UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO / PPG
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL / PROFMAT

ANTONIO MARCOS LEITE CAVALCANTE

FRACTAIS: Uma estratégia de abordagem motivadora no ensino de Matemática do Ensino Médio

São Luís – MA
2024

ANTONIO MARCOS LEITE CAVALCANTE

FRACTAIS: Uma estratégia de abordagem motivadora no ensino de Matemática do Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como requisito para a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Leandro Correia Costa

São Luís – MA
2024

Cavalcante, Antonio Marcos Leite.

FRACTAIS: uma estratégia de abordagem motivadora no ensino de Matemática do Ensino Médio./Antonio Marcos Leite Cavalcante. São Luís - MA, 2025.

86p.

Dissertação (Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT) Universidade Estadual do Maranhão - UEMA, 2025.
Orientador: Prof. Dr. Alberto Leandro Correia Costa.
.
1.Aplicação Prática da Matemática. 2. Matemática. 3. Matemática e Natureza Estratégias Pedagógicas em Matemática.. I.Título.

CDU:51:373.5

Elaborado por Luciana de Araújo - CRB 13/445

ANTONIO MARCOS LEITE CAVALCANTE

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Leandro Correia Costa

Aprovado em: 28 / 02 / 2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br ALBERTO LEANDRO CORREIA COSTA
Data: 10/03/2025 10:52:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alberto Leandro Correia Costa
Universidade Estadual do Maranhão-UEMA

Documento assinado digitalmente
gov.br GEILSON MENDES DOS REIS
Data: 10/03/2025 15:45:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Msc Geilson Mendes dos Reis
Universidade Estadual do Maranhão-UEMA

Documento assinado digitalmente
gov.br ANSELMO BAGANHA RAPOSO JUNIOR
Data: 10/03/2025 10:57:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

São Luís
2025

Das leis mais simples nascem infinitas maravilhas que se repetem indefinidamente.

Benoit Mandelbrot

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me dar a sabedoria e a força necessárias para superar todos os desafios e alcançar este resultado.

Aos meus pais, Edilson Cavalcante e Ilzimar Leite, pelo dom da vida, apoio e por me ensinarem a ser forte sempre.

À minha digníssima esposa Kaline Souza, que me ajudou, torceu por mim, deu apoio, acreditou e sempre esteve comigo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Alberto Leandro Correia Costa, pela confiança, paciência e apoio na elaboração desta dissertação.

Aos alunos do Centro de Ensino Prof.(a) Marcelina Nóia Alves, Alto Alegre do Pindaré - MA, que se dedicaram na realização das atividades referentes à sequência didática.

Aos amigos do PROFMAT, em especial, Hiago de Lira e José Ribamar Ferreira, com quem compartilhei desafios, aprendizado e formamos uma verdadeira família.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por coordenar este programa de mestrado tão relevante.

À Annanda Crystina Chagas Santos e a Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), pela excelente coordenação e pela oportunidade oferecida.

Agradeço também aos colegas e amigos que, em nenhum momento, permitiram que o desânimo prevalecesse, sempre me apoiando e torcendo pelo meu sucesso. Sou imensamente grato a todos!

RESUMO

Este trabalho investiga o uso da geometria fractal como estratégia de ensino para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos e sua aplicação prática no Ensino Médio. Para isso, propõe sequências didáticas que exploram fractais como recurso didático no estudo de progressão geométrica, área, perímetro e princípios de limite, além de analisar o impacto dessa abordagem na motivação e na apropriação dos conceitos pelos alunos. A pesquisa adota uma metodologia qualitativa, iniciando com uma revisão bibliográfica e avançando para a aplicação de uma sequência didática em sala de aula. Fundamenta-se em autores como Zaballa (1998), Oliveira (2013), Mandelbrot (1977) e Alves (2021). Os resultados indicam que a geometria fractal permite conexões entre conceitos abstratos e o mundo real, promovendo um ensino interdisciplinar e ampliando o interesse dos alunos. A aplicação das sequências didáticas, incluindo oficinas práticas e visitas de campo, revelou maior engajamento e compreensão dos conceitos. No entanto, desafios como a ausência do tema na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e a necessidade de formação docente foram identificados. O estudo recomenda a ampliação da pesquisa, o desenvolvimento de materiais didáticos, a formação continuada de professores e a integração interdisciplinar. Conclui-se que a geometria fractal tem grande potencial pedagógico, tornando o ensino mais dinâmico, concreto e significativo para os alunos do século XXI.

Palavras-chave: Aplicação prática da Matemática; Matemática e Natureza; Estratégias Pedagógicas em Matemática.

ABSTRACT

This study investigates the use of fractal geometry as a teaching strategy to facilitate the understanding of mathematical concepts and their practical application in high school education. To achieve this, it proposes didactic sequences that explore fractals as a teaching resource in the study of geometric progression, area, perimeter, and the principles of limits, while also analyzing the impact of this approach on students' motivation and conceptual appropriation. The research adopts a qualitative methodology, beginning with a bibliographic review and progressing to the application of a didactic sequence in the classroom. It is based on authors such as Zaballa (1998), Oliveira (2013), Mandelbrot (1977), and Alves (2021). The results indicate that fractal geometry enables connections between abstract concepts and the real world, promoting interdisciplinary learning and increasing student engagement. The implementation of the didactic sequences, including practical workshops and field visits, led to greater participation and understanding of mathematical concepts. However, challenges such as the absence of the topic in the BNCC (Brazilian National Common Curriculum Base) and the need for teacher training were identified. The study recommends expanding research, developing didactic materials, promoting continuous teacher training, and fostering interdisciplinary integration. It concludes that fractal geometry has great pedagogical potential, making learning more dynamic, concrete, and meaningful for 21st-century students.

Keywords: Practical Application of Mathematics; Mathematics and Nature; Pedagogical Strategies in Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Por milênios, o conhecimento geométrico esteve centrado na geometria clássica desenvolvida por Euclides (cerca de 325 a.C. - 265 a.C.), fundamentada em seus postulados e voltada para o estudo de formas em uma, duas e três dimensões, utilizando conceitos como ponto, reta, plano e espaço. No entanto, essa geometria apresentou limitações na tentativa de se compreender determinados objetos e formas, com maior complexidade de detalhes e características, comuns na natureza, no mundo em volta dos indivíduos. Fruto dos novos pensamentos em torno das noções geométricas, surgiram nos séculos XVIII e XIX com Gauss, Bolyai e Lobachevsky, as geometrias elíptica e hiperbólica, chamadas então de geometrias não-euclideanas, que com as técnicas do cálculo diferencial, se expandiram dando espaço para a Geometria Diferencial.

Posteriormente, surge a Geometria Riemanniana, fruto dos trabalhos pioneiros de Bernhard Riemann e de muitos outros que, posteriormente, se dedicaram a desenvolver essa nova área. Com tudo isso, a geometria se tornou uma área potente da Matemática e uma ferramenta poderosa para a compreensão de diversos fenômenos, objetos e do próprio espaço onde vivemos. Ainda assim, essas geometrias apresentam limitações na representação de objetos com certo grau de peculiaridade. Como exemplo, podemos citar a ramificação de uma árvore, o contorno de nuvens ou até a arrebentação de uma onda no mar. Uma visão diferente de geometria, portanto, faz-se necessária. Surge então, no século XX, com Benoît Mandelbrot, uma nova noção geométrica: a Geometria Fractal, na tentativa de lidar com esses objetos e formas complexos. Nessa nova abordagem, esses objetos são vistos como fractais, conceito-chave dessa nova visão.

Chamamos desde já a atenção para o fato de que, com o passar do tempo, impõe-se cada vez mais aos seres humanos a necessidade de conhecer, de forma cada vez mais apropriada, o mundo à sua volta, o que significa a necessidade de os indivíduos e a sociedade aprimorarem as ideias e os conhecimentos que traduzam de forma mais adequada o seu ambiente. Este é o caso da noção de geometria, já citada. Mas é importante ressaltar que não somente o conhecimento deve ser aprimorado, mas também a forma de sua construção e transmissão no contexto da formação dos indivíduos. Nessa direção, a utilização de um recurso que aproxima de maneira mais fidedigna a matemática conceitual das experiências do mundo real vivenciadas por quem a estuda desperta o interesse no processo de ensino-aprendizagem, possibilitando um maior entendimento dos conteúdos e uma melhor apropriação dos saberes. No entanto, a introdução de novos conhecimentos, novas ferramentas e novas estratégias nos processos de ensino da educação formal demanda uma ampla investigação na busca de uma abordagem cuidadosa e eficaz, com o intuito de enriquecer a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos e suas aplicações.

Em específico, no que tange aos saberes de geometria euclidiana, apesar de ensejarem conexões fortíssimas com o mundo cotidiano, o mundo sensorial experimentado pelas pessoas, esses saberes ainda são tratados, em diversas ocasiões, como um conjunto de conceitos abstratos, sem nenhuma ligação com o mundo real. Contudo, é frequente a discussão sobre métodos e estratégias em torno das abordagens no ensino de geometria euclidiana, com o intuito de aprimorar a absorção das habilidades e conhecimentos referentes a esta geometria e outros conteúdos correlatos; práticas oriundas desse contexto têm sido amplamente utilizadas. Nesse sentido, a tendência das estratégias em associar o conceitual ao mundo real, como forma de aprimoramento dos processos de ensino-aprendizagem, propõe também uma discussão na qual os fractais podem ser utilizados como ferramentas e mecanismos de aprendizagem, podendo se configurar como fator motivador e facilitador da construção e/ou apropriação de determinados conteúdos, pois permitem a investigação de diversos conceitos em inúmeras áreas, como cálculo, geometria plana e espacial, álgebra, entre outros.

Exposto isto, a pergunta que surgiu e norteou a pesquisa desenvolvida é: *como a introdução dos fractais no currículo escolar do Ensino Médio pode enriquecer o entendimento dos alunos sobre conceitos matemáticos e sua aplicabilidade?*

Com o objetivo de darmos nossa contribuição para responder esta questão, entendemos que é necessário não apenas explorar a história e as características dos fractais, mas também desenvolver e investigar metodologias de ensino que permitam aos alunos não apenas compreender, mas também apreciar a beleza e a complexidade dessas formas de um ponto de vista matemático, promovendo assim, uma aprendizagem mais engajada e significativa. O desafio, portanto, reside não apenas em transmitir conhecimento, mas em despertar o interesse e a curiosidade dos alunos, promovendo uma compreensão mais profunda e significativa da matemática, na sua relação com o mundo real, e propiciando o desenvolvimento de pensamento crítico que lhes permitam vislumbrar outros conhecimentos.

Mais especificamente, o itinerário desta pesquisa foi, com base no estudo bibliográfico feito, propor uma sequência didática com pauta em utilizar os fractais como recurso didático e auxiliar no estudo de alguns conceitos matemáticos, tais como: progressão geométrica, área e perímetro de fractais e princípios de limite, a nível de Ensino Médio; e analisar o impacto dessa proposta em fatores como motivação, e apropriação dos conceitos por parte dos alunos.

A relevância deste trabalho consiste em investigar e apresentar evidências advindas de um caso concreto de que a inserção da geometria fractal como meio que permita abordar alguns conteúdos específicos de matemática no segundo ano do Ensino Médio pode configurar um ganho qualitativo no processo de ensino-aprendizagem desses conteúdos. Uma vez que pauta uma aproximação formal da matemática representativa e seus conceitos com objetos e situações reais, palpáveis, vivenciadas, indo ao encontro dessa tendência cada vez mais de propor estratégias de ensino de Matemática focada também no real, no cotidiano, no lúdico, no senso estético, na inclusão digital, sem perder de vista o pensamento abstrato. O foco central é utilizar os elementos da geometria fractal e suas propriedades para auxiliar a compreensão de determinados conceitos matemáticas por meio de uma ótica mais dinâmica, com figuras que fogem do contexto abordado na geometria euclidiana.

Este trabalho adota inicialmente uma metodologia de pesquisa bibliográfica de caráter exploratório, visando investigar a dimensão dos fractais, as características de alguns fractais específicos e seus respectivos criadores. Além disso, será proposta uma sequência didática composta por cinco aulas, nas quais os fractais serão abordados por meio de oficinas, aulas expositivas e uma visita de campo com uma turma do 3º ano do Ensino Médio. O objetivo é observar como a aplicação dessa metodologia pode auxiliar na compreensão de determinados conteúdos de matemática.

O trabalho está dividido em sete seções. A seção 2 apresenta um resumo da história dos fractais, incluindo seus tipos e classificações, abordando desde os primeiros indícios até a atualidade.

Na seção 3, será introduzido o conceito de dimensão fractal, com foco na Dimensão de Hausdorff. Nesta seção, serão discutidos o contexto da dimensão fractal, suas principais características, as diferenças em relação à dimensão euclidiana e o trabalho do matemático Felix Hausdorff.

A seção 4 é dedicada à apresentação de alguns fractais, abordando suas concepções, criadores e principais características.

A seção 5 explora a educação brasileira, especificamente no Ensino Médio, e faz um contraste com a Geometria Fractal. Serão destacados os principais aspectos que remetem à utilização desse conceito nesse nível de ensino.

Na seção 6, o foco está em exemplificar bibliografias brasileiras de livros didáticos do Ensino Médio e seus respectivos problemas matemáticos que utilizam conceitos de Geometria Fractal como instrumentos auxiliares para o ensino de determinados conteúdos.

Por fim, na seção 7, relata a sequência didática com o tema "Fractais no Ensino Médio". Esta seção inclui as principais informações coletadas durante a aplicação da sequência didática, considerando imagens, percepções, relatos, avaliações, práticas, questionamentos, entre outros aspectos.

2 CONTEXTO HISTÓRICO DOS FRACTAIS

Segundo Mandelbrot, (1977, p. 4) A palavra fractal tem origem latim, mais especificamente o adjetivo fractus que deriva do verbo frangere e que significa quebrar.

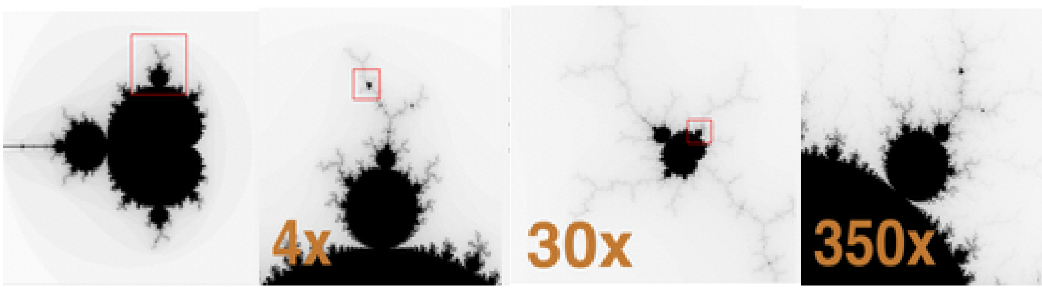
Foi usada por Benôıt B. Mandelbrot em 1975 quando buscava nomear uma geometria diferenciada da convencional que representaria com propriedade formas da natureza. As características mais notáveis dos fractais implicam na repetição infinita de seu formato em escalas cada vez menores.

Como afirma Mandelbrot (1977, p. 1):

> [...] conceived and developed a new geometry of nature and implemented its use in a number of diverse fields. It describes many of the irregular and fragmented patterns around us, and leads to full-fledged theories, by identifying a family of shapes I call fractals.

Os fractais são figuras de grandes complexidades, pois são infinitamente iguais em escalas cada vez menores e se diversificam em formato, alguns podem ser curvas, outros desconectados (poeira) ou superfícies e até mesmo formatos estranhos considerados “monstros” na qual não há um termo adequado na matemática ou nas artes para relacioná-lo. A figura 1 mostra com clareza um fractal, e evidencia com detalhes as escalas se repetindo.

Figura 1: Ampliação 350 vezes do Conjunto de Mandelbrot.



Fonte: https://republicadomundo.blogspot.com/2012/06/o-conjunto-de-mandelbrot-um-exemplo.html

O fractal em questão é o conjunto de Mandelbrot aproximado 350 vezes, é notável a conservação de seu formato original fracionado em escalas menores.

Outra definição sobre fractal implica em sua dimensão. Segundo Mandelbrot (1977, p. 15): “Um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica. Cada conjunto com dimensão não inteiro é um fractal”. Dessa maneira, a dimensão de um fractal não pode ser compreendida como a da geometria euclidiana, e sim, estar entre as mesmas. A dimensão de Hausdorff Besicovitch e a dimensão topológica serão comentadas à frente neste trabalho.

Segundo Mandelbrot (1977, p.4),

> Nevertheless, fractal geometry is not a straight "application" of 20th century mathematics. It is a new branch born belatedly of the crisis of mathematics that started when duBois Reymond 1875 first reported on a continuous nondifferentiable function constructed by Weierstrass

O termo fractal é de 1975, contudo a ideia de fractal surgiu de estudos anteriores a de Mandelbrot datados dos anos de 1857 a 1913. Os resultados desses trabalhos foi uma “galeria de monstros” que não tinham reconhecimento científico, porém foi o caminho estratégico para o desenvolvimento da geometria fractal. Grandes estudiosos desenvolviam seus trabalhos nesse período, e o início de tudo foi o relato de duBois Reymond (1831 – 1889) em 1875 sobre uma função contínua não-diferenciada desenvolvida por Weierstrass (1815 – 1897).

A função de Weierstrass era característica por ser totalmente contínua em seu domínio e não apresentar em nenhum ponto uma tangente à curva, ou seja, é impossível encontrar um intervalo diferenciável em toda sua extensão, dessa maneira podemos afirmar que a curva da função não tem segmentos de reta e sim constituída de cantos. Weiesrtrass desenvolveu o que hoje é chamado de fractal.

Helgevon Koch (1870 – 1924) em 1904, conhecendo os trabalhos de Weiesrtrass desenvolveu outra função bem parecida, atualmente a mesma é chamada de floco de neve de Koch ou koch snowflake. Essa função é mais geométrica que a anterior, que era muito analítica, e consiste na somatória de infinitos triângulos ao perímetro de um dado triângulo que iniciou todo o processo, o que ocasiona o crescimento do perímetro, o fazendo se aproximar do infinito. Logo o resultado disso é um perímetro infinito que fica localizado em uma área finita.

A matemática moderna foi forçada pelas descobertas de figuras que não se encaixam na geometria euclidiana, e começou a tomar força com a teoria do Conjunto de Cantor e a curva de preenchimento de espaço de Peano (Mandelbrot, 1977, p. 3). Muitos trabalhos foram desenvolvidos sobre os fractais, contudo essa ciência só conseguiu o pleno desenvolvimento na década de 60 do século XX, com o auxílio tecnológico da computação. O grande pioneiro a trabalhar os fractais com computadores foi o matemático polonês Benoit B. Mandelbrot que já havia estudado antes as figuras.

Partindo de questionamentos a respeito da natureza, Mandelbrot começou a raciocinar sobre diversos fenômenos e eventos existentes na mesma, o que fez com que houvesse interesse pelo assunto, desenvolvendo por meio disso seu estudo.

Como afirma Mandelbrot (1977, p.6),

> [...] We ought not...to believe that the banks of the ocean are really deformed, because they have not the form of a regular bulwark; nor that the mountains are out of shape, because they are not exact pyramids or cones; nor that the stars are unskillfully placed, because they are not all situated at uniform distance. These are not natural irregularities, but with respect to our fancies only; nor are they incommodious to the true uses of life and the designs of man's being on earth." This opinion of the seventeenth century English scholar Richard Bentley (echoed in the opening words of this Essay) shows that to bring coastline, mountain, and sky patterns together, and to contrast them with Euclid, is an ancient idea.

Os estudos levaram Mandelbrot a se deparar com o antigo problema de Georg Cantor chamado Poeira de Cantor.

Segundo Oliveira (2014, p. 42)

> Para fazer um conjunto de Cantor, começamos com um intervalo entre 0 e 1, representado por um segmento de reta. Eliminamos então o terço médio. Isto resulta em dois segmentos. Novamente retiramos o terço médio e assim sucessivamente. O resultado é uma estranha poeira de pontos, que obedece a um padrão não linear.

