



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Antonio Wellington Neves Sousa

Proposta de Sequência de Conteúdos para o Ensino de
Trigonometria no Ensino Médio: Da Abordagem
Histórica às Aplicações e Resolução de Problemas

Antonio Wellington Neves Sousa

Dissertação de Mestrado:

**Proposta de Sequência de Conteúdos para o Ensino de
Trigonometria no Ensino Médio: Da Abordagem Histórica às
Aplicações e Resolução de Problemas**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:

Prof. Dr. Marcos Vinicio Travaglia

Coorientador:

Prof. Dr. Vitaliano de Sousa Amaral

Teresina - 2025

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S725p

Sousa, Antonio Wellington Neves.

Proposta de sequência de conteúdos para o ensino de trigonometria no ensino médio: da abordagem histórica às aplicações e resolução de problemas / Antonio Wellington Neves Sousa. -- 2025.

174 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2025.

“Orientador: Prof. Dr. Marcos Vinicio Travaglia.
Coorientador: Prof. Dr. Vitaliano de Sousa Amaral”.

1. Matemática Estudo e Ensino. 2. Trigonometria. 3. Didática de Ensino. 4. Ensino Médio. I. Sousa, Paulo Alexandre Araújo. II. Título.

CDD 510.07

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461



PROFMAT



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de mestre em matemática intitulada: ***Uma proposta de sequência didática para o ensino de trigonometria no Ensino Médio***, defendida pelo mestrando Antonio Wellington Neves Sousa, em 27 de junho de 2025 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Marcos Vinicio Travaglia
Presidente da Banca examinadora

Vitaliano de Sousa Amaral
Coorientador

Cleidinaldo Aguiar Souza
Examinador Interno

Alberto Cunha Alves
Examinador Externo

Dedico esta dissertação especialmente aos meus irmãos, Maria Rosângela e Francisco José, que não tiveram o prazer de contemplar este momento.

À minha esposa e minha filha, que são minha inspiração e incentivo.

À minha família, que são minha base e sustentação.

Ao meu pai, a quem um dia disse com convicção: “Vou estudar para não passar a vida inteira trabalhando na roça”.

Aos meus sogros, que sempre me disseram “você é capaz”.

Aos amigos de mestrado, com quem pude contar.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Jesus, meu SENHOR, amigo e conselheiro, por me conceder forças e sabedoria para continuar os estudos e conquistar o tão sonhado e desejado título de mestre.

À minha amada esposa, Orilane Evaristo, por todo apoio e incentivo incondicional que foram determinantes para esta realização. À minha filha Emilly Caroline por chegar no meio desta jornada.

Aos meus pais, meus irmãos, meu sogro e minha sogra pelas incessantes intercessões em orações, apoio financeiro e incentivo.

À meus queridos amigos de PROFMAT, que por tantas vezes me ajudaram e me abraçaram em momentos difíceis, que graças a eles consegui permanecer firme nesta jornada. Agradeço, em especial, ao meu amigo e irmão Arielle Araújo por todo apoio e amparo em sua residência ao longo destes dois anos de mestrado. Ao meu amigo Gemilson por ter contribuído em vários conceitos presentes no trabalho. E aos amigos e companheiros Antonio Carlos, Alinne Sales, Fabrício, Juliano, Vitor Oliveira — “Ousado resolve”, Valrilene e Wallace Sales, que sem a ajuda deles não teria chegado onde cheguei.

Ao meu orientador Marcos Vinicio e meu co-orientador Vitaliano Amaral, pelas orientações que foram fundamentais na dissertação.

À Universidade Federal do Piauí pela oferta do mestrado.

À SBM pela oportunidade de fazer este mestrado.

“Uma criança, uma professora, uma caneta e um livro podem mudar o mundo”.

Malala Yousafzai.

Resumo

Esta dissertação apresenta-se na forma de um produto educacional que propõe uma abordagem detalhada acerca dos principais conceitos e definições do conhecimento trigonométrico com ênfase no Ensino Médio. O trabalho apresenta sugestões para o ensino de Trigonometria, destacando possíveis desafios ao professor e dificuldades ao aluno, fundamentando-se em pesquisas bibliográficas e análise de livros didáticos do Ensino Médio. Ao longo do trabalho, apresentamos sugestões de recursos didáticos concretos e computacionais aos leitores e professores. Além disso, é proposta uma aula prática sobre aplicações das razões trigonométricas no cálculo de distâncias inacessíveis. A dissertação exhibe, na seção resolução de problemas, alguns problemas clássicos de aplicações da Trigonometria, destacando as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução dos mesmos. Por fim, o trabalho conclui ressaltando a importância do tema desenvolvido, sugerindo caminhos para futuros trabalhos a respeito do assunto.

Palavras-chave: Trigonometria; Sequência de conteúdos; Resolução de Problemas; Aplicações Práticas.

Abstract

This dissertation is presented in the form of an educational product that proposes a detailed approach to the main concepts and definitions of trigonometric knowledge, with an emphasis on high school education. The study offers suggestions for teaching trigonometry, highlighting potential challenges faced by teachers and common difficulties encountered by students. It is grounded in bibliographic research and an analysis of high school textbooks. Throughout the work, we present concrete and computational didactic resources aimed at educators and readers. Additionally, a practical lesson is proposed, focusing on the application of trigonometric ratios to calculate inaccessible distances. In the problem-solving section, the dissertation explores classic problems involving trigonometric applications, emphasizing the difficulties students often experience in solving them. Finally, the study concludes by reinforcing the importance of the topic and suggesting directions for future research on the subject.

Keywords: Trigonometry; Sequence of contents; Teaching Resources; Problem Solving; Practical Applications.

Lista de Figuras

2.1	Representação de um ponto	11
2.2	Representação geométrica da reta	11
2.3	Pontos colineares e não colineares	12
2.4	Representação da semirreta	12
2.5	Representação geométrica do segmento de reta	12
2.6	Segmentos congruentes	13
2.7	Representação geométrica de um ângulo	14
2.8	Representação geométrica do ângulo nulo	14
2.9	Representação geométrica do ângulo de uma volta	15
2.10	Representações geométricas dos ângulos raso e reto	15
2.11	Representações de retas concorrentes, paralelas e de retas coincidentes . . .	16
2.12	Segmentos AB e CD que são paralelos e retas r e s perpendiculares	16
2.13	Feixe de retas paralelas	17
2.14	Retas transversais a um feixe de paralelas	17
2.15	Reta tangente a uma circunferência	19
2.16	Triângulo ABC	19
2.17	Alturas em um triângulo acutângulo	21
2.18	Alturas em um triângulo obtusângulo	21
2.19	Bissetrizes internas de um triângulo	22
2.20	Triângulo equilátero	23
2.21	Triângulo retângulo em A	23
2.22	Teorema de Tales aplicado em um triângulo qualquer	24
2.23	Diagonal de um quadrado	25
2.24	Congruência de triângulos	26

2.25	Hipóteses do caso de congruência L.A.L	26
2.26	Hipóteses do caso de congruência A.L.A	27
2.27	Hipóteses do caso de congruência L.L.L	28
3.1	Exemplo de semelhança de triângulos	31
3.2	Hipótese para o Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos; reta r é paralela ao lado BC	33
3.3	Exemplo - Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos	33
3.4	Hipótese do caso de semelhança Ângulo - Ângulo	34
3.5	Demonstrando o caso de semelhança Ângulo - Ângulo	35
3.6	Hipótese do caso de semelhança Lado - Ângulo - Lado	36
3.7	Demonstrando o caso de semelhança Lado - Ângulo - Lado	36
3.8	Hipótese da Proposição 3.5: dois triângulos com lados proporcionais	38
3.9	Figura para a demonstração do caso L.L.L	38
3.10	Figura para definir as razões trigonométricas	40
3.11	Triângulo para definir formalmente as razões trigonométricas	41
3.12	Exemplo 01: Introdução às razões trigonométricas	42
3.13	Exemplo 02: Introdução às razões trigonométricas	44
3.14	Triângulo retângulo para definir as razões trigonométricas	45
3.15	Aplicação das razões trigonométricas em um triângulo	46
3.16	Figura para compreensão do termo <i>tangente</i>	48
3.17	Triângulo retângulo para a visualização do Teorema de Pitágoras	49
3.18	Triângulo retângulo para a demonstração do Teorema de Pitágoras	49
3.19	Triângulo para o cálculo das razões dos ângulos de 30° e 60°	51
3.20	Triângulo para o cálculo do seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°	53
3.21	Triângulo para a dedução da Relação Fundamental da Trigonometria	55
3.22	Figura para a demonstração do seno da soma de dois arcos	58
3.23	Figura para a demonstração do cosseno da soma de dois arcos	60
3.24	Figura para a demonstração do seno da diferença de dois arcos	63
3.25	Figura para a demonstração do cosseno da diferença de dois arcos	65
3.26	Circunferência de centro O	69

3.27	Raio de uma circunferência	69
3.28	Corda de uma circunferência	70
3.29	Diâmetro de uma circunferência	70
3.30	Comprimento de uma circunferência	71
3.31	Arco de uma circunferência	73
3.32	Arco de uma circunferência	73
3.33	Arco nulo e arco de uma volta.	74
3.34	Ângulo central	74
3.35	Medida de um arco	74
3.36	Medida de um arco	75
3.37	Circunferência dividida em 360 partes	76
3.38	Principais arcos em graus.	76
3.39	Arcos semelhantes	77
3.40	Ângulo com medida igual a 1 radiano	78
3.41	Arcos de medida 1 rad, 2 rad e 3 rad	79
3.42	Comprimento de um semicírculo de raio 1	80
3.43	Figura utilizada para mostrarmos porque o raio é 1	85
3.44	Exemplo de razões trigonométricas na circunferência	86
3.45	Visualização do seno e cosseno no ciclo trigonométrico	88
3.46	Orientação da circunferência trigonométrica	88
3.47	Circunferência trigonométrica	89
3.48	Quadrantes do ciclo trigonométrico	90
3.49	Cosseno e seno de um ângulo qualquer	92
3.50	Cosseno e seno de ângulos congruos com $\frac{\pi}{6}$	94
3.51	Tangente de um ângulo qualquer	95
3.52	Tangente dos arcos congruos com $\frac{\pi}{4}$	96
3.53	Ilustração da Lei dos cossenos	99
3.54	Uma demonstração para a lei dos cossenos no triângulo acutângulo	100
3.55	Uma demonstração para a lei dos cossenos no triângulo obtusângulo	101
3.56	Exemplo de aplicação da Lei dos Cossenos	103

3.57	Ilustração da Lei dos senos	104
3.58	Uma demonstração para a lei dos senos no triângulo acutângulo	105
3.59	Uma demonstração para a lei dos senos no triângulo obtusângulo	106
3.60	Exemplo de aplicação da Lei dos Senos	108
3.61	Cosseno e seno como coordenadas cartesianas	109
3.62	Função de Euler	110
3.63	Gráfico da função $\text{sen}(x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$	111
3.64	Gráfico da função $\text{cos}(x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$	112
3.65	Gráfico da função $\text{tan}(x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$	113
3.66	Função cosseno no simulador PhET	114
3.67	Função tangente no simulador PhET	115
3.68	Função tangente no simulador PhET	116
3.69	Gráfico da função $y = 3 + \text{sen}(2x)$	118
3.70	Gráfico da função $y = 1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$	119
4.1	Cálculo da largura de um rio - 1	122
4.2	Triângulo representando a largura de um rio	122
4.3	Cálculo da largura de um rio - 2	123
4.4	Representação simplificada de um teodolito rudimentar	124
4.5	Confecção do teodolito rudimentar	125
4.6	Utilizando o teodolito rudimentar para encontrar alturas	126
4.7	Aula prática com teodolito rudimentar	127
4.8	Triângulos da aula de campo construídos no Geogebra	128
4.9	Lançamento de projétil	129
4.10	Decomposição da velocidade v_0 sobre os eixos x e y	130
4.11	Alcance máximo no lançamento de um projétil	134
4.12	Triângulo com lados e ângulos indicados para dedução de sua área	134
4.13	Área de um triângulo acutângulo	135
4.14	Área de um triângulo obtusângulo.	136
4.15	Área de um triângulo retângulo	136
4.16	Demonstração alternativa para o seno da adição de arcos	137

4.17	Exemplo 1 - Resolução Problemas	140
4.18	Exemplo 2 - Resolução de problemas.	141
4.19	Exemplo 3 - Resolução de problemas.	142
4.20	Figura para resolução do problema do ninhos das araras	142
4.21	Exemplo 5 - Resolução de problemas	144
4.22	Exemplo 6 - Resolução de problemas.	146
4.23	Figura para a segunda resolução do problema 6	147
4.24	Representação gráfica da função $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi t)$	150

Lista de Tabelas

3.1	Valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis	54
3.2	Relação entre graus e radianos	82
3.3	Relação entre graus e radianos	83
3.4	Relação entre graus e radianos.	83
3.5	Cosseno e seno dos arcos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π	91
3.6	Valores de seno, cosseno e tangente dos principais arcos de 0 a 2π	98
3.7	Pares ordenados para construção da função $\text{sen}(x)$	111
3.8	Pares ordenados para construção da função $\text{cos}(x)$	112
3.9	Pares ordenados para construção do gráfico da função $y = 3 + \text{sen}(2x)$. . .	117
3.10	Pares ordenados para construção da função $y = 1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$	119

Lista de símbolos e notações

$: \Longleftrightarrow$ O que está próximo dos dois pontos é definido pelo que está depois da seta sem dois pontos

α Letra grega alfa

$\angle AOB$ Ângulo definido pelas semirretas OA e OB

$\approx$ Aproximadamente

β Letra grega beta

$\equiv$ Congruente

γ Letra grega gama

$\implies$ Implica

$\overline{AB}$ Medida ou comprimento do segmento AB

$\overrightarrow{OA}$ Semirreta com origem em O e que passa por A

$\sim$ Semelhante

$\triangle ABC \equiv \triangle CDE$ Triângulo ABC congruente ao triângulo CDE

$\triangle ABC \sim \triangle CDE$ Triângulo ABC semelhante ao triângulo CDE

$\triangle ABC$ Triângulo ABC

$\widehat{AOB}$ Medida do ângulo $\angle AOB$

$A(ABC)$ Área do triângulo ABC

$AB \equiv CD$ Segmento AB congruente ao segmento CD

$AB \parallel CD$ Segmento AB paralelo ao segmento CD

AB Segmento com extremidades A e B

$r \perp s$ Reta r perpendicular a reta s

$\widehat{0\pi}$ Arco de meia volta com início em 0 e fim em π

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	xiii
1 Aspectos históricos da Trigonometria	7
2 Resultados preliminares - revisão de Geometria Plana	10
2.1 Ponto, reta, pontos colineares, semirreta, segmento de reta e segmentos congruentes	10
2.1.1 Ponto	10
2.1.2 Reta	11
2.1.3 Pontos colineares	11
2.1.4 Segmentos congruentes	13
2.2 Ângulo formado por duas semirretas	13
2.3 Ângulo nulo e ângulo de uma volta	14
2.4 O ângulo raso ou de meia volta e ângulo reto	15
2.5 Retas concorrentes, paralelas e perpendiculares	16
2.6 Feixe de retas paralelas, retas transversais e o Teorema de Tales	17
2.7 Reta tangente a uma circunferência	18
2.8 Triângulos: definição, elementos e classificação	19
2.8.1 Elementos de um triângulo	20
2.8.2 O triângulo equilátero	22
2.8.3 O triângulo retângulo	23
2.8.4 Aplicação do Teorema de Tales em um triângulo qualquer	24
2.9 Propriedades do quadrado	25

2.10	Congruência de triângulos	25
2.10.1	O critério $L.A.L$ (Lado - Ângulo - Lado).	26
2.10.2	O critério $A.L.A$ (Ângulo - Lado - Ângulo).	27
2.10.3	O critério $L.L.L$ (Lado - Lado - Lado)	27
3	O Ensino de Trigonometria	29
3.1	Semelhança de triângulos	29
3.1.1	Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos	32
3.2	Casos de semelhança de triângulos	34
3.2.1	O caso $A.A$ (Ângulo - Ângulo)	34
3.2.2	O caso $L.A.L$ (Lado - Ângulo - Lado)	35
3.2.3	O caso $L.L.L$ (Lado - Lado - Lado)	37
3.3	A Trigonometria no triângulo retângulo	39
3.3.1	Os ângulos notáveis de 30° , 45° e 60°	48
3.3.2	A Relação Fundamental da Trigonometria	54
3.4	Fórmulas de adição e subtração de arcos	57
3.5	Trigonometria na circunferência	68
3.5.1	Elementos da circunferência	69
3.5.2	Algumas relações entre grau e radiano	80
3.6	A circunferência ou ciclo trigonométrico	83
3.6.1	Orientação da circunferência trigonométrica	88
3.6.2	Extensão do cosseno e seno para ângulos não agudos	91
3.6.3	Extensão da tangente para ângulos não agudos	95
3.7	A trigonometria em um triângulo qualquer	99
3.7.1	Lei dos cossenos	99
3.7.2	Lei dos senos	104
3.8	Funções trigonométricas	108
3.8.1	A função de Euler	109
3.8.2	A função seno	111
3.8.3	A função cosseno	112
3.8.4	A função tangente	113
3.8.5	Funções seno, cosseno e tangente com o <i>PhET Interactive Simulations</i> . .	114

3.8.6	Gráfico de funções da forma $y = a + b \cdot \text{sen}(cx)$	116
3.8.7	Gráfico de funções da forma $y = a + b \cdot \text{cos}(cx + d)$	118
4	Aplicações da Trigonometria e resolução de problemas	121
4.1	Medidas inacessíveis	121
4.1.1	Aplicação 01: Cálculo da largura de um rio	121
4.1.2	Aplicação 02: Altura inacessível - Roteiro de aula de campo	123
4.1.3	Confecção do teodolito rudimentar	124
4.1.4	A utilização do teodolito em aula de campo	125
4.1.5	Uso do teodolito rudimentar para encontrar alturas	126
4.2	Aplicação 03: Lançamento de projéteis	129
4.3	Aplicação 04: Área de um triângulo qualquer	134
4.4	Resolução de problemas	138
5	Considerações finais	151

Introdução

Este trabalho busca ser um suporte didático para professores de Matemática do Ensino Médio e do Ensino Superior que atuam na formação de professores. Para isso, realizou-se uma análise de livros didáticos utilizados nesses dois níveis de ensino, com a finalidade de identificar como os conceitos e definições em Trigonometria estão sendo apresentados aos estudantes do Ensino Médio e de que maneira são abordados na formação inicial dos futuros docentes.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma proposta de sequência de conteúdo para o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, utilizando para este fim uma abordagem que vai desde os aspectos históricos às aplicações e resolução de problemas, passando por sugestões de recursos didáticos, sejam eles concretos manipuláveis ou computacionais. Introduzimos a Trigonometria tanto no triângulo retângulo como na circunferência de forma clara e detalhada, apontando os principais conceitos e definições. Para esta escolha do conteúdo e do modo de apresentar a Trigonometria, foram levadas em consideração as possíveis dificuldades dos alunos e dos professores. Com isso, acreditamos que esta sequência seja adequada para que o aluno consiga ter uma aprendizagem sólida e o professor tenha um melhor domínio da Trigonometria.

Nos últimos anos, o debate em torno do ensino de Trigonometria nesta etapa da educação básica tem ganhado destaque significativo, sobretudo devido às dificuldades apresentadas pelos discentes. Oliveira (2006) relata uma experiência pessoal dizendo que

Em aproximadamente 18 anos de trabalho com turmas de oitava série e do Ensino Médio, observamos a dificuldade apresentada pelos alunos durante aulas de Trigonometria, ou quando são abordados problemas a ela relacionados, ou mesmo problemas da física que usam algum conceito trigonométrico básico. Como resultado disso, ficamos inclinados a examinar mais de perto as raízes e o caráter das dificuldades sentidas pelos alunos [...]. (Oliveira, 2006, p. 11).

Este conhecimento matemático, fundamental, por exemplo, para o entendimento de fenômenos naturais ondulatórios (por exemplo, as funções trigonométricas do tipo $u(x, t) = \cos(kx - \omega t)$ e $u(x, t) = \sin(kx - \omega t)$ descrevem ondas como as de uma corda de um violão ou ondas em um lago), frequentemente é alvo de críticas pelos alunos por sua complexidade e dificuldade em compreendê-la razoavelmente. No entanto, é indiscutível que a Trigonometria, a qual surgiu nas civilizações antigas como uma ferramenta poderosa

para o cálculo de distâncias inacessíveis, é essencial não apenas para futuros estudos acadêmicos em áreas como física, engenharia e própria matemática avançada, mas também para a vida cotidiana, oferecendo condições para a compreensão de problemas espaciais, análise de dados e até mesmo para aplicações artísticas e tecnológicas.

Nesta dissertação, exploraremos não apenas a proposta de sequência dos conteúdos para o desenvolvimento da Trigonometria, mas também apontar alguns dos desafios enfrentados no processo ensino-aprendizagem de Trigonometria e propor uma alternativa para tornar este ensino mais acessível, engajador e relevante para os estudantes do Ensino Médio. Discutiremos como uma abordagem inovadora com o uso de tecnologias educacionais e a conexão com contextos do mundo real podem não só facilitar a aprendizagem, mas também incentivar o interesse dos alunos pelo conteúdo proposto. Isto porque, conforme os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM 2000):

Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional (BRASIL, 2000, p. 40).

Dependendo da forma e da metodologia usadas pelo professor na abordagem da Trigonometria em sala de aula, ela poderá ser vista como algo desnecessário e difícil para os alunos ou poderá ser visualizada como algo simples de se entender e prazeroso. Ele pode simplesmente expor as fórmulas e definições e, em seguida, propor lista de exercícios e dizer como proceder, mas poderá também apresentá-la de maneira dinâmica, incentivando a criatividade, o pensamento crítico, despertando curiosidades diversas nos alunos e revendo conceitos anteriores que são pré-requisitos para a aprendizagem, Gadelha (2023). Desta forma, ao desenvolver este trabalho, esperamos contribuir para o desenvolvimento de estratégias educacionais mais eficazes e inclusivas, garantindo que todos ou pelo menos a maioria dos estudantes tenham a oportunidade de dominar os fundamentos da Trigonometria.

Ao longo dos anos, diversos teóricos educacionais vêm discutindo acerca da utilização de novas metodologias em sala de aula pelos professores e, para o ensino de Trigonometria, estas novas metodologias são imprescindíveis para que a turma veja este saber matemático como algo de utilidade prática, desmitificando a Trigonometria como algo difícil ou impossível de aprendê-la e usá-la. Paschoal (2018) afirma que

É muito comum, quando se fala em Trigonometria, ouvir os estudantes dizendo: não gosto, é muito difícil. Até mesmo para o professor, o ensino da Trigonometria pode se tornar uma tarefa difícil. Muitos professores ainda utilizam o tradicional método de ensino, que se baseia em aulas expositivas e uma série de exercícios, sendo o livro didático o recurso que mais aproxima conceitos matemáticos (Paschoal, 2018, p. 15).

Mas, qual metodologia, quais recursos ou qual a sequência de conteúdos o professor poderá utilizar para tornar o ensino de Trigonometria mais acessível, engajador e relevante para os estudantes do Ensino Médio? Teremos bons resultados na aprendizagem se iniciarmos pela Trigonometria no triângulo retângulo ou na circunferência? E se iniciarmos com a semelhança de triângulos? Não temos uma fórmula pronta para isto, depende, entre outros fatores, do engajamento da turma e até mesmo da disposição do docente em abordar a Trigonometria de forma mais dinâmica. Porém, acreditamos que seja natural iniciarmos com uma abordagem histórica acerca das razões que levaram ao surgimento deste conhecimento matemático, quais povos a criaram e como eles a utilizavam no dia a dia.

A Trigonometria possui uma história rica e diversificada que remonta às civilizações mais antigas. Seu desenvolvimento está entrelaçado com os avanços científicos, necessidades práticas como cálculo de distâncias inacessíveis, cálculo de áreas etc., daí a grande importância em ser estudada e apreciada. Mas, por que o ensino de Trigonometria se tornou um desafio para o professor de Matemática? As possíveis respostas são:

- A base fragilizada de muitos estudantes, visto que trabalhamos com números racionais decimais e fracionários e a própria geometria;
- A falta de domínio do professor e suas metodologias;
- A falta de motivação dos próprios estudantes quando afirmam “Não vou precisar calcular essas medidas no meu dia a dia” ou “Não preciso fazer os cálculos, a tecnologia está aí para usar”.

Desenvolver uma sequência de conteúdos eficaz para o ensino de Trigonometria requer uma abordagem estruturada que leve em consideração a progressão dos conceitos, a aplicação prática e o engajamento dos estudantes. É de suma importância iniciar o conteúdo deixando claro, por exemplo, que as razões trigonométricas surgem de uma simples semelhança de triângulos e, desta forma, a Trigonometria vai se tornando familiar ao que os alunos já conhecem. Assim, neste momento é proveitoso que o professor inicie lembrando a semelhança de triângulos, visto que possivelmente poderá haver discentes que ainda não compreendem os principais conceitos em semelhança de triângulos. Nesta direção, Pereira (2016) relata em suas considerações finais que esta dificuldade ocorre “principalmente no que se refere às questões contextualizadas que envolvam triângulos semelhantes dispostos de diferentes formas e o cálculo de distâncias inacessíveis”.

Acredita-se que a aprendizagem mais eficaz seja aquela em que o conhecimento possa ser utilizado na prática. Nesta perspectiva, a Trigonometria surgiu para atender às necessidades dos egípcios e babilônios em calcular distâncias inacessíveis, de onde se percebe a utilidade e a importância deste conhecimento na escola.

Compreender os fundamentos trigonométricos pode se tornar uma tarefa difícil para o aluno quando o professor não planeja uma sequência coerente para a progressão dos conceitos, que seja eficaz e que facilite a aprendizagem. Neste momento, o docente deverá ser empático e se perguntar: quais dificuldades a turma poderá encontrar se a abordagem for feita desta maneira?

A Trigonometria traz diversos conceitos, nomes e até expressões novas em que os alunos não estão habituados. Dentre as principais dificuldades que uma turma poderá encontrar, nós podemos citar as seguintes:

- Compreensão dos conceitos fundamentais (as razões seno, cosseno e tangente e, o radiano, por exemplo);
- Aplicação dos conceitos das razões trigonométricas em problemas práticos;
- Memorização das identidades trigonométricas;
- Entendimento da relação entre ângulos e funções trigonométricas;
- Resolução de triângulos e problemas aplicados etc.

Quando o professor entende que essas dificuldades irão surgir para alguns de seus alunos, ele poderá buscar novas formas e novos recursos de ensino.

Acredita-se, também, que a Matemática se aprende praticando. Praticando não apenas com materiais didáticos diferentes fora da sala de aula, mas também praticando na resolução de problemas. Quando o aluno entende os conceitos iniciais da Trigonometria, não terá muitas dificuldades em utilizá-los na resolução de situações-problemas, pois como menciona George Polya:

A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (Polya, 1995, p. 3).

Este trabalho traz uma proposta de sequência de conteúdos para o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, abordando pontos como:

- De que forma o professor poderá iniciar o conteúdo?
- Quais recursos digitais e softwares podem auxiliar neste desenvolvimento?
- A importância da resolução de problemas para fixação de conceitos;

-
- Apresentar proposta para aula prática aplicando as razões trigonométricas.

A Trigonometria como integrante dos currículos do Ensino Médio, é um componente educacional essencial nesta etapa da educação básica, principalmente para aqueles que irão cursar ciências exatas no Ensino Superior. Investigar um método de ensino-aprendizagem para este conteúdo poderá ajudar a melhorar a abordagem deste componente educacional e, conseqüentemente, possibilitará maior aprendizado. A Trigonometria é frequentemente percebida como uma área complexa, difícil e cansativa pelos alunos. Este produto educacional visa direcionar para uma sequência de conteúdos que supere alguns dos desafios enfrentados pelos estudantes no processo de aprendizagem da Trigonometria e propor estratégias metodológicas para tal finalidade, tendo em vista que a Trigonometria no Ensino Médio também é uma preparação dos estudantes que seguirão estudos avançados em áreas como a Engenharia e a própria Matemática. Apresentaremos nesta dissertação uma organização de conteúdos em Trigonometria que consideramos ser eficiente e que possibilitará aos alunos maior compreensão a respeito do tema, visto que trazemos uma linguagem clara e rica em detalhes que geralmente não se encontram nos livros didáticos.

O objetivo geral desta dissertação é, com certeza, apontar uma sequência de conteúdos para o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, e os objetivos específicos são:

- Identificar possíveis dificuldades encontradas pelos alunos;
- Mostrar aplicações práticas da Trigonometria;
- Apontar e indicar recursos didáticos digitais para o ensino de Trigonometria.

Para a concretização destes objetivos, nos orientaremos principalmente em pesquisas bibliográficas e análises de livros didáticos tanto do ensino básico quanto do superior utilizados na formação de professores.

A nossa discussão está estruturada em cinco capítulos, sendo os dois primeiros de caráter introdutório. O Capítulo 1 é dedicado aos aspectos históricos da Trigonometria, pois sempre é bom termos uma linha do tempo do nosso objeto de estudo. Lá, apresentaremos o surgimento e a importância da Trigonometria para as civilizações antigas, seu uso no dia a dia dos povos daquela época. O Capítulo 2 corresponde a uma revisão de Geometria Plana, fornecendo os conceitos básicos como segmentos de reta, ângulos e congruência entre triângulos. O Capítulo 3 é o principal deste trabalho, pois nele o ensino da Trigonometria no Ensino Médio é propriamente tratado. Lá, iniciamos o estudo da Trigonometria com a semelhança de triângulos, pois é a partir deste conceito que as razões trigonométricas surgem. Este capítulo está estruturado de tal forma que a abordagem do primeiro ao último conteúdo é sequencial e nele são indicadas metodologias, estratégias e recursos para o ensino da Trigonometria.

O Capítulo 4 é dedicado à resolução de problemas e às aplicações da Trigonometria. No quinto e último capítulo, Capítulo 5, são feitas as considerações finais da nossa discussão.

Capítulo 1

Aspectos históricos da Trigonometria

O conhecimento trigonométrico, assim como grande parte do conhecimento matemático, é muito antigo, por esta razão suas origens são incertas. Entretanto, pode-se dizer que o início do seu desenvolvimento se deu principalmente devido aos problemas gerados:

- Pela ciência que estuda os corpos celestes e os fenômenos que ocorrem no Universo — a Astronomia;
- Pela ciência que mede e mapeia terrenos, determinando suas características físicas, dimensões e contornos — a Agrimensura;
- Pelas Navegações.

A Astronomia foi uma das primeiras áreas a demandar técnicas para calcular ângulos e distâncias não diretamente mensuráveis. Ao tentar prever eclipses, posicionar astros e compreender os ciclos celestes, os antigos astrônomos perceberam a necessidade de criar relações matemáticas que lhes permitissem medir arcos e ângulos com maior precisão.

Foi com o matemático persa Nasir Eddir (1201 - 1274) que a Trigonometria passa a ser tratada como parte da Matemática, desvinculando-se da Astronomia. Já aparecem, nos trabalhos de Nasir, as seis funções trigonométricas e algumas técnicas para resolver problemas com triângulos (Zago; Sciani, 1997, p. 01).

Paralelamente, a Agrimensura ao se dedicar à determinação das características físicas, dimensões e contornos de terrenos, também demandava ferramentas matemáticas mais sofisticadas. O domínio do espaço terrestre e a delimitação de propriedades – até inclusive o fato de que as delimitações deveriam ser refeitas após as cheias de um rio – exigiam o conhecimento de relações métricas entre lados e ângulos, muitas vezes inacessíveis diretamente, o que favoreceu o surgimento e o aprimoramento de técnicas trigonométricas rudimentares pelas civilizações antigas gregas, egípcias e babilônicas.

Nas Navegações, passou-se a aplicar noções empíricas de Trigonometria para orientar-se em mar aberto, calcular distâncias entre pontos geográficos e navegar com maior se-

gurança. A observação das estrelas e a utilização de instrumentos como o astrolábio ¹ ilustram esses conhecimentos trigonométricos.

Epistemologicamente falando, a palavra Trigonometria vem do grego, e é formada por três radicais: *tri* (três), *gonos* (ângulos) e *metron* (medir). Assim, o conhecimento trigonométrico dedica-se ao cálculo das medidas dos lados e ângulos de um triângulo. Contudo, este estudo não se resume somente aos triângulos:

Para considerar a gênese, devemos discutir qual o significado que daremos ao termo Trigonometria. Se o tomarmos como a ciência analítica estudada atualmente, teremos a origem no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Mas, se o considerarmos para significar a geometria acoplada à Astronomia, as origens remontarão aos trabalhos de Hiparco, no século II a.C., embora existam traços anteriores de seu uso. Se o considerarmos, ainda, para significar literalmente medidas do triângulo, a origem será no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo. (Costa, 2003, p. 01).

A Trigonometria teve suas origens na antiguidade, inicialmente ligada à Astronomia e à medição de ângulos e distâncias. Os primeiros registros aparecem na Babilônia e no Egito, onde métodos empíricos já utilizavam relações entre lados de triângulos. No entanto, foi na Grécia Antiga, com Hiparco de Nicéia (190 a.C. – 125 a.C.), que a Trigonometria começou a se estruturar como um campo matemático, com a criação de tabelas de cordas em círculos - precursoras das funções trigonométricas modernas. Por estas e outras razões, Hiparco é conhecido como o Pai da Trigonometria.

Posteriormente, de Ptolomeu em sua obra *Almagesto*, aprofundou os estudos de Hiparco ao elaborar extensas tabelas de cordas e propor novos métodos de cálculo astronômico. Essas tabelas foram as precursoras das funções seno, cosseno e tangente, que só seriam formalmente definidas séculos depois.

Também na Índia Antiga ocorre um desenvolvimento da Trigonometria com a expressão de funções trigonométricas como séries infinitas antecedendo resultados do Cálculo. A cultura Árabe, por conseguir preservar as obras gregas e indianas, também desenvolve a Trigonometria, onde se tem registro da Lei dos Senos, inclusive para triângulos esféricos; algo muito útil nas navegações.

No Renascimento e na Idade Contemporânea, vários fenômenos da natureza passam a ser descritos por equações diferenciais, com muitas dessas soluções sendo funções trigonométricas. Muitas inovações tecnológicas também fazem uso de funções trigonométricas.

Assim, a história da Trigonometria revela uma trajetória longa, construída a partir de necessidades práticas e marcada pela contribuição de diversas culturas. Dos métodos empíricos às formulações analíticas modernas, seu desenvolvimento reflete a busca contínua da humanidade por medir e compreender o mundo à sua volta — seja nas estrelas,

¹O astrolábio é um instrumento de cálculo, medição e observação utilizado para determinar a posição dos astros no céu e para a indicação das altitudes.

nos campos, nos oceanos, nos fenômenos da natureza e na tecnologia.

No capítulo seguinte, Capítulo 2, apresentamos alguns resultados preliminares com o objetivo de preparar o leitor para o Capítulo 3, no qual a Trigonometria será de fato abordada de forma mais aprofundada. O Capítulo 2 traz uma revisão de tópicos essenciais da geometria plana — incluindo definições, conceitos, proposições e teoremas — e servirão de base para as demonstrações e o desenvolvimento dos conceitos que serão apresentados posteriormente.

Capítulo 2

Resultados preliminares - revisão de Geometria Plana

Este capítulo é dedicado aos resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes. Com objetivo de tornar a leitura deste trabalho mais fluida e de evitar um volume excessivo de conteúdos, estes resultados serão apresentados sem uma devida demonstração, apenas algumas justificativas serão dadas para o entendimento do leitor.

2.1 Ponto, reta, pontos colineares, semirreta, segmento de reta e segmentos congruentes

As subseções seguintes serão dedicadas para as noções de ponto, reta, pontos colineares, semirreta, segmento de reta e segmentos congruentes. Estas noções serão tratadas como revisão, visto que são noções trabalhadas no Ensino Fundamental e frequentemente não é lembrado no Ensino Médio e serão de grande importância para os capítulos seguintes.

2.1.1 Ponto

Para as definições de semirreta e segmento de reta e até mesmo para definir um triângulo precisamos da noção de ponto. Assim como a reta o ponto não está definido formalmente, todavia temos noção intuitiva sobre ele. O ponto é um ente matemático adimensional (sem dimensão, ou seja sem comprimento, largura ou altura). O ponto é representado por uma letra maiúscula do alfabeto latino.

Geometricamente:

Figura 2.1: Representação de um ponto



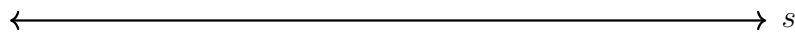
Fonte: Autoria própria (2025)

2.1.2 Reta

Compreendemos a noção de reta a partir de um entendimento decorrente da observação e da experiência cotidiana, segundo Dolce e Pompeo (2013). De maneira intuitiva, admitiremos que a reta é uma linha sem espessura formada por um conjunto de pontos (sem espaço entre eles) que possui uma única direção, sendo ilimitada (= nenhuma região limitada a contém) e infinita (= a quantidade de seus pontos é infinita) nos dois sentidos. A reta será representada por uma letra minúscula do alfabeto latino.

Geometricamente:

Figura 2.2: Representação geométrica da reta



Fonte: Autoria própria (2025)

A presença das setas em ambas as extremidades da reta indica que ela é ilimitada e infinita em ambos os sentidos, entretanto, deste ponto em diante, representaremos a reta apenas por uma linha sem setas, pois já entendemos que ela é ilimitada e infinita em ambos os sentidos.

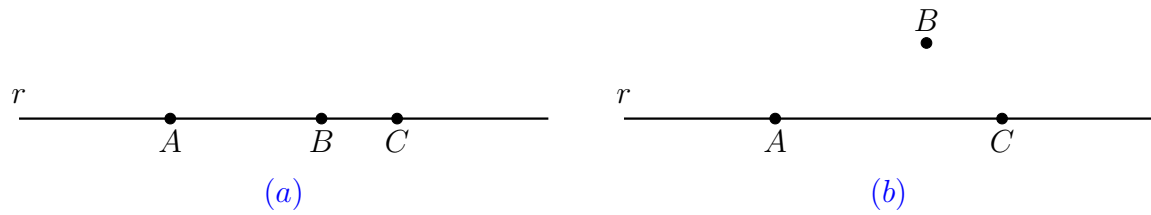
2.1.3 Pontos colineares

Definição 2.1 (colinearidade de pontos). *Três ou mais pontos são ditos colineares quando pertencem a uma mesma reta.*

Pela definição, dados três pontos A , B e C no plano, se eles estão alinhados são ditos colineares, Figura 2.3 (a), caso contrário são ditos não colineares, Figura 2.3 (b).

Geometricamente:

Figura 2.3: Pontos colineares e não colineares



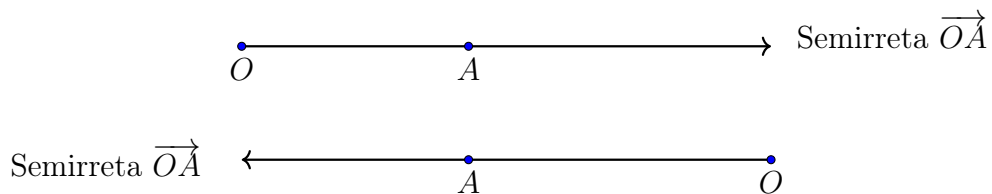
Fonte: Autoria própria (2025)

Semirreta

Definição 2.2. *Uma semirreta é uma parte da reta que tem um ponto de origem e se estende indefinidamente em uma única direção a partir desse ponto.*

Se uma semirreta tem origem no ponto O e passa pelo ponto A , então a sua representação geométrica é feita da seguinte maneira:

Figura 2.4: Representação da semirreta



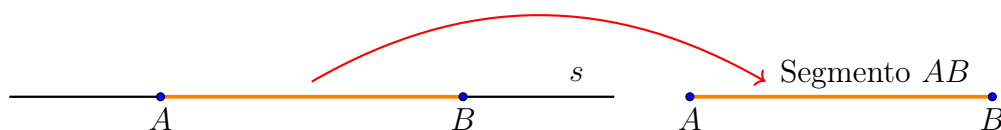
Fonte: Autoria própria (2025)

A semirreta que tem origem no ponto O e passa por A será representada por $\overrightarrow{OA}$.

Segmento de reta

Definição 2.3. *Chamamos de segmento de reta a parte da reta que é limitada por dois pontos distintos.*

Figura 2.5: Representação geométrica do segmento de reta



Fonte: Autoria própria (2025)

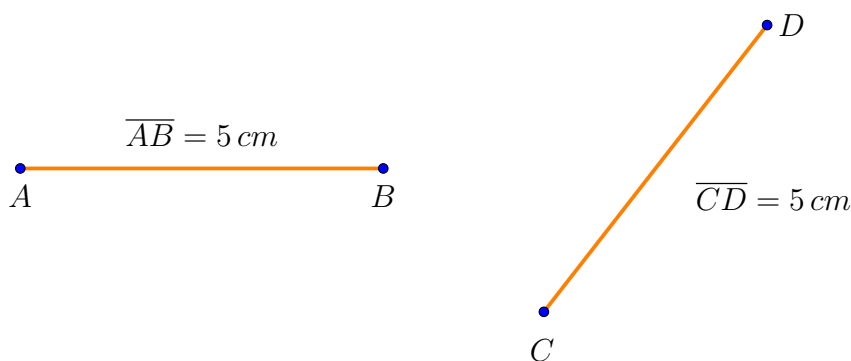
Para referir-nos ao comprimento do segmento AB , utilizaremos a notação $\overline{AB}$. Se o comprimento for igual a 5 cm , por exemplo, escreveremos $\overline{AB} = 5\text{ cm}$.

2.1.4 Segmentos congruentes

Definição 2.4. *Dois segmentos são ditos congruentes quando possuem o mesmo comprimento.*

Os segmentos AB e CD da Figura 2.6 possuem o mesmo comprimento, 5 cm . Assim os segmentos AB e CD são congruentes.

Figura 2.6: Segmentos congruentes



Fonte: Autoria própria (2025)

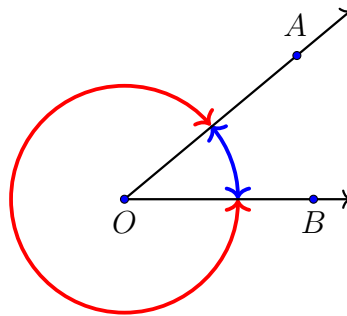
Em símbolo, quando os segmentos AB e CD são congruentes, representamos por $AB \equiv CD$. Em outras palavras, temos $\overline{AB} = \overline{CD}$.

2.2 Ângulo formado por duas semirretas

Definição 2.5. *Um ângulo é a abertura formada por duas semirretas que têm a mesma origem. Essa origem comum é chamada de vértice do ângulo.*

Intuitivamente, um ângulo pode ser entendido como o quanto precisamos girar uma das semirretas para que esta coincida com a outra. Para uma ilustração de ângulo, temos a Figura 2.7. Lá, as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo, e a origem O , a qual é comum a elas, é o vértice do ângulo. Denota-se este ângulo, neste caso, por $\angle AOB$.

Figura 2.7: Representação geométrica de um ângulo



Fonte: Autoria própria (2025)

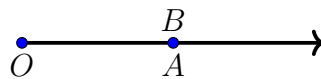
Considerando a Figura 2.7, note que há duas aberturas entre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$: A abertura demarcada pela seta em azul, a qual será chamada de ângulo convexo, e a abertura demarcada pela seta em vermelho, a qual será chamada de ângulo não convexo ou de ângulo côncavo.

