiro, 2024, p. 106).

Para as discussões, serão consideradas: as indicações gerais, possíveis perguntas matematicamente vencedoras e possíveis soluções da questão original que podem ser apresentadas pelo professor a depender do nível ou ano escolar.

2.3.4.6 Indicações pedagógicas gerais

As indicações pedagógicas aqui apresentadas foram adaptadas baseando-se nas indicações pedagógicas feitas em (Ribeiro, 2024), a saber:

a) após entregar a tarefa e o material manipulável aos alunos, recomenda-se a leitura coletiva para que todos se concentrem na atividade a ser realizada, porém, não se deve realizar explicações neste momento;
b) durante a resolução da tarefa, o professor deverá circular pela sala, e deixar os alunos manipularem o material, com o intuito de identificar diferentes estratégias e respostas, porém, sem validá-las, devendo isso ocorrer somente na plenária de modo a garantir que os alunos permaneçam engajados e matematicamente ativos durante toda a implementação.
c) escolher intencionalmente quais produções dos alunos que serão utilizadas para discutir na plenária, escolher também em que ordem elas serão problematizadas – uma opção é a de selecionar algumas produções que se encontrem associadas a formas de pensar inadequadas ou que exteriorizam respostas incompletas de modo que os alunos possam ir desenvolvendo o seu entendimento e conhecimento a partir do erro;
d) para a plenária, o professor poderá fotografar as produções escolhidas, e projetá-las de maneira que todos os alunos possam visualizá-las;
e) as discussões em plenária devem possibilitar que os próprios alunos sistematizem o conhecimento desenvolvido, sendo, portanto, fundamental efetuarmos perguntas (verdadeiras) e dar tempo para que os alunos possam respondê-las;
f) as discussões matemáticas que efetuamos com os alunos são otimizadas se forem efetuadas as denominadas perguntas vencedoras, perguntas essas que possam acionar/estimular o modo investigativo a cada momento, e que possamos estruturar a nossa prática matemática em torno de questionamentos (que demandam conhecimento especializado) possibilitando que os alunos possam generalizar as suas formas de pensar matematicamente.

Com o objetivo de promover as discussões matemáticas, em torno da aprendizagem matemática do aluno, podem ser efetuadas algumas perguntas direcionadas (perguntas vencedoras e matematicamente vencedoras). Essas perguntas são fundamentais para a prática especializada, as quais antecipam possíveis dificuldades dos alunos e equacionam-nas, de modo que eles entendam, possibilitando discussões matematicamente adequadas e as aprendizagens matemáticas dos alunos (Ribeiro, 2024).

Isso posto, as perguntas vencedoras que serão realizadas são:

a) O que a questão está pedindo? (Frações que representam o ponto da queda no trajeto).
b) Que figura geométrica pode representar o trajeto? (Um quadrado).
c) Em que ponto Sueli caiu? (Não se tem ideia, após a análise do problema).
d) Se a figura tivesse outra forma geométrica, isso mudaria a forma de pensar na resolução? (A grandeza e o processo usado seriam os mesmos).

Nesse momento, com direcionamento do professor, os alunos poderão explicar suas resoluções verbalmente e via material manipulável, o que poderá estimular as discussões em grupo.

Logo após as primeiras perguntas vencedoras, o professor poderá conduzir uma nova discussão, com uso de perguntas matematicamente vencedoras, como:

a) Como poderíamos achar o todo? (Juntando as partes).
b) Esse todo está relacionado a alguma grandeza matemática? (Sim, ao perímetro).
c) Qual o perímetro da figura? (É a soma das medidas dos lados, ou a junção das medidas dos lados, a depender do método de resolução).
d) O perímetro depende da medida do lado? Como? (Sim, pois o perímetro é a soma das medidas dos lados).

Com essas perguntas o professor oportuniza que o aluno observe que a junção das partes é o todo (Perímetro), e com isso poderá fazer perceber que há a possibilidade de se achar as frações correspondentes desse todo.

a) Que frações correspondem aos pontos B e C? (O ponto B, é o segundo ponto após a partida, e ficará em um dos cantos da praça que dividirá o todo ao meio; portanto, B representa o ponto $\frac{1}{2}$, e o ponto C, no terceiro ponto, portanto, no 3º canto, desse modo C representa a fração $\frac{3}{4}$).

b) Qual das frações é maior: a que representa B ou a que representa C? (Considerando o sentido tomado, $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$).
c) É possível traçar os pontos do trajeto em uma reta numérica? (Sim, se juntarmos os lados, de modo que fiquem alinhados, formando um único segmento de reta composta por eles).
d) Qual o todo nesse trajeto? (O perímetro).
e) Qual o ponto que representa metade do trajeto? (B).
f) Como se pode calcular o $\frac{3}{5}$ do trajeto? (Comparando as frações em cada ponto, ou calculando, algebricamente, ou assumindo um valor para o lado, ou usando réguas de frações).
g) Por que multiplica $\frac{3}{5}$ pelo perímetro? (Se assumir um valor, porque o perímetro é o todo).
h) Quantos lados (completos) Sueli percorreu antes de cair? (dois lados).
i) Ela caiu no início, no meio ou no final do percurso? Como sabemos? (Ela caiu no terceiro lado, o que podemos observar depois de resolver o problema).
j) O Sentido implicará no resultado? O resultado seria o mesmo? (Sim, mudaria a posição da queda).
k) É possível aplicar essa ideia em outros contextos, como corridas ou medições de terrenos? (Sim, pois a ideia de o todo ser o perímetro não mudará).
l) Que estratégias diferentes vocês usaram para resolver o problema? (Depende da solução já apresentada).

Observem que, esses questionamentos poderão auxiliar o professor na implementação da tarefa, fazendo com que os alunos entendam a importância de que nem sempre o todo (Perímetro), estará imediatamente disponível para observação, e que há uma necessidade de o aluno fazer essa conexão através do seu entendimento sobre o todo discreto.

É importante ressaltar que para essa tarefa é considerado que a praça tem formato quadrado, no entanto, outros problemas poderiam ser abordados ou adaptados considerando as medidas dos lados sendo diferentes.

De modo análogo, ao que é realizado com as questões vencedoras, o professor conduzirá os questionamentos utilizando o material manipulável de forma verbal e, de forma escrita, os alunos expressarão suas resoluções.

Dentro das discussões para implementação da tarefa para o aluno, também serão apresentadas algumas possíveis soluções do problema original, o qual serviu de base para elaboração da tarefa do aluno.

2.3.5 Tarefa para formação

As questões inseridas logo após a Tarefa para o Aluno estão associadas diretamente aos objetivos da pesquisa e da formação, o que é justificado pelo fato da TpF ser um instrumento de coleta de dados que possibilita responder perguntas associadas à pesquisa e à formação, de modo que, servem de direção e apontam o que deve ser considerado para implementação da tarefa (Almeida; Ribeiro, 2023).

As perguntas a seguir fazem parte da TpF e, em seguida, serão apresentadas as perguntas que visam obter acesso ao conhecimento especializado do PEM (Quadro 5).

Quadro 5 – Tarefa Preliminar

PARTE PRELIMINAR
Conjunto de questões que focam o conhecimento e as práticas matemáticas do professor no âmbito do tópico em discussão. a) **Imagine que você está na rua e alguém** lhe **pergunta: "O que é uma fração?" O que você responderia, lembrando que não é o momento de ensinar, apenas de dar uma explicação simples e rápida?** b) **E se, como professor, você pudesse escolher entre todos os recursos que conhece, quais selecionaria para ajudar os alunos a entenderem o conceito de fração? E por que escolheria esses recursos?**

Fonte: Elaborado com base em CIEspMAT (2024).

Na tarefa preliminar apresentada, o item a) tem o objetivo de obter acesso ao domínio conceitual de fração, à precisão matemática e à capacidade de explicação simples e adequada do professor, em outras palavras, tem-se o objetivo de obter o conhecimento especializado acerca do tema. Já o item b) visa verificar a capacidade de escolher recursos pedagógicos coerentes, justificar escolhas e compreender dificuldades dos alunos.

Na tarefa, Parte I: relação parte-todo em um trajeto, o item a) tem o objetivo de obter acesso ao domínio do MK dos participantes (Quadro 6). O item b) visa obter acesso ao espaço solução e prever raciocínios e dificuldades iniciais dos participantes. Já no item c) o objetivo é obter acesso ao espaço solução e compreender a progressão da aprendizagem. E, por último, no item d) o objetivo é obter acesso ao conhecimento sobre outros recursos, verificando se sabem relacionar, selecionar e justificar recursos didáticos.

Quadro 6 – Tarefa Parte (PI)

Parte I

a) Resolva a tarefa por conta própria, sem se preocupar em ensinar ou explicar o procedimento para outra pessoa.

Tarefa: Relação parte-todo em um trajeto

(Você deve explicar sempre o seu raciocínio descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

A seguir é apresentada uma praça de formato quadrado:

Imagine que Sueli partirá de moto de um dos cantos da praça e dará uma volta completa na pista ao seu redor.

a) Quais os possíveis pontos de partida de Sueli? Justifique Sua resposta.
b) Marque os cantos com as letras A, B, C, P, escolha P como ponto de partida. E escolha também um sentido de partida. Descreva sua escolha.
c) Sueli partiu do canto e sentido escolhidos:
   (i) Em qual dos outros cantos ela estará após andar $\frac{1}{2}$ do percurso? Justifique resposta.
   (ii) E se Sueli andar $\frac{3}{4}$ do percurso, a partir do ponto P, em qual dos cantos ela parará? Justifique sua resposta.
d) Ela partiu do vértice P, no sentido escolhido, e caiu ao atingir $\frac{3}{5}$ do percurso total. Marque com a letra D o ponto que indica o lugar em que Sueli caiu?
e) Descreva a ideia que utilizou na resolução usando o material manipulável apresentado pelo professor.

b) No grupo discutam e descrevam como vocês acham que um aluno do 6º ano resolveria esse problema? Apresentem possíveis formas diferentes de resolução e representação, associando-as a conhecimentos ou compreensões matemáticas que esse aluno poderia ter. Registre na folha de resposta.

c) No grupo discutam e descrevam como vocês acham que um aluno do 7º ano resolveria esse problema? Apresente possíveis formas diferentes de resolução e representação, associando-as a conhecimentos ou compreensões matemáticas que esse aluno poderia ter. Registre na folha de resposta.

d) Que recurso usaria para resolução da tarefa além do material manipulável disponibilizado pelo professor formador? E de que forma utilizaria?

Fonte: Elaboração própria.

Agora, já apresentados os objetivos das tarefas, será apresentado o documento do professor, que compõe os documentos da tarefa formativa.

2.3.6 Documento do professor

Como já definido anteriormente, o documento do professor é estruturado pelo conjunto de todos os elementos fundamentais do MK especializado do tópico abordado na TpF que se pretende desenvolver nos professores participantes da formação, tais como definições matemáticas, registros de representação, procedimentos e possíveis conexões entre o tópico central da tarefa e outros tópicos (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021).

> [...] é discutido o conhecimento matemático especializado do professor relacionado ao tópico em questão, considerando a perspectiva do *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* – MTSK e do Conhecimento Interpretativo (Ribeiro, [s.d.], p. 306).

Dessarte, passaremos a discutir o conhecimento especializado do professor sob a perspectiva do MTSK.

O conhecimento especializado do PEM no contexto do tópico da relação parte-todo abordado na tarefa.

O conhecimento especializado do professor, agora bem desenvolvido em contextos formativos, isto é, de forma intencional, sustentará com eficácia a prática do PEM, pois este tendo esse conhecimento, conhecerá bem o tópico em discussão, bem como possibilitará uma prática pedagógica melhorada e com discussões matemáticas que promovam uma aprendizagem significativa da matemática nos alunos.

Sob a ótica do MTSK e de seus subdomínios já apresentados nos capítulos anteriores, passaremos a fazer a análise do tópico das frações e algumas aplicações do todo, na resolução da tarefa, as quais se pretende desenvolver no professor que ensina matemática e que comporá o documento do professor.

2.3.6.1 Conhecimento dos Tópicos (KoT)

O MK do PEM é fundamental para que possa desenvolver sua prática em sala de aula, e conhecer os tópicos em um nível alto, de forma que possibilite ao aluno o direito de aprender de forma adequada, entendendo o que se faz, como se faz e por que se faz de determinada forma, envolvendo modos de registros de representação (Ribeiro, 2024).

Este subdomínio é constituído pelas seguintes categorias: a) fenomenologia; b) propriedades e seus fundamentos; c) registros de representação; d) definições; e) procedimentos (Ribeiro, 2024) (Quadro 7).

Quadro 7 – Conhecimento dos tópicos (KoT)

	CONHECIMENTO DOS TÓPICOS (KOT)
a)	**Compreender que um todo pode ser dividido tanto em partes iguais quanto em partes desiguais.**
b)	**Conhecer que podemos juntar partes iguais ou diferentes e formar o todo.**
c)	**Conhecer que existem "coisas" que são maiores que o todo (por exemplo: $\frac{4}{3}$ ou 1 e $\frac{1}{2}$).**
d)	**Conhecer que a parte é sempre menor ou igual ao todo.**
e)	**Conhecer que comparar a parte e o todo é um procedimento fundamental para podermos ordenar quantidades representadas em fração.**
f)	**Conhecer que o todo não necessariamente corresponde a "um inteiro", pois poderemos ter todos compostos por vários elementos.**
g)	**Compreender que um dos significados fundamentais da fração é o de parte-todo, e que esse conceito não deve ser confundido com parte de um "inteiro" ou de uma "unidade", pois o "todo" pode assumir diferentes naturezas conforme o contexto.**
h)	**Reconhecer a importância de utilizar uma linguagem matematicamente adequada ao se referir ao "todo", evitando o uso indiscriminado dos termos "inteiro" e "unidade", já que o todo pode ser composto por múltiplos elementos discretos e não necessariamente representar uma única entidade.**
i)	**Conhecer que para obter o todo a partir da parte podemos utilizar representações contínuas ou discretas e que isso não depende da parte que se considera.**
j)	**Conhecer que os procedimentos para obtenção do todo a partir de uma ou várias partes são generalizáveis, independentemente da quantidade que a parte representa (podemos considerar partes que sejam representadas por denominadores primos, que são muito mais difíceis de obter se o ponto de partida for o todo – para discutir essa generalização).**
k)	**Conhecer que as partes para a construção do todo não necessitam possuir necessariamente o mesmo formato (se considerarmos a área, necessitam ser equivalentes).**
l)	**Conhecer que quando consideramos o perímetro, as figuras precisam ser isoperimétricas (ou seja, ter o mesmo perímetro); já quando o foco está na quantidade, os elementos podem ser de diferentes tipos, pois o objetivo é apenas quantificar.**

Fonte: Elaborado com base em Ribeiro (2024, p. 131–132).