O problema fez íntima relação com o trabalho de Mandelbrot que na época trabalhava em ruídos nos computadores da IBM (International Business Machines), o que causavam interferências nas transmissões de dados. Ele acreditava que as transmissões erradas eram como o conjunto de Cantor que ocorriam ao longo do tempo. Porém ele percebeu que os padrões não seriam o que estava pensando, pois as interferências não ocorriam em um intervalo de tempo específicos como o segmento de reta do Conjunto.

Porém, somente em 1975 que Mandelbrot, um dos primeiros a usar o computador para plotar fractais, obteve um traçado gráfico bem elaborado de um conjunto que tem como parâmetro no campo complexo um sistema dinâmico. Conhecido atualmente como Conjunto de Mandelbrot (figura 7) esse fractal é considerado por diversos cientistas como a figura mais complexa que a matemática já observou.

O Conjunto de Mandelbrot é derivado de números complexos no seu formato $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{C}$), são sujeitos a um processo iterativo

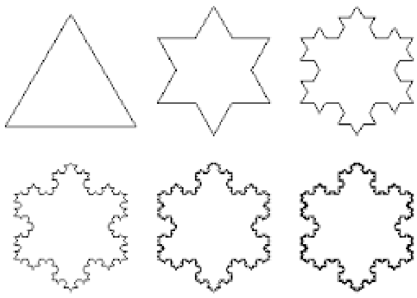
2.1 Classificação dos Fractais

Há uma diversidade de fractais gerados e formados por processos diferentes, baseado nisso os fractais podem ser classificados em três categorias distintas, são elas:

2.1.1 Sistemas de funções iterativas

Também conhecido pela sigla IFS em inglês Iterated Function Systems, consiste na construção de figuras fractais por meio de repetição em escalas menores e infinitas. O processo é feito utilizando substituição geométrica, a cada iteração é feita uma substituição e essa por sua vez é idêntica à imagem inicial, porém em uma escala menor. (Silva, Ganacim, 2019) O Floco de neve de Koch (figura 2) é um exemplo de fractal gerado por meio desse processo.

Figura 2: Floco de neve de Koch

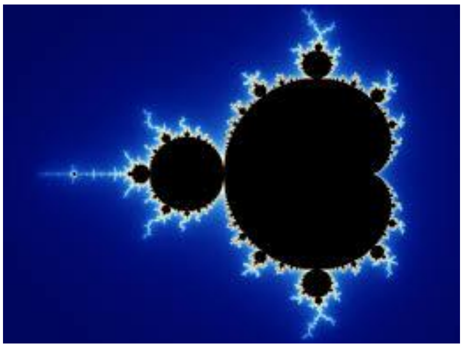


Fonte:http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=39249

2.1.2 Fractais gerados por meio de relações de recorrência

São fractais que ocupam pontos de um plano complexo, ou seja, derivam da recorrência de iterações computacionais dos números complexos, também são conhecidos como fractais de fuga. Tem bastante complexidade na formação, destaque para o Conjunto de Mandelbrot (Farias, 2020) (Figura 3).

Figura 3: Conjunto de Mandelbrot



Fonte:http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico10.php

2.1.3 Aleatórios

São fractais em sua grande maioria natural, porém não é regra, no qual seu formato total é estatisticamente uma ampliação de uma parte. São gerados por processos estocásticos, o que os diferencia dos determinísticos. Os raios são exemplos desse tipo de fractal (Farias, 2020).

Figura 4: Raios.

Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/fatos-curiosos-sobre-os-raios.htm

2.2 Autossimilaridade dos fractais

Uma característica dos fractais é a repetição de seu formato original em escalas menores, esse fenômeno recebe o nome de autossimilaridade e pode ser caracterizado em três diferentes categorias, que são:

2.2.1 Autossimilaridade exata

É a autossimilaridade mais evidente, ou seja, o fractal apresenta uma forma idêntica em diferentes escalas. As figuras que mais apresentam essa aparência é a formada por sistema de funções iterativas, pois a cada iteração ocorre a repetição da imagem inicial em escala menor (Laurenço, 2017).

2.2.2 Quase autossimilaridade

Trata-se de autossimilaridade em escalas que exibem uma aproximação praticamente idêntica ao todo, embora não seja perfeita como a autossimilaridade exata, já que apresentam cópias distorcidas ou degeneradas do fractal completo. Os fractais classificados como de fuga ou de recorrência são exemplos notáveis nesse aspecto (Laurenço, 2017).

2.2.3 Autossimilaridade estatística

Essa é a categoria em que a autossimilaridade é menos evidente. A definição de fractal implica que as características iniciais devem ser preservadas em escalas menores, incluindo a dimensão do fractal. No entanto, essa última categoria envolve uma autossimilaridade estatística, o que resulta em uma aparência não exata em diferentes níveis. Fractais aleatórios são exemplos dessa classificação (Laurenço, 2017).

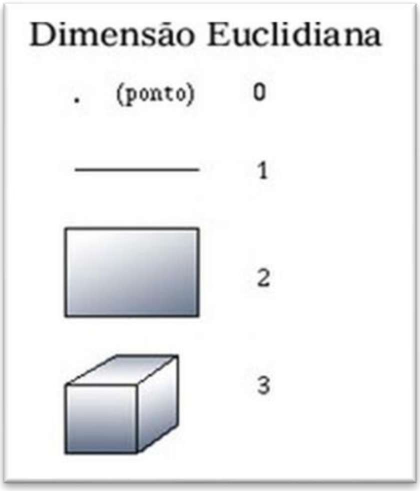
3 DIMENSÃO FRACTAL OU DIMENSÃO DE HAUSDORFF

Desde a antiguidade a geometria euclidiana foi a maneira mais viável de compreender as formas e dimensões do mundo. Porém, surgiu a necessidade de calcular as dimensões de formas irregulares como nuvens, galhos de árvores, vasos sanguíneos, e outra diversidade de fenômenos que tem formatos complexos chamados de “imperfeitos”.

Para compreender a ideia de dimensão é necessário adotar alguns conceitos da geometria euclidiana como largura, altura e comprimento, que são aplicados na medida de comprimento de objetos.

Segundo Mucheroni (2017, p. 2): “Intuitivamente, um ponto tem dimensão 0, uma reta tem dimensão 1, um plano tem dimensão 2 e um cubo tem dimensão 3. Porém, na geometria fractal encontramos objetos matemáticos que possuem dimensão fracionária”. Logo, um ponto não possui largura, altura ou comprimento, o que o torna adimensional; a reta não possui largura e nem altura, somente comprimento, logo é unidimensional; o plano é bidimensional, pois tem largura e comprimento; e um sólido é composto de comprimento, largura e altura, o que o torna tridimensional. Os fractais apresentam dimensões fracionadas implicando que seus valores estão entre as dimensões existentes na geometria euclidiana.

Figura 5: Dimensão Euclidiana.



Fonte:http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?pagina=espaco%2Fvisualizar_aula&aula=22040&secao=espaco&request_locale=es

A dimensão topológica de um conjunto é sempre um valor inteiro, ou seja, será 0 se o conjunto for totalmente desconexo, 1 se haver vizinhança com dimensão 0, e assim sucessivamente, evidenciando que a dimensão topológica no máximo é igual a dimensão de Hausdorff (Reis, 2003).

Uma maneira de melhor compreender a dimensão topológica implica em considerar um cubo que tem dimensão 3, suas fronteiras são quadrados com dimensão 2. Contudo, a fronteira de um quadrado é composta por retas com dimensão 1 e uma reta é composta por pontos que tem dimensão 0. Dessa maneira é intuitivo que a dimensão de figuras euclidianas equivale a somar 1 com a dimensão de sua fronteira. (Mucheroni, 2017).

O fato de a dimensão topológica ser compreendida como um valor sempre inteiro faz com que não seja capaz de representar e calcular dimensões fractais, pois os mesmos apresentam alto grau de complexidade e rugosidade no seu formato. Desse modo, é necessário haver uma maneira de calcular a dimensão de um fractal.

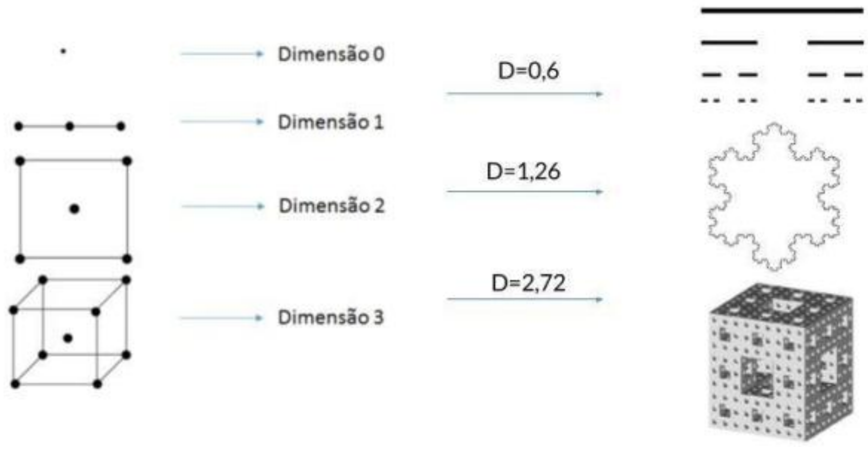
Felix Hausdorff (1868 - 1942), (Figura 6) foi um grande matemático alemão que fez grandes contribuições para a matemática, em especial aplicadas à Teoria dos números, Astronomia, Topologia, entre outros.

Figura 6: Felix Hausdorff.

Fonte:https://alchetron.com/Felix-Hausdorff

Engajado no estudo da Topologia desenvolveu em 1918 um método para calcular a dimensão de figuras com dimensão inteiras e fracionadas de fractais. Seu método baseia-se em conceitos intuitivos da geometria euclidiana, partindo de alguns exemplos chega-se a uma maneira de calcular a dimensão de um fractal.

Figura 7: Dimensão euclidiana e dimensão Fractal.



Fonte: https://esistemascomplexos.wordpress.com/category/fractais/

Tome um segmento de reta de comprimento L, dividindo-o em k partes iguais, tem - se cada parte igual ao fator de redução $U = \frac{L}{n}$, em que n é definido como o número das partes em que o segmento de reta pode ser dividido. Logo, a dimensão D da geometria euclidiana pode ser verificada por meio da relação $k = (\frac{L}{U})^D$ (Mucheroni, 2017).

Sabendo que a dimensão de uma reta é 1 e considere o fator de redução $U = \frac{1}{3}$, temos:

$$k = [\frac{1}{(\frac{1}{3})}]^1 \rightarrow 3 = 3^1$$

No segundo exemplo será feito o mesmo processo, porém, com um quadrado de lado inteiro, dividindo em $k = 9$ partes idênticas, têm – se $\frac{L}{n} = \frac{1}{3}$ do valor do lado. Fazendo a mesma proporção, e sabendo que a dimensão do quadrado é 2, segue que:

$$k = (\frac{L}{U})^D \rightarrow 9 = 3^2$$

E pra finalizar será repetida a mesma ideia, porém, com um cubo de lado inteiro que será dividido em $k = 27$ cubos iguais, obtendo $\frac{L}{n} = \frac{1}{3}$ do valor do lado. Realizando a mesma proporção com dimensão do cubo igual a 3, temos:

$$k = (\frac{L}{U})^D \rightarrow 27 = 3^3$$

Portando, a relação de proporcionalidade $k = (\frac{L}{U})^D$ é válida, aplicando logaritmo natural (ln) em ambos os lados da igualdade obtemos:

$$\ln(k) = \ln [\left(\frac{L}{U}\right)^D]$$

Utilizando a propriedade logaritmo de uma potência ($log_e^{M^N} = N log_e^M$) temos:

$$\ln(k) = D. \ln [\left(\frac{L}{U}\right)]$$

Isolando D, obtemos a seguinte equação:

$$D = \frac{\ln(k)}{\ln [\left(\frac{L}{U}\right)]} \ (1)$$

Essa equação é suficientemente capaz de determinar a dimensão de um fractal, considerando D como a dimensão de um conjunto qualquer, k como a quantidade de partes de cada etapa de uma divisão, L como o comprimento do lado dividido em k partes iguais e U o comprimento de cada partição obtida da divisão.

Esta equação foi o trabalho de Felix Hausdorff que ficou conhecida como Dimensão de Hausdorff em sua homenagem e alguns autores a chamam de Dimensão de Hausdorff-Besicovitch, pois seu desenvolvimento teve contribuições do matemático nascido na Rússia Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970). “Anos mais tarde, o matemático francês Benoit Mandelbrot retomou os estudos de Hausdorff e Besicovitch em seus trabalhos sobre a geometria fractal” (Mucheroni, 2017, p. 45).

4 FRACTAIS E SEUS CRIADORES

Na seção anterior, foi abordado a dimensão topológica e a dimensão de Hausdorff, conceitos essenciais para o aprofundamento no estudo dos fractais, especialmente no que diz respeito à geometria de Hausdorff, que descreve o comportamento dessas estruturas. Nesta seção exploraremos os principais fractais, seus respectivos criadores e como calcular suas dimensões utilizando os conceitos previamente discutidos.

Segundo Mandelbrot (1977, p. 3):

> Classical mathematics had its roots in the regular geometric structures of Euclid and the continuously evolving dynamics of Newton. Modern mathematics began with Cantor's set theory and Peano's space-filling curve.

Dois fractais de grande destaque são a Poeira de Cantor e a Curva de Peano. Embora, na época de suas descobertas, não tivessem sido considerados de grande importância para a ciência, essas construções foram fundamentais para o desenvolvimento da matemática moderna no século XX. Com o avanço da matemática, fruto dos conceitos do século XIX, diversos outros fractais surgiram, dando origem ao que se poderia chamar de uma "galeria de monstros". Esse fenômeno evidenciou o potencial da matemática para expandir e explorar novos horizontes em seu campo de estudo.

Afirma Mandelbrot (1977, p. 3):

> The mathematicians who created the monsters regarded them as important in showing that the world of pure mathematics contains a richness of possibilities going far beyond the simple structures that they saw in Nature.

Os fractais são chamados de monstros porque fogem dos padrões da geometria euclidiana e segundo Mandelbrot (1977, p.3) são: “[...] parentes na pintura cubista e música atonal que estavam perturbando os padrões estabelecidos de gosto nas artes”.

4.1 Conjunto de Cantor

Georg Ferninand Luddwing Philip Cantor (São Peterburgo, Rússia,1845-Halle, Alemanha,1918), (Figura 8) foi um matemático que ficou conhecido por ter desenvolvido a moderna Teoria dos Conjuntos no século XIX e a trabalhar na fundamentação da matemática, com que depositava todo seu foco. Apresentou inovadoras ideias a respeito do conceito de infinito, lhe dando destaque pelo mesmo. Filho de George Waldemar Cantor, um comerciante dinamarquês e de Maria Anna Böhm, uma musicista russa (Rabay, 2013).

Mudou-se para a Alemanha aos 11 anos e estudou no Instituto Federal de Tecnologia de Zurique, fez doutorado na Universidade de Berlim, isso em 1867, e trabalhou como professor na Universidade de Halle. Morreu em 1918 em um hospital psiquiátrico, pois sofreu com depressão derivados do estudo excessivo de matemática (Rabay, 2013).

Figura 8: Georg Ferninand Luddwing Philip Cantor.

Fonte:http://www.projekt2020.uni-halle.de/index.php?id=37

Engajado no estudo e pesquisa sobre o infinito e conjuntos, Cantor apresentou, em 1883, um trabalho que hoje é conhecido como o Conjunto de Cantor, ou, popularmente, Poeira de Cantor, devido à sua aparência dispersa. Sua obra representou um marco importante na compreensão da estrutura dos conjuntos e das propriedades do infinito (Rabay, 2013).

Consiste em uma infinidade de pontos contidos em um intervalo fechado [0,1]. Sua construção geométrica inicia com um segmento de reta de tamanho unitário, que pode ser compreendido algebricamente como o intervalo fechado [0,1]. Em seguida, o segmento é divido em três partes iguais e retira-se a parte central que corresponde ao terço médio, o resultado são dois intervalos fechados: $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$, ambos de comprimento $\frac{1}{3}$. O processo é repetido novamente, tirando-se os terços médios de cada segmento correspondente aos intervalos. Resultando nos intervalos $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$, de comprimento $\frac{1}{9}$. A construção continua com a remoção dos terços médios de cada um dos intervalos restantes, repetindo-se indefinidamente à medida que o número de etapas N tende ao infinito. Esse procedimento gera uma sequência infinita de intervalos cada vez menores, aproximando-se de um conjunto de pontos que mantém uma estrutura complexa. Na Tabela 1, são apresentadas algumas iterações do processo, ilustrando como os intervalos diminuem de tamanho a cada etapa.

Quando se faz $N \to \infty$, obtêm-se o Conjunto de Cantor, observado na figura 9.

Figura 9: Conjunto de Cantor

Fonte: https://l1nq.com/5vmqL

Tabela1: A quantidade e o comprimento dos segmentos das etapas do Conjunto de Cantor.

Etapas	k	U
0	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$
2	4	$\frac{1}{9}$
3	8	$\frac{1}{27}$
...	...	...
n	2^n	3^{-n}

Fonte: Autor, 2024

Analisando o Fractal somente nos cinco primeiros estágios, percebe-se que na etapa $N = 0$ inicial, tem-se um segmento inteiro, no nível $N = 2$, dois segmentos, nível $N = 3$, são quatro segmentos, enquanto que na etapa $N = 4$, são oito segmentos. Desse modo, é perceptível uma regularidade, decorrendo no enésimo estágio que o número de segmentos será de 2^N.

Calculando o limite de 2^N quando $N \to \infty$ no Conjunto de Cantor, temos:

$$\lim_{N \to \infty,} 2^N = \infty$$

Logo, a quantidade de segmentos da estrutura do Conjunto de Cantor tende para o infinito. Contudo, uma característica aparentemente paradoxal refere-se ao comprimento dos segmentos. Analisando os mesmos, é notável que no estágio $N = 0$ o comprimento do segmento é 1, para $N = 1$ tem-se que o comprimento é $\frac{1}{3}$, para $N = 2$ o comprimento é $\frac{1}{9}$ e para $N = 3$ o comprimento é de $\frac{1}{3^3}$. Portanto, para o enésimo nível o comprimento do segmento será de $(\frac{1}{3})^N$.

Calculando o limite de $(\frac{1}{3})^N$ quando $N \to \infty$, temos:

$$\lim_{N \to \infty} (\frac{1}{3})^N = 0$$

Concluindo que o comprimento de cada segmento de reta tende a zero, tornando o Conjunto de Cantor uma série de pontos muito pequenos, quase “pulverizados”, por isso, o mesmo é também conhecido como Poeira de Cantor.

Para analisar o tamanho do Conjunto de Cantor, basta multiplicar a quantidade de segmentos 2^N pelo tamanho dos mesmos $(\frac{1}{3})^N$, e fazer as gerações N tender para o infinito.

Logo,

$$(2^N) \, . \, [(\frac{1}{3})^N]$$

Utilizando a propriedade de potência: $(a \, . \, b)^n = a^n . \, b^n$, temos:

$$(2 \, . \, \frac{1}{3})^N = (\frac{2}{3})^N$$

Calculando o limite da última sentença, para $N \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^N = 0$$

Ou seja, o comprimento do Conjunto de Cantor é zero. “Entende-se por comprimento total a soma dos comprimentos dos segmentos de um conjunto” (Assis et al., 2008, p. 6). Evidenciando características paradoxais, pois enquanto os segmentos que formam o conjunto tendem para infinito, o comprimento do conjunto é nulo. Os casos matemáticos que apresentam essas contradições são chamados de Casos Patológicos ou até mesmo Monstros Matemáticos.