2.3 Ângulo nulo e ângulo de uma volta

Quando as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ da Figura 2.7 são coincidentes (uma sobre a outra), elas determinam dois ângulos: o ângulo nulo e o ângulo de uma volta.

No ângulo nulo, não há abertura entre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, logo o ângulo entre elas é nulo. Veja Figura 2.8 abaixo.

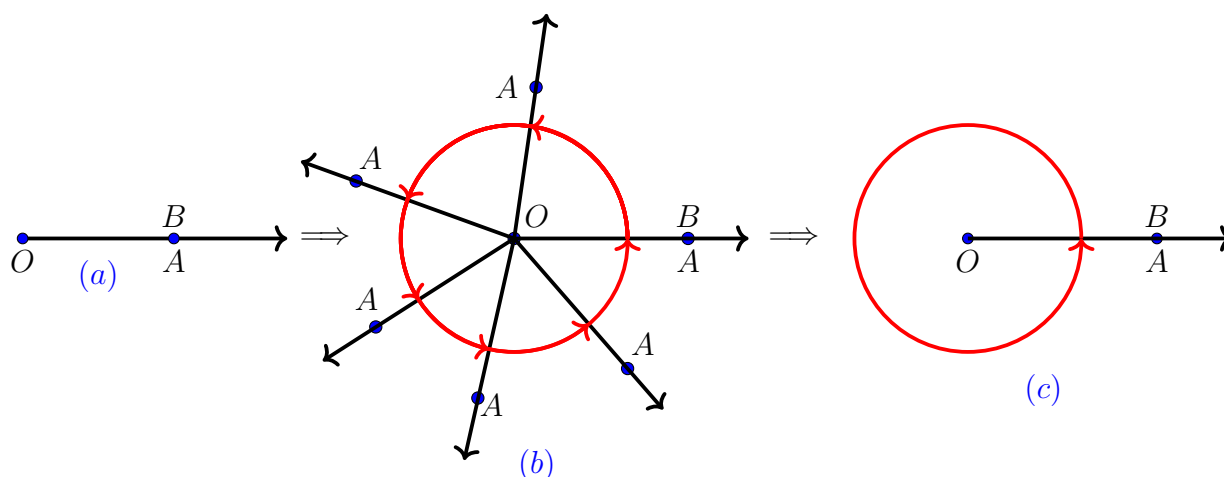
Figura 2.8: Representação geométrica do ângulo nulo



Fonte: Autoria própria (2025)

Já no ângulo de uma volta, também chamado de ângulo completo, podemos imaginar, por exemplo, que a semirreta $\overrightarrow{OA}$, inicialmente coincidente com $\overrightarrow{OB}$ como na Figura 1.7 (a), fez uma volta completa em torno de $\overrightarrow{OB}$ conforme Figura 1.7 (b), e passa a ser novamente coincidente com a semirreta $\overrightarrow{OB}$; Veja Figura 1.7 (c).

Figura 2.9: Representação geométrica do ângulo de uma volta

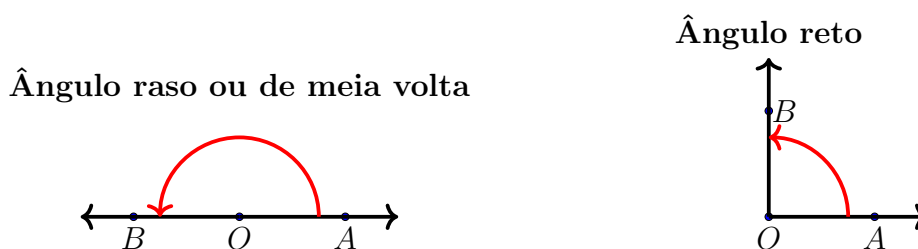


Fonte: Autoria própria (2025)

2.4 O ângulo raso ou de meia volta e ângulo reto

A noção de ângulo de meia volta, ou ângulo raso, é imediata. Ângulo de meia volta, como o próprio nome sugere, é aquele que representa metade do ângulo de uma volta, isto ocorre quando as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são opostas partindo da mesma origem. Ângulo reto, por sua vez, é o ângulo que corresponde à metade do ângulo raso e geralmente é representado pelo símbolo $\square$.

Figura 2.10: Representações geométricas dos ângulos raso e reto



Fonte: Autoria própria (2025)

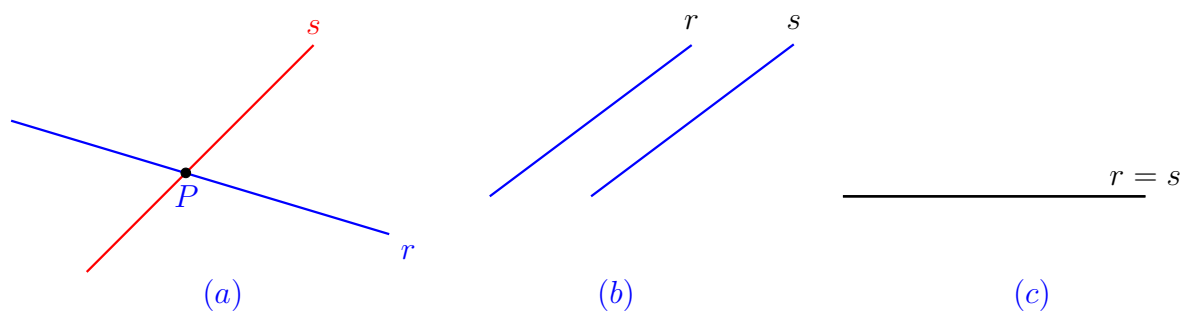
No final da Subseção 3.5.1, veremos que os ângulos nulo, reto, raso e de uma volta medem, respectivamente 0° , 90° , 180° e 360° ¹. Um ângulo compreendido entre 0 e 90° é chamado de ângulo agudo e um ângulo compreendido entre 90° e 180° é chamado de ângulo obtuso.

¹O símbolo $^\circ$ (lê-se: grau) é uma unidade de medida de ângulos e será visto com detalhes na Subseção 3.5.1

2.5 Retas concorrentes, paralelas e perpendiculares

Dadas duas retas r e s no plano, ou elas possuem um único ponto em comum, ou não possuem nenhum ponto em comum, ou elas possuem infinitos pontos em comum. No primeiro caso, dizemos que as retas são **concorrentes**, Figura 2.11 (a); no segundo caso as retas são ditas **paralelas**, Figura 2.11 (b), e no terceiro caso, dizemos que elas são **paralelas coincidentes**. Neste último caso, r está sobre s e s sobre r , em outras palavras, $r = s$; veja Figura 2.11 (c), onde temos que o ângulo entre as retas r e s é zero.

Figura 2.11: Representações de retas concorrentes, paralelas e de retas coincidentes

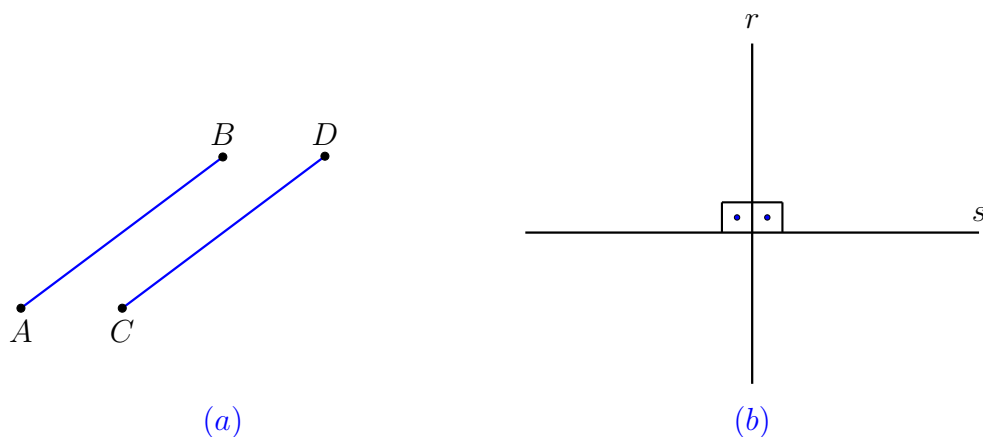


Fonte: Autoria própria (2025)

Simbolicamente, as retas r e s quando paralelas são representadas por $r \parallel s$ (Lê-se: reta r paralela a reta s). Analogamente, dizemos que um segmento AB é paralelo a um segmento CD quando suas retas suportes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas. Neste caso, escreveremos $AB \parallel CD$; veja Figura 2.12 (a).

Se as retas concorrentes formarem um ângulo reto entre elas, então elas são ditas perpendiculares ou ortogonais, Figura 2.12 (b).

Figura 2.12: Segmentos AB e CD que são paralelos e retas r e s perpendiculares



Fonte: Autoria própria (2025)

Simbolicamente, as retas r e s perpendiculares são representadas por $r \perp s$ (Lê-se: reta r perpendicular a reta s).

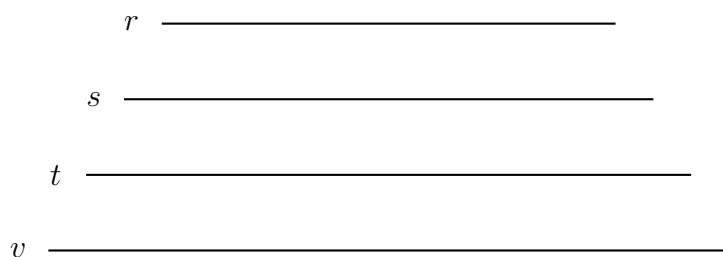
2.6 Feixe de retas paralelas, retas transversais e o Teorema de Tales

Para definirmos retas transversais e enunciar o Teorema de Tales, precisamos do conceito de **feixe de retas paralelas** ou simplesmente **feixe de paralelas**.

Definição 2.6. *Chama-se feixe de retas paralelas o conjunto de retas coplanares (retas no mesmo plano) paralelas entre si.*

Geometricamente:

Figura 2.13: Feixe de retas paralelas



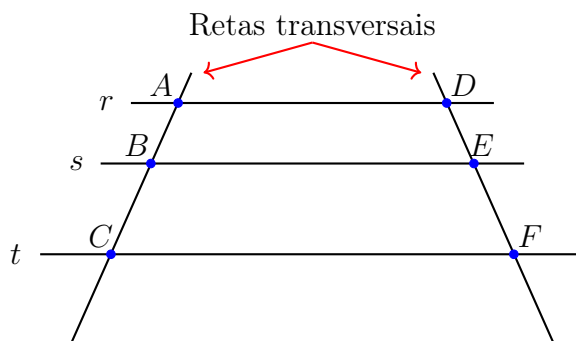
Fonte: Autoria própria (2025)

Com isso definimos retas transversais como se segue.

Definição 2.7. *Reta transversal é uma reta do mesmo plano do feixe de retas paralelas de tal forma que esta reta é concorrente com todas as retas do feixe.*

Geometricamente:

Figura 2.14: Retas transversais a um feixe de paralelas



Fonte: Autoria própria (2025)

As retas transversais na Figura 2.14 determinam pontos e segmentos correspondentes sobre as paralelas. Os pontos sobre a reta r , por exemplo, são correspondentes, ou seja, o ponto A é correspondente ao D , assim como B e E são correspondentes e ponto C é correspondente ao ponto F .

Os segmentos determinados pelas retas r e s são correspondentes, isto é, os segmentos AB e DE são correspondentes, assim como os pares BC e EF , AC e DF são correspondentes, por outro lado, os segmentos AB e EF , por exemplo, não são correspondentes. Perceba que as extremidades dos segmentos correspondentes são exatamente pontos correspondentes.

A partir daí, o Teorema de Tales² é enunciado da seguinte forma de acordo com Dolce e Pompeo (2013, p. 179), “Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra”. Pelo enunciado do Teorema de Tales, temos as seguintes igualdades, considerando a Figura 2.14:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}; \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} \text{ e } \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} \quad (2.1)$$

O Teorema de Tales tem muitas aplicações práticas e também teóricas, como nas demonstrações de casos de semelhanças; veja Seção 3.2.

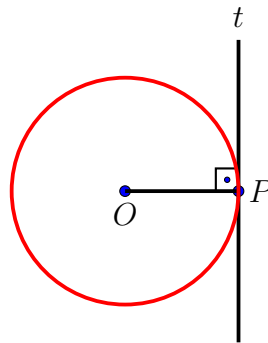
O leitor interessado na demonstração do Teorema de Tales poderá encontrá-la na página 179 do livro de geometria plana de Dolce e Pompeo (2013) na coleção Fundamentos de Matemática Elementar livro 9.

2.7 Reta tangente a uma circunferência

Uma reta t é dita tangente a uma circunferência, quando estas possuem um único ponto em comum. Tal situação é ilustrada na Figura 2.15. Nesta figura, dizemos que o ponto P é o ponto de tangência entre a reta t e a circunferência.

²O teorema recebe este nome em homenagem ao filósofo e cientista grego Tales de Mileto (624 - 558 a.C.).

Figura 2.15: Reta tangente a uma circunferência



Fonte: Autoria própria (2025)

Observe que toda reta tangente a uma circunferência determina um ângulo reto com o raio desta, ou seja, a reta é perpendicular ao raio.

Nas próximas seções estudaremos os triângulos e os quadrados pois, didaticamente, tais figuras nos permitem ilustrar ângulos notáveis: 60° (triângulo equilátero), 30° (quando um triângulo equilátero é dividido ao meio por uma de suas alturas), 45° (quando o quadrado é dividido por uma diagonal).

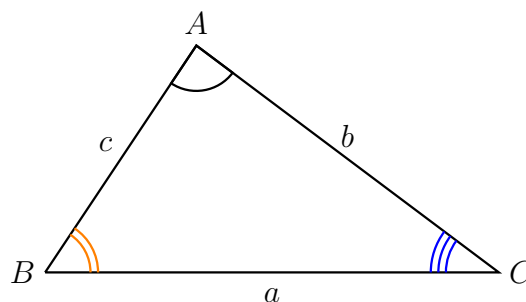
2.8 Triângulos: definição, elementos e classificação

Sendo as relações entre lados e ângulos de um triângulo os objetos de estudo da Trigonometria, passa a ser importante ter uma definição precisa de triângulo.

Definição 2.8. *Dados três pontos não colineares A , B e C no plano, chamamos de **triângulo** a figura formada pela união dos segmentos de reta AB , BC e CA .*

A Figura 2.16 a seguir ilustra um triângulo ABC qualquer.

Figura 2.16: Triângulo ABC



Fonte: Autoria própria (2025)

Notação: Vamos denotar o triângulo ABC por $\triangle ABC$.

2.8.1 Elementos de um triângulo

Tendo como referência a Figura 2.16 acima, os elementos de um triângulo são:

- **Vértices:** Os pontos A , B e C são os vértices do triângulo;
- **Lados:** Os segmentos $\overline{AB}$ (de medida c), $\overline{BC}$ (de medida a) e $\overline{AC}$ (de medida b) são os lados do triângulo. Dizemos, a partir daí que os lados de medidas a , b e c são opostos aos vértices A , B e C , respectivamente;
- **Ângulos:** Os ângulos $\angle BAC$ (ou $\angle CAB$) ou simplesmente $\hat{A}$ (ângulo em preto na figura), $\angle ABC$ (ou $\angle CBA$) ou simplesmente $\hat{B}$ (ângulo em laranja na figura) e $\angle ACB$ (ou $\angle BCA$) ou simplesmente $\hat{C}$ (ângulo em azul na figura) são os ângulos internos do $\triangle ABC$. Destacamos que os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, por terem um traço, dois traços e três traços, respectivamente, indica que estes ângulos possuem medidas distintas.

Nesta dissertação convencionamos que a notação $\angle BAC$ diz respeito à localização do ângulo que está no vértice A no triângulo da Figura 2.16, enquanto que, para nos referirmos à medida do ângulo $\angle BAC$, escreveremos $\hat{BAC}$.

Um triângulo é classificado quanto à medida de seus lados e de seus ângulos. Quanto à medida dos lados, um triângulo pode ser equilátero, isósceles ou escaleno; e, quanto à medida dos ângulos, um triângulo pode ser acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

Quanto à medida dos lados:

- **Triângulo equilátero:** É o triângulo que possui os três lados com o mesmo comprimento;
- **Triângulo isósceles:** É o triângulo que possui dois lados de mesmo comprimento e o terceiro lado de comprimento distinto;
- **Triângulo escaleno:** É o triângulo que possui os três lados com medidas distintas.

Quanto à medida dos ângulos:

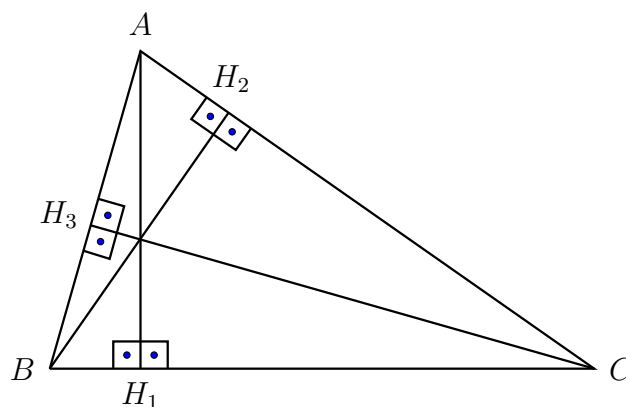
- **Triângulo acutângulo:** É o triângulo que possui os três ângulos agudos;
- **Triângulo retângulo:** É o triângulo que possui um ângulo reto;
- **Triângulo obtusângulo:** É o triângulo que possui um ângulo obtuso.

Altura de um triângulo

Definição 2.9. *Chama-se altura de um triângulo o segmento que une um vértice do triângulo à reta contendo seu lado oposto, cortando-a perpendicularmente.*

Sendo um triângulo detentor de três vértices e três lados, ele admite três alturas, conforme ilustrado na Figura 2.17 abaixo:

Figura 2.17: Alturas em um triângulo acutângulo

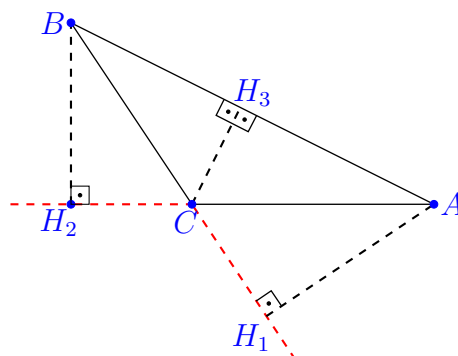


Fonte: Autoria própria (2025)

Na figura acima, dizemos que o segmento AH_1 é a altura relativa ao vértice A ou relativa ao lado BC . Da mesma forma, o segmento BH_2 é a altura relativa ao vértice B ou relativa ao lado AC e o segmento CH_3 é a altura relativa ao vértice C ou relativa ao lado AB ou ainda que, H_1 , H_2 e H_3 são os pés das alturas baixadas, respectivamente, dos vértices A , B e C . A figura acima, ilustra conforme a definição de altura, que estas são perpendiculares ao lado relativo.

Na Figura 2.17 as três alturas estão no interior do triângulo ABC , no entanto, nem sempre isso ocorrerá. Veja no triângulo ABC abaixo.

Figura 2.18: Alturas em um triângulo obtusângulo



Fonte: Autoria própria (2025)

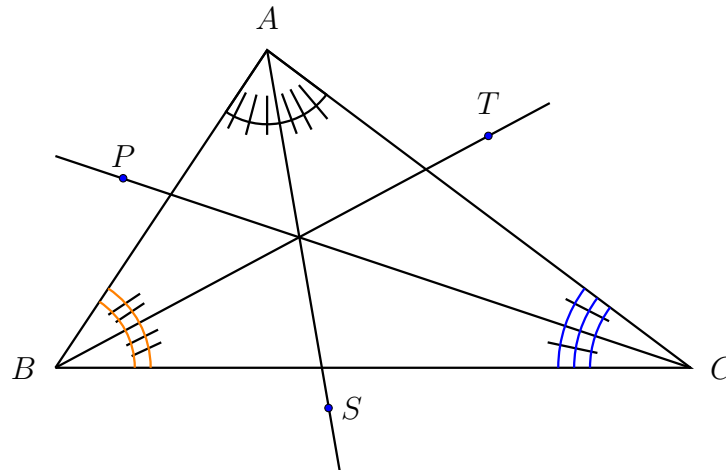
Note que as alturas relativas aos vértices A e B são externas ao triângulo ABC . Dizemos ainda que H_1 e H_2 estão sobre o prolongamento dos lados BC e AC , respectivamente. Isso ocorrerá sempre nos triângulos obtusângulos.

Bissetriz interna de um triângulo

Definição 2.10. *A semirreta com origem no vértice de um ângulo e o divide em outros dois ângulos congruentes chama-se bissetriz.*

Na Figura 2.19 a seguir, a semirreta $\overrightarrow{AS}$ é a bissetriz do ângulo $\angle BAC$ e o divide ao meio, assim como a semirreta $\overrightarrow{BT}$ é a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ e a semirreta $\overrightarrow{CP}$ é a bissetriz de $\angle ACB$ e o divide em dois ângulos congruentes.

Figura 2.19: Bissetrizes internas de um triângulo



Fonte: Autoria própria (2025)

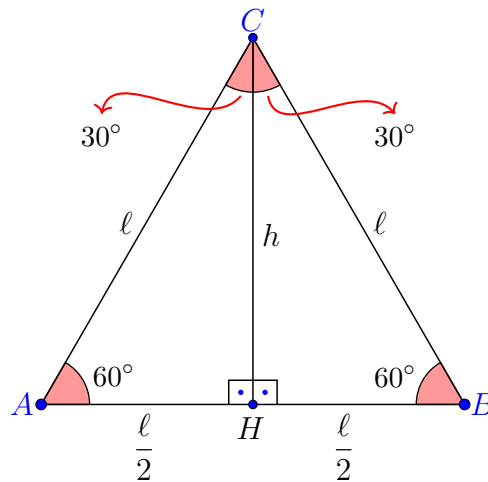
2.8.2 O triângulo equilátero

Já vimos que um triângulo é dito equilátero quando seus lados têm o mesmo comprimento. A seguir, destacaremos algumas propriedades importantes deste triângulo. Para isto, consideremos o triângulo equilátero ABC da Figura 2.20, cujos lados medem ℓ .

As principais propriedades do triângulo equilátero são:

- Os ângulos internos são congruentes entre si e medem 60° ;
- A altura relativa a qualquer um de seus vértices é ao mesmo tempo bissetriz do ângulo deste vértice, mediana do lado oposto a este vértice e altura relativa a este vértice.

Figura 2.20: Triângulo equilátero



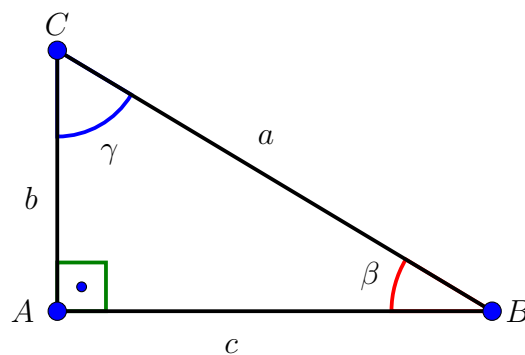
Fonte: Autoria própria (2025)

Na Figura 2.20, o segmento $\overline{CH} = h$ é simultaneamente a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$, altura do triângulo ABC e mediana relativa ao lado AB (A mediana de um triângulo é um segmento de reta que conecta um vértice ao ponto médio do lado oposto.)

2.8.3 O triângulo retângulo

Como já sabemos, chamamos de triângulo retângulo, o triângulo que possui um ângulo reto, ou seja, 90° . Veja na figura a seguir.

Figura 2.21: Triângulo retângulo em A



Fonte: Autoria própria (2025)

Neste triângulo retângulo, o segmento $\overline{BC} = a$ é chamado de hipotenusa, e os segmentos $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ são chamados de catetos.

Considerando o ângulo β dizemos que o cateto de medida b é cateto oposto a ele (“está de frente com o ângulo β ”) e o cateto de medida c é adjacente (“está junto ao ângulo

β''). Por outro lado, se considerarmos o ângulo γ , c é seu cateto oposto e b é seu cateto adjacente. Logo, para um cateto ser oposto ou adjacente depende do ângulo que estamos considerando.

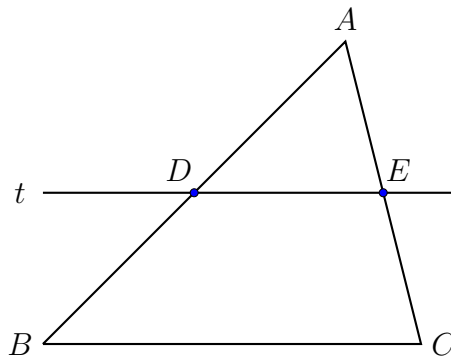
Em qualquer triângulo a soma de seus ângulos internos vale 180° (usaremos este fato sem justificativa ou demonstração), assim no triângulo da Figura 2.21 temos que a soma de seus ângulos internos é $90^\circ + \beta + \gamma = 180$, daí segue que $\beta + \gamma = 90^\circ$, com isso concluímos que os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares (ângulos que somados resulta em 90°).

2.8.4 Aplicação do Teorema de Tales em um triângulo qualquer

Uma das aplicações mais importantes do Teorema de Tales é no estudo dos triângulos. Ao traçar uma reta paralela a um dos lados de um triângulo interceptando os outros dois lados, essa reta estabelecerá sobre eles pares de segmentos correspondentes e proporcionais. Em outras palavras: Toda reta paralela a quaisquer lados de um triângulo, determinará um novo triângulo semelhante ao primeiro triângulo dado. Na Subseção 3.1.1 daremos a este fato o nome de Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos.

Considere o triângulo ABC abaixo, onde a reta t é paralela ao lado BC .

Figura 2.22: Teorema de Tales aplicado em um triângulo qualquer



Fonte: Autoria própria (2025)

Pela figura temos que a reta suporte que contém o segmento BC é paralela à reta t e a reta suporte que contém o segmento AB e a reta suporte que contém o segmento AC são suas transversais, com isso, pelo Teorema Tales teremos:

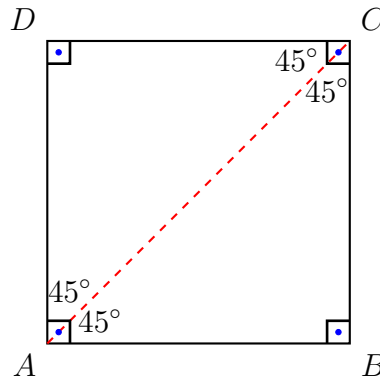
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \text{ ou equivalentemente } \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

2.9 Propriedades do quadrado

Definição 2.11. *Um quadrilátero é chamado de quadrado quando possui os lados congruentes e os lados adjacentes formam um ângulo reto.*

- A diagonal de um quadrado é bissetriz de seu ângulo interno.

Figura 2.23: Diagonal de um quadrado



Fonte: Autoria própria (2025)

Considerando a Figura 2.23 observamos ainda que a diagonal do quadrado o divide em dois triângulos congruentes, o $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$. O triângulo ABC , por exemplo, é chamado de triângulo retângulo isósceles por possuir um ângulo reto e os dois ângulos agudos iguais de 45° .

2.10 Congruência de triângulos

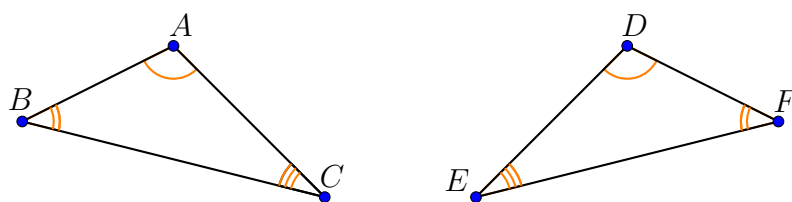
Definição 2.12 (triângulos congruentes). *Dois triângulos são congruentes (símbolo $\equiv$) quando possuem os lados correspondentes congruentes, bem como os ângulos correspondentes congruentes. Esquemáticamente, temos:*

$$\triangle ABC \equiv \triangle DFE : \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} AB \equiv DF, AC \equiv DE, BC \equiv FE \\ \hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F} \end{pmatrix}.$$

O símbolo $:\Longleftrightarrow$ significa que o que está à esquerda (próximo de $:$) é definido pelo que está à direita.

Podemos ilustrar esta definição acima através da seguinte figura:

Figura 2.24: Congruência de triângulos



Fonte: Autoria própria (2025)

Na figura temos que os lados do triângulo ABC são congruentes aos seus correspondentes no triângulo DFE , assim como os ângulos. Logo, se pudéssemos rotacionar os triângulos ABC e DFE e sobrepô-los, veremos que se trata de apenas um triângulo.

Como veremos nas aplicações será importante encontrar critérios com condições mínimas que nos permitam identificar se dois triângulos são congruentes. Estes critérios são chamados de critérios ou casos de congruência de triângulos. A seguir, destacamos os três casos de congruência entre triângulos: caso LAL, caso ALA e caso LLL. Costuma-se colocar o primeiro deles como postulado e demonstrar o segundo e terceiro casos como consequência do primeiro.

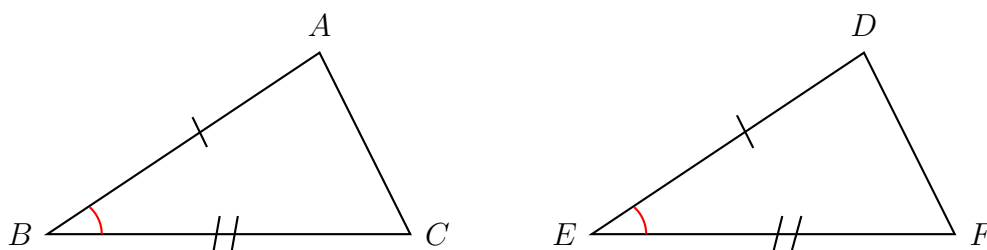
2.10.1 O critério $L.A.L$ (Lado - Ângulo - Lado).

Este primeiro critério que garante a congruência é colocado na forma de postulado.

Postulado 2.13 (caso LAL). *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então esses triângulos são congruentes.*

Este postulado afirma que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então o outro lado e os outros dois ângulos são também ordenadamente congruentes. Veja na figura abaixo.

Figura 2.25: Hipóteses do caso de congruência L.A.L



Fonte: Autoria própria (2025)

Esquematicamente, colocamos o conteúdo do postulado acima como a seguinte im-

plicação:

$$\left\{ \begin{array}{l} AB \equiv DE \\ \angle ABC \equiv \angle DEF \\ BC \equiv EF \end{array} \right. \xRightarrow{LAL} \triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

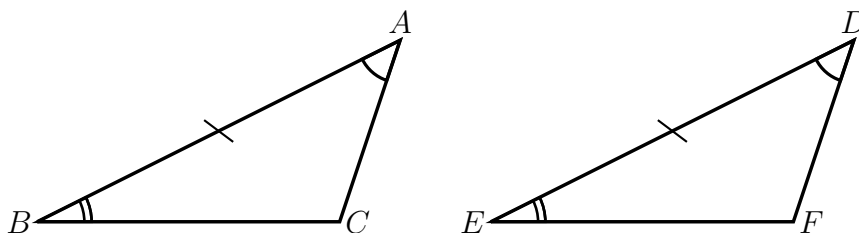
2.10.2 O critério A.L.A (Ângulo - Lado - Ângulo).

Trata-se do segundo critério que garante a congruência entre dois triângulos e possui o seguinte enunciado:

Proposição 2.14 (caso ALA). *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado compreendido entre eles, então esses triângulos são congruentes.*

Esta proposição afirma que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado compreendido entre eles, então o outro ângulo e os outros dois lados são também ordenadamente congruentes. Veja na figura abaixo.

Figura 2.26: Hipóteses do caso de congruência A.L.A



Fonte: Autoria própria (2025)

Na forma de implicação temos o seguinte como conteúdo desta proposição:

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle ABC \equiv \angle DEF \\ AB \equiv DE \\ \angle BAC \equiv \angle EDF \end{array} \right. \xRightarrow{ALA} \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

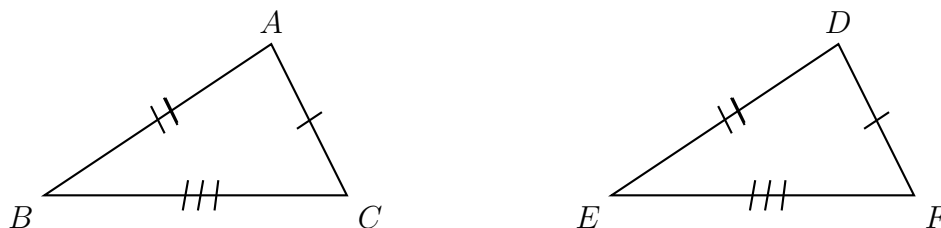
2.10.3 O critério L.L.L (Lado - Lado - Lado)

Temos aqui o terceiro – e para nós o último – caso que garante a congruência entre dois triângulos.

Proposição 2.15. *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.*

Na figura abaixo, ilustramos tal situação.

Figura 2.27: Hipóteses do caso de congruência L.L.L



Fonte: Autoria própria (2025)

E o conteúdo desta proposição fica na forma de implicação como

$$\begin{cases} AB \equiv DE \\ BC \equiv EF \\ AC \equiv DF \end{cases} \xRightarrow{LLL} \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

Há ainda dois casos de congruência entre triângulos que são: $L.A.A_0$ (Lado - Ângulo - Ângulo oposto) e caso especial envolvendo o triângulo retângulo, porém, esses dois casos não serão objetos de estudo, portanto não enunciaremos esses casos. O leitor interessado poderá consultar a página 45 da coleção Fundamentos de Matemática - Geometria plana de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo.

Caro leitor, adiante temos o capítulo que será o mais importante neste trabalho; o Capítulo 3. Nele, será apresentada a seguinte sequência dos conteúdos ou tópicos de Trigonometria no Ensino Médio: inicialmente será apresentada a semelhança de triângulos, em seguida trataremos das razões trigonométricas no triângulo retângulo, após isso, iniciaremos o estudo na circunferência e com o auxílio da Circunferência trigonométrica será feita a extensão para os ângulos não agudos e provaremos a lei dos Senos e dos Cossenos. Tal capítulo será finalizado com as Funções Trigonômicas e em alguns momentos será deixado um link de construções no Geogebra e no site *Phet Interactive Simulations* para melhor compreensão dos conteúdos citados.

Capítulo 3

O Ensino de Trigonometria

Este capítulo é dedicado ao estudo e à abordagem pedagógica da Trigonometria, explorando conceitos fundamentais, métodos de ensino e aplicações práticas, a fim de estabelecermos uma sequência adequada para o ensino dessa parte da Matemática. Os principais conceitos são apresentados em detalhes, com o objetivo de facilitar o desenvolvimento da Trigonometria em sala de aula e contribuir para a sua compreensão. São apresentados ainda diversos exemplos para a fixação dos principais conceitos e definições. Além disso, em várias seções deste capítulo, sugerimos construções no software Geogebra, com o intuito de potencializar o ensino da Trigonometria por meio da geometria dinâmica, pois ele “tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto, que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica” (Alves, 2013, p. 28).

3.1 Semelhança de triângulos

A semelhança de triângulos é um conceito fundamental na geometria, com aplicações que vão desde a Trigonometria até problemas práticos do dia a dia. Ela estabelece uma mesma relação de proporcionalidade entre os lados de triângulos semelhantes, desde que seus ângulos correspondentes sejam congruentes. Nesta seção, exploraremos os critérios que garantem a semelhança, suas propriedades e como ela serve de base para o estudo das razões trigonométricas.

Para o desenvolvimento do ensino de semelhança de triângulos, o software Geogebra poderá ser essencial na didática do professor. Através deste software, o docente poderá expor vários triângulos semelhantes em diversas posições, para que os alunos possam deduzir algumas relações entre os lados e ângulos dos triângulos. Os alunos devem observar ainda que dois triângulos são semelhantes quando um é ampliação ou redução do outro. Desta maneira, os estudantes irão construindo o conhecimento matemático; e só após isso, o professor poderá apresentar as seguintes três definições formais de semelhança de

triângulos:

Definição 3.1 (Semelhança de triângulos). *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos correspondentes (homólogos) são congruentes ou os lados correspondentes (homólogos) têm medidas de comprimento proporcionais.*

Nesta definição, note que uma das condições é necessária e suficiente para que se tenha dois triângulos semelhantes, isto é, para mostrar que dois triângulos são semelhantes, basta mostrar que os ângulos de um sejam ordenadamente congruentes aos ângulos do outro ou que os lados correspondentes sejam proporcionais. Entretanto, diversos livros didáticos de Matemática trazem uma definição para semelhança de triângulos ligeiramente diversa da que apresentamos.

Dolce e Pompeo (2013, p. 192) definem semelhança de triângulos dizendo que “Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais”. Neste caso, ao usar o conectivo “e”, Dolce e Pompeo sugerem que devem ser satisfeitas simultaneamente duas condições para que dois triângulos sejam semelhantes: devem possuir os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

Leonardo na coleção *Conexões: Matemática e Suas Tecnologias*, aponta que:

Para determinar se dois triângulos são semelhantes, precisamos verificar se satisfazem as condições de semelhança de polígonos, isto é, se os lados correspondentes são proporcionais e se os ângulos internos correspondentes são congruentes (Leonardo, 2020, p. 25).

Na Definição 3.1 para semelhança de triângulos usamos o conectivo “ou” para afirmar que uma das condições é suficiente para a semelhança entre triângulos, em contrapartida, os autores Dolce e Pompeo e Leonardo apresentam uma definição utilizando “e” sugerindo que as duas condições devem ser satisfeitas ao mesmo tempo, entretanto esta divergência ocorre, ao que parece, devido à definição de semelhança entre dois polígonos quaisquer. Leonardo (2020, p. 22) afirma que “Dois polígonos são semelhantes quando têm os ângulos internos correspondentes de mesma medida e os lados correspondentes proporcionais”. Neste caso, devem ser respeitadas as duas condições para que dois polígonos sejam semelhantes.

Por outro lado, Leonardo reitera dizendo

Entretanto, o triângulo é um polígono especial, pois, verificada apenas uma das condições de semelhança, automaticamente a outra também ocorre. Em outras palavras, para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que uma das condições a seguir seja satisfeita: Os lados correspondentes sejam proporcionais ou os ângulos internos correspondentes sejam congruentes (Leonardo, 2020, p. 25).

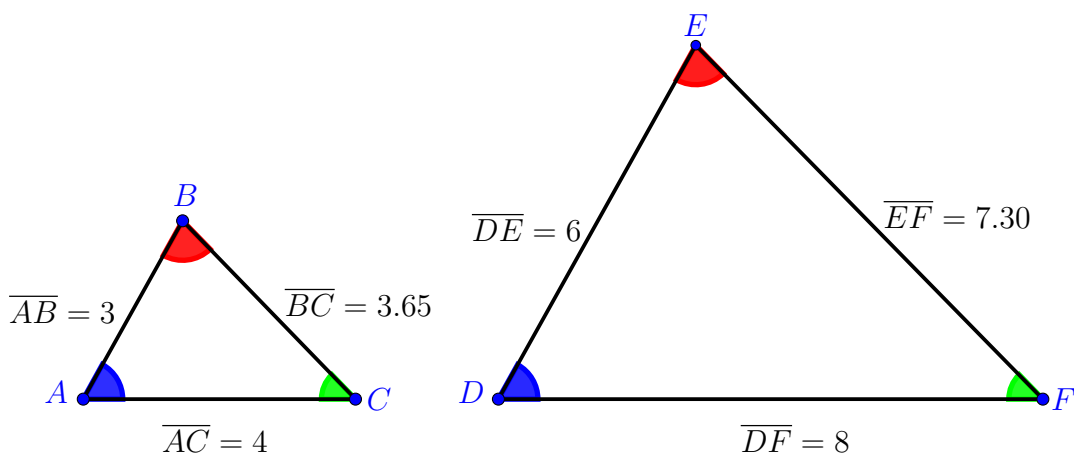
O triângulo, por ser um polígono que apresenta particularidades nas condições de

semelhança, optaremos por manter o conectivo “ou” na Definição 3.1, já que na prática não precisamos mostrar as duas condições ao mesmo tempo.

Da definição de semelhança entre dois triângulos segue como resultado que a razão entre os lados correspondentes é sempre constante. Esta constante é chamada de constante de proporcionalidade ou de razão de semelhança. Acompanhe no exemplo a seguir.

Exemplo 3.1. Na figura abaixo, verifique se o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF .

Figura 3.1: Exemplo de semelhança de triângulos



Fonte: Autoria própria (2025)

Solução. Pela Definição 3.1 para que os triângulos sejam semelhantes, os ângulos de ABC devem ser ordenadamente congruentes aos ângulos do triângulo DEF ou que os lados correspondentes sejam proporcionais. Neste exemplo, mostraremos, claramente, a segunda condição. Para isso, as razões entre os lados correspondentes devem ser constantes.

De fato, pois AB é correspondente de DE , BC é correspondente de EF e AC é correspondente de DF . Assim, as razões são:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{6}{3} = 2, \quad \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{8}{4} = 2 \text{ e } \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{7.30}{3.65} = 2.$$

De onde segue que:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = 2.$$

Logo, sendo constante a razão entre os lados correspondentes, segue que os lados de DEF são proporcionais aos de ABC e, desta forma, os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

Para denotar que o triângulo ABC é semelhante ao DEF utilizamos a notação $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ($\sim$: Símbolo da semelhança). $\square$

Considerando ainda este exemplo, precisamos notar que as razões $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$ foram tomadas comparando os lados do triângulo maior em relação aos lados do triângulo menor, diante disso é preciso lembrar que nas razões trigonométricas as razões serão obtidas entre os lados de um único triângulo, na qual poderá levar estranheza ao aluno, portanto precisamos preparar o discente.

A igualdade $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}$, por exemplo, pode ser facilmente reescrita da seguinte maneira, utilizando a Propriedade Fundamental das Proporções:

$$\overline{DE} \cdot \overline{AC} = \overline{DF} \cdot \overline{AB} \implies \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}.$$

Com isso, a razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, por exemplo, é a razão entre os lados de um mesmo triângulo.

Logo, os alunos já terão familiaridade com a razão entre os lados de um mesmo triângulo, o que facilitará a compreensão das definições posteriores; principalmente, no triângulo retângulo.

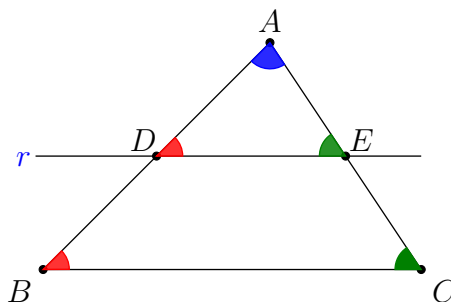
3.1.1 Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos

As razões trigonométricas, que veremos posteriormente, surgem imediatamente a partir da semelhança de triângulos retângulos e mostrar que estas razões são apenas um fruto de uma semelhança de triângulo é muito útil no Ensino Médio, Brolezzi (1997). Para compreendermos as razões trigonométricas como uma extensão da semelhança de triângulos precisamos entender um resultado de semelhança mais essencial conhecido como o Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos.