2.3.6.2 Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM)

Os tópicos matemáticos associados ao MK estão entrelaçados e permitem fazer conexões com outros tópicos, essas conexões enriquecem o entendimento matemático e sustentam as diferentes maneiras de pensar promovendo um maior entendimento no que se quer ensinar (Ribeiro, 2024).

As conexões podem ser subdivididas nas seguintes categorias: a) conexões de complexificação; (b) conexões de simplificação; c) conexões transversais; d) conexões auxiliares (Ribeiro, 2024).

No tópico, neste subdomínio do conhecimento do professor (KSM), incluem-se, por exemplo (Quadro 8):

Quadro 8 – Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM)

CONHECIMENTO DA ESTRUTURA DA MATEMÁTICA (KSM)	
a)	**Conhecer que existe uma conexão entre o todo e o 100% (o todo que se considera equivale a 100%.**
b)	**Conhecer a conexão entre metade de um todo e 50% desse mesmo todo.**
c)	**Conhecer a conexão entre o procedimento de determinar o todo a partir da parte e o procedimento de repetir a unidade de medida para medir.**
d)	**Conhecer a relação entre diferentes representações de frações (geométrica, simbólica, numérica).**
e)	**Conhecer que existe uma conexão entre a representação contínua do todo e a representação discreta equivalente, podendo determinar as partes distintas que formam o todo em ambas as representações (e que em determinadas situações a discussão será mais potente utilizando uma representação ou outra).**
f)	**Conhecer a conexão entre a construção do todo a partir de uma ou várias de suas partes e o processo de determinação do MMC para efetuar adição e subtração de quantidades representadas em fração** (uma vez **que determinar o MMC tem correspondência com construir o todo das partes que se pretendem adicionar ou subtrair a partir de uma outra parte – da maior parte que permite comparar simultaneamente cada uma das que se encontram envolvidas na adição ou subtração).**

Fonte: Elaborado com base em Ribeiro (2024, p. 134).

2.3.6.3 Conhecimento da Prática Matemática (KPM)

O KPM do PEM, aponta para o conhecimento dos princípios fundamentais para generalização, demonstração e as possíveis estratégias para resolução de problemas e de modelagem matemática, considerando que durante essa prática, a cada passo dado rumo ao objetivo, vão se fazendo correções e ajustes, de modo que possibilite ao PEM desenvolver e entender o que se faz e o porquê se faz (Almeida; Ribeiro, 2023).

Para este subdomínio, o professor deve deter o conhecimento sobre as seguintes categorias a) diferentes maneiras de demonstrar; b) diferentes critérios para que uma generalização seja válida; c) o significado de definição e de definir; d) a sintaxe matemática; e e) diferentes estratégias de resolução de problemas ou de modelagem matemática (Almeida; Ribeiro, 2023).

No tópico, neste subdomínio do conhecimento do professor (KPM), incluem-se, por exemplo (Quadro 9):

Quadro 9 – Conhecimento da Prática Matemática (KPM)

CONHECIMENTO DA PRÁTICA MATEMÁTICA(KPM)	
a)	**Conhecer que uma condição necessária para que tenhamos um todo é ter pelo menos uma parte**.)
b)	**Conhecer que podemos generalizar o processo de obtenção de um todo a partir de uma de suas partes se repetirmos a quantidade de partes indicadas no denominador da representação em fração**.
c)	**Conhecer que a partir de uma ou várias partes podemos obter um conjunto infinito de distintos todos, e que o contexto em que nos situamos poderá limitar essa possibilidade.**

Fonte: Elaborado com base em Ribeiro (2024, p. 137).

Considerando que as discussões permeiam os conteúdos do MK, estes servirão de apoio para a análise do conhecimento especializado dos professores em formação apresentados nas resoluções das TpF.

A seguir, será apresentado o documento do formador que serve de apoio para a implementação da TpF e para o momento formativo.

2.3.7 Documento do Formador para implementação da tarefa para formação

Este documento serve de bússola ao formador para aplicar a TpF, indicando o foco principal a ser seguido nos processos formativos e de pesquisa, além de tratar sobre as especificidades da formação proposta. Delineia os objetivos de cada questão, o Conhecimento Especializado e/ou Interpretativo a ser desenvolvido, apresenta exemplos de respostas esperadas, os conhecimentos envolvidos e as orientações sobre como conduzir as discussões em cada etapa (Almeida; Silva; Ribeiro, 2023).

Este documento também seguirá os critérios das cinco dimensões fundamentais usadas para a implementação da tarefa do aluno, agora com foco na formação inicial ou continuada de professores.

2.3.7.1 Objetivo de aprendizagens matemáticas que se persegue com a tarefa para formação

O objetivo matemático principal desta tarefa, é o desenvolvimento do conhecimento especializado dos professores no que concerne ao tema frações e em específico ao tópico das relações entre as partes e o todo (Perímetro do quadrado).

Os objetivos matemáticos específicos são: utilizar o conhecimento sobre o perímetro, associar e aplicar a ideia de deslocamento ao conceito de parte de um todo, além do entendimento sobre sequenciação e ordenação seguindo um percurso em uma figura geométrica com a utilização de materiais manipuláveis.

Na tarefa preliminar, o item a) tem o objetivo específico de obter acesso ao conhecimento prévio do professor sobre o que conhece acerca do tema frações. Já no item b) o objetivo específico é obter acesso ao conhecimento do PEM, sobre os recursos que ele conhece para o ensino de frações e o porquê de utilizar tal recurso.

Na tarefa, Parte I: Relação parte-todo em um trajeto, o item a) tem o objetivo de obter acesso ao domínio do MK dos participantes. No item b) visa obter acesso ao espaço solução e prever raciocínios e dificuldades iniciais dos participantes. Já no item c) o objetivo é obter acesso ao espaço solução e compreender a progressão da aprendizagem. E por último, no item iv) o objetivo é obter acesso ao conhecimento sobre outros recursos, verificando se sabem relacionar, selecionar e justificar recursos didáticos.

2.3.7.2 Recursos necessários e formas de trabalho durante a formação

Inicialmente o professor fará uma breve apresentação e explanação sobre os objetivos da formação e, posteriormente, entregará a cada participante uma folha contendo a Parte Preliminar. O professor formador deve usar no máximo 20 min, os participantes realizarão a tarefa de forma individual. Em seguida será iniciada a Parte I, momento em que serão criados grupos de até quatro integrantes. Cada grupo receberá a tarefa impressa e o material manipulável que servirá de suporte na resolução da tarefa. Para a Parte I, os participantes terão 45 min para discussão e escrita da resolução.

Decorridos uma 1 h e 20 min desde o início da aplicação das tarefas, serão iniciadas as discussões com todos os presentes, para esta etapa a duração será de 2 h. Desse modo, para o contexto formativo serão necessários 3 h e 20 min.

2.3.7.3 Competências e habilidade matemática dos documentos oficiais associadas à tarefa

De acordo com Ribeiro (2024), é necessário apresentar as habilidades da BNCC que mais se aproximam do objetivo de aprendizagem matemática. No entanto, é importante destacar que a habilidade, por estar ligada principalmente a um "saber fazer", possui um escopo mais limitado do que o objetivo de aprendizagem matemática propriamente dito. Assim, a seguir, são apresentadas as habilidades que se pretende desenvolver no aluno durante a aplicação da tarefa para o aluno (Quadro 10).

Quadro 10 – Eixo do conhecimento, competências e habilidades da BNCC

EIXO DO CONHECIMENTO	COMPETÊNCIAS GERAIS DA BNCC	HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC E COMENTÁRIO
NÚMEROS GEOMETRIA GRANDEZAS E MEDIDAS	**Competência específica 2** – Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. **Competência específica 8** - Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas,	**(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.**
		A questão exige a compreensão do perímetro do quadrado e sua aplicação para determinar a distância percorrida e ainda a ideia de ponto médio.
		(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.)

	de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.	A análise da posição onde Sueli caiu envolve raciocínio espacial e deslocamento ao longo dos lados do quadrado.
		(EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
		A questão exige que o aluno interprete e calcule uma fração do percurso total.
		(EF08MA13) – Resolver problemas que envolvem grandezas proporcionais, utilizando diferentes estratégias
		O cálculo de 3/5 do perímetro envolve proporção e divisão do percurso total.

Fonte: Elaborado com base em Brasil (2018).

2.3.7.4 Maiores dificuldades matemáticas dos professores.

Almeida e Ribeiro (2019) discutem o tópico frações como um dos que tanto alunos quanto professores manifestam dificuldades de compreensão, especialmente no que diz respeito à mobilização de conhecimentos relacionados a quantidades contínuas e discretas. Embora os professores revelem certo domínio do sentido parte–todo, limitações ligadas ao uso adequado da linguagem e à compreensão de frações em contextos discretos destacam lacunas no MK especializado necessário para o ensino eficaz desse conteúdo. Há dificuldades em associar a ideia de fração apenas à parte-todo (modelo partitivo), esquecendo que há outros significados, tais como razão (comparação de grandezas); como quociente (divisão de dois números inteiros); bem como número na reta numerada.

2.3.7.5 Comentários para a implementação da tarefa para formação

A tarefa para o aluno aqui elaborada e apresentada como parte da TpF foi pensada para ser implementada nas séries do Ensino Fundamental Anos Iniciais e Anos Finais, assim a formação foi planejada para ser implementada com professores de (e que ensinam) matemática que atuam nesse nível de escolaridade, porém, não extingue a possibilidade de ser aplicada aos professores que atuam no Ensino Médio ou gestores que atuam em outros segmentos.

As discussões devem ser motivadoras e realmente potentes de modo que possibilitem o desenvolvimento ou aperfeiçoamento do conhecimento especializado do professor e em consequência os alunos tendem a ter a possibilidade de uma aprendizagem significativa, considerando que o professor possui papel principal na aprendizagem do aluno (Ribeiro; Gibim; Alves, 2021). Com esse fito, é fundamental enquanto formador, que se faça a condução das discussões em torno das frações (relação parte-todo), com foco no conhecimento especializado com base no MTSK (Carrillo-Yañez *et al*., 2018, apresentados no documento do professor. Abaixo alguns comentários para a implementação da TpF.

a) Após entregar a tarefa preliminar aos participantes, recomenda-se a leitura coletiva para que todos se concentrem na atividade a ser realizada, porém, não se deve realizar explicações neste momento, este processo durará 15 min.
b) Posteriormente, após o recolhimento das tarefas preliminares os participantes se subdividirão em grupos de no máximo quatro pessoas. Será entregue a Parte I, que também compõe a tarefa formativa, e os participantes realizarão a tarefa em 45 min, para resolução dos itens a) a d).
c) Durante a resolução da tarefa, o formador deverá circular pela sala, e deixar os formandos manipularem o material na resolução da Parte I, com o intuito de identificar diferentes estratégias e respostas; porém, sem validá-las, devendo isso ocorrer somente na plenária, de modo a garantir que os participantes permaneçam engajados e matematicamente ativos durante toda a implementação.
d) Deveremos escolher intencionalmente quais produções dos participantes que iremos utilizar para discutir na plenária e em ordem elas serão problematizadas — uma opção é a de selecionar algumas produções que se encontram associadas a formas de pensar inadequadas ou incompletas de modo que os participantes possam ir desenvolvendo o seu entendimento e conhecimento a partir do erro.
e) Para a plenária, o formador poderá fotografar as produções escolhidas, e projetá-las de maneira que todos os participantes possam visualizá-las.
f) As discussões em plenária devem possibilitar que os próprios participantes sistematizem o conhecimento desenvolvido, sendo, portanto, fundamental efetuarmos perguntas (verdadeiras) e dar tempo para que os participantes as possam responder.
g) As discussões matemáticas que efetuamos com os participantes são otimizadas se forem efetuadas as denominadas perguntas vencedoras, perguntas essas que possam acionar/estimular o modo investigativo a cada momento, e que possamos estruturar

a nossa prática matemática em torno de questionamentos (que demandam conhecimento especializado) e possibilitando que os participantes possam generalizar as suas formas de pensar matematicamente.

A tarefa está planejada para ter 3h e 20 min de duração, sendo que nos primeiros 20 min serão realizadas uma breve apresentação do formador, bem como será solicitado aos participantes se apresentem, dizendo nome e atuação. Posteriormente, será entregue a tarefa preliminar e serão dadas as devidas orientações.

Em seguida, quando os participantes terminarem a Parte Preliminar e houver o recolhimento será entregue a Parte I da tarefa, cada grupo receberá quatro folhas com a tarefa impressa, material de escrita e as devidas orientações.

Enquanto os participantes resolvem a Parte I, serão escolhidas as resoluções da Parte Preliminar para as discussões.

Após o término da Parte I, às 2 h seguintes serão para as discussões e socialização das respostas das tarefas.

Para início das discussões serão considerados alguns questionamentos que podem ser relevantes para estimular os participantes, dentre estes questionamentos podem ser aplicados:

a) A estratégia utilizada foi a mesma para as cinco perguntas?
b) Caso sejam diferentes: Qual a estratégia utilizada em cada item?
c) Como os discentes responderiam esses itens?
d) Quais as possíveis dificuldades que os alunos poderiam ter ao resolver cada item?
e) Quais habilidades estão envolvidas na tarefa?
f) Quais elementos do tópico frações estão envolvidos na tarefa?
g) Existem outras maneiras de resolver os itens? Quais?
h) Quais questionamentos poderão ser feitos para que os alunos possam ultrapassar as dificuldades?
i) Se o aluno chegasse a uma resposta que se aproxima a adequada, de que forma vocês poderiam agir para ultrapassar essas dificuldades?
j) Como vocês acham que os alunos responderiam?
k) Esse tipo de tarefa pode auxiliar os alunos no cotidiano?
l) Em quais conteúdos podem se aplicar os conhecimentos trabalhados na tarefa?

Devemos também considerar que os questionamentos ou perguntas vencedoras e matematicamente vencedoras feitas aos alunos, também podem entrar nessas discussões.

Com o objetivo de promover as discussões matemáticas e o conhecimento do PEM em torno da aprendizagem matemática do aluno, podem ser efetuadas algumas perguntas direcionadas também aos professores.

Perguntas vencedoras:

a) Quais os sentidos ou significados das frações?;
b) Quantidade (Número racional);
c) Parte-Todo e não parte-unidade, pois o todo pode ser contínuo ou discreto;
d) Quociente (Resultado de uma divisão);
e) Medida (medir quantidades);
f) Operador multiplicativo (Por exemplo $\frac{2}{3}$ de 9);
g) Se o todo fosse o lado da praça, marque o ponto em $\frac{3}{7}$ do lado?;
h) Que fração representa o lado do quadrado (Trajeto)?;
i) Que tipo de todo é o trajeto? (todo discreto);
j) Se Sueli caísse 75% do caminho, em qual ponto ou entre quais pontos ela caiu? (Depende do sentido que escolher);
k) O que a questão está pedindo? (Frações que representam o ponto da queda no trajeto);
l) Que figura geométrica pode representar o trajeto? (Um quadrado);
m) Em que ponto Sueli caiu? (Não se tem ideia, após a análise do problema);
n) Se a figura tivesse outra forma geométrica, isso mudaria a forma de pensar na resolução? (A grandeza e o processo usado seriam os mesmos).