Com as relações obtidas anteriormente conclui-se que a dimensão do Conjunto de Cantor está entre 0 e 1. Calculando com a Dimensão de Hausdorff, temos que o tamanho do segmento inicial é $L = 1$, ao dividir a cada nível o segmento em três, sempre resta dois, então $k = 2$, e o comprimento de cada segmento após a divisão em três $U = \frac{1}{3}$. Substituindo os valores na relação (1) temos:

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln\,[\frac{1}{(\frac{1}{3})}]}$$

Segue que:

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0,6309297536$$

O valor obtido é condizente com a afirmação de Mucheroni (2017, p. 46): “Logo, a dimensão de Hausdorff do Conjunto de Cantor é aproximadamente 0,63. Esse valor não chega a ser 1 (dimensão de um segmento), porém, é maior que zero (dimensão de um ponto)”.

4.2 Curva de Peano

O italiano Giusepe Peano (Cuneo, Itália, 1858 – Turim, Itália, 1932), (Figura 10) foi um grande matemático que se destacou e fez grandes contribuições nas áreas de Álgebra Linear, Calculo Vetorial, Teoria dos Conjuntos, entre outros. Nesse último, ele fez contribuições na linguagem matemática. Contribuiu também na Lógica, pois a utilizava com bastante rigor e precisão em seus trabalhos, considerado por muitos como o pai da Lógica. Nascido em uma fazenda próxima 5 km de Cuneo, mudou - se para Turim na intenção de estudar, onde graduou, em1880, doutor em matemática pela Universidade de Turim, lecionando na mesma e também na Academia Militar de Turim. Em 1890 publicou a Curva de Peano, um monstro matemático, hoje chamado fractal (Rabay, 2013, p.4).

Figura 10: Giusepe Peano

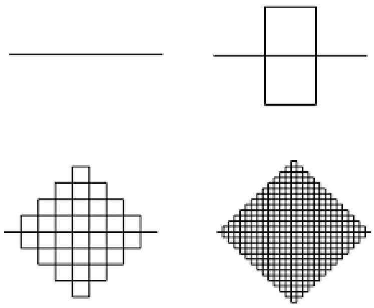
Fonte: http://learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Peano

O fractal que leva o nome de Peano tem a aparência de um quadrado, mas sua construção é bem mais complexa e sofisticada. Ele descreve uma curva que, de maneira notável, preenche toda a superfície de um quadrado. Esse fractal ficou conhecido como Monstro de Peano, ou Curva de Peano, destacando-se por suas propriedades únicas (Rabay, 2013).

A técnica de construção baseia-se em um processo iterativo. Considere para a construção um segmento de reta de comprimento arbitrário que é dividido em três partes iguais, cada uma com $\frac{1}{3}$ do tamanho original. Em seguinte, a parte central é removida e substituída por nove segmentos de tamanho $\frac{1}{3}$ do original, formando então dois quadrados de lados com a mesma medida anterior.

Novamente, repete-se o processo dividido os novos segmentos em três partes iguais de comprimento $\frac{1}{3}$ do novo segmento, retira-se a parte central e substitua por nove segmentos de mesmo tamanho, contudo, o tamanho desses últimos serão $\frac{1}{9}$ do original. Repetindo o processo indefinidamente, obtém-se a Curva de Peano. Na tabela 2 temos algumas iterações, e a cada nova repetição a área quadrangular será mais preenchida como é observado na figura 11.

Figura 11: Curva de Peano



Fonte: https://l1nq.com/eisAI

Tabela 2: A quantidade e o comprimento dos segmentos das etapas da Curva de Peano

Etapas	k	U
0	1	1
1	9	$\frac{1}{3}$
2	81	$\frac{1}{9}$
3	729	$\frac{1}{27}$
...	...	...
n	9^n	3^{-n}

Fonte: Autor, 2024

Com o preenchimento da área a imagem obtida é algo muito semelhante a um quadrado que tem como diagonal o segmento de reta considerado do nível 0. O quadrado tem dimensão 2, logo a Curva de Peano tem a mesma dimensão. Calculando a Dimensão de Hausdorff, temos que pela construção foi observado que a cada iteração o tamanho dos segmentos é reduzido a $U = \frac{1}{3}$ e a quantidade de segmentos é $k = 9$ vezes a etapa anterior, substituindo esses valores na relação (1) obtém - se:

$$D = \frac{\ln(9)}{\ln[\frac{1}{(\frac{1}{3})}]}$$

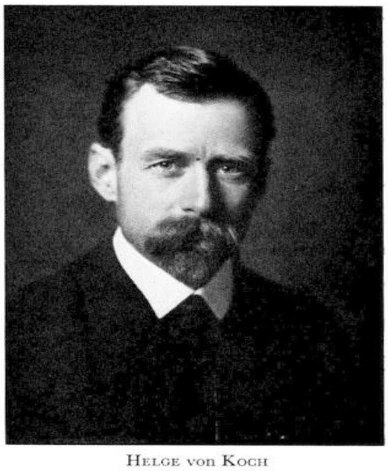
Segue que:

$$D = \frac{2\ln(3)}{\ln(3)} = 2$$

4.3 Curva de Koch

A Curva de Koch é um dos primeiros fractais de curva a ser conhecido. Desenvolvido pelo sueco, Niels Fabian Helge von Koch (Estocolmo, Suécia 1870-Estocolmo, Suécia 1924), (Figura 12) em 1904 (Rabay, 2013).

Figura 12. Helgevon Koch.



HELGE von KOCH

Fonte:https://mathsmattersresources.com/making-a-von-koch-snowflake/

Koch fez grandes contribuições nas áreas de Equações Diferenciais e Teoria dos Números. Foi professor na Universidade de Estocolmo, onde graduou e adquiriu o título de doutor em matemática. O mesmo define sua criação como uma curva não diferençiável e contínua no intervalo. (Rabay, 2013).

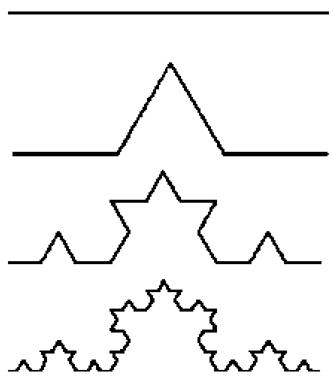
Há dois fractais que derivam do mesmo procedimento: a Curva de Koch, que começa a partir de um segmento de reta, e a Ilha de Koch, cuja construção se inicia com um triângulo equilátero. Neste trabalho, daremos maior ênfase à Ilha de Koch, explorando suas propriedades em maior detalhe. (Rabay, 2013).

A construção desse último fractal é feita a partir de um triangulo equilátero. Na sequência, cada segmento é dividido em três partes iguais, logo após isso, retira-se a parte média do segmento inteiro e em seu lugar serão colocados dois segmentos de comprimento $\frac{1}{3}$ do tamanho original, resultando em uma nova formação triangular, contudo sem a base que fora tirada pela substituição. A figura final é composta por quatro segmentos de tamanho $\frac{1}{3}$ do lado do triângulo (Rabay, 2013)

O processo é repetido novamente nos segmentos resultantes e refeito sucessivamente nos infinitos níveis até se obter a Curva de Koch, também conhecida como Ilha de Koch ou Floco de neve de Koch, esse último, deriva do formato do fractal. A repetição dos processos nos infinitos níveis implica em um fractal iterativo.

A figura 13 mostra os processos até o nível dois, contudo, somente em um segmento do triangulo. Na figura 2, o processo ocorre simultaneamente nos três segmentos do triângulo, a tabela 3 mostra algumas iterações.

Figura 13: Curva de Koch e uma aplicação



Fonte: https://l1nq.com/tpKfO

Tabela 3: A quantidade e o comprimento dos segmentos das etapas da Curva de Koch

Etapas	k	U
0	1	1
1	4	$\frac{1}{3}$
2	16	$\frac{1}{9}$
3	64	$\frac{1}{27}$
...	...	...
n	4^n	3^{-n}

Fonte: Autor, 2024

A dimensão da Curva de Koch está entre a dimensão de uma reta e a dimensão de um plano. Para o cálculo da dimensão, o valor de $k = 4$, pois o segmento é dividido em quatro partes iguais no nível 1 e $U = \frac{1}{3}$, pois cada segmento tem esse comprimento. Utilizando a relação (1) temos:

$$D = \frac{\ln(4)}{\ln[\frac{1}{(\frac{1}{3})}]}$$

Segue que:

$$D = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1{,}26185950$$

O resultado obtido significa que a Curva de Koch não ocupa toda a porção de um plano que a contém, mas é necessário mais que uma curva de dimensão 1 para contê-la.

4.4 Triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski (Varsóvia, Polônia, 1882 – Varsóvia, Polônia, 1969), (Figura 14) foi um matemático que teve destaque no estudo da Topologia em Conjuntos e na Teoria dos Números, professor das Universidades de Lyov e Varsóvia. Essa última foi o instituto pela qual

Sierpinski atingiu seu nível superior. Mesmo com todas as dificuldades impostas pelo Império Russo, pois não facilitavam a entrada de poloneses a níveis de escolaridade elevados, o mesmo conseguiu iniciar seus estudos em 1899. Foi o criador do Tapete de Sierpinski, e do Triângulo de Sierpinski, fractais que falaremos a seguir (Rabay, 2013, p.4).

Figura 14. Waclaw Sierpinski

Fonte: http://www.learn-math.info/history/photos/Sierpinski.jpeg

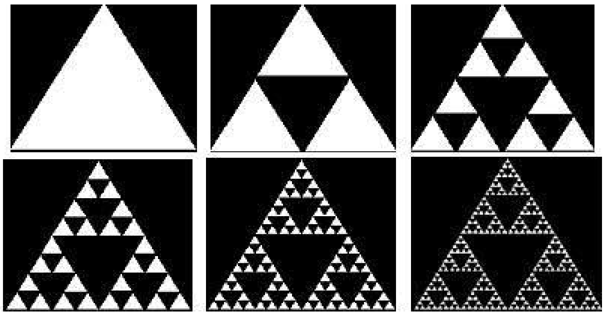
Considerado um fractal clássico, o Triangulo de Sierpinski é construído a partir de um triangulo equilátero. Do triângulo considerado retira-se outro triângulo de modo que os vértices desse último estarão nos pontos médios do inicial, esse é considerado o nível 1 do fractal. Do processo anterior, restam três triângulos com lados medindo $\frac{1}{2}$ do original. O processo é repetido nos outros três triângulos restantes obtendo o nível 2 do fractal. Como resultado tem-se nove triângulos, contudo, de lados $\frac{1}{4}$ do inicial.

No nível n o fractal terá 3^n triângulos, com lados de comprimento $\frac{1}{2^n}$ do triângulo original. Fazendo n tender ao infinito na expressão 3^n, obtém – se:

$$\lim_{n \to \infty} 3^n = \infty$$

Isso garante que nos infinitos níveis, tem-se infinitos triângulos que podem ser observados na figura 15 até a iteração 5 e na tabela 4.

Figura 15:Triângulo de Sierpinski)



Fonte: https://l1nq.com/hZ8xv

Tabela 4: Quantidade e comprimento dos segmentos das etapas do T. de Sierpinski

Etapas	k	U
0	1	1
1	3	$\frac{1}{2}$
2	9	$\frac{1}{4}$
3	27	$\frac{1}{8}$
...	...	...
n	3^n	2^{-n}

Fonte: Autor, 2018.

Quanto ao perímetro do fractal, será considerado L o lado do triangulo inicial, oque implica que seu perímetro no nível zero é $N_0 = 3L$, no nível um $N_1 = \frac{3L}{2}$ e no nível dois $N_2 = \frac{3L}{4}$, aplicando o mesmo raciocínio nas n iterações obtemos $N_n = \frac{3L}{2^n}$.

Portanto, sabendo que 3^n é o total de triângulos e usando a relação obtida anteriormente teremos o perímetro total dado por:

$$N_t = 3\frac{3^n}{2^n} L.$$

Então, quando as iterações n tende para o infinito o perímetro total também vai para o infinito.

Chamando A_0 a área do primeiro triângulo, iremos encontrar a área dos triângulos resultantes de algumas iterações. Na iteração inicial o triângulo principal é dividido em quatro triângulos e desses quatros, retira-se o central, de modo que a área de todos os que restaram é dada por $A_1 = \frac{1}{4}A_0$, no nível dois, aplicamos o mesmo procedimento, e cada triângulo terá área igual a um quarto de A_1. Logo $A_2 = \frac{1}{16}A_0$, repetindo esse processo a n iterações, a área de cada triângulo será:

$$A_n = \frac{1}{4^n}A_0$$

A área total A_t de cada um dos triângulos 3^n será:

$$A_t = 3^n \frac{1}{4^n}A_0 = (\frac{3}{4})^n A_0$$

Ao calcular o limite de $(\frac{3}{4})^n A_0$ com n tendendo pro infinito e sabendo que A_0 é uma área finita, teremos que a área é zero, como segue:

$$\lim_{n \to \infty} (\frac{3}{4})^n A_0 = 0$$

A dimensão do fractal de Sierpinski está entre 1 e 2, utilizando a Dimensão de Hausdorff, relação (1). Assim, $k = 3$, pois a cada nova iteração feita em um triângulo sempre resultam em três novos triângulos, enquanto $U = \frac{1}{2}$, pois os segmentos que formam os triângulos são divididos ao meio pelo novo nível. Logo:

$$D = \frac{\ln(3)}{\ln[\frac{1}{(\frac{1}{2})}]}$$

Segue que:

$$D = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1{,}58496250$$

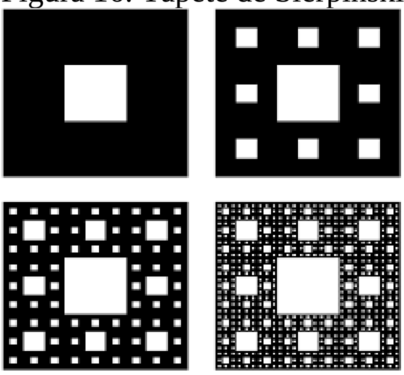
Sua dimensão evidencia que uma reta não é capaz de representa-lo, pois a dimensão da figura se aproxima da dimensão de um plano.

4.5 Tapete de Sierpinski

Outro fractal construído por Sierpinski é chamado de Tapete de Sierpinski. Sua construção baseia-se praticamente no mesmo processo da construção do Triângulo de Sierpinski e foi apresentado em 1916.

Para o processo de construção, considere um quadrado totalmente preenchido no plano, essa é a iteração 0, em seguida o quadrado será dividido em nove outros menores e iguais, retira-se então o quadrado da parte central e o resultado final são oito quadrados, iteração 1. Repetindo esse processo nos quadrados restantes e nos que se sucedem a cada nova iteração, teremos o Tapete de Sierpinski, observado na figura 16 e nas iterações da tabela 4.

Figura 16: Tapete de Sierpinski



Fonte: https://l1nq.com/V3KSv

Tabela 4: Quantidade e comprimento dos segmentos das etapas do Tapete de Sierpinski

Etapas	k	U
0	1	1
1	8	$\frac{1}{3}$
2	64	$\frac{1}{9}$
3	512	$\frac{1}{27}$
...	...	...
n	8^n	3^{-n}

Fonte: Autor, 2024

A dimensão desse fractal pode ser determinada considerando $k = 8$, pois a cada iteração um quadrado é dividido e dessa divisão resultam oito outros iguais e menores que o inicial considerado, e $U = \frac{1}{3}$, pois cada quadrado tem seus lados divididos em 3 partes, ou seja, o tamanho de cada será $\frac{1}{3}$ do todo. Aplicando a dimensão de Hausdorff (relação (1)), temos:

$$D = \frac{\ln(8)}{\ln[\frac{1}{(\frac{1}{3})}]}$$

Segue que:

$$D = \frac{\ln(8)}{\ln(3)} \approx 1{,}892789260$$

Logo, a dimensão desse fractal se aproxima bastante de um plano, contudo não é capaz de ocupar toda a porção do plano.

Quanto à área e o perímetro, segundo (Oliveira, 2008, p 31):

> Como em cada iteração a área é diminuída por um fator 8/9 a área total desse tapete, após infinitas iterações, é zero. Isso fica claro se pensarmos que o tapete de Sierpinski não é formado por pedacinhos que não possuem área, mas sim que ele é formado por pequeninos tapetes de Sierpinski que não têm área. Outra característica curiosa é que se você somar o perímetro de todos os buracos, ele é infinito.

O Tapete de Sierpinski tem várias características que se assemelham ao Triângulo de Sierpinski. Entre elas podem ser destacados a área zero quando as iterações tendem para o infinito e o perímetro infinito para infinitas iterações.

4.6 Esponja de Menger

Karl Menger (1902, Viena, Áustria – 1985 Illinois, EUA) figura 17, foi um matemático que fez grandes contribuições nas áreas de Geometria Hiperbólica, Dimensão Topológica, Álgebra, entre outros. Ingressou na Universidade de Viena em 1920 para estudar Física, em 1924 terminou o doutorado em Espaço Topológico e foi docente nas Universidades de Amsterdam e Viena, Notre Dame e Illinois (Rabay, 2013, p.7).

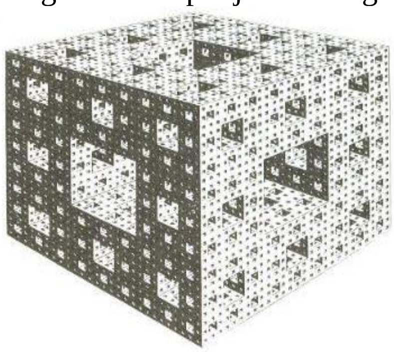
Figura 17: Karl Menger

Fonte:https://pt.wikipedia.org/wiki/Karl_Menger

Explorando os conceitos de dimensão topológica, Menger criou o fractal que recebeu o seu nome, Esponja de Menger em 1926. O curioso dessa figura é sua formação, pois suas faces apresentam o formato do Tapete de Sierpinski (Figura 16)**,** e pode ser entendido como uma expansão desse em três dimensões.

A construção desse fractal baseia-se em um cubo. O primeiro passo consiste em dividi-lo em 27 outros menores com arestas de tamanho $\frac{1}{3}$ do original, retirando o cubo central de cada e o cubo interno do inicial, sobram 20 do total. Então, esse mesmo processo é repetido nos 20 cubinhos restantes e assim infinitamente a cada nova iteração, resultando na Esponja de Menger que pode ser visto na figura abaixo.

Figura 18: Esponja de Menger



Fonte: https://l1nq.com/jO96R

Tabela 5: Quantidade e comprimento dos segmentos das etapas da Esponja de Menger.

Etapas	k	U
0	1	1
1	20^1	$\frac{1}{3}$
2	20^2	$\frac{1}{9}$
3	20^3	$\frac{1}{27}$
...	...	...
n	20^n	3^{-n}

Fonte: Autor, 2024

A dimensão desse fractal está contida entre um plano e um sólido e pode ser obtida utilizando a relação (1), considerando $k = 20$, pois é a quantidade que sobra em cada cubo a cada nível e $U = \frac{1}{3}$, no qual implica no tamanho do segmento sempre que há uma nova iteração que pode ser observado na tabela 5. Logo, a dimensão é:

$$D = \frac{\ln(20)}{\ln[\frac{1}{(\frac{1}{3})}]}$$

Segue que:

$$D = \frac{\ln(20)}{\ln(3)} \approx 2{,}7268330279$$

Esse resultado é justificado pela área e o volume dessa figura, pois se comportam de forma muito diferente as de um plano e um sólido. Quando as iterações tendem para o infinito a área é infinita, ocasionada pela retirada de cubos e o volume é nulo pelo mesmo motivo.

4.7 Conjunto de Julia

O Conjunto de Julia é um fractal de fuga que utiliza o plano complexo como local de origem e tem semelhanças com o Conjunto de Mandelbroit, pois foram figuras derivadas de um estudo continuado. Ambos os fractais possuem dimensão 2.

Gaston Maurice Julia (Sidi bel Abbés, Algeria, 1893 – Paris, França, 1978), ficou conhecido por desenvolver o fractal falado anteriormente, provavelmente na época em que passou por internações devido à perda de seu nariz na Primeira Guerra, ocasionando o uso de uma máscara de couro que pode ser observado na figura 19 abaixo (Rabay, 2013, p.9).