Teorema 3.2 (Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos). *Se uma reta r é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em dois pontos distintos, então o novo (menor) triângulo que ela determina é tal que seus ângulos são ordenadamente congruentes ao primeiro triângulo (maior). Ou seja, os dois triângulos são semelhantes por ângulos.*

Demonstração. Para demonstrarmos esta semelhança, precisamos mostrar que os triângulos têm ângulos ordenadamente congruentes, que é uma das condições da Definição 3.1. Para tanto, considere a figura abaixo, onde a reta r é paralela ao lado BC e intercepta os lados AB e AC nos pontos D e E , respectivamente.

Figura 3.2: Hipótese para o Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos; reta r é paralela ao lado BC

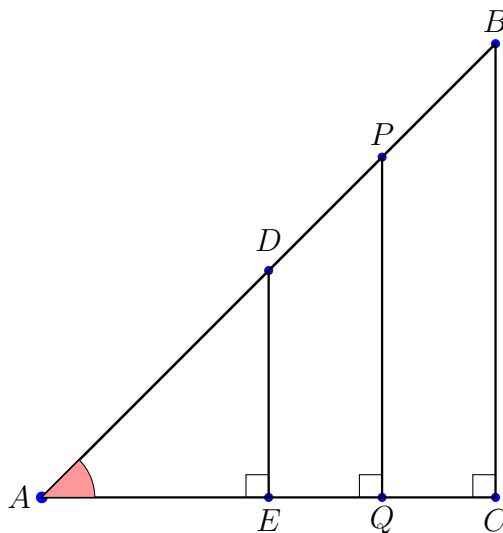


Fonte: Autoria própria (2025)

Como $r \parallel BC$, implica que $\angle ABC \equiv \angle ADE$, por serem ângulos correspondentes, e da mesma forma $\angle ACB \equiv \angle AED$ e, $\angle BAC \equiv \angle DAE$, por serem ângulos comuns aos dois triângulos. Daí, sendo os ângulos do triângulo ABC ordenadamente congruentes aos ângulos do triângulo ADE , teremos $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. A prova é análoga, se r for paralela ao lado AB ou a AC . Como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 3.2. Na figura seguinte, mostre que os triângulos ABC , ADE e APQ são semelhantes entre si.

Figura 3.3: Exemplo - Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos



Fonte: Autoria própria (2025)

Solução. Na figura, notamos que $DE \parallel PQ \parallel BC$, assim sendo, é imediato, pelo Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos, que $ADE \sim APQ \sim ABC$ e, portanto, as razões entre os lados correspondentes são sempre constantes.

Vale ressaltar que este exemplo de semelhança de triângulos prepara os alunos para a introdução às razões trigonométricas, de modo que o aluno vai se familiarizando com este

conteúdo, possibilitando melhor compreensão às razões trigonométricas. Esta discussão é retomada na Seção 3.3. $\square$

3.2 Casos de semelhança de triângulos

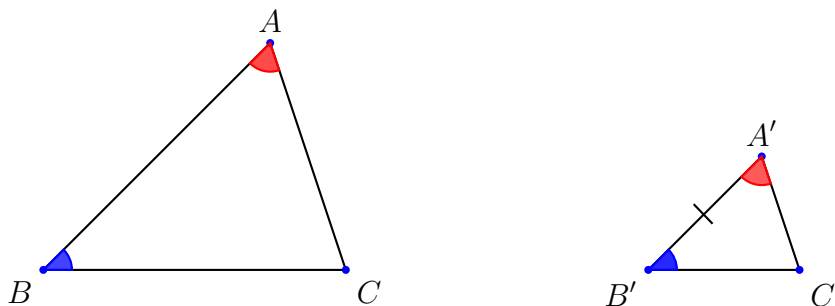
Nem sempre podemos usar o Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos diretamente. Em vista disso, os casos de semelhança entre triângulos, isto é, os critérios que nos possibilitam garantir a semelhança entre triângulos, são resultados de grande utilidade para mostrar a semelhança, como veremos adiante.

3.2.1 O caso A.A (Ângulo - Ângulo)

Proposição 3.3 (Caso de semelhança Ângulo - Ângulo). *Se dois triângulos têm ordenadamente dois ângulos congruentes de vértices correspondentes, então esses triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Para provarmos este critério de semelhança entre triângulos, considere os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura a seguir.

Figura 3.4: Hipótese do caso de semelhança Ângulo - Ângulo

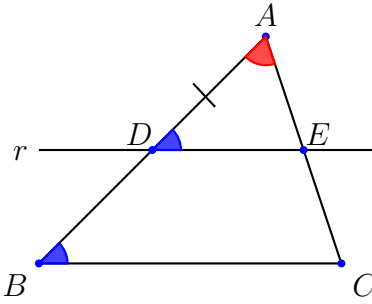


Fonte: Autoria própria (2025)

Por hipótese $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ e $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$. Com isso, queremos mostrar que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Sobre o lado AB considere o ponto D , tal que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ e a partir de D tracemos a reta r paralela ao lado BC e intercepta o lado AC no ponto E , conforme figura abaixo.

Figura 3.5: Demonstrando o caso de semelhança Ângulo - Ângulo



Fonte: Autoria própria (2025)

A partir da Figura 3.5 mostraremos que o $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle ADE$, em seguida mostrar que o $\triangle DAE$ é congruente ao $\triangle A'B'C'$ e com isso concluir que o $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle A'B'C'$.

De fato, pelo Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos note que o triângulo ABC é semelhante ao ADE , visto que a reta r é paralela ao lado BC . Assim, os ângulos de ABC são ordenadamente congruentes aos ângulos de ADE .

Agora mostraremos que $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ e concluiremos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Como $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ (por hipótese) e $\angle BAC \equiv \angle DAE$, daí temos que $\angle DAE \equiv \angle B'A'C'$. Temos ainda que $AD \equiv A'B'$ (por construção) e sendo $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ (por hipótese) e $\angle ABC \equiv \angle ADE$, encontramos $\angle ADE \equiv \angle A'B'C'$.

Logo, organizando as expressões obtidas, teremos:

$$\begin{cases} \angle DAE \equiv \angle B'A'C' \\ AD \equiv A'B' \\ \angle ADE \equiv \angle A'B'C' \end{cases} \xrightarrow{ALA} \triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

Logo, pelo caso A.L.A (Ângulo - Lado - Ângulo) de congruência de triângulos, temos $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$.

Finalmente, como $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$, implica que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Portanto, para que dois triângulos sejam semelhantes, é suficiente que dois ângulos de um sejam ordenadamente congruentes a dois do outro. $\square$

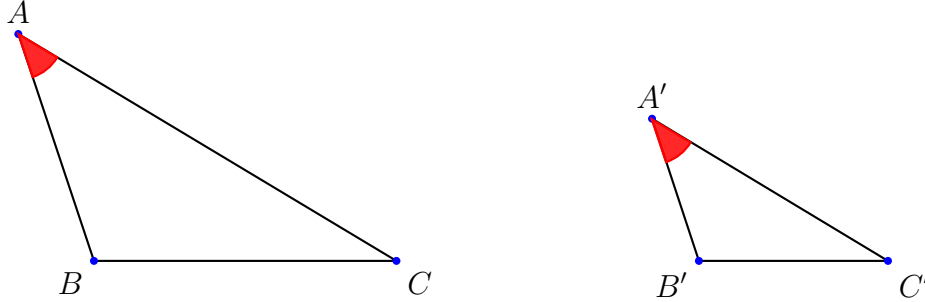
3.2.2 O caso L.A.L (Lado - Ângulo - Lado)

Teorema 3.4 (Caso de semelhança Lado - Ângulo - Lado). *Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos correspondentes de outro triângulo e os ângulos compre-*

endidos entre eles são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração. Para a demonstração deste critério, considere os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura a seguir.

Figura 3.6: Hipótese do caso de semelhança Lado - Ângulo - Lado

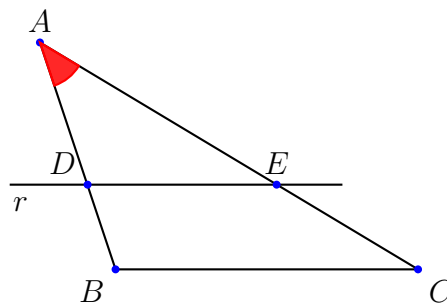


Fonte: Autoria própria (2025)

Por hipótese, vamos assumir que os lados AB e AC sejam, respectivamente, proporcionais aos lados $A'B'$ e $A'C'$ e ainda que $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ e com isso concluir que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Sendo os lados AB e AC proporcionais aos lados $A'B'$ e $A'C'$, respectivamente, então temos que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.

Para tanto, seja D um ponto sobre AB , tal que, $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ e seja a reta r paralela a BC , que passa por D , e intercepta o lado AC no ponto E , conforme a figura abaixo.

Figura 3.7: Demonstrando o caso de semelhança Lado - Ângulo - Lado



Fonte: Autoria própria (2025)

A partir da Figura 3.7 mostraremos que o $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle ADE$, em seguida mostraremos que os triângulos $\triangle DAE$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes. e, com isso, concluir que o $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle A'B'C'$.

Como $r \parallel BC$, então, pelo Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, daí, os ângulos de ABC são ordenadamente congruentes aos ângulos de ADE ; em especial, temos $\angle BAC \equiv \angle DAE$.

Agora mostraremos que $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ e concluiremos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

De fato, pois sendo $DE \parallel BC$, então pelo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \quad (1)$$

Por construção tem-se que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ (2)

Substituindo a expressão (2) em (1), ficamos com:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \quad (3)$$

Mas, por hipótese, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ (4),

Assim, substituindo a expressão (4) em (3), teremos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \implies \overline{A'C'} = \overline{AE}, \quad (5)$$

Por outro lado, temos que: $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ (também por hipótese) e $\angle BAC \equiv \angle DAE$, daí encontramos $\angle B'A'C' \equiv \angle DAE$.

Logo, por (2) e (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} AD \equiv A'B' \\ \angle DAE \equiv \angle B'A'C' \\ AE \equiv A'C' \end{array} \right. \xrightarrow{LAL} \triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

Logo, pelo caso LAL (Lado - Ângulo - Lado) de congruência de triângulos, temos $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$.

Finalmente, como $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$, implica que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Portanto, para que dois triângulos sejam semelhantes, é suficiente que dois lados de um sejam proporcionais aos correspondentes do outro e os ângulos entre eles sejam congruentes. $\square$

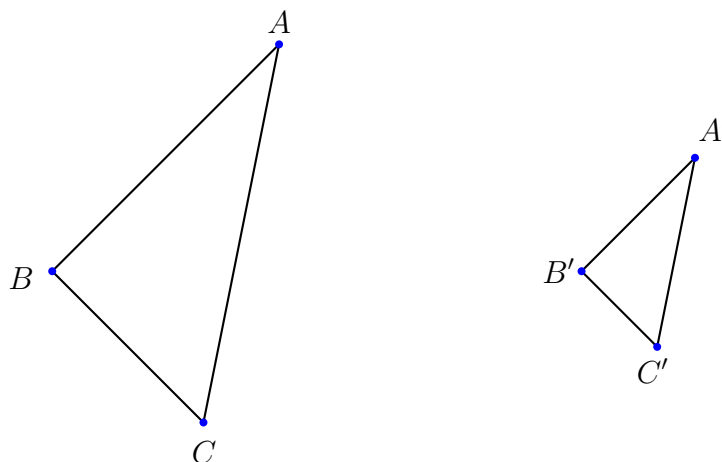
3.2.3 O caso L.L.L (Lado - Lado - Lado)

A seguinte proposição demonstra que a definição de semelhança de triângulos dada em Definição 3.1 com o “ou” é equivalente àquela definição com o “e”. Em outras palavras, se dois triângulos são semelhantes por lados, então são semelhantes por ângulos.

Proposição 3.5 (Lados proporcionais implica ângulos congruentes). *Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então os ângulos correspondentes são congruentes e os dois triângulos são semelhantes.*

Demonstração. A prova é análoga aos casos anteriores. Para tanto, sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura seguinte.

Figura 3.8: Hipótese da Proposição 3.5: dois triângulos com lados proporcionais



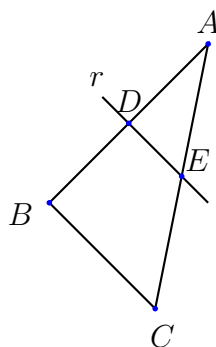
Fonte: Autoria própria (2025)

Por hipótese, estamos supondo que os lados do triângulo ABC são proporcionais aos lados do triângulo $A'B'C'$, ou seja, vale

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Sobre o lado AB do $\triangle ABC$ da Figura 3.8 tomemos o ponto D , tal que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$. Seja ainda a reta r que passa por D e é paralela a BC e intercepta o lado AC no ponto E , conforme a Figura 3.9 a seguir.

Figura 3.9: Figura para a demonstração do caso L.L.L



Fonte: Autoria própria (2025)

Novamente, pelo teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos, se tem $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, daí

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}. \quad (1)$$

Agora vamos provar que $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ e concluir que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Sendo $\overline{AD} = \overline{A'B'}$, a expressão (1), fica:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}. \quad (2)$$

Mas, por hipótese, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$. (3)

Pelas expressões (2) e (3), segue que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \implies \overline{AE} = \overline{A'C'} \quad (4) \text{ e } \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \implies \overline{DE} = \overline{B'C'} \quad (5), \text{ então:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AD \equiv A'B' \text{ (Por construção)} \\ AE \equiv A'C' \text{ (Por 4)} \\ DE \equiv B'C' \text{ (Por 5)} \end{array} \right. \xrightarrow{LLL} \triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

Logo, pelo caso L.L.L (Lado - Lado - Lado) de congruência de triângulos, temos $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$.

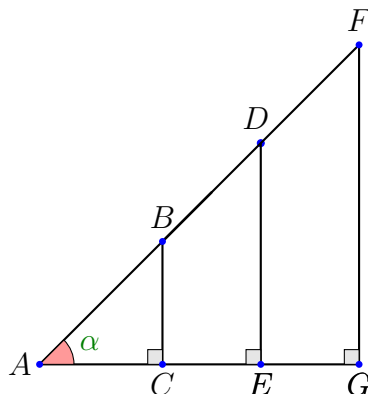
Finalmente, como $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$, implica que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Portanto, para que dois triângulos sejam semelhantes, é suficiente que os lados de um sejam proporcionais aos correspondentes do outro. $\square$

3.3 A Trigonometria no triângulo retângulo

Comumente nos livros didáticos do Ensino Médio, as razões trigonométricas são introduzidas (que é reproduzida, inclusive, por muitos professores) tomando-se a Figura 3.10 a seguir.

Figura 3.10: Figura para definir as razões trigonométricas



Fonte: Autoria própria (2025)

Observe que é o caso de semelhança A.A (ângulo-ângulo, Proposição 3.3) que garante que os três triângulos $\triangle ABC$, $\triangle ACE$, $\triangle AFG$ sejam semelhantes. No caso, os dois ângulos são α e o ângulo de 90° nos vértices C , E e G .

A partir desta figura, Figura 3.10, muitos autores costumam definir as razões trigonométricas tomando simplesmente as razões entre os lados correspondentes, obtendo-se:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF} = k$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF} = k'$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG} = k''$$

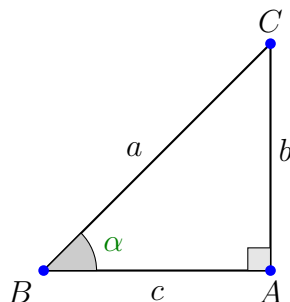
A partir daí, definem que k é o seno de α , k' é o cosseno de α e k'' é a tangente de α . Todavia, não definiremos as razões desta maneira.

Essas definições acima, quando tomadas diretamente – sem nenhum preparo com exemplos práticos, principalmente com valores numéricos – dificilmente agregarão conhecimento para os alunos. Tal apresentação direta por fórmulas comprometerá a aprendizagem dos estudantes e esta estará sujeita a não aceitação dos alunos e poderá ser ainda o início para que muitos alunos rejeitem a Trigonometria.

É preciso tomar o cuidado de que a razão $\frac{BC}{AB}$, por exemplo, a qual é a razão entre dois lados de um mesmo triângulo, fato que poderá levar estranheza aos alunos, pois, pelo que vimos no Exemplo 3.1, as razões foram tomadas comparando-se o lado de um triângulo com o seu correspondente no outro triângulo e qual esta é a maneira em que os alunos são ensinados a fazer na semelhança de triângulos.

É comum encontrarmos ainda em muitos livros didáticos e até mesmo na abordagem de muitos professores em suas aulas, uma definição das razões a partir de um só triângulo retângulo em que são destacados os seus catetos e hipotenusa, como na figura abaixo, por exemplo.

Figura 3.11: Triângulo para definir formalmente as razões trigonométricas



Fonte: Autoria própria (2025)

A partir do triângulo retângulo da figura acima muitos autores e professores rapidamente definem, por exemplo, que a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa é chamada de seno do ângulo α e a partir daí escrevem:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

A partir da definição acima muitos alunos poderão não compreender a simbologia $\text{sen}(\alpha)$ e podem questionar porque o professor está escrevendo desta forma utilizando o ângulo α na simbologia. Portanto, definir as razões trigonométricas diretamente desta forma não trará aprendizagem significativa aos alunos, e não proporcionará a fixação dos conceitos de seno, cosseno e tangente, o que desencadeará em uma deficiência futura no estudo de Trigonometria.

Mas, como introduzir as razões trigonométricas no Ensino Médio?. Antes de tudo é de suma importância que o professor comece lembrando e aprofundando a semelhança de triângulos objetivando sempre preparar os alunos para as razões trigonométricas, visto que elas são uma “continuidade” da semelhança de triângulos. Isto levará o aluno a relacionar os principais conceitos de semelhança de triângulos com as definições em Trigonometria e a partir daí construir o conhecimento trigonométrico. Para esta tarefa podemos utilizar o software Geogebra como recurso didático, pois ele nos permite criar a Figura 3.12 sem muitas dificuldades e possibilitará que o ensino seja mais atraente ao aluno.

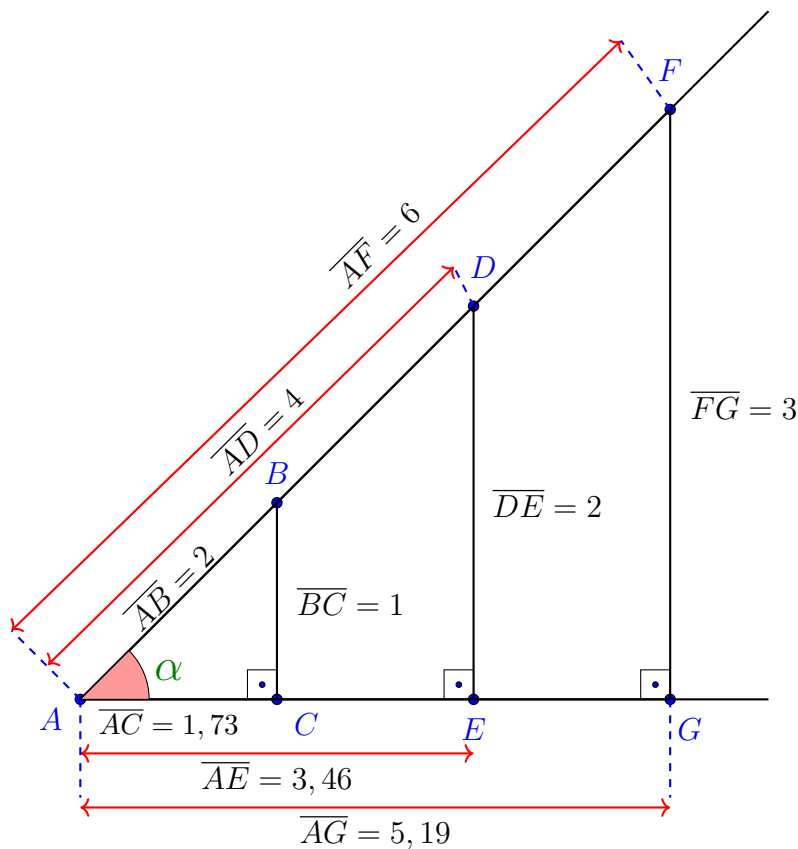
Quando as razões trigonométricas são desenvolvidas com visualização dinâmica e com as medidas dos lados dos triângulos, o conteúdo estará mais compreensível para o aluno e este, por sua vez, terá mais interesse em aprender.

Após a abordagem da semelhança de triângulos, podemos utilizar a mesma Figura 3.10 com a distinção de que agora os lados dos triângulos terão suas medidas.

Os dois exemplos seguintes tem por finalidade tentar explicar ao leitor porque utilizaremos o notação $\text{sen}(\alpha)$. Acompanhe os exemplos e seguida definiremos formalmente as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Exemplo 3.3. *Verifique se os triângulos da figura abaixo são semelhantes. Depois, em caso afirmativo, encontre a razão entre os lados correspondentes.*

Figura 3.12: Exemplo 01: Introdução às razões trigonométricas



Fonte: Autoria própria (2025)

Solução. Antes de determinarmos as razões de semelhança deste exemplo, façamos algumas considerações. A partir da Figura 3.12 o professor poderá levantar alguns questionamentos aos alunos para que o conhecimento e a aprendizagem sejam plenamente desenvolvidos. Alguns questionamentos são:

- Os triângulos são semelhantes?
- Se sim, qual o caso de semelhança?
- E quais lados são correspondentes?

Note que o ângulo α comum aos triângulos ABC , ADE e AFG é fixo, porém as medidas dos lados dos triângulos são diferentes. Com isso, discutiremos neste exemplo e no seguinte se as razões dependem da medida do ângulo comum ou se dependem das medidas dos lados dos triângulos.

Deve-se estar claro aos alunos que na figura há três triângulos retângulos semelhantes, a saber: O triângulo ABC , o ADE e o triângulo AFG . Neste ponto, notamos a importância do docente apresentar aos alunos o Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos da Subseção 3.1.1. Sendo BC , DE e FG as alturas dos triângulos ABC , ADE e AFG , respectivamente, então $BC \parallel DE \parallel FG$. Assim, temos que $\triangle ABC \sim \triangle ADE \sim \triangle AFG$, pelo Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos. Daí, podemos tomar as razões entre os lados correspondentes ou correspondentes (como discutimos no Exemplo 3.1), isto é:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{2}{4} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AF}} = \frac{3}{6} = 0,5.$$

□

Veja que, embora a medida do lado BC seja diferente da medida de DE e de FG , assim como as medidas dos lados AB , AD e AF também sendo diferentes, as razões obtidas foram todas iguais a 0,5. O mesmo acontece nas razões seguintes.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1,73}{2} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{3,46}{4} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \frac{5,19}{6} \approx 0,86.$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{1,73} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{2}{3,46} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AG}} = \frac{3}{5,19} \approx 0,57.$$

Com isso podemos presumir que as medidas dos lados na Figura 3.12 não influenciam nas razões.

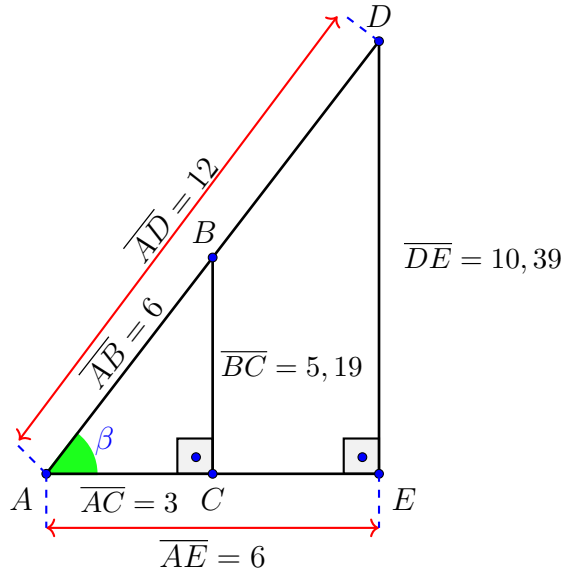
Diante desta situação é válido destacar que se pegarmos mais triângulos retângulos semelhantes aos triângulos ABC , ADE e a AFG e cujas alturas sejam paralelas aos segmentos BC , DE e FG , as razões acima continuariam as mesmas pela semelhança entre os triângulos. Entretanto, podemos questionar os alunos e refletir sobre:

- De que depende, portanto, as razões obtidas acima?
- Da medida do ângulo α ou da medida dos lados dos triângulos?

Utilizaremos o exemplo seguinte para responder a esta pergunta.

Exemplo 3.4. Na figura abaixo, verifique se os triângulos são semelhantes. No caso afirmativo, calcule a razão entre lados correspondentes.

Figura 3.13: Exemplo 02: Introdução às razões trigonométricas



Fonte: Autoria própria (2025)

Solução. Pelo fato do lado BC ser paralelo ao lado DE segue, pelo Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos, que os triângulos ABC e ADE são semelhantes.

Na Figura 3.13 temos um ângulo β , cuja medida é ligeiramente maior do que aquela medida de α tomada na Figura 3.12. Tomando as razões de semelhantes neste triângulo, teremos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{5,2}{6} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{10,39}{12} \approx 0,86.$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{6} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{6}{12} = 0,5.$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{5,2}{3} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{10,39}{6} \approx 1,73.$$

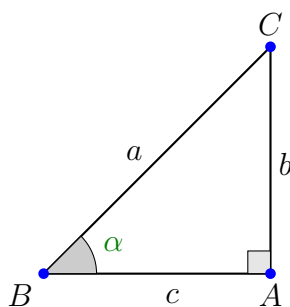
Sendo a medida do ângulo β da Figura 3.13 maior do que a medida do ângulo α da Figura 3.12 os valores das razões foram alteradas. No Exemplo 3.3 encontramos $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 0,5$ e no Exemplo 3.4 encontramos $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \approx 0,86$. Com isso vemos que, dado um ângulo fixo e tomados vários triângulos retângulos (tanto quanto quisermos) semelhantes entre si as razões que foram feitas serão sempre constantes, por outro lado se a medida do ângulo for alterada, as razões também serão alteradas. $\square$

Por meio dos exemplos anteriores e pelo que ressaltam Carmo, Wagner e Morgado (1992, p. 8), “Esta relação depende apenas do ângulo e não dos comprimentos envolvidos”,

fica evidenciado ao leitor que as razões dependem unicamente da medida do ângulo tomado no vértice A comum aos triângulos semelhantes e não da medida dos lados dos triângulos. Por outro lado, sendo essas razões sempre constantes independentemente da quantidade de triângulos que pegarmos, é interessante nomearmos essas razões para maior familiaridade do presente estudo.

Como as razões sempre são constantes e não dependem da quantidade de triângulos e nem da medida dos lados destes triângulos, podemos considerar apenas um triângulo, como o triângulo abaixo, por exemplo, para definir as razões trigonométricas, acompanhe.

Figura 3.14: Triângulo retângulo para definir as razões trigonométricas



Fonte: Autoria própria (2025)

A partir do triângulo retângulo, podemos definir formalmente as razões entre seus lados, isto é:

$\frac{b}{a} = k$, onde k é uma constante real, e a razão $\frac{b}{a}$ é chamada de seno de α ;

$\frac{c}{a} = k'$, onde k' é uma constante real, e a razão $\frac{c}{a}$ é chamada de cosseno de α ;

$\frac{b}{c} = k''$, onde k'' é uma constante real, e a razão $\frac{b}{c}$ é chamada de tangente de α .

Na Figura 3.14 o lado de medida **a** (o maior lado) é chamado de hipotenusa (devido ao Grego *hypotenousa*, “o que se estende ou se alonga debaixo do ângulo reto”), e os lados de medidas **b** e **c** são chamados catetos do triângulo (Grego *káthetos*, que significa “descido, abaixado de maneira reta”). Percebemos, pela figura, que o cateto de medida **b** está de “frente” ao ângulo α , logo este cateto é chamado de cateto oposto ao ângulo α , e o cateto de medida **c** é “vizinho” ou está “junto” ao ângulo α , assim este cateto é chamado de adjacente a α , como visto na Subseção 2.8.3. Por outro lado, vimos que as razões seno, cosseno e tangente dependem unicamente da medida do ângulo α considerado, assim podemos representar o seno de α como $\text{sen}(\alpha)$, (lemos - seno do ângulo cuja medida é α), cosseno de α como $\text{cos}(\alpha)$, (lemos - cosseno do ângulo cuja medida é α) e tangente de α como $\text{tan}(\alpha)$, (lemos - tangente do ângulo cuja medida é α). Assim teremos que:

Definição 3.6 (As três razões trigonométricas). *Para qualquer triângulo retângulo, as seguintes razões são denotadas, respectivamente, por*

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

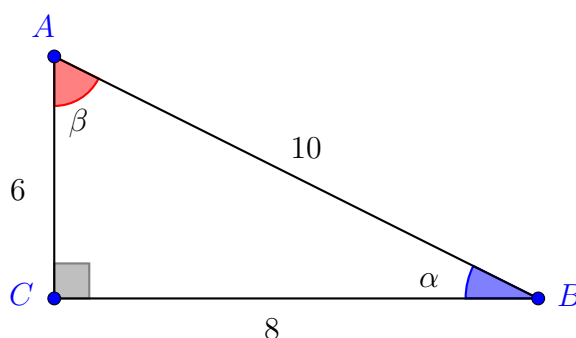
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Observação: Nas definições acima ao escrevermos hipotenusa estamos nos referindo à sua medida, o mesmo vale para cateto oposto e adjacente.

Exemplo 3.5. *Encontre as razões trigonométricas no triângulo retângulo da Figura 3.15 em relação aos ângulos α e β . Calcule ainda o valor das expressões $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$ e $\text{sen}^2(\beta) + \cos^2(\beta)$.*

Figura 3.15: Aplicação das razões trigonométricas em um triângulo



Fonte: Autoria própria (2025)

Antes de encontrarmos as razões trigonométricas no triângulo ABC da Figura 3.15, devemos nos atentar que muitos alunos tendem a confundir em identificar o cateto oposto e o cateto adjacente, pelo fato de que estes podem alternar entre si a depender do ângulo que estamos considerando. Na Figura 3.15, por exemplo, o lado de medida 8 é cateto oposto em relação ao ângulo β e este mesmo lado é cateto adjacente em relação ao ângulo α .

Solução. Em relação ao ângulo β , temos que o lado de medida igual 8 é cateto e o lado de medida igual a 6 é cateto adjacente, já a hipotenusa mede 10. Assim, pelas definições das razões trigonométricas, temos:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{10} = 0.8, \quad \cos(\beta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{6}{10} = 0.6 \text{ e}$$

$$\tan(\beta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{8}{6} \approx 1,3.$$

Já em relação ao ângulo α , seu cateto oposto é o lado de medida igual a 6 e seu cateto adjacente é o lado de medida igual 8, logo suas razões trigonométricas serão:

$$\sin(\alpha) = \frac{6}{10} = 0.6, \quad \cos(\alpha) = \frac{8}{10} = 0.8 \text{ e } \tan(\alpha) = \frac{6}{8} = 0.75$$

Note que, $\sin(\beta) = \cos(\alpha) = 0.8$ e $\cos(\beta) = \sin(\alpha) = 0.6$, isto ocorre pelo fato de que α e β são ângulos complementares ($\alpha + \beta = 90^\circ$), esse fato se deve à definição de cosseno, como veremos na sequência.

Calculando agora os valores de $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$ e $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta)$, teremos:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{36}{100} + \frac{64}{100} = \frac{100}{100} = 1, \text{ e}$$

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = \left(\frac{8}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{64}{100} + \frac{36}{100} = \frac{100}{100} = 1.$$

Este exercício tem por objetivo preparar o leitor para a Relação Fundamental da Trigonometria que veremos na Subseção 3.3.2. Pelos resultados obtidos neste exercício, é possível afirmar que para qualquer que seja o ângulo α , sempre teremos $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$? $\square$

Uma indagação feita pela maioria dos alunos e até mesmo pelos próprios professores é: Por qual motivo estas razões $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$ são chamadas respectivamente de seno, cosseno e tangente? Não é trivial a resposta a esta indagação, visto que em muitos livros didáticos do Ensino Médio e até mesmo do Ensino Superior não encontramos a resposta para isto. Entretanto, em pesquisa simples na internet encontramos que a palavra seno vem do latim *sinus*, que significa seio, volta, curva ou cavidade, porém a origem da palavra está relacionada com a tradução de um termo árabe para o latim, que resultou em um erro. Elon Lages Lima explica este erro em seu livro *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*, apontando que

sinus é a tradução latina da palavra árabe *jaib*, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta. Isto não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Trata-se de uma tradução defeituosa, que infelizmente durou até hoje. A palavra árabe adequada, a que deveria ser traduzida, seria *jiba*, em vez de *jaib*. *Jiba* significa a corda de um arco (de caça ou de guerra). (Lima, 1991, p. 187)

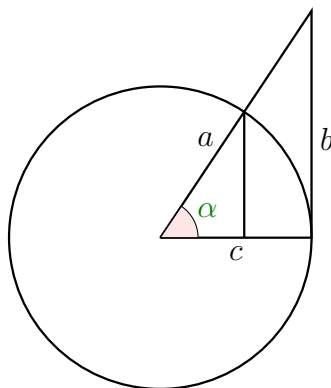
Observa-se que o termo **seno** surge a partir dos estudos relacionados aos arcos de uma circunferência. Com frequência, a Trigonometria no triângulo retângulo é abordada antes da Trigonometria na circunferência, o que pode dificultar a compreensão do significado da palavra seno pelo aluno. Nesse contexto, o professor pode se ver diante da necessidade de esboçar uma circunferência para esclarecer o conceito, o que, no entanto,

poderia desviar o foco das definições iniciais. Contudo, essa dúvida tende a ser resolvida de forma mais clara quando o professor introduzir o estudo na circunferência trigonométrica da Seção 3.6.

Já o cosseno de um ângulo é simplesmente o seno do complementar deste ângulo, ou seja, o cosseno de um ângulo é igual ao seno do seu ângulo complementar.

A tangente tem significado claro e imediato, visto que, na figura abaixo temos que $\tan(\alpha) = \frac{b}{c}$, onde o segmento de medida b é tangente a uma circunferência de raio a .

Figura 3.16: Figura para compreensão do termo *tangente*



Fonte: Autoria própria (2025)

3.3.1 Os ângulos notáveis de 30° , 45° e 60°

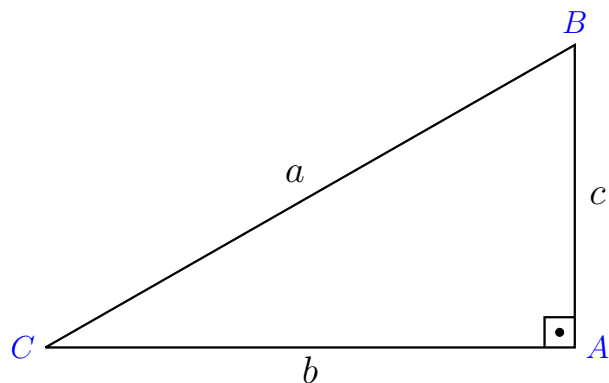
Vimos na Seção 3.3, que as razões trigonométricas dependem do ângulo agudo α , isto é se for fixado um ângulo de medida α teremos as razões para este ângulo, porém se a medida de α for alterada teremos outras razões trigonométricas. Nesta seção veremos quais são os valores das razões trigonométricas se forem fixados os ângulos de 30° , 45° e 60° . Para o cálculo de tais razões iremos precisar de ver estes ângulos em triângulos notáveis (por apresentar muitas simetrias) juntamente com o Teorema de Pitágoras. Por isto, primeiramente, enunciaremos este teorema importante da Geometria Plana. Além disto, apresentamos sua demonstração como uma forma de ilustrar uma aplicação teórica do uso da semelhança de triângulos.

Teorema 3.7. [*Teorema de Pitágoras*¹] *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Antes da demonstração do Teorema de Pitágoras, considere o triângulo retângulo na Figura 3.17 a seguir.

¹Em homenagem ao filósofo e matemático grego Pitágoras de Samos (570 - 490 a.C.).

Figura 3.17: Triângulo retângulo para a visualização do Teorema de Pitágoras



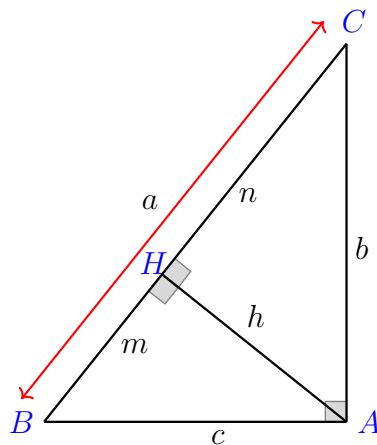
Fonte: Autoria própria (2025)

Pelo enunciado do Teorema de Pitágoras, devemos demonstrar a seguinte igualdade:

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (3.1)$$

Demonstração. Para a demonstração deste resultado tão importante para a Matemática, considere o triângulo retângulo da Figura 3.18, onde o segmento AH é a altura relativa ao vértice A sobre a hipotenusa e perceba que $m + n = a$.

Figura 3.18: Triângulo retângulo para a demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: Autoria própria (2025)

Na Figura 3.18 podemos destacar os triângulos HBA e HAC , que são semelhantes entre si, e ambos são semelhantes ao triângulo ABC . Para justificar este fato, vamos mostrar inicialmente que

$$\triangle HBA \sim \triangle ABC.$$

Para isto, percebemos que $\widehat{AHB} = \widehat{BAC} = 90^\circ$, e $\widehat{HBA} = \widehat{CBA}$ que é comum

aos dois triângulos, logo pelo caso de semelhança A.A (ângulo-ângulo), os triângulos são semelhantes.

Agora vamos mostrar que $\triangle HAC \sim \triangle ABC$.

Pelo triângulo na Figura 3.18, observamos que $\widehat{AHC} = \widehat{BAC} = 90^\circ$, e $\widehat{HCA} = \widehat{BCA}$ pois estes são comuns aos dois triângulos. Segue, portanto, novamente pelo critério A.A (ângulo-ângulo), que os triângulos considerados são semelhantes.

Finalmente, como

$$\triangle HBA \sim \triangle ABC$$

e

$$\triangle HAC \sim \triangle ABC,$$

então, por transitividade, teremos

$$\triangle HBA \sim \triangle HAC.$$

Por fim, para a demonstração do Teorema de Pitágoras, notamos que de

$$\triangle HBA \sim \triangle ABC$$

vale:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \implies am = c^2. \quad (3.2)$$

Por outro lado, sendo o triângulo HAC semelhante ao triângulo ABC , obteremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \implies an = b^2. \quad (3.3)$$

Somando membro a membro as igualdades (3.2) e (3.3), ficamos com:

$$am + an = c^2 + b^2 \implies a(m + n) = b^2 + c^2. \quad (3.4)$$

Como $m + n = a$, a equação (3.4), fica:

$$a \cdot a = b^2 + c^2 \implies a^2 = b^2 + c^2. \quad (3.5)$$

Portanto, segue-se o resultado conhecido como Teorema de Pitágoras. $\square$

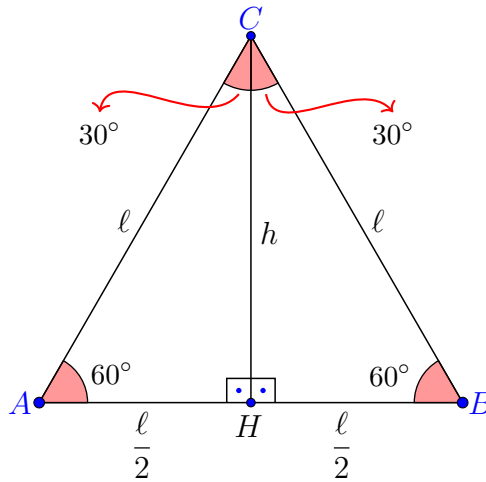
De posse do Teorema de Pitágoras podemos calcular as razões trigonométricas dos ângulos notáveis, acompanhe.

Dessa maneira se tivermos, por exemplo, $\alpha = 60^\circ$, qual será o $\sin(60^\circ)$, $\cos(60^\circ)$ e $\tan(60^\circ)$? É evidente que não podemos encontrar estes valores aleatoriamente. Para

encontrarmos as razões quando se tem $\alpha = 60^\circ$ precisamos utilizar um triângulo no qual conhecemos suas propriedades e particularidades, ou seja, precisamos de um triângulo em que tenhamos certeza que encontraremos um ângulo de 60° . Que triângulo tem esta propriedade? Neste momento espera-se que os alunos possam chegar a conclusão de que o triângulo em questão é o triângulo equilátero assim como vimos na Subseção 2.8.2 com suas propriedades. Para encontrarmos $\sin(60^\circ)$, $\cos(60^\circ)$ e $\tan(60^\circ)$, consideremos, a seguir, o triângulo equilátero ABC de lado ℓ (Não definimos uma medida numérica para o lado do triângulo afim de evitarmos uma particularidade para esta medida. A medida desconhecida ℓ não interfere no valor final das razões trigonométricas).

No triângulo ABC traçamos a bissetriz em relação ao vértice C dividindo o ângulo $\angle ACB$ em dois ângulos medindo 30° cada um, como mostra a Figura 3.19.

Figura 3.19: Triângulo para o cálculo das razões dos ângulos de 30° e 60°



Fonte: Autoria própria (2025)

Como o triângulo BCH possui um ângulo medindo 30° e outro medindo 60° , então seu terceiro ângulo mede 90° (pois a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180°). Assim, o triângulo BCH é retângulo. Como os triângulos ACH e BCH são congruentes, então os lados AH e HB são iguais, medindo $\frac{\ell}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCH , obtemos

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2, \text{ ou seja, } h^2 = \frac{3\ell^2}{4}.$$

De onde segue que

$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Com isso, a altura h de qualquer triângulo equilátero é dada por $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Considerando o $\triangle BCH$, com cateto adjacente medindo $\frac{\ell}{2}$ e cateto oposto $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ em relação ao ângulo de 60° e hipotenusa ℓ , então, pelas Definições 3.6, teremos que:

- $\text{sen}(60^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\cancel{\ell}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\ell}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, daí temos: $\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\text{cos}(60^\circ) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\cancel{\ell}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\ell}} = \frac{1}{2}$, daí temos: $\text{cos}(60^\circ) = \frac{1}{2}$;
- Por fim, $\text{tan}(60^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\cancel{\ell}\sqrt{3}}{\cancel{\ell}} \cdot \frac{2}{2} = \sqrt{3}$, de onde segue que $\text{tan}(60^\circ) = \sqrt{3} \approx 1,73$.

Se tomarmos agora o ângulo de 30° no triângulo BCH , tem-se que o lado de medida $\frac{\ell}{2}$ é cateto oposto a este ângulo e o lado de medida $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ é cateto adjacente e o lado de medida ℓ é hipotenusa deste triângulo, com isso podemos encontrar as razões para o ângulo de 30° de maneira análoga ao de 60° acima, verifique. Entretanto, sabemos que o cosseno de um ângulo é simplesmente o seno do complementar deste ângulo, como vimos no final da Seção 3.3, logo, como 30° e 60° são ângulos complementares teremos que $\text{cos}(60^\circ) = \text{sen}(30^\circ)$, ou seja:

$$\text{cos}(60^\circ) = \text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}, \text{ e da mesma forma, tem-se:}$$

$$\text{cos}(30^\circ) = \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Já para a $\text{tan}(30^\circ)$, utilizaremos a definição $\text{tan}(30^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$, isto é:

$$\text{tan}(30^\circ) = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{\ell}}{2} \cdot \frac{2}{\cancel{\ell}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,57.$$

Finalmente, para encontrarmos os valores de $\text{sen}(45^\circ)$, $\text{cos}(45^\circ)$ e $\text{tan}(45^\circ)$ devemos nos perguntar: Em qual triângulo tenho certeza que há nele um ângulo de medida 45° ? Se este questionamento for feito aos alunos do Ensino Médio, é natural que muitos não saibam qual seja este triângulo por não conhecerem as propriedades dos quadriláteros. No entanto, pela Figura 2.23, vimos que ao traçarmos a diagonal de um quadrado, ela o divide em dois triângulos retângulos isósceles de ângulos agudos de 45° . Portanto, este é o triângulo procurado, conforme a Figura 3.20.