Nesse momento, o professor se direcionará ao material manipulável e, de forma verbal e por meio da manipulação, os participantes poderão explicar suas resoluções, o que poderá estimular as discussões em grupo.

Logo após as primeiras perguntas vencedoras, o professor formador poderá conduzir uma nova discussão, com uso de perguntas matematicamente vencedoras.

Perguntas matematicamente vencedoras:

a) Como poderíamos achar o todo? (Juntando as partes);
b) Esse todo está relacionado a alguma grandeza matemática? (Sim, ao perímetro);
c) Qual o perímetro da figura? (É a soma das medidas dos lados, ou a junção das medidas dos lados, a depender do método de resolução);

d) O perímetro depende da medida do lado? Como? (Sim, pois o perímetro é a soma das medidas dos lados).

Com essas perguntas anteriores, o professor induz os participantes a observar que a junção das partes poderia ser o todo (perímetro), e como isso poderá fazer perceber que há a possibilidade de se achar as frações correspondentes desse todo.

a) Que frações correspondem aos pontos B e C? (O ponto B, é o segundo ponto após a partida, e ficará em um dos cantos da praça que dividirá o todo ao meio, portanto, a B representa o ponto $\frac{1}{2}$, e o ponto C, no terceiro ponto, portanto, no 3º canto, desse modo C representa a fração $\frac{3}{4}$);
b) Qual das frações é maior: a que representa B ou a que representa C? (Considerando o sentido tomado, $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$);
c) É possível traçar os pontos do trajeto em uma reta numérica? (Sim, se juntarmos os lados);
d) Qual o todo nesse trajeto? (O perímetro);
e) Qual o ponto que representa metade do trajeto? (B);
f) Como se pode calcular o $\frac{3}{5}$ do trajeto? (Comparando as frações em cada ponto, ou calculando, algebricamente, ou assumindo um valor para o lado, ou usando réguas de frações);
g) Por que multiplica $\frac{3}{5}$ pelo perímetro? (Se assumir um valor, por que o perímetro é o todo);
h) Quantos lados Sueli percorreu antes de cair? (dois lados);
i) Ela caiu no início, no meio ou no final do percurso? Como sabemos? (Ela caiu no terceiro lado, o que podemos observar depois de resolver o problema);
j) O Sentido implicará no resultado? O resultado seria o mesmo? (Sim, mudaria a posição da queda);
k) É possível aplicar essa ideia em outros contextos, como corridas ou medições de terrenos? (Sim, pois a ideia de o todo ser o perímetro não mudará);
l) Que estratégias diferentes vocês usaram para resolver o problema? (Depende da solução já apresentada).

Logo após a socialização da Parte Preliminar, os grupos também socializarão a Parte I, em relação a cada item, serão feitos também questionamentos com base no MTSK.
No capítulo seguinte serão apresentados o contexto formativo e a metodologia utilizada para a escolha e análise das resoluções das tarefas preliminares e Parte I.

3 CONTEXTO E MÉTODO

Diante do nosso referencial teórico e com as tarefas formativas planejadas e elaboradas, passaremos a descrever o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida, o método de coleta das informações e o processo de análise dos resultados com o objetivo de responder ao questionamento dessa pesquisa: qual o conhecimento revelado pelo professor de matemática no tópico das frações em torno da relação parte-todo?

A pesquisa foi desenvolvida em um contexto formativo com 40 professores de (e que ensinam) matemática que compõem o quadro da rede municipal de ensino pertencente a uma cidade no interior do RN, que atuam em gestão escolar, coordenação pedagógica e docência do Ensino Fundamental dos Anos Iniciais e Anos Finais.

Como já apresentado, o tópico abordado durante a formação foi no âmbito das frações com foco na relação parte-todo, tópico este que compõe proficiências presentes no nível 2 da escala de proficiências do Saeb, habilidade na qual os alunos do RN apresentam deficiências, segundo resultados de avaliação SAEB.

Esta pesquisa caracteriza-se como aplicada quanto à sua natureza, pois ela propõe uma implementação e intervenções na prática profissional do docente. Quanto aos objetivos, a pesquisa possui um caráter exploratório, pois visa obter acesso ao conhecimento revelado nas tarefas aplicadas no contexto formativo com finalidade de obter mais informações. Nesta é adotada uma abordagem qualitativa pois visa analisar e obter acesso ao conhecimento especializado do PEM no âmbito das frações (relação parte-todo) e na sua prática em um contexto formativo. No que diz respeito aos procedimentos técnicos, a pesquisa é caracterizada como um estudo de caso, pois consiste em coletar e analisar informações sobre determinado indivíduo, uma família, um grupo ou uma comunidade, a fim de estudar aspectos variados de sua vida, de acordo com o assunto da pesquisa (Prodanov; Freitas, 2013).

O processo formativo com foco nos tópicos abordados foi apoiado no uso de materiais manipuláveis e, tendo como pano de fundo o MTSK (Carrillo-Yañez *et al.*, 2018), usando para análise o domínio do MK, na ocasião foi construído um diálogo entre formador e formandos, o que propiciou o desenvolvimento das tarefas formativas. A metodologia usada inclui oficinas e discussões direcionadas, com uso de perguntas vencedoras, matematicamente vencedoras e análise das soluções em torno do domínio do MK, conforme apresentadas no documento do formador apresentado no capítulo anterior.

Neste capítulo, serão também apresentadas informações gerais da experiência de formação, que aqui assume uma abordagem exploratória no trabalho em sala, considerando o contexto de formação e o contexto curricular. Para isso, foi realizada uma oficina onde foi trabalhado o MK especializado com suporte de materiais manipuláveis, conforme apresentado no capítulo anterior. Além disso, explicamos e justificamos as escolhas metodológicas que fundamentam este estudo, considerando seu objetivo, algumas características das escolas participantes e o processo de coleta de dados decorrentes da oficina.

A formação que teve por objetivo promover uma reflexão em torno do MK especializado dos participantes, considerando as habilidades deficientes, atestadas pelo nível de proficiências dos alunos na avaliação do Saeb da rede pública do estado do RN nos Anos Finais do Ensino Fundamental, e a coleta de dados para essa análise. Para esse fito, foi utilizada uma tarefa formativa com o apoio de materiais manipuláveis, composta por cinco etapas: apresentação dos objetivos da formação; resolução individual das tarefas orientadas pelo professor formador; discussões em grupos; apresentação das resoluções das tarefas pelos grupos e discussão das tarefas inicialmente conduzida pelo professor com o grande grupo.

Na oficina, participaram quarenta professores, que foram divididos em quatro grupos de dez pessoas, o ideal é que fossem menos pessoas, mas devido ao número reduzido de materiais manipuláveis, a divisão se deu dessa forma.

Inicialmente, foram apresentados os objetivos da oficina, sendo utilizados 20 min. Em seguida foi pedido aos professores que resolvessem a primeira tarefa formativa, iniciando pela Parte Preliminar, relativa ao tópico de frações, na qual, no item a), foi feito o seguinte questionamento “o que é fração?”, no item b), foi questionado sobre quais recursos o professor poderia usar para ensinar fração e o que justificava essa escolha? Para esta parte foi disponibilizado 15 min.

Posteriormente, passou-se para a implementação da parte I, intitulada “Relação parte-todo em um trajeto”. A Parte I é composta pela tarefa do aluno, acompanhada de quatro itens que visam obter acesso ao espaço solução dos professores participantes e que os estimulem a desenvolver o MK especializado. No item a) foi solicitado que os participantes a realizassem no grupo e resolvessem do item a) até o item d) e que utilizassem o material manipulável fornecido pelo professor formador, foi estabelecido 25 min para resolução dos itens.

Nos itens c) e d) foi solicitado que discutissem e descrevessem como eles imaginavam que um aluno do 6º e do 7º ano resolveria esse problema. Além disso foi solicitado que apresentassem possíveis formas diferentes de resolução e representação, associando-as aos conhecimentos ou compreensões matemáticas que esse aluno poderia ter. Registrando sempre nas folhas de resposta, tendo um tempo estimado de 20 min para estes últimos itens. Assim, a Parte I da tarefa foi concluída em 45 min como planejado no documento do formador.

No item d) foi realizado o seguinte questionamento: ‘Que recurso usaria para resolução da tarefa além do material manipulável disponibilizado pelo professor formador? E de que forma utilizaria?’. Este questionamento visa obter acesso aos conjuntos de materiais possíveis que o professor poderia usar para resolução da tarefa e se, não houver ideias de materiais, estimulá-los a pensar em possíveis materiais para utilização na resolução de problemas. A tarefa da Parte I foi apresentada da seguinte maneira.

Diante das resoluções das tarefas escolhidas foi realizada a análise fundamentada no subdomínio MK do MTSK, assegurando que esta não foi limitada aos conhecimentos do formador/pesquisador e que abrange todo um escopo teórico sobre o tópico em questão. Foram escolhidas duas tarefas preliminares de um dos grupos para discussão, considerando esses critérios.

O instrumento de coleta de dados das informações analisadas foi a TpF (Apresentada no capítulo anterior), a TpF foi adaptada de TpF apresentadas pelo Grupo de pesquisa CIEspMat, e a Parte I (PI), que visa obter acesso ao MK especializado do professor em torno do tópico das frações (relação parte-todo), foi adaptada a partir de questão da OBMEP (avaliação nível 2 de 2007) aplicadas em avaliações para alunos do 6º e 7º Anos do Ensino Fundamental Anos Finais.

A PP foi respondida individualmente e a PI foi respondida em grupo. Para que as identidades dos participantes não fossem reveladas foi utilizada as nomenclaturas p1, p2, p3,..., p40. E a divisão dos grupos ficou distribuída como G1, G2, G3 e G4 (Quadro 11).

Quadro 11 – Distribuição de participantes por grupo

IDENTIFICAÇÃO DOS GRUPOS	IDENTIFICAÇÃO DOS PARTICIPANTES
Grupo 1	p1, p2, p3, ..., p10
Grupo 2	p11, p12, p13, ..., p20
Grupo 3	p21, p22, ..., p30
Grupo 4	p31, p32, ..., p40

Fonte: Elaboração própria.

A Tarefa Formativa (Quadro 12) persegue alguns objetivos. Na tarefa preliminar: a) tem o objetivo de obter acesso ao domínio conceitual de fração, à precisão matemática e à capacidade de explicação simples e adequada do professor, em outras palavras tem-se o objetivo de obter o conhecimento especializado acerca do tema; e b) visa verificar a capacidade de escolher recursos pedagógicos coerentes, justificar escolhas e compreender dificuldades dos alunos.

Quadro 12 – Tarefa Preliminar

PARTE PRELIMINAR
Conjunto de questões que focam o conhecimento e as práticas matemáticas do professor no âmbito do tópico em discussão. a) **Imagine que você está na rua e alguém** lhe **pergunta: "O que é uma fração?" O que você responderia, lembrando que não é o momento de ensinar, apenas de dar uma explicação simples e rápida?** b) **E se, como professor, você pudesse escolher entre todos os recursos que conhece, quais selecionaria para ajudar os alunos a entenderem o conceito de fração? E por que escolheria esses recursos?**

Fonte: Elaborado com base em Grupo CIEspMat (2024).

Na tarefa Parte I (Quadro 13): relação parte-todo em um trajeto, os questionamentos perseguem os seguintes objetivos:

a) Obter acesso ao domínio do conhecimento no domínio matemático dos participantes.
b) Obter acesso ao espaço solução e prever raciocínios e dificuldades iniciais dos participantes.
c) Obter acesso ao espaço solução e compreender a progressão da aprendizagem.
d) Obter acesso ao conhecimento sobre outros recursos, verificando se sabem relacionar, selecionar e justificar recursos didáticos.

Quadro 13 – Parte I

Parte I

a) Resolva a tarefa por conta própria, sem se preocupar em ensinar ou explicar o procedimento para outra pessoa.

Tarefa: Relação parte-todo em um trajeto

(Você deve explicar sempre o seu raciocínio descrevendo o processo que usou para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

A seguir é apresentada uma praça de formato quadrado:

Imagine que Sueli partirá de moto de um dos cantos da praça e dará uma volta completa na pista ao seu redor.

a) Quais os possíveis pontos de partida de Sueli? Justifique sua resposta.
b) Marque os cantos com as letras A, B, C, P, escolha P como ponto de partida. E escolha também um sentido de partida. Descreva sua escolha.
c) Sueli partiu do canto e sentido escolhidos:
   (iii) Em qual dos outros cantos ela estará após andar $\frac{1}{2}$ do percurso? Justifique resposta.
   (iv) E se Sueli andar $\frac{3}{4}$ do percurso, a partir do ponto P, em qual dos cantos ela parará? Justifique sua resposta.
d) Ela partiu do vértice P, no sentido escolhido, e caiu ao atingir $\frac{3}{5}$ do percurso total. Marque com a letra D o ponto que indica o lugar em que Sueli caiu?
e) Descreva a ideia que utilizou na resolução usando o material manipulável apresentado pelo professor.

b) No grupo discutam e descrevam como vocês acham que um aluno do 6º ano resolveria esse problema? Apresentem possíveis formas diferentes de resolução e representação, associando-as aos conhecimentos ou compreensões matemáticas que esse aluno poderia ter. Registre na folha de resposta.
c) No grupo discutam e descrevam como vocês acham que um aluno do 7º ano resolveria esse problema? Apresentem possíveis formas diferentes de resolução e representação, associando-as aos conhecimentos ou compreensões matemáticas que esse aluno poderia ter. Registre na folha de resposta.
d) Que recurso usaria para resolução da tarefa além do material manipulável disponibilizado pelo professor formador? E de que forma utilizaria?

Fonte: Elaboração própria.

No processo investigativo, foi assumido o papel de professor formador e investigador, conduzindo a pesquisa e a experiência de ensino considerando a abordagem qualitativa de caráter exploratório e interpretativo, sendo este processo estruturado a partir do modelo teórico e instrumento analítico, *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) (Carrillo-Yañez *et al*., 2018), por meio do qual é possível mapear e descrever as habilidades que o PEM necessita desenvolver para ensinar na disciplina, considerando que as discussões permearão o domínio do MK (f).

Para a implementação da tarefa, é importante ressaltar que houve três fases imprescindíveis: organização, desenvolvimento e finalização.