Figura 19: Gaston Maurice Julia

Fonte:http://www.aliens-everything-you-want-to-know.com/GastonJulia.html

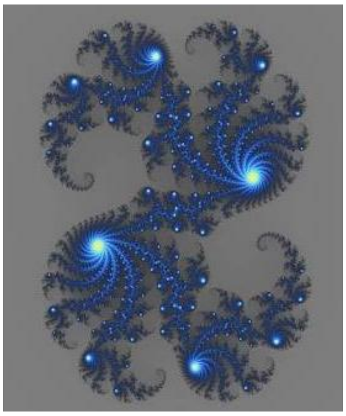
Segundo Rabay (2013, p.30) a construção da figura consiste na relação de recorrência $z_n : ₵ \to ₵$ definida por $z_{n+1} = z_n^2 + c$, no qual $n \in \mathbb{N}$, $c \in ₵$, isto é $c = a + bi = (a, b)$ ou $c = (a, b)$, em que c é um parâmetro das curvas do fractal geradas pelas n iterações no ponto $z_0 = x + yi$. No plano complexo ocorre o processo de construção para um conjunto numérico c, mantendo z_n em uma região fechada, ou seja, $|z_n| \leq k$. O resultado dessas iterações pode ser observado na figura 20.

Baier ([200-]) afirma que:

> Se a órbita de Z_0 é atraida para o infinito, então Z_0 não pertence a nenhum conjunto de júlia. Se a órbita de Z_0 é atraida para um círculo em entorno da origem, então Z_0 pertence a algum conjunto de Julia. As duas situações para as orbitas de Z_0 complementam-se e preenchem alguma parte do plano complexo e com os dois conseguimos gerar o conjunto de Julia associado ao parâmetro c. O valor do ponto c determina a formação dos conjuntos de Julia, sendo associado com um conjunto de Julia em particular.

Ou seja, os conjuntos são gerados por funções sequenciais, e pode haver convergências e divergências em relação às órbitas do ponto Z_0 fixados a c.

Figura 20: Representação do Conjunto de Julia para um determinado valor de c.



Fonte: https://pixabay.com/pt/conjunto-de-julia-fractal-matem%C3%A1tica-979305/

Segundo Baier ([200-]):

> Os conjuntos de julia surgiram após vários estudos acerca de processos iterativos envolvendo números complexos. Estes estudos foram apresentados no ano de 1918 por Gaston Julia e Pierre Fatou sem o recurso do computador que hoje é de grande ajuda para produzir detalhadamente o comportamento dos conjuntos.

Esse fractal é criado com recursos computacionais, assim como o Conjunto de Mandelbroit, e são considerados fractais de fuga. São os mais recentes, pois não havia tecnologia suficiente no passado para plotar tais figuras.

4.8 Conjunto de Mandelbroit

O Conjunto é uma figura incrível e muito complexa criada pelo famoso matemático francês Benoit B. Mandelbrot (figura 21), pai da geometria fractal. Nascido em 20 de novembro de 1924 na Varsóvia, mudou-se para Paris 11 anos depois para estudar até o início da segunda guerra, logo após mudou-se novamente para Tulle. Estudou no Instituto de Tecnologia da Califórnia nos Estados Unidos entre os anos de 1947 a 1949 obtendo o mestrado em aeronáutica, voltou para França e tornou-se doutor em ciências da matemática pela Universidade de Paris em 1952. Iniciou uma carreira profissional na IBM em 1958 e ganhou inúmeros prêmios científicos, sua biografia foi publicada em 2012 com o título The Fractalist (Reis, 2016).

Figura 21: Benoit Mandelbroit.

Fonte: https://users.math.yale.edu/mandelbrot/BBM-2000-hires.jpg

Pierre Fatou (1878-1929) em 1905 definiu o Conjunto de Mandelbroit (Figura 3), estudando meios como $z \to z^2 + c$, iniciando esse processo pelo ponto z_0 no plano. Segundo Reis (2016, p. 21) “Fatou percebeu que a órbita de $z_0 = 0$ sob a transformação $z \to z^2 + c$ forneceria alguma introspecção sobre o comportamento de tais sistemas. Existem infinitas órbitas uma para cada valor de c”. Se um ponto definido pela lei anterior atingir, em relação à origem, uma distância maior que dois, então a órbita explodirá para o infinito, ou seja, se $|z| > 2$ e $|z| > c$, então $Q_e(z) = z^2 + c \to \infty$ com n $\to \infty$ (Reis 2016, p. 21).

Fatou não tinha recursos tecnológicos na época para plotar essas informações em um computador, então ele tentou fazer a mão, conseguindo provar somente que as órbitas tendem pra o infinito pra valores maiores que dois. Mas foi somente durante os 35 anos que Mandelbroit trabalhou na IBM que a figura do Conjunto foi descoberta, exatamente em 1979.

5 REFLEXÕES SOBRE AS DIFICULDADES NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

O avanço da humanidade está intimamente ligado ao desenvolvimento da matemática, pois a busca humana por compreender o mundo e aprimorar métodos tornam isso possível. Nessa perspectiva, a matemática desempenha um papel importante nas experiências humanas, auxiliando na compreensão de diversos fenômenos sociais, econômicos e culturais.

Por meio disso, é essencial que as pessoas adquiram conhecimentos matemáticos específicos, de modo que o processo de ensino e aprendizagem se torna fundamental. No entanto, vários impasses dificultam a apropriação dos conceitos matemáticos, incluindo a própria estrutura hierárquica da disciplina. Ademais, os conteúdos muitas vezes parecem desconectados da realidade cotidiana e os métodos de ensino ainda são frequentemente rígidos, baseados em abordagens expositivas que carecem de aplicabilidade prática. (Alves, 2019).

Especificamente no caso da geometria euclidiana, embora esteja próxima à realidade tangível em muitos aspectos, é frequentemente abordada como um conjunto abstrato de conceitos sem relevância prática direta. Contudo, essa geometria apresenta limitações na representação de formas naturais complexas como nuvens, árvores, contornos montanhosos e ondas do mar. Isso ressalta a necessidade de uma nova perspectiva geométrica que culmina na geometria fractal (Alves, 2019).

A discussão sobre métodos e estratégias para aprimorar o ensino da geometria euclidiana é uma prática comum visando melhorar a assimilação das habilidades e conhecimentos associados a essa área.

Em relação a isso, as abordagens costumam conectar ideias à vida real, indicando que os fractais podem servir como recursos educacionais. Os fractais possibilitam a exploração de diferentes conceitos em diversas disciplinas, como matemática, geometria e álgebra, promovendo uma compreensão mais tangível dos temas (Alves, 2019).

Diversos são os fatores que dificultam a apropriação de conceitos matemáticos por parte dos estudantes na educação básica. Um fator de fácil constatação é inerente à própria natureza da disciplina: o seu caráter às vezes puramente teórico e abstrato. Outros fatores estão associados ao processo de ensino-aprendizagem e às práticas pedagógicas adotadas. Nessa direção, concordando com o que diz (Alves, 2019), podemos destacar o distanciamento entre conteúdos abordados nas aulas e o mundo real das experiências cotidianas dos alunos, resultante de uma abordagem pedagógica engessada, pautada apenas em metodologias expositivas, que realçam esse caráter teórico, sem um componente prático, palpável, que evidencie a importância daqueles conteúdos estudados. Para além da contextualização dos conteúdos abordados com a vivência do estudante, com o seu mundo, o desafio consiste em oferecer uma proposta pedagógica que proporcione a esse aluno um novo ponto de vista na observação e interpretação desse mundo, que desperte interesse e que agregue novos significados.

No que se refere ao ensino de geometria euclidiana, apesar de esta matéria ensejar aplicações bem práticas, imbuídas de significados concretos da vida cotidiana dos alunos, existem algumas limitações no seu uso de forma generalizada para descrever e representar objetos e situações do nosso mundo sensível. Objetos da natureza como nuvens, árvores, contorno de montanhas, arrebentação de ondas, entre outros, não apresentam características tão regulares na sua forma quanto as da geometria euclidiana. Uma visão diferente de geometria é necessária, uma geometria que permita estudar essas formas concretas de maneira mais adequada. Surge então a geometria fractal.

> Na constituição de nosso mundo, a natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens, temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones, etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas. (Barbosa, 2005, p.10).

Frequentemente a discussão em torno dos métodos e estratégias pedagógicas na abordagem do ensino de geometria euclidiana com o intuito de propiciar a absorção dos conhecimentos e o desenvolvimento das habilidades referentes a essa geometria e outros conteúdos que podem a ela estar associados, combinando-os com a discussão de situações práticas. Nesse sentido, essa tendência acerca de estratégias que associam o conceitual ao mundo real enseja uma discussão relativamente recente, na qual os fractais e a geometria fractal também podem constituir ferramentas de aprendizagem. Nesta perspectiva, é possível que os alunos, utilizando o abstrato da matemática, consigam dar forma a objetos físicos do seu mundo sensível, fortalecendo a conexão entre o abstrato e o real.

Outro fator importante a ser considerado nesta discussão é a interdisciplinaridade. Uma proposta pedagógica em que as disciplinas são trabalhadas como “caixinhas separadas”, sem nenhum tipo de conexão entre os conteúdos estudados em cada uma delas, em geral leva o aluno a desenvolver preferência por certas disciplinas em detrimento de outras, e a Matemática, neste caso, tende a ser a mais preterida. O uso da geometria fractal neste caso, ao invés de fazer da disciplina de Matemática a fonte dos problemas, pode constituir o elo entre várias outras disciplinas, promovendo uma concisão maior entre a Matemática e outras disciplinas. Conforme afirmam Nascimento e Costa, "A Geometria Fractal pode permitir ao professor de matemática realizar contextualizações com assuntos variados da sociedade contemporânea, uma vez que possui um campo de diálogo amplo com outras áreas da Ciência e com outros ramos da Matemática" (Nascimento, Costa, 2020).

5.1 Fractais na Educação Básica

Segundo Lopes, Salvador, Filho (2013) pesquisadores defendem a utilização dos fractais no ensino. Pois afirmam que se trata de um conteúdo flexível e dinâmico, podendo ser contextualizado em diversas áreas. Logo, a geometria fractal tem caráter fértil no que se refere a métodos de ensino. Desse modo, é viável sua utilização, uma vez que permite trabalhar inúmeros conceitos.

Alves (2021, p. 3) destaca alguns pontos que justificam a utilização dos fractais nos currículos de ensino:

> Pontos positivos de se utilizar geometria fractal na sala de aula: a conexão da geometria fractal com várias ciências; a possibilidade de difundir o acesso à tecnologia da informática em diversos níveis de escolarização; inserir os alunos no mundo da arte, despertando e desenvolvendo neles o senso estético com as construções dos fractais; causar a sensação de surpresa diante da ordem no caos.

Essa dimensão ampla de aplicações facilita a utilização dos fractais no contexto escolar, o que justifica sua inclusão. Mas além disso, torna-se um instrumento motivador para o docente e também para o discente, uma vez que traz inovação nas aulas, tornando-a mais atraente e dinâmica.

Ainda segundo Alves (2021), quando se refere a exploração dos fractais em sala de aula, ao tratar especificamente de matemática, destaca que uma das formas de trabalhar os conteúdos pertinentes seria estudar a relação numérica de seus elementos, ou seja, área, perímetro e volume. Conteúdos ideais para o último clico da educação básica.

A abordagem dos conteúdos citados anteriormente ainda pode ser suplementada por outros, como: progressão geométrica, ao verificar determinadas perímetro, áreas ou volume em pontos específicos das iterações de um fractal geométrico; alguns princípios de limite, no qual é possível verificar comportamento de fractais em suas infinitas iterações.

A aplicação desse conceito no ensino médio propicia uma prática docente mais atrativa e menos rotineira, pois insere no dia a dia de sala de aula temas recentes da matemática que podem ser abordados com tecnologias digitais, por exemplo. Além disso, a compreensão da geometria euclidiana torna-se mais abrangente, ampliando as discussões nos conceitos e apresentando novos resultados.

> A introdução de fractais no ensino médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas (Sallum, 2005, p. 1).

No Brasil, a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) não prevê a geometria fractal nas habilidades. Contudo, algumas justificativas podem ser destacadas para sua inserção no ensino. Por se tratar de geometria, os fractais ajudam a representar elementos naturais, ou seja, ajuda a compreender o mundo em que vivemos.

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (Brasil, 2018, p. 271).

Nesse contexto, a inserção dos fractais nas aulas de geometria pode enriquecer de forma significativa a compreensão de conceitos geométricos, e simultaneamente, despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes.

No que se refere a formas e a relação entre figuras planas e espaciais, fractais como conjunto de Cantor ou a curva de Koch podem ser bastantes úteis para explanação de semelhança e recursividade, havendo uma compreensão mais profunda de determinadas propriedades de figuras planas ou espaciais.

Outro tema são as transformações geométricas e simetrias, o triângulo de Sierpinski apresenta simetria de rotação e reflexão, sendo muito útil no estudo desse conceito, ilustrando perfeitamente como ocorre as simetrias.

Trazendo para o mundo real, os fractais são capazes de modelar fenômenos naturais, como: estruturas de plantas, costas marítimas, bacias hidrográficas, entre outros; na área tecnológica temos: compressão de imagens e antenas, entre outros. São poucos exemplos de uma gama de possibilidades que podem ter relevância para que o discente sinta mais proximidade do que estuda ao mundo real.

Conforme afirma Brasil (2018, p. 527) na área de matemática e suas tecnologias para o ensino médio.

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade.

A coleção de livros de matemática Prisma, será abordado à frente, faz uma adaptação da habilidade (EM13MAT105) da BNCC.

> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (Bonjorno, 2020, p. 171)

Os autores fazem uma adaptação nessa habilidade, adicionando ao texto da habilidade: ‘elementos da natureza’ e ‘fractais’. Esta alteração adiciona uma bagagem de conceitos que irão reforçar no aprendizado e na formação básica do estudante, possibilitando uma conexão de conceitos matemáticos com a natureza e os fractais.

Mas as utilizações eficientes dos fractais não se limitam apenas a geometria euclidiana. Fractais como: Árvores bifurcadas podem ser utilizadas para aplicar o conceito de progressão geométrica, pois apresentam crescimento de suas iterações por meio de uma razão, conforme afirma Cunha (2013) “Na construção desse fractal notamos, nível a nível, o surgimento de várias sequências relacionando número de segmentos e comprimento. Essas sequências são típicos exemplos de progressões geométricas.” Outro fractal, o triângulo de Sierpinski, por apresentar em sua construção a retirada de inúmeros triângulos equiláteros, surgem inúmeras sequências que derivam do comprimento, área e volume diante das iterações, dessa forma, essas sequências são progressões geométricas.

> Existem diferentes processos para a construção do triângulo de Sierpinski, o mais comum, e o que nos interessa, é a construção por remoção de triângulos, utilizando um triângulo equilátero como figura inicial. O motivo de sua utilização dá-se pela conveniência e por questões estéticas. Este fato não impede que o mesmo seja construído utilizando qualquer outro tipo de triângulo. Conforme vamos construindo esse fractal vão surgindo várias sequências relacionadas a número de triângulos, comprimentos e áreas, que formam progressões geométricas. (Cunha, 2013, p.41).

Logo, notamos que as aplicações dos fractais no ensino médio podem ser utilizadas de forma didática em conteúdos referentes a geometria, como: Comprimento, área, volume, mas também, formas, simetrias e reflexões. Na álgebra, podem ser aplicados em conteúdos ligados a progressão geométrica. Mas de modo geral, os fractais ampliam a visão de representatividade do mundo real.

Portanto, a correta utilização da geometria fractal no cotidiano da sala de aula com a disciplina de matemática, com os conteúdos específicos e com planejamento adequado, podem ser ótimos recursos didáticos metodológicos para ensino de matemática, sendo suporte para outros conteúdos.

6 FRACTAIS EM BIBLIOGRAFIAS NO ENSINO MÉDIO

Conforme abordado na seção anterior, foi visto que os fractais podem ser utilizados de forma positiva na didática de ensino de determinados conceitos de matemática no Ensino Médio.

Neste capítulo, será feita a análise de alguns livros didáticos utilizados no Ensino Médio com o intuito de compreender como os fractais são trabalhados nesse nível de ensino. A análise busca compreender de que maneira os fractais são introduzidos, desenvolvidos e aplicados nos conteúdos.

Os livros fazem parte de uma coleção utilizada no Ensino Médio pelos alunos alvos da pesquisa. A coleção intitulada Prisma (Código da coleção: 0226P21202, PNLD 2021) dos autores Bonjorno, Giovanni Jr. e Paulo Câmara é composta de seis volumes e tem o objetivo de:

> estimular o estudante a compreender a Matemática para utilizá-la em sua vida e na continuação dos estudos. Além disso, busca favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades que o auxiliem a ser um cidadão crítico, criativo, autônomo, responsável e capaz de enfrentar novos desafios. Aliada aos conteúdos matemáticos específicos, a coleção explora o uso de recursos tecnológicos, como softwares de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e reflete sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (Coleção Prisma, 2024)

O objetivo sugere uma abordagem que reflete a realidade atual, no qual a tecnologia é uma parte importante do aprendizado e da aplicação do conhecimento, associando os conteúdos matemáticos ao uso de recursos tecnológicos, como planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica. Além disso, a integração da matemática com outras áreas do conhecimento ajuda a desenvolver uma visão interdisciplinar, que é fundamental para resolver problemas complexos na vida real.

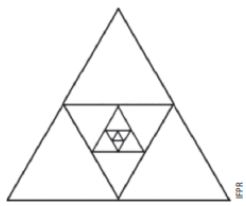
A combinação dessas estratégias ajuda os estudantes a serem mais autossuficientes e os torna conscientes e responsáveis por seu próprio processo de aprendizagem. Isso os prepara para serem transformadores em uma sociedade que está sempre mudando.

A Coleção Prisma (2024) ainda afirma que os volumes podem ser utilizados em qualquer série do Ensino Médio, pois são independentes e não apresentam ordem hierárquica de apresentação de conteúdos aos estudantes. Os volumes abordados neste trabalho serão: Funções e Progressões e Geometria e Trigonometria.

No primeiro, Funções e Progressões, no capítulo 4: Progressões, no qual são estudados os conteúdos de Progressão Aritmética e Progressão Geométrica, página 149 é apresentado um exercício, figura 22. O exercício aborda um problema em que é necessário utilizar os conceitos de Progressão Geométrica para sua resolução, mas além disso, é preciso conhecer os conceitos de triângulo equilátero e concepções de Limite. O texto do problema também apresenta uma definição simples de fractal e explica como construir o fractal proposto.

Figura 22: Números e Progressões: exercício 22

22. (IFPR) Um fractal é uma estrutura geométrica que se repete em qualquer escala. Unindo os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero, obtemos outro triângulo equilátero. Repetindo esse processo indefinidamente, determinamos um fractal bem simples, ilustrado na figura abaixo. Se começarmos a construção com um triângulo equilátero de lado de medida 8 unidades de comprimento, o limite para a soma dos perímetros dos triângulos equiláteros que compõem o fractal será, em unidades de comprimento, de: alternativa **c**



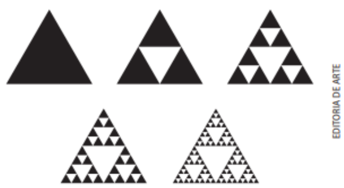
a) 45.
b) 46,5.
c) 48.
d) 72.

Fonte: Bonjorno, 2020

No mesmo capítulo, página 151, é proposto outro exercício, figura 23, no qual é apresentado as cinco primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski. Os conceitos abordados para resolução do problema são de Progressão Geométrica e área de figuras planas.

Figura 23: Números e Progressões: exercício 31

31. (UFRN) A sequência de figuras abaixo representa os cinco primeiros passos da construção do conjunto de Sierpinski. Os vértices dos triângulos brancos construídos são os pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior. Denominamos a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, respectivamente, as áreas das regiões escuras da primeira, segunda, terceira, quarta e quinta figuras da sequência. alternativa **a**



Podemos afirmar que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{4}$

Fonte: Bonjorno, 2020

Porém, nas páginas 248 e 249 é apresentado um material complementar que auxilia o professor didaticamente em questões pontuais do livro. No material é comentado que "A atividade 22 explora um fractal. Verificar se os estudantes sabem o que é um fractal e se percebem que eles são construídos a partir de uma regularidade. Se achar pertinente, solicitar uma pesquisa sobre esse tema" (Bonjorno, 2020).

