UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Faculdade de Ciências e Tecnologia - Júlio de Mesquita Filho- campus de Presidente Prudente

PATRÍCIA CRISTINA OLIVEIRA DE JESUS MOLINA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA :

uma contribuição para o ensino de frações no sexto ano do ensino fundamental

Presidente Prudente

2025

Patrícia Cristina Oliveira de Jesus Molina

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA :
uma contribuição para o ensino de frações no sexto ano do ensino fundamental

Dissertação, apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - São José do Rio Preto, para obtenção do título de Mestre(a) em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Profª Dra. Cristiane Nespoli de Oliveira

Presidente Prudente
2025

M722r

Molina, Patrícia Cristina Oliveira de Jesus

Resolução de problemas e conhecimento especializado do professor de matemática : uma contribuição para o ensino de frações no sexto ano do ensino fundamental / Patrícia Cristina Oliveira de Jesus Molina. -- São José do Rio Preto, 2026

66 f.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Cristiane Nespoli de Oliveira

1. Problemas. 2. Aprendizagem Ativa. 3. Conhecimento. 4. Frações. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

Esta pesquisa pode contribuir para o ensino de frações ao demonstrar a Resolução de Problemas como metodologia capaz de promover compreensão conceitual e aplicação prática, ao mesmo tempo em que evidencia a importância do conhecimento especializado do professor na condução dessas atividades. Seus resultados têm potencial para influenciar práticas pedagógicas, formação docente e debates acadêmicos, fortalecendo a qualidade do ensino e a autonomia dos estudantes.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

This research can contribute to the teaching of fractions by demonstrating Problem-Solving as a methodology capable of promoting conceptual understanding and practical application, while also highlighting the importance of teachers' specialized knowledge in conducting these activities. Its results have the potential to influence pedagogical practices, teacher training, and academic debates, strengthening teaching quality and student's autonomy.

PATRÍCIA CRISTINA OLIVEIRA DE JESUS MOLINA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

uma contribuição para o ensino de frações no sexto ano do ensino fundamental

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP),Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - São José do Rio Preto, para obtenção do título de Mestre(a) em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Área de Concentração: Matemática

Data de defesa: 15/12/2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
CRISTIANE NESPOLI DE OLIVEIRA
Data: 19/12/2025 10:01:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª Dra. Cristiane Nespoli de Oliveira
UNESP – Faculdade de Ciências e Tecnologia – Campus de Presidente Prudente

Documento assinado digitalmente
gov.br
SUETONIO DE ALMEIDA MEIRA
Data: 22/12/2025 06:16:38-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira
UNESP – Faculdade de Ciências e Tecnologia – Campus de Presidente Prudente

Documento assinado digitalmente
gov.br
WENDERSON MARQUES FERREIRA
Data: 19/12/2025 10:17:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira
UFOP – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas – Campus de Ouro Preto

Dedico este trabalho a toda a minha família, em especial ao meu esposo, Paulo Sérgio, e aos meus filhos, Lucas e Júlia, cujo apoio e paciência foram fundamentais para a concretização desta conquista. Dedico também à minha mãe, que sempre esteve ao meu lado, oferecendo apoio, ajuda e, sobretudo, amparo nos momentos em que mais precisei.

Agradecimentos

Expresso minha profunda gratidão a Deus, fonte de sustento e fortaleza ao longo desta etapa da minha vida. Sem sua presença e a fé que me sustenta, não teria sido possível alcançar este momento de realização acadêmica.

Agradeço de maneira especial à minha amiga Cristiane Paraizo Orosco Trepiche, cujo companheirismo, incentivo constante e palavras de encorajamento foram decisivos para que eu perseverasse. Estendo minha gratidão aos amigos que, mesmo nos momentos em que minha atenção lhes foi insuficiente, sempre ofereceram apoio e motivação para que eu não desistisse.

Manifesto meu reconhecimento a todos os professores que contribuíram para minha formação, em particular ao coordenador local do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), campus de Presidente Prudente, Prof. Dr. Suetonio de Almeida Meira, e ao Prof. Dr. José Roberto Nogueira, cuja dedicação e exemplar trajetória foram fontes de inspiração.

De modo singular, agradeço à Profa. Dra. Cristiane Nespoli de Oliveira, cuja confiança em meu potencial, orientação atenta e generosidade foram fundamentais para a concretização deste trabalho. Sua presença foi o alicerce sobre o qual esta dissertação se ergue, e por isso lhe sou eternamente grata.

“Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.”

Leonardo da Vinci

Resumo

A metodologia de Resolução de Problemas propõe que o ensino da Matemática se inicie a partir de situações-problema significativas, capazes de desafiar o aluno a pensar, explorar e construir conceitos, em vez de apenas reproduzir regras prontas. No ensino de frações, essa abordagem assume papel essencial, pois o conceito apresenta múltiplos significados e exige compreensão conceitual, não se limitando à execução de procedimentos mecânicos. A aplicação dessa metodologia permite que o estudante atribua sentido às frações e reconheça suas utilizações em contextos reais. Para que sua implementação seja efetiva, o professor de Matemática deve mobilizar um conhecimento especializado que ultrapasse o simples domínio dos conteúdos, compreendendo profundamente os conceitos de fração, suas representações e significados, além de empregar estratégias didáticas adequadas à mediação do processo de aprendizagem. Essa atuação envolve a elaboração de problemas ricos, a promoção de discussões coletivas, a análise das produções dos alunos e a realização de intervenções pedagógicas que estimulem a construção do conhecimento. A aplicação da sequência didática apresentada neste estudo confirmou a eficácia dessa abordagem, evidenciando o envolvimento e a participação ativa dos estudantes nas atividades voltadas ao ensino de frações. Dessa forma, o estudo tem como objetivo descrever a implementação de uma sequência didática fundamentada na metodologia de Resolução de Problemas, desenvolvida com alunos do ensino fundamental de uma escola pública vinculada à Diretoria de Ensino da região de Presidente Prudente – SP.

Palavras-Chave: resolução de problemas; ensino de frações; conhecimento especializado do professor de matemática.

Abstract

The Problem-Solving methodology proposes that mathematics teaching should begins with meaningful problem situations, challenging students to think, explore, and construct concepts, rather than simply reproducing pre-established rules. This approach plays a crucial role in teaching fractions, as the concept has multiple meanings and requires conceptual understanding, that goes beyond the execution of mechanical procedures. Applying this methodology allows students to assign meaning to fractions and recognize their uses in real-world contexts. For its implementation to be effective, mathematics teachers must mobilize specialized knowledge that goes beyond mere mastery of the content, deeply understanding the concepts of fractions, their representations, and meanings, in addition to employing appropriate teaching strategies to mediate the learning process. This approach involves developing interetingproblems to be addressed in classroom, promoting group discussions, analyzing student work, and implementing pedagogical interventions that encourage knowledge development. The application of the teaching sequence presented in this study confirmed the effectiveness of this approach, demonstrating students' engagement and active participation in activities focused on teaching of fractions. Thus, this study aims to describe the implementation of a teaching sequence based on the Problem-Solving methodology, developed in public elementary school affiliated with the Presidente Prudente-SP Education Board of Education.

Keywords: problem solving; teaching fractions; teacher's specialized knowledge; meaningful learning.

Lista de ilustrações

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Esta seção apresenta os elementos que fundamentam a escolha da temática relacionada ao ensino e à aprendizagem de frações. A investigação adota como metodologia a resolução de problemas, e tem como base teórica o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática. São discutidas as justificativas pessoal, acadêmica e social que motivaram a realização deste estudo, bem como o percurso metodológico adotado. Por fim, explicita-se a organização da dissertação. Para a revisão ortográfica e gramatical deste texto, foram utilizadas ferramentas de inteligência artificial, sem qualquer interferência na elaboração conceitual, metodológica ou analítica do trabalho.

1.1 MOTIVAÇÃO E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DO ESTUDO

Questões relacionadas ao ensino de Matemática sempre me instigaram, desde a graduação. Entre 1998 e 2001, cursei Licenciatura em Matemática na Unesp – Campus de Presidente Prudente e, já no segundo ano, iniciei minha atuação como professora substituta na rede pública estadual de educação básica. Essa experiência me encantou e foi marcada por desafios que contribuíram significativamente para minha formação profissional.

Desde então, minha prática docente na educação básica tem sido permeada por inquietações em torno da aprendizagem matemática, o que motivou meu interesse pelo Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). Ao longo da trajetória profissional, observei dificuldades recorrentes dos alunos em diversos conteúdos. Ao conhecer a resolução de problemas como metodologia capaz de favorecer a aprendizagem e o engajamento, passei a adotá-la em minhas aulas.

No cotidiano escolar, um dos temas que mais suscita dificuldades entre os alunos é o conceito de frações, especialmente no que se refere à interpretação e à aplicação desses conhecimentos em situações concretas. Métodos tradicionais, centrados na repetição mecânica de exercícios, frequentemente resultam em uma aprendizagem superficial e pouco significativa.

Considerando a necessidade de explorar estratégias mais dinâmicas e contextualizadas, a resolução de problemas mostrou-se promissora, ao permitir que os alunos compreendessem as frações de forma mais intuitiva, relacionando-as a situações do cotidiano, como a divisão de alimentos, medições e comparações de quantidades, entre outras. No entanto, deparei-me com um novo grande desafio: a elaboração de problemas envolvendo frações em suas diferentes dimensões, tais como, conceituar e identificar frações equivalentes e comparar frações com denominadores iguais e diferentes. A elaboração de problemas, para além da capacidade de resolvê-los exige um conhecimento aprofundado do professor. — por exemplo, a conceituação de frações equivalentes, bem como a comparação de frações com denominadores iguais e diferentes.

Diante deste cenário, a partir de investigações na literatura, tomei conhecimento do recente modelo, denominado Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, ou, como é conhecido na língua inglesa, Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). O modelo MTSK, prosposto por Carrillo et al. (Carrilo et al., 2018) refere-se ao saber específico que os professores de matemática precisam para ensinar de forma eficaz. Tal conhecimento inclui não apenas a compreensão profunda dos conceitos matemáticos, mas também a capacidade de antecipar dificuldades dos alunos e adaptar estratégias didáticas adequadas ao ensino aprendizagem. No caso específico das frações, à luz desse modelo, espera-se que um professor entenda não apenas os procedimentos para calcular frações, mas também os fundamentos conceituais, como a coordenação de unidades e magnitude das frações, aspectos fundamentais para a transição para a álgebra (Viegut; Matthews, 2023).

Uma vez apresentados os argumentos pessoais que motivaram este trabalho, no aspecto educacional, a escolha da temática encontra respaldo no currículo escolar. A evolução no ensino da matemática foi reflexo de mudanças sociais, tecnológicas e pedagógicas que transformaram a forma como os conteúdos são ensinados, compreendidos e adotados nos currículos escolares. Inicialmente, a matemática era concebida como um estudo abstrato, associado à filosofia e orientado pela lógica pura, e era mais restrito às elites. Com o passar do tempo, o ensino da matemática foi se transformando e se tornando cada vez mais popular, conceitual e com aplicações em coisas do cotidiano.

A partir das décadas de 1960 e 1970, educadores e pesquisadores perceberam que o ensino de matemática, até então fortemente centrado em memorização e repetição de regras e algoritmos, deixou muitos alunos desconectados do conteúdo, sem uma compreensão mais profunda ou capacidade de aplicar o conhecimento a situações cotidianas. Segundo Patrícia Sadovsky:

> [...] propostas 'rasas', muito baseadas na mecanização, provocam um vazio de sentido para os alunos, que, sem a disposição de bancar os 'custos de aprendizagem' em algo que não tem o menor atrativo para eles, acabam mesmo ficando incapacitados! (Sadovsky, 2007, p.14)

Em 1997 foram publicados pela primeira vez, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), documentos esses que foram orientados e desenvolvidos pelo Ministério da Educação (MEC) do Brasil, com o objetivo de oferecer diretrizes pedagógicas para a organização do ensino em escolas de educação básica em todo o país e garantir um padrão de qualidade na educação promovendo a equidade no sistema educacional, respeitando a diversidade cultural, social e regional do Brasil.

No trecho do documento intitulado: "Terceiro e Quartos Ciclos do Ensino Fundamental: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais", ressalta-se que a Matemática faz parte do cotidiano de todas as pessoas, evidenciando que

> [...] é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula. (Brasil, 1988a, p.59)

Conforme este mesmo documento, a Resolução de Problemas é apresentada como uma proposta metodológica sendo destacados alguns princípios fundamentais relacionados à sua estrutura, tais como segue.

> O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
>
> O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório [...];
>
> Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas [...];
>
> O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
>
> Resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (Brasil, 1988a, p.40-41)

Em 2017 é publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com a versão para o Ensino Médio em 2018. Trata-se de um marco no sistema educacional brasileiro, sendo regulamentada pelo Ministério da Educação (MEC) e de caráter obrigatória em todo o território nacional. É um documento normativo que estabelece as diretrizes e os direitos de aprendizagem essenciais para todos os estudantes da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio no Brasil. Em suas competências gerais, a BNCC enfatiza a importância de:

> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e adotar a abordagem própria das ciências, que envolve investigação, reflexão, análise crítica, imaginação e criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas, e criar soluções (tecnologias inclusivas) com base no conhecimento das diversas áreas.(Brasil, 2017, p.9)

> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Brasil, 2017, p.9)

Dessa forma a BNCC, comprometida com a promoção da educação integral, requer:

> [...] o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades. (Brasil, 2017, p.14)

Por fim, do ponto de vista social, é consenso entre educadores a preocupação com o baixo rendimento da maioria dos alunos brasileiros. Segundo dados do Programme for International Student Assessment (Pisa-2022), principal avaliação internacional da educação básica, sete em cada dez estudantes brasileiros de 15 anos não alcançaram o nível mínimo de proficiência em matemática, conforme divulgado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) (INEP, 2025). No ranking geral da disciplina, entre os 85 países avaliados, o Brasil ocupa a 64ª posição. De acordo com a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, em 02/03/2022, quatro em cada 10 estudantes apresentaram conhecimentos "abaixo do básico". O índice de proficiência recuou $4,4\%$ — de $276,6$ para $264,2$ — representando o pior resultado dos últimos 11 anos, com $58,7\%$ dos alunos inseridos na menor faixa de proficiência.

Diante desse cenário preocupante, é fundamental a busca por alternativas que despertem maior interesse dos alunos pela matemática, fazendo com que a percebam de uma forma menos ameaçadora, como ela, recorrentemente é vista pelos discentes. Dentre as alternativas para minimizar esta visão equivocada da disciplina , destaca-se a abordagem de resolução de problemas. Com esta investigação, espera-se oferecer subsídios teóricos e práticos a educadores e gestores educacionais na utilização da metodologia baseada na resolução de problemas, visando à promoção de uma aprendizagem mais significativa e alinhada às demandas contemporâneas no ensino de frações, bem como ao desenvolvimento do conhecimento especializado, necessário ao professor de matemática para a elaboração desses problemas.

1.2 OBJETIVOS DA INVESTIGAÇÃO

Em linhas gerais, neste trabalho buscou-se investigar de que forma a resolução de problemas pode contribuir para o ensino e aprendizagem de frações, analisando suas implicações no desenvolvimento do raciocínio matemático e na superação das dificuldades encontradas pelos alunos. Especificamente, foi elaborada uma sequência didática contendo problemas relacionados à identificação de frações equivalentes, bem como à compreensão, comparação e ordenação de frações associadas à ideia de partes de um inteiro, visando a uma aplicação prática em sala de aula.

Além disso, considerando o percurso dos estudos necessários à elaboração desses problemas, que conduziram à abordagem do chamado Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, investigou-se também quais os conceitos matemáticos específicos são necessários para um ensino eficaz de frações. Desta forma, inicialmente objetivamos responder as seguinte questão:

i) A resolução de problemas pode facilitar a compreensão das frações no que diz respeito a conceituar e identificar frações equivalentes e comparar frações com denominadores iguais e diferentes?

   No entanto, durante a trajetória de estudos surgiu uma nova indagação:

ii) Qual é o conhecimento especializado necessário ao professor de Matemática para a elaboração de problemas relacionados a frações?

1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A dissertação aqui apresentada é composta por Introdução, Referenciais Teóricos, Contexto e Procedimentos Metodológicos, Análise e Discussão das Informações e Conclusão.

A Introdução contempla a trajetória que motivou a escolha do tema, a fundamentação teórica do estudo, os objetivos propostos e a apresentação da organização do texto.

A Seção 2 contém os referenciais teóricos adotados neste estudo, mais especificamente, a Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino e o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK), incluindo o conhecimento especializado associado ao ensino de frações.

Na Seção 3 são apresentados o contexto e os procedimentos metodológicos adotados na investigação, os participantes da pesquisa, os problemas formulados incluídos na sequência didática aplicada aos alunos do sexto ano do ensino fundamental e a tarefa aplicada junto aos licenciandos do quarto ano de graduação em Matemática.

Na Seção 4 apresenta-se a análise das informações coletadas durante a aplicação da sequência didática aos estudantes do sexto ano, bem como da tarefa realizada pelos futuros professores. O Conhecimento Especializado do Professor de Matemática em relação ao conteúdo de frações aqui adotado é analisado, tanto no contexto da elaboração dos problemas que compõem a sequência didática como da tarefa.

Na Seção 5 são apresentadas reflexões acerca da pesquisa, de modo a possibilitar a elaboração de trabalhos que possam servir como subsídio para educadores e apontamento para possíveis trabalhos futuros.

2 REFERENCIAS TEÓRICOS

Esta seção apresenta os referenciais teóricos que fundamentam o desenvolvimento do presente trabalho. São discutidos a Resolução de Problemas como metodologia para o ensino de frações, bem como o conhecimento especializado do professor de Matemática necessário para o ensino desse conteúdo.

2.1 A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Na transição do século XIX para o século XX, predominava a chamada Teoria da Disciplina Mental (TDM). Essa abordagem considerava que o principal objetivo da educação era disciplinar a mente dos estudantes, desenvolvendo habilidades como atenção, memória, raciocínio lógico e força de vontade.