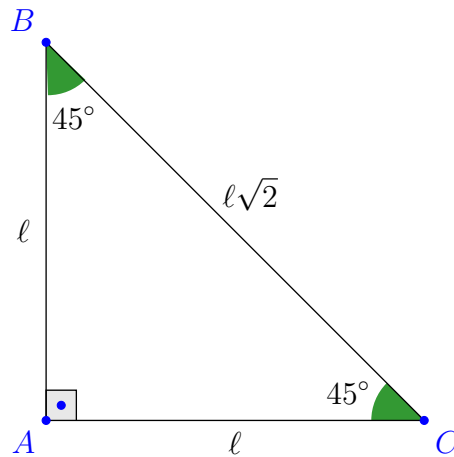
Para o cálculo das razões do ângulo de 45° , vamos inicialmente calcular a medida da hipotenusa BC do triângulo ABC de catetos ℓ da Figura 3.20.

Sendo este triângulo retângulo em A , utilizaremos o Teorema de Pitágoras para determinar a medida BC , isto é:

$$(\overline{BC})^2 = \ell^2 + \ell^2 \implies (\overline{BC})^2 = 2 \cdot \ell^2 \implies \overline{BC} = \sqrt{2 \cdot \ell^2} \implies \overline{BC} = \ell\sqrt{2}.$$

Portanto a diagonal de um quadrado de lado ℓ é dada por $\ell\sqrt{2}$.

Figura 3.20: Triângulo para o cálculo do seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°



Fonte: Autoria própria (2025)

Tomando qualquer um dos ângulos de 45° teremos tanto ℓ cateto oposto como cateto adjacente e $\ell\sqrt{2}$ a hipotenusa, daí as razões trigonométricas serão:

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Isto é, } \text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Da mesma forma, tem que:

$$\text{cos}(45^\circ) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Isto é, } \text{cos}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Finamente temos que } \tan(45^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\ell}{\ell} = 1. \text{ Ou seja, } \tan(45^\circ) = 1.$$

Observando que o ângulo de (45°) é complementar de si mesmo, então é natural o resultado obtido $\text{sen}(45^\circ) = \text{cos}(45^\circ)$ e, pelo fato do triângulo retângulo isósceles da Figura 3.20 ser a metade de um quadrado, então os catetos têm a mesma medida. E ainda é de se esperar que $\tan(45^\circ) = 1$, visto que o triângulo acima é metade de um quadrado e fizemos a razão entre duas medidas iguais.

Pelo fato dos ângulos de 30° , 45° e 60° serem encontrados facilmente em um triângulo equilátero e em um triângulo retângulo isósceles, levando ao cálculo imediato das razões trigonométricas, estes são chamados de ângulos notáveis.

Uma inquietação que frequentemente passa pelos alunos do Ensino Médio é: E para um ângulo diferente de 30° , 45° e 60° como encontrarmos o seno, o cosseno e a tangente?

Antes de tudo, o professor deve deixar claro à turma que não é trivial encontrarmos estes valores para outros ângulos, visto que não há triângulo com as particularidades do triângulo equilátero e do triângulo retângulo isósceles em que obtemos facilmente 30° , 60° e 45° , devido às suas propriedades. Para lidar com esta inquietação, pode-se dizer que para os ângulos 15° e 75° podemos encontrar estes valores facilmente utilizando a fórmula da adição e subtração de arcos, como veremos na Seção 3.4.

Com os valores de seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis calculados, comumente colocamos em uma tabela para memorização, como se segue abaixo:

Tabela 3.1: Valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis

Razões Trigonométricas	Ângulos		
	30°	45°	60°
	sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

Fonte: Autoria própria (2025)

Mesmo com as definições e os cálculos das razões trigonométricas dos ângulos notáveis serem apresentadas de forma clara e objetiva aos alunos, muitos deles não compreendem de forma satisfatória o que significa, por exemplo $\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$. O aluno deve compreender pela definição de $\text{sen}(\alpha)$ (= medida do cateto oposto dividido pela medida da hipotenusa) que $\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$ significa simplesmente que em um triângulo retângulo, a medida do cateto oposto ao ângulo de 30° é metade da medida da hipotenusa, e para uma turma mais avançada em conceitos matemáticos, pode-se dizer que a medida do cateto oposto é 50% da medida da hipotenusa, assim, se a hipotenusa medir 10 cm, a medida do cateto oposto ao ângulo de 30° é 5 cm (que é metade da medida da hipotenusa). Interpretamos de maneira semelhante para as demais razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

3.3.2 A Relação Fundamental da Trigonometria

Para encontrarmos esta relação fundamental, necessitaremos de um teorema relacionado aos lados de um triângulo retângulo qualquer, conhecido como Teorema de Pitágoras (veja Teorema 3.7).

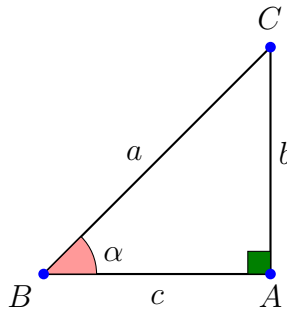
A seguir faremos uma aplicação do Teorema de Pitágoras para mostrar um resultado

que chamamos de Relação Fundamental da Trigonometria.

Teorema 3.8 (Relação Fundamental da Trigonometria). *Para qualquer que seja o ângulo α , vale a relação $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, conhecida como Relação Fundamental da Trigonometria.*

Iremos apresentar duas formas de demonstrar este resultado, mas para isso, considere a figura abaixo.

Figura 3.21: Triângulo para a dedução da Relação Fundamental da Trigonometria



Fonte: Autoria própria (2025)

Demonstração. 1

A partir do triângulo, note que b é a medida do cateto oposto ao ângulo α , c é a medida do cateto adjacente e a é a medida da hipotenusa. Portanto pelas definições das razões trigonométricas dadas na Definição 3.6 temos:

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{a} \text{ e } \cos(\alpha) = \frac{c}{a}.$$

Por outro lado, como o triângulo é retângulo podemos aplicar o Teorema de Pitágoras obtendo:

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (3.6)$$

Dividindo ambos os membros da equação (3.6) por a^2 (Como a é a medida do segmento BC , então seu valor é diferente de zero e $a^2 \neq 0$), ficamos com:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}. \quad (3.7)$$

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2. \quad (3.8)$$

Como $\sin(\alpha) = \frac{b}{a}$ e $\cos(\alpha) = \frac{c}{a}$, a equação (3.8) finalmente fica:

$$1 = \text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha). \quad (3.9)$$

Ou, como é de costume escrever

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1. \quad (3.10)$$

□

Demonstração. 2

Outra forma de obtermos a Relação Fundamental da Trigonometria é observando na Figura 3.21 que:

$\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{a} \implies b = a \cdot \text{sen}(\alpha)$ e $\text{cos}(\alpha) = \frac{c}{a} \implies c = a \cdot \text{cos}(\alpha)$ e ainda pelo Teorema de Pitágoras temos que $a^2 = b^2 + c^2$, substituindo b e c nesta última equação, a expressão fica:

$$a^2 = [a \cdot \text{sen}(\alpha)]^2 + [a \cdot \text{cos}(\alpha)]^2 \implies a^2 = a^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha) + a^2 \cdot \text{cos}^2(\alpha),$$

dividindo ambos os membros desta última expressão por a^2 , com $a \neq 0$, teremos:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{\cancel{a^2} \cdot \text{sen}^2(\alpha)}{\cancel{a^2}} + \frac{\cancel{a^2} \cdot \text{cos}^2(\alpha)}{\cancel{a^2}}$$

Daí, ficamos com $1 = \text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha)$ ou, equivalentemente

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$$

□

Assim, fica demonstrada a Relação Fundamental da Trigonometria.

Exemplo 3.6. Verifique a validade da relação (3.10) para $\alpha = 30^\circ$.

Solução. De fato, sendo $\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$ e $\text{cos}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Teremos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

□

Proposição 3.9. Na Figura 3.21 é válida a relação $\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}$.

Demonstração. A prova para esta relação é bastante simples e imediata.

Na Figura 3.21, tem-se que:

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{a}}{c} = \frac{b}{c}.$$

Como $\tan(\alpha) = \frac{b}{c}$, ficamos com:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}. \quad (3.11)$$

□

Exemplo 3.7. Vamos verificar a validade da relação $\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ considerando $\alpha = 60^\circ$.

Solução. Pela relação, queremos verificar que: $\tan(60^\circ) = \frac{\text{sen}(60^\circ)}{\cos(60^\circ)}$.

Pelos valores já calculados e apresentados na Tabela (3.1) ficamos com:

$$\tan(60^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} = \sqrt{3}.$$

Daí obtemos $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$, como obtido na Subseção 3.3.1.

□

As relações (3.10) e (3.11) podem ser melhor visualizadas na Seção 3.5 na Figura 3.50.

3.4 Fórmulas de adição e subtração de arcos

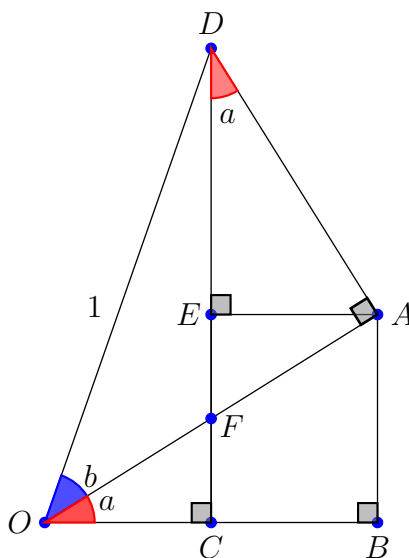
Como já visto anteriormente, não é simples calcular as razões trigonométricas de um ângulo qualquer. Para isso utilizamos algumas fórmulas que nos ajudarão no cálculo destes valores. Uma dessas expressões são as chamadas de **fórmulas de adição e subtração de arcos**, as quais são muito úteis quando queremos encontrar os valores de seno, cosseno e tangente de um ângulo que seja obtido pela soma ou subtração de arcos notáveis; por exemplo, podemos achar facilmente o $\text{sen}(75^\circ)$, pois $45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$. Mesmo assim, deve-se deixar claro aos alunos que nem sempre estas fórmulas funcionarão, como é o caso, por exemplo, do ângulo de 80° , onde não há dois ângulos notáveis que somados ou subtraídos resultem em 80° . As proposições da adição e subtração de arcos serão demonstradas logo a seguir, acompanhe.

Proposição 3.10 (Seno da adição de dois arcos). Para quaisquer que sejam os ângulos a e b , vale a fórmula:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(b) \cdot \cos(a).$$

Demonstração. Para a demonstração deste resultado, consideremos a Figura 3.22 a seguir, criada de tal forma que os triângulos OCD , OAB , ADE , ADF e OAD são todos retângulos e $\overline{OD} = 1$. Considerando os triângulos COF e ADF é fácil notar que $\widehat{CFO} = \widehat{AFD}$, (pois são ângulos opostos pelo vértice), daí nos permite concluir que os triângulos retângulos COF e ADF são semelhantes pelo caso A.A (ângulo-ângulo), visto que $\widehat{CFO} = \widehat{AFD}$ e $\widehat{OCF} = \widehat{DAF} = 90^\circ$. Sendo $\triangle COF$ semelhante ao $\triangle ADF$, então $\widehat{ADF} = \widehat{COF} = a$.

Figura 3.22: Figura para a demonstração do seno da soma de dois arcos



Fonte: Autoria própria (2025)

No triângulo OCD , temos que $\widehat{COD} = a + b$ e o segmento CD , por sua vez é cateto oposto ao ângulo de medida $a + b$ e $\overline{OD} = 1$ é a hipotenusa do triângulo, daí pela definição de seno teremos:

$$\text{sen}(\widehat{COD}) = \text{sen}(a + b) = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CD}}{1} \implies \text{sen}(a + b) = \overline{CD} \text{ e como } \overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED},$$
 e $\overline{CE} = \overline{BA}$ por serem lados opostos do retângulo $ABCE$, vem:

$$\text{sen}(a + b) = \overline{BA} + \overline{ED}. \quad (\text{I})$$

No triângulo OAB , o segmento BA é cateto oposto ao ângulo de medida a e OA é a hipotenusa do triângulo, de onde segue que:

$$\text{sen}(a) = \frac{\overline{BA}}{\overline{OA}} \implies \overline{BA} = \overline{OA} \cdot \text{sen}(a). \quad (\text{II})$$

No triângulo ADE , o segmento ED é cateto adjacente ao ângulo de medida a e AD é hipotenusa do triângulo, então:

$$\cos(a) = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} \implies \overline{ED} = \overline{AD} \cdot \cos(a). \quad (\text{III})$$

Substituindo as expressões (II) e (III) em (I), vem:

$$\sin(a + b) = \overline{OA} \cdot \sin(a) + \overline{AD} \cdot \cos(a). \quad (\text{IV})$$

Considerando agora o triângulo OAD , o segmento AD é cateto oposto ao ângulo de medida b , AO é cateto adjacente e $\overline{OD} = 1$ é a hipotenusa do triângulo, de onde temos:

$$\cos(b) = \frac{\overline{OA}}{1} \implies \overline{OA} = \cos(b) \text{ e } \sin(b) = \frac{\overline{AD}}{1} \implies \overline{AD} = \sin(b)$$

Substituindo os valores de $\overline{OA}$ e $\overline{AD}$ na expressão (IV) ficaremos com:

$$\sin(a + b) = \cos(b) \cdot \sin(a) + \sin(b) \cdot \cos(a)$$

Ou, de modo equivalente:

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b), \quad (3.12)$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.8. Usando a fórmula (3.12), encontre $\sin(75^\circ)$.

Solução. Para usarmos a fórmula (3.12) e encontrar $\sin(75^\circ)$, precisamos determinar dois ângulos notáveis cuja soma seja 75° . É fácil notar que devemos tomar 45° e 30° , pois $45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$, logo:

$$\begin{aligned} \sin(45^\circ + 30^\circ) &= \sin(75^\circ) = \sin(45^\circ) \cdot \cos(30^\circ) + \cos(45^\circ) \cdot \sin(30^\circ) \implies \\ \implies \sin(75^\circ) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \implies \sin(75^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned} \quad \square$$

Exemplo 3.9. Utilize novamente a fórmula (3.12) para encontrar uma expressão para $\sin(2a)$.

Solução. Para encontrar uma expressão para $\sin(2a)$, perceba que $\sin(2a) = \sin(a + a)$ daí podemos aplicar a fórmula do seno da adição de dois arcos, isto é:

$$\sin(2a) = \sin(a + a) = \sin(a) \cdot \cos(a) + \cos(a) \cdot \sin(a)$$

Organizando os termos, ficamos com:

$$\sin(2a) = \sin(a) \cdot \cos(a) + \sin(a) \cdot \cos(a)$$

Portanto a expressão para $\text{sen}(2a)$ será dada por:

$$\text{sen}(2a) = 2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(a) \quad (3.13)$$

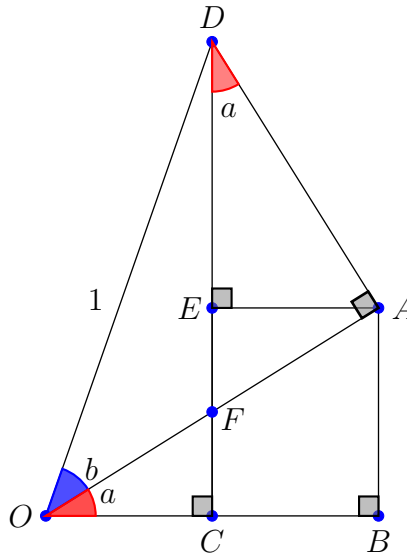
Esta expressão na prática não é muito útil para encontrarmos o valor do seno de um arco qualquer, porém é de muito útil em aplicações na Física e matemática avançada, por exemplo. Esta expressão é conhecida como **seno do arco duplo** e veremos seu uso no lançamento de projétil na Seção 4.2. $\square$

Proposição 3.11 (Cosseno da adição de dois arcos). *Para quaisquer que sejam os ângulos a e b , vale a fórmula:*

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b).$$

Demonstração. Para a demonstração deste resultado, precisamos novamente recorrer à Figura 3.23 a seguir.

Figura 3.23: Figura para a demonstração do cosseno da soma de dois arcos



Fonte: Autoria própria (2025)

No triângulo OCD , temos que $\widehat{COD} = a + b$. O segmento OC , por sua vez, é cateto adjacente ao ângulo de medida $a + b$ e $\overline{OD} = 1$ é a hipotenusa do triângulo, daí pela definição de cosseno teremos:

$$\cos(a + b) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OC}}{1} \implies \cos(a + b) = \overline{OC}.$$

Pela figura, $\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} \implies \overline{OC} = \overline{OB} - \overline{CB}$, e $\overline{CB} = \overline{AE}$, por serem lados opostos de retângulo $ABCE$, daí:

$$\cos(a + b) = \overline{OB} - \overline{AE}. \quad (\text{I})$$

No triângulo OAB , o segmento OB é cateto adjacente ao ângulo de medida a e OA é a hipotenusa do triângulo, de onde segue que:

$$\cos(a) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \implies \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \cos(a). \quad (\text{II})$$

No triângulo ADE , o segmento AE é cateto oposto ao ângulo de medida a e AD é hipotenusa do triângulo, então:

$$\sin(a) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \implies \overline{AE} = \overline{AD} \cdot \sin(a). \quad (\text{III})$$

Substituindo as expressões (II) e (III) em (I), vem:

$$\cos(a + b) = \overline{OA} \cdot \cos(a) - \overline{AD} \cdot \sin(a). \quad (\text{IV})$$

Considerando agora o triângulo OAD , o segmento AD é cateto oposto ao ângulo de medida b , OA é cateto adjacente e $\overline{OD} = 1$ é a hipotenusa do triângulo, de onde temos:

$$\cos(b) = \frac{\overline{OA}}{1} \implies \overline{OA} = \cos(b) \text{ e } \sin(b) = \frac{\overline{AD}}{1} \implies \overline{AD} = \sin(b)$$

Substituindo $\overline{OA}$ e $\overline{AD}$ na expressão (IV) ficaremos com:

$$\cos(a + b) = \cos(b) \cdot \cos(a) - \sin(b) \cdot \sin(a).$$

Ou, de maneira equivalente

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b). \quad (3.14)$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.10. Usando a fórmula (3.14), encontre $\cos(75^\circ)$.

Solução. Para usarmos a fórmula (3.14) e encontrar $\cos(75^\circ)$, precisamos determinar dois ângulos notáveis cuja soma seja 75° . É fácil notar que devemos tomar 45° e 30° , pois $45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$, logo:

$$\begin{aligned} \cos(75^\circ) &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos(45^\circ) \cdot \cos(30^\circ) - \sin(45^\circ) \cdot \sin(30^\circ) \implies \\ \implies \cos(75^\circ) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \implies \cos(75^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, temos que } \cos(75^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \quad \square$$

Proposição 3.12 (Tangente da soma de dois arcos). Para quaisquer que sejam os ângulos a e b , vale a fórmula:

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}.$$

Demonstração. A fórmula da tangente da soma de dois arcos pode ser demonstrada de forma imediata utilizando as fórmulas do seno e cosseno da soma de dois arcos na relação $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. Assim:

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)}.$$

Utilizamos as fórmulas da soma de arcos para seno e cosseno

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b) \text{ e,}$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b).$$

Substituindo as identidades acima na expressão da tangente da soma de arcos, nos fornece que

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos(a) \cdot \cos(b)$ (assumindo que $\cos(a) \cdot \cos(b) \neq 0$), continuamos com:

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}}{\frac{\cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}} \implies \tan(a+b) = \frac{\frac{\cancel{\sin(a)} \cdot \cancel{\cos(b)} + \cancel{\cos(a)} \cdot \sin(b)}{\cancel{\cos(a)} \cdot \cancel{\cos(b)}}}{\frac{\cancel{\cos(a)} \cdot \cancel{\cos(b)} - \frac{\sin(a)}{\cancel{\cos(a)}} \cdot \frac{\sin(b)}{\cancel{\cos(b)}}}}.$$

$$\implies \tan(a + b) = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{\frac{\cos(a) \cdot \cos(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)} - \frac{\sin(a)}{\cos(a)} \cdot \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}.$$

Nesta última expressão temos $\frac{\cos(a) \cdot \cos(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)} = 1$, $\frac{\sin(a)}{\cos(a)} = \tan(a)$ e $\frac{\sin(b)}{\cos(b)} = \tan(b)$.

Substituindo essas informações na última expressão teremos então que:

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}. \quad (3.15)$$

Como queríamos demonstrar. □

No entanto, a fórmula (3.15) não pode ser utilizada na obtenção exata de ângulos quaisquer, assim como ocorre nos casos do seno da soma e do cosseno da soma.

Exemplo 3.11. Utilize a fórmula da tangente da soma de arcos para encontrar $\tan(75^\circ)$.

Solução. É fácil ver que $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$. Logo:

$$\tan(75^\circ) = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan(45^\circ) + \tan(30^\circ)}{1 - \tan(45^\circ) \cdot \tan(30^\circ)} \Rightarrow \tan(75^\circ) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$$

$$\tan(75^\circ) = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{3 - \sqrt{3}}}, \text{ finalmente:}$$

$$\tan(75^\circ) = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}.$$

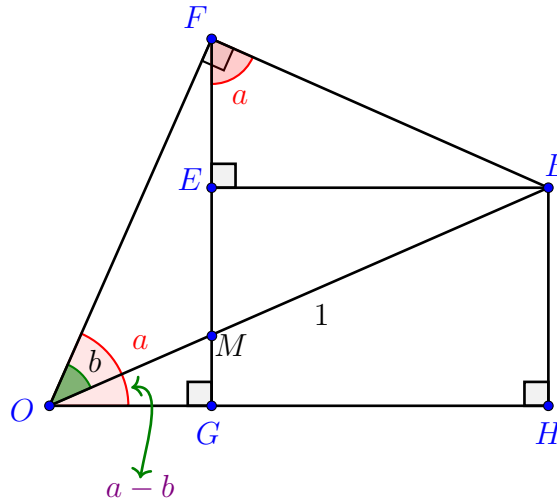
□

Proposição 3.13 (Seno da diferença de dois arcos). *Para quaisquer que sejam os ângulos a e b , vale a fórmula:*

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \text{sen}(b).$$

Demonstração. Para a demonstração deste resultado, considere a Figura 3.24 logo após, onde $\overline{OB} = 1$.

Figura 3.24: Figura para a demonstração do seno da diferença de dois arcos



Fonte: Autoria própria (2025)

Pela figura acima note que $\widehat{FOG} = a$ e $\widehat{FOM} = b$ e ainda que $\widehat{MOG} + \widehat{FOM} = \widehat{FOG}$, daí $\widehat{MOG} = \widehat{FOG} - \widehat{FOM}$, ou seja, $\widehat{MOG} = a - b$, como ilustrado na figura.

Agora vamos mostrar que o ângulo $\angle FOG$ tem a mesma medida do ângulo $\angle BFE$, isto é $\widehat{FOG} = \widehat{BFE} = a$.

Considerando os triângulos OGM e BME , note que os ângulos $\angle OGM$ e $\angle BME$ possuem a mesma medida (pois são ângulos opostos pelo vértice) e $\widehat{OGM} = \widehat{MEB} =$

90° . Com isso, os triângulos OGM e BME são semelhantes pelo critério A.A (Ângulo - Ângulo). Dessa forma, tem-se que

$$M\hat{B}E = M\hat{O}G = a - b.$$

No $\triangle FOB$ temos que $F\hat{O}B + F\hat{B}O = 90^\circ$ (pois o triângulo FOB é retângulo em F). Sendo $F\hat{O}B = b$, ficamos com $b + F\hat{B}O = 90^\circ$. Pela figura note que $F\hat{B}O = M\hat{B}E + F\hat{B}E$. Por outro lado, sabemos que $M\hat{B}E = a - b$, com isso, teremos $b + a - b + F\hat{B}E = 90^\circ$, daí $F\hat{B}E = 90^\circ - a$.

Finalmente no $\triangle BEF$, temos que $F\hat{B}E + B\hat{F}E = 90^\circ$. Sendo $F\hat{B}E = 90^\circ - a$, obtemos $B\hat{F}E + 90^\circ - a = 90^\circ$, dessa forma encontramos, como queríamos, $B\hat{F}E = a$.

Considerando agora o triângulo retângulo OBH , observe que o segmento BH é cateto oposto ao ângulo $a - b$ e $\overline{OB} = 1$ é a hipotenusa deste triângulo, então pela definição de seno, temos:

$$\text{sen}(a - b) = \frac{\overline{BH}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BH}}{1} \implies \text{sen}(a - b) = \overline{BH}. \quad (1)$$

Perceba agora que o segmento $\overline{BH} = \overline{GE}$ (pois são lados opostos do retângulo $BEGH$) e $\overline{GF} = \overline{GE} + \overline{EF} \implies \overline{GE} = \overline{GF} - \overline{EF}$, com isso ficamos com $\overline{BH} = \overline{GF} - \overline{EF}$, Daí a expressão (1) fica:

$$\text{sen}(a - b) = \overline{GF} - \overline{EF}.$$

No triângulo OGF , o segmento GF é cateto oposto ao ângulo a e OF é a hipotenusa deste triângulo, a partir daí obteremos:

$$\text{sen}(a) = \frac{\overline{GF}}{\overline{OF}} \implies \overline{GF} = \overline{OF} \cdot \text{sen}(a).$$

Já no $\triangle BFE$, o segmento EF é cateto adjacente ao ângulo a e BF é a hipotenusa de BFE , dessa forma, pela definição de cosseno, temos:

$$\cos(a) = \frac{\overline{EF}}{\overline{BF}} \implies \overline{EF} = \overline{BF} \cdot \cos(a).$$

Daí, substituindo $\overline{GF}$ e $\overline{EF}$ em $\text{sen}(a - b) = \overline{GF} - \overline{EF}$, seguiremos com:

$$\text{sen}(a - b) = \overline{OF} \cdot \text{sen}(a) - \overline{BF} \cdot \cos(a). \quad (2)$$

Agora nos resta encontrarmos uma expressão para os segmentos $\overline{OF}$ e $\overline{BF}$. Para isso considere o $\triangle OBF$. Sendo BF cateto oposto ao ângulo b , OF cateto adjacente ao

ângulo b e $\overline{OB} = 1$ a hipotenusa de OBF , vem:

$$\cos(b) = \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OF}}{1} \Rightarrow \overline{OF} = \cos(b) \text{ e } \sin(b) = \frac{\overline{BF}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BF}}{1} \Rightarrow \overline{BF} = \sin(b).$$

Substituindo $\overline{OF}$ e $\overline{BF}$ na expressão (2), surge:

$$\sin(a - b) = \cos(b) \cdot \sin(a) - \sin(b) \cdot \cos(a).$$

Ou, de modo equivalente:

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \sin(b).$$

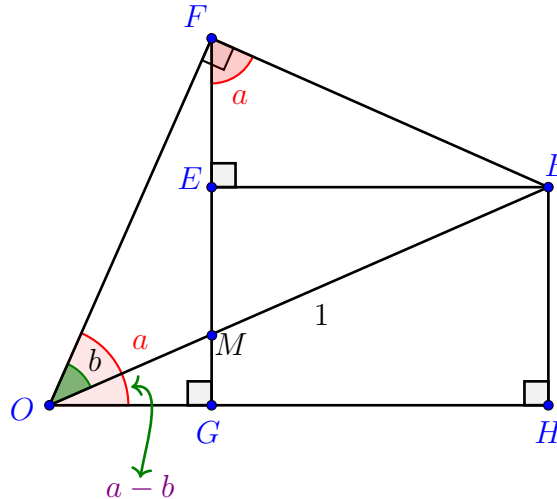
Como queríamos demonstrar. □

Proposição 3.14 (Cosseno da diferença de dois arcos). *Para quaisquer que sejam os ângulos a e b , vale a fórmula:*

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b).$$

Demonstração. A demonstração deste resultado é análoga ao que foi feito na prova do seno da diferença de dois arcos. Para tanto, considere novamente a figura a seguir.

Figura 3.25: Figura para a demonstração do cosseno da diferença de dois arcos



Fonte: Autoria própria (2025)

No triângulo OBH , BH é cateto oposto ao ângulo $a - b$ e $\overline{OB} = 1$ é a hipotenusa deste triângulo, então:

$$\cos(a - b) = \frac{\overline{OH}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OH}}{1} \Rightarrow \cos(a - b) = \overline{OH}.$$

Ainda, pela figura, vemos que $\overline{OH} = \overline{OG} + \overline{GH}$ e $\overline{GH} = \overline{BE}$, assim seguiremos com:

$$\cos(a - b) = \overline{OG} + \overline{BE}.$$

Em BFE , o segmento EF é cateto oposto ao ângulo a e BF hipotenusa deste triângulo, assim:

$$\sin(a) = \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} \implies \overline{BE} = \overline{BF} \cdot \sin(a).$$

Já em OGF , o segmento OG é cateto adjacente ao ângulo a e OF hipotenusa, então:

$$\cos(a) = \frac{\overline{OG}}{\overline{OF}} \implies \overline{OG} = \overline{OF} \cdot \cos(a).$$

Substituindo $\overline{OG}$ e $\overline{BE}$ em $\cos(a - b) = \overline{OG} + \overline{BE}$, segue:

$$\cos(a - b) = \overline{OF} \cdot \cos(a) + \overline{BF} \cdot \sin(a).$$

Agora nos resta encontrarmos uma expressão para $\overline{OF}$ e $\overline{BF}$. Para tanto, considere o triângulo OBF . Sendo o lado BF cateto oposto ao ângulo b , OF cateto adjacente e $\overline{OB} = 1$ hipotenusa deste triângulo, obtemos:

$$\cos(b) = \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OF}}{1} \implies \overline{OF} = \cos(b) \text{ e } \sin(b) = \frac{\overline{BF}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BF}}{1} \implies \overline{BF} = \sin(b).$$

Substituindo $\overline{OF}$ e $\overline{BF}$ em $\cos(a - b) = \overline{OF} \cdot \cos(a) + \overline{BF} \cdot \sin(a)$, resulta em:

$$\cos(a - b) = \cos(b) \cdot \cos(a) + \sin(b) \cdot \sin(a).$$

Ou, equivalentemente:

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b).$$

Como queríamos demonstrar

□

Proposição 3.15 (Tangente da diferença de dois arcos). *Para quaisquer que sejam os ângulos a e b , vale a fórmula:*

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \cdot \tan(b)}.$$

Demonstração. A prova é completamente similar à tangente da soma.

Sabemos que a tangente de um ângulo pode ser escrita como sendo a razão entre o seno e o cosseno, ou seja, $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. Assim, a tangente da diferença de dois

ângulos será:

$$\tan(a - b) = \frac{\operatorname{sen}(a - b)}{\cos(a - b)}.$$

Utilizando as identidades trigonométricas do seno e do cosseno da diferença, isto é

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(b),$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b),$$

teremos:

$$\tan(a - b) = \frac{\operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}.$$

Dividimos o numerador e o denominador por $\cos(a) \cdot \cos(b)$, supondo $\cos(a) \cdot \cos(b) \neq 0$, ficaremos com:

$$\tan(a - b) = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a) \cdot \cancel{\cos(b)}}{\cancel{\cos(a)} \cdot \cancel{\cos(b)}} - \frac{\cancel{\cos(a)} \cdot \operatorname{sen}(b)}{\cancel{\cos(a)} \cdot \cancel{\cos(b)}}}{\frac{\cos(a) \cdot \cos(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)} + \frac{\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}}.$$

Simplificando cada termo, obteremos:

$$\tan(a - b) = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)} - \frac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)}}{1 + \frac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)}}.$$

Como $\frac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)} = \tan(a)$ e $\frac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)} = \tan(b)$, obtemos:

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \cdot \tan(b)}.$$

Portanto, fica demonstrada a fórmula da tangente da diferença de dois arcos: $\square$

Exemplo 3.12. *Utilize a fórmula da tangente da diferença de dois arcos para calcular $\tan(15^\circ)$.*

Solução. Para utilizar a fórmula da tangente da diferença de dois e determinar $\tan(15^\circ)$ precisamos inicialmente identificar dois ângulos cuja diferença seja 15° . Esses ângulos podem ser 60° e 45° , pois $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$, ou 45° e 30° , pois $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$. A escolha é sua. Neste exemplo vamos escolher os ângulos 60° e 45° , ou seja:

$$\tan(15^\circ) = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan(60^\circ) - \tan(45^\circ)}{1 + \tan(60^\circ) \cdot \tan(45^\circ)}.$$

Substituindo $\tan(60^\circ)$ e $\tan(45^\circ)$ por seus respectivos valores, ficaremos com:

$$\tan(15^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

Racionalizando o denominador, teremos:

$$\tan(15^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot (2 - \sqrt{3})}{\cancel{2}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Assim temos que $\tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$.

Verifique o resultado escolhendo os ângulos 45° e 30° . □

Vimos ao longo do Capítulo 3 que não é simples encontrar os valores numéricos das razões trigonométricas de um ângulo qualquer. Vimos também que há ângulos cujos valores são fáceis de serem obtidos e por isso são chamados de ângulos notáveis, tais ângulos são 30° , 45° e 60° . A partir dos ângulos notáveis podemos obter, por exemplo, os valores das razões dos ângulos de 75° e 15° utilizando, respectivamente, as fórmulas da adição e subtração de arcos. Entretanto as fórmulas da adição e subtração de arcos não são úteis em muitos casos. Não é possível calcular, por exemplo, o $\sin(20^\circ)$ utilizando a fórmula da adição ou da subtração de arcos. Por outro lado, existem fórmulas que nos permitem calcular as razões trigonométricas dos ângulos de $7,5^\circ$ ou de $37,5^\circ$, por exemplo. Estas fórmulas são chamadas de **fórmulas do arco metade** (pois $7,5^\circ$ é metade de 15° e $37,5^\circ$ é metade de 75°), porém estas fórmulas não serão apresentadas aqui pelo fato de raramente encontrarmos estes ângulos em uma figura ou exercício, assim estas fórmulas serão deixadas como sugestão e curiosidade ao leitor.

Para a próxima seção vamos deixar uma inquietação ao leitor. Se nas fórmulas da adição de arcos usarmos os ângulos 60° e 45° podemos calcular as razões do ângulo de 105° que corresponde à $60^\circ + 45^\circ$? ou calcular as razões do ângulo de 120° que corresponde à $60^\circ + 60^\circ$? Entretanto, perceba que os ângulos de 105° e 120° não podem ser encontrados em um triângulo retângulo. Acompanhe esta discussão na Subseção 3.6.2.

3.5 Trigonometria na circunferência

Esta seção será dedicada ao estudo da Trigonometria na circunferência. Aqui, muitos conceitos abordados na Trigonometria no triângulo retângulo serão facilmente percebidos e compreendidos, entretanto, pensamos que o estudo da Trigonometria na circunferência não se destaca em relação ao estudo no triângulo retângulo, visto que esta última possui muito mais aplicações práticas do que a primeira. Apesar disso, muitas obras didáticas do Ensino Médio dedicam muitas páginas para a Trigonometria na circunferência focando em muitos gráficos e tópicos que não seriam muito importantes para uma primeira abordagem: como as equações e as inequações trigonométricas e as funções secante, cossecante e cotangente, por exemplo, e poucas páginas são dedicadas para o estudo no triângulo retângulo. No entanto, consideramos que deve-se reservar mais tempo para o estudo no

triângulo retângulo por ter mais aplicações práticas e consequentemente mais agradável aos alunos.

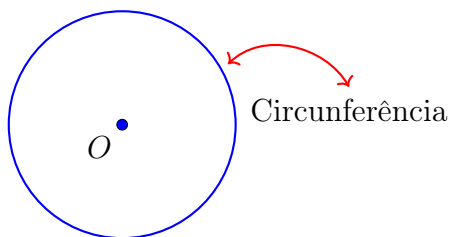
3.5.1 Elementos da circunferência

Antes de abordarmos e definirmos a circunferência ou o ciclo trigonométrico, é essencial retomar os elementos básicos da circunferência, pois esses conceitos, introduzidos no Ensino Fundamental (que muitos alunos provavelmente não lembram), serão fundamentais para a compreensão das seções seguintes.

Definição 3.16. *Chama-se circunferência, a região do plano formada pela união de todos os pontos equidistantes (mesma distância) de um ponto fixo (chamado centro da circunferência).*

Geometricamente:

Figura 3.26: Circunferência de centro O



Fonte: Autoria própria (2025)

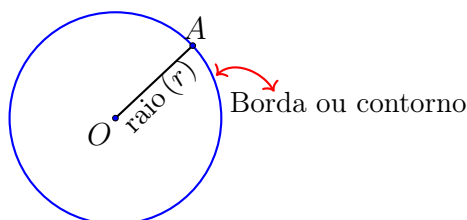
Na Figura 3.26, a linha fechada em azul é a circunferência (às vezes chamada de borda ou contorno da circunferência) e o ponto O é o seu centro.

Raio de uma circunferência

Exemplo 3.13. *Chama-se raio de uma circunferência, o segmento que une o centro O à sua borda ou contorno.*

Geometricamente:

Figura 3.27: Raio de uma circunferência



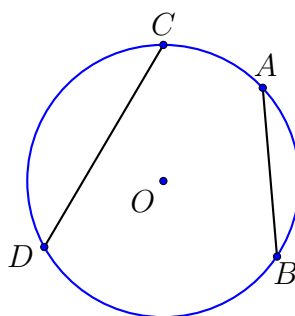
Fonte: Autoria própria (2025)

Na Figura 3.27, o segmento AB representa o raio da circunferência, onde costumamos simbolizar o raio por r . Vale ressaltar que em uma circunferência podemos traçar infinitos raios.

Corda de uma circunferência

Definição 3.17. *Chama-se corda de uma circunferência, o segmento que liga dois pontos distintos de uma circunferência.*

Figura 3.28: Corda de uma circunferência



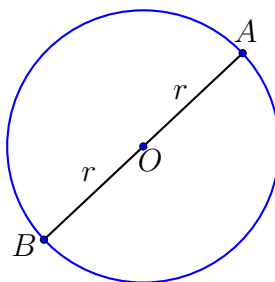
Fonte: Autoria própria (2025)

Na Figura 3.28, os segmentos AB e CD são exemplos de cordas de uma circunferência. Assim como o raio, podemos traçar infinitas cordas em uma circunferência.

Diâmetro de uma circunferência

Definição 3.18. *Chama-se diâmetro de uma circunferência, uma maior corda possível de uma circunferência, ocorrendo quando a corda passar pelo centro da mesma.*

Figura 3.29: Diâmetro de uma circunferência



Fonte: Autoria própria (2025)

Na Figura 3.29, a corda AB que passa pelo centro O é chamada de diâmetro (d), ou seja, $d = \overline{AB}$. Ainda na figura, notamos que $d = \overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$, mas $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$ são

ambos raios da circunferência, assim teremos:

$$d = r + r \implies d = 2r.$$

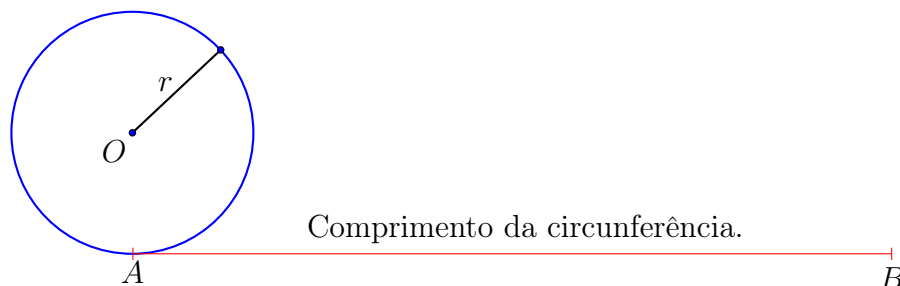
Enfatizamos que um diâmetro divide a circunferência em duas partes, onde cada parte é chamada de semi-circunferência.

Comprimento ou perímetro de uma circunferência

O comprimento ou perímetro de uma circunferência é medida do contorno dessa circunferência.

Quando falamos em comprimento de uma circunferência, observamos que, geralmente, muitos estudantes sentem dificuldades em assimilar este conceito com a forma geométrica da circunferência. Para sanar esta dificuldade, mais uma vez, temos em mãos um recurso didático ideal - o Geogebra. Nele podemos criar, uma animação ² com uma circunferência sendo “desfeita” e recriar a figura abaixo de forma interativa.

Figura 3.30: Comprimento de uma circunferência



Fonte: Autoria própria (2025)

Na Figura 3.30, o comprimento do segmento AB em vermelho tem a mesma medida da linha azul da circunferência. Imagine então que, se pudéssemos cortar a circunferência no ponto A e depois “esticá-la”, obteríamos o segmento de comprimento $\overline{AB}$. Adiante, mostraremos a expressão que nos permite calcular o comprimento de uma circunferência.

O número irracional chamado π (pi)

Quando dividimos o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro, obtemos um dos números mais famosos da Matemática - o número chamado π (pi) - letra do alfabeto grego. Para Barros e Sá (2022), este número é irracional, e fundamental para o cálculo, tanto do perímetro, quanto da área de um círculo. Um dos primeiros matemáticos

²Acesse o link <<https://www.geogebra.org/classic/hh6b6jqm>> e veja a Figura 3.30 em animação no Geogebra.

a calcular um valor aproximado para π foi o grego Arquimedes de Siracusa³. Ele mostrou, por um método de exaustão usando polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência, que π estava compreendido entre 3,14084 e 3,14285, e ainda conseguiu encontrar uma fração para representar um valor aproximado para π , a fração $\frac{22}{7} \approx 3,142857$. Contudo, com o avanço do cálculo diferencial e integral, foi possível determinar com qualquer precisão pedida o valor do número π . A título de ilustração, o valor de π com seus 31 primeiros dígitos depois da vírgula é $\pi \approx 3,1415926535897932384626433832795 \dots$, que comumente arredondamos para $\pi = 3,14$.

O número π pode ser facilmente mostrado para os alunos com o auxílio do Geogebra. Para isto, o professor poderá expor várias circunferências de raios distintos, em seguida, com o próprio Geogebra, o professor pode encontrar as medidas do diâmetro e do comprimento de cada circunferência e por fim, pegar a razão entre o comprimento e o diâmetro. A turma perceberá que independentemente do raio das circunferências, a razão entre o comprimento e o diâmetro é aproximadamente 3,14.