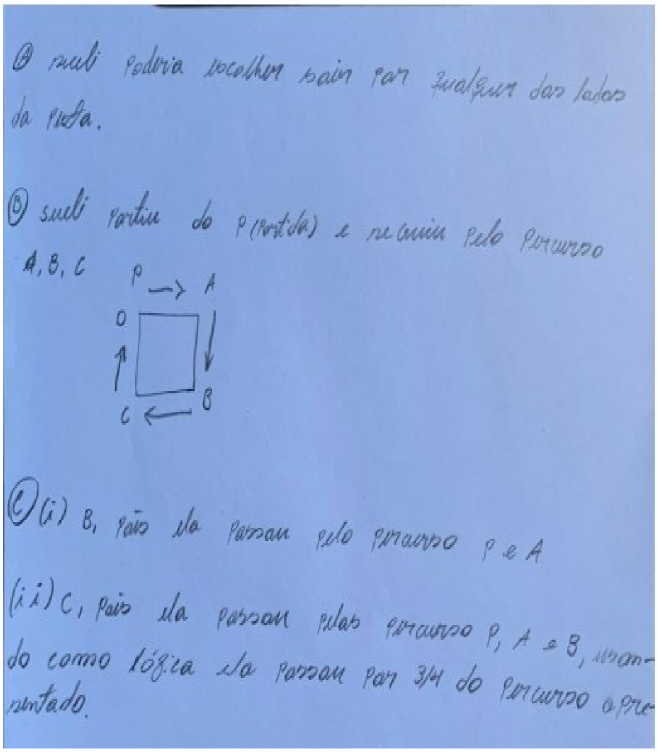
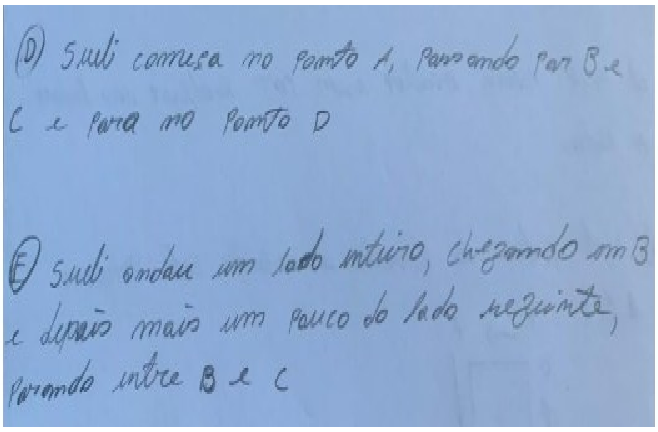
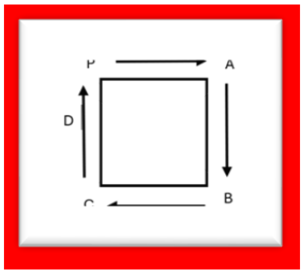
No processo de organização, foram produzidas tarefas formativas e planejadas as formas de abordagens de cada uma para esse fito, de modo que conduzisse a formação a uma atmosfera exploratória que produzisse tanto ensino como aprendizagem. Na etapa de desenvolvimento foi considerada a fase de execução da oficina, que na oportunidade foram apresentadas as tarefas preliminares e as partes I. Vale salientar que as tarefas implementadas, foram planejadas e projetadas de modo a estimular e criar oportunidades de aprendizagem significativa através de reflexões e de discussões matematicamente potentes, que pudessem estimular aos professores a refletirem sobre as suas práticas.

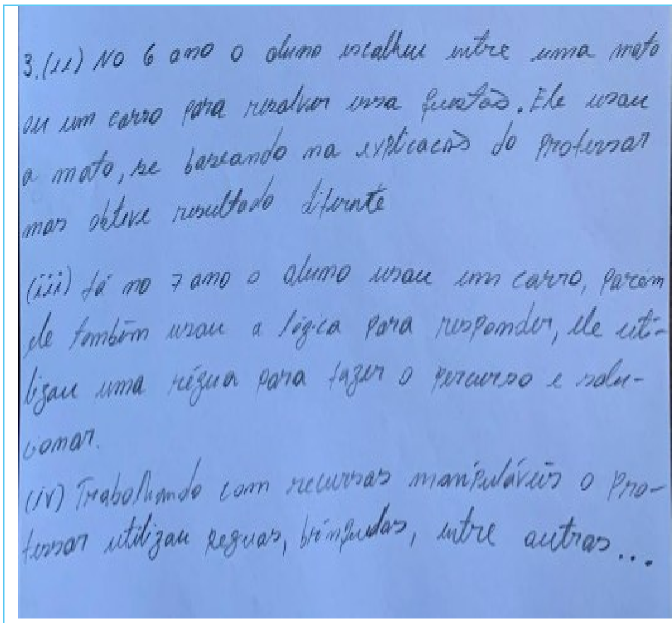
Na fase de finalização da implementação, foi realizada a análise das experiências dos professores, reflexões, observações por meio dos registros obtidos na resolução das tarefas aplicadas, esta análise seguiu de forma descritiva, na qual se buscou identificar padrões de respostas, considerando o domínio do MK.

Assim, após a aplicação das tarefas no contexto formativo, deu-se início ao processo de preparo dos materiais colhidos para análise. Durante esse processo foram transcritas as respostas de duas tarefas preliminares dos participantes p5 e p7, pois do ponto de vista especializado se achavam inadequadas ou incompletas e uma da resolução do Grupo G4 pelos mesmos critérios, sendo que estas também foram as escolhidas no contexto formativo. Neste processo de transcrição, considerou-se a preservação da resolução original, inclusive nos erros de ortografia, textos com rasuras e reprodução de desenhos. E, para melhorar a identificação e análise dos dados, considerando que foram escolhidos apenas duas PPs e uma PI, utilizaremos os seguintes códigos p5RPP (Participante 5, Resolução da Parte Preliminar) e p7RPP (Participante 7, Resolução da Parte Preliminar) e para o grupo escolhido, no caso da resolução do Grupo 4 da Parte I, usaremos o seguinte código G4RPI (Grupo 4, Resolução da Parte I).

Para além do mais, são utilizadas marcações em vermelho para representar as evidências do conhecimento dos tópicos (KoT), laranja para representar o KSM e lilás para o KPM, sempre considerando o MK especializado, já descrito no capítulo anterior (Quadros 7, 8 e 9). A seguir, um exemplo de como foi transcrito (Quadro 14).

Quadro 14 – Exemplo de transcrição Resolução da PI escolhida para análise

REGISTRO REFERENTE A RESOLUÇÃO DO GRUPO 4, PARTE I	**CÓDIGO: G4RPI**
Resolução original	Transcrição da resolução
  	i) A) Sueli poderia escolher sair por qualquer um dos lados da pista. B) Sueli partiu do P(partida) e seguiu pelo percurso A, B, C.  C) (i) B, pois ela passou pelo percurso P e A (ii) C, pois ela passou pelos percursos P, A e B, como lógica ela passou por $\frac{3}{4}$ do percurso apresentado. D) Sueli começa no ponto A, passando por B e C e para no ponto D. E) Sueli andou um lado inteiro, chegando em B e depois mais um pouco do lado seguinte, parando entre B e C.

<table>
<tr>
<td>
3.(ii) No 6 ano o aluno escolheu entre uma moto ou um carro para resolver uma questão. Ele usou a moto, se baseando na explicação do professor mas obteve resultado diferente
(iii) Já no 7 ano o aluno usou um carro, porém ele também usou a lógica para responder, ele utilizou uma régua para fazer o percurso e solucionar.
(iv) Trabalhando com recursos manipuláveis o professor utilizou reguas, brinquedos, entre outros...</td>
<td>3. (ii) No 6 ano o aluno escolheu entre uma moto ou um carro para resolver essa questão. Ele usou a moto, se baseando na explicação do professor, mas obteve resultado diferente.

(iii) Já no 7 ano o aluno usou um carro, porém ele também usou a lógica para responder, ele utilizou uma régua para fazer o percurso e solucionar.

(iv) Trabalhando com recursos manipuláveis o professor utilizou réguas, brinquedos, entre outros...</td>
</tr>
<tr>
<td>Legenda</td>
<td>KoT
KSM
KPM</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaboração própria.

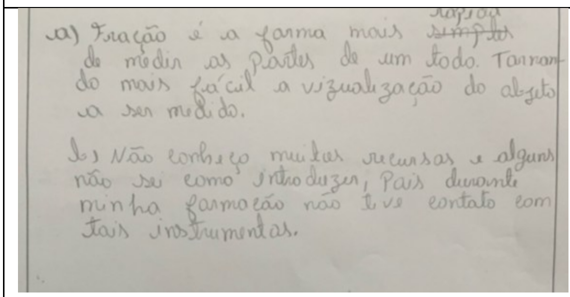
Diante das transcrições feitas das tarefas escolhidas, foi realizada uma análise fundamentada no subdomínio MK do MTSK, assegurando que esta não se limitou aos conhecimentos do formador/pesquisador e que abrange todo um escopo teórico sobre o tópico em questão apresentado nos Quadros 7, 8 e 9, os quais descrevem os conhecimentos acerca do domínio matemático especializado. Dentre as tarefas dos quarenta participantes foram escolhidas duas tarefas preliminares e uma de um dos grupos para discussão considerando as que seguiam padrões incompletos e/ou inadequados.

4 ANÁLISE E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

Neste capítulo, é apresentada a análise e as discussões inerentes aos subdomínios do domínio do MK do MTSK, revelado nas resoluções da TpF, relacionada ao tópico da relação parte-todo, no âmbito das frações. Desse modo, o objetivo desse trabalho é responder à pergunta: "qual o conhecimento matemático especializado revelado pelo professor de matemática no tópico das frações em torno da relação parte-todo?". Assim, as análises serão realizadas sobre as evidências que surgem a partir das resoluções dos participantes.

Assim, na resolução p5RPP, a transcrição apresenta-se da seguinte maneira (Quadro 15):

Quadro 15 – Primeira resolução escolhida da tarefa preliminar

Registro referente a Resolução do Participante 5, Parte Preliminar	**Código: p5RPP**
Resolução original	**Transcrição da resolução**
 a) Fração é a forma mais ~~simples~~ rápida de medir as partes de um todo. Tornando mais fácil a vizualização do objeto a ser medido. b) Não conheço muitos recursos e alguns não sei como introduzir, pois durante minha formação não tive contato com tais instrumentos.	a) Fração é forma mais rápida de medir as partes de um todo tornando mais fácil a visualização do objeto a ser medido. b) Não conheço muitos recursos e alguns não sei introduzir, pois durante a minha formação não tive contato com tais instrumentos.
Legenda	KoT KSM KPM

Fonte: Elaboração própria.

Diante da resolução p5RPP, no item a) o que seria uma fração? E uma das respostas mais comuns entre as resoluções dos participantes foi que a fração é a representação de uma parte de um todo (medir as partes de um todo). Fazendo a análise segundo o MK, o p5 detém ou assume deter o conhecimento do tópico (KoT), sobre a forma mais clássica do que seja uma fração, relacionado ao MK especializado conforme (Ribeiro, 2024), porém essa definição não abrange a totalidade do que realmente são as concepções do tópico frações (quociente, razão entre grandezas, representação de número na reta numerada, medida e ainda operador multiplicativo) o que a torna a resposta incompleta, sob a ótica do MK.

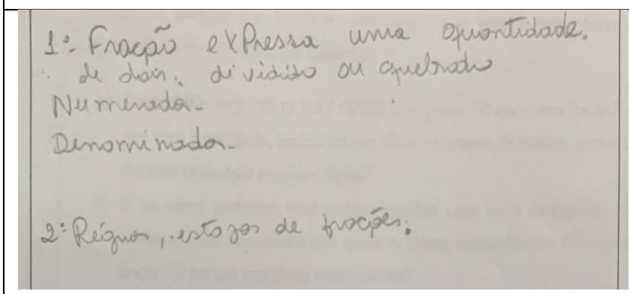
Já em torno do subdomínio do KSM, o p5 não faz relação das frações a outros objetos matemáticos tais como: números decimais, porcentagens e outros.

Outro ponto a observar, em relação ao KPM, na resolução do item a), é que o p5 afirma que é possível facilitar a visualização do objeto a ser medido, o que remete a uma prática matemática de representar e compreender frações, porém, não deixa claro os critérios de validade, nem estratégias de resolução, mas toca na dimensão didática de tornar o conceito mais compreensível. Desse modo, percebe-se que este p5 enfatiza um único significado das frações, o que torna em relação ao KPM um conhecimento incompleto.

Já no item b) é possível observar que o p5, não teve durante sua formação docente a utilização de recursos para o ensino de frações, não sabendo utilizar o material disponibilizado, o que mostra que o p5 não demonstra deter KPM nesse quesito.

A segunda Parte Preliminar escolhida, foi transcrita da seguinte maneira (Quadro 16):

Quadro 16 – Segunda resolução da tarefa preliminar escolhida

Registro referente a Resolução do participante 7, Parte Preliminar	**Código: p7RPP**
Resolução original	**Transcrição da resolução**
 1: Fração exPressa uma quantidade. de dois; dividido ou quebrado Numerador. Denominador. 2: Réguas, estojos de frações;	a) Fração expressa uma quantidade, de dois; dividido ou quebrado. Numerador. Denominador. b) Régua, estojos de frações.
Legenda	KoT KSM KPM
Observações	Numerador. Denominador. O grifo apresentado refere-se ao KSM e ao KPM

Fonte: Elaboração própria.

Após as primeiras análises da resolução do p5, observa-se a p7RPP, cujo item a) dessa resolução que estava mais completa, porém o participante, não fez menção à relação parte-todo.

Observe que em torno do subdomínio do conhecimento dos tópicos (KoT), o p7 traz a ideia de divisão/quebra — “dividido ou quebrado” —, o que é correspondente a uma das ideias de fração como quociente. Além disso, faz menção à estrutura da fração (numerador e denominador), mas de forma simplória, o que mostra um entendimento incompleto sobre a relação parte-todo. Em relação à expressão “divisão de dois”, torna-se a resolução sem sentido e confusa ou inadequada.