Com o avanço do século XX e a transformação da sociedade agrária em uma sociedade industrial, surgiu a necessidade de uma matemática mais aplicada ao cotidiano. Diante desse novo contexto, pesquisas e experimentos passaram a questionar a eficácia da Teoria da Disciplina Mental (TDM), revelando contradições em seus pressupostos. Foi nesse cenário que emergiu uma nova perspectiva: o Conexionismo. Essa teoria propunha que o aprendizado ocorresse por meio da formação de conexões entre estímulos e respostas, as quais são fortalecidas ou enfraquecidas de acordo com as consequências das ações — em um processo baseado na tentativa, erro e repetição. No entanto, com o tempo, o Conexionismo também passou a ser criticado por sua limitação em considerar apenas métodos repetitivos, sem valorizar adequadamente o processo de ensino-aprendizagem.

Entre meados da década de 1930 e o final da década de 1940, ganhou destaque a Teoria da Aprendizagem Significativa, que defende que o aprendizado é mais efetivo quando o novo conteúdo se relaciona com os conhecimentos prévios do aluno. A partir dessa perspectiva, surge a Resolução de Problemas como uma abordagem teórica, desenvolvida por George Polya — matemático e pesquisador —, que propôs métodos para tornar o ensino da matemática mais reflexivo e contextualizado.

A metodologia de resolução de problemas começou a ganhar espaço no Brasil a partir da década de 1980, como uma resposta às mudanças nas concepções sobre o ensino e a aprendizagem. Influenciada por movimentos educacionais internacionais, essa abordagem surge no país primeiramente através de cursos ministrados a professore e de livros didáticos, como alternativa ao ensino tradicional, que focava na memorização e na repetição mecânica de procedimentos.

Considerando a resolução de problemas como metodologia de ensino, propomos uma busca por metodologias diferentes que estimulem o interesse e facilitem a compreensão dos alunos. Em vez de apenas apresentar fórmulas e procedimentos, é importante introduzir práticas que conectem o conteúdo matemático ao cotidiano dos estudantes, tornando o aprendizado mais significativo e acessível.

Diante do exposto, temos muitos motivos para nós educadores usarmos a resolução de problemas como um meio de ensinar, aprender e avaliar em sala de aula. O progresso tecnológico tem levado as escolas a buscarem inovações para se alinhar e compreender o contexto atual e suas particularidades. Paralelamente, as mudanças sociais apontam para a necessidade de reformular o processo educativo, adotando novos parâmetros que atendam à exigência da sociedade contemporânea. Entretanto, mesmo com todas essas mudanças ainda existe uma visão na qual a Resolução de Problemas é vista como algo que se aplica após a apresentação e definição de um conteúdo. Segundo os PCNs(1988):

> Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações. (Brasil, 1988b, p.40)

Assim, as tendências apontam para uma Educação Matemática concentrada na resolução de problemas. Tanto a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN - Lei nº 9.394/96), quanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e, mais recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indicam que a resolução de problemas deve ser um elemento central no ensino de Matemática.

Além disso, trabalhar regularmente com a resolução de problemas como metodologia favorece um ensino baseado em competências, no qual o aluno é desafiado a lidar com situações reais, mobilizando habilidades e recursos cognitivos, com base em seus conhecimentos prévios.

Um problema, quando bem estruturado, coloca o aluno diante de diversas escolhas que devem ser feitas para alcançar um objetivo previamente proposto ou ainda, um outro, escolhido pelo próprio discente . Nesse contexto, ao professor, caberá o papel de apoiar o aluno na identificação e elaboração de estratégias, além de gerenciar os conteúdos trabalhados em sala de aula estimulando a busca de soluções, motivando e desafiando os estudantes por meio de questionamentos que favoreçam o alcance desse objetivo. Assim, cria-se um ambiente propício ao desenvolvimento de competências, com o problema proposto como ponto de partida para o processo de aprendizagem. Os problemas são apresentados com o objetivo de fomentar a construção de novos conceitos e conteúdos, mesmo antes de sua formalização por meio de uma linguagem estruturada.

Echeverría e Pozo (Echeverria; Pozo, 1998) destacam uma perspectiva sobre a resolução de problemas,

> [...] uma situação somente pode ser concebida como um problema [...] na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos. (Echeverria; Pozo, 1998, p.16)

Hatfield (1978, *apud* (Onuchic et al., 2021)) apontam três abordagens distintas para a realização de trabalhos em sala de aula de matemática, todas fundamentadas na resolução de problemas. A primeira visa proporcionar aos estudantes o conhecimento teórico sobre o processo de resolução. Nessa abordagem, o objetivo é capacitar os alunos para identificar problemas, formular hipóteses, selecionar estratégias de resolução e avaliar possíveis soluções, com ênfase na compreensão do processo antes da prática.

A segunda abordagem busca desenvolver habilidades específicas nos estudantes, com o intuito de torná-los solucionadores autônomos. A ênfase recai sobre a formação de competências como raciocínio lógico, criatividade, análise crítica e autonomia, sendo responsabilidade do docente o ensino de técnicas e estratégias que possibilitem a aplicação independente em contextos futuros.

Por último, Onuchic et al. (Onuchic et al., 2021) apresentam o ensino, no qual a própria resolução de problemas é utilizada como meio para o ensino e aprendizagem. Neste modelo, os alunos adquirem novos conhecimentos ao enfrentar problemas que exigem a aplicação e a descoberta de conceitos. Ao invés de aprenderem teorias previamente para depois aplicá-las, os estudantes são confrontados diretamente com desafios, e, por meio da tentativa, do erro e da reflexão, constroem seu conhecimento. Tal abordagem favorece a aprendizagem ativa, aumenta a motivação dos alunos e facilita a transferência de conhecimentos para novas situações. Logo esse modelo favorece a resolução de problema como metodologia para o ensino da matemática.

O matemático húngaro George Pólya é amplamente reconhecido por suas relevantes contribuições à didática da matemática, especialmente no que diz respeito à resolução de problemas. Em sua obra *A arte de resolver problemas (2006)* [1], o autor propõe um método sistemático, estruturado em quatro etapas, com o objetivo de orientar estudantes e profissionais na abordagem de desafios matemáticos — e de outros campos do conhecimento — de maneira mais clara, eficiente e estratégica.

A seguir, apresenta-se uma descrição detalhada de cada uma dessas etapas, conforme delineadas por Pólya (Pólya, 2006).

Etapa 1: Compreensão do Problema

Inicialmente, é imprescindível compreender integralmente o problema antes de iniciar qualquer tentativa de resolução. Nesta fase, é necessário identificar os dados fornecidos, a incógnita e as condições que caracterizam o problema. Segundo Pólya (2006), a formulação de perguntas como "O que se pretende descobrir?", "Quais são as informações mais

[1] A obra foi originalmente publicada em 1980.

importantes?” e “É possível reformular o problema com outras palavras?”, constitui uma prática eficaz para assegurar a compreensão plena da situação proposta.

Etapa 2: Elaboração de um Plano
Uma vez compreendido o problema, deve-se estabelecer um plano de resolução. Essa etapa requer raciocínio lógico e criatividade, e pode envolver diferentes estratégias, tais como: a busca por padrões, a simplificação do problema, a elaboração de esquemas ou diagramas, a aplicação de fórmulas conhecidas ou a adaptação de métodos utilizados em problemas semelhantes. De acordo com Pólya (2006), a escolha da estratégia adequada é fundamental para orientar o processo de solução.

Etapa 3: Execução do Plano
Com a estratégia traçada, passa-se à execução do plano elaborado. Conforme Pólya (2006), essa etapa demanda atenção cuidadosa para seguir o percurso planejado, realizando os cálculos necessários e verificando cada procedimento, a fim de garantir a precisão e evitar equívocos ao longo do processo.

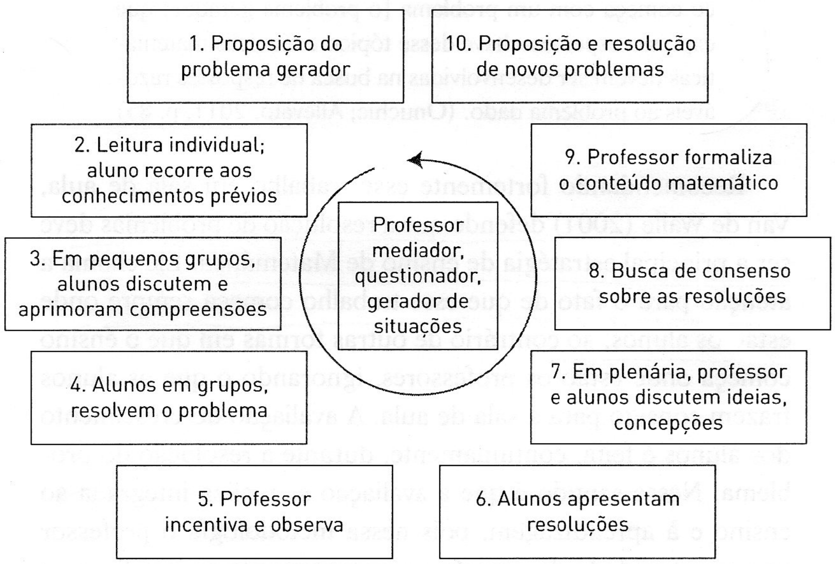
Etapa 4: Revisão e Verificação
Após obter a solução, torna-se imprescindível revisar o processo e verificar a consistência do resultado encontrado. Pólya (2006) recomenda a análise crítica da resposta, questionando se ela atende às condições estabelecidas no enunciado e se existe outra forma, talvez mais simples ou mais eficiente, de resolver o problema. Essa etapa final não apenas contribui para a consolidação do conhecimento adquirido, como também promove o desenvolvimento de uma postura crítica e reflexiva em relação à prática da resolução de problemas.

Dessa forma, o método proposto por Pólya (Pólya, 2006) não se limita a uma técnica de solução, mas configura-se como um instrumento pedagógico poderoso para o ensino da matemática, favorecendo a formação de estudantes mais autônomos, críticos e criativos.

Diversos autores têm se dedicado a sugerir formas de implementação da resolução de problemas como metodologia de ensino, destacando sua relevância para o desenvolvimento de competências críticas e investigativas. Nesse contexto, Allevato e Onuchic (2009), bem como Onuchic e Allevato (Alevato; Onuchic, 2011), propõem a organização das atividades em dez etapas sequenciais, que visam orientar o processo de aprendizagem de maneira sistemática e eficaz. Inicialmente, propõe-se a escolha de um problema interessante e desafiador, que seja pertinente ao universo dos alunos e capaz de despertar sua curiosidade, esse problema inicial é chamado de problema gerador. Assim na primeira etapa, recomenda-se a apresentação do problema aos estudantes sem a oferta de soluções imediatas, a fim de fomentar a autonomia e a capacidade de análise crítica. Na segunda etapa, deve-se assegurar um tempo para a leitura e compreensão do problema, permitindo que os alunos identifiquem as informações essenciais e formulem questionamentos pertinentes. Na terceira etapa, orienta-se a realização de uma discussão inicial em pequenos grupos, visando promover o compartilhamento de ideias e a construção coletiva de significados. A quarta etapa envolve o levantamento de hipóteses e de estratégias possíveis para a resolução do problema, incentivando a criatividade e a flexibilidade cognitiva dos estudantes. Na quinta etapa caso necessário, os alunos devem ser orientados para a busca de informações adicionais, estimulando a pesquisa autônoma e o aprofundamento do conhecimento. Em um momento posterior, realiza-se a tentativa de resolução individual ou coletiva, em que os estudantes aplicam as estratégias discutidas e testam suas hipóteses. Na sexta etapa uma vez obtidas as possíveis soluções, promove-se a socialização dos resultados encontrados, e na sétima etapa proporciona-se a exposição e o debate dos diferentes caminhos percorridos pelos estudantes. Na oitava etapa professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto, dessa forma busca-se contemplar a discussão sobre os procedimentos adotados e as soluções propostas, com ênfase na análise dos erros, acertos e nas possíveis melhorias. Na nona etapa, procede-se à sistematização dos conhecimentos construídos, com o objetivo de consolidar a aprendizagem e formalizar os conceitos trabalhados e na décima etapa são propostos aos alunos novos problemas relacionados ao problema gerador. A adoção dessa metodologia, estruturada em etapas bem definidas, contribui significativamente para a formação de sujeitos autônomos, críticos e capazes de lidar com situações-problema de maneira reflexiva e fundamentada, características indispensáveis no contexto educacional contemporâneo.

Assim o esquema apresentado na Figura Figura 1 sintetiza essas ideias e a sugestão das 10 etapas para o desenvolvimento da metodologia.

Figura 1 – As 10 etapas para o desenvolvimento da Metodologia de Resolução de Problemas



Fonte: (Onuchic et al., 2021)

2.2 O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

A seguir, serão apresentados a evolução do modelo, sua estrutura geral, as inter-relações entre os domínios e as contribuições do MTSK para o ensino de frações. Esse detalhamento permitirá compreender de que forma o modelo organiza e potencializa a aprendizagem matemática.

2.2.1 Evolução do modelo

O conceito de conhecimento profissional docente tem suas raízes nas contribuições de Lee Shulman, que, na década de 1980, propôs uma nova forma de compreender o saber do professor. Em seu trabalho seminal, Shulman (Schulman, 1986) introduziu o termo Pedagogical Content Knowledge (PCK), traduzido como Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, para designar o conhecimento específico que os professores precisam ter para transformar o conteúdo disciplinar em algo compreensível para os alunos. Segundo o autor, ensinar requer a integração entre o domínio do conteúdo e o conhecimento de como esse conteúdo pode ser ensinado e aprendido. Essa concepção marcou uma virada epistemológica na pesquisa sobre o conhecimento docente, ao romper com a dicotomia entre saber disciplinar e saber pedagógico. Em textos posteriores, Shulman (Schulman, 1987) ampliou essa perspectiva, descrevendo outras categorias de conhecimento — como o conhecimento curricular, o conhecimento dos alunos e o conhecimento dos contextos educacionais —, consolidando uma base teórica sólida para o estudo do conhecimento do professor.

Inspirados por essas ideias, Ball, Thames e Phelps (Ball; Thames; Phelps, 2008) desenvolveram o modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), que especifica o PCK de Shulman no campo da Matemática. O MKT descreve o conhecimento matemático necessário ao ensino, distinguindo entre o conhecimento comum de um matemático e o conhecimento especializado do professor de Matemática. Esse modelo tornou-se referência mundial ao detalhar como o professor mobiliza saberes matemáticos em situações reais de ensino.

A partir desse avanço, Carrillo et al. (Carrilo et al., 2018) propuseram o Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), enfatizando a natureza especializada do conhecimento docente em Matemática. O MTSK não apenas aprofunda as dimensões propostas por Shulman e Ball, mas também reconhece as inter-relações entre os saberes matemáticos e pedagógicos, compreendendo o ensino como uma prática complexa que exige articulação entre conceitos, crenças e decisões didáticas. Assim, o MTSK pode ser visto como um desdobramento e refinamento teórico das ideias inauguradas por Shulman, ao reconhecer que o conhecimento do professor de Matemática é um campo de saber próprio, especializado e dinâmico, essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

2.2.2 Estrutura geral do modelo e as inter-relações entre seus domínios

O modelo MTSK é constituído por dois grandes domínios: A) o Conhecimento Matemático (Mathematical Knowledge – MK), e B) o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Pedagogical

Content Knowledge – PCK). Cada domínio subdivide-se em três subdomínios, que se inter-relacionam de forma dinâmica, formando uma rede complexa de saberes. A seguir, apresenta-se a descrição detalhada de cada um, acompanhada de exemplos aplicados ao ensino de frações.

A) O Domínio do Conhecimento Matemático (MK) e seus subdomínios:

A1) O Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT – Knowledge of Topics)
O KoT refere-se ao conhecimento profundo que o professor possui sobre os conceitos matemáticos que ensina — suas definições, propriedades, representações e significados. No caso das frações, isso envolve compreender os diferentes significados atribuídos a esse conceito (parte-todo, medida, quociente, razão e operador) e suas representações simbólicas, gráficas e concretas. Um professor com sólido KoT reconhece, por exemplo, que a fração $\frac{3}{4}$ pode representar três partes de um inteiro dividido em quatro partes iguais, mas também pode expressar uma divisão $(3 \div 4)$, uma razão (3 para 4) ou uma medida no ponto $\frac{3}{4}$ na reta numérica. Como observam Carrillo et al. (Carrilo et al., 2018), esse subdomínio abrange o conhecimento das propriedades internas dos conceitos matemáticos, suas relações estruturais e diferentes modos de representação.

A2) Conhecimento das Estruturas Matemáticas (KSM – Knowledge of the Structure of Mathematics)
O KSM diz respeito à compreensão das conexões e coerências internas da matemática, ou seja, de como os diversos tópicos se articulam dentro do sistema matemático. No ensino de frações, esse conhecimento permite perceber que o estudo das frações constitui uma ponte para o campo dos números racionais e, posteriormente, para o pensamento algébrico, pois envolve relações de equivalência, proporção e razão. Compreender que a equivalência entre frações ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$) representa uma invariância de razão, e não apenas uma transformação algorítmica, é um exemplo de mobilização do KSM. Carrillo et al. (Carrilo et al., 2018) sugerem que o KSM permite ao professor organizar o currículo e o ensino de modo coerente, identificando o papel de cada conceito dentro de uma estrutura matemática maior.

A3) Conhecimento da Prática Matemática (KPM – Knowledge of the Practice of Mathematics)
O KPM envolve o entendimento da natureza da atividade matemática, incluindo processos como formular problemas, conjecturar, argumentar, justificar, generalizar e demonstrar. No contexto da sala de aula, o professor mobiliza o KPM ao encorajar os alunos a explicitarem seus raciocínios sobre frações, justificando, por exemplo, por que $\frac{2}{3}$ é maior que $\frac{3}{5}$, mesmo que o numerador seja menor. Essa discussão não se reduz ao cálculo, mas envolve análise de magnitude, comparação de unidades e argumentação proporcional. Segundo Viegut et al. (Viegut; Matthews, 2023), promover

práticas matemáticas autênticas em sala de aula estimula a construção de significados conceituais e fortalece o raciocínio matemático.