Logo, a responsabilidade de apresentar um conceito mais detalhado de fractal é destinado ao professor, que pode realizar isso por meio da proposição de uma pesquisa aos alunos ou estudo de um texto do material, de título: O que as galáxias, as nuvens, o sistema nervoso, as montanhas e o litoral têm em comum?

> Todos contêm padrões intermináveis conhecidos como fractais.
> Os fractais são ferramentas importantes em diversas áreas — desde estudos sobre as mudanças climáticas e a trajetória de meteoritos até pesquisas sobre o câncer (ajudando a identificar o crescimento de células mutantes) e a criação de filmes de animação.
> [...]
> O termo foi cunhado por um cientista pouco convencional chamado Benoit Mandelbrot, um matemático polonês nacionalizado francês e, depois, americano.
> [...]
> Imagine nuvens, montanhas, brócolis e samambaias... suas formas têm algo em comum, algo intuitivo, acessível e estético.
> Se você observar com atenção, vai descobrir que a complexidade deles ainda está presente em uma escala menor.
> Subjacente a quase todas as formas no mundo natural, existe um princípio matemático conhecido como autossimilaridade, que descreve qualquer coisa em que a mesma forma se repete sucessivamente em escalas cada vez menores.
> Um bom exemplo disso são os galhos de árvores.
> Eles se bifurcam várias vezes, repetindo esse simples processo sucessivamente em escalas cada vez menores.
> O mesmo princípio de ramificação se aplica à estrutura dos nossos pulmões e à maneira como os vasos sanguíneos são distribuídos pelo nosso corpo. [...] (Ventura, 2019 *apud* Bonjorno, 2020).

O capítulo traz dois fractais diferentes, porém os autores poderiam explorar melhor as figuras para relacioná-las com os conteúdos de estudo, o professor, diante destes exemplos poderia aproveitar-se propondo aos alunos que construam esses fractais em malha triangular ou utilizando algum software gráfico, induzindo-os a participar do processo iterativo. Após a confecção o professor poderia utilizar as produções para conceituar os conteúdos do capítulo. Deste modo as atividades teriam mais significado, facilitando a compreensão dos alunos, além da oportunidade de o professor explorar a geometria fractal em sala de aula.

No segundo, Geometria e Trigonometria, no capítulo 1: Proporcionalidade e semelhança, no qual são estudados os conteúdos de semelhança e congruência de triângulos, isometria e polígonos, página 33, é apresentado um texto, figura 24. O texto traz uma definição de fractal e apresenta Benoit Mandelbrot, ambos de forma bem sucinta. Traz também o método para construção do Triângulo de Sierpinski e algumas propriedades deste.

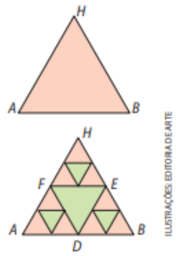
Figura 24: Geometria e Trigonometria: definição de fractal

Ampliações e reduções estão presentes na geometria fractal. **Fractal** é um vocábulo criado pelo matemático polonês Benoît Mandelbrot (1924-2010), em 1967. Essa palavra vem do latim *fractus*, cujo significado é fragmento, proveniente de fragmentar, quebrar.

Observe, ao lado, o um triângulo equilátero *AHB*. Para obter um fractal desse triângulo, marcamos o ponto médio de cada lado dele e ligamos os três pontos médios, obtendo outro triângulo equilátero *FDE*. O triângulo *AHB* ficou dividido em quatro triângulos congruentes. Efetuamos o mesmo procedimento em cada triângulo obtido, e assim sucessivamente.

Esse processo infinito, que segue uma regra fixa aplicada repetidamente, é chamado de **iteração**. O resultado de cada iteração é o ponto de partida para a próxima iteração.

Perceba que cada triângulo interno ao triângulo original é semelhante a ele. Assim, um fractal tem como característica a **autossimilaridade**, ou seja, cada parte é similar ao todo do fractal.



▪ Esse fractal é conhecido como triângulo de Sierpinski, em homenagem ao matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969).

Fonte: Bonjorno, 2020

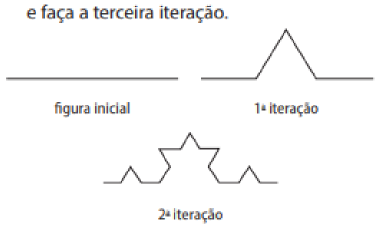
Neste volume, o conceito de fractal é tratado com maior rigor, assim como, são apresentados o matemático Benoit Mandelbrot e o método de construção do triângulo de Sierpinski. Dessa forma, o professor não se torna o responsável diretamente pela apresentação desse conhecimento aos alunos, pois o livro didático já o obtêm.

Na sequência do capítulo, páginas 34 e 35, existem três atividades, figura 25 e figura 26. Na primeira, atividade resolvida 8, o autor explana as etapas de construção da Curva de Koch e comenta a respeito do matemático Niels Koch. Nas seguintes, atividades 26 e 27, é dado as regras de construção de dois outros fractais, o Tapete de Sierpinski e a Curva de Peano.

Figura 25: Geometria e Trigonometria: atividade resolvida 8

8. Na página anterior, vimos como construir o triângulo de Sierpinski. Um outro fractal bastante conhecido é a curva de Koch. Ela é atribuída ao matemático sueco Niels Koch (1870-1924), que a apresentou em um artigo em 1906. Essa curva é construída a partir de um processo recursivo, utilizando iterações, assim como o triângulo de Sierpinski.

A sequência de iterações a seguir mostra como a curva de Koch é formada. Observe-a, determine a regra de construção desse fractal e faça a terceira iteração.



Resolução

Observando cada iteração feita, podemos determinar a sequência de passos que determina a formação da curva de Koch:

1) Divida um segmento de reta em 3 partes iguais.
2) Substitua o segmento do meio por dois segmentos de mesma medida do segmento retirado de modo a obter um triângulo equilátero sem a base.
3) Repita os passos 1 e 2 com os segmentos de reta da nova figura.

Aplicando essa sequência de ações na figura da 2ª iteração, obtemos a 3ª iteração.

3ª iteração

Fonte: Bonjorno, 2020

Figura 26: Geometria e Trigonometria: atividade 26 e 27

26. Já vimos vários exemplos de fractais, como o triângulo de Sierpinski. Agora, vamos conhecer mais um. Siga os passos a seguir para realizar a construção. Faça três iterações.

I) Construa um quadrado de lado medindo 3 cm.

II) Divida esse quadrado em nove quadrados menores. Para isso, divida cada lado em três partes iguais.

III) Pinte o quadrado menor central.

IV) Repita os passos **II** e **III** para os demais quadrados da figura que não estão pintados.

Agora, pesquise a respeito da figura obtida e descubra o nome desse fractal. Tapete de Sierpinski.

27. A curva de Peano também é um fractal. Para construí-la, existe uma regra de iteração. Pesquise como construir essa curva e construa uma parte dela. Depois, apresente aos colegas e ao professor a sua construção.
Produção do estudante.

Fonte: Bonjorno, 2020

Porém, na página 206, figura 27, é apresentado um material complementar que auxilia o professor didaticamente em questões pontuais do livro. O Material complementar dispõe dos principais processos para construção dos fractais mencionados anteriormente.

Figura 27: Geometria e Trigonometria: material complementar

Na atividade **26**, os estudantes podem utilizar régua e compasso, ou um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, se for possível. Para a construção desse fractal, é utilizado o mesmo princípio do triângulo de Sierpinski, conforme descrito anteriormente.

As figuras a seguir mostram o tapete de Sierpinski após algumas iterações.

Informações complementares sobre o tapete de Sierpinski (que também pode ser chamado de carpete de Sierpinski) podem ser encontradas no *link* <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico5.php> (acesso em: 29 ago. 2020).

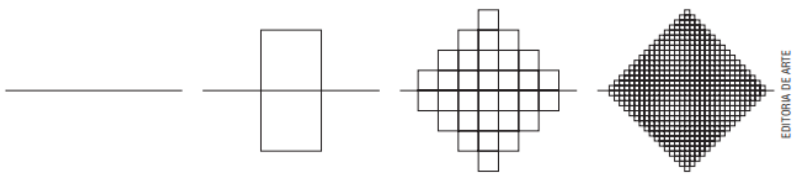
Na realização da atividade **27**, os estudantes podem fazer a construção utilizando régua ou por meio de um *software* de geometria dinâmica, de acordo com os passos indicados a seguir.

Passo 1: Traça-se um segmento de reta.

Passo 2: Divide-se esse segmento em três partes iguais.

Passo 3: Por esse segmento, constrói-se um retângulo que intersecte o segmento de forma que o retângulo seja dividido em duas partes iguais pelo segmento, formando dois quadrados de lado igual a $\frac{1}{3}$ da medida do segmento.

Passo 4: Repetem-se os passos 2 e 3. A curva de Peano é obtida por processo iterativo.



Fonte: Bonjorno, 2020

Essas três atividades apresentam fractais diferentes, o que amplia a coletânea de figuras que o aluno tem acesso de imediato. Além disso, são questões complementares, pois a atividade resolvida 8 ensina o discente que é possível a construção de fractais à mão, seguindo determinadas regras e, por consequência, é colocado duas questões à frente para que o estudante realize de forma independente a construção de dois fractais. O que possibilita o aluno ser protagonista de seu próprio processo de aprendizagem.

7 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para Prodanov (2013) “A pesquisa científica é a realização de um estudo planejado, sendo o método de abordagem do problema o que caracteriza o aspecto científico da investigação. Sua finalidade é descobrir respostas para questões mediante a aplicação do método científico”. Na pesquisa científica é de suma importância ter critérios e rigor no que se refere à coleta e levantamento de dados para que o pesquisador consiga aproximar-se o máximo possível à realidade em estudo.

O trabalho é composto de três etapas. São elas: pesquisa bibliográfica, aplicação de uma sequência didática em sala de aula e organização e discussão de dados.

Para Andrade (2010) apud Sousa, Oliveira, Alves (2021) “A pesquisa bibliográfica é habilidade fundamental nos cursos de graduação, uma vez que constitui o primeiro passo para todas as atividades acadêmicas. Uma pesquisa de laboratório ou de campo implica, necessariamente, a pesquisa bibliográfica preliminar.” Logo, na primeira etapa, pesquisa bibliográfica, houve o levantamento de materiais científicos, em parte artigos e dissertações a respeito do tema geometria fractal no ensino médio. Havendo uma triagem dos documentos com base nos critérios almejados.

Esses foram essenciais para o desenvolvimento das fases seguintes e fundamentais para garantir o embasamento científico necessário para tal construção. Junto a isso, foram suporte para definição de um conjunto de referências, construção limitada de objetivos e metodologia abordada no trabalho.

Na segunda etapa do trabalho a metodologia empregada consistiu de uma pesquisa de campo, no qual a coleta de informações ocorre diretamente com a população pesquisada. Nesse sentido, é essencial que o contato entre o pesquisador e os sujeitos alvos da pesquisa seja constante. (Prodanov, 2013, p.59)

Nesta etapa, propôs-se uma sequência didática com o tema Explorando os Fractais em sala de aula que, conforme Zaballa (1998) apud Ugalde; Roweder (2020) afirma:

> O termo sequência didática ou atividades didáticas é definido como sendo "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, quem têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

Com os objetivos:

- Apresentar aos alunos o conceito de fractais.
- Explorar as características dos fractais e suas aplicações.
- Relacionar os fractais com a matemática e a natureza.
- Desenvolver habilidades matemáticas em cálculo de perímetro, área, volume, dimensões, progressões geométricas, conceito intuitivo de Limite, proporção, escala.

A escolha desse método deve-se ao fato de uma sequência didática promover uma progressão gradual no processo de ensino-aprendizagem, integração de teoria e prática, avaliação contínua e envolvimento ativa dos alunos.

Pois segundo Zabala (1998) uma sequência didática "têm a virtude de manter o caráter unitário e reunir toda a complexidade da prática, ao mesmo tempo em que permitem incluir as três fases de toda intervenção reflexiva, quais sejam: o planejamento, aplicação e avaliação."

A visão de Zabala deixa evidente que essa tríade permite ao docente uma tendência de constante aprimoramento de suas ações no ato de educar. O planejamento organiza de forma eficiente a necessária conexão entre a reformulação dos conceitos e o uso de metodologias alternativas, a aplicação concretiza a viabilidade e a relevância do material sequenciado oferecido aos alunos, enquanto a avaliação possibilita as reelaborações necessárias, com base na análise e discussão dos dados coletados.

Pontos esses, importantes para a construção de novos conhecimentos e saberes, segundo Ugalde e Roweder (2020) "Na realidade atual da sala de aula, observa-se um considerável crescimento de professores e pesquisadores que empregam a proposta metodológica da sequência didática para facilitar o desenvolvimento de atividades que visam à construção de novos conhecimentos e saberes."

Com um total de cinco aulas, a sequência didática foi aplicada em uma sala de terceira série do Ensino Médio do colégio Centro de Ensino Prof.(a) Marcelina Nóia Alves, situada na Rua Mizael Franco, S/N, no Bairro Trizidela, na cidade de Alto Alegre do Pindaré – MA, CEP: 65398-000. Os dados quantitativos de infraestrutura e equipamentos gerais são listados nas Tabela 6 e Tabela 7:

Tabela 6: Dados de infraestrutura

DEPENDÊNCIAS	QUANTIDADE	UTILIZAÇÃO	
		ADEQUADA	INADEQUADA
SALAS DE AULAS	13	13	-
BIBLIOTECA OU SALA DE LEITURA	1	1	-
SALA DE PROFESSORES	1	1	-
LABORATÓRIO	-	-	-
SECRETARIA	1	1	-
SALA DE VÍDEO	-	-	-
QUADRA DE ESPORTE	-	-	-
PÁTIO COBERTO	1	1	-
PÁTIO DESCOBERTO	-	-	-
DEPÓSITO	-	-	-
ALMOXARIFADO	1	1	-
CANTINA	1	1	-
BANHEIRO	2	2	-
BANHEIRO PARA FUNCIONÁRIOS	2	2	-

Fonte: Pesquisa, 2024

Tabela 7: Dados de equipamentos

Nº	DESCRIÇÃO	QUANTIDADE
01	CAIXA DE SOM	01
02	MESA DE SOM	-
03	FONE DE OUVIDO	-
04	TELEVISÃO	02
05	NOTEBOOK	03
06	DATA SHOW	02
07	COMPUTADORES COMPLETOS (SALA DE INFORMÁTICA)	-
08	MICROFONE	02
09	TUBOS DE ENSAIO	15
10	LABORATÓRIO DE CIÊNCIAS	-
11	LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA	-
12	MAPAS LETREIROS	-
13	LIVROS	2000

Fonte: Pesquisa, 2024

As aulas foram realizadas no turno regular e consistiram de aulas expositivas, oficinas e uma aula em campo. Assim, as aulas propunham:

• Nas aulas expositivas, apresentar os principais conceitos e propriedades referentes aos fractais, alguns conceitos de matemática pela ótica dos fractais e construção de alguns fractais mais simples.

• Na oficina, os discentes construírem alguns fractais e calcular perímetro e área, entre outros elementos da figura, utilizando conceitos de matemática já estudados na sequência didática.

• Na aula em campo, observar alguns elementos naturais que remetem aos fractais e também fazer a coleta, quando possível, para estudo e análise.

De modo mais específico, na primeira aula, cujo tema foi Introdução aos Fractais, apresentou-se o conceito de fractal, bem como os diferentes tipos, principais características e propriedades. Esses conceitos foram ilustrados por meio de imagens representativas, incluindo exemplos físicos e digitais.

Na segunda aula, intitulada Fractais e Matemática: Revisão de Progressão Geométrica, Perímetro, Área e Introdução a Limites, revisaram-se os conceitos de progressão geométrica, perímetro e área. Além disso, introduziu-se, de forma intuitiva, o conceito de limites, conectando-o ao contexto dos fractais.

A terceira aula, organizada como oficina prática e com o tema Explorando o Triângulo de Sierpinski e o Tapete de Sierpinski, concentrou-se nesses dois fractais específicos. A turma foi dividida em estações de estudo seguindo a metodologia ativa de rotação por estações, permitindo que cada grupo analisasse detalhadamente diferentes aspectos desses fractais.

Na quarta aula, com o tema Explorando as Relações entre Fractais e Conceitos Matemáticos, explorou-se a relação entre os fractais trabalhados na oficina e os conceitos matemáticos revisados na segunda aula. A dinâmica manteve os estudantes organizados nas estações de estudo, promovendo o aprendizado colaborativo e interdisciplinar.

Para encerrar a sequência didática, a quinta aula, intitulada Explorando Fractais na Natureza, incluiu uma visita à área verde da escola. Durante essa atividade, observou-se e identificou-se padrões fractais presentes na natureza, fomentando reflexões sobre sua relevância nos ecossistemas naturais e sua presença no cotidiano.

Essa sequência didática integrou teoria e prática, promovendo o engajamento ativo dos estudantes e destacando a aplicação dos fractais em diferentes contextos.

7.1 Natureza da Pesquisa

Na última etapa, organização e estudo de dados, que ocorreu após a finalização da sequência didática foi destinada para organizar os dados coletados durante a aplicação da sequência, em especifico as construções dos fractais durante a oficina, mas também das observações de cunho avaliativo durante o processo, considerando a compreensão do tema abordado, participação, resolução de problemas, coleta de material e proposições acerca do tema.

Tratando-se portando de uma pesquisa qualitativa, no qual, segundo Triviños (1987) apud Oliveira (2013)

> a abordagem de cunho qualitativo trabalha os dados buscando seu significado, tendo como base a percepção do fenômeno dentro do seu contexto. O uso da descrição qualitativa procura captar não só a aparência do fenômeno como também suas essências, procurando explicar sua origem, relações e mudanças, e tentando intuir as consequências.

No qual o ambiente da pesquisa foi a própria sala de aula e os estudantes, pressupondo um contato direto e prolongado com todos e com o que está sendo investigado por meio de pesquisa de campo. Conforme afirma Oliveira (2013) ‘a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada via de regra, por meio do trabalho intensivo de campo’.

7.2 Instrumento de coleta de dados, sujeitos de pesquisa, população e amostra

A coleta de dados foi predominantemente descritiva por meio da avaliação durante as atividades realizadas em aula. Nesse sentido, o material coletado foram: descrição de atividades, descrição de situações, fotografias, desenhos, documentos, entre outros. Ressaltando que todos os dados são de suma importância para os resultados propostos.

Os sujeitos da pesquisa são 34 alunos matriculados na 3ª série do Ensino Médio no turno vespertino. Todos foram oportunizados e participaram da pesquisa no decorrer da sequência didática. Cada estudante desempenhou, conforme suas características, atividades pertinentes à pesquisa, seja por meio de questionamentos, proposições, atividades práticas, fotografando, entre outras.

Portanto, o ambiente utilizado na pesquisa é pouco controlável e mais participativo, pois trata-se de estudantes e pela natureza dos indivíduos podem direcionar diferentes rumos para seus comportamentos e iterações com o pesquisador. Logo, não se busca encontrar literalmente um certo ou errado para o tema proposto, mas compreender inicialmente a lógica existente e o que permeia a prática de sala de aula.

8 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção apresenta um relato detalhado dos acontecimentos ocorridos ao longo da sequência didática. Cada aula será discutida minuciosamente, abrangendo as etapas seguidas, o tema abordado, os objetivos propostos, a participação dos alunos e as conclusões extraídas durante o processo.

Este processo de análise tem como objetivo oferecer uma visão clara e estruturada sobre o desenvolvimento das aulas e os impactos observados. A descrição de cada etapa permitirá identificar os avanços pedagógicos, os desafios enfrentados e as estratégias utilizadas para facilitar a compreensão dos discentes. Será possível avaliar a eficácia dos métodos adotados e o nível de engajamento da turma, destacando momentos de maior participação e as formas como os conteúdos foram assimilados.