Com a definição de π , obtemos: $\pi = \frac{C}{d}$, onde C é o comprimento da circunferência e d o diâmetro. Ou, equivalentemente, obtemos que $C = d \cdot \pi$. Por outro lado, como $d = 2r$, podemos escrever então que:

$$C = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Ou, equivalentemente, como escrevemos de costume

$$C = 2\pi r. \quad (3.16)$$

Ainda sobre o número π , Oliveira e Pinheiro afirmam que

O primeiro a usar a notação π para o valor de $C/2R$ foi o matemático inglês W. Jones (1675-1749). Entretanto, somente depois que L. Euler (1707-1783) passou a utilizar o símbolo π que isto tornou-se padrão entre os outros matemáticos. Porém, até então, não era sabido se π era racional ou irracional. Tentava-se calcular π com cada vez mais casas decimais na expectativa de surgir alguma periodicidade. Somente em 1767 que o matemático J. H. Lambert (1728-1777) demonstrou que π era um número irracional (Oliveira; Pinheiro, 2010, p. 100).

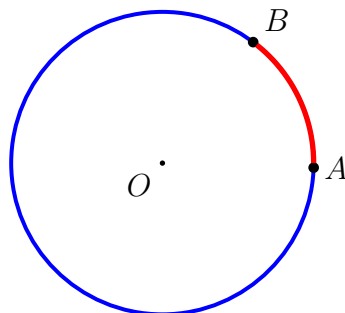
Arco de uma circunferência

Definição 3.19. *Arco de uma circunferência é uma parte do comprimento de uma circunferência delimitada por dois pontos pertencentes à ela.*

Geometricamente:

³Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.) foi um importante cientistas, inventor e matemático grego da antiguidade clássica

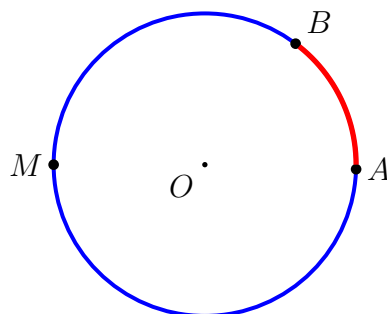
Figura 3.31: Arco de uma circunferência



Fonte: Autoria própria (2025)

Percebemos pela Figura 3.31 que os pontos A e B determinam dois arcos sobre a circunferência: O arco menor em vermelho e o arco maior em azul. Para distinguir os arco AB menor do arco AB maior, podemos adicionar um novo ponto M sobre o arco maior, como na representação abaixo.

Figura 3.32: Arco de uma circunferência

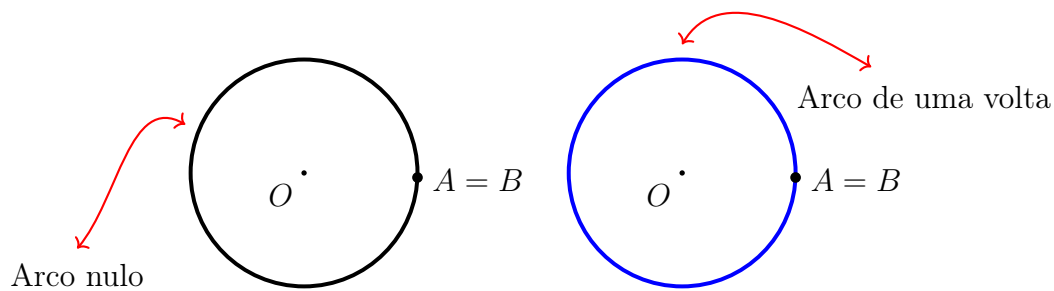


Fonte: Autoria própria (2025)

Desta maneira os pontos A e B representam o arco menor em vermelho e simbolizamos por $\widehat{AB}$ e A, M e B representam o arco maior em azul e simbolizamos por $\widehat{AMB}$. Para não haver esta discordância (Se os pontos A e B determinam o menor ou o maior arco), nesta dissertação ao usarmos a notação $\widehat{AB}$, estaremos nos referindo ao menor arco.

Por outro lado, se os pontos A e B forem coincidentes, estes podem determinar dois arcos: O arco nulo e o arco de uma volta, como segue abaixo na Figura 3.33.

Figura 3.33: Arco nulo e arco de uma volta.

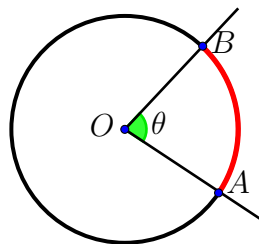


Fonte: Autoria própria (2025)

Ângulo central

Consideremos uma circunferência de centro O e os pontos A e B pertencentes a ela. Estes pontos determinam, como já vimos, o arco $\widehat{AB}$. Considerando as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, os pontos A e B , determinam com o centro O , um ângulo θ . Este ângulo θ , com vértice no centro O ângulo θ , é chamado de **ângulo central**.

Figura 3.34: Ângulo central

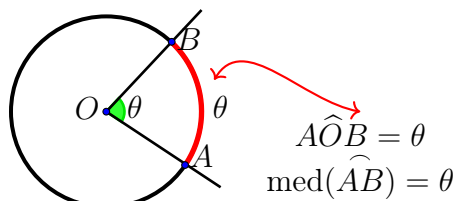


Fonte: Autoria própria (2025)

Medida e comprimento de um arco

Ainda na Figura 3.34, dizemos que o arco $\widehat{AB}$ é correspondente do ângulo central θ , e intuitivamente a medida do arco $\widehat{AB}$ é proporcional à medida do ângulo central θ e simbolizamos por $\text{med}(\widehat{AB}) = \theta$, como representado a seguir na Figura 3.35.

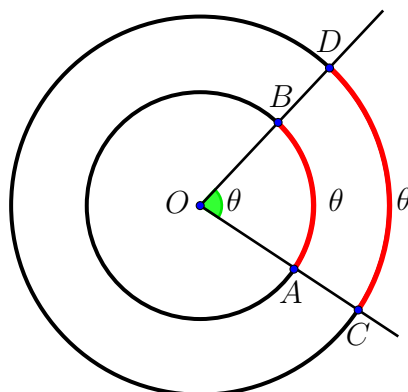
Figura 3.35: Medida de um arco



Fonte: Autoria própria (2025)

Quanto à medida de um arco, devemos atentar que nesta noção intuitiva, os alunos poderão afirmar que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é θ . Esclarecemos, que para esta afirmativa ser verdade, depende da unidade de medida do ângulo θ , se a unidade for em graus, a afirmativa é falsa, pois esta unidade mede a abertura entre duas semirretas e não o comprimento. Posteriormente veremos qual unidade será utilizada para medir o comprimento de um arco. Para maior clareza, considere a figura abaixo.

Figura 3.36: Medida de um arco



Fonte: Autoria própria (2025)

Na figura, os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ são arcos correspondentes ao ângulo central θ e, portanto, possuem a mesma medida, ou seja, $\text{med}(\widehat{AB}) = \text{med}(\widehat{CD}) = \theta$, entretanto, é evidente pela figura, que o comprimento linear do arco $\widehat{CD}$ é maior do que o de $\widehat{AB}$. Contudo, adiante definiremos uma unidade de medida para ângulos em que é possível ocorrência de que o comprimento linear do arco seja igual à medida do ângulo central, isso quando o raio da circunferência é igual a 1.

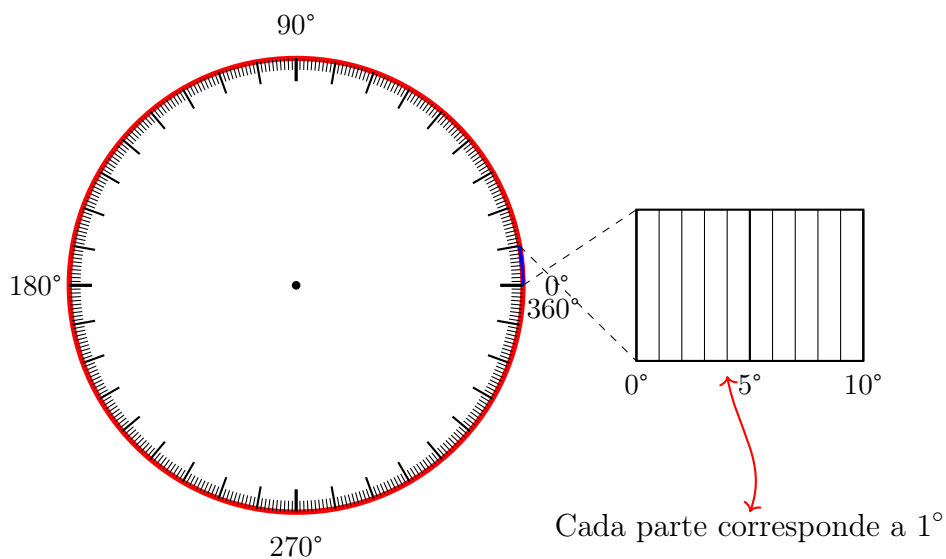
Unidades de medida de arcos e ângulos

O grau

Os babilônios antigos estabeleceram que o arco de uma volta, isto é, a circunferência propriamente dita seria dividida em 360 partes iguais (Por que acreditavam que um ano era composto por 360 dias e seu sistema numérico era sessenta ou sexagesimal), onde cada parte vale 1° (lê-se: um grau), daí um arco de uma volta equivale a 360° , conforme visualizamos na Figura 3.37.

Essa convenção babilônica influenciou profundamente a matemática e a astronomia das civilizações posteriores. Mesmo hoje, milênios depois, continuamos utilizando essa divisão em graus para medir ângulos e rotacionar objetos, seja na geometria, na engenharia ou na navegação.

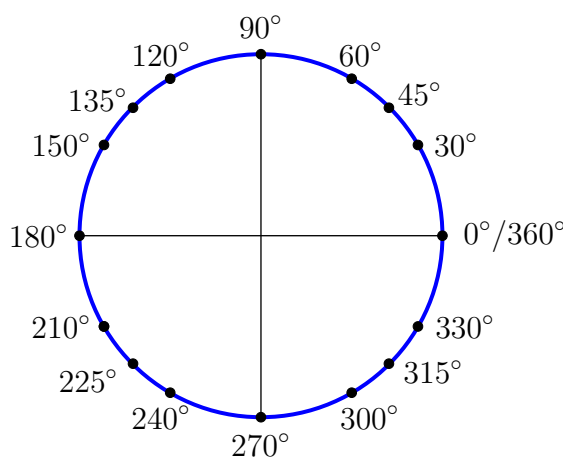
Figura 3.37: Circunferência dividida em 360 partes



Fonte: Autoria própria (2025)

Nesta divisão feita pelos antigos babilônios, o arco de uma corresponde a 360° , o arco de uma volta (também chamado de semicircunferência, por ser metade da circunferência) corresponde a 180° . Notamos, pela figura, que o arco correspondente à metade do arco de meia volta vale 90° e, este arco dividi a circunferência em quatro partes iguais. Podemos resumir principais arcos conforme a figura abaixo.

Figura 3.38: Principais arcos em graus.

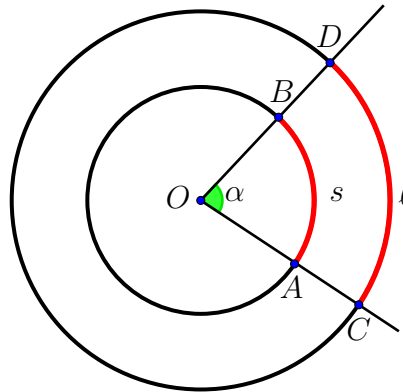


Fonte: Autoria própria (2025)

O radiano

Considerando as circunferências concêntricas (circunferências de mesmo centro) da Figura 3.39 a seguir, temos que os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ subtendem o mesmo ângulo central α .

Figura 3.39: Arcos semelhantes



Fonte: Autoria própria (2025)

Segundo Lima (1991), “Dois arcos de circunferência são semelhantes se, e somente se, subtendem o mesmo ângulo central”, assim, sendo s e ℓ os comprimentos dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$, respectivamente, e R e r os raios das circunferências maior e menor, respectivamente, então temos pela semelhança entre os arcos que:

$$\frac{\ell}{R} = \frac{s}{r}.$$

De forma geral, dado um ângulo central α , a razão entre o arco por ele determinado e o raio é sempre constante.

De posse disso, Carmo, Wagner e Morgado (1992, p. 24) definem radiano de forma geral afirmando que “A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo”.

A expressão a seguir, decorre imediatamente a partir desta definição.

$$\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{s}{r}.$$

Ou simplesmente:

$$\alpha = \frac{\ell}{R}. \quad (3.17)$$

Nesta última expressão, vamos supor que ℓ e R estejam na mesma unidade de medida de comprimento, e chamaremos esta unidade de u . Se tomarmos $R = 1$, então teremos $\alpha = \frac{\ell u}{1u} \Rightarrow \alpha = \ell$. Note que a unidade u no numerador se “cancela” com a unidade u no denominador da fração, assim temos que um ângulo em radianos é adimensional (não depende de uma unidade de medida) e se o raio for igual, então o comprimento do arco é numericamente igual ao ângulo central por ele subtendido.

Carmo, Wagner e Morgado, acrescentam que

A medida de um ângulo em radianos não depende portanto da unidade de comprimento considerada. Quando $R = 1$ a medida do ângulo coincide com o comprimento do arco mas, desejamos enfatizar, esta última medida depende de uma unidade de comprimento enquanto que a primeira não. Mantendo em mente esta distinção conceitual, identificaremos, em um círculo de raio 1, arcos e ângulos correspondentes (Carmo; Wagner; Morgado, 1992, p. 25).

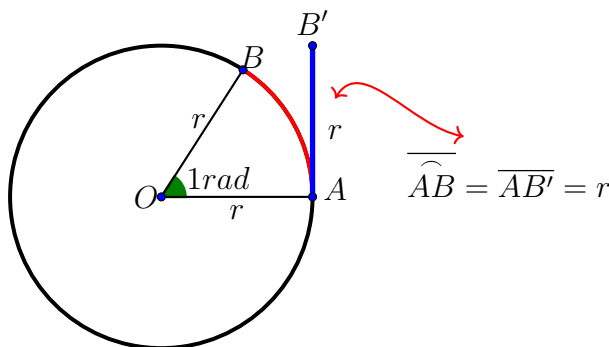
A definição a seguir, que encontramos nos livros didáticos do Ensino Médio, específica o ângulo de medida 1 radiano.

Leonardo (2020, p. 58), da editora Moderna, afirma que “Para medir arcos e ângulos, também podemos usar o radiano. A medida angular de um arco é 1 radiano (1 rad) quando seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém”.

Bonjorno, Junior e Sousa (2020, p. 91), da editora FTD, definem radiando dizendo que “Quando o comprimento de um arco (a medida linear) é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém, dizemos que a medida angular desse arco é 1 radiano (1 rad)”.

A Figura 3.40 a seguir ilustra as definições dadas pelas editoras Moderna e FTD para 1n radiano. Entretanto, estas definições não são claras para o aluno do Ensino Médio que terá sem primeiro contato com o radiano. Nas definições dadas podemos nos perguntar: qual a medida do raio, vale para qualquer raio? A princípio, não sabemos.

Figura 3.40: Ângulo com medida igual a 1 radiano



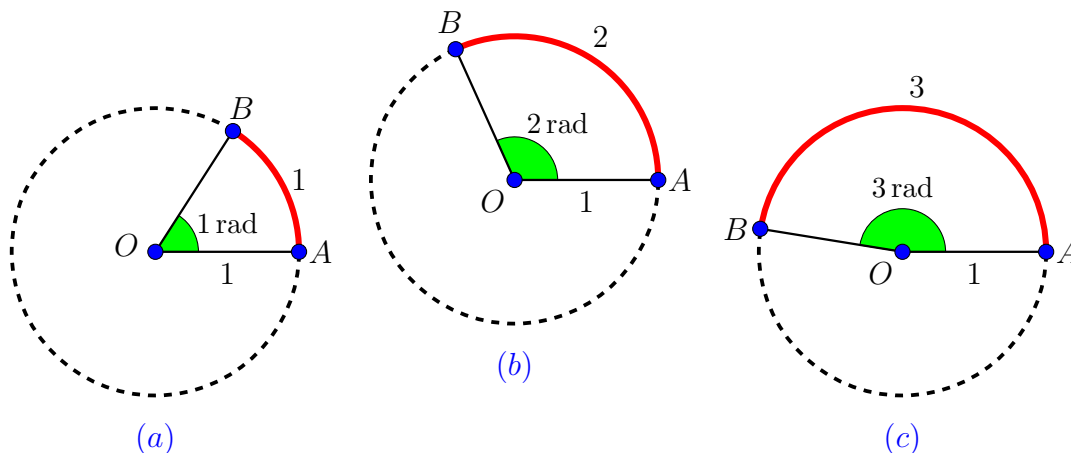
Fonte: Autoria própria (2025)

Na figura, o ângulo central $\angle AOB$ tem medida de 1 radiano (que simbolizamos por 1 rad). O arco $\widehat{AB}$, pela definição, tem comprimento numericamente igual ao ângulo central. Ainda na Figura 3.40, se pudéssemos “esticar” o arco $\widehat{AB}$ de modo a torna-lo linear obteríamos o segmento AB' cujo comprimento é igual ao raio. Vale ressaltar que esta unidade de medida é estabelecida como padrão pelo Sistema Internacional de Medidas (SI) para a medição de ângulos.

Vejamos na ilustração na figura abaixo a representação de um ângulo com abertura

de 1 radianos, 2 radianos e 3 radianos em uma circunferência de raio 1.

Figura 3.41: Arcos de medida 1 rad, 2 rad e 3 rad



Fonte: Autoria própria (2025)

A vantagem de $r = 1$ é que nossos cálculos com radianos se tornam mais simples. Considerando a figura acima, se $r = 1$, o ângulo central, como já vimos, é numericamente igual ao comprimento do arco $\widehat{AB}$, assim podemos escrever que $\alpha \text{ rad} \stackrel{N}{=} \overline{AB}$ (sendo α um ângulo central medido em radianos). Portanto, deste ponto em diante ao fazermos operações com ângulos cujas medidas estejam em radianos consideraremos o raio unitário. Note ainda que na Figura 3.41 (c) o ângulo de medida 3 rad é “quase” metade da circunferência e veremos adiante que a metade da circunferência ou semicircunferência equivale a $\pi \approx 3,14$.

Sendo o radiano e o grau unidades de medida para ângulos, podemos estabelecer uma relação entre estas unidades. Primeiramente podemos questionar: O ângulo com a medida de 1 rad corresponde a quantos graus? Para encontrar esta relação podemos usar uma simples proporção entre as unidades. Como estamos considerando a circunferência de raio 1, então $1 \text{ rad} = 1$ (veja na Figura 3.41 (a)) e o seu comprimento é $C = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Sabendo que 360° equivale ao arco de uma volta, de comprimento 2π (Para $r = 1$), podemos escrever a proporção a seguir.

$$\frac{360^\circ}{x} = \frac{2\pi}{1} \implies x \cdot 2\pi = 360^\circ \implies x = \frac{360^\circ}{2\pi} \implies x = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Sendo $\pi \approx 3,14$, teremos:

$$x = \frac{180^\circ}{3,14} \implies x \approx 57,3^\circ.$$

Logo, concluímos em toda circunferência o arco de medida $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$.

Portanto, para toda circunferência, o arco com medida de aproximadamente $57,3^\circ$ tem comprimento linear igual ao raio.

3.5.2 Algumas relações entre grau e radiano

Aqui reiteramos como se faz as conversões entre as duas unidades de medir ângulo: o grau e o radiano.

O ângulo de uma volta em radianos

De certa forma, isto já foi feito anteriormente. Para isto, devemos ter em mente que um ângulo central dado em radianos é “igual” ao comprimento de um arco por ele determinado (quando o raio é 1) e $1 \text{ rad} = r$ (Para a circunferência de raio 1, é claro!), assim sendo, como o arco de uma volta tem comprimento dado por $2\pi r$, ou seja $360^\circ = 2\pi r$, assim ficamos com:

$$360^\circ = 2\pi r \implies 360^\circ = 2\pi \text{ rad}.$$

O mesmo resultado poderia ser obtido utilizando a definição geral de radianos, isto é para $\alpha = 360^\circ$, teremos $360^\circ = \frac{2\pi r}{r} \implies 360^\circ = 2\pi \text{ rad}.$

Pela definição geral, para toda circunferência independentemente do comprimento de seu raio, temos $360^\circ = 2\pi \text{ rad}.$

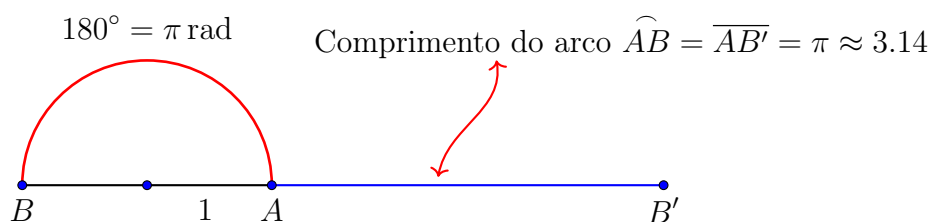
O ângulo de meia volta em radianos

Usando uma proporção direta, podemos representar facilmente o arco de 180° em radianos. Sendo este arco metade do arco de uma volta, então, em radianos tem-se que 180° é metade de $2\pi \text{ rad}$, isto é:

$$180^\circ = \frac{2\pi \text{ rad}}{2} \implies 180^\circ = \pi \text{ rad}.$$

A expressão $180^\circ = \pi \text{ rad}$ indica, portanto, que o arco de meia volta ou a semicircunferência de raio 1, tem comprimento igual a π . A figura abaixo ilustra esta situação. Caso o raio fosse 2, por exemplo, teríamos ainda que $180^\circ = \pi \text{ rad}$, porém já não indicaria que o comprimento da circunferência é igual a π e sim 2π , verifique.

Figura 3.42: Comprimento de um semicírculo de raio 1



Fonte: Autoria própria (2025)

Imagine que se pudéssemos “esticar” o arco $\widehat{AB}$ obteríamos exatamente o segmento AB' , cujo comprimento é igual a $\pi \approx 3,14$, compare este resultado com o ângulo de 3 rad da Figura 3.41. Desta forma podemos definir o número π da seguinte maneira: O número π é o comprimento de uma semicircunferência de raio 1.

Com a correspondência $180^\circ = \pi \text{ rad}$, podemos usar uma simples proporção direta para representar qualquer ângulo em grau para radiano e vice-versa. Com isso, a seguir representaremos em radianos os ângulos da Figura 3.38.

Para o ângulo de 90° a correspondência em radianos é imediata, pois, sendo $90^\circ = \frac{180^\circ}{2}$ e $180^\circ = \pi \text{ rad}$, então, $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Isso quer dizer que o comprimento do arco de 90° em uma circunferência de raio 1 é $\frac{\pi}{2} = \frac{3,14}{2} = 1,57$. Para que estas expressões sejam melhor compreendidas pela turma, indicamos novamente o uso do Geogebra onde podemos criar uma circunferência de raio 1 e verificarmos, por exemplo, que o comprimento do arco de 180° é $\pi \approx 3,14$.

Para o ângulo de 30° , basta fazermos a proporção a seguir.

$$\frac{180^\circ}{30^\circ} = \frac{\pi}{x} \implies x = \frac{30^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \implies x = 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \implies x = \frac{\pi}{6}.$$

Logo,

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}.$$

Nesta proporção, percebemos que para transformarmos um ângulo em graus para radianos, basta fazermos o produto deste ângulo por $\frac{\pi}{180^\circ}$. Para os ângulos de 45° , 60° e 135° , por exemplo, teremos:

$$45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}.$$

Logo,

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}.$$

Para o ângulo de 60° , basta fazermos

$$60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}.$$

Daí,

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

Para o ângulo de 135° , faremos de forma análoga

$$135^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}.$$

Logo,

$$135^\circ = \frac{3\pi}{4}\text{rad}.$$

O processo é completamente análogo para os demais ângulos da Figura 3.38.

E se quisermos a correspondência de radianos para graus, como faríamos? Para isto, o processo é análogo ao processo de graus para radianos. Por exemplo, o arco de comprimento de $\frac{\pi}{5}$ ou de medida $\frac{\pi}{5}$ rad representa que ângulo em graus? Sendo $180^\circ = \pi$ rad, usaremos uma proporção, ou seja:

$$\frac{180^\circ}{x} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{5}} \implies \frac{180^\circ}{x} = \cancel{\pi} \cdot \frac{5}{\cancel{\pi}} \implies x = \frac{180}{5} \implies x = 36.$$

Portanto, o arco de comprimento de $\frac{\pi}{5}$ é igual a 36° .

Ainda neste exemplo, percebemos que para representar qualquer arco em radianos para graus, basta substituir π rad por 180° .

Exemplo 3.14. O arco de medida $\frac{2\pi}{9}$ rad vale quantos graus?

Solução. Para tanto, basta substituir π rad por 180° , assim:

$$\frac{2\pi}{9}\text{ rad} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{9} = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ.$$

Portanto, este arco tem medida de 40° . □

O processo de representação de graus para radianos é completamente análogo para os demais ângulos da Figura 3.38. Ao fazermos estas transformações, obtemos as tabelas com os resultados abaixo.

Tabela 3.2: Relação entre graus e radianos

Unidade	Arco								
Grau	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radiano	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Fonte: Autoria própria (2025)

Tabela 3.3: Relação entre graus e radianos

Unidade	Arco							
Grau	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radiano	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Fonte: Autoria própria (2025)

Tabela 3.4: Relação entre graus e radianos.

É de fundamental importância para a aprendizagem dos alunos, darmos significado e clareza para a utilização da unidade de radianos. Entretanto, analisando diversas obras didáticas do Ensino Médio que tratam de Trigonometria, percebemos em muitas delas que não há clareza, por exemplo, na expressão $180^\circ = \pi \text{ rad}$, levando aos alunos uma falsa sensação de aprendizado (pois como vimos anteriormente, esta expressão afirma implicitamente que o comprimento da semicircunferência de raio 1 é π) e essa deficiência ocasionará um descompasso na aprendizagem e no interesse dos alunos em aprender o que se está a ensinar. Esta falta de significado para radianos persistirá por muito tempo na vida acadêmica do estudante que cursará ciências exatas, visto que não há clareza adequada nas abordagens dos livros. No entanto, como esta unidade está relacionada diretamente com o comprimento de um arco, ela se torna mais eficiente do que o grau, sobretudo em Matemática do Ensino Superior, no cálculo diferencial e integral.

3.6 A circunferência ou ciclo trigonométrico

Iniciaremos esta seção apresentando algumas definições dadas em obras didáticas do Ensino Médio para a circunferência trigonométrica. As duas primeiras definições foram retiradas em obras do Ensino Médio e a última de uma obra didática do Ensino Superior utilizada, inclusive, na formação de professores. Acompanhe.

Os autores Bonjorno, Junior e Sousa (2020) da Editora FTD na coleção Prisma - Matemática: Geometria e Trigonometria, definem a circunferência trigonométrica afirmando que

A circunferência orientada de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas de raio unitário ($r = 1$) é denominada **circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico**. Os arcos da circunferência trigonométrica terão origem no ponto $A(1, 0)$, denominado origem dos arcos (Bonjorno; Junior; Sousa, 2020, p. 96).

Veja que na definição dada pelos autores Bonjorno, Junior e Sousa não há justifica-

tivas a respeito do raio unitário ($r = 1$).

Segundo Leonardo (2020, p. 60), editor responsável da editora Moderna, na coleção Conexões: Matemática e suas tecnologias - Trigonometria, “A circunferência trigonométrica, ou ciclo trigonométrico, tem centro na origem $O(0, 0)$ de um plano cartesiano e raio de 1 unidade”.

A definição dada por Leonardo também não ressalta a necessidade de tomarmos o raio de 1 unidade. Por fim, vejamos a definição que encontramos no livro 3 de Gelson Iezzi da coleção Fundamentos de Matemática Elementar.

Iezzi (2013, p. 88) define a circunferência dizendo, “Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal uOv . Consideremos a circunferência λ de centro O e raio $r = 1$. Notemos que o comprimento dessa circunferência é 2π , pois $r = 1$ ”. O autor também não é claro em sua definição e não esclarece o raio igual a $r = 1$. Os estudantes (e até mesmo professores) de Trigonometria dificilmente encontrarão uma justificativa sobre esta decisão do raio unitário. Adiante esclareceremos teoricamente e com exemplo numérico esta decisão.

Nas definições dadas acima, chama a nossa atenção o fato de que o raio da circunferência trigonométrica é unitário, isto é, 1. Mas, por que exatamente 1? os autores consultados não deixam isso claro. A resposta para este questionamento, aliás, é muito simples. No entanto, essa resposta não é encontrada facilmente nos livros didáticos do Ensino Médio (é provável que não se encontre de forma nenhuma) e até mesmo nos livros de licenciatura em Matemática não encontramos com facilidade (é provável que não se encontre de forma nenhuma) a resposta para isto e muitos professores de Matemática não sabem responder a esta pergunta. Muitos livros didáticos atuais não trazem uma explicação ou pelo menos deveriam direcionar o aluno a entender a necessidade de tomar o raio unitário. Por outro lado, encontra-se na obra **Curso de Matemática** de Manoel Jairo Bezerra de 1961 uma breve orientação, porém sem muitos detalhes, sobre esta escolha. Ele declara:

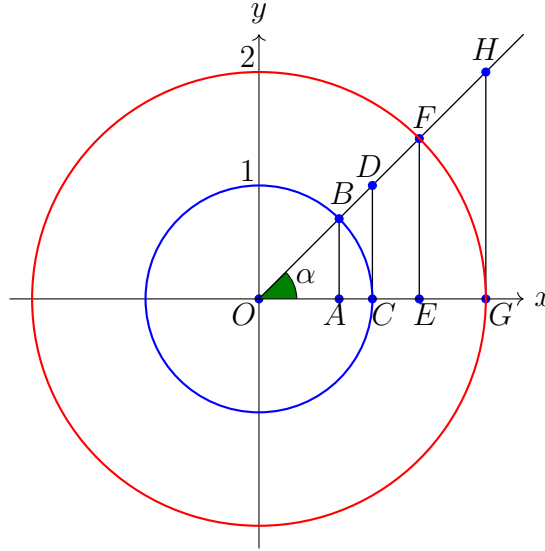
Esclarecemos, para evitar futuras confusões por parte do aluno, que o raio pode ter qualquer medida, como, por exemplo, $R = 1 \text{ cm}$ ou $R = 2,45 \text{ cm}$. Apenas esse valor do raio será considerado como unidade de comprimento para as medidas dos segmentos considerados no círculo trigonométrico (Bezerra; 1961, p. 492).

Por que adotamos o raio do ciclo trigonométrico igual a 1?

Para entendermos o motivo de tomarmos o raio igual a 1 para a circunferência trigonométrica, considere a seguir duas circunferências centradas na origem do plano cartesiano, sendo uma de raio 1 e outra de raio 2 (poderíamos considerar uma terceira circunferência de raio 3). Mostraremos que, independentemente da medida escolhida para o raio da circunferência, as razões trigonométricas serão as mesmas devido à semelhança

de triângulos, assim como vimos no triângulo retângulo na Seção 3.3.

Figura 3.43: Figura utilizada para mostrarmos porque o raio é 1



Fonte: Autoria própria (2025)

Na Figura 3.43 acima tem-se que $GH \parallel EF$, $EF \parallel CD$, $CD \parallel AB$, $AB \parallel OY$, $\overline{OC} = \text{raio} = 1$ e $\overline{OG} = \text{raio} = 2$. Note ainda que o segmento CD é tangente à circunferência de raio 1 (circunferência em azul) e GH é tangente à circunferência de raio 2 (circunferência em vermelho), logo teremos $CD \perp OC$ e $GH \perp OG$, semelhante ao que vimos na Figura 2.15. Assim teremos que os triângulos OAB , OCD , OEF e OGH são todos semelhantes entre si pelo Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos e dessa forma as razões entre os lados correspondentes são todas constantes, isto é:

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{OH}}.$$
 Perceba que $\overline{OB} = \text{raio} = 1$, e por isso, podemos pegar a mais simples entre as razões obtidas, que é $\sin(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{1}$, daí

$$\sin(\alpha) = \overline{AB}.$$

Veja que, se tomarmos o raio da circunferência igual a 1, então o seno de qualquer ângulo central α é igual ao próprio cateto oposto a α (cateto “dentro” da circunferência de raio 1).

De forma análoga, tem-se que: $\cos(\alpha) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OH}}$. Sendo $\overline{OB} = \text{raio} = 1$, podemos pegar, novamente, a mais simples entre as razões obtidas, que é $\cos(\alpha) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{1}$, logo

$$\cos(\alpha) = \overline{OA}.$$

Note que, se tomarmos outra vez o raio da circunferência igual a 1, então o cosseno de qualquer ângulo central α é igual ao próprio cateto adjacente ao ângulo α (cateto “dentro” da circunferência de raio 1).

E, finalmente, observamos que: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{OG}}$, daí, observamos novamente que $\overline{OC} = \text{raio} = 1$, a partir daí podemos tomar unicamente a razão $\tan(\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CD}}{1}$, portanto:

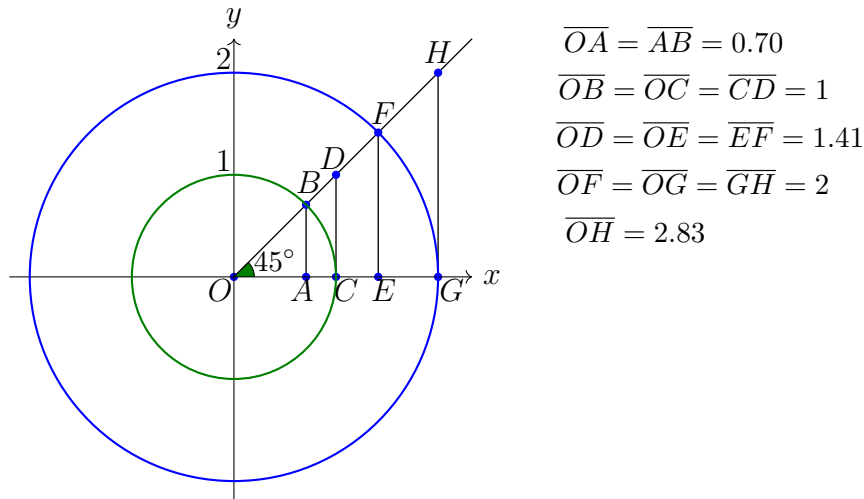
$$\tan(\alpha) = \overline{CD}.$$

Considerando esta última expressão, a tangente de α é igual ao segmento tangente à circunferência de raio 1.

Exemplo 3.15. Para compreendermos que de fato o raio igual torna mais simples as razões trigonométricas, vamos encontrar as razões nos triângulos a seguir, onde tomamos $\alpha = 45^\circ$.

Ressaltamos que a Figura 3.44 foi construída com o uso do Geogebra ⁴, e por meio dele obtemos as medidas de cada segmento.

Figura 3.44: Exemplo de razões trigonométricas na circunferência



Fonte: Autoria própria (2025)

Solução. Para tanto, vamos tomar as razões de semelhança nos triângulos OAB , OCD , OEI e OGH .

No triângulo OAB , quando $\overline{OB} = \text{raio} = 1$, teremos:

$$\sin(45^\circ) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{0.70}{1} = 0.70$$

⁴A construção está disponível em <<https://www.geogebra.org/classic/ueajmckb>>.

$$\cos(45^\circ) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{0.70}{1} = 0.70$$

$$\tan(45^\circ) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{0.70}{0.70} = \frac{1}{1} = 1$$

No triângulo OCD teremos:

$$\sin(45^\circ) = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{1}{1.41} \approx 0.70$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{1}{1.41} \approx 0.70$$

$$\tan(45^\circ) = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{1}{1} = 1$$

No triângulo OEF , quando $\overline{OF}$ = raio = 2, teremos:

$$\sin(45^\circ) = \frac{\overline{EF}}{\overline{OF}} = \frac{1.41}{2} \approx 0.70$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{1.41}{2} \approx 0.70$$

$$\tan(45^\circ) = \frac{\overline{EF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{OG}} = \frac{1.41}{1.41} = \frac{2}{2} = 1$$

□

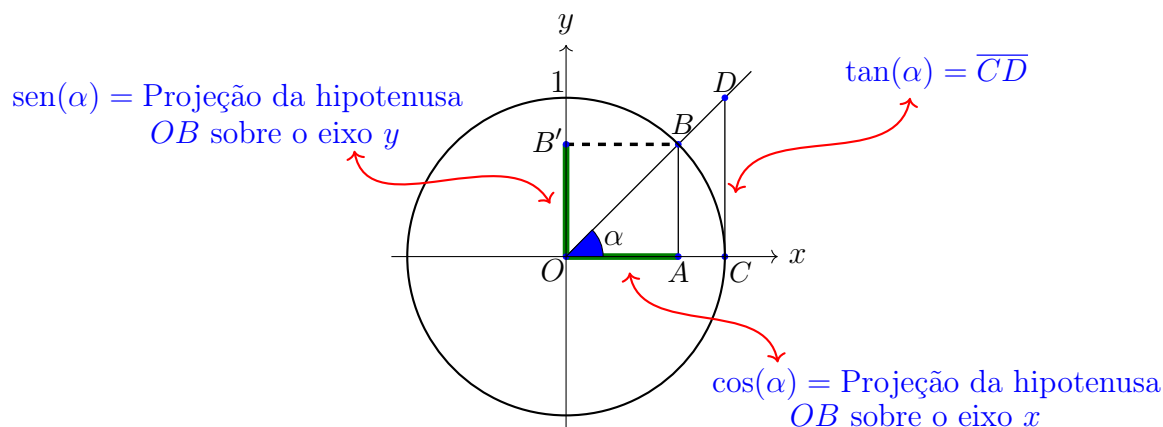
Neste exemplo, percebemos que as razões tomadas no triângulo OAB , quando o segmento $\overline{OB}$ corresponde ao raio da circunferência unitário, são mais simples quando comparadas com as demais razões e, as razões seno, cosseno e tangente são as mesmas independentemente da medida do raio.

Então, se o raio da circunferência for unitário, a tangente de α corresponde ao segmento tangente à circunferência limitado pelo eixo x e a semirreta $\overrightarrow{OB}$. Percebemos então, pelas razões de semelhança obtidas anteriormente, que as razões trigonométricas na circunferência não dependem da medida do raio. Assim é conveniente e adequado que se adote o raio igual a 1, pois simplifica os cálculos e se torna melhor compreensível, portanto, por estes motivos é que se adota a circunferência unitária para o estudo trigonométrico.

Considere agora a Figura 3.45 a seguir, que simplifica o que foi discutido anteriormente. Como foi mostrado anteriormente, se o raio da circunferência trigonométrica é 1, então o seno do ângulo central α no triângulo OAB é igual ao próprio cateto oposto e o cosseno é igual ao próprio cateto adjacente. Dessa forma, o comprimento do segmento AB equivale ao seno de α , o comprimento de OA ao cosseno de α e o comprimento do segmento CD corresponde à tangente de α . Por outro lado percebemos que o segmento OA é a projeção da hipotenusa OB sobre o eixo x , logo o $\cos(\alpha)$ está sobre o eixo x e

da mesma forma podemos reproduzir a projeção da hipotenusa sobre o eixo y afim de obtermos o $\text{sen}(\alpha)$ sobre o eixo y . Portanto, estando $\text{cos}(\alpha)$ sobre o eixo x e $\text{sen}(\alpha)$ sobre o eixo y , podemos chamar o horizontal de **eixos dos cossenos** e o eixo vertical de **eixo dos senos**, como consta na figura abaixo.

Figura 3.45: Visualização do seno e cosseno no ciclo trigonométrico



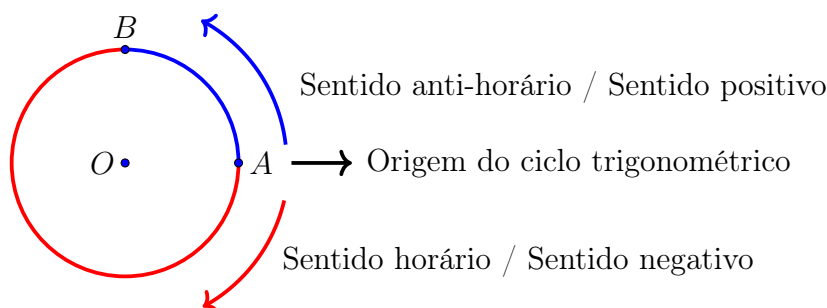
Fonte: Autoria própria (2025)

3.6.1 Orientação da circunferência trigonométrica

Na Figura 3.46 a seguir veja que há dois sentidos possíveis para o arco $\widehat{AB}$: O arco $\widehat{AB}$ em azul, feito no sentido anti-horário e o $\widehat{AB}$ em vermelho, feito no sentido horário.

Na circunferência trigonométrica adota-se o sentido anti-horário como orientação positiva para os arcos e o sentido horário como orientação negativa, como mostra a figura a seguir.

Figura 3.46: Orientação da circunferência trigonométrica

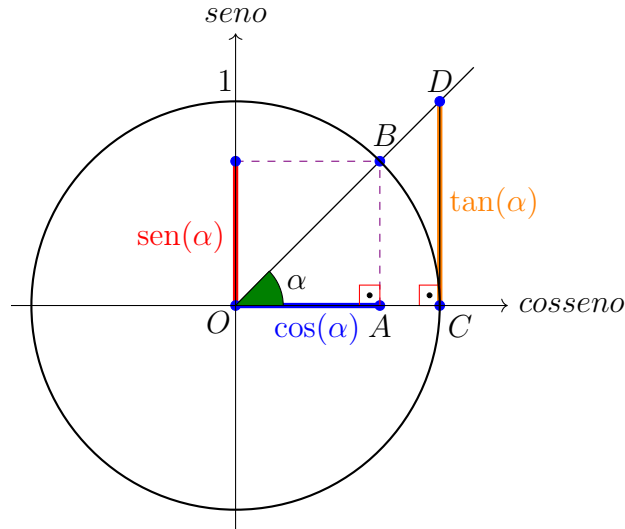


Fonte: Autoria própria (2025)

Carmo, Morgado, Wagner (1992) explicam que ao ser escolhido um sentido, diz-se que a circunferência está orientada e que os matemáticos têm preferência pela orientação no sentido anti-horário.

Considerando a Figura 3.47 (que simplifica a ilustração da Figura 3.45) podemos resumir que na circunferência trigonométrica, o $\cos(\alpha)$ corresponde à abscissa do ponto B e o $\sin(\alpha)$ corresponde à ordenada do ponto B .

Figura 3.47: Circunferência trigonométrica



Fonte: Autoria própria (2025)

Ainda na Figura 3.47 note que o triângulo OAB é retângulo em A , a hipotenusa é $\overline{OB} = 1$, e as medidas de AB e OA são respectivamente $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$, daí podemos aplicar o teorema de Pitágoras e obtemos facilmente a Relação Fundamental da Trigonometria, isto é:

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{OA})^2 = 1^2 \implies \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1. \quad (3.18)$$

Enfatizamos que a Relação Fundamental da Trigonometria é válida para qualquer que seja o ângulo α . Quando demonstramos este resultado na Subseção 3.3.2 estávamos limitados ao uso somente em ângulos agudos em um triângulo retângulo. Todavia, esta relação pode ser facilmente verificada tomando, por exemplo, o ângulo obtuso $\frac{5\pi}{6}$ na Figura 3.50, confira.

Usando a mesma circunferência da Figura 3.47 obtemos facilmente a outra relação, considerada fundamental por muitos autores em Matemática, a saber:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

No $\triangle OAB$ na Figura 3.47 o segmento AB é cateto oposto e OA é cateto adjacente ao ângulo α , daí teremos:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \implies \tan(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}}$$

Como já vimos anteriormente, as medidas de AB e OA são respectivamente $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$, daí segue que:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad (3.19)$$

como mostramos no final da Subseção 3.3.2.