B) O Domínio do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) e seus subdomínios:

B1) Conhecimento das Características da Aprendizagem da Matemática (KFLM – Knowledge of Features of Learning Mathematics)
O KFLM refere-se ao conhecimento do professor sobre como os alunos aprendem matemática, suas concepções, dificuldades e erros comuns. No ensino de frações, o KFLM manifesta-se quando o professor antecipa estratégias equivocadas dos alunos — como comparar frações observando apenas numeradores ou denominadores — e planeja intervenções adequadas. Saber que a dificuldade na comparação de frações com denominadores diferentes decorre de uma compreensão ainda parcial do conceito de unidade é um exemplo de mobilização desse subdomínio. Carrillo et al. (Carrilo et al., 2018) destacam que esse conhecimento é fundamental para planejar ações pedagógicas eficazes, pois envolve uma compreensão profunda dos processos cognitivos dos estudantes.

B2) Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT – Knowledge of Mathematics Teaching)
O KMT refere-se ao conhecimento sobre como ensinar determinado conteúdo, incluindo a seleção de tarefas, estratégias didáticas, recursos e representações. Na perspectiva da Resolução de Problemas, o professor mobiliza o KMT ao escolher situações que desafiem o aluno a pensar e a construir significados. Por exemplo, ao propor o problema "Em uma receita, utilizam-se $\frac{2}{3}$ de xícara de açúcar e $\frac{3}{4}$ de farinha; qual ingrediente é usado em maior quantidade?", o professor estimula a comparação entre frações não equivalentes, incentivando o raciocínio proporcional. Segundo Carrillo et al. (Carrilo et al., 2018), o KMT envolve tanto o conhecimento de técnicas de ensino quanto a sabedoria prática do professor ao conduzir o processo de aprendizagem.

B3) Conhecimento das Normas e Princípios Matemáticos do Ensino e da Aprendizagem (KPMT – Knowledge of Mathematics Teaching and Learning Principles)
O KPMT engloba as crenças, valores e princípios que orientam o professor em suas decisões pedagógicas. Inclui concepções sobre o que significa "ensinar bem matemática", sobre a natureza do erro e sobre o papel do aluno na construção do conhecimento. Por exemplo, um professor que acredita que aprender matemática requer exploração ativa e argumentação planejará atividades que privilegiem o diálogo e a investigação, em detrimento da mera repetição de algoritmos. Carrillo et al. (Carrilo et al., 2018) indicam que esse subdomínio influencia fortemente a postura docente e o clima de aprendizagem estabelecido em sala de aula.

Os domínios e subdomínios do MTSK, acima discriminados, não funcionam de forma isolada. Ao contrário, o modelo enfatiza sua interconexão e interdependência. Por exemplo, ao elaborar uma sequência de problemas sobre frações equivalentes, o professor aciona seu KoT (compreensão do conceito e de suas representações), seu KFLM (antecipação de erros e concepções dos alunos) e seu KMT (escolha de estratégias e recursos). Essas interações evidenciam a natureza integrada e dinâmica do conhecimento docente. Como afirmam Carrillo et al. (Carrilo et al., 2018), "o conhecimento especializado do professor de Matemática se manifesta na mobilização articulada de múltiplos saberes em contextos específicos de ensino".

O Quadro 1 a seguir sintetiza os domínios e subdomínios do modelo MTSK, indicando exemplos, com o objetivo de facilitar a compreensão.

Quadro 1 – Domínios, subdomínios e exemplos práticos do modelo MTSK

Domínio	**Subdomínio**	**Exemplo prático**
Conhecimento Matemático (MK)	**Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)**	Determinar se $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{2}{3}$, comparando as frações.
	Conhecimento das Estruturas Matemáticas (KSM)	Saber que $\frac{2}{4}$ e $\frac{6}{12}$ representam a mesma quantidade.
	Conhecimento da Prática Matemática (KPM)	Incentivar os alunos a justificarem por que $\frac{3}{5}$ é menor que $\frac{2}{3}$, argumentando sobre unidades e magnitudes.
Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK)	**Conhecimento das Características da Aprendizagem da Matemática (KFLM)**	Antecipar que alunos podem comparar frações apenas pelos numeradores e planejar intervenções adequadas.
	Conhecimento dos Processos de Ensino da Matemática (KMT)	Selecionar problemas que exijam comparação de frações não equivalentes para promover o raciocínio proporcional.
	Conhecimento das Normas e Princípios Matemáticos do Ensino e da Aprendizagem (KPMT)	Valorizar o erro como parte do processo de aprendizagem e estimular o diálogo e a argumentação.
Núcleo Integrador	**Significado do Conhecimento Matemático**	Justificar por que se pode multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número ao buscar frações equivalentes.

Fonte: elaborado pela autora

2.2.3 Contribuições do MTSK no ensino de frações

A adoção do MTSK como lente teórica nesta pesquisa tem como foco a análise o conhecimento docente em sua complexidade, considerando tanto a dimensão matemática quanto a pedagógica. No ensino de frações, o modelo auxilia a compreender: (a) como o professor organiza o conhecimento matemático (KoT, KSM, KPM); (b) como identifica e intervém nas dificuldades dos alunos (KFLM); e (c) como planeja e conduz o ensino de forma reflexiva (KMT e KPMT).

A Resolução de Problemas emerge, nesse contexto, como uma prática que revela e desenvolve o conhecimento especializado do professor de Matemática. Ao propor e discutir problemas sobre equivalência, comparação e ordenação de frações, são mobilizadas diferentes dimensões do MTSK, favorecendo o raciocínio dos alunos e refinando sua própria compreensão sobre o conteúdo.

O modelo MTSK oferece um arcabouço teórico abrangente e articulado, capaz de iluminar o modo como o professor constrói, mobiliza e transforma o conhecimento necessário à sua prática. Sua estrutura permite reconhecer que o ensino eficaz de matemática depende não apenas do domínio de algoritmos e procedimentos, mas de um conhecimento profundo, reflexivo e situado, que integra saberes matemáticos, pedagógicos e epistemológicos. Além de sua estrutura conceitual robusta, é útil como ferramenta analítica para investigar o conhecimento docente, apoiar programas de formação inicial e continuada e orientar práticas de ensino que integrem aspectos teóricos, didáticos e epistemológicos da matemática escolar. Sua proposta representa um avanço relevante ao reconhecer a natureza especializada do conhecimento do professor de matemática, distinguindo-o do conhecimento do matemático acadêmico.

No contexto do ensino de frações, compreender e aplicar os princípios do MTSK possibilita ao professor transcender a dimensão operacional do conteúdo, promovendo aprendizagens significativas e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

3 CONTEXTO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta Seção são apresentados o contexto e os procedimentos metodológicos adotados no presente estudo, o qual, em linhas gerais, foi desenvolvido em dois momentos complementares. No primeiro, foi aplicada uma sequência didática a alunos do sexto ano do ensino fundamental, com o objetivo de observar em que medida a metodologia de resolução de problemas poderia contribuir para a aprendizagem de frações. No segundo momento, foi proposta uma tarefa a alunos do quarto ano da Licenciatura em Matemática (futuros professores), com o intuito de identificar quais conhecimentos precisariam ser mobilizados para elaborar problemas no contexto daquela sequência didática.

Os dois momentos da investigação articulam-se de forma complementar. A análise da sequência didática aplicada aos alunos do ensino fundamental revelou desafios relacionados à elaboração de problemas, o que motivou a segunda etapa, voltada à compreensão dos conhecimentos que futuros professores precisam mobilizar ao planejar atividades dessa natureza. Essa relação entre a prática de ensino e a formação docente conferiu à pesquisa um caráter reflexivo.

Nesse cenário, a presente investigação caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo e descritivo, com características aplicadas e exploratórias. Segundo Bogdan e Biklen (1991), a pesquisa qualitativa busca compreender os fenômenos em seu contexto natural, valorizando os significados atribuídos pelos participantes às suas ações e experiências. Nesta perspectiva interpretativa, o pesquisador procura compreender as múltiplas realidades construídas socialmente, interessando-se mais pelo processo do que pelo produto, e pelo significado das ações mais do que por sua frequência.

A pesquisa qualitativa, conforme indicam Lüdke e André (Lüdke; André, 1986), permite compreender a totalidade de uma situação, considerando as percepções, intenções e interações dos sujeitos, o que possibilita interpretar a realidade de modo contextualizado. Assim, a escolha dessa abordagem justifica-se pela natureza do objeto de estudo, que envolve compreender os conhecimentos e significados atribuídos pelos sujeitos em situações reais de ensino e formação.

O primeiro momento do estudo teve caráter descritivo e interpretativo, uma vez que o foco esteve na observação e compreensão do processo de aprendizagem e das estratégias empregadas pelos estudantes diante das situações propostas. Já a segunda etapa assumiu um caráter exploratório, voltado à compreensão dos saberes docentes em formação e das relações entre o conhecimento matemático e o pedagógico do conteúdo. Dessa forma, esta investigação prioriza o significado das experiências e perspectivas dos participantes, valorizando o processo mais do que os resultados, em consonância com a perspectiva qualitativa de Bogdan e Biklen (Bogdan; Biklen, 1991, p.49), que defendem que o essencial é compreender "como as pessoas dão sentido às suas vidas, experiências e estruturas do mundo social".

3.1 CONSIDERANDO A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA

A presente etapa da pesquisa foi realizada na escola estadual de ensino fundamental e médio, Dr José Fóz, situada no município de Presidente Prudente, interior do estado de São Paulo, envolvendo alunos do sexto ano, com idades compreendidas entre 11 e 12 anos. A turma, composta por 35 estudantes, integra o ciclo de consolidação do ensino fundamental, período no qual os alunos revisitam e ampliam os conceitos relacionados às frações, iniciando seu estudo formal. A seleção dessa turma e da referida instituição fundamentou-se em critérios de acessibilidade e relevância pedagógica, considerando-se que a pesquisadora possuía vínculo pré-existente com a escola, o que possibilitou maior facilidade no planejamento e no acompanhamento das atividades. A participação dos alunos contou com a devida autorização da direção escolar, assegurando-se, assim, a proteção dos direitos de imagem e a observância das normas éticas pertinentes à pesquisa educacional.

As habilidades e os objetos de conhecimento apresentados no Quadro 2 referem-se aos conteúdos que, teoricamente, deveriam ter sido desenvolvidos por esses alunos ao longo dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Tais informações foram extraídas do documento Escopo Sequência, que serve como referência curricular oficial do município

Quadro 2 – Habilidades da BNCC relacionadas às frações e seus objetos do conhecimento

Habilidade (BNCC)	**Objeto do Conhecimento**
(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.	Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica.
(EF05MA04A) Identificar diferentes escritas nas representações fracionária e decimal com apoio em representações gráficas, reconhecendo frações equivalentes.	Comparação e ordenação de números racionais nas representações fracionária e decimal, utilizando a noção de equivalência.
(EF05MA04B) Produzir diferentes escritas nas representações fracionária e decimal com apoio em representações gráficas, identificando frações equivalentes.	Comparação e ordenação de números racionais nas representações fracionária e decimal, utilizando a noção de equivalência.
(EF04MA09A) Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$,$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$) como unidades de medida menores que 1, utilizando a reta numérica como recurso.	Números racionais: frações unitárias ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$,$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$).
(EF04MA09B) Ler números racionais de uso frequente nas representações fracionária e decimal.	Números racionais: leitura e interpretação de frações unitárias e decimais.
(EF05MA06) Associar as representações $10\%, 25\%, 50\%, 75\%, 100\%$ às frações correspondentes $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e um inteiro, para calcular porcentagens em diferentes contextos.	Cálculo de porcentagens e sua relação com representações fracionárias.
(EF05MA04A) Identificar diferentes escritas nas representações fracionária e decimal com apoio em representações gráficas, identificando frações equivalentes.	Comparação e ordenação de números racionais nas representações fracionária e decimal.
(EF05MA04B) Produzir diferentes escritas nas representações fracionária e decimal com apoio em representações gráficas, identificando frações equivalentes.	Comparação e ordenação de números racionais nas representações fracionária e decimal.

Fonte: elaborado pela autora

No que se segue estão descritas as atividades desenvolvidas e os problemas geradores.

A aplicação da sequência didática ocorreu em horário regular da disciplina e foi planejada e conduzida pela pesquisadora, que é professora regente da turma. O plano de aula previa a duração de 3 aulas com 50 minutos cada, sendo que cada aula deveria ter início com a exposição de problemas geradores, apresentados antes da introdução formal do conteúdo matemático. Nesse momento, os alunos foram incentivados a mobilizar seus saberes anteriores e a discutir suas ideias em pequenos grupos. A cronologia das atividades teve como base a metodologia de resolução de problemas, proposta por Onuchic et al.(2021), os quais defendem que o processo de aprendizagem tem início com a apresentação de uma situação-problema que estimule o estudante a recorrer aos seus conhecimentos prévios na busca de uma solução

Em prosseguimento, as diferentes estratégias de resolução foram socializadas no coletivo da turma, o que possibilitou a construção colaborativa de significados, mesmo sem a definição imediata de uma resposta única. Como destacam Onuchic et al. (Onuchic et al., 2021, p.42), "não se espera que o aluno encontre, necessariamente, a solução correta, mas que se envolva com a situação, que argumente, que discuta com os colegas, que proponha caminhos".

Na sequência, foi apresentado o conteúdo matemático relacionado aos problemas inicialmente propostos, possibilitando aos alunos a comparação entre as definições formais e aquelas previamente construídas por eles próprios. A formalização dos conceitos foi realizada por meio de slides projetados na televisão da sala de aula, o que permitiu o acompanhamento coletivo. Ademais, os estudantes também dispunham desse material em versão impressa, o que favoreceu tanto o estudo individual, quanto a retomada dos conceitos discutidos.

Por fim, os estudantes foram instigados a resolver novas situações-problema com base no conhecimento recém-adquirido, como forma de consolidar o aprendizado e refletir sobre os processos envolvidos, em consonância com a perspectiva de que "resolver problemas é mais do que aplicar técnicas; é um processo que exige compreensão, tomada de decisão e reflexão"(Onuchic et al., 2021, p.55).

A utilização de problemas geradores na metodologia de resolução de problemas constitui uma estratégia didático-pedagógica que visa à promoção de uma aprendizagem ativa, significativa e contextualizada. O problema gerador é concebido como uma situação desafiadora, real e relevante para o contexto sociocultural dos estudantes, que serve de ponto de partida para a construção coletiva do conhecimento.

No campo da Educação Matemática, autores como Onuchic e Allevato (Onuchic et al., 2021) enfatizam o papel central dos problemas geradores como elementos mobilizadores do processo de ensino e aprendizagem. Para esses autores, a aprendizagem matemática ocorre de maneira mais efetiva quando o estudante é colocado diante de situações que exigem reflexão, tomada de decisão, formulação de hipóteses e argumentação. Os problemas, nesse contexto, não são meros exercícios para aplicação de procedimentos, mas elementos estruturantes da prática pedagógica, capazes de articular conteúdos matemáticos com saberes oriundos da experiência cotidiana.

A proposta de trabalhar com problemas geradores alinha-se aos princípios da metodologia de resolução de problemas, na qual o processo de resolução torna-se o eixo em torno do qual se desenvolvem as atividades didáticas. Essa metodologia reconhece o erro como parte constitutiva da aprendizagem, valoriza o percurso de construção das soluções e estimula o trabalho colaborativo, a autonomia e o pensamento crítico dos estudantes (Onuchic et al., 2021). Além disso, os problemas geradores devem apresentar algumas características específicas para que cumpram sua função pedagógica: devem ser contextualizados, desafiadores, abertos ou semiabertos, e permitir múltiplas estratégias de abordagem e resolução. Ao serem propostos, provocam o interesse dos estudantes e instigam a formulação de perguntas, a busca por informações adicionais e a conexão entre diferentes áreas do conhecimento, promovendo, assim, uma aprendizagem interdisciplinar.

Assim, a utilização de problemas geradores no ensino de Matemática não apenas favorece o desenvolvimento de competências matemáticas, mas também contribui para uma formação crítica e cidadã, uma vez que articula o conhecimento escolar com questões concretas do mundo social. Tal abordagem, portanto, reforça a dimensão transformadora da educação, ao envolver os estudantes em processos significativos de investigação e construção do saber.

Os problemas geradores utilizados na sequência didática estão apresentados a seguir.

> Problema 1: As irmãs Paula e Rebeca estavam jantando e cada uma tinha sua própria pizza brotinho. Paula cortou a pizza dela em 4 pedaços iguais e comeu 2 pedaços. Já Rebeca cortou a pizza dela em 2 pedaços iguais e comeu apenas 1 pedaço. Quem comeu uma maior quantidade de pizza?
>
> Problema 2: Ana e Beatriz, duas eletricistas, estão instalando sistemas de iluminação em dois prédios com a mesma quantidade de lâmpadas. A Ana já instalou$\frac{2}{3}$ das lâmpadas do primeiro prédio, enquanto Beatriz instalou $\frac{3}{6}$ das lâmpadas no segundo prédio. Quem instalou a maior quantidade de lâmpadas?
>
> Problema 3: Imagine que você e seus amigos estão organizando uma trilha ecológica e precisam marcar pontos de descanso ao longo do percurso. O trajeto tem 1 km de extensão e vocês decidiram dividir a trilha em frações iguais para definir os pontos de parada.
>
> 1 Se vocês decidirem parar a cada $\frac{1}{4}$ do percurso, em quais pontos da trilha estarão os locais de descanso?
>
> 2 Se um dos pontos de hidratação estiver em $\frac{3}{5}$ do caminho, onde ele estará em relação ao início?
>
> 3 Se tivermos um ponto marcado em $\frac{7}{8}$ do percurso, ele está mais próximo do início ou do final da trilha?
>
> Use uma reta numérica para representar esses pontos e ajudar na visualização.