8.1 Aula 1 - Introdução aos Fractais

A aula teve como tema “Introdução aos Fractais” e foi a primeira de uma sequência planejada para apresentar esse conceito aos alunos da terceira série do ensino médio. O objetivo central foi introduzir o conceito de fractal, suas principais propriedades e explorar as diferenças entre a geometria euclidiana tradicional, já conhecida pelos alunos, e a geometria fractal, um campo mais avançado e menos convencional.

A aula iniciou-se com uma breve apresentação sobre o tema. O foco foi mostrar que seriam exploradas formas geométricas bastante diferentes das comumente vistas pelos alunos e que essas formas aparecem tanto na natureza quanto em fenômenos físicos, mas desafiam a geometria tradicional. Utilizou-se o datashow para projetar diversas imagens ao longo da explicação, uma vez que a visualização era essencial para a compreensão dos conceitos. As imagens dos fractais, geométricos e funções iterativas, eram do tipo GIF e podiam movimentar de acordo com algumas iterações do fractal, conforme afirma Carneiro; Silva (2015, p. 3):

> Podemos trabalhar com imagens de fractais na sala de aula, ou utilizar materiais manipuláveis como os vegetais, legumes, frutas, árvores folhas, flor, que podem ser tanto visualizados como também tocados, acreditamos que esse é o primeiro passo, para iniciar o conceito do que vem a serem fractais, pois eles estão presentes em quase toda parte.

Para despertar a curiosidade inicial dos alunos, foi exibida a imagem de um tronco de árvore cerrado, com formato cilíndrico. Questionou-se à turma como seria possível modelar matematicamente o formato do tronco para estudar sua área e volume. A grande maioria da sala respondeu que o tronco poderia ser modelado como um cilindro, o que era a resposta esperada, visto que essa é a forma mais próxima que os alunos conheciam.

A partir desse ponto, a visualização foi sendo gradualmente ampliada. Foi projetada, em seguida, uma imagem aproximada da casca do tronco, em que os detalhes irregulares se tornavam mais evidentes. Repetiu-se o questionamento anterior sobre como modelar a figura dessa casca. Nesse momento, a turma começou a hesitar; os alunos não conseguiram identificar um modelo geométrico simples para representar a forma, o que gerou as primeiras dúvidas e discussões.

Na sequência, exibiu-se uma terceira imagem, com uma aproximação ainda maior da casca, onde as irregularidades tornaram-se bastante visíveis. A maioria dos alunos comentou que a imagem lembrava um vale cheio de rochas, areia e depressões, com alguns sugerindo que parecia uma paisagem de outro planeta. Esse estranhamento reforçou a percepção de que a geometria convencional, que até então os alunos utilizavam para descrever formas mais simples e suaves, não seria suficiente para modelar tais figuras.

Por fim, apresentou-se uma imagem microscópica das fibras da casca do tronco. As reações dos alunos foram de surpresa, com muitos afirmando que aquele nível de complexidade era praticamente impossível de representar com figuras geométricas conhecidas. As saliências, buracos e rugosidades eram tão intricadas que não se encaixavam em nenhum padrão da geometria euclidiana tradicional.

Esse primeiro contato com figuras de difícil modelagem demonstrou que o caminho para a compreensão dos fractais seria novo e desafiador para os alunos. Suas respostas estavam alinhadas à proposta da aula: gerar estranhamento e curiosidade ao apresentar um conceito fora do comum.

Com o cenário preparado, passou-se à introdução do conceito de fractal. Foi projetado um GIF de relâmpagos para ilustrar formas dinâmicas que também não podem ser descritas facilmente pela geometria euclidiana. Foi explicado que, na geometria tradicional aprendida desde o ensino fundamental, as figuras são regulares e previsíveis, mas na natureza muitas formas, como relâmpagos, não seguem essas regras.

Em seguida, apresentou-se um conjunto de imagens, incluindo plantas, relâmpagos, galhos de árvores, folhas de samambaia e folhas de mamoeiro. Explicou-se que, apesar de serem formas naturais, todas compartilham algo em comum: são autossemelhantes em diferentes escalas, o que é uma das características fundamentais dos fractais. Essa revelação gerou questionamentos entre os alunos sobre como poderiam modelar essas formas que existem naturalmente e desafiam a geometria convencional.

Foi nesse momento que o conceito de fractal foi explanado, ressaltando-se suas diferenças em relação à geometria euclidiana. Fractais são formas que se repetem em escalas diferentes, criando padrões complexos e irregulares, com características como autossemelhança e uma dimensão não inteira, chamada dimensão fractal. Embora alguns alunos já tivessem tido contato indireto com fractais em materiais didáticos, aparentemente não haviam notado ou dado muita atenção ao conceito, pois afirmaram que era novidade para eles.

O próximo ponto abordado foi a diferença entre a dimensão euclidiana (ou topológica) e a dimensão fractal. Explicou-se que, na geometria tradicional, trabalha-se com dimensões inteiras (0 D para pontos, 1 D para linhas, 2 D para superfícies e 3 D para sólidos). No entanto, fractais apresentam dimensões fracionárias, algo que inicialmente confundiu os alunos.

Houve diversos questionamentos, já que a turma acreditava que dimensões fossem sempre inteiras. Aproveitou-se a oportunidade para esclarecer o raciocínio matemático por trás das dimensões fracionárias dos fractais, gerando interesse dos alunos, especialmente por esse conceito desafiar a lógica com a qual estavam acostumados.

Em seguida, foram apresentados alguns fractais famosos, como o Triângulo de Sierpinski e o Tapete de Sierpinski. Foram explicadas as propriedades desses fractais, destacando-se as peculiaridades, como o perímetro infinito e a área zero no caso do Triângulo de Sierpinski, o que gerou surpresa e novos questionamentos por parte dos alunos. As propriedades paradoxais dos fractais intrigaram a turma, que ficou impressionada com a ideia de figuras que, ao serem levadas ao infinito, apresentam comportamentos tão inesperados.

Foi informado que, nas próximas aulas, os alunos iriam estudar e construir o Triângulo de Sierpinski e o Tapete de Sierpinski em detalhes. Eles questionaram como essas construções ajudariam no aprendizado, e foi explicado que, por meio desses fractais, conceitos como área, perímetro, progressões geométricas e conceito de limite seriam aprofundados.

Para encerrar a aula, foram mostradas algumas aplicações dos fractais na ciência e no mundo real, abordando áreas como modelagem de fenômenos naturais (crescimento de árvores e formações de montanhas), biologia (formas de vasos sanguíneos e bronquíolos), além de aplicações tecnológicas como compressão de imagens. Os alunos puderam observar como os fractais têm utilidade prática em diversas áreas do conhecimento.

Ao final da aula, os alunos demonstraram grande interesse pelos conceitos apresentados. Muitos comentaram que não imaginavam que existisse uma matemática capaz de descrever formas tão complexas e desorganizadas como as da natureza. Algumas perguntas notáveis foram levantadas, como: “Por que esse conteúdo não é ensinado no ensino médio?”, ao que foi esclarecido que o conceito está presente de forma indireta nos materiais didáticos; “Quando esse conceito foi descoberto?”, em que foi explorada brevemente a história de Benoit Mandelbrot, o matemático responsável por popularizar o termo "fractal" e “Esse conteúdo pode cair no ENEM?”, explicando-se que questões envolvendo figuras e conceitos fractais já foram abordadas em exames anteriores.

No geral, a aula atingiu seus objetivos, despertando curiosidade e interesse na maioria dos alunos. O primeiro contato com o conceito de fractal, apesar de ser novo e, por vezes, complexo, provocou questionamentos e reflexões que indicam um bom ponto de partida para as aulas seguintes, nas quais o tema será aprofundado.

8.2 Aula 2 - Fractais e Matemática

A aula foi estruturada com o intuito de revisar conceitos centrais de Progressão Geométrica (PG), perímetro, área e introduzir a ideia de limites, alinhando-os com exemplos visuais como o Triângulo e o Tapete de Sierpinski. Esses conceitos foram expostos aos alunos com o uso de datashow e debates, garantindo uma aprendizagem mais dinâmica e visual.

Os objetivos da aula foram detalhados da seguinte forma:

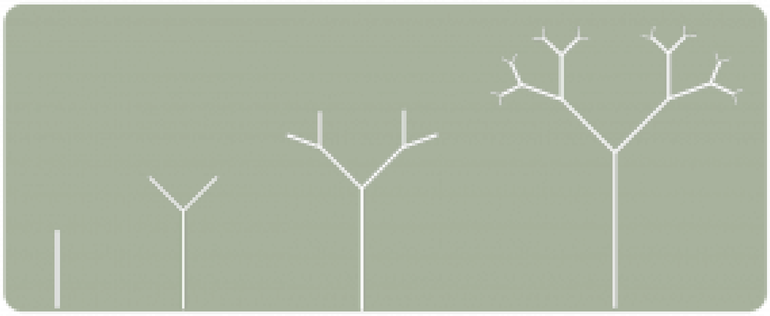
Progressão Geométrica (PG):

- Revisar o conceito e calcular o termo geral.
- Resolver situações-problema envolvendo PG.

No desenvolvimento dessa temática, os alunos demonstraram dificuldades iniciais com a abstração algébrica, principalmente ao lidar com a fórmula do termo geral e as somas de termos. Contudo, quando o conceito foi aplicado a exemplos concretos, como o crescimento de uma árvore que segue uma progressão geométrica de razão 2, (Figura 28), os estudantes mostraram maior envolvimento e compreensão. A representação visual do crescimento da árvore desde o caule até o topo foi essencial para que os alunos pudessem associar os conceitos teóricos à realidade, pois

> No que diz respeito às aplicações dos conceitos em nosso cotidiano, pudemos perceber a riqueza dos conceitos de progressões. Ao mesmo tempo, pudemos ver a flexibilidade desses conceitos em diferentes situações e assim validando uma das características principais para que se assegure a aprendizagem: o real interesse do discente em aprender algo, é quando aquilo serve ou servirá para alguma situação que ele necessitará. Se pudermos assim fazer com que o discente construa melhor os conceitos, então vale a pena disponibilizar de um tempo a mais para prepararmos algumas aplicações (Lima et al. 2004, p.34).

Figura 28: Representação do processo de ramificação



Fonte: https://www2.ufjf.br/fractalize/2021/05/03/voce-sabia-que-as-arvores-sao-fractais/

Perímetro:

- Revisar o cálculo de perímetro de figuras planas.
- Aplicar o conceito em problemas.

A revisão do conceito de perímetro focou-se no cálculo de figuras simples como triângulos equiláteros e quadrados. O perímetro dessas figuras foi fundamental para introduzir o conteúdo dos fractais, que seriam abordados posteriormente. O estudo das figuras e seus perímetros auxiliou os alunos a perceberem as variações de tamanho e forma, preparando-os para o estudo do Triângulo e Tapete de Sierpinski. Em geral, os estudantes assimilaram bem o conceito, especialmente quando exemplos práticos foram apresentados.

Área:

- Revisar o cálculo de área de figuras geométricas.
- Diferenciar perímetro e área.
- Aplicar o cálculo de área em situações práticas.

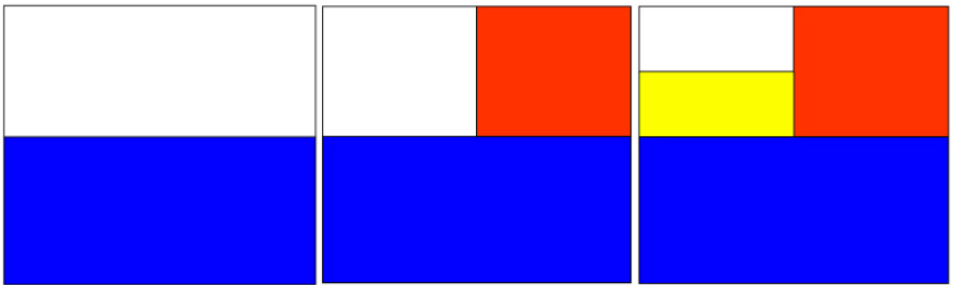
No estudo da área, foi dada ênfase ao triângulo equilátero e ao quadrado, figuras que seriam utilizadas nas atividades com fractais. Houve certa confusão inicial entre a distinção dos conceitos de área e perímetro, mas, com a resolução de problemas práticos, os alunos conseguiram entender as diferenças. A conexão com o tema dos fractais foi enfatizada, mostrando como os conceitos são aplicados no desenvolvimento dessas figuras geométricas complexas.

Conceito intuitivo de Limites:

- Introduzir a ideia básica de limites.

Embora o conceito de limites tenha sido apresentado de forma introdutória, ele gerou curiosidade entre os alunos, que se mostraram interessados em entender como se aplica aos fractais. A introdução ao conceito foi necessária para que, em aulas futuras, os alunos pudessem aprofundar-se mais nesse tema, especialmente no contexto dos fractais. O conceito de limites foi explorado por meio da visualização do preenchimento de um quadrado (Figura 29). No qual um quadrado em branco é pintado a metade de sua área, restando $\frac{1}{2}$. Em seguida, é pintado a metade da área restante, que correspondia a $\frac{1}{4}$ do total. Esse processo de preenchimento foi repetido infinitamente, até que a ideia intuitiva de um preenchimento total do quadrado fosse alcançada, mesmo sem realmente completá-lo. Essa abordagem visual facilitou a compreensão do conceito de limites de forma mais acessível.

Figura 29: Ideia intuitiva de limites



Fonte: Autor, 2024

A aula foi dialogada e contou com questionamentos frequentes aos alunos, o que incentivou a participação ativa e a reflexão sobre a aplicação prática dos conceitos. A culminância da aula com a resolução de questões do ENEM relacionadas ao Triângulo e Tapete de Sierpinski foi um ponto alto. Muitos alunos ficaram surpreendidos ao ver que conceitos de fractais, apresentados de maneira teórica em sala, aparecem em exames nacionais. Esse momento motivou-os a se engajar mais nos estudos matemáticos, percebendo a relevância dos conteúdos abordados.

Um desafio encontrado foi a necessidade de equilibrar a exposição dos conteúdos mais complexos, como a progressão geométrica, com exemplos mais visuais e práticos que ajudassem na compreensão dos alunos. Nos momentos em que conceitos abstratos eram apresentados sem um suporte visual adequado, houve uma queda no interesse da turma, evidenciando a importância de recursos que tornem os temas mais acessíveis. Contudo, os exemplos práticos e a resolução de problemas do cotidiano, especialmente aqueles relacionados a figuras geométricas, ajudaram a retomar o foco e a participação dos estudantes, conforme afirma Soares (2020, p. 11)

> [...] inferimos que a arte de pensar visualmente é uma componente chave para o sucesso da visualização matemática, pois se a visualização é um método que auxilia a resolução de problemas matemáticos, então é importante que professores e alunos vejam claramente o seu papel nos processos de ensino e aprendizagem, usando-a na resolução de resolução de problemas.

No geral, a aula foi produtiva e alcançou seus objetivos, servindo como base para a continuação do estudo dos fractais, que envolveria a aplicação dos conceitos de PG, perímetro, área e limites. A abordagem integrada, conectando diferentes áreas da matemática, proporcionou aos alunos uma visão mais ampla e aplicável dos conteúdos, preparando-os para a compreensão de padrões matemáticos na natureza e em seu entorno.

8.3 Aula 3 - Explorando o Triângulo de Sierpinski e o Tapete de Sierpinski

A aula teve como principais objetivos:

- Compreender os fractais, autossemelhança e sua dimensão;
- Construir manualmente o Triângulo e o Tapete de Sierpinski em diferentes iterações;
- Analisar as propriedades geométricas de ambos os fractais;
- Estudar conceitos relacionados, como progressões geométricas e comportamento assintótico em relação à área e ao perímetro.

Optou-se por utilizar uma metodologia ativa, denominada rotação por estações, que envolve a divisão da sala em grupos que se alternam entre diferentes atividades e espaços, visando a exploração de diversos aspectos dos temas propostos. A rotação por estações permite maior envolvimento dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, colocando-os no centro da construção do conhecimento (Bacich; Neto; Trevisani, 2015).

A metodologia de rotação por estações foi escolhida por possibilitar uma abordagem dinâmica e interativa, onde os alunos, divididos em cinco grupos, Figura 30, realizam atividades em diferentes estações, cada uma com um foco específico. As estações facilitaram a aprendizagem colaborativa e a aplicação prática de conceitos abstratos como autossemelhança, progressões geométricas e comportamento assintótico, elementos centrais para o entendimento dos fractais.

Figura 30: Estações de estudo

Fonte: Autor, 2024

As estações foram organizadas da seguinte forma:

Estação 1: Introdução e Teoria

- Atividade: Nesta estação, os alunos assistiram a um vídeo curto (3-5 minutos) sobre o Triângulo de Sierpinski e, posteriormente, realizaram uma pesquisa sobre Wacław Sierpinski, anotando os principais conceitos matemáticos por trás do fractal.
- Objetivos: Compreender a definição de fractais, autossemelhança e a dimensão fractal; identificar as características do Triângulo e do Tapete de Sierpinski, além de informações sobre seu criador.

Estação 2: Construção Manual até a Iteração 3

- Atividade: Os alunos construíram manualmente o Triângulo e o Tapete de Sierpinski, utilizando régua e folhas A4, até a terceira iteração, para observar a autossemelhança e as mudanças geométricas ao longo das iterações.
- Objetivos: Compreender o processo iterativo, observar a autossemelhança em cada estágio e discutir as características geométricas do fractal.

Estação 3: Análise das Propriedades

- Atividade: Nesta estação, os alunos analisaram propriedades geométricas, como área e perímetro, dos fractais, focando nas mudanças observadas até a terceira iteração.
- Objetivos: Explorar conceitos de área e perímetro no contexto de crescimento iterativo e identificar padrões geométricos relacionados às iterações.

Estação 4: Estudo da Progressão Geométrica

- Atividade: Os alunos estudaram como a área e o perímetro do Triângulo e Tapete de Sierpinski mudavam a cada iteração, relacionando esses padrões a uma progressão geométrica. Eles também montaram tabelas e gráficos para visualizar a progressão da área.
- Objetivos: Compreender a relação entre as iterações do Triângulo de Sierpinski e a progressão geométrica de sua área, além de aplicar os conceitos de progressão geométrica na análise de fractais.

Estação 5: Comportamento Assintótico do Fractal

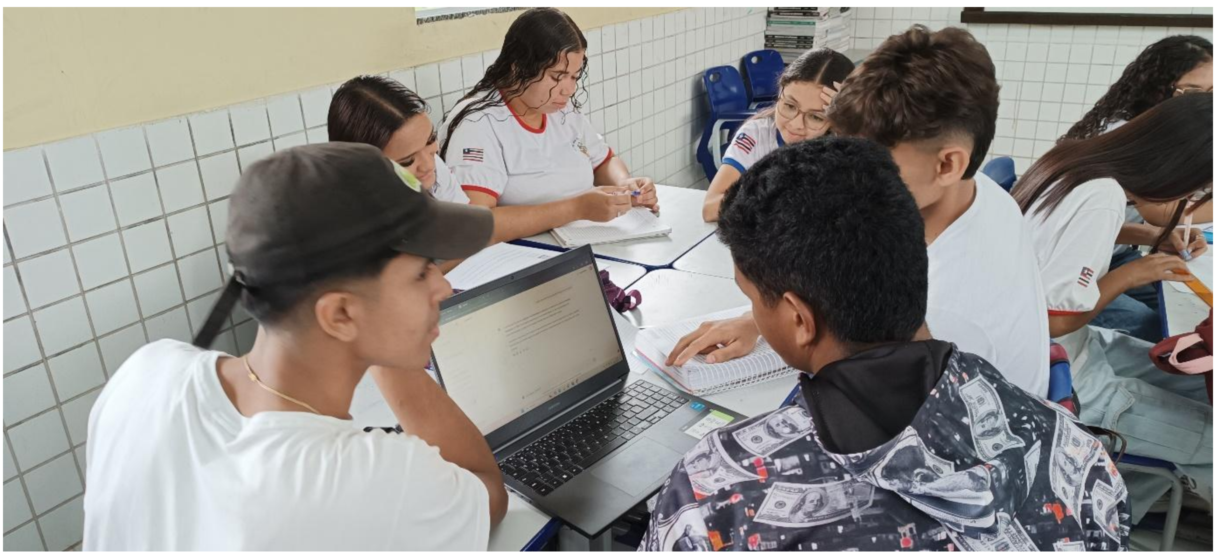
- Atividade: Os alunos estudaram o comportamento do Triângulo e Tapete de Sierpinski conforme o número de iterações tende ao infinito. Foi enfatizada a análise do comportamento da área e do perímetro à medida que o fractal se aproxima de um limite.
- Objetivos: Analisar o comportamento assintótico dos fractais, observando como a matemática descreve fenômenos em escalas infinitas.