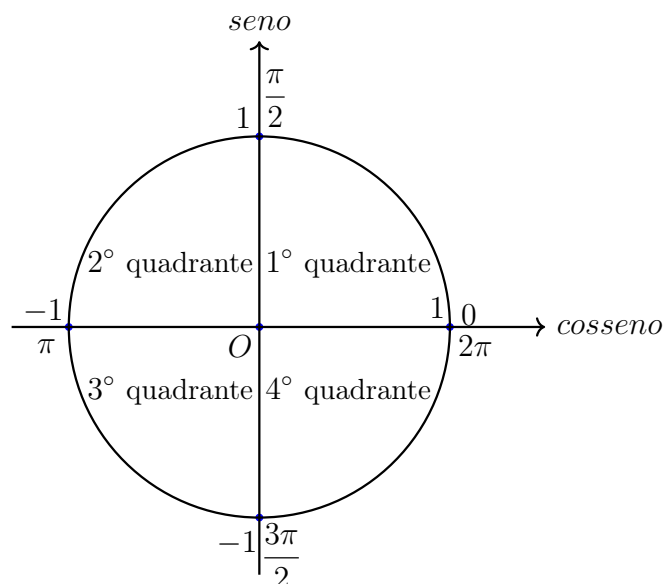
O ciclo trigonométrico nos ajuda a compreender e determinar os valores das razões trigonométricas de ângulos não notáveis. Antes disto, alguns comentários são importantes a respeito deste ciclo.

O ciclo trigonométrico é dividido em quatro partes e cada uma delas é chamada de quadrante. Dividindo o ciclo, que vale 2π rad, em quatro partes, cada uma delas corresponde a um arco de $\frac{\pi}{2}$ rad, $\left(\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\right)$. Assim:

- O arco de 0 a $\frac{\pi}{2}$ rad ou 0° a 90° é chamado de 1º quadrante;
- O arco de $\frac{\pi}{2}$ rad a π rad ou 90° a 180° é chamado de 2º quadrante;
- O arco de π rad a $\frac{3\pi}{2}$ rad ou 180° a 270° é chamado de 3º quadrante;
- O arco de $\frac{3\pi}{2}$ rad a 2π rad ou 270° a 360° é chamado de 4º quadrante.

Resumindo, teremos como resultado a figura abaixo.

Figura 3.48: Quadrantes do ciclo trigonométrico



Fonte: Autoria própria (2025)

Algumas observações devem ser feitas considerando o ciclo trigonométrico nesta Figura 3.48. Inicialmente note que π , corresponde à meia-volta sobre o ciclo, já 2π à volta completa. Se tivermos, por exemplo, 3π e 4π , teremos uma volta e meia sobre o ciclo e duas voltas completas, respectivamente. Isto significa que 3π coincide com o arco π , e já 4π coincide com 2π . Dessa maneira tem-se que as razões trigonométricas do arco 3π são as mesmas do arco π ; o mesmo valendo para 4π e 2π .

Devemos compreender que quando é colocado π rad, ou simplesmente π , estamos dizendo que o arco $\widehat{0\pi}$, pelo sentido anti-horário, tem comprimento igual a π ; o mesmo vale para qualquer outro ponto sobre a circunferência trigonométrica.

Na circunferência trigonométrica, sendo o cosseno e o seno de um arco a abscissa e ordenada do ponto sobre ela, respectivamente, esta, por sua vez, facilita a identificação do sinal e dos valores das razões trigonométricas em cada quadrante.

Consideremos, por exemplo, os arcos de comprimento $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π , que estão, respectivamente, sobre os pontos $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ e $(1, 0)$. Então o cosseno e o seno de cada um destes arcos são, nesta ordem, a abscissa e a ordenada do seu respectivo ponto. A Tabela (3.5) a seguir apresenta estes valores.

Tabela 3.5: Cosseno e seno dos arcos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π

Arco	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Cosseno	1	0	-1	0	1
seno	0	1	0	-1	0

Fonte: Autoria própria (2025)

3.6.2 Extensão do cosseno e seno para ângulos não agudos

A circunferência trigonométrica também é útil para a definição e extensão das razões trigonométricas para ângulos quaisquer, que serão fundamentais na aplicação entre triângulos acutângulos e obtusângulos.

Para qualquer que seja o ângulo α pertencente ao primeiro quadrante do ciclo trigonométrico, valem as seguintes definições:

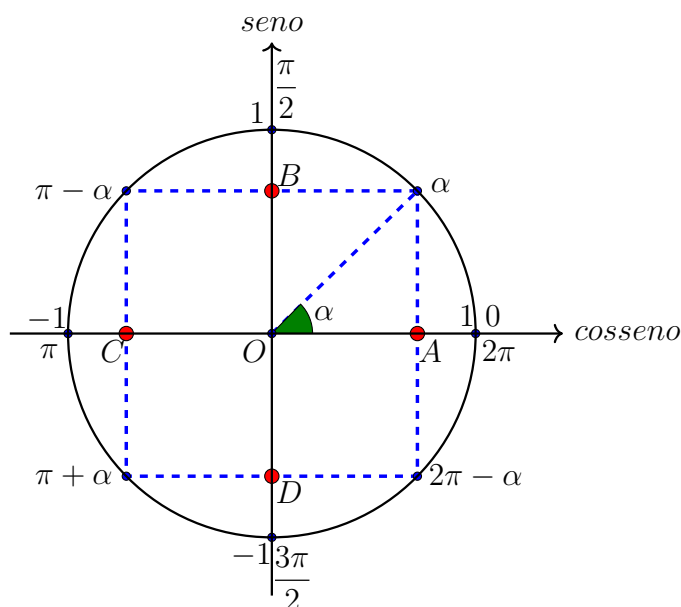
Definições para seno e cosseno de ângulos não agudos

$\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}(\alpha)$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$

Estas definições podem ser facilmente verificadas utilizando as fórmulas de adição e subtração de arcos vistas na Seção 3.4. Entretanto, para fazermos isso, utilizaremos o ciclo trigonométrico.

Note que o arco $\pi - \alpha$ pertence ao 2º quadrante, $\pi + \alpha$ ao 3º quadrante e o arco $2\pi - \alpha$ pertence ao 4º quadrante, como mostra a Figura 3.49 a seguir.

Figura 3.49: Cosseno e seno de um ângulo qualquer



Fonte: Autoria própria (2025)

Na Figura 3.49 basta notar que o segmento OA tem o mesmo comprimento de OC e OB tem o mesmo comprimento de OD , porém perceba que OC e OD estão no sentido negativo do sistema de coordenadas, isto é $OA = -OC$ e $OB = -OD$.

Como $\text{sen}(\alpha) = \overline{OB}$ e $\text{sen}(\pi - \alpha) = \overline{OB}$, então $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$.

E ainda, sendo $\cos(\alpha) = \overline{OA}$ e $\cos(\pi - \alpha) = -\overline{OC}$, então temos que $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Verificamos de forma análoga as demais definições dadas anteriormente.

Os alunos poderão perceber que poderíamos definir também as razões para o arco $2\pi + \alpha$ (neste caso retornaríamos para o arco α). Entretanto, não faz sentido trabalharmos com arcos com medidas maiores do que 2π . O professor poderá expor que existe por exemplo o cosseno, seno e a tangente do arco $\frac{9\pi}{4} = 405^\circ$, porém, não há nenhuma utilidade prática para este arco e sendo desnecessário o cálculo de suas razões. Na verdade, o foco deve estar no arco de 0 a π , visto que neste intervalo temos os possíveis ângulos de um triângulo e onde se tem mais aplicações práticas da Trigonometria, como vimos nos triângulos retângulos e veremos em triângulos obtusângulos.

Neste ponto é provável que muitos alunos do Ensino Médio demonstrem dificuldades em assimilarem estas definições. Devemos lembrar que estas definições, tomadas com o auxílio do ciclo trigonométrico, serão fundamentais para a aplicação no triângulo obtuso. Mais precisamente, nas leis dos Senos e dos Cossenos. Portanto, não seria produtivo usar nosso tempo com muitos exemplos. Sugerimos a seguir um exemplo de aplicação das definições.

Exemplo 3.16. *Verifique que as definições dadas para o cosseno e seno de ângulos não agudos são válidas, tomando o ângulo $\alpha = \frac{\pi}{6}$.*

Solução. Tomando o arco $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad, então:

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \quad \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \quad \text{e} \quad 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

Ressaltamos que o professor poderá fazer um paralelo com estes arcos em graus, no qual os alunos se sentem mais seguros na compreensão, enfatizando também que ângulos encontrados são múltiplos de 30° e afirmando que qualquer ângulo múltiplo de um ângulos notável terão os mesmos valores de cosseno, seno e tangente, variando apenas o sinal dependendo de qual quadrante pertença este ângulo.

Usando as coordenadas do ponto marcado por $\frac{\pi}{6}$, vamos verificar que:

$$\begin{array}{l|l} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{array}$$

Sendo $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, (Veja na Tabela (3.1)), temos que as coordenadas dos pontos marcados por $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ são, respectivamente, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Daí, teremos que:

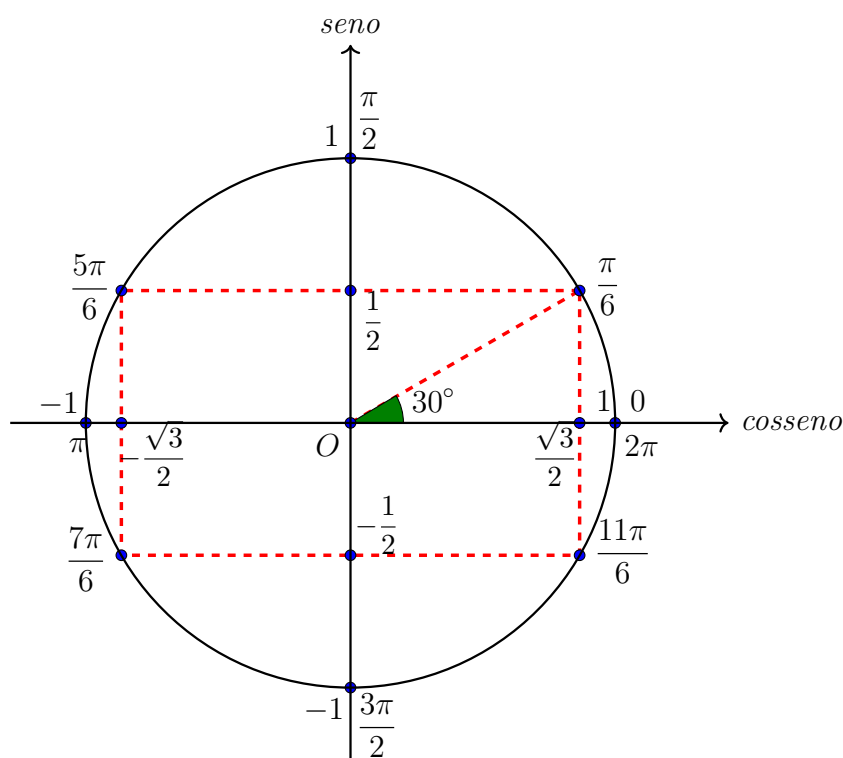
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \text{ com } \frac{\pi}{6} \text{ pertencente ao primeiro quadrante;}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \text{ com } \frac{5\pi}{6} \text{ pertencente ao segundo quadrante;}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \text{ com } \frac{7\pi}{6} \text{ pertencente ao terceiro quadrante;}$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \text{ com } \frac{11\pi}{6} \text{ pertencente ao quarto quadrante;}$$

Figura 3.50: Cosseno e seno de ângulos cômruos com $\frac{\pi}{6}$



Fonte: Autoria própria (2025)

Em acordo com a definições dadas anteriormente. □

Note que o cosseno e seno dos arcos de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ são iguais, variando apenas o sinal, aos valores do arco $\frac{\pi}{6}$ e, por esta razão, estes arcos são chamados de **arcos cômruos**. Este exemplo é suficiente também para analisarmos e identificarmos o sinal do cosseno e seno em cada quadrante. Pelos valores obtidos acima, temos que no primeiro quadrante cosseno e seno são ambos positivos; no segundo, temos cosseno negativo e seno positivo; no terceiro quadrante, ambos são negativos; e no quarto quadrante verificamos

que cosseno é positivo e seno negativo. Essa identificação do sinal será útil para o estudo e construção dos gráficos das funções trigonométricas. É importante que o professor, neste momento, não sufoque a turma com muitos exemplos de arcos cômruos, e identificação do cosseno e seno destes arcos, para que não haja repetições desnecessárias, pois o exemplo explorado anteriormente é suficiente para o desenvolvimento da aprendizagem acerca do tema. Sugerimos que o professor passe um exemplo como desafio à turma, tomando, por exemplo, o arco $\frac{\pi}{4}$.

3.6.3 Extensão da tangente para ângulos não agudos

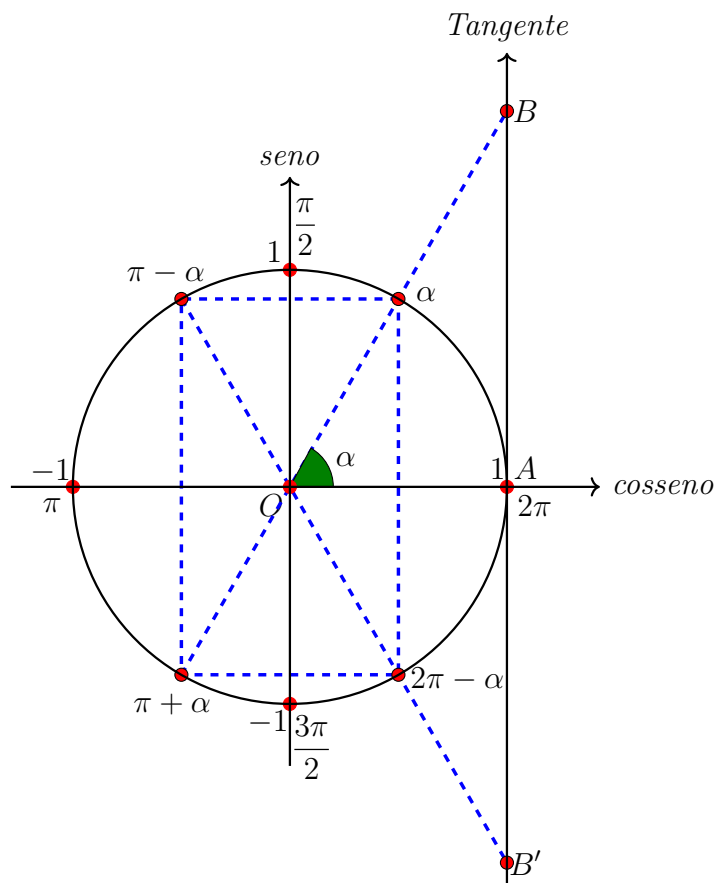
Para todo α pertencente ao intervalo de 0 a $\frac{\pi}{2}$, valem as seguintes definições:

Definições para a tangente de ângulos não agudos

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha) \quad \tan(2\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$$

Pela figura a seguir podemos compreender estas definições.

Figura 3.51: Tangente de um ângulo qualquer



Fonte: Autoria própria (2025)

Na figura, note que a semirreta que tem origem no ponto marcado por $\pi + \alpha$ e passa pelo ponto marcado por α , determina, na reta tangente, o segmento AB , assim:

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha) = \overline{AB}.$$

Da mesma forma, veja que a semirreta que tem origem no ponto marcado por $\pi - \alpha$ e passa por $2\pi - \alpha$ determina, na reta tangente, o segmento AB' que tem o mesmo comprimento do segmento AB , porém no sentido negativo em relação ao eixo dos senos, assim, temos que:

$$\tan(\pi - \alpha) = \tan(2\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) = -\overline{AB}.$$

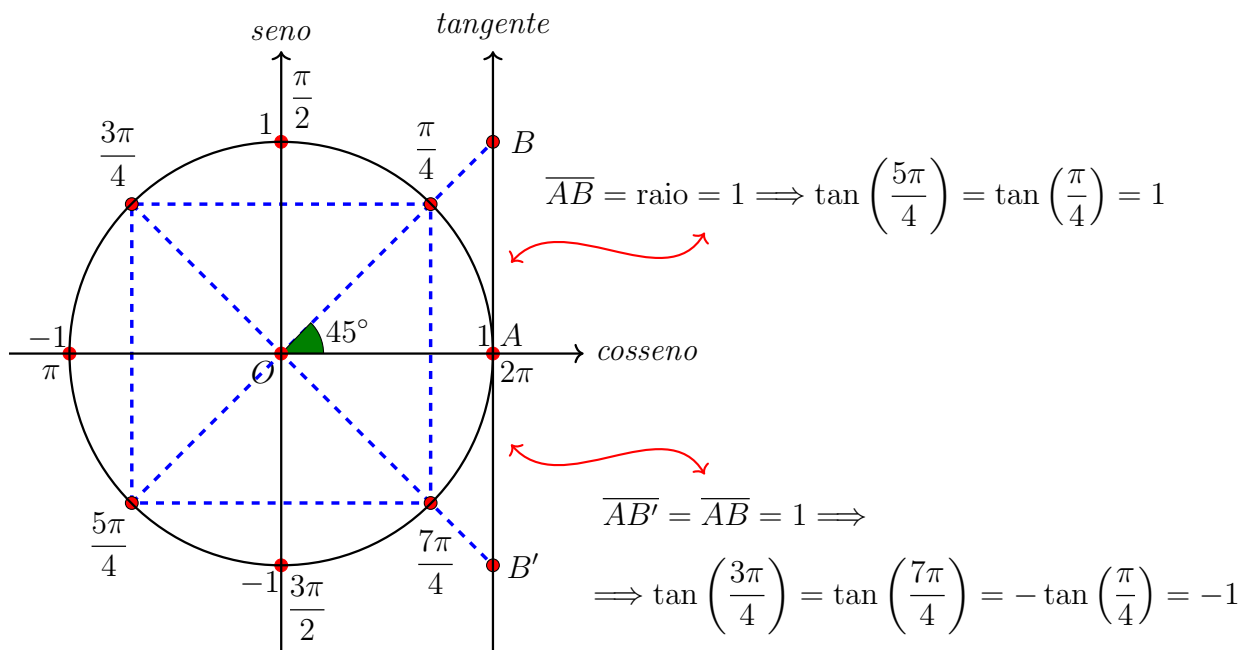
Exemplo 3.17. Verifique que as definições dadas para a tangente de ângulos não agudos são válidas, tomando o ângulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Solução. Tomando o arco $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad, então:

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \text{ e } 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Marcando estes arcos no ciclo trigonométrico, obteremos a Figura 3.52 a seguir.

Figura 3.52: Tangente dos arcos cômugros com $\frac{\pi}{4}$



Fonte: Autoria própria (2025)

Na ilustração, note que a semirreta que tem origem no ponto marcado por $\frac{5\pi}{4}$ e passa pelo ponto marcado por $\frac{\pi}{4}$, determina, na reta tangente, o segmento AB que tem

comprimento igual ao raio da circunferência. O segmento AB , como já vimos, representa a tangente destes dois arcos, isto é:

$$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \overline{AB} = 1.$$

Da mesma forma, veja que a semirreta que tem origem no ponto marcado por $\frac{3\pi}{4}$ e passa por $\frac{7\pi}{4}$ determina, na reta tangente, o segmento AB' que tem o mesmo comprimento do segmento AB , porém no sentido negativo em relação ao eixo dos senos, assim, temos que:

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\overline{AB} = -1.$$

Conforme as definições dadas anteriormente. □

Com as definições de cosseno, seno e tangente para ângulos não agudos e fazendo o processo análogo ao Exemplo 3.16 e ao Exemplo 3.17, obtemos a tabela abaixo.

Considerando ainda o Exemplo 3.17, note que quanto mais o arco se aproxima de $\frac{\pi}{2}$, maior será a tangente desse arco. Entretanto, quando este arco coincidir com $\frac{\pi}{2}$ a tangente neste arco não está definida. Geometricamente, a semirreta com origem em O e que passa por $\frac{\pi}{2}$ não toca a reta tangente, pois serão paralelas. Algebricamente, teríamos

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{0} = \# \text{ (Não existe)}$$

De forma geral, não está definida a tangente de um arco múltiplo de $\frac{\pi}{2}$. Por exemplo, não está definida a tangente do arco $\frac{3\pi}{2}$, verifique.

Tabela 3.6: Valores de seno, cosseno e tangente dos principais arcos de 0 a 2π

Ângulos	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	1	0	indefinido
$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi = 180^\circ$	0	-1	0
$\frac{7\pi}{6} = 210^\circ$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{4} = 225^\circ$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$	-1	0	indefinido
$\frac{5\pi}{3} = 300^\circ$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4} = 315^\circ$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{11\pi}{6} = 330^\circ$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$2\pi = 360^\circ$	0	1	0

Fonte: Autoria própria (2025)

Observando os valores da tabela, notamos que o maior valor possível para o seno e cosseno de um ângulo é 1 e o menor valor possível para o seno e cosseno de um ângulo é -1 . Esta observação será útil em problemas envolvendo, principalmente, gráficos das funções seno e cosseno, como veremos no próximo capítulo na Seção 4.4.

3.7 A trigonometria em um triângulo qualquer

Na Seção 3.3, vimos a Trigonometria no triângulo retângulo. Nesta seção, veremos a Trigonometria em triângulos acutângulos (triângulo em que todos os ângulos internos são agudos) e obtusângulos (triângulo que possui um ângulo obtuso). Mais especificamente, na Trigonometria em triângulos quaisquer, abordaremos a lei dos senos e a lei dos cossenos, conforme segue a seguir.

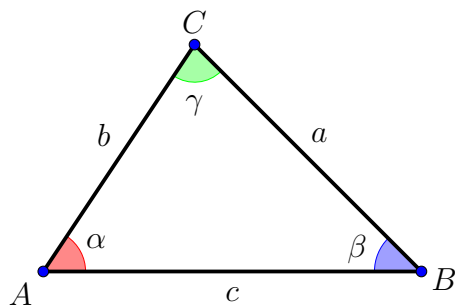
3.7.1 Lei dos cossenos

O seguinte resultado estabelece relações métricas entre os lados e os ângulos de um triângulo. Mais precisamente, temos:

Proposição 3.20. *Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o dobro do produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo formado por esses lados:*

Considerando esta proposição e a ilustração a seguir, a lei dos cossenos nos diz que:

Figura 3.53: Ilustração da Lei dos cossenos



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

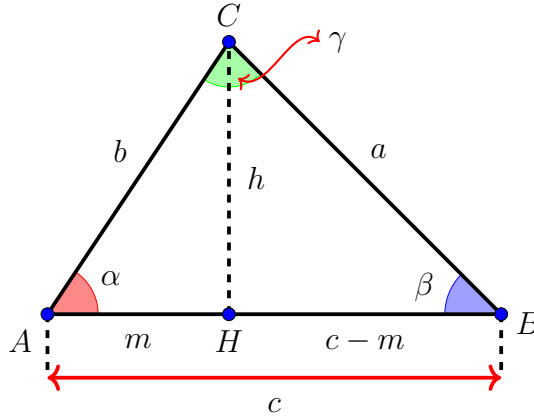
Fonte: Autoria própria (2025)

Para a demonstração desse resultado, vamos considerar dois casos: Primeiro, quando o triângulo ABC é acutângulo; e o segundo, quando é obtusângulo, pois a lei vale para qualquer triângulo.

Demonstração. (Primeiro caso)

Considere o triângulo acutângulo $\triangle ABC$ com os vértices A , B , C e os lados a , b e c opostos aos vértices correspondentes. Traçamos altura h que parte do vértice C e encontra o lado AB em H e fazamos $\overline{AH} = m$ e $\overline{BH} = c - m$, conforme ilustração abaixo.

Figura 3.54: Uma demonstração para a lei dos cossenos no triângulo acutângulo



Fonte: Autoria própria (2025)

A partir do Teorema de Pitágoras no triângulo ACH , temos:

$$b^2 = m^2 + h^2.$$

Novamente aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCH , temos:

$$a^2 = (c - m)^2 + h^2.$$

Desenvolvendo o produto notável $(c - m)^2$, ficaremos com:

$$a^2 = c^2 - 2cm + m^2 + h^2.$$

Da primeira equação $b^2 = m^2 + h^2$, temos $m^2 = b^2 - h^2$, substituindo esta expressão na anterior:

$$a^2 = c^2 - 2cm + b^2 - h^2 + h^2.$$

Assim,

$$a^2 = c^2 - 2cm + b^2.$$

Para encontrar m , usamos a relação trigonométrica $\cos(\alpha)$ no triângulo ACH , ou seja: $\cos(\alpha) = \frac{m}{b}$, o que implica $m = b \cdot \cos(\alpha)$. Substituindo m na expressão anterior ficamos com:

$$a^2 = c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos(\alpha) + b^2.$$

Portanto, organizando os termos, fica demonstrada a Lei dos Cossenos:

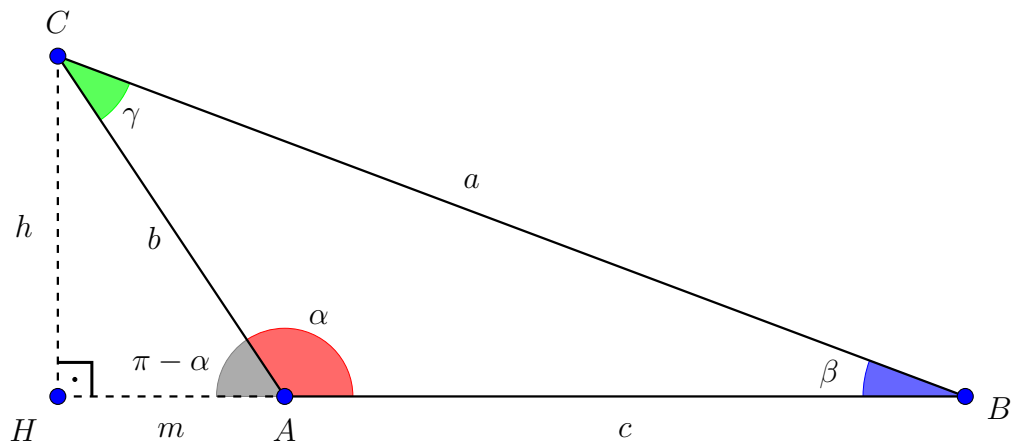
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha). \quad (3.20)$$

Se quisermos mostrar que $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$, basta que na Figura 3.58 façamos $\overline{BH} = m$ e, conseqüentemente, $\overline{AH} = c - m$. Para mostrar que vale $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$ devemos tomar a altura h que parte do vértice A e encontra o lado BC no ponto H e façamos $\overline{CH} = m$ e $\overline{BH} = a - m$, verifique. $\square$

Demonstração. (Segundo caso)

Considere o triângulo obtuso ABC , onde $\widehat{BAC} = \alpha > 90^\circ$, com os lados a , b e c opostos aos vértices A , B e C , respectivamente. Traçamos a altura h a partir do vértice C perpendicular ao prolongamento do lado AB , com o pé da altura denotado por H . Façamos $\overline{AH} = m$, conforme está ilustrado abaixo.

Figura 3.55: Uma demonstração para a lei dos cossenos no triângulo obtusângulo



Fonte: Autoria própria (2025)

No triângulo BCH , pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$a^2 = (c + m)^2 + h^2.$$

Ou, desenvolvendo o produto notável $(c + m)^2$.

$$a^2 = c^2 + 2cm + m^2 + h^2.$$

Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras no $\triangle AHC$, teremos:

$$b^2 = h^2 + m^2 \implies m^2 = b^2 - h^2.$$

Substituindo $m^2 = b^2 - h^2$ em $a^2 = c^2 + 2cm + m^2 + h^2$, ficaremos com:

$$a^2 = c^2 + 2cm + b^2 - \cancel{h^2} + \cancel{h^2}.$$

Daí,

$$a^2 = c^2 + 2cm + b^2.$$

Para o valor de m , considere o $\triangle AHC$, nele tem-se que $\cos(\pi - \alpha) = \frac{m}{b}$, o que implica em $m = b \cdot \cos(\pi - \alpha)$, substituindo m na expressão anterior, segue que:

$$a^2 = c^2 + 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos(\pi - \alpha) + b^2.$$

Por outro lado, na Subseção 3.6.2 definimos que $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$, logo ficamos com:

$$a^2 = c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot [-\cos(\alpha)] + b^2.$$

Organizando os termos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha). \quad (3.21)$$

□

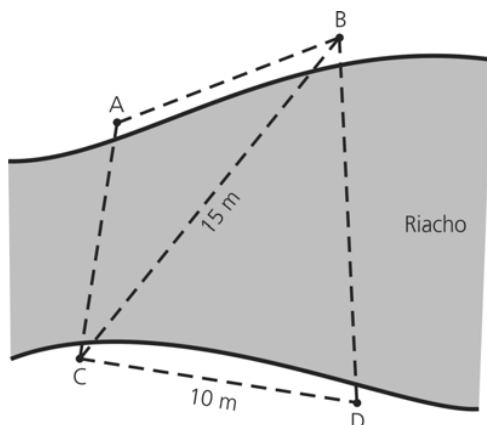
Se o triângulo ABC é retângulo em α , $\alpha = 90^\circ$, não há o que demonstrar, pois neste caso a Lei dos Cosseno é o próprio Teorema de Pitágoras, dado que $\cos(90^\circ) = 0$. Verifique. □

De forma geral, a Lei dos Cossenos nos diz que, se conhecermos as medidas de dois lados de um triângulo e o ângulo formado entre eles, então o terceiro lado pode ser determinado.

Exemplo 3.18. UNICAMP - 2012 - Adaptada

Um topógrafo (Um topógrafo é o profissional capaz de realizar medição de ângulos, horizontais ou verticais, objetivando a determinação dos ângulos internos ou externos de uma poligonal, além da posição de determinados detalhes necessários ao levantamento) deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura a seguir. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos especificados na tabela abaixo, obtidos com a ajuda de um teodolito (teodolito é o equipamento de medição de alta precisão utilizado pelo topógrafo).

Figura 3.56: Exemplo de aplicação da Lei dos Cossenos



Visada	Ângulo
$\widehat{ACB}$	$\frac{\pi}{6}$
$\widehat{BCD}$	$\frac{\pi}{3}$
$\widehat{ABC}$	$\frac{\pi}{6}$

Fonte: UNICAMP (2012)

Com os dados fornecidos na figura e na tabela, calcule as medidas AC e BD .

Solução. No triângulo BCD , temos dois lados de medidas conhecidas a saber $\overline{BC} = 15m$ e $\overline{CD} = 10m$ e o ângulo entre eles $\widehat{BCD} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, logo podemos aplicar a Lei dos Cosseno neste triângulo e calcularmos a medida BD , ou seja:

$$(\overline{BD})^2 = (\overline{BC})^2 + (\overline{CD})^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Substituindo os valores, teremos:

$$(\overline{BD})^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Desenvolvendo os termos e sendo $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, vem:

$$(\overline{BD})^2 = 225 + 100 - 300 \cdot \frac{1}{2}.$$

$$(\overline{BD})^2 = 325 - 150.$$

$$(\overline{BD})^2 = 175.$$

Portanto

$$\overline{BD} = \sqrt{175} \implies \overline{BD} = 5\sqrt{7}m.$$

Para calcularmos a medida AC , note que o triângulo ABC é isósceles de base BC , pois temos $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, assim os segmentos AB e AC possuem a mesma medida, ou seja $\overline{AB} = \overline{AC}$, assim aplicando novamente a Lei dos Cossenos, teremos:

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 - 2 \cdot (\overline{AB}) \cdot (\overline{BC}) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Sendo $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, teremos:

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AC})^2 + 15^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$15\sqrt{3} \cdot \overline{AC} = 225 \Rightarrow \overline{AC} = \frac{225}{15\sqrt{3}}.$$

Portanto, $\overline{AC} = 5\sqrt{3}m$.

□

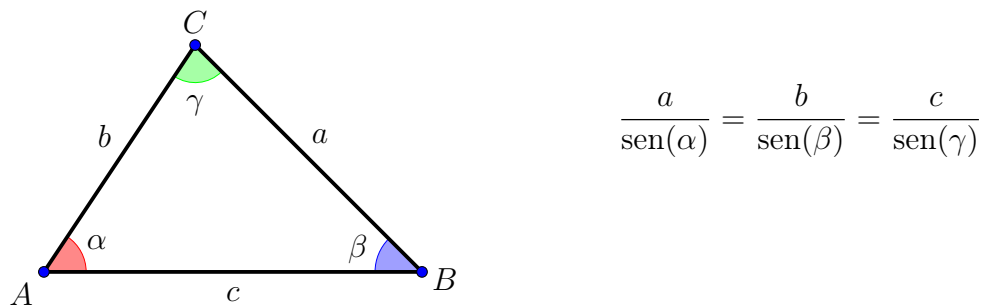
3.7.2 Lei dos senos

Nesta subseção iremos tratar de uma segunda reação entre os lados e os ângulos de um triângulo; conhecida como:

Proposição 3.21 (Lei dos senos). *Em qualquer triângulo, as medidas de seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles.*

Considerando esta definição e a ilustração a seguir, a lei dos senos nos diz que:

Figura 3.57: Ilustração da Lei dos senos



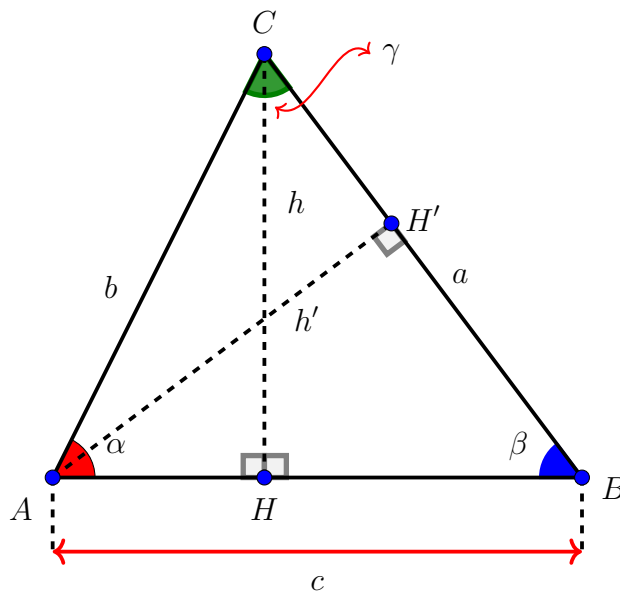
Fonte: Autoria própria (2025)

Pela definição, a lei dos senos vale para qualquer triângulo, assim apresentaremos a prova para os casos em que o triângulo seja acutângulo e obtusângulo.

Demonstração. ABC sendo acutângulo

Para tanto considere o triângulo acutângulo abaixo, onde h e h' são as medidas das alturas relativas aos lados AB e BC , respectivamente.

Figura 3.58: Uma demonstração para a lei dos senos no triângulo acutângulo



Fonte: Autoria própria (2025)

No triângulo ACH tem-se que:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{b} \implies h = b \cdot \text{sen}(\alpha). \quad (\text{I})$$

No triângulo BCH :

$$\text{sen}(\beta) = \frac{h}{a} \implies h = a \cdot \text{sen}(\beta). \quad (\text{II})$$

Substituindo a expressão (I) em (II) obtemos:

$$b \cdot \text{sen}(\alpha) = a \cdot \text{sen}(\beta) \implies \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{a}{\text{sen}(\alpha)}.$$

Por outro lado, considerando o triângulo $AH'C$, temos que:

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{h'}{b} \implies h' = b \cdot \text{sen}(\gamma). \quad (\text{III})$$

Agora no triângulo ABH' , temos:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{h'}{c} \implies h' = c \cdot \text{sen}(\beta). \quad (\text{IV})$$

Substituindo a expressão (III) em (IV) obtemos:

$$b \cdot \text{sen}(\gamma) = c \cdot \text{sen}(\beta) \implies \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}.$$

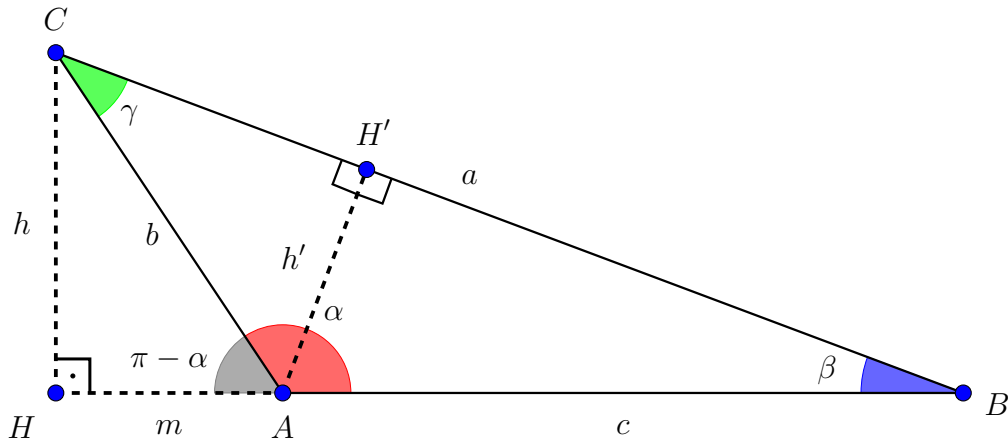
Como $\frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{a}{\text{sen}(\alpha)}$ e $\frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}$, então por transitividade, $\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}$, ou ainda podemos escrever que:

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}. \quad (3.22)$$

Portanto, fica demonstrada a Lei dos senos no triângulo acutângulo. $\square$

Demonstração. ABC sendo obtusângulo

Figura 3.59: Uma demonstração para a lei dos senos no triângulo obtusângulo



Fonte: Autoria própria (2025)

Considerando o triângulo $AH'C$ tem-se que:

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{h'}{b} \implies h' = b \cdot \text{sen}(\gamma). \quad (\text{I})$$

No triângulo ABH' :

$$\text{sen}(\beta) = \frac{h'}{c} \implies h' = c \cdot \text{sen}(\beta). \quad (\text{II})$$

Substituindo a expressão (I) em (II) obtemos:

$$b \cdot \text{sen}(\gamma) = c \cdot \text{sen}(\beta) \implies \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}.$$

Por outro lado, considerando o triângulo AHC , temos que:

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \frac{h}{b} \implies h = b \cdot \operatorname{sen}(\pi - \alpha).$$

Sendo $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$, ficamos com:

$$h = b \cdot \operatorname{sen}(\alpha). \quad (\text{III})$$

Agora no triângulo BHC , temos:

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{h}{a} \implies h = a \cdot \operatorname{sen}(\beta). \quad (\text{IV})$$

Substituindo a expressão (III) em (IV) obtemos:

$$b \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = a \cdot \operatorname{sen}(\beta) \implies \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)}.$$

Como $\frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)}$ e $\frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$, então por transitividade, $\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$, ou ainda podemos escrever que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}. \quad (3.23)$$

Assim, fica demonstrada a Lei dos senos no triângulo obtuso. $\square$

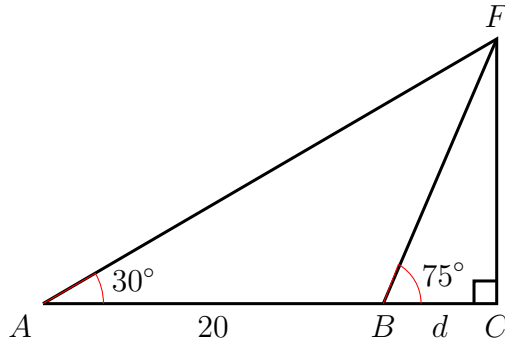
Se o triângulo for retângulo, a lei dos senos se reduz à própria definição de seno como a razão entre o cateto oposto pela hipotenusa, logo não há o que demonstrar e a lei dos senos neste caso não tem sentido prático, verifique.

Exemplo 3.19. *Portal da OBMEP*

Um navio, deslocando-se em linha reta, visa um farol e obtém a leitura de 30° para o ângulo formado entre a sua trajetória e a linha de visada do farol. Após navegar 20 milhas, através de uma nova visada ao farol, obtém a leitura de 75° . Determine a distância entre o farol e o navio no instante em que fez a segunda leitura. Use $\sqrt{2} \approx 1.4$.

Para tanto, considere a ilustração abaixo:

Figura 3.60: Exemplo de aplicação da Lei dos Senos



Fonte: Autoria própria (2025)

Solução. Sejam A o ponto em que o navio se encontra no primeiro momento, B o ponto do segundo momento, C um ponto qualquer que representa a base do farol e F o ponto que representa o topo do farol. Da interpretação do enunciado concluímos que $\widehat{FAB} = 30^\circ$, $\overline{AB} = 20$ milhas, $\widehat{FBC} = 75^\circ$ e $\overline{BF} = d$ milhas. Podemos concluir que $\widehat{BFA} = 45^\circ$ e, pela Lei dos Senos, ficaremos com:

$$\frac{d}{\sin(30^\circ)} = \frac{20}{\sin(45^\circ)} \implies d = \sin(30^\circ) \cdot \frac{20}{\sin(45^\circ)}.$$

Sendo $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ e $\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, teremos que

$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$d = 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \implies \frac{20}{\sqrt{2}}.$$

$$d = \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \implies d = \frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2} \implies d = 10 \cdot \sqrt{2}.$$

$$d \approx 10 \cdot 1.4 \implies d \approx 14.$$

Portanto, a distância entre o navio e o farol na segunda medida é 14 milhas.

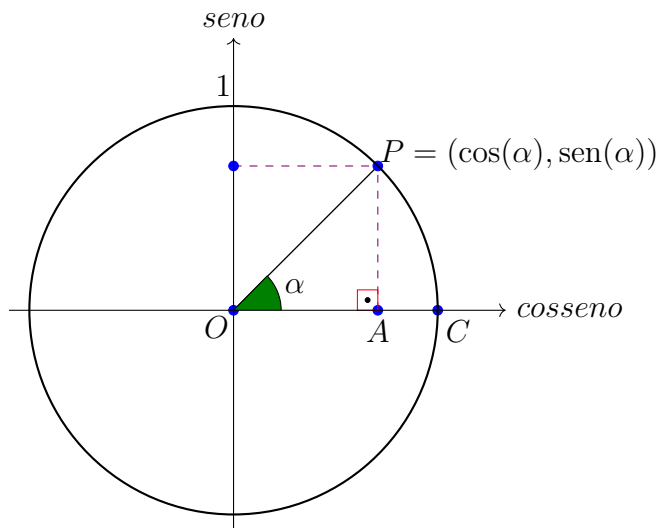
□

3.8 Funções trigonométricas

Como visto na Ilustração 3.47, cosseno de um ponto sobre a circunferência é numericamente igual à abscissa deste ponto e o seno deste é igual à sua ordenada. Assim, se

um ponto P está sobre a circunferência, determinando um arco correspondente ao ângulo central α , então seu par ordenado será $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Veja na ilustração a seguir.