3.2 CONSIDERANDO A TAREFA APLICADA AOS FUTUROS PROFESSORES

A pesquisa foi desenvolvida com 12 (doze) licenciandos do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática da Unesp - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Câmpus de Presidente Prudente. Os participantes, com idades entre 21 e 26 anos, já haviam cursado disciplinas voltadas à formação didático-pedagógica, como Fundamentos da Educação, Laboratório de Ensino de Matemática I e Estágio Supervisionado I e II. A maioria é oriunda de escolas públicas e tem histórico de atuação como bolsista em programas de iniciação à docência, o que favorece o diálogo entre a formação teórica e a prática escolar. A atividade foi aplicada no contexto de uma das disciplinas do primeiro semestre do ano, durante um encontro regular, de forma individual e escrita, sendo coletada para análise posterior, preservando-se o anonimato dos participantes, identificados apenas como L1 a L12. Além disso, serão usadas ambas as nominações, licenciandos ou futuros professores, em referência aos participantes.

A tarefa foi estruturada em duas partes e construída de modo a envolver a sequência didática aplicada aos alunos do ensino fundamental, de modo a viabilizar uma discussão que estabeleça a correlação entre a teoria e a prática docente na formação inicial, de modo que os licenciandos pudessem refletir sobre como os referenciais teóricos sobre o conhecimento do professor de Matemática se materializam nas situações reais de ensino (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2019). A construção da tarefa e posterior análise dos resultados foram inspirados na tese de Gibim (Gibim, 2024).

Na Parte 1, conforme Quadro 3, são apresentadas três afirmações sobre comparação de frações, que seriam para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Quadro 3 – Tarefa: Parte 1

Tarefa: Frações Equivalentes e Comparação de Frações

Parte 1

Considere:

a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

b) $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$

c) $\frac{5}{10} > \frac{2}{5}$

Tarefa: Mostre que as afirmações são verdadeiras e explique o processo.

1) Sobre as expressões:

i) Resolva a tarefa.

ii) Represente cada expressão de duas maneiras.

iii) Indique possíveis dificuldades dos alunos.

iv) Descreva como ensinaria o conteúdo.

2) Crie um problema cuja resolução envolva cada expressão.

Fonte: elaborado pela autora

A partir daí, é solicitado que os participantes resolvam a tarefa, mostrando a veracidade das expressões (item i) e explicando o processo utilizado. Em seguida são levantadas questões que envolvem a prática do futuro professor de matemática (itens ii a iv). Além disso, os participantes devem formular um problema (item 2), cuja resolução implique cada uma das expressões.

A "Tarefa para o aluno", na Parte 1, teve como objetivo levantar o conhecimento dos futuros professores sobre equivalência e comparação de frações (redução à um mesmo denominador, invariância da razão, clareza sobre o papel da unidade de referência). No item 1) questão i) o participante poderia revelar qual (is) procedimento (s) usou para comparar as frações. No caso de ter usado um algoritmo, deveria justificar. Por exemplo, tendo usado "multiplicação cruzada", deveria saber justificar este algoritmo. A questão ii) teve objetivo averiguar quais seriam as diferentes maneiras de representar cada expressão, por exemplo, através de registros aritméticos, algébricos, gráficos, pictogramas ou outros. A questão iii) solicitava que os participantes indicassem um conjunto de possíveis dificuldades específicas que os alunos podem revelar na resolução dessa tarefa. Essa questão foi incluída para que os futuros professores refletissem sobre seu conhecimento a respeito das dificuldades que os alunos podem ter ao resolver a tarefa, permitindo também, posteriormente, discussões de caráter formativo. Por último, a questão iv) buscou motivar os participantes a pensarem em como seria sua prática pedagógica quando do ensino deste conteúdo na escola básica, quais exemplos, procedimentos, recursos tecnológicos usariam. No item 2) a tarefa teve como finalidade investigar a capacidade dos professores (futuros) em elaborar pequenos problemas cuja resolução implicasse cada uma das afirmações da tarefa proposta para o aluno.

Na Parte 2, por sua vez, contém algumas produções reais (dos alunos que participaram da sequência didática) e outras simuladas. Em ambas as partes se buscou revelar os subdomínios do MTSK acionadas durante as resoluções.

A questão 1) apresenta produções de alunos, sobre as quais os futuros professores devem julgar a veracidade, na questão 2) item a), devem justificar o algoritmo utilizado pelo aluno, caso corretas. Esta parte complementa a anterior na medida em que evidencia elementos semelhantes àqueles investigados na Parte 1. No item b) os futuros professores foram convidados a oferecer devolutivas que orientem o aluno, valorizando o raciocínio apresentado e indicando caminhos que possam favorecer o avanço na construção de seu conhecimento matemático. No item 3) os futuros professores poderiam reformular os problemas apresentados anteriormente.

O Quadro 4, a seguir, mostra a Parte 2 da atividades aplicada aos futuros professores.

Quadro 4 – Tarefa: Parte 2

Tarefa: Frações Equivalentes e Comparação de Frações

Parte 2

1) A professora Márcia aplicou a Tarefa anterior nas suas turmas do 6º ano e obteve as seguintes produções por parte de alguns alunos:

Veja algumas respostas para o item a)

Alberto: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ porque $1 \times 4 = 2 \times 2$
Jorge: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ porque $\frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$

Veja algumas respostas para o item b)

Enzo: $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$ porque $5 > 3$
Gael: $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$ porque $5 \times 7 > 3 \times 7$

Veja uma resposta para o item c)

Jorge: $\frac{5}{10} > \frac{2}{5}$ porque $\frac{2}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{10}$ e $\frac{5}{10} > \frac{4}{10}$

a) Avalie cada resposta, indicando se é matematicamente correta e justificando.

b) Forneça um feedback construtivo para cada aluno.

2) O aluno José perguntou: "Professora, por que para resolver o item a) e o item b) eu preciso multiplicar em cruz?"

a) O que você responderia ao José?

b) Apresente uma representação para explicar.

3) Caso queira, reformule os problemas da Tarefa 1.

Fonte: elaborado pela autora

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DAS INFORMAÇÕES

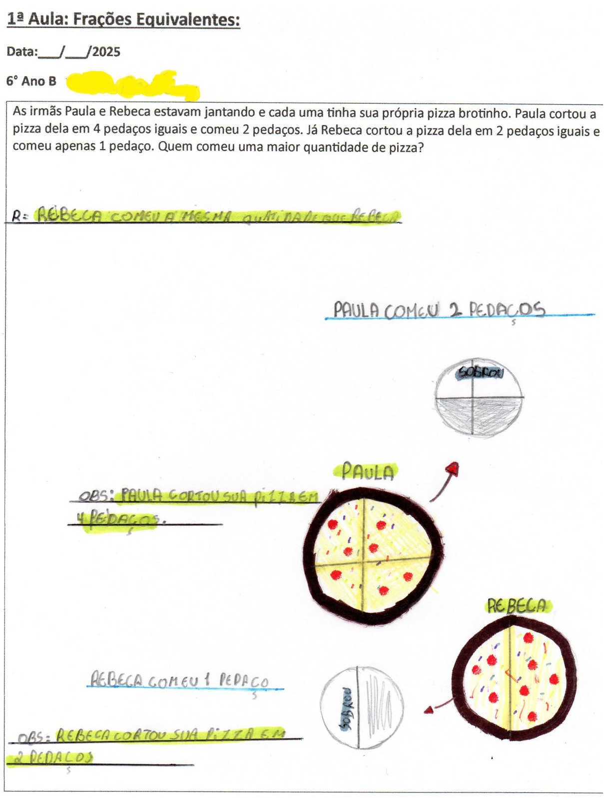
Nesta seção, são apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir da sequência didática proposta aos alunos do 6° ano e da tarefa aplicada aos futuros professores, evidenciando aprendizagens, percepções e impactos da intervenção pedagógica.

4.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA

A sequência didática foi estruturada em três aulas, cada uma delas com objetivos específicos. A primeira aula teve como propósito favorecer a compreensão da fração como representação de uma parte de um todo, enfatizando que um mesmo objeto pode ser subdividido em quantidade distintas de partes. Essa abordagem visou introduzir, gradualmente, o conceito de frações equivalentes

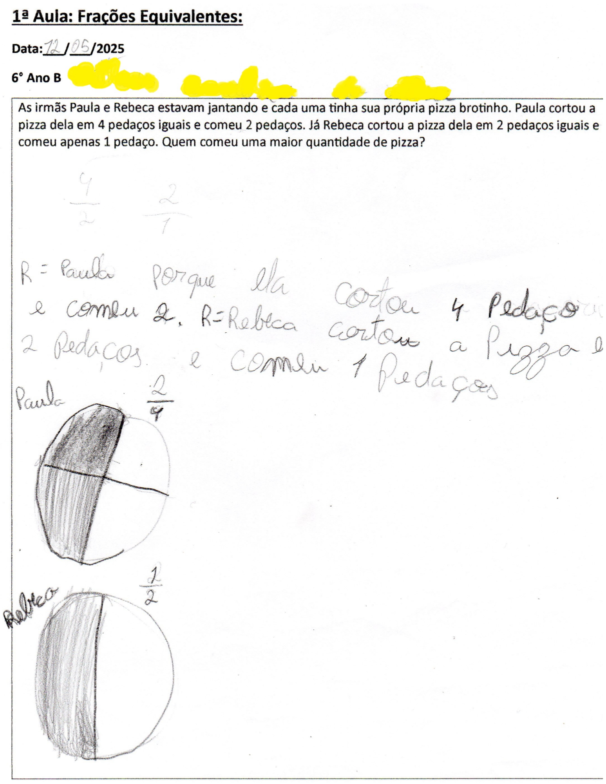
Na análise das respostas ao problema gerador, observou-se que os alunos que chegaram à solução correta o fizeram, em sua totalidade, por meio de representações pictóricas. Nenhum estudante utilizou o conceito de frações equivalentes em suas justificativas, limitando-se apenas ao uso de desenhos.

Figura 2 – Problema gerador realizado por um aluno



Além disso, constatou-se que a maior parte da turma afirmou que Paula havia consumido uma quantidade superior, justificando tal conclusão no fato de ela ter ingerido dois pedaços. Contudo, mesmo diante do uso de representações pictóricas, os estudantes não identificaram que ambas as personagens haviam ingerido quantidades equivalentes. Observou-se que alguns alunos não compreenderam plenamente a relação parte–todo, limitando-se ao número de pedaços consumidos por cada personagem, desconsiderando a quantidade de partes em que cada todo havia sido subdividido. Essa dificuldade, recorrente ao longo da minha trajetória docente, ainda se manifesta quando os estudantes chegam ao sexto ano, revelando que, nos anos anteriores, não houve compreensão consolidada do conceito de parte–todo, nem de que diferentes frações podem representar a mesma quantidade.

Figura 3 – Problema gerador realizado por um aluno



1ª Aula: Frações Equivalentes:

Data: 12/05/2025

6° Ano B [redacted]

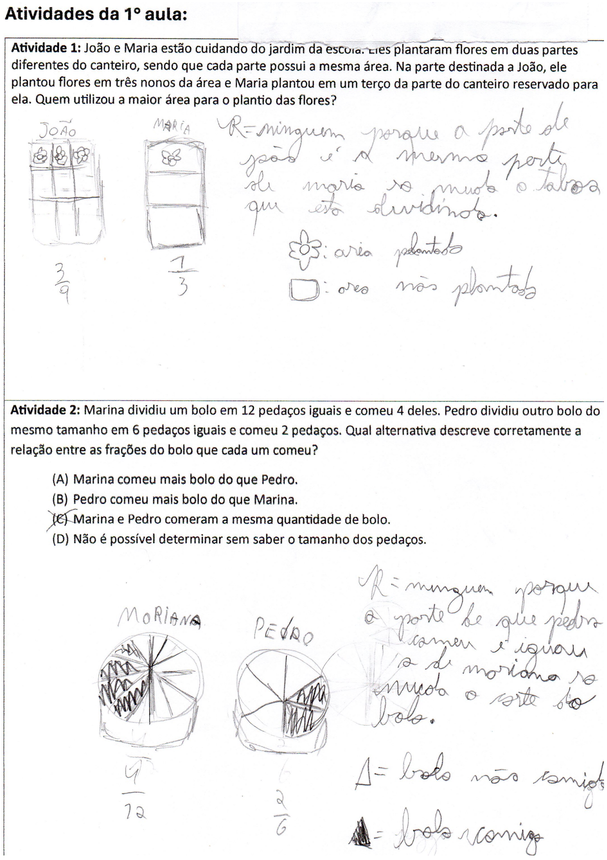
As irmãs Paula e Rebeca estavam jantando e cada uma tinha sua própria pizza brotinho. Paula cortou a pizza dela em 4 pedaços iguais e comeu 2 pedaços. Já Rebeca cortou a pizza dela em 2 pedaços iguais e comeu apenas 1 pedaço. Quem comeu uma maior quantidade de pizza?

$\frac{4}{2}$ $\frac{2}{1}$

R = Paula porque ela cortou 4 pedaço e comeu 2. R=Rebeca cortou a pizza e 2 pedaços e comeu 1 pedaços

Na análise da atividade realizada após a apresentação dos resultados dos estudantes e a subsequente formalização conceitual, constatou-se que a maioria deles demonstrou domínio na resolução das questões propostas. Verificou-se ainda, que alguns alunos recorreram à representação pictórica como estratégia de resolução, enquanto a maior parte utilizou a definição formal de frações equivalentes, conforme evidenciado nas figuras apresentadas a seguir.

Figura 4 – Atividade realizada por um aluno


Atividades da 1° aula:

Atividade 1: João e Maria estão cuidando do jardim da escola. Eles plantaram flores em duas partes diferentes do canteiro, sendo que cada parte possui a mesma área. Na parte destinada a João, ele plantou flores em três nonos da área e Maria plantou em um terço da parte do canteiro reservado para ela. Quem utilizou a maior área para o plantio das flores?

JOÃO MARIA

R= ninguem porque a parte de joão é a mesma parte de maria so muda o tabela que esta dividinda.

: aria plantada

: area não plantada

$\frac{3}{9}$ $\frac{1}{3}$

Atividade 2: Marina dividiu um bolo em 12 pedaços iguais e comeu 4 deles. Pedro dividiu outro bolo do mesmo tamanho em 6 pedaços iguais e comeu 2 pedaços. Qual alternativa descreve corretamente a relação entre as frações do bolo que cada um comeu?

(A) Marina comeu mais bolo do que Pedro.
(B) Pedro comeu mais bolo do que Marina.
(C) Marina e Pedro comeram a mesma quantidade de bolo.
(D) Não é possível determinar sem saber o tamanho dos pedaços.

MORIANA PEDRO

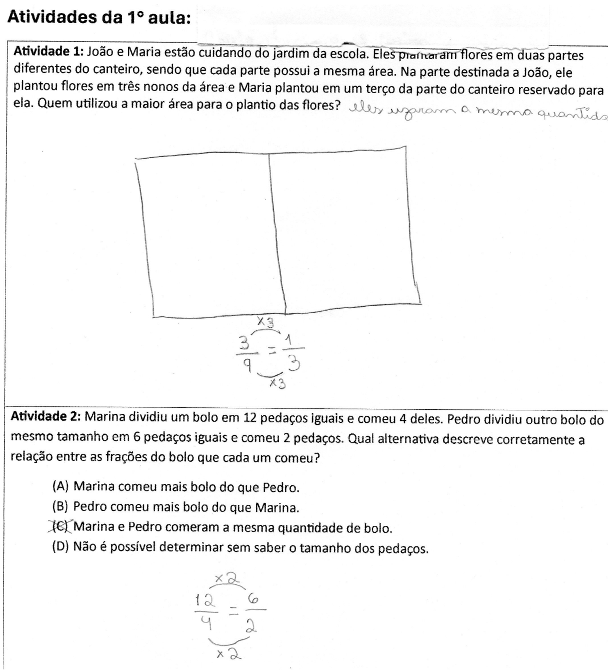
R= ninguem porque a parte de que pedro comeu é iguau a de moriana so muda o corte do bolo.

= bolo não comido

= bolo comido

$\frac{4}{12}$ $\frac{2}{6}$

Figura 5 – Atividade realizada por um aluno


Atividades da 1° aula:

Atividade 1: João e Maria estão cuidando do jardim da escola. Eles plantaram flores em duas partes diferentes do canteiro, sendo que cada parte possui a mesma área. Na parte destinada a João, ele plantou flores em três nonos da área e Maria plantou em um terço da parte do canteiro reservado para ela. Quem utilizou a maior área para o plantio das flores? eles usaram a mesma quantida

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad (\times 3)$$

Atividade 2: Marina dividiu um bolo em 12 pedaços iguais e comeu 4 deles. Pedro dividiu outro bolo do mesmo tamanho em 6 pedaços iguais e comeu 2 pedaços. Qual alternativa descreve corretamente a relação entre as frações do bolo que cada um comeu?

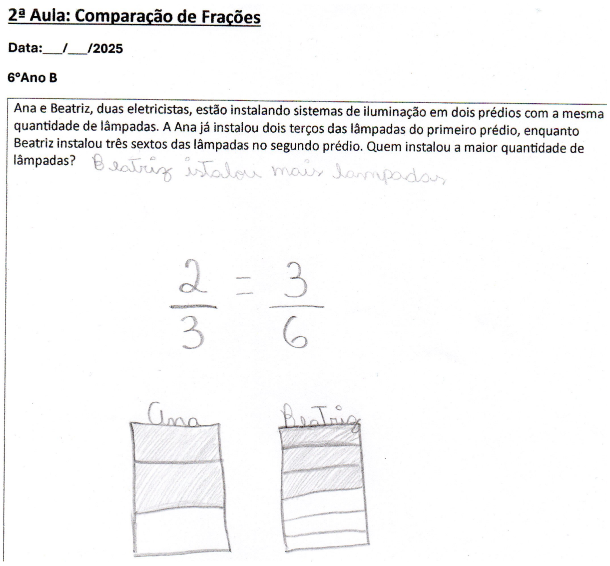
(A) Marina comeu mais bolo do que Pedro.
(B) Pedro comeu mais bolo do que Marina.
(C) Marina e Pedro comeram a mesma quantidade de bolo.
(D) Não é possível determinar sem saber o tamanho dos pedaços.

$$\frac{12}{4} = \frac{6}{2} \quad (\times 2)$$

A segunda aula teve como objetivo a comparação de frações com denominadores distintos, por meio de estratégias como a transformação em frações equivalentes e a análise visual das partes correspondentes. Ademais, buscou-se que os estudantes fossem capazes de resolver situações cotidianas envolvendo frações, justificando o raciocínio deles, bem como desenvolver habilidades argumentativas ao explicitar comparações entre quantidades consumidas.