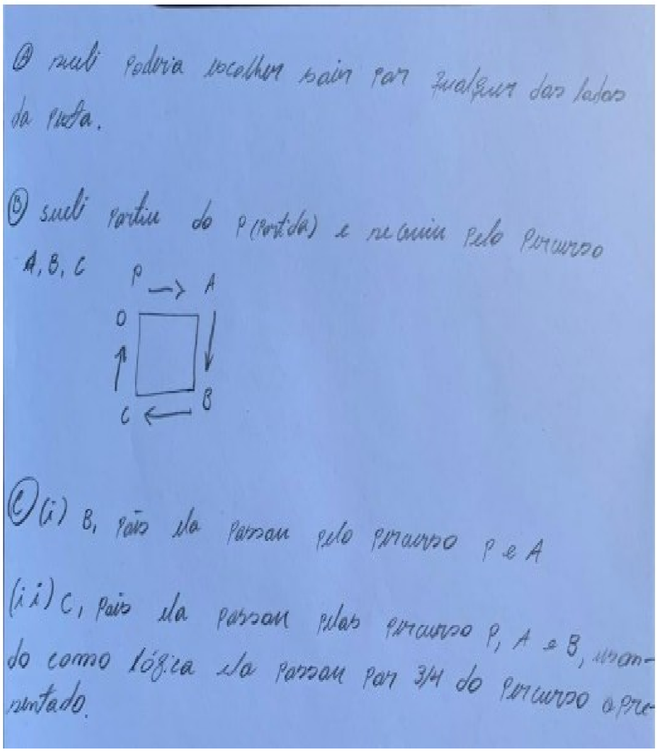
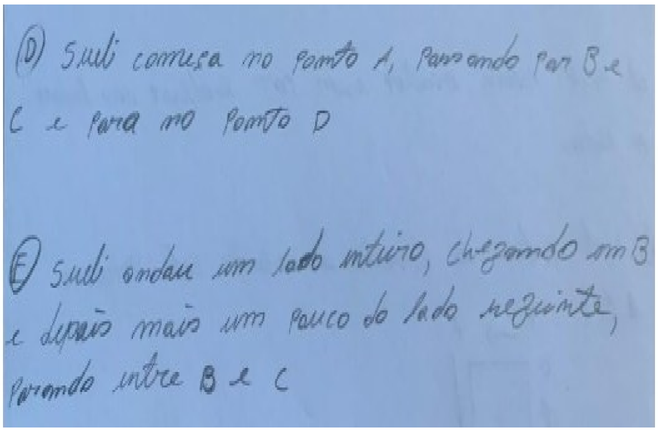
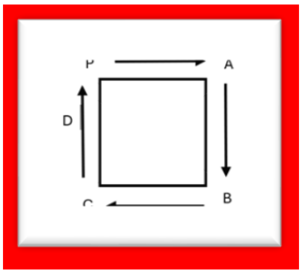
Já em relação ao conhecimento da estrutura da matemática (KSM), é possível perceber que houve uma tentativa de estruturar fração a partir de dois elementos: numerador e denominador, mas não relaciona a fração com outros objetos matemáticos, tais como números decimais, medidas e outros. Assim este entendimento torna-se incompleto.

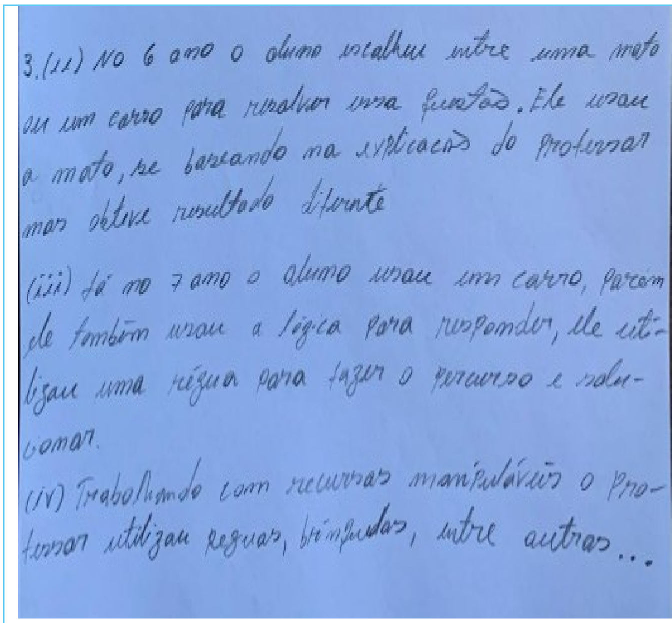
Em consideração ao KPM ao nomear elementos fundamentais (numerador/denominador) mostra atenção à linguagem matemática, no entanto não há clareza nos critérios de validade ou no uso de exemplos ou argumentos que justifiquem sua resposta. O que torna o entendimento em torno do KPM incompleto, por não expressar esta relação.

Já em relação ao item b), o p7 mostra reconhecer alguns recursos, porém não específica nem justifica o porquê de escolhê-los, o que mostra que tal professor não detém ou não assume deter KPM nesse quesito, sendo considerado com entendimento incompleto.

Em seguida serão apresentadas algumas análises das resoluções da PI, na qual foram apresentadas apenas uma solução dos itens i), ii), iii) e iv). É importante destacar que em cada análise dos subdomínios, optou-se pela repetição da tarefa, visto que alguns dos itens apresentam mais de um subdomínio. A PI escolhida foi a do grupo 4, dentre as quais, a mais incompleta foi a seguinte (Quadro 17):

Quadro 17 – Resolução da Parte I, da segunda tarefa escolhida

REGISTRO REFERENTE A RESOLUÇÃO DO GRUPO 4, PARTE I	**CÓDIGO: G4RPI**
Resolução original	Transcrição da resolução
  	i) A) Sueli poderia escolher sair por qualquer um dos lados da pista. B) Sueli partiu do P(partida) e seguiu pelo percurso A, B, C.  C) (i) B, pois ela passou pelo percurso P e A (ii) C, pois ela passou pelos percursos P, A e B, como lógica ela passou por $\frac{3}{4}$ do percurso apresentado. D) Sueli começa no ponto A, passando por B e C e para no ponto D. E) Sueli andou um lado inteiro, chegando em B e depois mais um pouco do lado seguinte, parando entre B e C.

<table>
<tr>
<td>
3.(ii) No 6 ano o aluno escolheu entre uma moto ou um carro para resolver essa questão. Ele usou a moto, se baseando na explicação do professor mas obteve resultado diferente
(iii) Já no 7 ano o aluno usou um carro, porém ele também usou a lógica para responder, ele utilizou uma régua para fazer o percurso e solucionar.
(iv) Trabalhando com recursos manipuláveis o professor utilizou reguas, brinquedos, entre outros...</td>
<td>3. (ii) No 6 ano o aluno escolheu entre uma moto ou um carro para resolver essa questão. Ele usou a moto, se baseando na explicação do professor, mas obteve resultado diferente.

(iii) Já no 7 ano o aluno usou um carro, porém ele também usou a lógica para responder, ele utilizou uma régua para fazer o percurso e solucionar.

(iv) Trabalhando com recursos manipuláveis o professor utilizou réguas, brinquedos, entre outros...</td>
</tr>
<tr>
<td>Legenda</td>
<td>KoT
KSM
KPM</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaboração própria.

4.1 Análise da resolução da tarefa à luz do Conhecimento dos Tópicos (KoT)

Na resolução da PI é possível evidenciar a mobilização de conhecimentos associados ao KoT, conforme o modelo do *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), em torno do tópico das frações (relação parte-todo), especialmente no que se refere ao conceito de fração e às relações entre parte-todo. A situação problema, que envolve o percurso de Sueli ao redor de uma praça de formato quadrado, possibilita uma compreensão do todo como uma construção contextual, não necessariamente associada à ideia de um inteiro único ou a uma unidade isolada.

Fazendo a análise da resolução, no item i) da tarefa formativa em resolução do subitem a) percebe-se que o grupo registra que Sueli pode sair de qualquer vértice, segundo os participantes "Escolher sair por qualquer um dos lados da pista". Porém mistura lado com canto, revelando imprecisão conceitual, desse modo do ponto de vista do MTSK, sob a ótica do domínio do MK e em torno do subdomínio do conhecimento dos tópicos (KoT), o conceito matemático de vértice "Canto", há uma lacuna na linguagem matemática. O que torna o conhecimento inadequado.

Observa-se que no subitem b) o grupo entende de modo implícito que esse todo pode ser decomposto em partes ou composto por partes, uma vez que os vértices da praça, identificados pelos pontos A, B, C e P na representação gráfica da tarefa, são considerados segmentos do percurso total (Todo). Ao indicar, no item que "Sueli partiu do ponto P e seguiu pelo percurso A, B, C", o grupo reconhece que cada lado da praça corresponde a uma parte do trajeto e que a articulação dessas partes constitui a volta completa, apesar da descrição não ser matematicamente adequada, essa compreensão está em consonância com a ideia de que é possível formar o todo a partir da junção de partes, sejam elas iguais ou não, conforme discutido por Ribeiro (2024, p. 131). Desse modo, o entendimento torna-se incompleto do ponto de vista do KoT.

Na resolução do item b), também é evidenciado domínio da relação parte–todo da fração, ainda que a notação fracionária não seja explicitamente utilizada. Ao afirmar que Sueli percorreu apenas os trechos correspondentes aos lados passando pelos vértices A, B e C, o grupo reconhece implicitamente que ela percorreu três das quatro partes que compõem o percurso total ao redor da praça. Logo, a situação pode ser compreendida como a representação de uma fração do percurso completo (relação parte-todo), porém de modo textual e não matemático, reforçando a concepção de que a fração deve ser entendida como parte de um todo que pode assumir diferentes naturezas, a depender do contexto em que se insere (Ribeiro, 2024).

Outro ponto relevante a se considerar, diz respeito ao uso de uma linguagem não matemática ao tratar do conceito de todo, porém, o grupo refere-se ao todo como o percurso ou a volta completa ao redor da praça, evitando de modo implícito associá-lo indevidamente à ideia de unidade ou inteiro numérico. Tal resposta revela o conhecimento de que o todo pode ser constituído por múltiplos elementos discretos, neste caso, os lados da praça e não necessariamente por uma única entidade contínua, conforme apontado por Ribeiro (2024). Com isso conclui-se que esse entendimento é incompleto pois não associa diretamente a uma linguagem matemática.

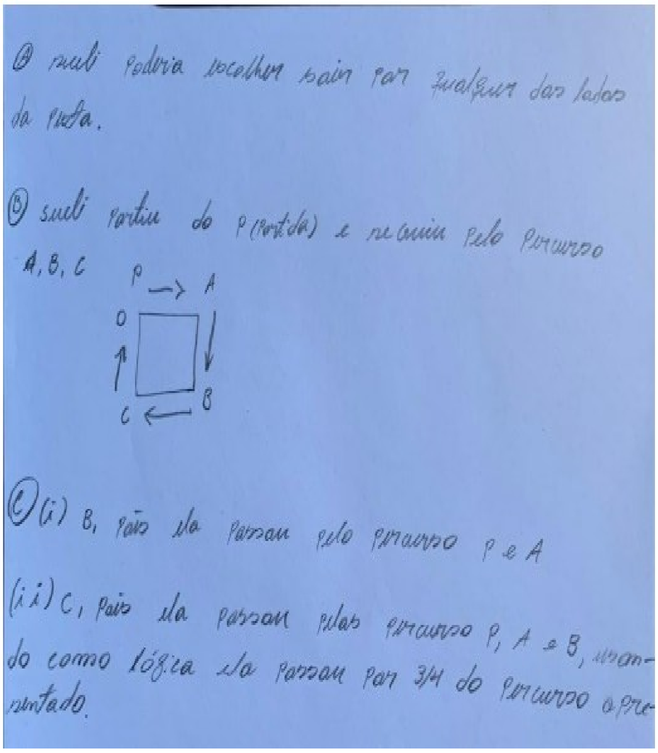
Ademais, a resolução do item b) ii) também articula representações contínuas e discretas, o que é evidenciado quando o grupo descreve o percurso, percebe-se na representação do desenho um todo contínuo, e quando identifica os pontos A, B, C e D permitem uma discretização em partes bem definidas. Dessa maneira, ao transitar entre essas representações, o participante demonstra compreender que o todo pode ser obtido a partir da parte por meio de diferentes formas de representação, independentemente da parte considerada (Ribeiro, 2024).

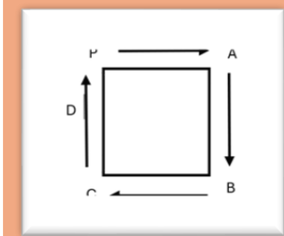
Na resolução do item c) ii), é evidenciada uma comparação entre parte e todo, de modo que esse procedimento seja fundamental para se chegar à conclusão que o grupo obteve. A descrição, mesmo matematicamente incompleto, ao justificar que Sueli não concluiu o percurso completo, passando apenas por três lados da praça, estabelecendo assim que, a parte percorrida é menor que o todo esperado. Com isso, é necessário reforçar que essa comparação retoma o entendimento que a parte é sempre menor ou igual ao todo, bem como a importância dessa relação para a análise e ordenação de quantidades em situações que envolvem ideias fracionárias (Ribeiro, 2024).

É importante destacar que as justificativas apresentadas revelam um conhecimento dos tópicos em caráter generalizável, mais textual do que matemático, e que isso mostra limitação do grupo em relação ao conhecimento das notações matemáticas para justificar suas resoluções.

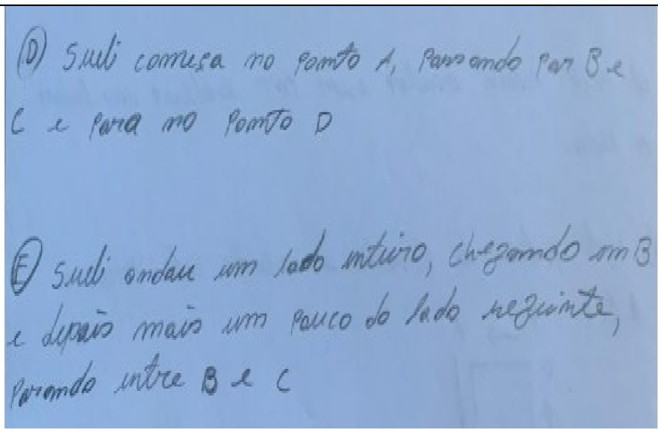
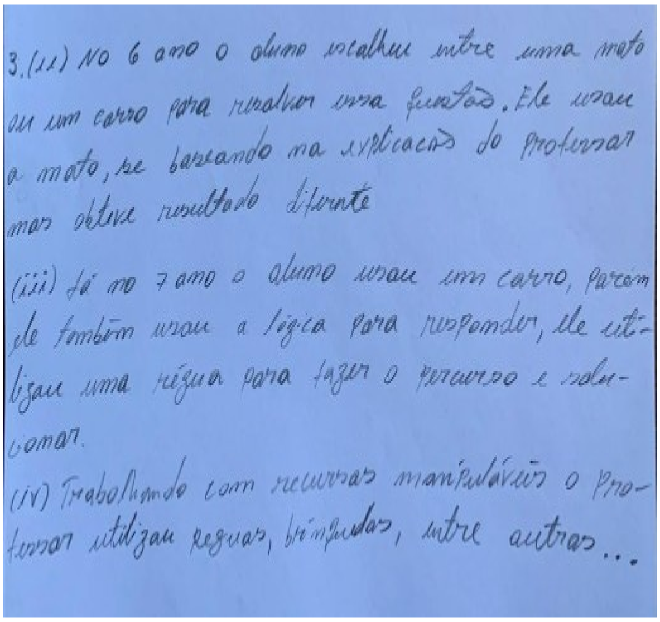
4.2 A análise da resolução da tarefa à luz do KSM

Quadro 18 – Resolução da Parte I, da segunda tarefa escolhida

<table>
<tr><th>Resolução original</th><th>Transcrição da resolução</th></tr>
<tr><td>
Ⓐ sueli poderia escolher sair por qualquer dos lados da pista.
Ⓑ sueli partiu do P(partida) e seguiu pelo percurso A, B, C

Ⓒ (i) B, pois ela passou pelo percurso P e A
(ii) C, pois ela passou pelos percurso P, A e B, usando como lógica ela passou por 3/4 do percurso apresentado.</td>
<td>i)
A) Sueli poderia escolher sair por qualquer um dos lados da pista.
B) Sueli partiu do P(partida) e seguiu pelo percurso A, B, C.