Desenvolvimento da Aula e Observações

A aula começou com uma breve introdução sobre a organização das estações e seus respectivos objetivos. Cada grupo foi designado a uma estação e, a partir de então, os alunos se alternaram entre elas, explorando diferentes aspectos dos fractais estudados.

Os alunos da Estação 1, Figura 31, tiveram um desempenho bastante satisfatório, uma vez que a pesquisa com auxílio de notebook e a visualização do vídeo facilitaram a compreensão dos conceitos teóricos. Eles conseguiram entender e anotar os principais conceitos, como autossemelhança e dimensão fractal, estabelecendo as bases para o restante da aula.

Figura 31: Estação 1



Fonte: Autor, 2024

Na Estação 2, onde foi realizada a construção manual dos fractais, o objetivo de construir os fractais até a terceira iteração foi alcançado com sucesso. Os alunos conseguiram observar visualmente o fenômeno de autossemelhança, discutindo entre si como os padrões geométricos se repetiam. A construção manual foi considerada uma atividade acessível e de grande valor para a compreensão inicial dos conceitos envolvidos.

Figura 32: Estação 2

Fonte: Autor, 2024

Entretanto, na Estação 3, algumas dificuldades começaram a aparecer. Apesar de os alunos conseguirem compreender as mudanças visuais nas áreas e perímetros dos fractais, muitos tiveram dificuldades em expressar essas mudanças formalmente, em termos matemáticos. Isso reforça a importância da revisão contínua de conceitos abstratos como área e perímetro, conforme enfatizado em aulas anteriores. Moran (2018) aponta que as metodologias ativas, como a rotação por estações, desafiam os alunos a aplicar conceitos teóricos em contextos práticos, algo que foi claramente observado nesta estação.

Na Estação 4, em que os alunos precisaram trabalhar com progressões geométricas, os desafios foram ainda mais evidentes. Embora os alunos conseguissem observar as mudanças nas iterações, a formalização dessas mudanças em termos de progressão geométrica foi mais difícil. Muitos compreenderam a relação entre iteração e mudança de área, mas tiveram dificuldades em construir as tabelas para representar as progressões de maneira clara.

A Estação 5, por sua vez, lidou com conceitos ainda mais abstratos, como comportamento assintótico e limites. Essa estação exigiu maior intervenção do professor, especialmente para ajudar os alunos a compreenderem o conceito de que, à medida que o número de iterações tende ao infinito, a área do fractal se aproxima de um limite, enquanto o perímetro cresce indefinidamente. A complexidade matemática envolvida trouxe desafios, mas também proporcionou um ambiente rico para o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos.

Ao final desta aula a sala foi organizada em um círculo de maneira que os integrantes das estações ficassem juntos e pudessem interagir entre si. Cada estação pôde então compartilhar suas descobertas com as outras estações e notavelmente os estudantes perceberam que algumas descobertas eram comuns entre grande parte das estações de estudo. Nessa etapa houve uma dificuldade no início, pois os discentes estavam receosos em partilhar com a turma, porém, o docente realizou questionamentos pontuais a respeito das particularidades dos dois fractais estudados em relação aos conceitos de perímetro, área, progressão geométrica e limites com o objetivo de desenvolver o debate.

A utilização da metodologia ativa de rotação por estações foi eficaz em promover um ambiente de aprendizado colaborativo, dinâmico e desafiador. Os alunos puderam explorar conceitos complexos de maneira prática e teórica, com foco em suas descobertas pessoais e na iteração entre grupos.

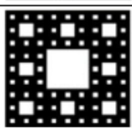
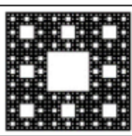
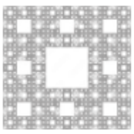
Embora algumas dificuldades tenham surgido, especialmente nas estações que demandavam maior formalização matemática, a aula atingiu seus objetivos principais. A construção manual dos fractais foi bem-sucedida, e os alunos conseguiram compreender de forma satisfatória os conceitos de autossemelhança e iteração. As dificuldades encontradas, especialmente nas estações relacionadas à progressão geométrica e ao comportamento assintótico, não comprometeram o aprendizado, mas destacaram a necessidade de abordagens contínuas e revisões de conceitos.

A metodologia ativa, ao envolver os alunos no processo de construção do conhecimento e ao fomentar a colaboração, cumpriu seu papel. Conforme Bacich, Neto e Trevisani (2015), essa abordagem transforma o aluno em protagonista de sua aprendizagem, o que foi claramente observado nesta aula, em que os alunos interagiram de forma autônoma, colaborativa e investigativa.

8.4 Aula 4 - Explorando as Relações entre os Fractais e Conceitos Matemáticos

Nesta aula, o objetivo principal foi compreender e explorar as conexões entre os fractais e conceitos matemáticos fundamentais, como geometria e álgebra, utilizando as mesmas estações de estudo introduzidas na aula anterior. A aula seguiu uma abordagem prática, focando nas iterações entre os fractais e conceitos já trabalhados anteriormente pelos alunos. A atividade (Tabela 8 e Tabela 9) foi estruturada com base em dois fractais específicos: o Tapete de Sierpinski e o Triângulo de Sierpinski, que foram utilizados para explorar progressões geométricas, área e perímetro, precedidos dos seguintes enunciados, respectivamente: Conforme foi estudado o fractal Tapete de Sierpinski durante sua construção física, utilize os conceitos matemáticos de progressão, área e perímetro para realizar o preenchimento da tabela a seguir; Conforme foi estudado o fractal Triângulo de Sierpinski durante sua construção física, utilize os conceitos matemáticos de progressão, área e perímetro para realizar o preenchimento da tabela a seguir. As Tabelas 8 e 9 estão preenchidas nas tabelas 10 e 11.

Tabela 8: Iterações do Tapete de Sierpinski

	Nível	Nº de quadrados retirados	Comprimento de cada lado	Perímetro de cada quadrado	Área de cada quadrado retirado
	0	0	1	4	0
	1				
	2				
	3				
	4				
...	...	...	...	...	
	n				

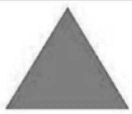
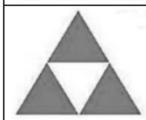
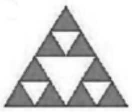
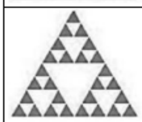
Fonte: Pesquisa, 2024

Tabela 9: Iterações do Tapete de Sierpinski completa

Nível (n)	Número de quadrados retirados	Comprimento de cada lado	Perímetro de cada quadrado retirado	Área de cada quadrado retirado
0	0	1	4	0
1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{9}$
2	8	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{81}$
3	64	$\frac{1}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{729}$
4	512	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{6561}$
…	…	…	…	…
n	8^{n-1}	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{4}{3^n}$	$\frac{1}{9^n}$

Fonte: Pesquisa, 2024

Tabela 10: Iterações do Triângulo de Sierpinski

	Nível	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área total	Comprimento do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
	0	1			1	3	3
	1						
	2						
	3						
...	...	...	...	...	...	...	...
	n						

Fonte: Pesquisa, 2024

Tabela 11: Iterações do Triângulo de Sierpinski completa

Nível (n)	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área total	Comprimento do lado	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
0	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	1	3	3
1	3	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
2	9	$\frac{\sqrt{3}}{64}$	$\frac{9\sqrt{3}}{64}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{4}$
3	27	$\frac{\sqrt{3}}{256}$	$\frac{27\sqrt{3}}{256}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{81}{8}$
...	...	...	...	...	...	...
n	3^n	$\frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}}$	$\frac{3^n\sqrt{3}}{4^{n+1}}$	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{3}{2^n}$	$\frac{3^{n+1}}{2^n}$

Fonte: Pesquisa, 2024

Assim que os alunos se organizaram em suas respectivas estações de estudo, foi entregue a cada equipe uma atividade contendo duas tabelas. Estas tabelas possuíam três iterações do Triângulo de Sierpinski e quatro iterações do Tapete de Sierpinski, com a expectativa de que os alunos identificassem padrões e realizassem generalizações de relações matemáticas observadas nos fractais.

A atividade solicitava que os alunos usassem conceitos abordados em aulas anteriores, como progressões geométricas, para preencher as tabelas e determinar o comportamento do perímetro e da área a cada nova iteração dos fractais. Os alunos foram instruídos a ler os enunciados com atenção, relembrar os conceitos prévios e aplicar seus conhecimentos de maneira crítica. Eles receberam 30 minutos para completar as tabelas e, durante esse tempo, o professor circulou entre os grupos, oferecendo suporte e esclarecendo dúvidas.

Durante o desenvolvimento da atividade, os alunos enfrentaram alguns desafios, principalmente relacionados a operações matemáticas fundamentais, como a soma de frações com denominadores diferentes. Esse tipo de operação era necessário para calcular o valor total da área e do perímetro dos fractais a cada nova iteração. Além disso, o processo de generalizar essas iterações, a fim de prever o comportamento dos fractais para uma iteração n qualquer, trouxe dificuldades relacionadas ao uso do "algebrismo", ou seja, o domínio de expressões algébricas.

Uma dificuldade específica foi observada no cálculo da área dos triângulos equiláteros presentes nas iterações do Triângulo de Sierpinski. Como a fórmula da área de um triângulo equilátero envolve uma raiz quadrada e fração, muitos alunos tiveram dificuldade em realizar operações de soma e subtração de frações ao tentar generalizar o padrão.

Será apresentado e discutido a seguir as resoluções realizadas pelos discentes em duas estações de estudo, estação 1 e estação 3, a escolha de comentar os resultados dessas duas estações se deve ao fato de apresentarem, respectivamente, o maior desempenho e o menor desempenho no preenchimento de ambas as tabelas propostas na atividade.

Figura 33: Resolução estação 1 – Tapete de Sierpinski

Tapete de Sierpinski

Conforme foi estudado o fractal Tapete de Sierpinski durante sua construção física, utilize os conceitos matemáticos de progressão, área e perímetro para realizar o preenchimento da tabela a seguir:

	Nível	Nº de quadrados retirados	Comprimento de cada lado	Perímetro de cada quadrado	Área de cada quadrado retirado
	0	0	1	4	0
	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$	$\frac{1}{9}$
	2	8	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \times 4 = \frac{4}{9}$	$\frac{1}{81}$
	3	64	$\frac{1}{24}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{729}$
	4	512	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{6561}$
...	...	...	...	...	
	n	8^n-1	$\frac{1}{3^n}$	$4 \times \frac{1}{3^n}$	$\frac{1}{3^n}^2$

Fonte: Pesquisa, 2024

Figura 34: Resolução estação 1 – Triângulo de Sierpinski

Triângulo de Sierpinski

Conforme foi estudado o fractal Triângulo de Sierpinski durante sua construção física, utilize os conceitos matemáticos de progressão, área e perímetro para realizar o preenchimento da tabela a seguir:

	Nível	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área total	Comprimento do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
	0	1	$\frac{1\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	1	3	3
	1	3	$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{2}$
	2	9	$\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{12}{4}$
	3	27	$\frac{\frac{1}{8}\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{24}{8}$
...	...	...	...	...	...	...	...
	n	3^{n-1}	$\frac{\frac{1}{2^n}\sqrt{3}}{4}$		$\frac{1}{2^n}$	$\frac{3}{2^n}$	$\frac{1n}{2^n}$

Fonte: Pesquisa, 2024

Os estudantes da estação 1 apresentaram um bom desempenho no preenchimento das tabelas. Note que foram vários acertos e poucos erros em comparação a resolução exposto na Tabela 9 e Tabela 10.

Na Figura 33, coluna “Nº de quadrados retirados” está correta, embora para a iteração na relação genérica está com um erro de escrita; a coluna “Comprimento de cada lado” também está correta; a coluna “Perímetro de cada quadrado” está correta e a coluna “Área de cada quadrado retirado” também está perfeitamente correta.

Enquanto que na Figura 34 podem ser apontados maiores erros. Na coluna “Número de triângulos” os discentes apresentam corretamente a quantidade de triângulos retirados em casa iteração proposta, mas na generalização para n apresentaram um pequeno erro de modelagem; na coluna “Área de cada triângulo” para a iteração 0 foi definido perfeitamente a área da figura dado por $\frac{\sqrt{3}}{4}$, porém, nas iterações seguintes manteve-se um erro, no qual se desconsiderava a potência 2 da fórmula de área do triângulo equilátero dada por $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, em que l é o comprimento do lado do triângulo. Acredita-se que esse fato é resultado de um problema bastante observado durante toda a aplicação da sequência didática, especialmente nas aulas com utilização de álgebra, a álgebra ainda é um desafio para praticamente toda a turma, alguns casos menos que outros.

Essa dificuldade de manipulação de fórmulas, desenvolvimento e simplificação de expressões, exploração de funções, entre outros aspectos muito dificultou o desenvolvimento de atividades, por exemplo, nesse caso específico no qual era necessário manipular a fórmula da área de um triângulo equilátero em que o formato da expressão $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ apresenta fração, raiz quadrada, potência e uma variável. A complexidade dessa fórmula dificultou significativamente o desempenho dos alunos nas atividades propostas, especificamente nas colunas “Área de cada triângulo” e “Área total”, essa última também apresentou erros em todas as iterações e não modelaram um resultado para n.

Um ponto positivo foi o comprimento do lado dos triângulos retirados a cada iteração, pois foi acertado com êxito em todos os casos, desconsiderando a generalização para n, no qual foi percebido como a retirada dos triângulos interfere no comprimento dos lados do triângulo principal.

As colunas “Comprimento do lado de cada triângulo” e “Perímetro de cada triângulo” foram corretamente preenchidas, o que justifica pelo menos o acerto do comprimento do lado na coluna “Área de cada triângulo” e na coluna “Perímetro total” todos as iterações apresentaram erro. Embora os discentes tenham compreendido o que a atividade solicitava e também apontavam linhas lógicas de pensamento e condizentes com a resolução, ainda os faltava conhecimento algébrico suficiente para realização correta das atividades, conforme afirma Schneider (2013, p 11)

> Os conceitos algébricos iniciais são as bases para a formação de diversos conceitos algébricos posteriores, e quando não são trabalhados o suficiente, é provável que o déficit no ensino da Álgebra se prolongue, constituindo um fator importante na dificuldade de aprendizagem de outros conceitos da Matemática.

Logo, por meio dessas resoluções, embora apresentado as dificuldades, conclui-se que é possível utilizar figuras fractais para generalizar e estudar progressões geométricas, área e perímetro. Não somente isso, mas nota-se que os alunos da estação 1 perceberam as relações existentes entre as iterações das figuras tendendo para o infinito no que se refere a área e perímetro dos fractais abordado. Além disso, as respostas para a iteração n mostram que os discentes foram capazes de construir relações genéricas que sintetizam uma regra para praticamente cada coluna da atividade, mostrando uma compreensão satisfatória dos conteúdos indiretamente trabalhados no problema.

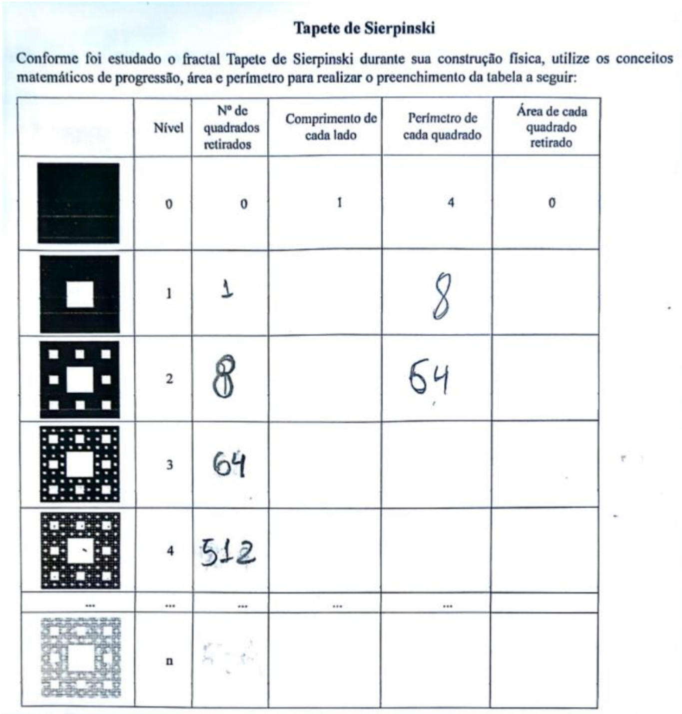
Segundo Vale; Pimentel; Barbosa (2015, p. 47)

> Os contextos em que os alunos tenham a oportunidade de resolver problemas, usando diferentes estratégias, mas também [de] formular problemas, permite que se envolvam diretamente nos processos, aumentem os níveis de motivação, sendo encorajados a investigar, tomar decisões, procurar padrões, estabelecer conexões, generalizar, comunicar, discutir ideias e identificar alternativas.

A constatação feita por Vale; Pimentel; Barbosa (2015) reforça o quanto é importante criar e relacionar problemas matemáticos com o objetivo de desafiar intelectualmente o estudante, pois permitem um maior envolvimento nos processos resolutivos e motivação. O resultado dessa prática é confirmado pelos alunos da estação 1, uma vez que investigaram, tomaram decisões, estabeleceram conexões, procuraram padrões, discutiram e generalizaram para resolverem a atividade.

Diferentemente da estação 1, a estação 3 apresentou um baixo desempenho nas resoluções das atividades, conforme pode ser observado nas Figura 35 e Figura 36. Nesses dois casos os estudantes conseguiram preencher somente as colunas referentes ao “Número de quadrados retirados” para o Tapete de Sierpinski e o “Número de Triângulos” para o Triângulo de Sierpinski para as iterações 4 e 3 respectivamente. Não conseguiram generalizar e construir uma modelagem para a iteração n.

Figura 35: Resolução estação 3 – Tapete de Sierpinski



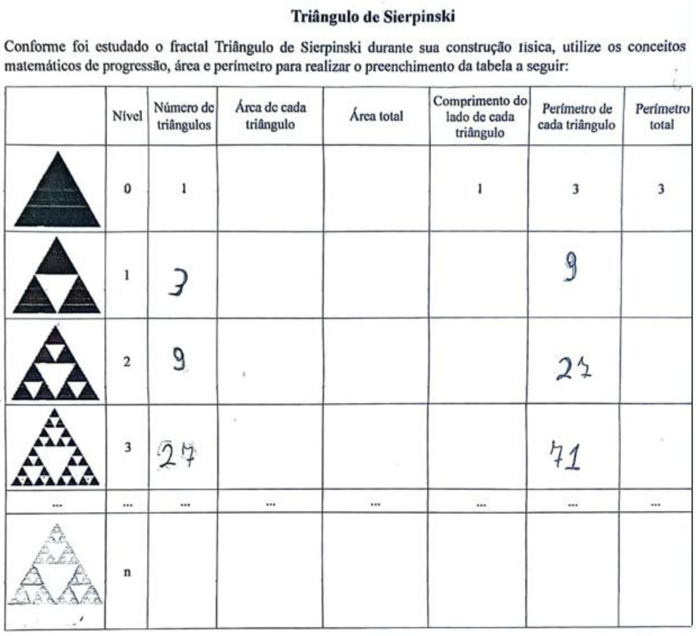
Tapete de Sierpinski

Conforme foi estudado o fractal Tapete de Sierpinski durante sua construção física, utilize os conceitos matemáticos de progressão, área e perímetro para realizar o preenchimento da tabela a seguir:

	Nível	Nº de quadrados retirados	Comprimento de cada lado	Perímetro de cada quadrado	Área de cada quadrado retirado
	0	0	1	4	0
	1	1		8	
	2	8		64	
	3	64			
	4	512			
...	...	...	...	...	
	n	[illegible]			

Fonte: Pesquisa, 2024

Figura 36: Resolução estação 3 – Triângulo de Sierpinski



Triângulo de Sierpinski

Conforme foi estudado o fractal Triângulo de Sierpinski durante sua construção física, utilize os conceitos matemáticos de progressão, área e perímetro para realizar o preenchimento da tabela a seguir:

	Nível	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área total	Comprimento do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
	0	1			1	3	3
	1	3				9	
	2	9				27	
	3	27				71	
...	...	...	...	...	...	...	...
	n						

Fonte: Pesquisa, 2024

Diante dos resultados dessa estação, percebe-se um quadro de dificuldades em álgebra bastante superior a estação comentada anteriormente, pois praticamente nenhuma generalização foi feita. Contudo, existia uma compreensão do solicitado pela atividade e sabiam o objetivo, pois apresentavam questionamentos coerentes e apontavam possíveis resultados ao professor, porém, materializar formalmente o resultado eram suas maiores dificuldades. Esse quadro, conforme já foi abordado, se deve à falta das bases dos conceitos algébricos ou quando não são trabalhados o suficiente no período adequado, consequentemente prejudica a assimilação de conceitos posteriores, neste caso, no último ano do ensino médio (Schneider, 2013).