Observou-se que os alunos apresentaram considerável dificuldade na resolução do problema gerador. A maioria optou por representações pictóricas, porém não conseguiu chegar a uma conclusão adequada. Os desenhos elaborados não apresentavam proporcionalidade, nem correspondiam à divisão correta proposta. Quando questionados acerca de suas respostas, os estudantes afirmaram que Beatriz havia instalado mais lâmpadas, justificando que ela instalara três, enquanto Ana instalara somente duas. Nota-se, portanto, que, mesmo após o estudo sobre frações equivalentes, os alunos demonstraram dificuldade em aplicar esse conhecimento ao novo conceito apresentado.

Figura 6 – Problema gerador realizado por um aluno


2ª Aula: Comparação de Frações

Data:__/__/2025

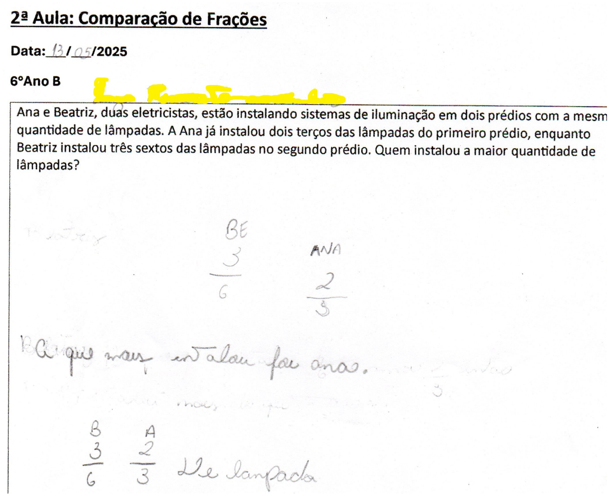
6ºAno B

Ana e Beatriz, duas eletricistas, estão instalando sistemas de iluminação em dois prédios com a mesma quantidade de lâmpadas. A Ana já instalou dois terços das lâmpadas do primeiro prédio, enquanto Beatriz instalou três sextos das lâmpadas no segundo prédio. Quem instalou a maior quantidade de lâmpadas? Beatriz instalou mais lampadas

$$\frac{2}{3} = \frac{3}{6}$$

Alguns alunos apresentaram a resposta correta, entretanto não forneceram justificativa para sua escolha. Quando questionados, alegaram que optaram por Ana, argumentando que Beatriz havia instalado apenas metade do total de lâmpadas, enquanto Ana instalou um pouco mais da metade. Essa resposta indica que os alunos conseguiram identificar a resposta correta, embora não tenham construído um raciocínio matemático explícito que fundamentasse sua decisão, o que evidencia uma compreensão apenas parcial do problema proposto.

Figura 7 – Problema gerador realizado por um aluno


2ª Aula: Comparação de Frações

Data: 13/05/2025

6ºAno B

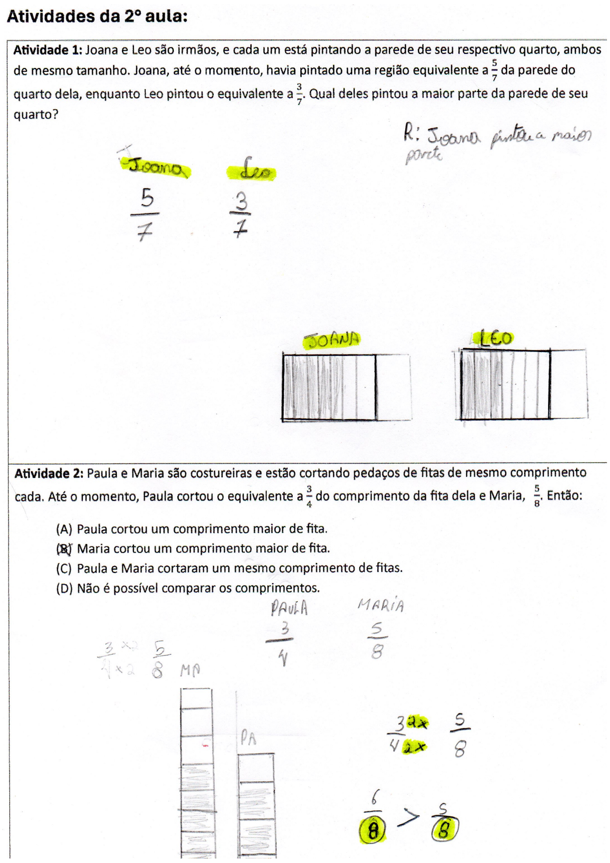
Ana e Beatriz, duas eletricistas, estão instalando sistemas de iluminação em dois prédios com a mesm quantidade de lâmpadas. A Ana já instalou dois terços das lâmpadas do primeiro prédio, enquanto Beatriz instalou três sextos das lâmpadas no segundo prédio. Quem instalou a maior quantidade de lâmpadas?

BE $\frac{3}{6}$ ANA $\frac{2}{3}$

B $\frac{3}{6}$ A $\frac{2}{3}$

De maneira geral, observou-se que os alunos apresentaram significativa dificuldade em compreender o conteúdo trabalhado, mesmo após sua formalização. A atividade foi aplicada subsequentemente à resolução do problema gerador, às discussões em sala de aula e à análise dos resultados apresentados pelos próprios estudantes.

Figura 8 – Atividade realizada por um aluno


Atividades da 2° aula:

Atividade 1: Joana e Leo são irmãos, e cada um está pintando a parede de seu respectivo quarto, ambos de mesmo tamanho. Joana, até o momento, havia pintado uma região equivalente a $\frac{5}{7}$ da parede do quarto dela, enquanto Leo pintou o equivalente a $\frac{3}{7}$. Qual deles pintou a maior parte da parede de seu quarto?

R: Joana pintou a maior parte

Joana $\frac{5}{7}$ Leo $\frac{3}{7}$

JOANA LEO

Atividade 2: Paula e Maria são costureiras e estão cortando pedaços de fitas de mesmo comprimento cada. Até o momento, Paula cortou o equivalente a $\frac{3}{4}$ do comprimento da fita dela e Maria, $\frac{5}{8}$. Então:

(A) Paula cortou um comprimento maior de fita.
(B) Maria cortou um comprimento maior de fita.
(C) Paula e Maria cortaram um mesmo comprimento de fitas.
(D) Não é possível comparar os comprimentos.

PAULA $\frac{3}{4}$ MARIA $\frac{5}{8}$

$\frac{3 \cdot 2x}{4 \cdot 2x}$ $\frac{5}{8}$

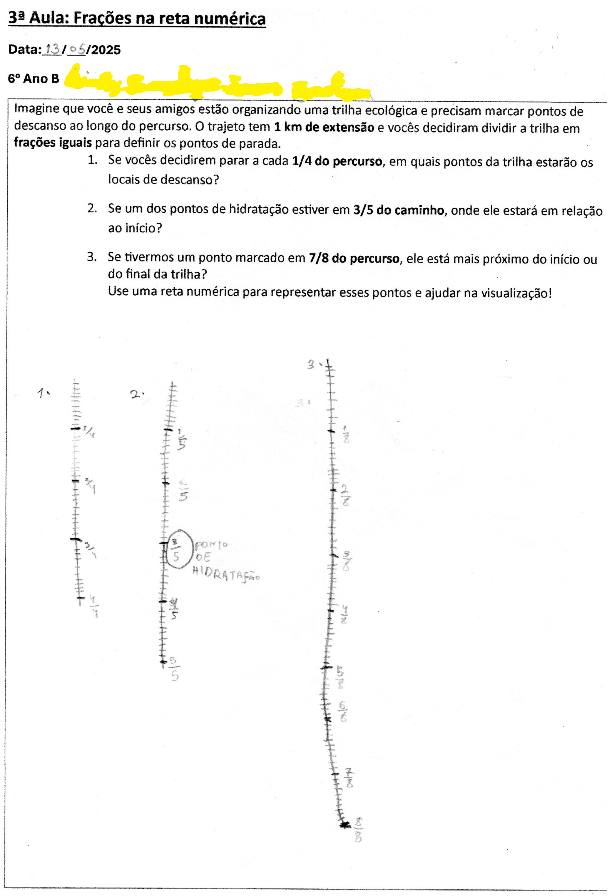
$\frac{6}{8} > \frac{5}{8}$

Apesar desse percurso pedagógico, muitos alunos continuaram a apresentar respostas equivocadas, concentrando-se exclusivamente no numerador das frações e desconsiderando a divisão do todo em partes proporcionais. Aqueles que buscaram resolver os problemas por meio de representações gráficas, inicialmente não obtiveram sucesso; entretanto, após reflexão e reavaliação das estratégias, foram capazes de recorrer ao conceito de frações equivalentes para comparar corretamente as frações, evidenciando avanço na compreensão conceitual e no raciocínio matemático.

A terceira aula teve como objetivos sistematizar a ordenação de frações, favorecer a construção da compreensão das frações enquanto partes de um todo, possibilitar a representação de frações em uma reta numérica e relacionar as frações de forma proporcional e sequencial, bem como promover o reconhecimento de frações equivalentes e sua articulação com contextos e situações práticas.

Na análise da resolução do problema gerador, observou-se que os alunos apresentaram dificuldades em compreender que se tratava de um mesmo percurso. Alguns construíram retas numéricas distintas para cada item proposto, em vez de representar todas as frações em uma única reta, evidenciando uma compreensão fragmentada do conceito de continuidade e proporcionalidade.

Figura 9 – Problema gerador realizado por um aluno



3ª Aula: Frações na reta numérica

Data: 13/05/2025

6º Ano B

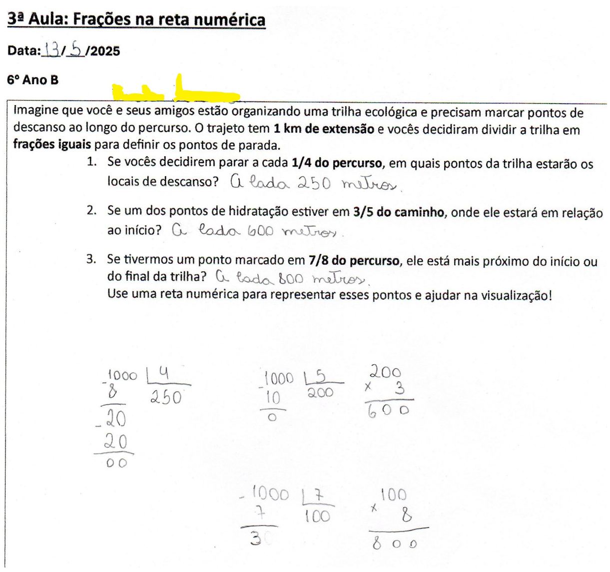
Imagine que você e seus amigos estão organizando uma trilha ecológica e precisam marcar pontos de descanso ao longo do percurso. O trajeto tem **1 km de extensão** e vocês decidiram dividir a trilha em **frações iguais** para definir os pontos de parada.

1. Se vocês decidirem parar a cada **1/4 do percurso**, em quais pontos da trilha estarão os locais de descanso?
2. Se um dos pontos de hidratação estiver em **3/5 do caminho**, onde ele estará em relação ao início?
3. Se tivermos um ponto marcado em **7/8 do percurso**, ele está mais próximo do início ou do final da trilha?
Use uma reta numérica para representar esses pontos e ajudar na visualização!

PONTO DE HIDRATAÇÃO

Além disso, observou-se que alguns alunos se concentraram em calcular as distâncias em metros, sem representá-las na reta numérica única. Esse comportamento indica dificuldade em relacionar as frações de forma proporcional e sequencial dentro de um mesmo percurso, o que evidencia a necessidade de desenvolver a compreensão da reta numérica como instrumento de representação contínua e integrada das grandezas fracionárias.

Figura 10 – Problema gerador realizado por um aluno



3ª Aula: Frações na reta numérica

Data: 13/5/2025

6º Ano B

Imagine que você e seus amigos estão organizando uma trilha ecológica e precisam marcar pontos de descanso ao longo do percurso. O trajeto tem **1 km de extensão** e vocês decidiram dividir a trilha em **frações iguais** para definir os pontos de parada.

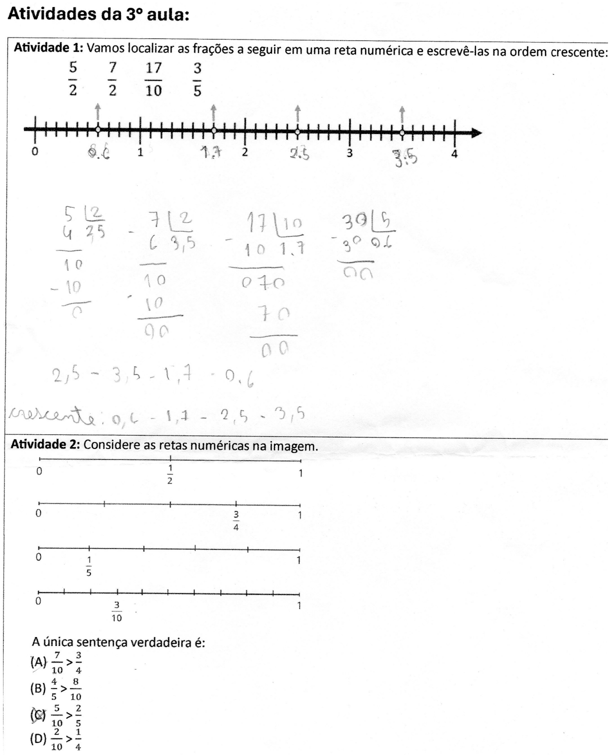
1. Se vocês decidirem parar a cada **1/4 do percurso**, em quais pontos da trilha estarão os locais de descanso? A cada 250 metros.
2. Se um dos pontos de hidratação estiver em **3/5 do caminho**, onde ele estará em relação ao início? A cada 600 metros.
3. Se tivermos um ponto marcado em **7/8 do percurso**, ele está mais próximo do início ou do final da trilha? A cada 800 metros.
   Use uma reta numérica para representar esses pontos e ajudar na visualização!

1000 ÷ 4 = 250; 1000 ÷ 5 = 200; 200 × 3 = 600; 1000 ÷ 7 = 100; 100 × 8 = 800

Após a formalização do conceito de localização de fração na reta numérica, observou-se que os alunos, durante a execução da atividade, apresentaram resultados utilizando a estratégia de divisão da parte pelo todo para efetuar a localização.

O procedimento observado não havia sido previamente abordado em aula, indicando que os estudantes ainda apresentam dificuldades tanto na identificação quanto no posicionamento preciso de elementos na reta numérica. Embora não correspondesse ao método esperado, recorreram a estratégias previamente aprendidas em momentos escolares anteriores, demonstrando a necessidade de intervenções pedagógicas que promovam a consolidação do conceito e o desenvolvimento de estratégias mais eficazes de localização

Figura 11 – Atividade realizada por um aluno



A análise das respostas dadas às atividades propóstas reforçam a importância do uso de problemas geradores e de atividades concretas no ensino de frações. Tais práticas estimulam a reflexão, a análise crítica dos procedimentos e a aplicação de diferentes estratégias de resolução, contribuindo para a construção de significados mais sólidos e duradouros, bem como para o fortalecimento do entendimento conceitual e da capacidade de aplicação prática do conhecimento matemático.

4.2 TAREFA APLICADA AOS FUTUROS PROFESSORES

A análise das produções dos licenciandos, relativa a atividade proposta levou em consideração os tipos de soluções e as justificativas apresentadas, na busca de evidências dos seus conhecimentos em relação ao ensino de frações equivalentes e comparação de frações, tendo como base teórica nos subdomínios que compõem o MTSK. Constatou-se que os futuros professores manifestaram dificuldades semelhantes às identificadas entre os alunos durante a execução das atividades. A partir da leitura dos registros (L1 a L12), as respostas ao Item 1), subitens i) e ii) (página 32), foram agrupadas em 4 (quatro) categorias de análise, de acordo com as estratégias utilizadas e com as representações mobilizadas.

1. Procedimental com base em simplificação ou divisão: os participantes utilizaram algoritmos de simplificação ou divisão (transformando a fração em decimal) para justificar

as igualdades e desigualdades. Dentre as características observados temos o enfoque no cálculo e as justificativas centradas na execução do procedimento, sem explicitar o significado da equivalência ou da comparação. (Participantes L2, L4, L5, L6, L7, L10, L11, L12).

2. Representacional pictórica coerente: Empregaram desenhos (pizzas, retângulos ou retas numéricas) mantendo a unidade de referência. Foi possível observar a compreensão intuitiva de parte-todo e o reconhecimento visual da equivalência e a comparação, ainda que sem formalização conceitual. (Participantes: L1, L4, L7, L9, L10, L11 e L12).

3. Representações híbridas (simbólica e pictórica): os participantes integraram desenhos, frações equivalentes e cálculos, transitando entre registros. Demonstram avanço em flexibilidade representacional através das tentativas de justificar com mais de um registro (Participantes L4, L7, L8, L10 e L11).

4. Dificuldade conceitual na relação numerador/denominador e no todo de referência: Demonstraram confusão quanto à unidade ou compararam numeradores e denominadores isoladamente. Observa-se uma compreensão fragmentada da estrutura da fração, evidenciando necessidade de fortalecimento conceitual. (Participantes L4, L5, L9, L11 e L12).

Vale observar que as categorias se sobrepõem nas produções, em se considerando a afirmação a), b) ou c) analisadas. Por exemplo, o participante L4 usa representação pictográfica correta para justificar que $\frac{5}{7}> \frac{3}{7}$, e, usa divisão para justificar que $\frac{5}{10} >\frac{2}{5}$. A dificuldade recorrente na comparação de frações com denominadores diferentes (expressão c) $\frac{5}{10} >\frac{2}{5}$ foi um ponto comum em quase todas as categorias.