C) (i) B, pois ela passou pelo percurso P e A
(ii) C, pois ela passou pelos percursos P, A e B, como lógica ela passou por $\frac{3}{4}$ do percurso apresentado.</td></tr>
</table>

 (D) Suli começa no ponto A, Passando Por B e C e Para no Ponto D (E) Suli andou um lado inteiro, chegando em B e depois mais um pouco do lado seguinte, Parando entre B e C  3.(ii) No 6 ano o aluno escolheu entre uma moto ou um carro para resolver essa questão. Ele usou a moto, se baseando na explicação do professor mas obteve resultado diferente (iii) Já no 7 ano o aluno usou um carro, porém ele também usou a lógica para responder, ele utilizou uma régua para fazer o percurso e solucionar. (iv) Trabalhando com recursos manipuláveis o Professor utilizou reguas, brinquedos, entre outros...	D) Sueli começa no ponto A, passando por B e C e para no ponto D. E) Sueli andou um lado inteiro, chegando em B e depois mais um pouco do lado seguinte, parando entre B e C. 3. (ii) No 6 ano o aluno escolheu entre uma moto ou um carro para resolver essa questão. Ele usou a moto, se baseando na explicação do professor, mas obteve resultado diferente. (iii) Já no 7 ano o aluno usou um carro, porém ele também usou a lógica para responder, ele utilizou uma régua para fazer o percurso e solucionar. (iv) Trabalhando com recursos manipuláveis o professor utilizou réguas, brinquedos, entre outros...
Legenda	KoT KSM KPM

Fonte: Elaboração própria.

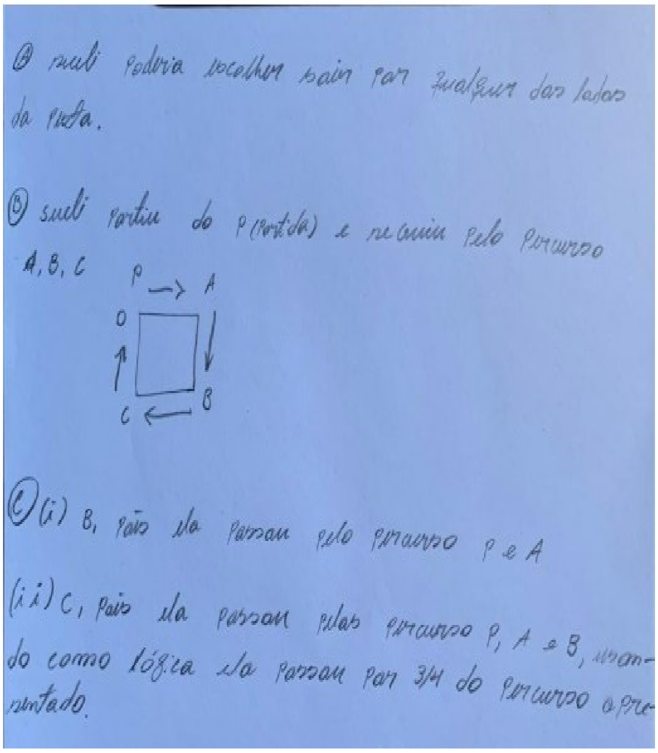
Observe, no item b), que o grupo, ao afirmar que "Sueli partiu do ponto P e seguiu pelo percurso A, B, C", reconhece implicitamente que a volta completa ao redor da praça corresponde à totalidade do percurso, enquanto os três lados percorridos representam apenas uma parte desse todo, fazendo uma conexão entre o todo e a noção de totalidade (100%) que sugere um percurso completo quando, de fato, apenas parte do trajeto foi realizada. Tal raciocínio permite compreender, de modo não matemático, que somente a passagem pelos quatro lados (passando pelos pontos A, B, C e D) corresponderia ao percurso integral, equivalente a 100% da situação (Ribeiro, 2024). Como esse raciocínio foi expresso implicitamente, mostra que o grupo possui entendimento incompleto do ponto de vista do KSM.

Na resolução também é evidenciada a articulação entre diferentes representações de frações ao longo da análise dos itens. A representação geométrica da praça articula-se à representação numérica implícita do todo como composto por quatro partes e à representação simbólica de frações como $\frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{2}$, ainda que estas não sejam explicitadas. Essa articulação é feita na resolução, indicando que o professor reconhece, mesmo que de modo implícito, que diferentes representações descrevem a mesma estrutura matemática subjacente (Ribeiro, 2024).

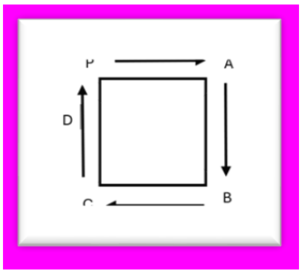
Em resumo, na análise dos itens resolvidos é possível evidenciar que o grupo mobiliza pouco KSM ao estabelecer e fazer poucas conexões coerentes entre totalidade, proporção, medida, representações e procedimentos matemáticos.

4.3 A análise da resolução da tarefa à luz do KPM

Quadro 19 – Resolução da Parte I, da segunda tarefa escolhida

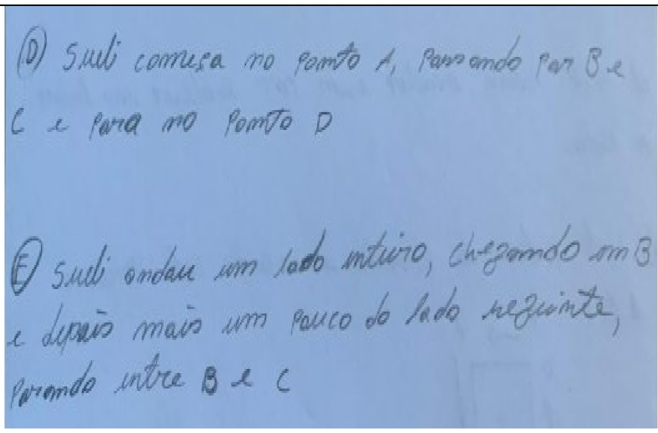
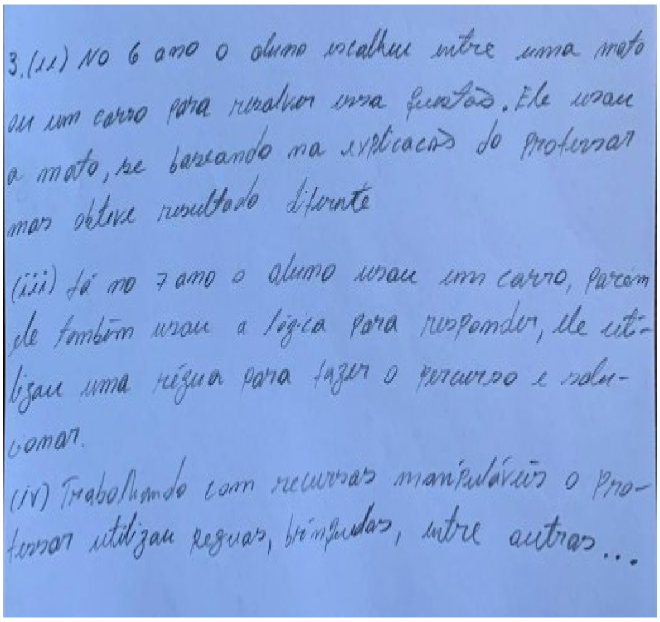
<table>
<tr><th>Resolução original</th><th>Transcrição da resolução</th></tr>
<tr><td>
(a) Sueli poderia escolher sair por qualquer dos lados da pista.
(b) Sueli partiu do P(partida) e seguiu pelo percurso A, B, C
(c) (i) B, pois ela passou pelo percurso P e A
(ii) C, pois ela passou pelos percurso P, A e B, usando como lógica ela passou por 3/4 do percurso apresentado.</td>
<td>i)
A) Sueli poderia escolher sair por qualquer um dos lados da pista.

B) Sueli partiu do P(partida) e seguiu pelo percurso A, B, C.



C) (i) B, pois ela passou pelo percurso P e A

(ii) C, pois ela passou pelos percursos P, A e B, como lógica ela</td></tr>
</table>

 (D) Suli comesa no ponto A, passando por B e C e para no ponto D (E) Suli andou um lado inteiro, chegando em B e depois mais um pouco do lado seguinte, parando entre B e C  3.(ii) No 6 ano o aluno escolheu entre uma moto ou um carro para resolver esa questão. Ele vsou a moto, se baseando na explicação do professor mas obteve resultado diferente (iii) Já no 7 ano o aluno usou um carro, porém ele também usou a lógica para responder, ele utilizou uma régua para fazer o percurso e solucionar. (iv) Trabalhando com recursos manipuláveis o professor utilizou reguas, brinquedos, entre outros...	passou por $\frac{3}{4}$ do percurso apresentado. D) Sueli começa no ponto A, passando por B e C e para no ponto D. E) Sueli andou um lado inteiro, chegando em B e depois mais um pouco do lado seguinte, parando entre B e C. 3. (ii) No 6 ano o aluno escolheu entre uma moto ou um carro para resolver essa questão. Ele usou a moto, se baseando na explicação do professor, mas obteve resultado diferente. (iii) Já no 7 ano o aluno usou um carro, porém ele também usou a lógica para responder, ele utilizou uma régua para fazer o percurso e solucionar. (iv) Trabalhando com recursos manipuláveis o professor utilizou réguas, brinquedos, entre outros...
Legenda	KoT KSM KPM

Fonte: Elaboração própria.

Em relação ao KPM, evidencia-se a mobilização de procedimentos matemáticos, generalizações e condições necessárias para a construção do todo a partir de suas partes. É possível evidenciar que o contexto do percurso de Sueli ao redor da praça de formato quadrado permite observar como esses conhecimentos se manifestam na prática de resolução e na argumentação adotada pelo grupo, mesmo que de modo simbólico.

É notório na resolução que o grupo apresenta a existência de uma condição necessária para o todo, que é a identificação de ao menos uma de suas partes (Ribeiro, 2024). Essa compreensão manifesta-se quando o grupo toma um dos vértices da praça como ponto de partida do percurso, conforme indicado no item b), onde o participante afirma: “Sueli partiu do ponto P e seguiu pelo percurso A, B, C”). Ao reconhecer o lado A como a primeira unidade do percurso, o professor estabelece a parte mínima a partir da qual o todo, a volta completa, pode ser concebido e posteriormente reconstruído. Observa-se que há uma certa confusão quando se nomeiam os lados, confundindo com os vértices da praça. Conclui-se que o grupo revelou de modo implícito este entendimento, porém de modo inadequado.

Evidencia-se também na resolução que existe uma mobilização do conhecimento de que o todo pode ser obtido a partir da repetição sistemática de uma parte, procedimento central na prática matemática relacionada às frações (Ribeiro, 2024). Esse aspecto aparece de forma implícita na análise dos itens, especialmente na justificativa do item b), ao considerar que a repetição sucessiva dos lados formados pelos vértices P, A, B e C constitui o percurso completo ao redor da praça. Quando o participante afirma que Sueli percorreu apenas três desses lados, o professor demonstra compreender que a ausência de uma das repetições inviabiliza a constituição do todo, mobilizando um procedimento generalizável baseado na iteração de unidades.

Note que também é evidenciado o entendimento de que a partir de uma ou mais partes, é possível construir distintos todos, sendo o contexto o elemento que regula e limita essa possibilidade (Ribeiro, 2024). Na resolução dos itens, é possível perceber tal entendimento, na rejeição, quando afirmado: “C, pois ela passou pelos percursos P, A e B, como lógica ela passou por $\frac{3}{4}$ do percurso apresentado”, o que deixa claro que as opções que sugerem trajetos que extrapolam ou não correspondem exatamente a uma volta completa, como aquelas que indicam interrupções entre lados ou percursos indefinidos. Embora, do ponto de vista matemático, a repetição de um lado pudesse gerar percursos maiores que uma única volta, o participante reconhece de modo implícito que o contexto da tarefa restringe o todo ao percurso correspondente a apenas uma volta ao redor da praça.

Outro fato importante a se destacar em torno do KPM pode ser identificado na forma como o grupo utiliza a lógica da prática matemática para suas justificativas, mesmo não recorrendo a formalidade matemática. Na resolução dos itens d) e e), que indicam trajetos incompletos ou parciais, o professor mobiliza critérios matemáticos implícitos para validar sua escolha, tais como a necessidade de percorrer lados completos e a coerência entre o percurso descrito e a estrutura geométrica da praça. Esse procedimento revela um domínio das regras práticas que orientam a resolução de problemas matemáticos contextualizados, mesmo que de modo implícito e narrativo.

Por conseguinte, a resolução evidencia que o grupo articula procedimentos de modo textual e não matemático, com o KPM, ao identificar partes, iterá-las para compor o todo, reconhecer a possibilidade de diferentes construções e, simultaneamente, considerar as restrições impostas pelo contexto da situação. Com isso, apesar de a resolução apresentar articulação com o KPM, evidencia-se limitação no que diz respeito ao conhecimento da prática, pois as justificativas são mais narrativas com defasagem no uso de linguagem simbólica.

Já em torno dos itens ii) e iii), as respostas são muito genéricas e pouco matemáticas, o grupo não descreve representações ou possíveis estratégias dos alunos, o que fica claro que o campo solução desse grupo é limitado. No item iv), o participante cita "réguas, brinquedos e outros...". Mas, não traz detalhes de como ele os usaria, o que torna o argumento sem conexão explícita com a ideia de "frações de percurso". O que se esperava era que a resposta fosse algo mais direcionado, como por exemplo, usar barbante para dividir o perímetro, quadrado de papel quadriculado, geoplano, entre outros.

Durante as discussões e as reflexões no grande grupo, ficou evidente o sentimento de que há a necessidade de busca pelo desenvolvimento do MK especializado com o uso de materiais manipuláveis, apesar de que se exige o desenvolvimento de habilidades para a utilização desse conhecimento e do uso de materiais manipuláveis, mas foi perceptível o estímulo dos participantes a essa busca. Vale destacar que, em meio às reflexões dos participantes, surgiu o desejo de também estimular os alunos a exporem suas ideias, percebendo que através delas eles (os professores) poderiam tirar suas conclusões baseadas nos erros e dificuldades dos alunos e a partir de então tomar suas decisões pedagógicas.