Figura 3.61: Cosseno e seno como coordenadas cartesianas



Fonte: Autoria própria (2025)

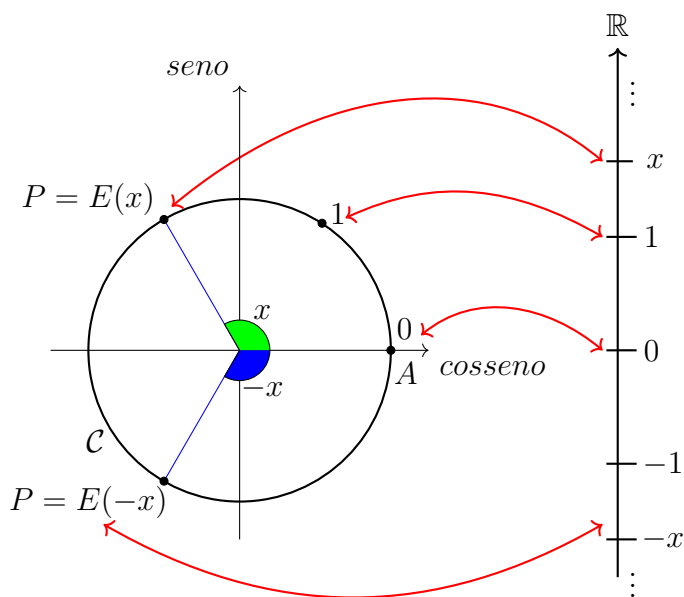
3.8.1 A função de Euler

Nas seções anteriores já definimos seno, cosseno e tangente de números reais no intervalo de $[0, 2\pi]$, isto é, apenas para valores positivos. O próximo passo é tentar estender estas funções para qualquer número real. Para isto considere a definição da função a seguir, chamada de função de Euler (em homenagem ao matemático e físico suíço Leonhard Paul Euler).

Definição 3.22. Chama-se função de Euler a função $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}$; que associa a cada número real x em um único ponto $P = E(x)$ localizado sobre uma circunferência $\mathcal{C}$.

Pela definição, a função de Euler atua da seguinte forma: Fixada a origem A na circunferência $\mathcal{C}$, e dado um número real x , percorremos sobre $\mathcal{C}$ no sentido positivo se $x > 0$ e no sentido negativo se $x < 0$, um comprimento igual a x ; assim, por definição, $E(x)$ é o ponto de $\mathcal{C}$ assim atingido pelo número real x . Segue a ilustração a seguir.

Figura 3.62: Função de Euler



Fonte: Autoria própria (2025)

Na figura, fixando o número real 0 na origem da circunferência, teremos que o arco com extremidades na origem A e no ponto 1, tem comprimento numericamente igual a 1 e o arco com extremidades na origem A e no ponto P , tem comprimento igual a x . O mesmo pode ser para os números negativos da reta numérica; assim, qualquer número x poderá ser associado a um único ponto $E(x)$ sobre $\mathcal{C}$. Para compreendermos de forma mais simples como atua a função de Euler, imagine que a reta numérica seja “encostada” em $\mathcal{C}$ coincidindo o número 0 com a origem A , a partir daí, imagine que a reta numérica seja “enrolada” sobre a circunferência, tanto pelo sentido anti-horário quanto pelo sentido horário, correspondendo cada número real da reta a um ponto único sobre $\mathcal{C}$ ⁵. Assim, cada número real está associado a um ponto da circunferência e logo este número real terá um valor para seno, cosseno e tangente.

Como o comprimento do arco $\widehat{AP}$ tem comprimento igual a x , então a medida do ângulo correspondente é x , isto em radianos. Como visto anteriormente, as coordenadas do ponto será $P = (\cos(x), \sin(x))$. Segundo Oliveira (2014, p. 34) “Com Euler a Trigonometria do triângulo retângulo evoluiu para funções aplicadas a um número. Por exemplo, a função seno deixou de ser uma grandeza e passou a ser um número obtido pela ordenada de um ponto de um círculo unitário.”

⁵Para maior entendimento dos alunos, sugerimos ao professor a animação feita no Geogebra disponível em <<https://www.geogebra.org/classic/dq4p6yw8>> exemplificando a reta numérica “enrolando-se” na circunferência e mostrando que a todo número real tem-se um ponto sobre a reta associado a ele

3.8.2 A função seno

Semelhante à função de Euler que tem como domínio qualquer $x \in \mathbb{R}$, consideraremos como imagem a projeção no eixo dos senos (eixo vertical):

Definição 3.23. A função seno é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $\text{sen}(x)$, ou seja, $f(x) = \text{sen}(x)$.

Para construirmos o gráfico da função $\text{sen}(x)$, podemos simplesmente marcar os pares ordenados da tabela abaixo no plano cartesiano.

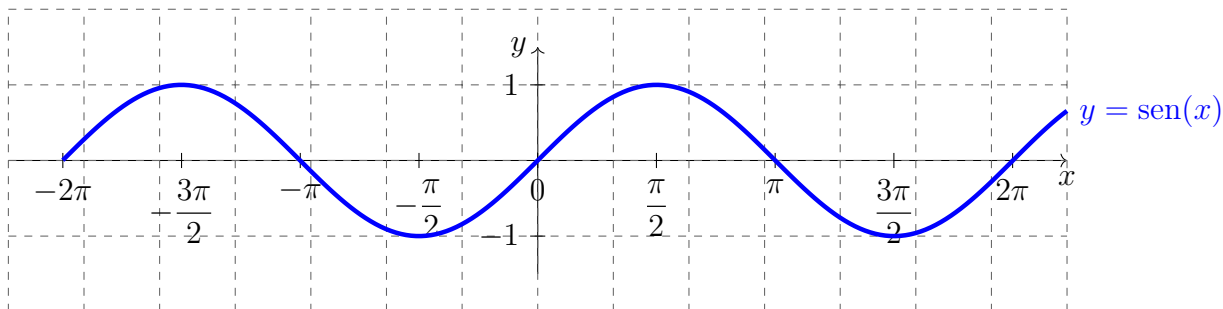
Tabela 3.7: Pares ordenados para construção da função $\text{sen}(x)$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \text{sen}(x)$	0	1	0	-1	0

Fonte: Autoria própria (2025)

Fazendo a marcação dos pares ordenados da Tabela (3.8) no plano cartesiano, obtemos o gráfico abaixo.

Figura 3.63: Gráfico da função $\text{sen}(x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$



Fonte: Autoria própria (2025)

Pelo gráfico note que no intervalo de 0 a $\frac{\pi}{2}$, a função $\text{sen}(x)$ cresce de 0 para 1, no intervalo de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$, a função $\text{sen}(x)$ decresce de 1 para -1, e finalmente no intervalo de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π , a função $\text{sen}(x)$ cresce de -1 a 0. Agora observe que a partir de 2π a função $\text{sen}(x)$ volta a crescer de 0 a 1 repetindo este ciclo. Funções com este comportamento, damos o nome de **funções periódicas** e o ponto a partir do qual se começa a repetição é chamado de período da função, logo o período da função $y = \text{sen}(x)$ é $P = 2\pi$.

3.8.3 A função cosseno

Semelhante à função $\text{sen}(x)$, constrói-se a função cosseno de x ao considerar a projeção sobre o eixo dos cossenos (eixo horizontal):.

Definição 3.24. A função cosseno é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $\cos(x)$, ou seja, $f(x) = \cos(x)$.

Semelhante ao gráfico da função seno, marcaremos os pares ordenados da tabela abaixo no plano cartesiano.

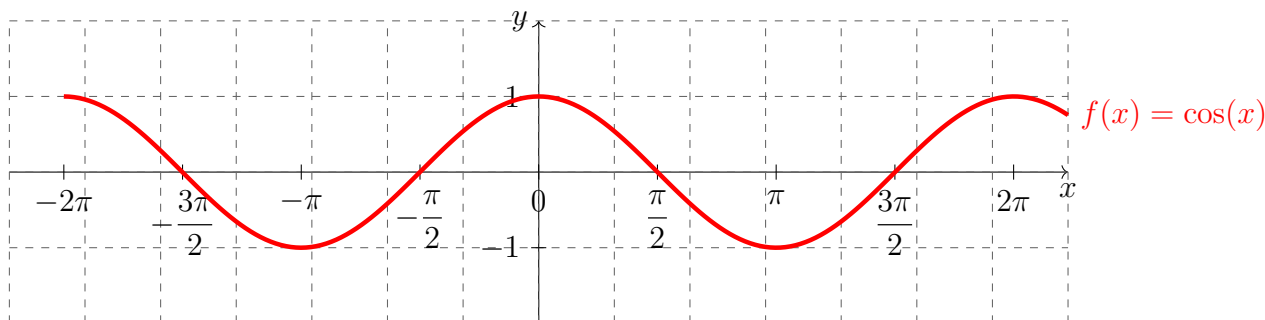
Tabela 3.8: Pares ordenados para construção da função $\cos(x)$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos(x)$	1	0	-1	0	1

Fonte: Autoria própria (2025)

Assim, construímos o gráfico da função cosseno conforme a seguir.

Figura 3.64: Gráfico da função $\cos(x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$



Fonte: Autoria própria (2025)

Considerando os gráficos ⁶ das funções seno e cosseno observamos que ambas assumem valor máximo igual a 1 e valor mínimo igual a -1, ou seja, $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$ e $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Este fato, será de grande importância em problemas envolvendo gráficos das funções seno e cosseno.

⁶Sugerimos a construção das funções seno e cosseno em animação no Geogebra disponível em <<https://www.geogebra.org/classic/cpxmk8wy>>

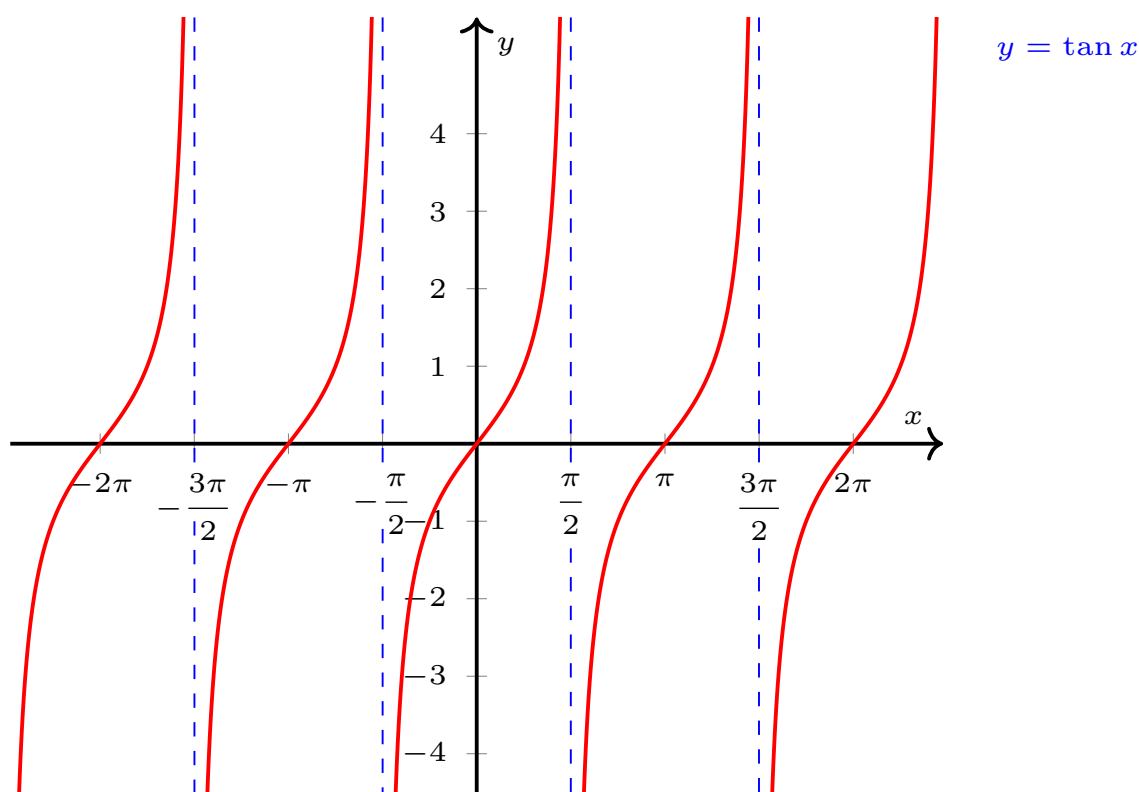
3.8.4 A função tangente

Definição 3.25. A função tangente é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $\tan(x)$, ou seja, $f(x) = \tan(x)$.

Para a construção função tangente, precisamos entender o seu comportamento em cada quadrante do ciclo trigonométrico conforme o Exemplo 3.17. De 0 a $\frac{\pi}{2}$ a função tangente é crescente, porém para exatamente $\frac{\pi}{2}$ a função não está definida, logo dizemos que em $\frac{\pi}{2}$ há uma assíntota vertical, assim como para todo arco cômgruo de $\frac{\pi}{2}$, ou seja, em todo arco da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, para todo k inteiro, existe uma assíntota vertical.

Marcando no plano cartesiano os valores contidos na Tabela (3.6) obtemos o gráfico abaixo.

Figura 3.65: Gráfico da função $\tan(x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$



Fonte: Autoria própria (2025)

3.8.5 Funções seno, cosseno e tangente com o *PhET Interactive Simulations*

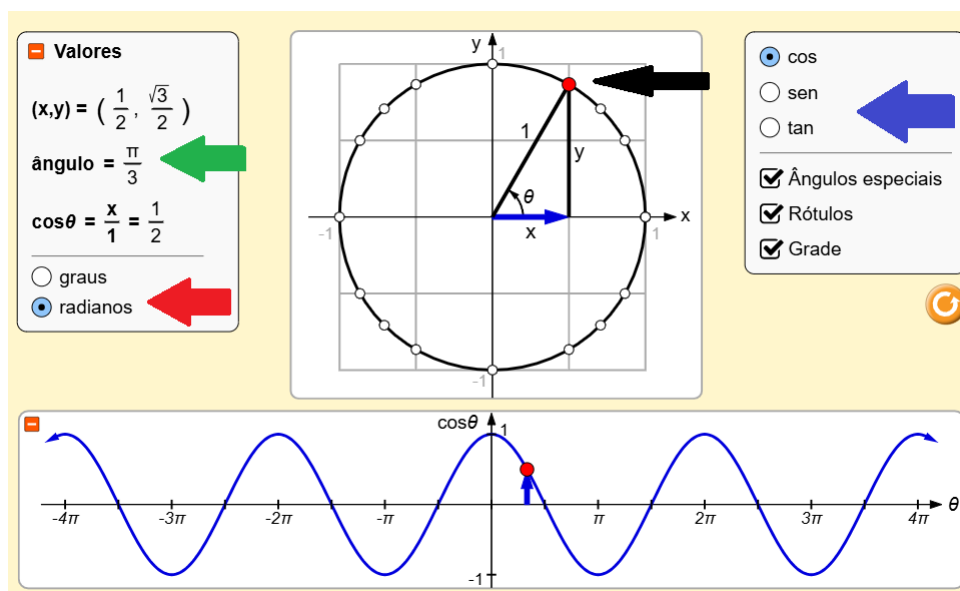
O site *PhET Interactive Simulations* ⁷ é um projeto fundado em 2002 pelo Prêmio Nobel *Carl Wieman*, o projeto Simulações Interativas PhET da Universidade estadunidense do Colorado em Boulder cria simulações interativas gratuitas de matemática e ciências. As *Sims PhET* baseiam-se em extensa pesquisa em educação e envolvem os alunos através de um ambiente intuitivo e lúdico, onde eles aprendem através da exploração e da descoberta.

O projeto agora projeta, desenvolve e lança mais de 1.5 bilhão de simulações interativas gratuitas para uso educacional nas áreas de física , química , biologia , ciências da terra e matemática. As simulações foram traduzidas para mais de 129 idiomas diferentes, o site do PhET recebeu mais de 25 milhões de visitantes.

Em outubro de 2011, a *PhET Interactive Simulations* foi escolhida como laureada do prêmio *Microsoft Education Tech Award* de 2011. O *Tech Awards*, apresentado pelo *The Tech Museum of Innovation*, homenageia inovadores de todo o mundo por tecnologias que beneficiam a humanidade.

A seguir apresentamos a animação interativa da função cosseno no PhET ⁸.

Figura 3.66: Função cosseno no simulador PhET



Fonte: Autoria própria (2025)

Na seta em azul o professor poderá escolher entre as funções cosseno, seno e tangente

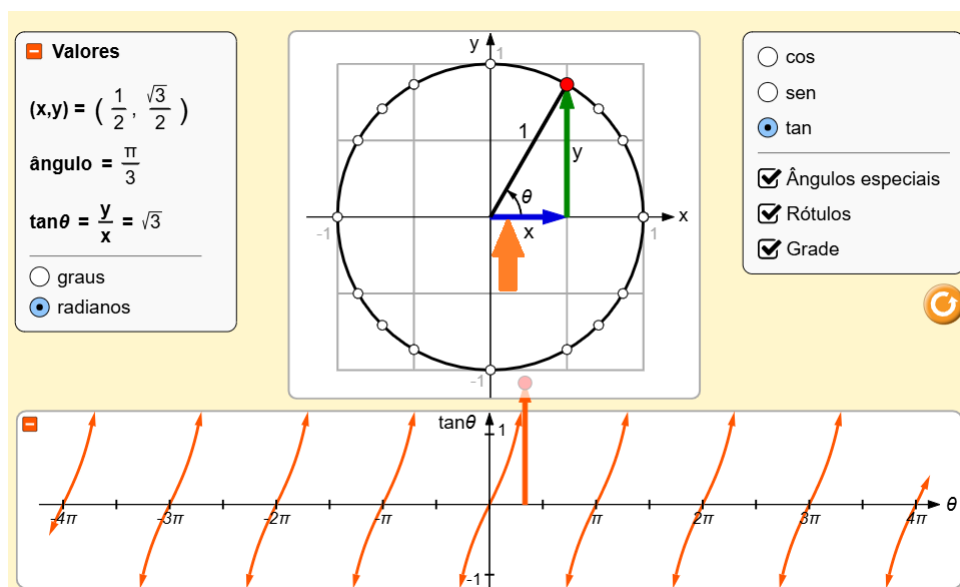
⁷Disponível gratuitamente em <https://phet.colorado.edu/pt_BR/>.

⁸Esta animação interativa está disponível em <https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_all.html?locale=pt_BR>.

para apresentar. Neste mesmo ambiente poderá os ângulos especiais no plano cartesiano. Na seta em preto podemos percorrer os ângulos especiais movendo a bolinha vermelha, e na seta verde por sua vez, é dado o ângulo em que a bolinha vermelha representa, é dado também o par ordenado (x, y) do ângulo, que são os valores do cosseno e seno deste ângulo. Por fim, na seta em vermelho o professor poderá apresentar o gráfico tanto em radianos como em graus. Na medida em que a bolinha vermelha percorre o ciclo trigonométrico a seta azul no gráfico percorre o gráfico do cosseno mostrando a variação de seus valores em cada quadrante.

A função seno é similar ao cosseno, basta alterar a função no ambiente demarcado pela azul. Vejamos, a seguir como é representado a função tangente no site ⁹.

Figura 3.67: Função tangente no simulador PhET



Fonte: Autoria própria (2025)

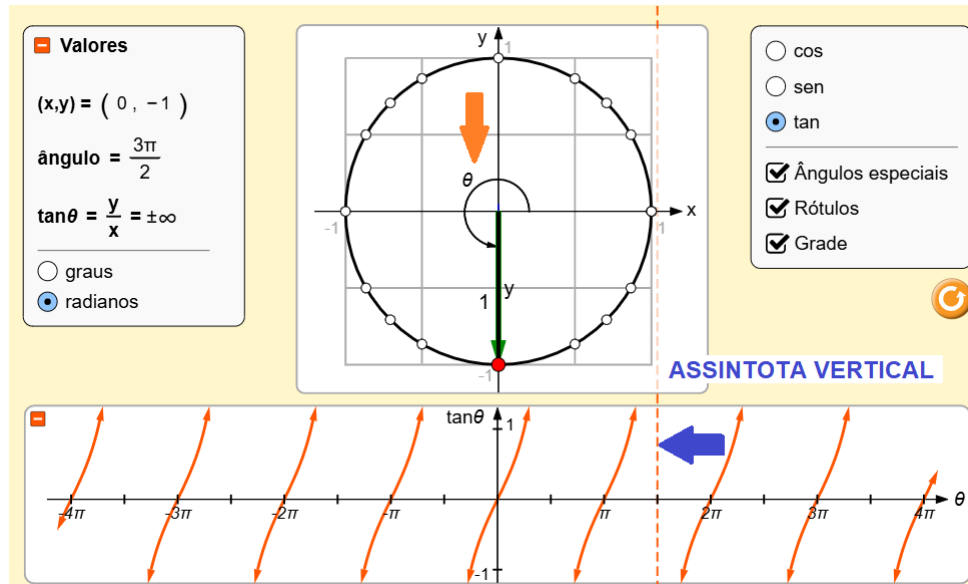
Veja que na medida em que a bolinha vermelha percorre o ciclo, é destacado o ângulo θ , onde o professor poderá mostrar aos alunos o comportamento da função tangente em cada quadrante, por exemplo, se a bolinha percorrer o intervalo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ a função é crescente e a seta no gráfico vai aumentando o seu tamanho conforme o ângulo percorre o intervalo. Para visualizarmos de forma mais clara, basta retirar os ângulos especiais e veremos com maior precisão o comportamento das funções em cada quadrante. A vantagem do PhET sobre o Geogebra é fato de que nele a animação interativa já está pronta para utilização, enquanto no Geogebra devemos criar ou pesquisar alguma animação já pronta, o que leva muito tempo.

O site PhET também é útil para mostrarmos a periodicidade das funções trigono-

⁹Esta animação interativa também está disponível em https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_all.html?locale=pt_BR.

métricas e visualizarmos as assintotas verticais na função tangente conforme a imagem abaixo.

Figura 3.68: Função tangente no simulador PhET



Fonte: Autoria própria (2025)

Na Figura 3.68 veja que o PhET destaca a assintota vertical em $\frac{3\pi}{2}$ e veja também o ângulo central θ , que acompanha o movimento da bolinha vermelha, e cada vez que avançamos o PhET destaca as assintotas verticais. Isto é útil para mostrarmos que as funções cosseno e seno a cada volta, 2π rad, os valores vão se repetindo, ocorrendo o que chamamos de periodicidade ou funções periódicas, como já mencionamos.

3.8.6 Gráfico de funções da forma $y = a + b \cdot \text{sen}(cx)$

Exemplo 3.20. *Vamos construir o gráfico da função $y = 3 + \text{sen}(2x)$.*

Solução. Para a construção do gráfico desta função, o desafio é: Qual valor atribuir para a variável x ? E qual o período da função, ou seja, a parte de qual valor a função começa a repetir-se?

De forma geral, o período de uma função seno ou cosseno é dada por $P = \frac{2\pi}{|c|}$, assim o período da função $y = 3 + \text{sen}(2x)$ será:

$$P = \frac{2\pi}{|2|} = \pi.$$

Com isso, já sabemos que a cada π , a função faz um movimento periódico.

Funções trigonométricas desse tipo trazem dificuldades para o esboço de seu gráfico, visto que, não sabemos qual valor atribuir inicialmente à variável x . Todavia, já conhecemos os valores do seno dos arcos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π e estes valores são simples para marcarmos no plano cartesiano, assim é interessante que o termo $2x$ da função $y = 3 + \text{sen}(2x)$ seja igual a cada um destes valores, acompanhe.

Para $2x = 0$ teremos $x = 0$, para $2x = \frac{\pi}{2}$ teremos $x = \frac{\pi}{4}$, para $2x = \pi$ teremos $x = \frac{\pi}{2}$, para $2x = \frac{3\pi}{2}$ teremos $x = \frac{3\pi}{4}$ e para $2x = 2\pi$ teremos $x = \pi$ portanto estes são os valores que devemos atribuir para x . Fazendo o processo análogo ao que fizemos, só que agora tomando $2x$ igual $-\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}$ e -2π , podemos construir a tabela abaixo com os pares ordenadas para a construção do gráfico.

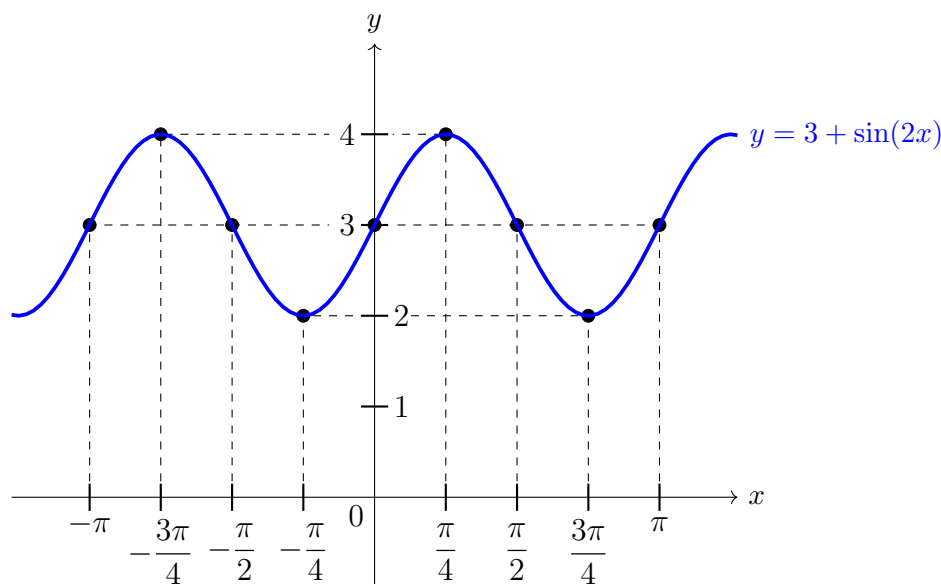
Tabela 3.9: Pares ordenados para construção do gráfico da função $y = 3 + \text{sen}(2x)$

x	$2x$	$y = 3 + \text{sen}(2x)$	(x, y)
$-\pi$	-2π	$3 + \text{sen}(-2\pi) = 3 + 0 = 3$	$(-\pi, 3)$
$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$3 + \text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 3 + 1 = 4$	$\left(-\frac{3\pi}{4}, 4\right)$
$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$3 + \text{sen}(-\pi) = 3 + 0 = 3$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 3\right)$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$3 + \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3 - 1 = 2$	$\left(-\frac{\pi}{4}, 2\right)$
0	0	$3 + \text{sen}(0) = 3 + 0 = 3$	$(0, 3)$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$3 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + 1 = 4$	$\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$
$\frac{\pi}{2}$	π	$3 + \text{sen}(\pi) = 3 + 0 = 3$	$\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$3 + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 - 1 = 2$	$\left(\frac{3\pi}{4}, 2\right)$
π	2π	$3 + \text{sen}(2\pi) = 3 + 0 = 3$	$(\pi, 3)$

Fonte: Autoria própria (2025)

Marcando no plano cartesiano os pares ordenados contidos na tabela acima, obtemos o seguinte gráfico para a função $y = 3 + \text{sen}(2x)$.

Figura 3.69: Gráfico da função $y = 3 + \sin(2x)$



Fonte: Autoria própria (2025)

O processo que fizemos para construir o gráfico da função $y = 3 + \sin(2x)$ será o mesmo para construir qualquer funções das formas $y = a + b \cdot \sin(cx)$, $y = a + b \cdot \sin(cx + d)$, $y = a + b \cdot \cos(cx)$ e $y = a + b \cdot \cos(cx + d)$. $\square$

3.8.7 Gráfico de funções da forma $y = a + b \cdot \cos(cx + d)$.

Exemplo 3.21. Vamos construir os gráfico da função $y = 1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$

Solução. A construção do gráfico desta função, é semelhante à construção do gráfico anterior.

Sendo o período da função dado por $P = \frac{2\pi}{|c|}$, teremos:

$$P = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} \Rightarrow P = 2\pi \cdot 2 \Rightarrow P = 4\pi.$$

Assim, a cada intervalo de 4π , a função se repete, isto é, 4π é o intervalo necessário para que se tenha uma volta completa no ciclo trigonométrico.

Agora basta igualar a expressão $\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$ a cada um dos valores 0 , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ e 2π e aos seus simétricos. Fazendo isto podemos construir a tabela abaixo.

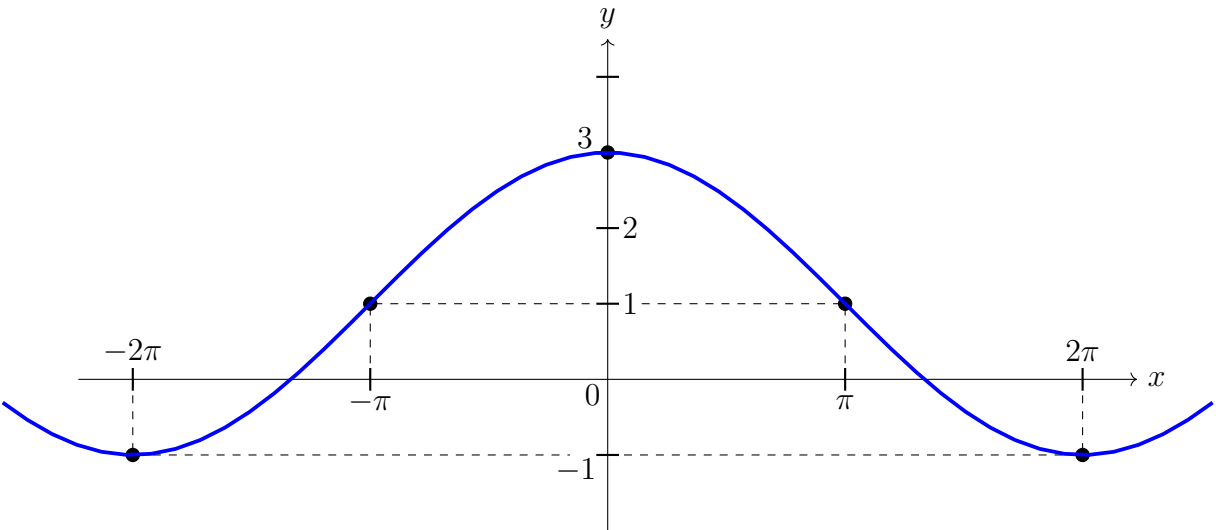
Tabela 3.10: Pares ordenados para construção da função $y = 1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$

x	$\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$	$y = 1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$	(x, y)
-2π	0	$1 - 2 \cdot \cos(0) = 1 - 2 = -1$	$(-2\pi, -1)$
$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$	$(-\pi, 1)$
0	π	$1 - 2 \cdot \cos(\pi) = 1 + 2 = 3$	$(0, 3)$
π	$\frac{3\pi}{2}$	$1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$	$(\pi, 1)$
2π	2π	$1 - 2 \cdot \cos(2\pi) = 1 - 2 = -1$	$(2\pi, -1)$

Fonte: Autoria própria (2025)

Marcando plano cartesiano os pares ordenados da tabela acima, obtemos o gráfico abaixo.

Figura 3.70: Gráfico da função $y = 1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$



Fonte: Autoria própria (2025)

□

Considerando os gráficos das funções $y = 3 + \sin(2x)$ e $y = 1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$, que são funções da forma $y = a + b \cdot \sin(cx + d)$ e $y = a + b \cdot \cos(cx + d)$, respectivamente, vimos o valor de c impacta diretamente no período das funções, pois sendo $P = \frac{2\pi}{|c|}$, temos que

se c é grande, implica que o período é pequeno (gráfico mais “fechado”). Por outro lado, se c é pequeno então o período é grande (gráfico mais “aberto”). O valor de a movimenta o gráfico das funções verticalmente ao longo do eixo y , ou seja, se a é positivo: o gráfico “sobe”, no contrário, o gráfico “desce”. O valor de d desloca o gráfico horizontalmente ao longo do eixo x , por fim, o valor de b altera a amplitude da curva.

De forma geral nesse capítulo que findamos, propusemos que, no Ensino Médio, o professor de Matemática comece a Trigonometria revisando a semelhança de triângulos com os seus alunos — chamaremos esta revisão de preparação para a próxima etapa, a saber: a introdução e o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Após esse estudo, pode-se iniciar a Trigonometria na circunferência, posteriormente introduzir a extensão para os ângulos não agudos, e apresentar a Lei do Senos e dos Cossenos. Seguindo tal sequência, o aluno terá condições de entender as funções trigonométricas.

Finalizada a sequência dos tópicos de Trigonometria aqui proposta, adiante, no capítulo 4, apresentaremos algumas aplicações práticas e resolução de problemas em Trigonometria, nos quais serão aplicadas as noções estudadas ao longo deste Capítulo 3.

Capítulo 4

Aplicações da Trigonometria e resolução de problemas

Este capítulo apresenta situações práticas que evidenciam a utilidade da Trigonometria no cálculo de distâncias inacessíveis, com destaque para a determinação da largura de um rio utilizando as razões trigonométricas. É proposto ainda um roteiro de aula prática para o cálculo de uma altura inacessível, aplicações no lançamento de projéteis e aplicações no cálculo da área de um triângulo. Além disso, o presente capítulo destaca a resolução de situações-problemas envolvendo o conhecimento trigonométrico.

4.1 Medidas inacessíveis

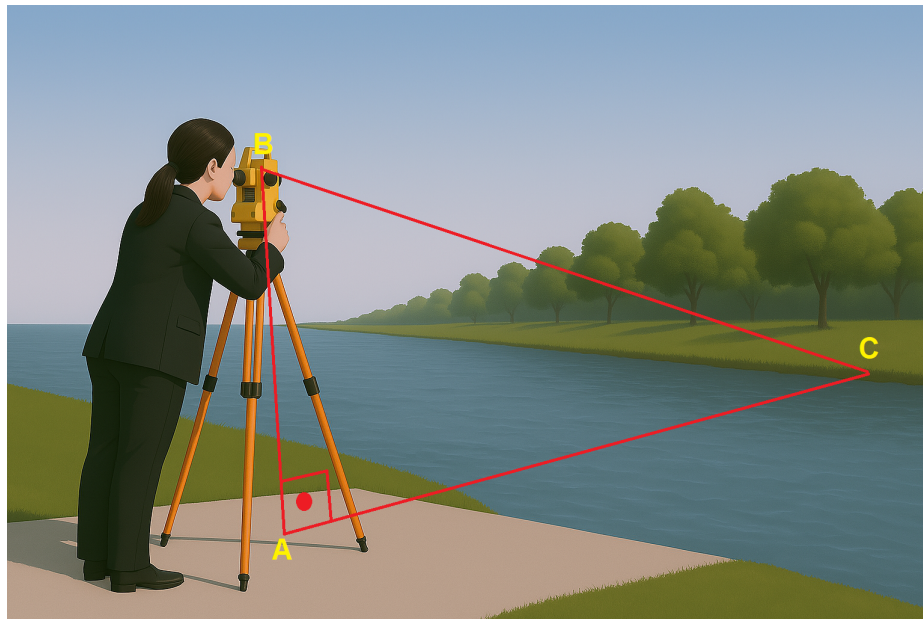
Este capítulo é dedicado às aplicações da Trigonometria no cálculo de distâncias inacessíveis, isto é, aquelas distâncias que não podem ser calculadas diretamente com instrumentos de medidas e, para Carvalho *et al.* (2010), o homem sempre teve a necessidade de avaliar e calcular distâncias inacessíveis. A seguir, apresentaremos alguns exemplos destas aplicações.

4.1.1 Aplicação 01: Cálculo da largura de um rio

A largura de um rio pode ser facilmente calculada com o auxílio de um teodolito profissional ou rudimentar, pois com este instrumento é possível determinar a medida de ângulos horizontais e verticais. Vejamos no exemplo a seguir.

Aplicação. *(Elaborada pelo autor)* Uma topógrafa deseja calcular a largura de um rio. Para isto, ela se posiciona na margem do rio com um teodolito de 1.75 m de altura e passa a ver a outra margem sob um ângulo vertical (ângulo $\angle ABC$ da figura abaixo) de 80° . Qual foi a largura do rio encontrada por esta topógrafa?

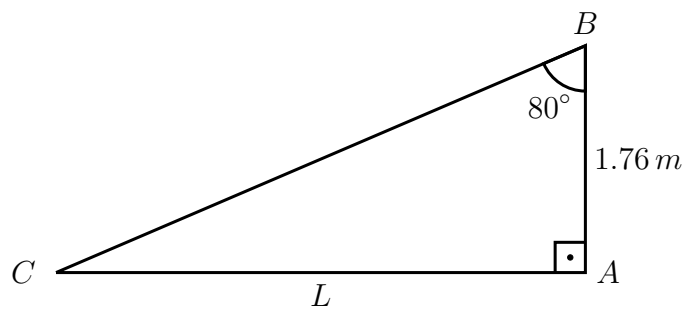
Figura 4.1: Cálculo da largura de um rio - 1



Fonte: Inteligência Artificial - Microsoft Copilot (2025)

Solução. Considerando os dados do problema e a ilustração obtemos o triângulo retângulo a seguir.

Figura 4.2: Triângulo representando a largura de um rio



Fonte: Autoria própria (2025)

Na Figura 4.2, L representa a largura do rio. No triângulo ABC a medida do cateto oposto a 80° é L e a medida do cateto adjacente é $1,76$ m, dessa forma, para encontrarmos a largura do rio, utilizaremos a tangente de 80° , ou seja:

$$\tan(80^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{L}{1.76}.$$

Utilizando uma calculadora científica temos que $\tan(80^\circ) \approx 5.7$, daí ficaremos com:

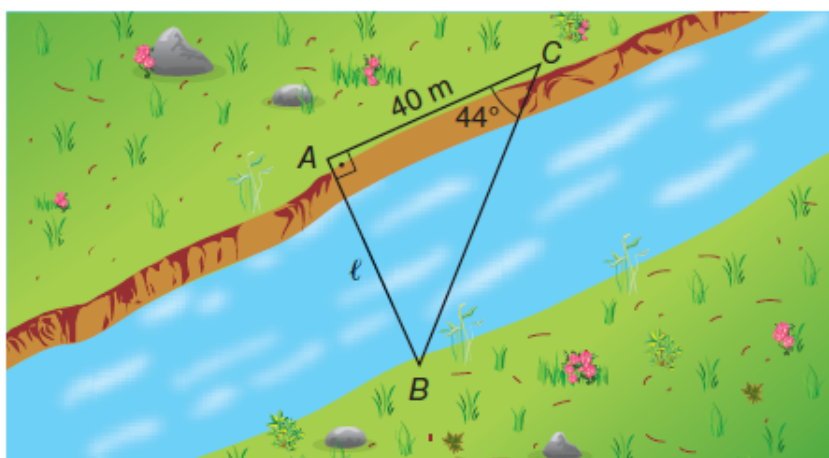
$$5.7 = \frac{L}{1.76} \implies L \approx 10.$$

Portanto, a largura do rio encontrada pelo topógrafo é aproximadamente 10 m . $\square$

Aplicação. Manoel Paiva - Editora Moderna (2010)

Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que está e um ponto B na margem oposta (conforme a figura). A seguir, ele se desloca 40 m perpendicularmente à reta $\overleftrightarrow{AB}$ até o ponto C e mede o ângulo $\widehat{ACB}$, obtendo 44° . Dados: $\sin(44^\circ) = 0,69$, $\cos(44^\circ) = 0,71$ e $\tan(44^\circ) = 0,96$, calcule a largura do rio.

Figura 4.3: Cálculo da largura de um rio - 2



Fonte: Manoel Paiva (2010)

Solução. Na Figura 4.3, temos que o lado AB , cujo comprimento é ℓ , representa a largura do rio a ser calculada pelo engenheiro.

Em relação ao ângulo de 44° temos conhecido o cateto adjacente e queremos encontrar a medida do cateto oposto, logo utilizaremos a $\tan(44^\circ)$, ou seja:

$$\tan(44^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\ell}{40} \implies \ell = \tan(44^\circ) \cdot 40 \implies \ell = 0,96 \cdot 40 \implies \ell = 38,4.$$

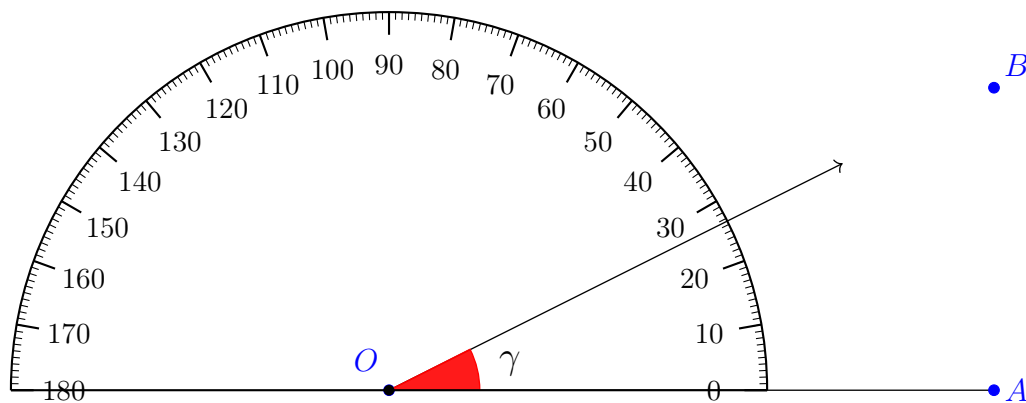
Portanto, a largura encontrada pelo engenheiro é de $38,4\text{ m}$. $\square$

4.1.2 Aplicação 02: Altura inacessível - Roteiro de aula de campo

Uma prática tradicional envolvendo Trigonometria é o cálculo de alturas com o uso do teodolito rudimentar. O teodolito rudimentar é um instrumento usado para medir o ângulo que dois pontos A e B formam com um ponto base O , conforme na ilustração

abaixo, onde o ponto B é chamado de ponto visado para determinar a altura de A até B . Na prática, o ponto B representa uma altura que desejamos calcular. Deste ponto em diante, vamos dizer que o ângulo γ é o ângulo formado entre o ponto visado B e a linha horizontal (do ponto O ao ponto A). A figura a seguir esquematiza um teodolito rudimentar, em que a seta que parte do ponto O e aponta para B poderá ser feita com a utilização de um tubo de caneta esferográfica ou de um palito, pois na prática, os pontos O e B são distantes um do outro.

Figura 4.4: Representação simplificada de um teodolito rudimentar



Fonte: Autoria própria (2025)

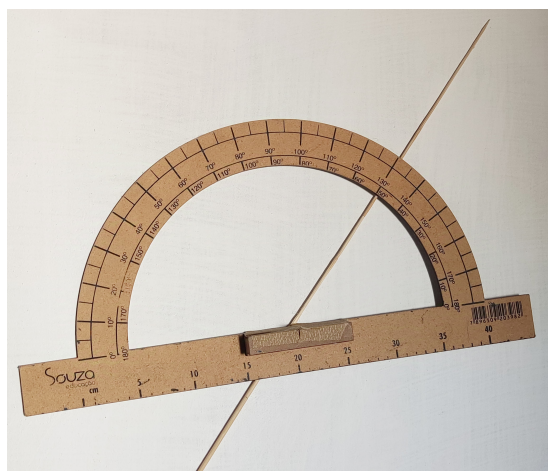
4.1.3 Confeção do teodolito rudimentar

Tal teodolito pode ser confeccionado com um transferidor escolar de acrílico ou em MDF. Para a confecção do nosso teodolito foram utilizados:

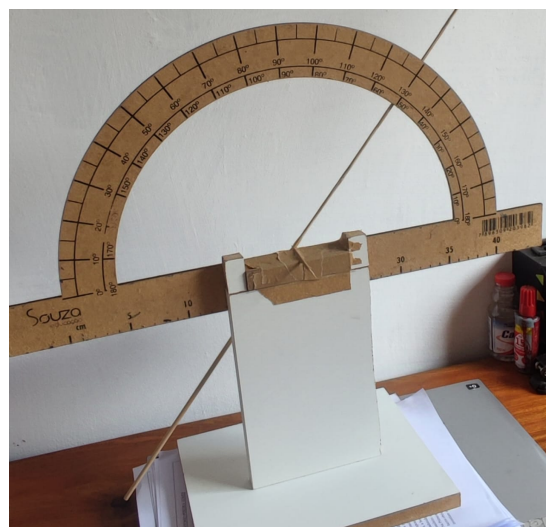
- Transferidor em MDF;
- Dois palitos de churrasco;
- Fita adesiva;
- Duas peças retangulares em MDF;
- Cola instantânea.