A análise das respostas e as discussões evidenciam diferentes níveis de mobilização dos subdomínios do MTSK. Considerando o reconhecimento da equivalência $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, a maioria dos participantes demonstrou domínio procedimental ao aplicar a simplificação de frações, mas poucos evidenciaram o raciocínio conceitual da invariância da razão, isto é, o reconhecimento de que frações equivalentes mantêm constante a relação entre numerador e denominador. Essa limitação evidencia uma compreensão parcial do KoT, centrada na execução de algoritmos, e uma fragilidade no KSM, que envolve compreender as estruturas e relações internas da Matemática (Carrilo et al., 2018). Não se trata de "aumentar o numerador e o denominador" de modo independente, mas sim de manter constante a relação entre eles.

Segundo Lamon (Lamon, 2007), esse é um marco cognitivo importante: crianças (e muitos licenciandos) tendem a pensar operativamente ("dois quartos é maior porque tem 2 e não 1") antes de compreender estruturalmente ("dois quartos e um meio são iguais porque dobrar as partes dobra também as frações"). Segundo os autores, a equivalência de frações requer coordenação de significados e a percepção da proporcionalidade entre partes e todo, superando a visão de fração apenas como dois números naturais.

Ao comparar frações com mesmo denominador ($\frac{5}{7}$ > $\frac{3}{7}$), predominou o argumento baseado na comparação direta dos numeradores, sem explicitação da relação entre o número de partes e o todo. Essa postura revela domínio parcial do KoT, limitado ao uso de regras, e uma mobilização incipiente do KPM, pois as justificativas não envolveram argumentação conceitual ou representações múltiplas. De acordo Nunes e Bryant (Nunes; Bryant, 1996), compreender a comparação de frações implica reconhecer que o tamanho das partes deve permanecer constante, o que requer coordenação entre o raciocínio numérico e o significado da unidade. Para os autores, o desenvolvimento do raciocínio quantitativo é fundamental para entender frações, pois envolve distinguir entre quantidades, relações e números. O ensino tradicional enfatiza o significado analítico dos números, mas frequentemente negligencia o raciocínio quantitativo, que é essencial para compreender que frações representam partes de uma unidade e que a comparação só é válida se as unidades forem equivalentes.

Paralelamente, a situação de maior dificuldade ocorreu quando da comparação com denominadores diferentes ($\frac{5}{10}$ > $\frac{2}{5}$). Alguns licenciandos recorreram à conversão para frações equivalentes ou decimais, mas poucos conseguiram justificar conceitualmente o processo. Essa limitação indica lacuna no KSM, especialmente na articulação entre diferentes registros de representação (simbólico, pictórico e gráfico), e no KPM, ao não desenvolverem explicações baseadas em raciocínio proporcional. Conforme Nunes e Bryant (Nunes; Bryant, 1996), compreender frações com denominadores distintos exige reconhecer o papel da unidade comum e superar a tendência de comparar numeradores ou denominadores isoladamente.

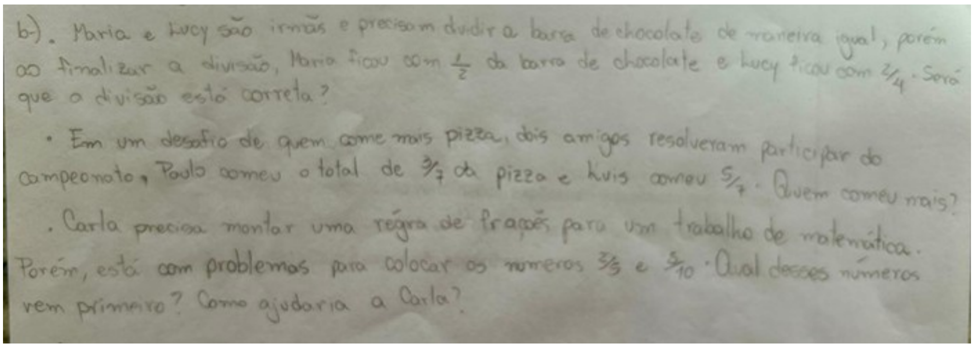
No que se refere à elaboração de problemas proposta no Item 2), esta etapa mostrou-se bastante desafiadora. A grande maioria dos participantes não deixou explícita a unidade de referência nos problemas propostos para pelo menos uma das expressões. No que segue são apresentadas contribuições de alguns dos participantes, inicialmente dispostas em quadros contendo os problemas associados às expressões específicas, seguidos da versão original da tarefa.

Quadro 5 – Problemas elaborados pelo Licenciando L4

Expressão	**Problema elaborado pelo licenciando**
a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$	Maria e Lucy são irmãs e precisam dividir a barra de chocolate de maneira igual. Porém, ao finalizar a divisão, Maria ficou com $\frac{1}{2}$ da barra de chocolate e Lucy ficou com $\frac{2}{4}$. Será que a divisão está correta?
b) $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$	Em um desafio de quem come mais pizza, dois amigos resolveram participar do campeonato. Paulo comeu o total de $\frac{3}{7}$ da pizza e Luís comeu $\frac{5}{7}$. Quem comeu mais?
c) $\frac{5}{10} > \frac{2}{5}$	Carla precisa montar uma régua de frações para um trabalho de matemática. Porém, está com problemas para colocar os números $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{10}$. Qual desses números vem primeiro? Como ajudaria a Carla?

Fonte: elaborado pela autora

Figura 12 – Produção escrita do participante L4



b-). Maria e Lucy são irmãs e precisam dividir a barra de chocolate de maneira igual, porém ao finalizar a divisão, Maria ficou com $\frac{1}{2}$ da barra de chocolate e Lucy ficou com $2/4$. Será que a divisão está correta?

• Em um desafio de quem come mais pizza, dois amigos resolveram participar do campeonato, Paulo comeu o total de $3/7$ da pizza e Luis comeu $5/7$. Quem comeu mais?

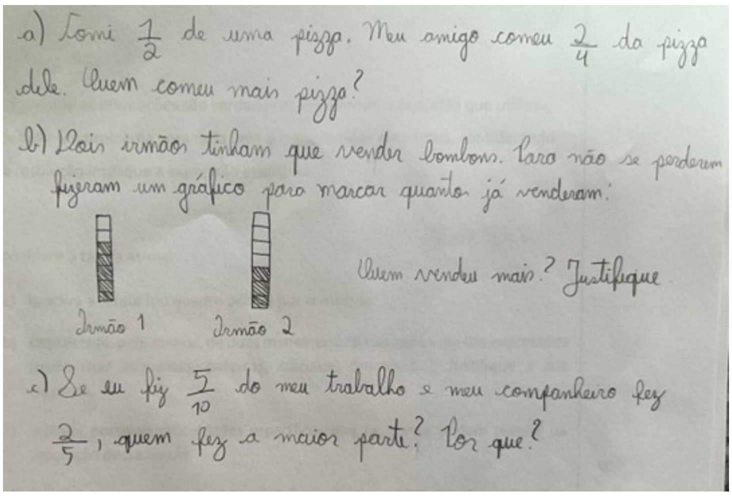
. Carla precisa montar uma regra de frações para um trabalho de matemática. Porém, está com problemas para colocar os numeros $3/5$ e $5/10$. Qual desses números vem primeiro? Como ajudaria a Carla?

Quadro 6 – Problemas elaborados pelos licenciando L6

Expressão	**Problema elaborado pelo licenciando**
a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$	Comi $\frac{1}{2}$ de uma pizza. Meu amigo comeu $\frac{2}{4}$ da pizza dele. Quem comeu mais pizza?
b) $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$	Dois irmãos tinham que vender bombons. Para não se perderem, fizeram um gráfico para marcar quanto já venderam. *(Representação pictórica com dois retângulos: Irmão 1 e Irmão 2, ambos parcialmente coloridos).* Quem vendeu mais? Justifique.
c) $\frac{5}{10} > \frac{2}{5}$	Se eu fiz $\frac{5}{10}$ do meu trabalho e meu companheiro fez $\frac{2}{5}$, quem fez a maior parte? Por quê?

Fonte: elaborado pela autora

Figura 13 – Produção escrita do participante L6



a) Comi $\frac{1}{2}$ de uma pizza. Meu amigo comeu $\frac{2}{4}$ da pizza dele. Quem comeu mais pizza?

b) Dois irmãos tinham que vender bombons. Para não se perderem fizeram um gráfico para marcar quanto já venderam.

Irmão 1 Irmão 2

Quem vendeu mais? Justifique

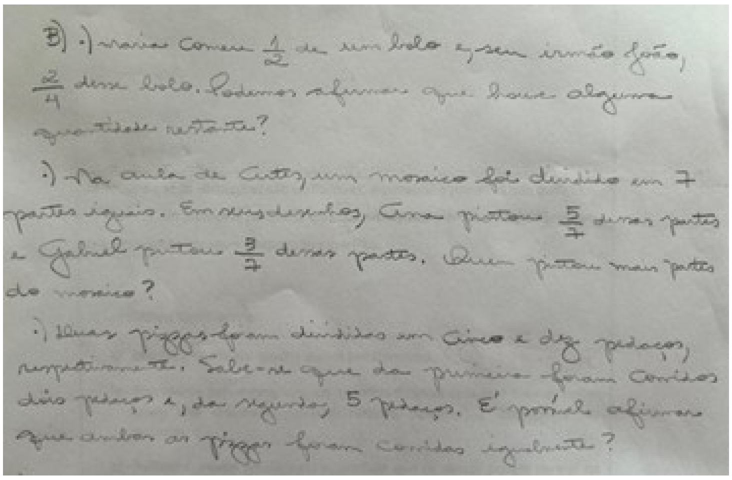
c) Se eu fiz $\frac{5}{10}$ do meu trabalho e meu companheiro fez $\frac{2}{5}$, quem fez a maior parte? Por que?

Quadro 7 – Problemas elaborados pelos licenciando L7

Expressão	**Problema elaborado pelo licenciando**
a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$	Maria comeu $\frac{1}{2}$ de um bolo e seu irmão João, $\frac{2}{4}$ desse bolo. Podemos afirmar que houve alguma quantidade restante?
b) $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$	Na aula de Artes, um mosaico foi dividido em 7 partes iguais. Em seus desenhos, Ana pintou $\frac{5}{7}$ dessas partes e Gabriel pintou $\frac{3}{7}$. Quem pintou mais partes do mosaico?
c) $\frac{5}{10} > \frac{2}{5}$	Duas pizzas foram divididas em cinco e dez pedaços, respectivamente. Sabe-se que da primeira foram comidos 2 pedaços e, da segunda, 5 pedaços. É possível afirmar que ambas as pizzas foram comidas igualmente?

Fonte: elaborado pela autora

Figura 14 – Produção escrita do participante L7


B) •) Maria comeu $\frac{1}{2}$ de um bolo e seu irmão João, $\frac{2}{4}$ desse bolo. Podemos afirmar que houve alguma quantidade restante?

•) Na aula de Artes, um mosaico foi dividido em 7 partes iguais. Em seus desenhos, Ana pintou $\frac{5}{7}$ dessas partes e Gabriel pintou $\frac{3}{7}$ dessas partes. Quem pintou mais partes do mosaico?

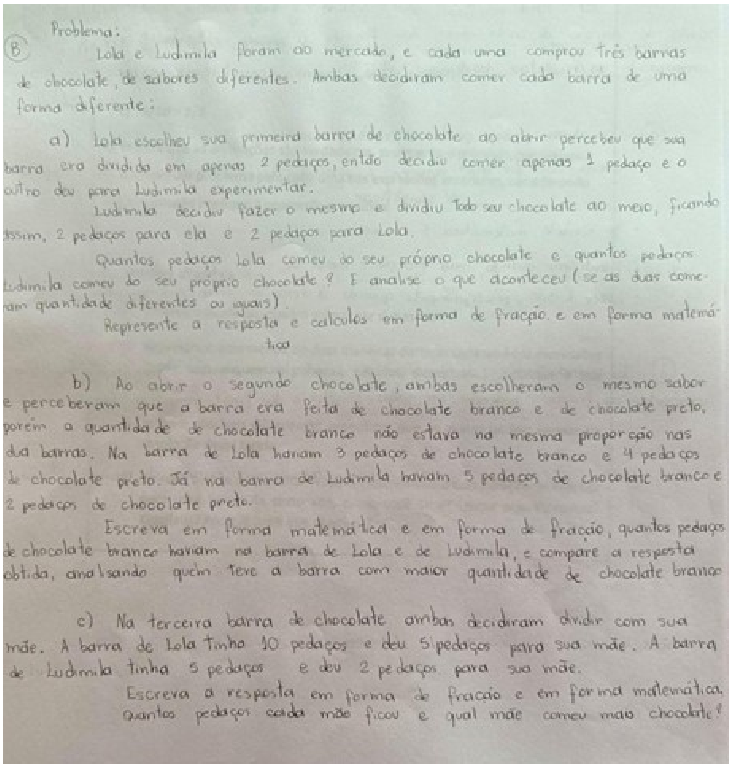
•) Duas pizzas foram divididas em cinco e dez pedaços, respectivamente. Sabe-se que da primeira foram comidos dois pedaços e, da segunda, 5 pedaços. É possível afirmar que ambas as pizzas foram comidas igualmente?

Quadro 8 – Problemas elaborados pelos licenciando L5

Expressão	**Problema elaborado pelo licenciando**
a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$	Lola e Ludmila foram ao mercado, e cada uma comprou três barras de chocolate. Lola abriu sua barra dividida em 2 pedaços e comeu 1, dando o outro para Ludmila. Ludmila dividiu sua barra ao meio, ficando com 2 pedaços e dando 2 para Lola. Quantos pedaços cada uma comeu do próprio chocolate? Represente em forma de fração e em forma matemática.
b) $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$	Na segunda barra, o sabor era o mesmo, mas a proporção de chocolate branco variava. Lola tinha 3 pedaços de chocolate branco e 4 de preto. Ludmila tinha 5 de branco e 2 de preto. Escreva as frações correspondentes e compare quem tinha mais chocolate branco.
c) $\frac{5}{10} > \frac{2}{9}$	Na terceira barra, ambas decidiram dividir com a mãe. Lola tinha 10 pedaços e deu 5 à mãe. Ludmila tinha 9 e deu 2 à mãe. Escreva as frações e indique qual mãe recebeu mais chocolate.

Fonte: elaborado pela autora

Figura 15 – Produção escrita do participante L5



Problema:

(8) Lola e Ludmila foram ao mercado, e cada uma comprou três barras de chocolate, de sabores diferentes. Ambas decidiram comer cada barra de uma forma diferente:

a) Lola escolheu sua primeira barra de chocolate ao abrir percebeu que sua barra era dividida em apenas 2 pedaços, então decidiu comer apenas 1 pedaço e o outro deu para Ludmila experimentar.

Ludmila decidiu fazer o mesmo e dividiu todo seu chocolate ao meio, ficando assim, 2 pedaços para ela e 2 pedaços para Lola.

Quantos pedaços Lola comeu do seu próprio chocolate e quantos pedaços Ludmila comeu do seu próprio chocolate? E analise o que aconteceu (se as duas comeram quantidade diferentes ou iguais).

Represente a resposta e calculos em forma de fração e em forma matemática

b) Ao abrir o segundo chocolate, ambas escolheram o mesmo sabor e perceberam que a barra era feita de chocolate branco e de chocolate preto, porém a quantidade de chocolate branco não estava na mesma proporção nas dua barras. Na barra de Lola haviam 3 pedaços de chocolate branco e 4 pedaços de chocolate preto. Já na barra de Ludmila haviam 5 pedaços de chocolate branco e 2 pedaços de chocolate preto.

Escreva em forma matemática e em forma de fração, quantos pedaços de chocolate branco haviam na barra de Lola e de Ludmila, e compare a resposta obtida, analisando quem teve a barra com maior quantidade de chocolate branco

c) Na terceira barra de chocolate ambas decidiram dividir com sua mãe. A barra de Lola tinha 10 pedaços e deu 5 pedaços para sua mãe. A barra de Ludmila tinha 5 pedaços e deu 2 pedaços para sua mãe.

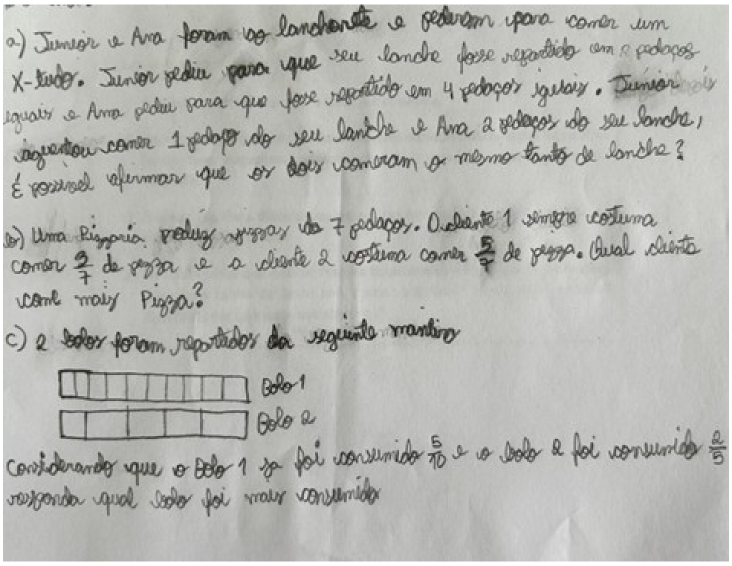
Escreva a resposta em forma de fração e em forma matemática, quantos pedaços cada mãe ficou e qual mãe comeu mais chocolate?