Os relatos e observações durante a aplicação e discussão das tarefas na formação trouxeram de modo geral, compreensão por parte dos professores participantes acerca do tópico abordado (Frações: relação parte-todo). Muito embora alguns dos professores apresentassem certo "domínio" do tópico, ficou claro que muitos deles possuem dificuldades de transmissão do conhecimento nas resoluções dos problemas, o que impacta diretamente, de modo negativo, na forma como apresenta esse tópico para o aluno, um dos motivos pelos quais a aprendizagem significativa não tem sido alcançada.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das grandes mudanças que a educação matemática passou no decorrer dos anos, e a cada dia devido às demandas e os avanços tecnológicos, a educação brasileira tem provocado grandes exigências e ainda mais conhecimento, que vão além dos conhecimentos escolares, abrangendo os aspectos da especificidade do conhecimento do professor. Desse modo, esta pesquisa torna ainda mais evidente que a observância em torno das especificidades do conhecimento do PEM, ela é um elemento central para o desenvolvimento de aprendizagens significativas. No entanto, é necessário que o professor compreenda a necessidade de desenvolver e buscar mudanças em sua prática docente, observando os aspectos matemáticos e pedagógicos de forma integrada, o que sustentará suas decisões em sala de aula, fazendo com que os alunos aprendam de forma significativa.

Para que o professor desenvolva suas especificidades em torno do MK e do conhecimento pedagógico de forma integrada, foi proposto um contexto formativo, com a utilização de tarefas formativas, estas associadas a materiais manipuláveis. Durante este processo, as tarefas revelaram-se como uma estratégia eficaz de coleta de dados para este processo de desenvolvimento do PEM, deste modo possibilitando uma reflexão sobre suas práticas, de modo que planejem atividades de forma mais estruturada e tomem decisões pedagógicas conscientes. Outro fato que é importante ressaltar, é que o processo formativo com uso de TpF promoveu uma conexão sólida entre teoria e a prática, ampliando a capacidade do professor em mediar o processo de ensino e de aprendizagem de forma significativa e na adaptação de novas estratégias aos diferentes níveis de compreensão dos alunos em torno do tópico das frações (relação parte-todo).

A análise realizada e as observações demonstram que os professores tendem a ter facilidade na resolução de tarefas práticas, com a utilização de materiais manipuláveis na resolução de problemas que envolvem o tópico das frações (relação parte-todo), que compõe o nível 2, da escala de proficiência do SAEB, no qual a educação, no Ensino Fundamental Anos Finais, do RN se encontra. Além disso também foi evidenciado que alguns professores enfrentam dificuldades em expressar suas justificativas de modo matemático adequado, fato este revelado durante a análise das resoluções, contudo apresentam MK especializado mesmo que incompleto, tal evidência destaca a importância de o professor buscar desenvolver seu conhecimento especializado, possibilitando compreender os potenciais (Facilidades) e limitações dos alunos, utilizando-se de estratégias que possam enfatizar a interpretação, comparação e análise crítica das informações fornecidas ou levantadas.

Ademais, este trabalho destaca o poder e o valor do MTSK como um suporte para a criação, implementação e análise de tarefas e prática para o processo formativo de docentes, este possibilita que o professor desenvolva uma compreensão de como poderá pensar, organizar e planejar tarefas que visam a aprendizagem significativa do aluno, que permeia desde conceitos mais simplórios até conceitos mais complexos. Nele, também é possível notar que o MTSK fornece subsídios através de seus domínios, subdomínios e categorias que articulam os conhecimentos matemático e pedagógico, o que favorecerá as decisões de forma mais assertiva e contextualizadas durante o processo de ensino.

Em suma, esse tipo de estudo, formação e aplicação de tarefas formativas bem estruturadas, tendo como suporte os materiais manipuláveis, contribui de maneira relevante para o fortalecimento do conhecimento especializado do PEM, na melhoria de sua prática e consequentemente na aprendizagem dos alunos. Assim, o que fica evidente é a necessidade de inovação consciente e constante na reflexão crítica do que é ensinar, o porquê ensinar e de que maneira ensinar, o que é possibilitado pelo desenvolvimento do MK especializado.

A pesquisa também abre um leque de caminhos possíveis para futuros trabalhos, os quais podem visar não só o MK especializado, mas também o CI do PEM, com a utilização das tarefas do aluno já aplicadas durante o processo de averiguação da potencialidade das tarefas, que não foi o objetivo deste trabalho, mas servirá para investigação em futuros trabalhos. Ademais, há a possibilidade de adaptação e remodelação, além da criação de outras tarefas para o aluno, tendo por pano de fundo o MK especializado (MTSK), já revelado neste trabalho.

Outrossim, os resultados deste estudo fortalecem ainda mais o discurso de considerar, na formação de professores, abordagens que fortaleçam e desenvolvam o MK, pedagógico e estratégico do PEM, fornecendo ferramentas realmente palpáveis para o pleno desenvolvimento de habilidades e competências docentes que impactem diretamente na aprendizagem significativa dos alunos. Dessa forma, esse modelo de formação ou de práticas formativas como as que aqui foram abordadas pode realmente contribuir para a construção de uma educação matemática com mais eficácia e com mais significado, de forma que atenda as demandas existentes concernentes a evolução do RN nos resultados das proficiências, na avaliação do SAEB.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A.; RIBEIRO, M. Tarefa para a formação para desenvolver o conhecimento especializado em classificação na educação infantil. **Revista Areté | Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, v. 19, n. 33, p. e23003, 2023. Disponível em: https://periodicos.uea.edu.br/index.php/arete/article/view/3721.. Acesso em: 23 fev. 2026.

ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M**.** Conhecimento especializado do professor que ensina matemática no tópico das frações: discutindo quantidades discretas. **Trilhas Pedagógicas**, São Paulo, v. 9, n. 11, p. 115–134, 2019. Disponível em: https://fatece.edu.br/arquivos/arquivos-revistas/trilhas/volume9_11/8.pdf. Acesso em: 15 nov. 2025.

ALMEIDA, C.; SILVA, S.; RIBEIRO, M. **Discutindo uma tarefa para a formação como recurso para desenvolver o conhecimento interpretativo do professor no âmbito da rotação.** [s.l.: s.n.], [20--]. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/383565575. Acesso em: 30 dez. 2024.

ALMEIDA, C.; SILVA, S.; RIBEIRO, M. **Relações teóricas entre o Mathematics Teacher's Specialised Knowledge e o Conhecimento Interpretativo**. [s.l.: s.n.], [20--]. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/383749714. Acesso em: 29 dez. 2024.

BALL, D. L.; BEN-PERETZ, M.; COHEN, R. B. Records of practice and the development of collective professional knowledge. **British Journal of Educational Studies,** v. 62, n. 3, p. 317–335, 2014. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00071005.2014.959466. Acesso em: 10 jan. 2024

BALL, D. L.; COHEN, D. K. Developing practice, developing practitioners. In: Darling-Hammond, L.; Sykes, G. (Eds.). **Teaching as the learning profession:** Handbook of policy and practice. Jossey-Bass, 1999. p. 3–32.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, New York, v. 59, n. 5, p. 389–407, 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/255647628_Content_Knowledge_for_Teaching_What_Makes_It_Special. Acesso em: 23 fev. 2026.

BALL, D. L.; BASS, H. *Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching.* In: **Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, Edmonton**. Conference Proceedings. 2002. p. 3-14. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/281345213_A_practice-based_theory_of_mathematical_knowledge_for_teaching_The_case_of_mathematical_reasoning. Acesso em: 23 fev. 2026.

BATISTA, A. M. S. B.; SPINILLO, A. G. Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas**. Estudos de Psicologia**, Natal, v. 13, n. 1, p. 13–21, 2008. Disponível em:

https://www.scielo.br/j/epsic/a/HfsPLd9cmvcGYxhJ6TKcVsv/?lang=pt. Acesso em: 2 jan. 2025.

BICUDO, M. A. V. (Org.). **Formação de professores?** Da incerteza à compreensão. Bauru: EDUSC, 2003.

BRAGA, M. D.; NOLETO, C. A. S. Seminários de pesquisa: uma proposta de formação para professores que ensinam matemática. In: BRAGA, M. D.; NOGUEIRA, C. A.; NOLETO, C. A. S. (org.). **Investigações em ensino de matemática**: a formação de professores que ensinam matemática. v. 2. São Paulo: Paco Editorial, 2020. p. 37–48.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. 5. ed. São Paulo: CAEM /USP, 2004.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matrizes de referência de língua portuguesa e matemática do SAEB**. Brasília: INEP, 2001. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/centrais-de-conteudo/acervo-linha-editorial/publicacoes-institucionais/avaliacoes-e-exames-da-educacao-basica/matrizes-de-referencias-de-lingua-portuguesa-e-matematica-do-saeb. Acesso em: 23 fev. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Escalas de proficiência do SAEB.** Brasília: INEP, 2020. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/centrais-de-conteudo/acervo-linha-editorial/publicacoes-institucionais/avaliacoes-e-exames-da-educacao-basica/escalas-de-proficiencia-do-saeb. Acesso em: 23 fev. 2026.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB)**. Brasília: INEP, 2025. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/ideb. Acesso em: 06 fev. 2025.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matrizes e escalas do SAEB.** Brasília: INEP, 2025. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas>. Acesso em: 06 fev. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Anuário Brasileiro da Educação Básica 2024.** Brasília: MEC**,** 2023. Disponível em: https://qedu.org.br/uf/24-rio-grande-do-norte/ideb. Acesso em: 23 nov. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Instituto de Estudos para o Desenvolvimento Educacional**. QEdu**,** 2024. Disponível em: https://qedu.org.br/uf/24-rio-grande-do-norte/ideb. Acesso em: 23 nov. 2024.

CARRILLO, J. *et al.* The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education,** v. 20, n. 3, p. 236–253, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981. Acesso em: 24 nov. 2024.

DI MARTINO, P.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. Interpretative Knowledge. In: LERMAN, S. (org.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Cham: Springer International Publishing, 2020. p. 424–428.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 1. ed. Campinas: Papirus, 1993.

DOICHE, E.; ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. **Entendendo a classificação para ensinar e aprender também brincando e com prazer desde a Educação Infantil**. 1. ed. Campinas: Cognoscere, 2023.

EMERIQUE, P. S. Isto e aquilo: jogo "ensinagem" matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 190.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 25. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREIRE, P. **Pedagogia da esperança**: um reencontro com a pedagogia do oprimido. 33. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2008.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido.** 50. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

GIBIM, G. *et al.* Interpretative Knowledge of Teachers when Solving a Fraction Division Task. **PNA**, v. 19, n. 3, p. 305–329, 2025. Disponível em: https://digibug.ugr.es/handle/10481/104255. Acesso em: 23 fev. 2026.

GOMES, M. M. *et al.* Reflexões sobre a formação de professores: características, histórico e perspectivas. **Revista Educação Pública**, v. 19, n. 15, p. 7, 2019. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/19/15/reflexoes-sobre-a-formacao-de-professores-caracteristicas-historico-e-perspectivas. Acesso em: 10 abr. 2025.

GAROFALO, D. **Como as metodologias ativas favorecem o aprendizado.** In: Nova Escola. 2018, online. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/11897/como-as-metodologias-ativas-favorecem-o-aprendizado?download=truevoltar=/conteudo/11897/como-as-metodologias-ativas-favorecem-o-aprendizado?download=true. Acesso em: 22 jun. 2024.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 238f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em: https://matpraticas.pbworks.com/w/file/fetch/124818583/tese_grando%281%29.pdf. Acesso em: 21 jun. 2024.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.** 1. ed. rev. Rio de Janeiro: Objetiva, 2011.

LORENZATO, S**. Para aprender matemática**. 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2010.

LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

LORENZATO, S. **Educação infantil e percepção matemática.** 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2018.

MELLONE, M. *et al.* Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. **Research in Mathematics Education**, v. 22, n. 2, p. 154–167, 2020. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/339627385_Mathematics_teachers'_interpretative_knowledge_of_students'_errors_and_non-standard_reasoning. Acesso em: 23 fev. 2026.

MELLONE, M. *et al*. Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research. In: DOOLEY, T.; GUEUDET, G. (Eds.). **Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME, 2017. p. 2948–2955.

MENEZES, S.; RIBEIRO, M. (org.). **Pensar e fazer pesquisa na formação de professores com foco no conhecimento interpretativo e especializado do professor.** 1. ed. Campinas: Cognoscere, 2023.

MORIEL JUNIOR, J. G. Conhecimento especializado de professores de matemática (MTSK) na Web of Science até 2020. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, Campinas, v. 29, n.00, p. e021022, 2021. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8660030. Acesso em: 23 fev. 2026.

OLIVEIRA, A. M. P.; ORTIGÃO, M. I. R. (org.). **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática.** Brasília: SBEM, 2018. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_.pdf. Acesso em: 10 fev. 2025.

PAIS, L. C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria** , In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 23., 2000, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPEd, 2000. Disponível em: http://23reuniao.anped.org.br/textos/1919t.PDF. Acesso em: 23 jan. 2025.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

PULLIAS, E. V.; YOUNG, J. D. **A arte do magistério**: o que é um professor? Tradução de Edmond Jorge. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M. **Matematicativa.** 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2017.

RIBEIRO, M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. In: **Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 4, p. 89–96, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/331604369_Characterizing_prospective_teachers'_knowledge_infor_interpreting_students'_solutions. Acesso em: 23 fev. 2026.

RIBEIRO, M.; GIBIM, G.; ALVES, C. A necessária mudança de foco na formação de professores de e que ensinam matemática: discussão de tarefas para a formação e o desenvolvimento do conhecimento interpretativo. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 34, p. 1–21, 2021. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/350950543_A_Necessaria_Mudanca_de_Foco_na_Formacao_de_Professores_de_e_que_Ensinam_Matematica_Discussao_de_Tarefas_para_a_Formacao_e_o_Desenvolvimento_do_Conhecimento_Interpretativo. Acesso em: 23 fev. 2026.

RIBEIRO, M.; GIBIM, G.; ALVES, C. Conhecimento do professor e do formador de professores de/que ensinam matemática. Editorial. **Zetetiké**, Campinas, v. 29, p. e021033, 2021. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8668461. Acesso em: 23 fev. 2026.

RIBEIRO, M. **Ciclo investigativo, gráficos estatísticos e conhecimento dos alunos: uma perspectiva de desenvolvimento do Pensamento Estatístico.** [S.l.: S.n.]. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/388824078. Acesso em: 23 fev. 2026.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1–32, 2021. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/353935603_Conceitualizando_Tarefas_Formativas_para_Desenvolver_as_Especificidades_do_Conhecimento_Interpretativo_e_Especializado_do_Professor. Acesso em: 23 fev. 2026.

RIBEIRO, M; GIBIM, G; ALVES, C. **A** Necessária Mudança de Foco na Formação de Professores de e que Ensinam Matemática: Discussão de Tarefas para a Formação e o Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 34, p. 1–24, 2021. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/350950543_A_Necessaria_Mudanca_de_Foco_na_Formacao_de_Professores_de_e_que_Ensinam_Matematica_Discussao_de_Tarefas_para_a_Formacao_e_o_Desenvolvimento_do_Conhecimento_Interpretativo. Acesso em: 23 fev. 2026.