Isso mostra que embora a estação de estudo estivesse composta de quatro a cinco alunos, dependendo da aula, nenhum foi capaz de concluir ou desenvolver o que a atividade solicitava, mostrando uma homogeneidade na necessidade de conhecimento dentro da estação e uma heterogeneidade em relação as outras estações e o conjunto da sala.

Uma possível solução para contornar problemáticas como a falta de aprendizagem em álgebra é dada por Araújo (2008, p. 336 - 337) quando afirma que:

> Tendo em vista o contexto delineado, a escola deve propiciar atividades para as crianças no sentido de fazer com que elas construam uma aprendizagem significativa na álgebra formal. Se não se introduzir a álgebra de maneira significativa, conectando os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem, se aos objetos algébricos não se associar nenhum sentido, se a aprendizagem da álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos abstratos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem matemática, que para muitos fica desprovida de significação.

Mesmo que a sugestão proposta por Araújo (2008) seja para um público especifico de crianças do início ao decorrer de suas vidas como estudantes na educação básica e embora o público desta pesquisa seja do ensino médio, praticamente no fim da etapa da educação básica, a criação de uma cultura de inserção da álgebra com significado com base em conhecimentos prévios dos discentes é relevante para o processo de ensino aprendizagem.

Contudo, para o público desta pesquisa seria essencial uma reciclagem dos conceitos, considerando conceitos primários e no decorrer do processo escalando para conteúdos mais complexos dependendo de como estão evoluindo no processo avaliativo.

A presença do professor foi essencial nesse processo, pois ajudou os alunos a perceberem que o crescimento ou decréscimo da área e do perímetro dos fractais seguia um padrão previsível. Ao serem incentivados a observar os padrões de crescimento nas progressões geométricas, os estudantes começaram a perceber que, embora os valores dos perímetros e áreas diminuíssem ou aumentassem com cada nova iteração, esse comportamento era regido por uma lógica matemática, nesse caso, razão geométrica.

A aula mostrou-se produtiva, especialmente pela forma como os alunos se dedicaram à resolução das atividades propostas, apesar das dificuldades com operações algébricas e frações.

A visualização das figuras dos fractais ao lado da tabela foi fundamental para a compreensão das relações matemáticas, tanto para os alunos quanto para o professor, pois permitiu que os estudantes visualizassem de maneira concreta como o comportamento dos fractais estava ligado aos conceitos matemáticos trabalhados.

Os desafios encontrados foram: a dificuldade com operações básicas e a generalização de progressões geométricas, reforçando a necessidade de revisar alguns conceitos matemáticos antes de avançar para tópicos mais complexos. No entanto, foi perceptível que os alunos conseguiram compreender a relação entre as iterações dos fractais e as leis de crescimento e decréscimo, mesmo que tenham enfrentado dificuldades no processo de formalizar suas descobertas.

8.5 Aula 5 - Explorando os Fractais na Natureza

Com os objetivos de: Observar e identificar padrões fractais na natureza e refletir sobre a presença e importância dos fractais nos ecossistemas naturais, compreendendo suas implicações para a modelagem da complexidade da natureza a aula de tema: Explorando os Fractais na Natureza teve início com uma breve revisão dos conceitos principais dos fractais com foco em duas características centrais: a autossimilaridade e a complexidade que se repete em diferentes escalas.

A introdução se deu através de uma conversa dialogada, incentivando os alunos a lembrarem de exemplos do cotidiano e de aulas anteriores. Revisando como fractais podem ser definidos matematicamente, mas que sua compreensão vai além, pois são elementos que aparecem de forma frequente em ambientes naturais e em padrões de crescimento, conforme afirma Carneiro; Silva (2015, p. 4):

> Os trabalhos com formas geométricas devem estar articulados com o cotidiano, trazendo, por exemplo, para a sala de aula, a beleza contagiante dos fractais presentes nas frutas, flores, folhas, podendo também, construir fractais, usando os softwares geogebra, Gimper e outros recursos materiais.

Além disso, foi discutido o papel dos fractais na ciência e na matemática, abordando brevemente o conceito de geometria fractal, criada por Benoít Mandelbrot, para lidar com a dificuldade da geometria euclidiana em representar formas naturais. Essa introdução reforçou a importância dos fractais e preparou os alunos para a observação prática.

Após a revisão teórica, a turma foi conduzida até a área verde do colégio. Neste local (Figura 33), as orientações eram para que cada estudante explorasse livremente os elementos naturais, buscando padrões fractais. A ideia de observar padrões fractais na natureza foi proposta como um desafio: "Vocês conseguem encontrar algo que se pareça com os fractais que vimos em sala de aula?".

Antes de iniciar a exploração, foram discutidas algumas perguntas para guiar a atividade:

- "Como os padrões fractais podem aparecer na natureza?"
- "Quais elementos naturais são bons exemplos de autossimilaridade?"
- "Quais dificuldades podemos ter ao tentar modelar essas formas com a geometria tradicional?"

A intenção era instigar o olhar investigativo e preparar os alunos para a exploração individual, sem necessariamente formar grupos fixos, proporcionando uma experiência de descoberta mais pessoal e intuitiva.

Figura 37: Visita área verde ao Centro de Ensino Prof.(a) Marcelina Nóia Alves

Fonte: Autor, 2024

Durante a exploração, os alunos puderam observar diversos aspectos da natureza ao redor, como as árvores, as folhas, os troncos e até as nuvens. Alguns exemplos identificados incluíram:

- Folhas de Árvores: Os alunos observaram que muitas folhas possuem uma estrutura que se ramifica em escalas menores, como pequenas nervuras que se repetem ao longo da folha, um padrão comum entre os fractais na natureza. Essa observação rendeu um debate sobre como a divisão das folhas pode ser comparada a fractais, sendo que cada divisão menor ainda carrega semelhança com o formato maior da folha.

- Textura e Rugosidade dos Troncos: Diversos alunos perceberam a rugosidade dos troncos das árvores e o padrão irregular de textura, com formas que se repetem ao longo do tronco em escalas menores. Esse exemplo de "fractalidade" foi interessante, pois os alunos associaram o conceito com as formas rugosas e irregulares, refletindo sobre como a geometria fractal pode ser mais adequada para descrever esses padrões do que as formas geométricas convencionais.
- Galhos e Ramificações das Árvores: Uma observação significativa foi a estrutura dos galhos e como eles se ramificavam em padrões que, mesmo menores, mantinham a estrutura do todo. Esse exemplo ajudou os alunos a compreenderem melhor o conceito de autossimilaridade, um dos principais pontos discutidos nas aulas anteriores.
- Palmeiras e Nuvens: Alguns alunos apontaram as palhas das palmeiras e as nuvens no céu como exemplos de padrões fractais. No caso das palhas, perceberam que, mesmo em escalas menores, existe uma ordem que se repete. Já as nuvens foram observadas como um exemplo de fractal menos rígido, refletindo sobre como essas formas de composição também obedecem a padrões complexos.

Ao retornar para a sala de aula, foi feito um debate com base nas observações dos estudantes. Cada grupo ou aluno que encontrou elementos com padrões fractais foi convidado a compartilhar sua experiência e refletir sobre as perguntas que guiaram a atividade. Foi questionado sobre o papel das imperfeições observadas e como a modelagem fractal poderia ser uma alternativa à geometria euclidiana na representação desses elementos naturais.

Essa discussão levou os alunos a uma compreensão mais profunda das limitações da geometria tradicional para representar formas naturais e de como os fractais surgem como uma abordagem mais precisa para a modelagem da complexidade e irregularidade dos elementos naturais.

Os discentes expressaram que observar os fractais na natureza trouxe uma nova perspectiva sobre o que haviam estudado. Muitos destacaram que a atividade de campo tornou o conceito mais palpável, facilitando a compreensão de um tema inicialmente abstrato e complexo. Para muitos, ver o conteúdo sendo aplicado em algo cotidiano foi uma experiência enriquecedora.

Eles também perceberam que a compreensão sobre fractais estava além de algo apenas matemático ou visual, mas relacionado a uma forma de interpretação mais próxima das formas e processos naturais, o que aumentou o interesse e a curiosidade pelo tema.

A aula foi produtiva e alcançou os objetivos propostos, apesar das limitações do ambiente. Em discussões finais, foi sugerido que uma visita a um ambiente mais rico em biodiversidade, como uma floresta ou um parque com ecossistemas variados, poderia oferecer um leque maior de elementos fractais, proporcionando uma experiência ainda mais rica. Essa experiência serviu como uma excelente oportunidade para consolidar o aprendizado sobre fractais, oferecendo aos alunos uma aplicação prática que trouxe novas percepções sobre as relações entre matemática e natureza.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo investigar a utilização da geometria fractal como uma estratégia inovadora e motivadora para o ensino de matemática no Ensino Médio, explorando seus benefícios em relação à compreensão de conceitos matemáticos complexos e à promoção de maior engajamento por parte dos alunos. Por meio de uma revisão histórica, teórica e metodológica, o trabalho buscou destacar o potencial dos fractais para superar os limites impostos pela geometria euclidiana e sua relevância como ferramenta didática contemporânea.

Ao longo da pesquisa, foi compreendido que a geometria fractal tem destaque por possibilitar a representação de formas existentes na natureza que são rotineiramente descritas como irregulares ou caóticas, mas que possuem padrões de regularidade. A capacidade dos fractais de criar conexões entre conceitos abstratos da matemática com o mundo real certifica a essa área uma aplicação prática que falta à geometria euclidiana. Além disso, os fractais possibilitam uma atuação interdisciplinar, integrando a matemática a áreas como a biologia, a física, a computação e as artes, ampliando as oportunidades de aprendizagem de forma significativa.

Os resultados que foram obtidos ao longo da elaboração e aplicação de sequências didáticas mostraram-se favoráveis. As atividades propostas, que incluíram oficinas práticas, aulas expositivas e uma visita de campo, promoveram maior participação dos alunos e despertaram o interesse pela matemática. Técnicas como o uso de fractais aplicados aos conceitos como progressões geométricas, limites, área e perímetro permitiram que os estudantes compreendessem de forma mais tangível e concreta a complexidade e a beleza da matemática.

Contudo, foi identificado alguns desafios significativos. Um dos principais é a falta da geometria fractal na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o que torna necessária a adaptação dos educadores e gestores escolares para incluir esse conteúdo em suas aulas. Além disso, a implementação de atividades baseadas em fractais demanda recursos tecnológicos e formação específica dos professores, especialmente no uso de ferramentas digitais, como softwares de geometria dinâmica.

Com base nos resultados obtidos, algumas recomendações são sugeridas para o futuro:

Ampliação da Pesquisa: Estudos longitudinais são necessários para avaliar o impacto de longo prazo do uso da geometria fractal no desempenho acadêmico e na motivação dos alunos. Esses estudos poderiam incluir diferentes contextos escolares e faixas etárias, permitindo uma análise mais abrangente dos benefícios.

Desenvolvimento de Materiais Didáticos: Há uma necessidade de criação de materiais específicos, como livros e apostilas que incluam fractais em sequências didáticas alinhadas à realidade das escolas brasileiras. Esses materiais devem ser projetados para facilitar a implementação por parte dos professores, mesmo na ausência de recursos tecnológicos avançados.

Formação Continuada de Professores: Programas de capacitação docente que explorem a geometria fractal e suas aplicações práticas são essenciais. Esses programas devem incluir tanto a fundamentação teórica quanto a prática pedagógica, garantindo que os professores se sintam confiantes para introduzir esse tema em sala de aula.

Expansão Interdisciplinar: Além da matemática, os fractais podem ser introduzidos em outras disciplinas, como ciências, para explicar fenômenos naturais; em artes, para explorar sua dimensão estética; e em tecnologia, para demonstrar aplicações práticas em compressão de dados e design.

Este estudo também destaca que os fractais oferecem uma oportunidade para promover uma educação mais conectada com o cotidiano dos alunos. Ao representar padrões encontrados na natureza e em sistemas tecnológicos, eles tornam o ensino de matemática mais atraente e relevante. Além disso, sua utilização pode estimular o desenvolvimento do pensamento crítico e da criatividade, habilidades fundamentais para o século XXI.

Conclui-se que, embora os desafios, a geometria fractal possui um grande potencial como recurso pedagógico. Sua capacidade de aliar o abstrato ao concreto, o teórico ao prático, faz dela uma ferramenta importante para transformar a experiência de ensino-aprendizagem. O impacto positivo visto nas sequências didáticas reforça a importância de explorar novos caminhos na educação matemática.

Por fim, espera-se que este trabalho inspire outros educadores e pesquisadores a continuar explorando as potencialidades dos fractais e de outras abordagens inovadoras no ensino de matemática. Acredita-se que, com dedicação e criatividade, seja possível construir uma educação mais instigante e significativa, capaz de preparar os alunos para compreender e transformar o mundo ao seu redor.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, E. A. DE; **Ensino de álgebra e formação de professores.** Educação, Matemática, Pesquisa, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.

ALVES. Delba Costa da Silva. **Fractais: uma ferramenta no ensino médio**/Delba Costa da Silva Alves. – 2019.

ALVES, Jardel Vieira. **Geometria dos Fractais e suas Infinitas Aplicações** /Jardel Vieira Alves. Manaus: [s.n], 2021. 24 f.: il.; 30 cm.

ASSIS, Thiago Albuquerque de et al. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Madrid, v. 22304, n. 30, p.2-10, 21 jul. 2008. Anual.

BAIER, Luana Cristina. **Fractais dos Conjuntos Julia.** Disponível em:<https://abelsiqueira.github.io/disciplinas/cm141/2016s2/luana_baier.pdf>. Acesso em 18 de maio de 2018.

BACICH, L.; NETO, A. T.; TREVISANI, F. M. **Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora**. Porto Alegre: Penso, 2015.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal-para a sala de aula**, 3. edição. Autentica Editora, Belo Horizonte, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BONJORNO, José Roberto. **Prisma matemática: funções e progressões**: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa. – 1. ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

CARNEIRO. Jardilema Teixeira. SILVA. Renata Lourinho. **Explorando o estudo dos fractais para os anos finais do ensino fundamental**. Marabá/PA, 2015.

CUNHA, Márcio Macário da. **Progressão Aritmética, Geométrica e Fractais.** Campo Grande/MS, 2013

FARIAS, Maílson Alves. **Fractais: uma abordagem introdutória**/Maílson Alves Farias. - João Pessoa, 2020.

FOETSCH Amanda Cristina. WILTUSCHNIG Bianca Elena. SOUZA. Marcel Thadeu de Abreu e. MELO. Matheus Daniel Galvão de. CMM102- Tópicos de Matemática 2: Fractais Professora Elizabeth Wegner Karas Trabalho em grupos. Curitiba, 2019.

COLEÇÃO PRISMA. **FTD/PNLD**. 2024. Disponível em: https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias/prisma-matematica/. Acesso em: 26 Ago 2024

LAURENÇO, Adriana de Carvalho. **Investigação matemática por meio de fractais**./Adriana de Carvalho Laurenço, 2017.

LIMA, Valéria Scomparim de; et al. Progressões Aritméticas e Geométricas: História, Conceitos e Aplicações. Intellectus. V.2, n.2-12, p. 34-68, Jan./Julho. 2004.

LOPES, M. J.; SALVADOR, B. J.; FILHO B. F. I. **O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas**. Revista Eletrônica de Educação, São Paulo, v.7, n.3, p.47-62, 2013.

MANDELBROIT, Benoit B. **The fractal geometryofnature**. Rev. ed. of: Fractals. 1977.

MICHEL, Maria Helena.**Metodologias e Pesquisa Científica em Ciências Sociais: um guia prático para acompanhamento da disciplina e elaboração de trabalhos monográficos**. São Paulo, Atlas, 2005.

MORAN, J. M. **Metodologias Ativas e Ensino Híbrido**. 2018.

MUCHERONI, Laís Fernandes. **Dimensão de Hausdorff e algumas aplicações** / Laís Fernandes Mucheroni. - Rio Claro, 2017. 61 f.: il.

NASCIMENTO, R. C. do; COSTA, L. d. F. M. da. **A geometria fractal e a formação do professor de matemática: constructos possíveis**. Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), v. 11, n. 1, p. 4, 2020.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e aplicação da Geometria Fractal.** 2013. 88 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Paraíba, João Pessoa, 2013. Cap. 5.

OLIVEIRA, Graciele de Cássia. **Geometria Fractal na Educação Básica.**2014. 71 f. Monografia (Especialização) - Curso de Pós-graduação em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2014.

OLIVEIRA, Luciana Renata de. **Construindo árvores filogenéticas com o uso de caminhadas aleatórias e geometria fractal.** 2008. 58 f. TCC (Graduação) - Curso de Bacharelado em Física. Centro de Ciência Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2008. Cap. 5.

PRODANOV, Cleber Cristiano. **Metodologia do trabalho científico** [recurso eletrônico]: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico / Cleber Cristiano Prodanov, Ernani Cesar de Freitas. – 2. ed. – Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

REIS, Márcio Vaiz dos. **Conjunto de Mandelbrot** [manuscrito]/Márcio Vaiz dos Reis. 2016. 74 f.

SALLUM, Elvia Mureb. **Fractais no Ensino Médio**. Revista do Professor de Matemática – RPM 57. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

SCHNEIDER, Alexsandro. **A Aprendizagem da Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

SOARES. Luciano Gomes. **O campo da visualização matemática no ensino e aprendizagem da matemática**. Maceió/AL. 2020

SONZA, Aline Picoli. LEIVAS, **José Carlos Pinto. Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma oficina pedagógica.** Thema, Santa Maria/RS, volume 15, nº 04, p.1549 a 1561, 2018.

SOUSA, Angélica Silva de. OLIVEIRA, Guilherme Saramago de. ALVES, Laís Hilário. **A pesquisa bibliográfica: Princípios e Fundamentos.** Cadernos da Fucamp, volume 20, nº 43, p. 64-83, 2021

SILVA, Renata Aparecida da. GANACIM, Francisco Itamar Secolo. **Fractais gerados por sistemas de funções iterativas**. Anais da III Semana das Licenciaturas, Curitiba, 2019.

UGALDE, Maria Cecília Pereira. ROWEDER, Charlys. **Sequência didática: uma progressão metodológica de ensino-aprendizagem.** Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico, v. 6, Edição Especial, e099220, 2020.

VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A. Ensinar matemática com resolução de problemas. Quadrante, v. 24, n. 2, p. 39-60, 2015.

VENTURA, D. O que são os fractais, padrões matemáticos infinitos apelidados de ‘impressão digital de Deus’. **BBC News Mundo**. 4 dez. 2019. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-50656301. Acesso em: 7 agosto 2020.