Quadro 9 – Problemas elaborados pelos licenciando L10

Expressão	**Problema elaborado pelo licenciando**
a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$	Júnior e Ana foram ao lanche e pediram para comer um X-tudo. Júnior pediu para que seu lanche fosse repartido em 2 pedaços iguais, e Ana pediu para que fosse repartido em 4 pedaços iguais. Júnior comeu 1 pedaço do seu lanche e Ana 2 pedaços do seu lanche. É possível afirmar que os dois comeram o mesmo tanto de lanche?
b) $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$	Uma pizzaria produz pizzas de 7 pedaços. O cliente 1 costuma comer $\frac{3}{7}$ da pizza e o cliente 2 costuma comer $\frac{5}{7}$. Qual cliente come mais pizza?
c) $\frac{5}{10} > \frac{2}{5}$	Dois bolos foram repartidos em partes iguais. Considerando que o bolo 1 já foi consumido $\frac{5}{10}$ e o bolo 2, $\frac{2}{5}$, qual bolo foi mais consumido? *(O licenciando representou os bolos com diagramas retangulares divididos em partes iguais.)*

Fonte: elaborado pela autora

Figura 16 – Produção escrita do participante L10


a) Junior e Ana foram na lanchonete e pediram para comer um X-tudo. Junior pediu para que seu lanche fosse repartido em 2 pedaços iguais e Ana pediu para que fosse repartido em 4 pedaços iguais. Junior aguentou comer 1 pedaço do seu lanche e Ana 2 pedaços do seu lanche, É possível afirmar que os dois comeram o mesmo tanto de lanche?

b) Uma Pizzaria produz pizzas de 7 pedaços. O cliente 1 sempre costuma comer $\frac{3}{7}$ de pizza e o cliente 2 costuma comer $\frac{5}{7}$ de pizza. Qual cliente come mais Pizza?

c) 2 bolos foram repartidos da seguinte maneira

Bolo 1

Bolo 2

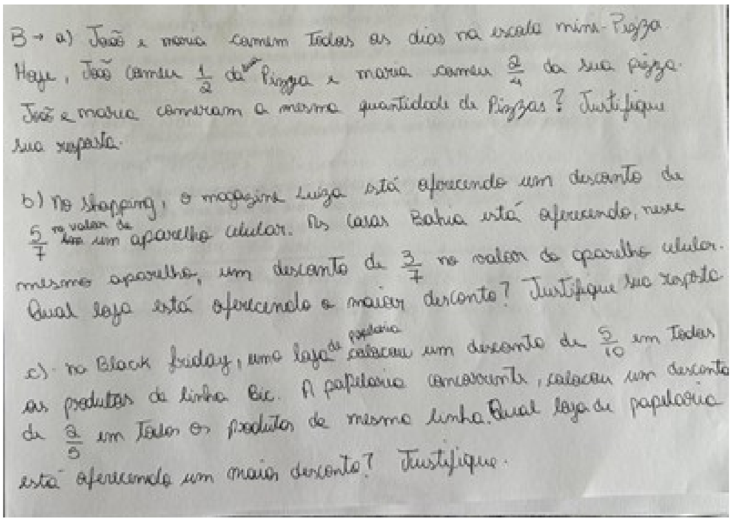
Considerando que o Bolo 1 já foi consumido $\frac{5}{10}$ e o bolo 2 foi consumido $\frac{2}{5}$ responda qual bolo foi mais consumido

Quadro 10 – Problemas elaborados pelos licenciando L11

Expressão	**Problema elaborado pelo licenciando**
a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$	João e Maria comem todos os dias na escola mini-pizza. Hoje, João comeu $\frac{1}{2}$ da sua pizza e Maria comeu $\frac{2}{4}$ da sua pizza. João e Maria comeram a mesma quantidade de pizzas? Justifique sua resposta.
b) $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$	No shopping, o Magazine Luiza está oferecendo um desconto de $\frac{5}{7}$ no valor de um aparelho celular. As Casas Bahia estão oferecendo, nesse mesmo aparelho, um desconto de $\frac{3}{7}$. Qual loja está oferecendo o maior desconto? Justifique sua resposta.
c) $\frac{5}{10} > \frac{2}{5}$	Na Black Friday, uma loja de calçados ofereceu um desconto de $\frac{5}{10}$ em todos os produtos da linha Bic. A papelaria concorrente anunciou um desconto de $\frac{2}{5}$ em todos os produtos da mesma linha. Qual loja de papelaria está oferecendo o maior desconto? Justifique.

Fonte: elaborado pela autora

Figura 17 – Produção escrita do participante L11


B → a) João e maria comem todos os dias na escola mini-Pizza
Hoje, João comeu $\frac{1}{2}$ da Pizza e maria comeu $\frac{2}{4}$ da sua pizza.
João e maria comeram a mesma quantidade de Pizzas? Justifique
sua resposta.

b) no shopping, o magazine Luiza está oferecendo um desconto de
$\frac{5}{7}$ no valor de um aparelho celular. As Casas Bahia está oferecendo, nesse
mesmo aparelho, um desconto de $\frac{3}{7}$ no valor do aparelho celular.
Qual loja está oferecendo o maior desconto? Justifique sua resposta.

c) na Black friday, uma loja de papelaria colocou um desconto de $\frac{5}{10}$ em todos
os produtos da linha Bic. A papelaria concorrente, colocou um desconto
de $\frac{2}{5}$ em todos os produtos da mesma linha. Qual loja de papelaria
está oferecendo um maior desconto? Justifique.

A análise dos problemas sugere que a unidade de referência não foi explicitamente considerada, ainda que em alguns casos ela tenha sido implicitamente assumida (por exemplo, "a pizza" ou "a barra de chocolate"). Essa ausência sugere uma fragilidade conceitual no subdomínio KSM (Conhecimento da Estrutura da Matemática), indicando que os licenciandos compreendem as frações de modo predominantemente numérico, e não relacional. De modo geral, as respostas evidenciam maior domínio do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) e menor consistência no Conhecimento das Estruturas Matemáticas (KSM) e no Conhecimento da Prática Matemática (KPM).

Quadro 11 – Análise da presença ou ausência de unidade de referência nas produções dos licenciandos

Produção / Expressão	**Ausência / Presença de Unidade de Referência**
L4: “Maria e Lucy dividem a barra de chocolate”; Paulo “comeu $\frac{3}{7}$ da pizza” e Luís “comeu $\frac{5}{7}$”.	A barra de chocolate é a mesma, ora dividida na metade, ora dividida em quatro partes. Embora aparentemente se trate de uma única pizza, no caso $\frac{3}{7} + \frac{5}{7}$ o total é maior que 1, sugerindo pizzas diferentes ou incomparáveis.
L5: Lola e Ludmila compraram “três barras de chocolate de sabores diferentes” cada uma.	As barras de chocolate são tratadas como equivalentes, mas o tamanho do “todo” é apenas presumido, sem confirmação explícita.
L6: “Comi $\frac{1}{2}$de uma pizza. Meu amigo comu $\frac{2}{4}$ da pizza dele.”	Não esclarece se as pizzas têm o mesmo tamanho, portanto não é possível comparar as frações com segurança.
L10: “João e Maria comem todos os dias na escola mini-pizza.”	Não menciona se as “mini-pizzas” têm tamanhos iguais, deixando a unidade de referência implícita e não garantida.
L11: Júnior e Ana comem cada um um “x-tudo”, dividido em 2 pedaços iguais ou 4 pedaços iguais, respectivamente.	A pergunta “comeram o mesmo tanto de lanche?” pressupõe que os lanches têm exatamente o mesmo tamanho, o que não é mencionado. A pergunta mais adequada seria: “comeram o mesmo tanto *do seu* lanche?”.

Fonte: elaborado pela autora

No Item iii) da Tarefa, os futuros professores foram solicitados a indicar as possíveis dificuldades que os alunos poderiam apresentar ao resolver situações semelhantes às expressões propostas. A investigação concentrou-se, portanto, em compreender quais dificuldades os futuros professores considerariam relevantes e como as descreveriam. Esta questão foi respondida de forma bastante evasiva pela maioria. Alguns apontaram a dificuldade envolvendo a comparação de frações com denominadores diferentes, considerando que “alunos” costumam comparar numeradores e denominadores diretamente, sem encontrar um denominador comum. (Participantes L4, L5, L6, L11 e L12). Outros citaram como dificuldade a divisão “com virgula”, o que sugere a ideia de que para comparar as frações é (obrigatoriamente?) necessário a conversão em decimais. (Participantes L7 e L10).

Por sua vez, embora não tenham apontado tal dificuldade, os participantes L4 e L6 (além de L7 e L10) utilizaram a divisão para a comparação das frações. As respostas ao subitem iii) indicam que os futuros professores possuem uma percepção inicial das dificuldades de aprendizagem das frações, sobretudo no que se refere à relação entre numerador e denominador, à compreensão da unidade e à equivalência entre frações. Entretanto, o modo como essas dificuldades são descritas demonstra que o Conhecimento das Características da Aprendizagem

Matemática (KFLM) ainda se encontra em um nível descritivo, e não explicativo, o que limitaria a capacidade de planejar ações pedagógicas fundamentadas. De acordo com Carrillo et al. (Carrilo et al., 2018) o desenvolvimento do KFLM envolve a passagem da simples identificação de erros para a interpretação das causas cognitivas e conceituais desses erros, de forma a orientar o ensino. Nesse sentido, as respostas analisadas evidenciam a necessidade de fortalecer o vínculo entre o conhecimento conceitual das frações (KoT e KSM) e o conhecimento sobre como os alunos aprendem e erram (KFLM). Assim, este item reforça a importância de promover, na formação inicial, momentos de reflexão sobre o pensamento do aluno, de modo que o futuro professor aprenda a compreender os erros como indícios de raciocínio e não como falhas a serem corrigidas mecanicamente, consolidando uma visão mais interpretativa e investigativa do ensino e da aprendizagem matemática.

No item iv) da Tarefa, solicitou-se aos futuros professores que descrevessem como planejariam o ensino do conteúdo proposto. Observou-se que, nesse item, os participantes não conseguiram apresentar estratégias ou procedimentos concretos para a implementação do ensino. Embora demonstrassem compreensão teórica do tema, evidenciou-se dificuldade em traduzir esse conhecimento em práticas pedagógicas efetivas, indicando a necessidade de aprofundamento em metodologias de ensino e em planejamento didático.

De forma geral, a análise das respostas evidenciou diferentes níveis de mobilização dos subdomínios do MTSK, conforme o Quadro 12.

Quadro 12 – Subdomínios do MTSK evidenciados nas respostas dos licenciandos

Subdomínio (MTSK)	**Evidências nas respostas**	**Tipo de mobilização observada**
KoT – Conhecimento dos Tópicos Matemáticos	Presente em quase todos os registros; aplicam procedimentos de simplificação, comparação e equivalência.	Predomina o domínio técnico-procedimental, com explicações algorítmicas e pouca exploração dos significados das frações.
KSM – Conhecimento da Estrutura da Matemática	Poucos alunos compreenderam a invariância de razão na equivalência e a necessidade de unidade comum para comparar.	Mobilização incipiente; dificuldade em articular diferentes representações (fração–decimal–gráfico).
KPM – Conhecimento da Prática Matemática	Alguns participantes representaram visualmente as expressões, buscando justificar com esquemas.	Mobilização parcial; indícios de entendimento da importância de justificar e argumentar, mas sem sistematização formal.
KFLM – Conhecimento das Características da Aprendizagem Matemática	Vários licenciandos mencionaram dificuldades que os alunos poderiam ter (ex.: confusão com numerador e denominador).	Indício de consciência inicial sobre obstáculos de aprendizagem, porém sem aprofundamento teórico.
KMT – Conhecimento do Ensino da Matemática	Poucos conseguiram converter o conhecimento matemático em propostas de ensino (ex.: atividades com diferentes registros).	Fragilidade evidente; não demonstram domínio de estratégias de ensino voltadas à compreensão conceitual.
KPMT – Conhecimento dos Princípios e Crenças sobre o Ensino e a Aprendizagem da Matemática	Mencionaram materiais concretos, "gráficos de pizza" e recursos visuais como apoio.	Indicam crença na importância do concreto e do visual, mas sem reflexão teórica articulada.

Fonte: elaborado pela autora

Em síntese, os dados sugerem que o conhecimento especializado necessário à elaboração de problemas sobre frações exige não apenas o domínio conceitual do conteúdo, mas também a compreensão das relações entre as representações, dos erros recorrentes e das formas de promover a argumentação dos alunos — dimensões que compõem o conhecimento profissional do professor conforme o modelo MTSK.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como propósito investigar a resolução de problemas como metodologia de ensino de frações e sua articulação com o conhecimento especializado do professor de Matemática. A proposta central consistiu em implementar uma sequência didática fundamentada nessa abordagem, a fim de analisar sua contribuição para a aprendizagem de frações e compreender como ela se relaciona ao saber profissional docente.

A sequência foi aplicada a estudantes do 6º ano da Escola Doutor José Foz, e os resultados evidenciaram que o trabalho com resolução de problemas favoreceu maior motivação, envolvimento e avanços significativos na compreensão dos conceitos envolvidos. Assim, verificou-se que essa metodologia constitui uma estratégia consistente e eficaz para promover a aprendizagem.

A investigação também destacou a relevância do conhecimento especializado do professor. Demonstrou-se que não basta dominar os conteúdos de forma superficial: é imprescindível saber explicá-los, justificar sua pertinência e articulá-los a diferentes contextos. No âmbito da resolução de problemas, ficou evidente a necessidade de o professor ser capaz de elaborar problemas conceitualmente adequados e coerentes com os objetivos da metodologia.

Além disso, o estudo permitiu identificar fragilidades entre licenciandos de Matemática, especialmente no que se refere à elaboração de problemas e ao domínio aprofundado dos conceitos de fração, bem como da relação parte–todo. Esses resultados sugerem que as dificuldades de aprendizagem dos alunos podem estar associadas, em certa medida, às limitações apresentadas pelos futuros professores no domínio conceitual e na proposição de tarefas matemáticas.

Observou-se também que as dificuldades dos licenciandos se aproximam daquelas manifestadas pelos próprios alunos, o que indica a necessidade de ações formativas que auxiliem na superação dessas lacunas. Assim, considera-se pertinente sugerir, como desdobramentos futuros, a realização de programas de formação direcionados aos licenciandos, com foco na elaboração de problemas, no aprofundamento teórico dos conteúdos e no desenvolvimento de estratégias que fortaleçam a aprendizagem de frações.

No plano pessoal e profissional, este trabalho enriqueceu significativamente minha atuação docente, permitindo-me compreender melhor a importância de articular teoria e prática de forma efetiva. A experiência adquirida fortalece minha capacidade de planejar e implementar estratégias pedagógicas mais consistentes, promovendo uma aprendizagem mais significativa e duradoura. Além disso, os resultados obtidos indicam que iniciativas futuras, como programas de formação docente e pesquisas aplicadas, podem contribuir para a melhoria da educação matemática, ampliando os impactos positivos para alunos e professores.

Conclui-se, portanto, que a integração entre a metodologia de resolução de problemas e o conhecimento especializado do professor é essencial para a promoção de uma aprendizagem significativa, e que investir na formação docente constitui um caminho promissor para enfrentar as dificuldades identificadas ao longo deste trabalho.

Referências

ALEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Pesquisa em resolução de problemas – caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA, Boletim de Educação Matemática**, UNESP. Rio Claro, v. 25, p. 73–98, 2011.

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, New York, v. 59, p. 389–407, 2008.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto, 1991.

Brasil. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília, DF: MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1988.

Brasil. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - Matemática**. Brasília, DF: MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1988.

Brasil. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017.

CARRILO, J. et al. The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, London, v. 20, n. 3, p. 236–253, 2018.

ECHEVERRIA, M. P. P.; POZO, J. I. **Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender**. In: Pozo, J. I. (Org.). Tradução de Beatriz Affonso Neves. Rio de Janeiro: Artmed, 1998.

GIBIM, F. B. **Conhecimento especializado e interpretativo de professores de matemática no contexto da divisão de frações por meio de uma tarefa de formação. Orientador: Laura Rifo**. 2024. 178 p. Tese (Doutorado no Ensino de Ciências e Matemática) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANíSIO TEIXEIRA. **PISA**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2025. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa. Acesso em: 1 abr. 2025.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2007.

LüDKE, M.; ANDRé, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Children Doing Mathematics**. Oxford: Blackwell, 1996.

ONUCHIC, L. R. et al. **Resolução de problemas: teoria e prática**. São Paulo: Paco Editorial, 2021.

PóLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciências, 2006.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. R.; MELLONE, M. Desenvolvendo as especificidades do conhecimento interpretativo do professor e tarefas para a formação. In: GIRALDO, V. AND VIOLA, J. AND ELIAS, H. R. **Problematizações sobre a Formação Matemática na Licenciatura em Matemática**. Brasília, DF: SBEM, 2019.

SADOVSKY, P. **O ensino de matemática hoje**. São Paulo: Ática, 2007.

SCHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986.

SCHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge, v. 15, n. 1, p. 1–23, 1987.

VIEGUT, A. A.; MATTHEWS, P. G. Building fraction magnitude knowledge with number lines: Partitioning versus analogy. **Developmental Psychology**, Washington, DC, v. 59, n. 10, p. 1757–1770, 2023.

APÊNDICE A – Plano de Aula – Sequência Didática

Plano de Aula: Comparação de Frações e Frações Equivalentes

Público-alvo: Alunos da escola Doutor José Fóz (regularmente matriculados no 6º ano B do Ensino Fundamental)

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada

Objetivos:

- Conceituar frações equivalentes;
- Identificar e obter frações equivalentes;
- Comparar frações de denominadores iguais;
- Comparar frações de denominadores diferentes.

Habilidades:

- EF05MA04 Identificar frações equivalentes.
- EF06MA07 Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

1ª Aula: Frações Equivalentes

Início (15 min) - Apresentação

Apresentar o seguinte problema para os alunos: As irmãs Paula e Rebeca estavam jantando e cada uma tinha sua própria pizza brotinho. Paula cortou a pizza dela em 4 pedaços iguais e comeu 2 pedaços. Já Rebeca cortou a pizza dela em 2 pedaços iguais e comeu apenas 1 pedaço. Quem comeu uma maior quantidade de pizza?

∗ Pedir aos alunos que em duplas reflitam e compartilhem suas respostas, registrando no quadro suas hipóteses.

Desenvolvimento (25 min) – Construção do Conceito

1. Representação Visual: Uso das hipóteses realizada no quando pelos alunos durante a resolução do problema inicial proposto e de desenhos trazidos pelo professor para representar as frações equivalentes.
2. Explicação do Conceito: Mostre que 2/4 e 1/2 representam a mesma quantidade, introduzindo o conceito de frações equivalentes.
3. Atividade em dupla: Resolução de atividades proposta pelo professor.

Atividade 1: João e Maria estão cuidando do jardim da escola. Eles plantaram flores em duas partes diferentes do canteiro, sendo que cada parte possui a mesma área. Na parte destinada a João, ele plantou flores em três nonos da área e Maria plantou em um terço da parte do canteiro reservado para ela. Quem utilizou a maior área para o plantio das flores?