RIBEIRO, M.; RIBEIRO, A.; PACELLI, T. Apresentação. **Zetetike**, v. 29, p. e021033, 31 dez. 2021.

RIBEIRO, M. **Abordagens matematicamente potentes para desenvolver o entendimento dos sentidos da adição**. 1. ed. Campinas: Cognoscere, 2021. v. 1. 148p.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. Tarefas para a formação para desenvolver o conhecimento especializado do professor no âmbito do pensamento algébrico em contextos de regularidades de crescimento: exemplos de conteúdo de conhecimento a desenvolver. **Espaço Plural**, v. 1, n. 1, p.37, 2022. Disponível em: https://e-revista.unioeste.br/index.php/espacoplural/article/view/33935. Acesso em: 18 mar. 2025.

RIBEIRO, M.; SILVA, C. Especificidades do Conhecimento Interpretativo do professor e das tarefas para a formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 19, n. esp. 2, p. e024073, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18553. Acesso em: 18 mar. 2025

RIBEIRO, M. **Atribuindo significado ao todo como elemento central para desenvolver o entendimento das frações e o conhecimento especializado do professor.** Campinas: Cognoscere, 2024.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. R. **Da coleta de informação à construção de pictogramas:** Desenvolvendo o Pensamento Estatístico. 1. ed. Campinas: Cognoscere, 2023.

RIBEIRO, M.; SILVA, C. Especificidades do conhecimento interpretativo do professor e das tarefas para a formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, v. 19, n. esp. 2, p. e024073, 2024.

SANTOS, E. R.; SANTANA, V.; SILVA, C.; RIBEIRO, M. Ciclo investigativo, gráficos estatísticos e conhecimento dos alunos: uma perspectiva de desenvolvimento do Pensamento Estatístico. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 19, n. esp. 2, p.31, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18553. Acesso em: 19 mar. 2025.

SAVIANI, D. Formação de professores: aspectos históricos e teóricos do problema no contexto brasileiro. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 14, n. 40, p. 143–155, 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/40427655_Formacao_de_professores_aspectos_historicos_e_teoricos_do_problema_no_contexto_brasileiro. Acesso em: 23 fev. 2026.

SILVA, C.; RIBEIRO, M**.** Reflexões sobre a formação de professores: características, histórico e perspectivas. **Revista Educação Pública**, v. 19, n. 15, p. 997-1026, 2019. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/19/15/reflexoes-sobre-a-formacao-de-professores-caracteristicas-historico-e-perspectivas. Acesso em: 12 mar. 2025.

SILVA, C.; RIBEIRO, M. Caracterizando tarefas para os alunos e as cinco dimensões fundamentais para sua implementação: elementos gênese das tarefas para a formação. **Espaço Plural**, Marechal Cândido Rondon, v. 20, p. 1–24, 2024. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/383478119_CARACTERIZANDO_TAREFAS_PARA_OS_ALUNOS_E_AS_CINCO_DIMENSOES_FUNDAMENTAIS_PARA_SUA_IMPLEMENTACAO_ELEMENTOS_GENESIS_DAS_TAREFAS_PARA_A_FORMACAO. Acesso em: 19 fev. 2025.

SILVA, C.; RIBEIRO, M. Relações teóricas entre o Mathematics Teacher's Specialised Knowledge e o conhecimento interpretativo. In: CONGRESSO INTERNACIONAL MTSK, 6., 2023, Valparaíso. **Anais [...].** Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2023. p. 320–327. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/383749714_Relacoes_teoricas_entre_o_Mathematics_Teacher's_Specialised_Knowledge_e_o_Conhecimento_Interpretativo. Acesso em: 23 fev. 2026.

SOARES, T. M. *et al.* Fatores associados ao abandono escolar no ensino médio público de Minas Gerais. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 41, n. 3, p. 757–772, 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ep/a/XhMWFmKSzSrKCsDPhbsYs5P/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 23 fev. 2026.

TODOS PELA EDUCAÇÃO. **Anuário Brasileiro da Educação Básica 2024.** São Paulo: Todos Pela Educação; Editora Moderna; Fundação Santillana, 2024. Disponível em: https://anuario.todospelaeducacao.org.br/capitulo-3-ef-anos-finais.html. Acesso em: 23 jan. 2025.

VALE, I. **Materiais manipuláveis.** Viana do Castelo: ESE, 2002. Disponível em: https://www.academia.edu/6307061/Materiais_Manipul%C3%A1veis. Acesso em: 23 jan. 2025.

APÊNDICE A – APLICAÇÃO DAS TAREFAS FORMATIVAS “ENCONTRANDO FRAÇÕES” E “COMO IREMOS PARA ESCOLA?” PARA DISCUSSÕES ESPECIALIZADAS BASEADAS NO MTSK

	OBSERVAÇÕES
 	

APÊNDICE B – TAREFA FORMATIVA: PARTE PRELIMINAR DO TÓPICO DAS FRAÇÕES (RELAÇÃO PARTE-TODO)

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Parte Preliminar

Conjunto de questões que focam o conhecimento e as práticas matemáticas do professor no âmbito do tópico em discussão.

a) Imagine que você está na rua e alguém te pergunta: "O que é uma fração?" O que você responderia, lembrando que não é o momento de ensinar, apenas de dar uma explicação simples e rápida?
b) E se, como professor, você pudesse escolher entre todos os recursos que conhece, quais selecionaria para ajudar os alunos a entenderem o conceito de fração? E por que escolheria esses recursos?

APÊNDICE C – TAREFA FORMATIVA: PARTE I DO TÓPICO DAS FRAÇÕES

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Parte I

3. Considere a tarefa:

(i) Resolva a tarefa do aluno por conta própria, sem se preocupar em ensinar ou explicar o procedimento para outra pessoa.

Tarefa: Encontrando frações

(Você deve explicar sempre o seu raciocínio descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

A seguir é apresentada uma praça de formato quadrado:

Imagine que Sueli partirá de moto de um dos cantos da praça e dará uma volta completa na pista ao seu redor.

a) Quais os possíveis pontos de partida de Sueli? Justifique Sua resposta.
b) Marque os cantos com as letras A, B, C, P, escolha P como ponto de partida. E escolha também um sentido de partida. Descreva sua escolha.
c) Sueli partiu do canto e sentido escolhidos:
   (i) Em qual dos outros cantos ela estará após andar $\frac{1}{2}$ do percurso? Justifique resposta.
   (ii) E se Sueli andar $\frac{3}{4}$ do percurso, a partir do ponto P, em qual dos cantos ela parará? Justifique sua resposta.
d) Ela partiu do vértice P, no sentido escolhido, e caiu ao atingir $\frac{3}{5}$ do percurso total. Marque com a letra D o ponto que indica o lugar em que Sueli caiu?
e) Descreva a ideia que utilizou na resolução usando o material manipulável apresentado pelo professor.

(ii) No grupo discutam e descrevam como vocês acham que um aluno do 6° ano resolveria esse problema? Apresentem possíveis formas diferentes de resolução e representação, associando-as a conhecimentos ou compreensões matemáticas que esse aluno poderia ter. Registre na folha de resposta.
(iii) No grupo discutam e descrevam como vocês acham que um aluno do 7° ano resolveria esse problema? Apresente possíveis formas diferentes de resolução e representação, associando-as a conhecimentos ou compreensões matemáticas que esse aluno poderia ter. Registre na folha de resposta.
(iv) Que recurso usaria para resolução da tarefa além do material manipulável disponibilizado pelo professor formador? E de que forma utilizaria?

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

A utilização de tarefas formativas no desenvolvimento do conhecimento especializado do professor de matemática do Ensino Fundamental II com uso de materiais manipuláveis

Wellysson de Souza SIlva[1]
Fabricio de Figueredo Oliveira[2]

[1]Aluno do curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA.
[2]Professor orientador do curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA.

Matrícula: 2023110031

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, assinadas e rubricadas pelo pesquisador e pelo participante, sendo que uma via deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Esta pesquisa busca compreender e fortalecer o conhecimento especializado do PEM, com foco na formação continuada e na utilização de tarefas formativas associadas a materiais manipuláveis. Considerando os baixos índices de proficiência em matemática apresentados no Estado do Rio Grande do Norte, identificados pelo SAEB e pelo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), torna-se necessária a realização de ações que contribuam para a melhoria da prática docente e, consequentemente, da aprendizagem dos estudantes.

A participação dos professores e gestores nesta investigação é fundamental, pois permitirá identificar percepções, práticas e desafios enfrentados no ensino de matemática, além de possibilitar o desenvolvimento de estratégias formativas mais eficazes. Ressalta-se que a pesquisa tem caráter exclusivamente acadêmico e formativo, sem qualquer prejuízo aos participantes, garantindo o sigilo das informações, a preservação da identidade dos envolvidos e a utilização dos dados apenas para fins científicos e educacionais.

Assim, este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) tem como finalidade assegurar que os participantes compreendam os objetivos, procedimentos, riscos e benefícios da pesquisa, para que sua colaboração seja voluntária, consciente e ética.

Procedimentos:

A pesquisa será realizada por meio de encontro formativo (oficina) com duração aproximada de 8 horas, em data previamente agendada junto à instituição de ensino. Durante esse encontro, os participantes terão acesso a atividades formativas planejadas com base no modelo ***Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK),*** envolvendo discussões coletivas, resolução de tarefas matemáticas e utilização de materiais manipuláveis relacionados a conteúdos como frações e pictogramas.

No decorrer da pesquisa:

- Os professores serão convidados a resolver tarefas matemáticas e refletir sobre diferentes formas de ensiná-las;
- Haverá momentos de discussão em grupo para troca de experiências e análise das práticas pedagógicas;
- Poderão ser coletados registros escritos, produções das tarefas e anotações do pesquisador;
- As atividades poderão ser registradas em áudio, vídeo e/ou fotografia, apenas para fins acadêmicos e com a devida autorização;
- Não haverá avaliação individual do desempenho dos participantes, apenas análise coletiva das contribuições para fins de pesquisa.

A participação é voluntária e não implicará em custos nem em qualquer tipo de prejuízo aos envolvidos. O tempo total estimado de participação é de aproximadamente 8 horas distribuídas em 2 dois momentos.

Desconfortos e riscos:

Por se tratar de uma pesquisa aplicada, voltada à prática didática no ensino de matemática, com foco na resolução de tarefas e no manuseio de materiais em sala de aula, não se identificam riscos diretos para os participantes. Entretanto, reconhece-se a possibilidade de surgirem situações de desconforto, como cansaço, insegurança ao realizar atividades ou exposição de ideias em grupo. Caso isso ocorra, a participação poderá ser interrompida a qualquer momento, sem qualquer prejuízo pessoal, acadêmico ou profissional. A decisão de se retirar da pesquisa será respeitada integralmente, preservando-se a integridade e o bem-estar dos envolvidos.

Benefícios:

A participação nesta pesquisa poderá contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos, promovendo reflexões sobre a prática docente e novas formas de abordagem no ensino da matemática. O médio e longo prazo, prevê-se como benefício a disponibilização de materiais didáticos concretos, elaborados a partir das atividades aplicadas em sala de aula, que poderão auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, espera-se que a experiência favoreça a integração entre teoria e prática, ampliando o conhecimento especializado do professor e impactando positivamente na qualidade da aprendizagem dos estudantes

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome também não será citado.

Ressarcimento e Indenização:

Em situações nas quais você preveja alguma despesa (por exemplo, transporte, alimentação, materiais de papelaria ou impressões), deve informar o orçamento calculado ao pesquisador com antecedência ao preenchimento deste termo de consentimento livre e esclarecido, para que o pesquisador delibere sobre o ressarcimento dos custos na forma “em espécie” ou através de depósito em conta corrente.

Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa quando comprovados nos termos da legislação vigente.

Acompanhamento e assistência:

A qualquer momento os participantes poderão entrar em contato com os pesquisadores para esclarecimentos e assistência sobre qualquer aspecto da pesquisa, através dos contatos abaixo. Você receberá assistência integral e imediata, de forma gratuita, pelo tempo que for necessário em caso de danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, se precisar consultar esse registro de consentimento ou quaisquer outras questões, você poderá entrar em contato com o pesquisador Wellysson de Souza Silva. Telefone: (84) 998204044. E-mail: wellyssonmat@gmail.com. E também com o professor orientador Fabricio de Figueredo Oliveira. Telefone: (84) 998482757. E-mail: fabrício@ufersa.edu.br.

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar:

Nome do(a) participante: ____

____ Data: ____/____/____.
(Assinatura do participante)

Responsabilidade do Pesquisador:

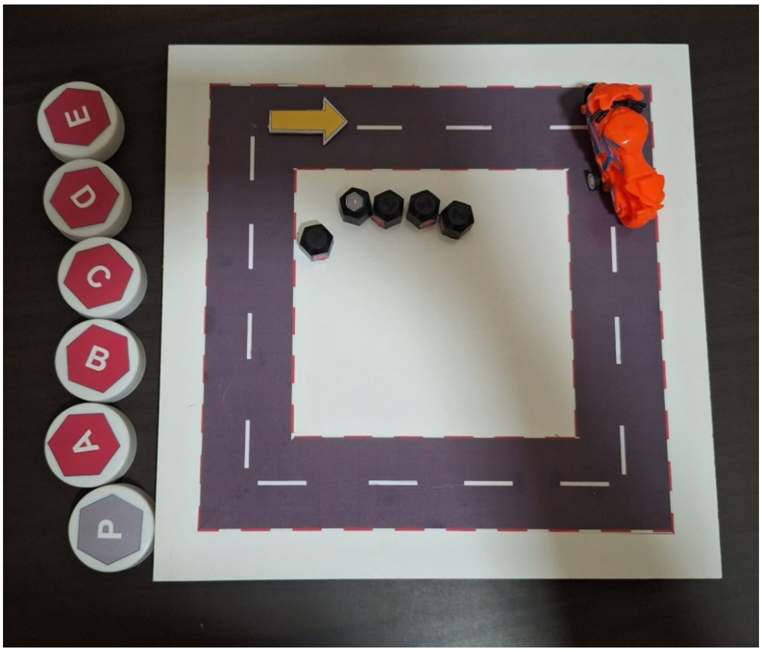
Asseguro ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____ Data: ____/_____/_____.
(Wellysson de Souza Silva).

Rubrica do pesquisador:______________ Rubrica do participante:______________

APÊNDICE E – MATERIAIS MANIPULÁVEIS CONSTRUIDOS PARA UTILIZAÇÃO DURANTE TAREFA FORMATIVA “ENCONTRANDO FRAÇÕES”.

<table>
<tr><th></th><th>OBSERVAÇÕES</th></tr>
<tr><td>




</td><td></td></tr>
</table>