Atividade 2: Marina dividiu um bolo em 12 pedaços iguais e comeu 4 deles. Pedro dividiu outro bolo do mesmo tamanho em 6 pedaços iguais e comeu 2 pedaços. Qual alternativa descreve corretamente a relação entre as frações do bolo que cada um comeu?

(A) Marina comeu mais bolo do que Pedro.

(B) Pedro comeu mais bolo do que Marina.

(C) Marina e Pedro comeram a mesma quantidade de bolo.

(D) Não é possível determinar sem saber o tamanho dos pedaços.

Fechamento (10 min) – Discussão e Reflexão

∗ Correção das atividades realizada pelos alunos levantando e solucionando suas dúvidas.

2ª Aula: Comparação de Frações

Início (10 min) – Desafio Inicial

∗ Apresentar o seguinte problema para os alunos: Ana e Beatriz, duas eletricistas, estão instalando sistemas de iluminação em dois prédios com a mesma quantidade de lâmpadas. A Ana já instalou dois terços das lâmpadas do primeiro prédio, enquanto Beatriz instalou três sextos das lâmpadas no segundo prédio. Quem instalou a maior quantidade de lâmpadas?

∗ Pedir aos alunos que em duplas reflitam e compartilhem suas respostas, registrando no quadro suas hipóteses.

Desenvolvimento (30 min) – Estratégias de Comparação

1. Utilização de Representações: Usar dobraduras ou materiais concretos para visualizar a comparação.
2. Método do MMC (Mínimo Múltiplo Comum): Mostrar como obter denominadores iguais para facilitar a comparação.
3. Multiplicação Cruzada: Explicar que multiplicar em cruz ajuda a determinar qual fração é maior sem precisar encontrar o MMC.

4. Atividade em Grupo: Resolução de atividades proposta pelo professor.

   Atividade 1: Joana e Leo são irmãos, e cada um está pintando a parede de seu respectivo quarto, ambos de mesmo tamanho. Joana, até o momento, havia pintado uma região equivalente a 5/7 da parede do quarto dela, enquanto Leo pintou o equivalente a 3/7. Qual deles pintou a maior parte da parede de seu quarto?

   Atividade 2: Paula e Maria são costureiras e estão cortando pedaços de fitas de mesmo comprimento cada. Até o momento, Paula cortou o equivalente a $3/4$ do comprimento da fita dela e Maria, $5/8$. Então:

   (A) Paula cortou um comprimento maior de fita.

   (B) Maria cortou um comprimento maior de fita.

   (C) Paula e Maria cortaram um mesmo comprimento de fitas.

   (D) Não é possível comparar os comprimentos.

Fechamento (10 min) – Aplicação no Cotidiano

∗ Correção das atividades realizada pelos alunos levantando e solucionando suas dúvidas.

3ª Aula: Frações na reta numérica

Início (10 min) – Desafio Inicial

∗ Apresentar o seguinte problema para os alunos: Imagine que você e seus amigos estão organizando uma trilha ecológica e precisam marcar pontos de descanso ao longo do percurso. O trajeto tem 1 km de extensão e vocês decidiram dividir a trilha em frações iguais para definir os pontos de parada.

1. Se vocês decidirem parar a cada $1/4$ do percurso, em quais pontos da trilha estarão os locais de descanso?
2. Se um dos pontos de hidratação estiver em $3/5$ do caminho, onde ele estará em relação ao início?
3. Se tivermos um ponto marcado em $7/8$ do percurso, ele está mais próximo do início ou do final da trilha? Use uma reta numérica para representar esses pontos e ajudar na visualização!

∗ Pedir aos alunos que em duplas reflitam e compartilhem suas respostas, registrando no quadro suas hipóteses.

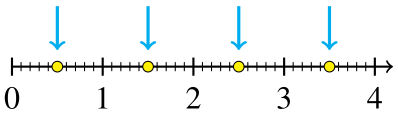
Desenvolvimento (30 min) – Estratégias

1. Utilização de Representações: Desenhar frações na reta numérica.

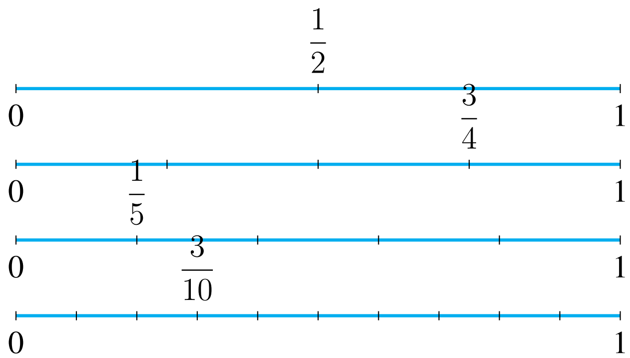
2. Fração Equivalentes: Escrever frações equivalentes.
3. Atividade em Grupo: Resolução de atividades para localização de frações na reta numérica.

Atividade 1: Vamos localizar as frações a seguir em uma reta numérica e escrevê-las na ordem crescente:

$$\frac{5}{2}, \quad \frac{7}{2}, \quad \frac{17}{10}, \quad \frac{3}{5}$$



Atividade 2: Atividade 2: Considere as retas numéricas



A única sentença verdadeira é:

(A) $\frac{7}{10} > \frac{3}{4}$

(B) $\frac{4}{5} > \frac{8}{10}$

(C) $\frac{5}{10} > \frac{2}{5}$

(D) $\frac{2}{10} > \frac{1}{4}$

Fechamento (10 min) – Aplicação no Cotidiano

$*$ Correção das atividades realizada pelos alunos levantando e solucionando suas dúvidas.

APÊNDICE B – Registros das aplicações didáticas

Figura 18 – Registro da discussão em pequenos grupos

Figura 19 – Registro da realização das atividades propostas

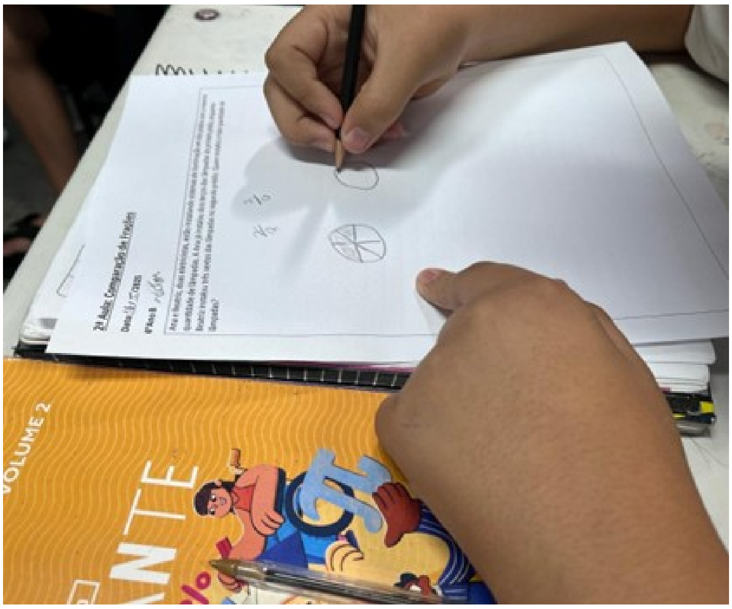
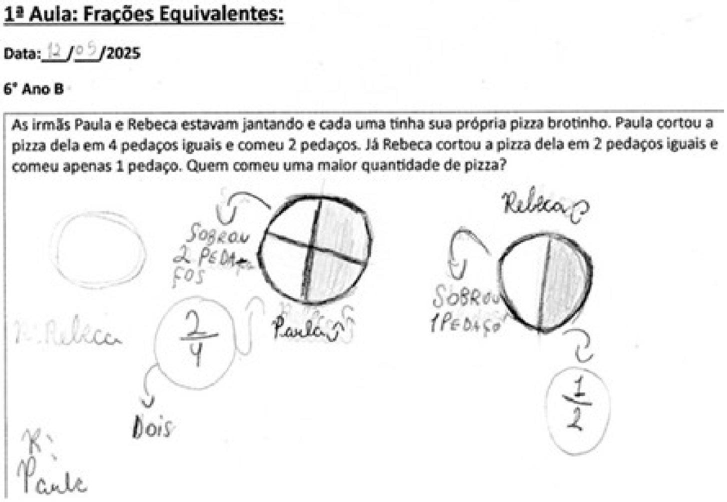


Figura 20 – Registro da atividade realizada por um aluno da turma



1ª Aula: Frações Equivalentes:

Data: 12/05/2025

6° Ano B

As irmãs Paula e Rebeca estavam jantando e cada uma tinha sua própria pizza brotinho. Paula cortou a pizza dela em 4 pedaços iguais e comeu 2 pedaços. Já Rebeca cortou a pizza dela em 2 pedaços iguais e comeu apenas 1 pedaço. Quem comeu uma maior quantidade de pizza?

SOBROU 2 PEDAÇOS

Rebeca

SOBROU 1 PEDAÇO

R: Rebeca

$\frac{2}{4}$

Paula

$\frac{1}{2}$

Dois

R: Paula

Figura 21 – Registro da socialização apresentada pelos alunos

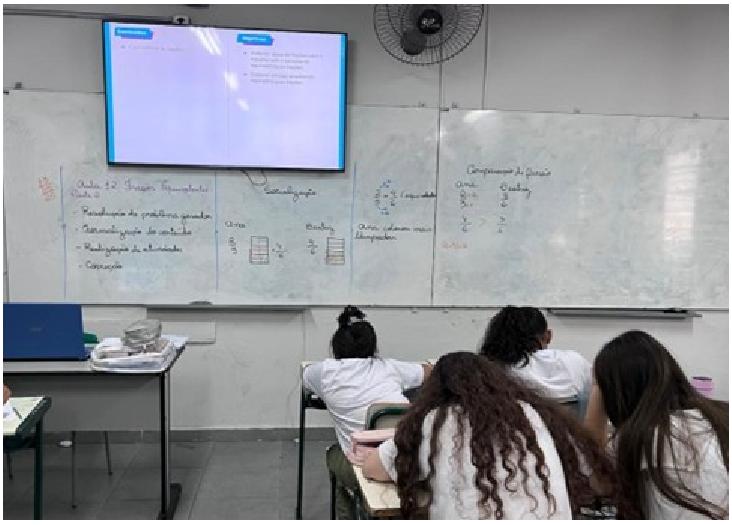


Figura 22 – Registro da sala de aula antes da formalização dos conteúdos

Figura 23 – Slide da formalização do conteúdo – Frações equivalentes

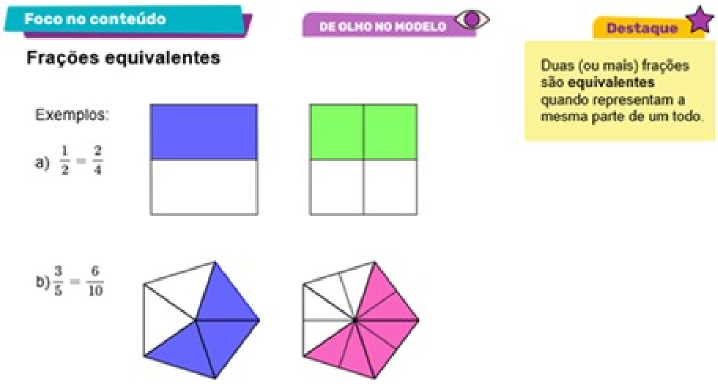


Figura 24 – Slide da formalização do conteúdo – Encontrando frações equivalentes

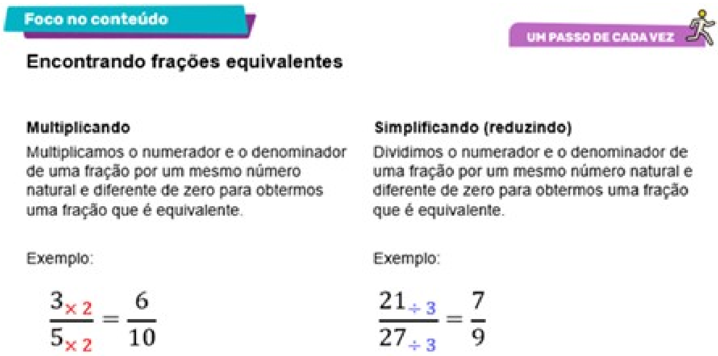


Figura 25 – Slide da formalização do conteúdo – A régua de frações

Figura 26 – Slide da formalização do conteúdo – Comparação

Figura 27 – Slide da formalização do conteúdo – Comparação de fração com mesmo denominador

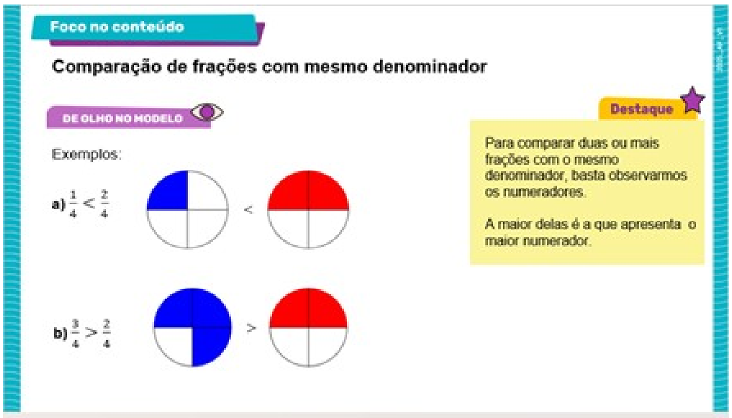


Figura 28 – Slide da formalização do conteúdo – Comparação de fração com denominador diferente

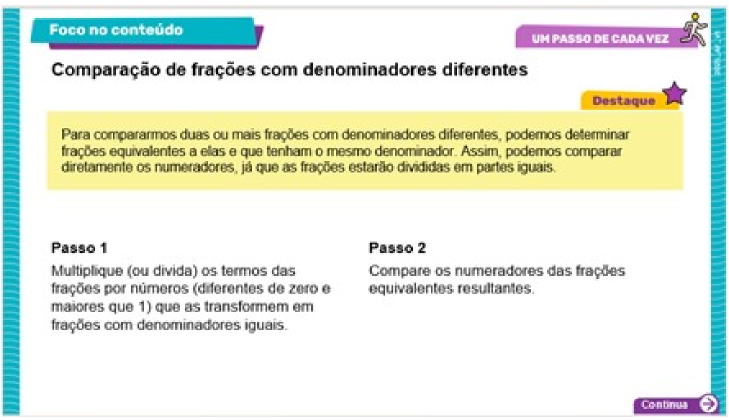


Figura 29 – Slide da formalização do conteúdo – Comparação de fração com denominador diferente

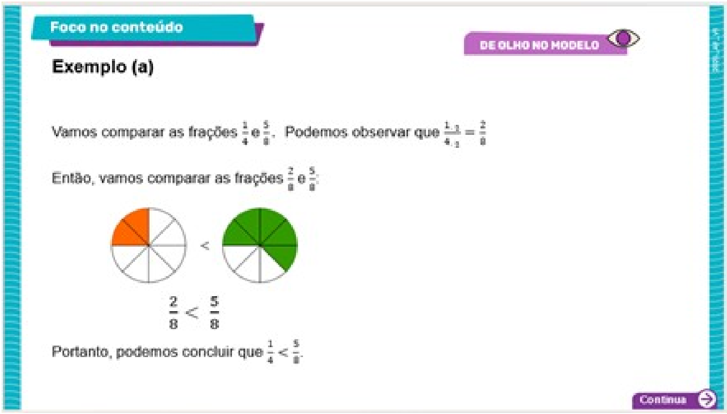
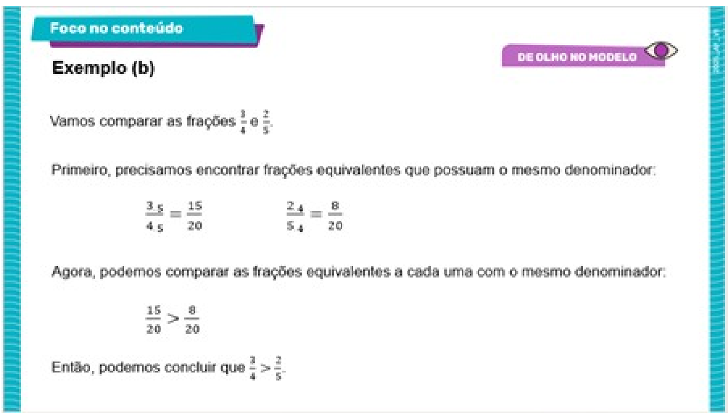


Figura 30 – Slide da formalização do conteúdo – Comparação de fração com denominador diferente



ANEXO A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Título da pesquisa: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: uma contribuição para ensino de frações no sexto ano do ensino fundamental.

Pesquisadores responsáveis: Patrícia Molina e Cristiane Nespoli

Você está sendo convidado a participar de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante da pesquisa e é elaborado em duas vias, assinadas e rubricadas pelo pesquisador e o participante/responsável legal, sendo que uma via deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos: No cenário da disciplina Seminários especiais I, onde um dos tópicos envolve tendências da Educação Matemática, a metodologia de Resolução de Problemas amplamente discutida. Por sua vez, o ensino/aprendizagem de frações no ensino fundamental apresenta desafios persistentes. O objetivo da pesquisa é identificar quais conhecimentos são mobilizados por professores de matemática no contexto das frações, incluindo a elaboração de problemas, suas concepções sobre o ensino/aprendizagem, assim como suas dificuldades.

Procedimentos: Participando do estudo você está sendo convidado a: realizar e discutir tarefas sobre o ensino aprendizagem de frações, mais especificamente frações equivalentes e comparação de fraçoes. Sua participação tem duração máxima prevista de oito aulas.

Sigilo e privacidade: Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e de que seu nome não será citado na divulgação dos resultados.

Consentimento livre e esclarecido: Após esclarecidos a natureza da pesquisa, seus objetivos, procedimentos e sigilosidade, declaro o aceite na participação.

____

Nome e assinatura do participante

Data: _______________

___________________________________	___________________________________
Rubrica do pesquisador	Rubrica do participante