Os dois palitos de churrasco foram colados um no outro para melhor visualização do ponto visado e em seguida foram fixados no centro do transferidor em MDF com a fita adesiva, como ilustrado na Figura 4.5 (a). Após isso, usamos a cola instantânea e as duas peças retangulares em MDF para fazermos o suporte de sustentação do teodolito. Colamos uma peça na outra de modo que uma delas ficasse na vertical com uma pequena abertura na parte superior para encaixe do transferidor em MDF, como mostra a Figura 4.5 (b).

Figura 4.5: Confeção do teodolito rudimentar



(a)



(b)

Fonte: Autoria própria (2024)

4.1.4 A utilização do teodolito em aula de campo

A utilização do teodolito rudimentar como recurso didático é útil tanto no desenvolvimento de semelhança de triângulos no Ensino Fundamental, quanto das razões trigonométricas no Ensino Médio para fixação e assimilação dos principais conceitos e definições.

A aula de campo No Ensino Médio com o uso do teodolito rudimentar é útil para a revisão da semelhança de triângulos ou para aplicação das razões trigonométricas ou poderá ser feito as duas ao mesmo tempo para que os estudantes percebam a Trigonometria no triângulo retângulo como extensão da semelhança entre triângulos. Ao desenvolver uma aula de campo com este recurso educacional, podemos estabelecer alguns objetivos como:

- Aplicar conceitos de semelhança de triângulos nos cálculos de alturas inacessíveis;
- Utilizar relações de proporcionalidade entre os lados dos triângulos;
- Identificar o caso de semelhança entre os triângulos;
- Identificar qual razão trigonométrica será utilizada no cálculo da altura ou da distância;
- Realizar conversões entre unidades de medida.

4.1.5 Uso do teodolito rudimentar para encontrar alturas

Com o teodolito os alunos podem calcular, com a mediação e auxílio do professor, a altura de um poste, de um prédio ou até mesmo a altura do pátio da escola.

Para calcular a altura inacessível utilizando o teodolito, primeiramente um aluno estende um barbante horizontalmente afim de encontrar a distância entre o teodolito e a base do que eles querem calcular a altura, conforme ilustrado na Figura 4.6.

Figura 4.6: Utilizando o teodolito rudimentar para encontrar alturas



Fonte: Autoria própria (2024)

Na Figura 4.6 o triângulo ABC representa a situação real da aula de campo, o ponto B é o ponto visado, ou seja, o objetivo é encontrar a sua altura em relação ao solo. O segmento AC na prática é feito com o barbante mencionado anteriormente.

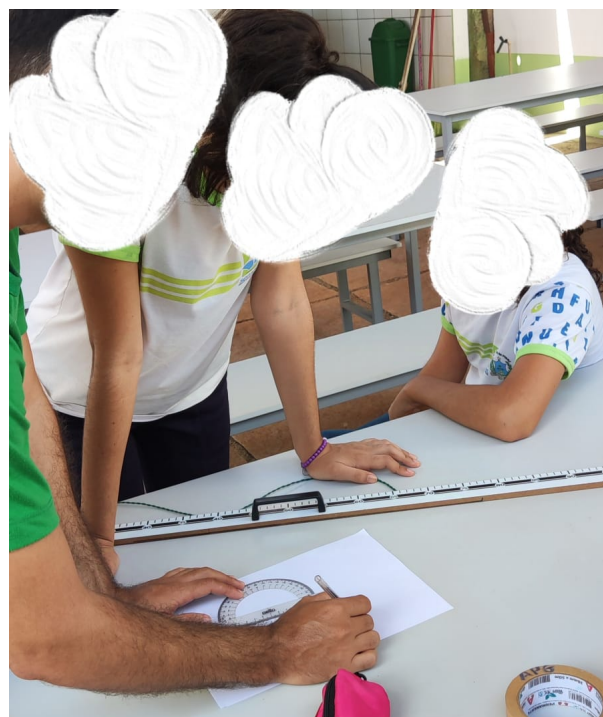
Para medir o ângulo $\angle ACB$, ainda na Figura 4.6, utilizando o teodolito, o aluno aponta o palito de churrasco para o ponto visado conforme mostra a Figura 4.7 (a).

Com o comprimento AC e encontrada a medida do ângulo $\angle ACB$ o aluno pode encontrar facilmente a altura do ponto visado utilizando a semelhança de triângulos ou a Trigonometria.

Figura 4.7: Aula prática com teodolito rudimentar



(a)



(b)

Fonte: Autoria própria (2024)

Na Figura 4.7(a) a aluna está medindo o ângulo entre a linha horizontal e o ponto visado para o cálculo da altura desejada. Nesta medição, imagine que foi encontrado um ângulo de aproximadamente 31° . Após esta etapa, na Figura 4.7 (b) é feito no papel um triângulo semelhante ao triângulo ABC da Figura 4.6.

Na Figura 4.8 feita no Geogebra, vamos supor que o comprimento AC seja de $6,5\text{ m}$. Sabemos pelo Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos que os triângulos ABC e CDE são semelhantes.

usando a semelhança entre os triângulos ABC e CDE , teremos:

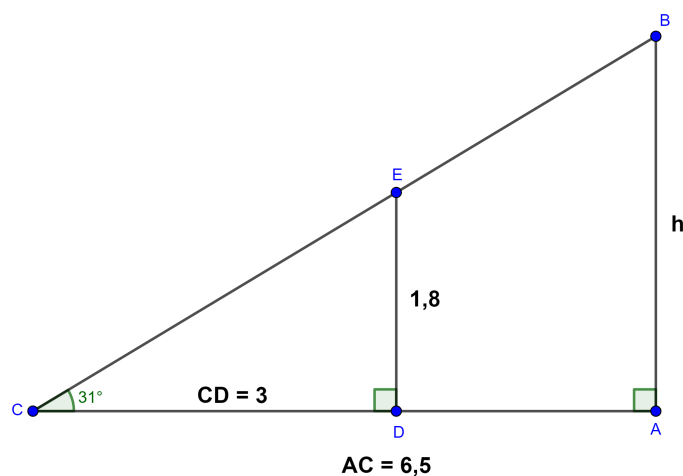
$$\frac{h}{1,8} = \frac{6,5}{3} \Rightarrow h = \frac{6,5 \cdot 1,8}{3} \Rightarrow h = 3,9.$$

Por outro lado para utilizarmos as razões trigonométricas, notemos que na Figura 4.8, AB e AC são, respectivamente, cateto oposto e adjacente ao ângulo de 31° , desta forma podemos usar a tangente de 31° e encontrar a altura h , conforme segue abaixo.

$\tan(31^\circ) = \frac{h}{6,5} \Rightarrow h = \tan(31^\circ) \cdot 6,5$, usando uma calculadora científica ou mesmo a calculadora do smartphone, encontramos $\tan(31^\circ) \approx 0,6$, daí:

$$h = 0,6 \cdot 6,5 \Rightarrow h = 3,9.$$

Figura 4.8: Triângulos da aula de campo construídos no Geogebra



Fonte: Autoria própria (2024)

No entanto, note pela Figura 4.6 que a altura do ponto visado B corresponde à soma da medida do segmento AB com a altura do teodolito. Assumamos que a altura do teodolito seja de 70 cm ou $0,7\text{ m}$, assim a altura do ponto B será:

$$3,9 + 0,7 = 4,6$$

Uma aula prática de Matemática tem uma importância ímpar no processo de aprendizagem dos alunos, pois é nestes momentos que muitos conceitos e definições são fixas, como foi o caso da aluna que ao vê a Figura 4.8 mencionou que dois triângulos são semelhantes quando um é ampliação ou redução do outro e, de fato esta observação feita por ela está correta e ela não tinha observado isto na sala de aula. Mattos e Fagundes (2010, p. 78) ressaltam que “A Matemática do cotidiano é mais atraente, tanto para a criança como para o adulto, pois está ligada à utilidade prática, à resolução de situações-problemas enfrentadas na vida diária”.

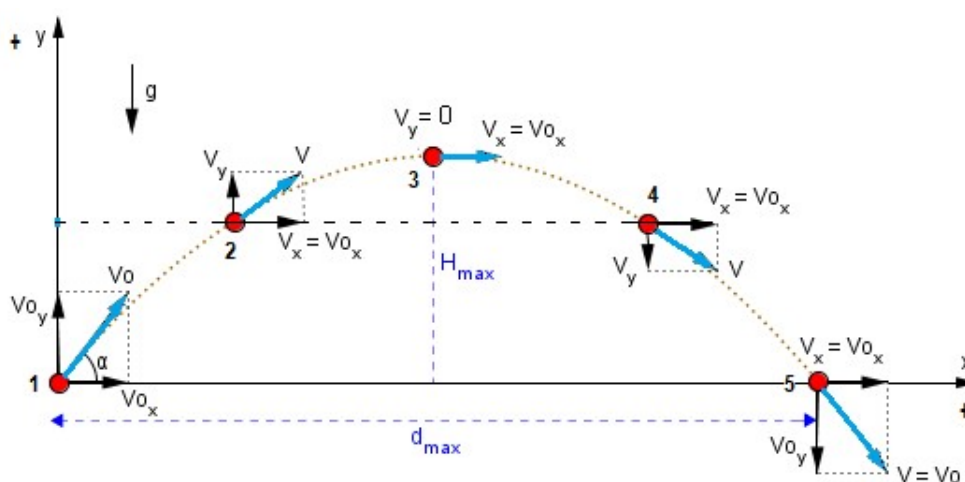
Esta sugestão de aula de campo com o teodolito rudimentar é um recorte de uma aula prática foi intitulada **Usando a semelhança de triângulos para encontrar alturas** e com esta prática educacional fomos premiados com o segundo título consecutivo da segunda edição do Seminário Municipal de Boas Práticas, ofertada pela Secretaria Municipal de Educação do Município de Juazeiro do Piauí.

4.2 Aplicação 03: Lançamento de projéteis

Esclarecemos, primeiramente, que esta seção não tem por objetivo apresentar resultados e definições rigorosas pertinentes à Física e sim apresentar uma aplicação da Trigonometria na Física.

Segundo os autores Máximo e Alvarenga (2010), qualquer objeto lançado obliquamente, descrevendo uma trajetória parabólica, próximo a superfície da terra é denominado projétil, conforme a figura abaixo.

Figura 4.9: Lançamento de projétil



Fonte: Nívio Bernardo (2025)

Conforme Máximo e Alvarenga (2010, p. 186) “O movimento de um projétil pode ser estudado como a resultante da superposição de dois movimentos: um horizontal e outro vertical”. Os movimentos horizontal e vertical são obtidos quando fazemos a decomposição da velocidade v sobre os eixos x e y , respectivamente, ou seja, v_x (horizontal) e v_y (vertical), como podemos observar o objeto na posição **2**, por exemplo, na Figura 4.9. É claro que durante o movimento o movimento projétil, o objeto lançado estará sujeito à ação de seu peso e da força da resistência do ar. Aqui vamos considerar desprezível a resistência do ar sobre o peso do objeto.

Aceleração do projétil

Assim como a velocidade, a aceleração pode ser decomposta sobre os eixos x e y , obtendo-se a_x e a_y , respectivamente. As expressões para a_x e a_y podem ser facilmente calculadas pela Segunda Lei de Newton, isto é $R = m \cdot a$, onde R é a força resultante.

$$R_x = m \cdot a_x \text{ e } R_y = m \cdot a_y.$$

Sendo o peso do objeto a única força atuante sobre ele e verticalmente de cima para baixo, então sua projeção sobre o eixo x é nula, logo teremos:

$$a_x = \frac{R_x}{m} \implies a_x = 0.$$

Como $a_x = 0$, o movimento horizontal é uniforme, ou seja v_x é constante durante o movimento.

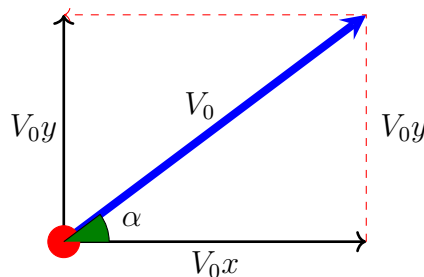
sendo a gravidade (g) atuante de baixo para cima, contrário à orientação do eixo y , podemos considerar

$$a_y = -g.$$

Velocidade e posição do projétil

Ao fazermos a decomposição da velocidade v_0 sobre os eixos x e y é formado um triângulo retângulo, conforme a posição **1** na Figura 4.9. Dessa forma, podemos aplicar as razões trigonométricas neste triângulo como se segue.

Figura 4.10: Decomposição da velocidade v_0 sobre os eixos x e y



Fonte: Autoria própria (2024)

Aplicando as razões trigonométrica no triângulo teremos:

$$\cos(\alpha) = \frac{V_{0x}}{V_0} \implies V_{0x} = V_0 \cdot \cos(\alpha).$$

Como a velocidade é constante na horizontal em toda a trajetória, então $V_x = V_{0x}$, daí

$$V_x = V_0 \cdot \cos(\alpha). \quad (4.1)$$

Segundo Máximo e Alvarenga, no movimento vertical, a velocidade inicial é a componente de V_0 , ou seja, $V_{0y} = V_0$:

$$\sin(\alpha) = \frac{V_{0y}}{V_0} \implies V_{0y} = V_0 \cdot \sin(\alpha) \implies V_{0y} = V_0 \cdot \sin(\alpha).$$

Como o movimento é uniformemente variado, com aceleração $a_y = -g$, em qualquer instante de tempo, teremos:

$$V_y = V_{0y} - gt \quad \text{ou} \quad V_y = V_0 \cdot \sin(\alpha) - gt. \quad (4.2)$$

Com os valores de V_{0x} e V_{0y} , o módulo da velocidade v pode ser facilmente calculada, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo, isto é:

$$V^2 = (V_x)^2 + (V_y)^2 \quad \text{ou} \quad V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2}. \quad (4.3)$$

Para encontrarmos as expressões da posição do projétil em um instante t , note que x representa o seu deslocamento ao longo do eixo x . Como a velocidade v_x é sempre constante, então:

$$x = V_x \cdot t \quad \text{ou} \quad x = (V_0 \cdot \cos(\alpha))t. \quad (4.4)$$

y , por sua vez, representa o deslocamento ao longo do eixo y . Sendo o movimento uniformemente variado, com aceleração $a_y = -g$, então:

$$y = V_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{ou} \quad y = (V_0 \cdot \sin(\alpha)) \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \quad (4.5)$$

Aplicação. Editora: Scipione - Curso de Física - Vol. 1

Uma pessoa arremessa obliquamente uma bola de basquete com uma velocidade inicial $V_0 = 10 \text{ m/s}$ e um ângulo de lançamento $\theta = 60^\circ$. Suponha que $g = 10 \text{ m/s}^2$, despreze a resistência do ar e considere o instante do lançamento como a origem da contagem do tempo ($t = 0$).

1. No instante $t = 0,50 \text{ s}$, qual é o valor da velocidade da bola?
2. Qual é a posição da bola no instante $t = 0,50 \text{ s}$?

Solução: (1) A velocidade da bola no instante $t = 0,50 \text{ s}$ é dada pela equação (4.3), logo precisamos calcular V_x e V_y , usando respectivamente as equações (4.1) e (4.2), assim:

$$V_x = 10 \cdot \cos(60^\circ) \implies V_x = 10 \cdot \frac{1}{2} \implies V_x = 5.$$

Logo, $V_x = 5,0 \text{ m/s}$ e,

$$V_y = 10 \cdot \sin(60^\circ) - 10 \cdot 0,5 \implies V_y = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 \implies V_y = 5\sqrt{3} - 5 \approx 3,6.$$

daí, $V_y = 3,6 \text{ m/s}$ Assim a velocidade V será:

$$V = \sqrt{5^2 + (3,6)^2} \implies V = \sqrt{37,96} \implies V \approx 6,1.$$

Portanto, a velocidade V no instante $t = 0,50 \text{ s}$ é de $6,1 \text{ m/s}$.

(2) As posições da bola no instante $t = 0,50 \text{ s}$ são dadas pelas equações (4.4) e (4.5), assim teremos:

$$x = V_x \cdot t \implies x = 5 \cdot 0,5 = 2,5.$$

Assim a posição ao longo do eixo x é $2,5 \text{ m}$.

Ao longo do eixo y , teremos:

$$y = (5\sqrt{3}) \cdot 0,5 - \frac{10 \cdot (0,5)^2}{2} \implies y = 2,5\sqrt{3} - 1,25 \approx 3,1.$$

Logo a posição ao longo do eixo vertical é $3,1 \text{ m}$.

Aplicação. Editora: Scipione - Curso de Física - Vol. 1

Suponha que um projétil tenha sido lançado com uma velocidade V_0 e com um ângulo de elevação θ . Considere um ponto P situado no mesmo nível horizontal do ponto O de lançamento. A distância OP é denominada alcance do projétil.

- (a) Quanto tempo decorre, desde o instante do lançamento até que o projétil chegue ao ponto P ?
- (b) Obtenha uma expressão que permita calcular o valor do alcance do projétil.
- (c) Pela expressão da questão anterior, notamos que, para um mesmo valor da velocidade inicial V_0 é possível obter diferentes valores de alcance, variando apenas o ângulo de elevação θ . Para que valor do ângulo de elevação o alcance será máximo?

Solução. (a) O ponto P corresponde a uma posição do projétil onde $y = 0$. Assim o tempo necessário para que o projétil chegue ao ponto P será dado por:

$$y = 0 \implies (V_0 \cdot \text{sen}(\theta)) \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 0.$$

Pondo t em evidência, ficamos com:

$$t \cdot \left[V_0 \cdot \text{sen}(\theta) - \frac{gt}{2} \right] = 0.$$

Daí, temos que:

$$t = 0 \text{ ou } V_0 \cdot \sin(\theta) - \frac{gt}{2} = 0 \implies -\frac{gt}{2} = -V_0 \cdot \sin(\theta) \implies t = \frac{2 \cdot V_0 \cdot \sin(\theta)}{g}.$$

- (b) Sendo x dado por $x = (V_0 \cdot \cos(\theta))t$, então o alcance ao longo do eixo x é dado quando $t = \frac{2 \cdot V_0 \cdot \sin(\theta)}{g}$, ou seja:

$$x = (V_0 \cdot \cos(\theta)) \cdot \frac{2 \cdot V_0 \cdot \sin(\theta)}{g} \implies x = \frac{V_0^2 \cdot 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)}{g}.$$

Sabemos pela fórmula do seno do arco duplo em (3.13) que $\sin(2\theta) = 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$, de onde se segue que:

$$x = \frac{V_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g}.$$

- (c) O alcance será máximo quando o numerador da expressão $x = \frac{V_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g}$ for máximo. Daí devemos ter $\sin(2\theta)$ o maior possível, o que ocorre quando $\sin(2\theta) = 1$. Como apresentado e mencionado na Tabela (3.6), o maior valor possível para o seno é 1, daí devemos ter:

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

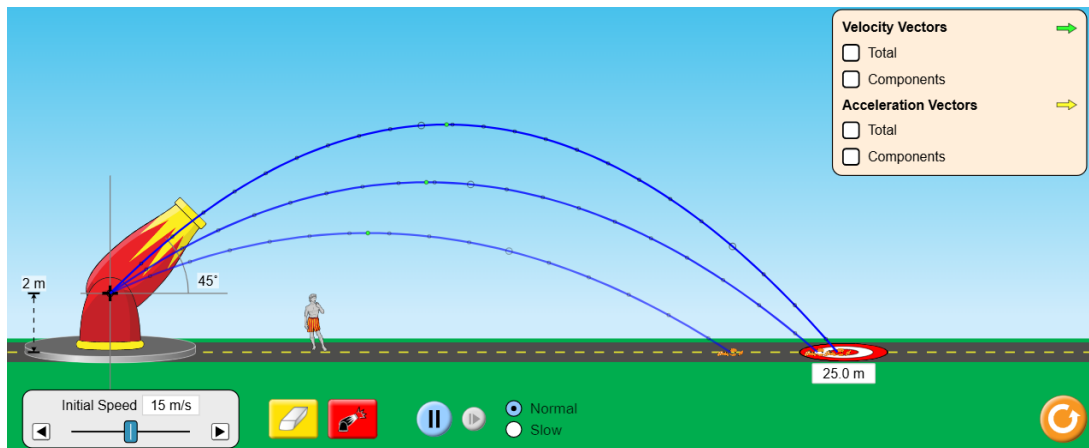
Portanto, para que o alcance seja o maior possível horizontalmente ao longo do eixo x , não importando a velocidade inicial V_0 , devemos ter um ângulo de elevação de 45° .

□

Para mostrar na prática que o maior alcance é obtido sob uma inclinação de 45° , sugerimos novamente o site PhET Interactive Simulations. Nele encontramos uma animação interativa ¹ onde podemos controlar a velocidade inicial do lançamento e o ângulo de elevação, conforme a figura a ilustração abaixo

¹Para acessar a animação do lançamento de projéteis clique em https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html

Figura 4.11: Alcance máximo no lançamento de um projétil



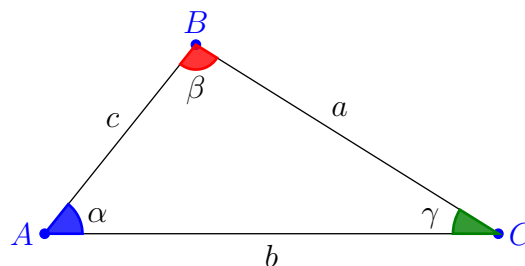
Fonte: Simulador PhET (2025)

4.3 Aplicação 04: Área de um triângulo qualquer

Embora há fórmulas imediatas para o cálculo da área do caso especial do triângulo retângulo por ter área igual a metade de um retângulo, deseja-se obter a área de um triângulo qualquer; sem precisar conhecer a medida de alguma de suas alturas, apenas as medidas de certos lados e certos ângulos.

Proposição 4.1. *A área de um triângulo qualquer é dada pelo semiproduto das medidas de quaisquer dois de seus lados pelo seno do ângulo formado entre eles.*

Figura 4.12: Triângulo com lados e ângulos indicados para dedução de sua área



Fonte: Autoria própria (2024)

Mais precisamente, a área de ABC poderá ser dada por:

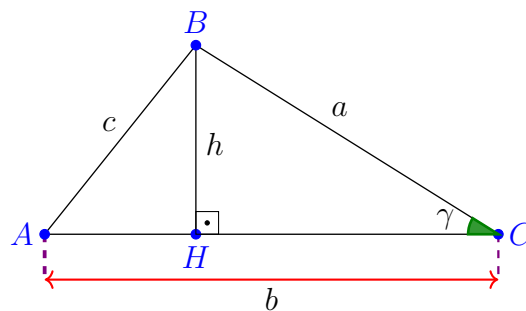
$$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}. \quad (4.6)$$

Demonstração. A prova será dividida em três momentos: consideraremos um triângulo

acutângulo, um triângulo obtusângulo e um triângulo retângulo, nesta ordem, e concluir que a fórmula é verdadeira para qualquer triângulo.

No triângulo ABC abaixo, sabemos que sua área é dada por $A = \frac{b \cdot h}{2}$, que por sua vez, esta expressão é ligeiramente limitada, pois para utilizá-la precisamos da medida da altura h , que em muitas situações não é simples determinar essa medida. Por outro lado, se conhecermos um de seus ângulos internos, podemos usar o conhecimento trigonométrico e obter uma nova expressão para o cálculo dessa área do triângulo.

Figura 4.13: Área de um triângulo acutângulo



Fonte: Autoria própria (2025)

A área do triângulo ABC é dada por

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Por outro lado, no triângulo BHC , h é cateto oposto ao ângulo γ e a é hipotenusa deste triângulo, daí obtemos:

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{h}{a} \implies h = a \cdot \text{sen}(\gamma).$$

Substituindo h na primeira expressão, ficaremos com:

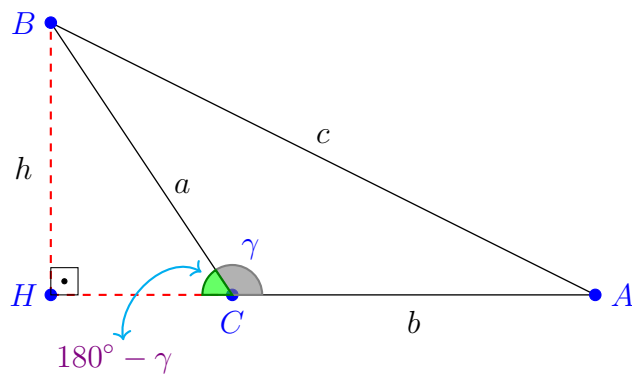
$$A = \frac{b \cdot a \cdot \text{sen}(\gamma)}{2}.$$

Ou, de modo equivalente:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\gamma)}{2}.$$

Consideremos agora o triângulo obtusângulo abaixo:

Figura 4.14: Área de um triângulo obtusângulo.



Fonte: Autoria própria (2025)

A área de CHB é dada por:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

No triângulo AHB , a altura h é cateto oposto ao ângulo $180^\circ - \gamma$ e a é a hipotenusa deste triângulo, assim:

$$\text{sen}(180^\circ - \gamma) = \frac{h}{a}.$$

Por outro lado, sabemos que $\text{sen}(180^\circ - \gamma) = \text{sen}(\gamma)$, daí segue que:

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{h}{a} \implies h = a \cdot \text{sen}(\gamma).$$

Substituindo h na primeira expressão, seguiremos com:

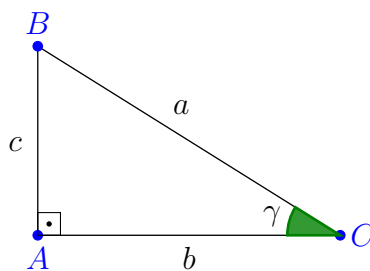
$$A = \frac{b \cdot a \cdot \text{sen}(\gamma)}{2}.$$

Ou, de maneira equivalente:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\gamma)}{2}.$$

Considerando finalmente o triângulo retângulo abaixo, a fórmula é imediata.

Figura 4.15: Área de um triângulo retângulo



Fonte: Autoria própria (2025)

Pela Figura 4.15, a medida c equivale à medida da altura do triângulo ABC e equivale também ao cateto oposto ao ângulo γ , e a é a hipotenusa de ABC .

A área de ABC é dada por:

$$A = \frac{b \cdot c}{2}.$$

Por lado, tem-se que;

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{c}{a} \implies c = a \cdot \text{sen}(\gamma).$$

Substituindo c na primeira expressão, seguiremos com:

$$A = \frac{b \cdot a \cdot \text{sen}(\gamma)}{2}.$$

Ou, equivalentemente:

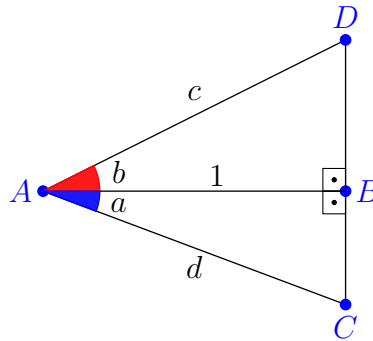
$$A = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\gamma)}{2}.$$

Se fizéssemos os cálculos desta demonstração em função de $\text{sen}(\alpha)$ ou de $\text{sen}(\beta)$, chegaríamos ao mesmo resultado. Verifique. $\square$

Aplicação.

Considere o triângulo ABC a seguir, tal que $\overline{AD} = 1$ é a altura relativa ao lado BC , $\widehat{CAD} = a$, $\widehat{DAB} = b$. Use a proposição (4.1) para mostrar que $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \text{sen}(b)$.

Figura 4.16: Demonstração alternativa para o seno da adição de arcos



Fonte: Autoria própria (2025)

Solução. Na Figura 4.16, note que $\widehat{CAD} = a + b$, daí, pelas expressões (4.6), podemos calcular a área de ABC da seguinte forma:

$$A(ACD) = \frac{c \cdot d \cdot \text{sen}(a + b)}{2}.$$

Por outro lado, a área de ACD é igual a área de ABC mais a área de ABD , ou seja:

$$\frac{c \cdot d \cdot \text{sen}(a+b)}{2} = A(ABC) + A(ABD). \quad (4.7)$$

Novamente pelas expressões (4.6) devemos ter:

$$A(ABC) = \frac{d \cdot 1 \cdot \text{sen}(a)}{2} \text{ e } A(ABD) = \frac{c \cdot 1 \cdot \text{sen}(b)}{2}.$$

Substituindo $A(ABC)$ e $A(ABD)$ na expressão (4.7) obteremos:

$$\frac{c \cdot d \cdot \text{sen}(a+b)}{2} = \frac{d \cdot 1 \cdot \text{sen}(a)}{2} + \frac{c \cdot 1 \cdot \text{sen}(b)}{2} \implies c \cdot d \cdot \text{sen}(a+b) = d \cdot \text{sen}(a) + c \cdot \text{sen}(b).$$

Multiplicando esta última igualdade por $\frac{1}{c \cdot d}$, (com $c, d \neq 0$ por serem medidas dos lados do triângulo ACD), ficamos com:

$$\text{sen}(a+b) = \frac{1}{c} \cdot \text{sen}(a) + \frac{1}{d} \cdot \text{sen}(b). \quad (4.8)$$

Por outro lado, no triângulo ABC :

$$\cos(a) = \frac{1}{d}.$$

e, no triângulo ABD :

$$\cos(b) = \frac{1}{c}.$$

Substituindo $\frac{1}{c}$ e $\frac{1}{d}$ em (4.8), ficamos finalmente com:

$$\text{sen}(a+b) = \cos(b) \cdot \text{sen}(a) + \cos(a) \cdot \text{sen}(b).$$

Ou, equivalente à fórmula obtida em (3.12):

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \text{sen}(b).$$

□

4.4 Resolução de problemas

Nesta seção apresentamos a solução de algumas situações problemas envolvendo a Trigonometria, antes de tudo sugerimos que ao se deparar com problemas que envolvam o triângulo retângulo pense nas razões trigonométricas, na Relação Fundamental da Trigo-

nometria e na relação $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, por outro lado, se o problema envolver triângulos acutângulos ou obtusângulos pense na Lei dos Cossenos e na Lei dos Senos e não tenha pressa em solucionar o problema.

Frequentemente, na tentativa de resolver um problema, mudamos nossa opinião continuamente ao longo do processo e, vez ou outra, variamos nossa maneira de encarar e pensar sobre o problema (Polya, 1995). Assim, para resolver um problema de forma adequada, Polya destaca quatro etapas a serem seguidas: compreensão do problema, inter-relação dos elementos para estabelecer um plano, execução do plano e retrospectiva.

Segundo Polya

Primeiro, temos que *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (Polya, 1995, p. 4).

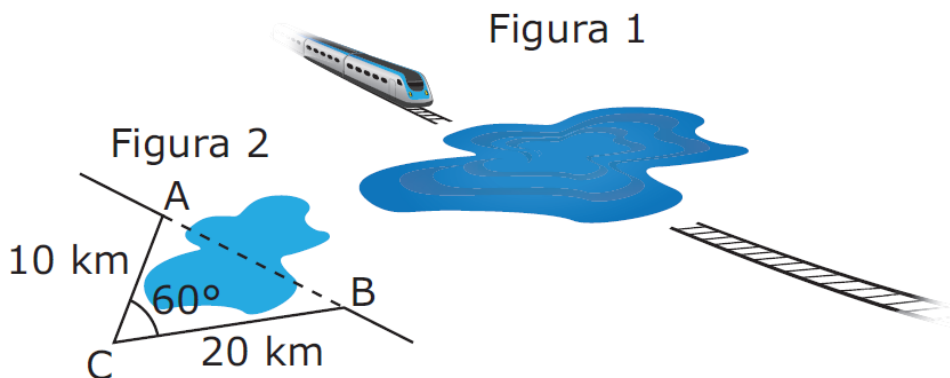
A resolução de problemas em matemática torna-se essencial na educação básica, uma vez que, a partir dela, o aluno se torna protagonista de sua aprendizagem. Ele passa a ser capaz de levantar, formular e testar hipóteses. Por meio da resolução de problemas, constrói-se o pensamento crítico e analítico (habilidade cognitiva que envolve a capacidade de reunir informações, visualizar o todo e solucionar problemas). Dessa forma, promove-se uma aprendizagem mais eficiente e significativa para a vida profissional, acadêmica e pessoal.

Diante disso, a seguir apresentaremos algumas situações-problema para aplicarmos os principais conceitos e definições em Trigonometria estudados até o momento.

Exemplo 4.1. Editora Bernoulli - Volume 4

Uma empresa ao construir uma linha férrea acaba por deparar-se com uma nascente de água e seu curso será alterado para garantir um custo menor de construção, figuras 1 e 2. Sabe-se que o aumento do custo de construção depende da diferença entre a distância efetiva de construção (soma das distâncias dos segmentos AC e BC) e a distância inicialmente planejada (medida do segmento AB). O valor encontrado pela construtora nessa diferença de percurso, em km, é:

Figura 4.17: Exemplo 1 - Resolução Problemas



Fonte: Editora Bernoulli (2025)

Solução. Pelo enunciado do problema, compreendemos que devemos calcular $10 + 20 - \overline{AB}$.

No triângulo ABC para determinar a medida do segmento AB usaremos a Lei dos Cossenos, pois conhecemos um ângulo entre dois lados também conhecidos e o lado oposto a este ângulo é o lado AB , ou seja, teremos:

$$(\overline{AB})^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos(60^\circ). \implies$$

$$(\overline{AB})^2 = 500 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2}. \implies$$

$$(\overline{AB})^2 = 500 - 200. \implies$$

$$\overline{AB} = \sqrt{300}. \implies$$

$$\overline{AB} = 10\sqrt{3}.$$

Com a medida do segmento AB calculada, teremos pelo enunciado:

$$10 + 20 - 10\sqrt{3} = 30 - 10\sqrt{3} = 10 \cdot (3 - \sqrt{3}).$$

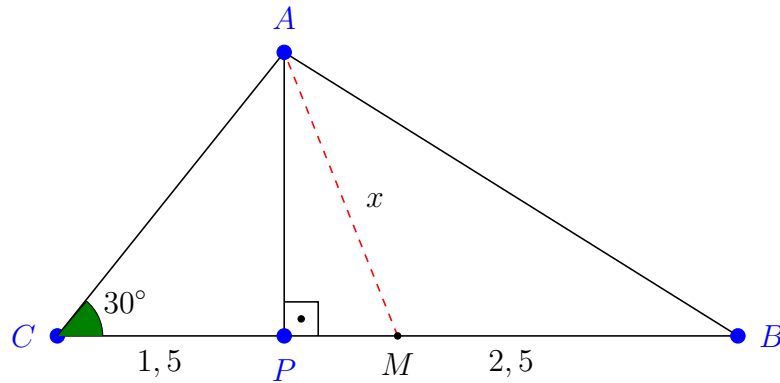
Assim, o valor encontrado pela construtora nessa diferença de percurso é de $10 \cdot (3 - \sqrt{3}) \approx 12,7 \text{ km}$. $\square$

Exemplo 4.2. (ITA-SP)

Num triângulo ABC , $BC = 4 \text{ cm}$, o ângulo C mede 30° e a projeção do lado AB sobre BC mede $2,5 \text{ cm}$. O comprimento da mediana que sai do vértice A mede:

Solução. Pelo enunciado, a projeção de AB sobre BC determina a altura AP . Como $\overline{BC} = 4$ e $\overline{BP} = 2,5$, então $\overline{CP} = 4 - 2,5 = 1,5$, conforme a ilustração abaixo:

Figura 4.18: Exemplo 2 - Resolução de problemas.



Fonte: Autoria própria (2025)

Traçando a mediana AM , e sendo x a sua medida. Determinaremos, conforme a enunciado, o valor de x .

Como ACP é retângulo em P , temos que o AP e CP são cateto oposto e adjacente ao ângulo de 30° , respectivamente, daí obtemos:

$$\tan(30^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\overline{AP}}{1,5}.$$

$$\overline{AP} = 1,5 \cdot \tan(30^\circ) = 1,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Como $1,5 = \frac{3}{2}$, teremos:

$$\overline{AP} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como M é mediana de BC que mede 4, então $\overline{CP} + \overline{PM} = 2 \Rightarrow \overline{PM} = 2 - 1,5 \Rightarrow \overline{PM} = 0,5 = \frac{1}{2}$.

Como não conhecemos os ângulos agudos do triângulo PMA não podemos aplicar as razões trigonométricas neste triângulo, por outro lado, são conhecidas as medidas de PM e AP , dessa forma podemos aplicar o Teorema de Pitágoras e encontrar a medida x , isto é:

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Logo, $x = 1$.

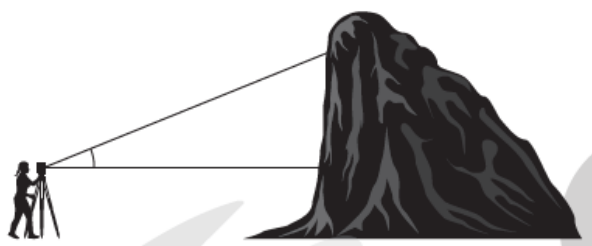
Portanto, a mediana AM tem 1 cm de comprimento.

□

Exemplo 4.3. *Moderna: conexões: Matemática e suas tecnologias - Trigonometria*

Lílian é bióloga e trabalha na Bahia, em um projeto de conservação da arara-azul-de-lear. Uma de suas tarefas é mapear os ninhos dessas araras. Lílian avistou um ninho e, com um teodolito, mediu o ângulo formado entre a linha de visão e a horizontal, obtendo 22° .

Figura 4.19: Exemplo 3 - Resolução de problemas.

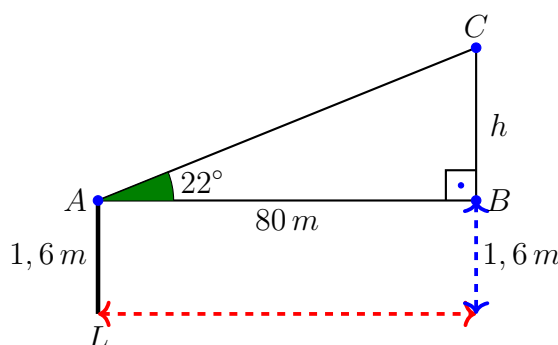


Fonte: Leonardo (2020)

Sabendo que Lílian tem $1,6\text{ m}$ de altura e estava a 80 m do paredão, qual é a altura aproximada do ninho das araras? (Dados: $\sin(22^\circ) \approx 0,3746$; $\cos(22^\circ) \approx 0,9272$; $\tan(22^\circ) \approx 0,4040$).

Solução. Considerando os dados apresentados no problema, obtemos o triângulo abaixo, onde o segmento AL representa a altura de Lílian, AB é a distância de Lílian ao paredão e o ponto C representa o ninho da arara-azul-de-lear.

Figura 4.20: Figura para resolução do problema do ninhos das araras



Fonte: Autoria própria (2025)

Pelo enunciado do problema, compreendemos que queremos encontrar a medida $\overline{BC}$ representada por h e somar-la à altura de Lílian, e assim determinar a altura do ninho.

Como $\triangle ABC$ é retângulo em B e sendo h e 80 m o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 22° , respectivamente, utilizaremos a tangente de 22° para obtermos a medida visada, ou seja:

$$\tan(22^\circ) = \frac{h}{80}.$$

Pelo enunciado temos $\tan(22^\circ) \approx 0,4040$, assim, teremos:

$$0,4040 = \frac{h}{80} \implies h = 0,4040 \cdot 80 \implies h = 32,32.$$

Assim a altura do ninho será dada por $32,32 + 1,6 = 33,92$.

Portanto a altura do ninho das araras é de $33,92\text{ m}$. □

Exemplo 4.4. (ENEM/MEC) - 2015

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

Solução. Já vimos nos gráficos das funções seno e cosseno que ambas variam de -1 a 1 , isto é, valor mínimo igual a -1 e valor máximo igual a 1 . Considerando as etapas da resolução de problemas definidas por Polya, vamos compreender inicialmente o problema. Note que P não representa a produção e sim o preço, e pelo enunciado entendemos que a produção é máxima ou abundante quando o preço é baixo, ou seja, vamos encontrar o mês em P é mínimo.

Considerando a função $P = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, independentemente do valor de x sempre teremos $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$ no mínimo igual a -1 , assim sendo, devemos encontrar o valor de x que torna $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$.

Pela Tabela (3.6) vimos que o cosseno é mínimo, isto é -1 , para o arco de medida igual a π , portanto para que $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$ seja mínimo, devemos ter:

$$\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \implies \pi x - \pi = 6\pi \implies x = \frac{7\pi}{\pi} \implies x = 7.$$

Como $x = 1$ e $x = 2$ estão associados aos meses de janeiro e fevereiro, respectiva-

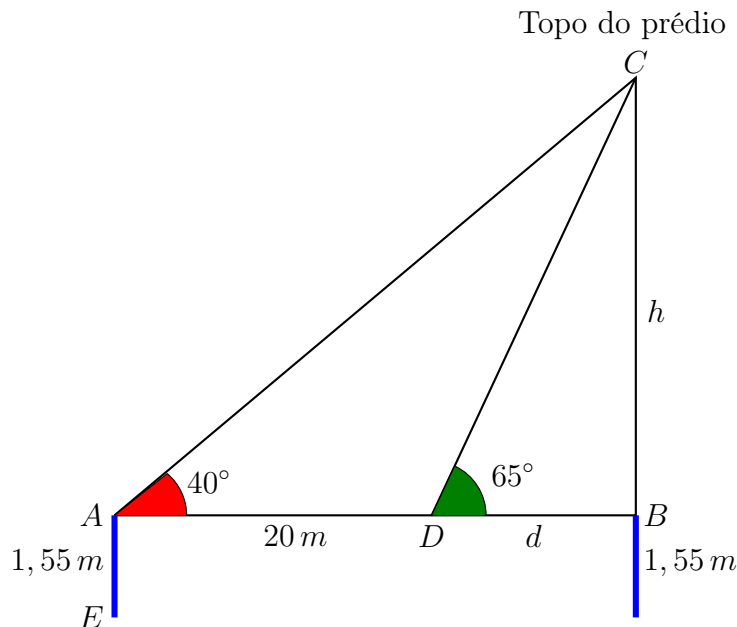
mente, então $x = 7$ refere-se a julho, portanto, a safra tem produção máxima em julho. $\square$

Exemplo 4.5. (Elaborada pelo autor)

Um topógrafo situado a uma distância d de um prédio, com um teodolito, avista o topo do prédio sob um ângulo de 65° . Logo após, o topógrafo recua 20 m a partir do ponto em que estava e avista novamente o topo do prédio sob um ângulo de 40° . Sabendo que a altura do teodolito é de 1,55 m, encontre a altura do prédio e a distância inicial entre o topógrafo e o prédio?

Solução. Considerando os dados do problema podemos construir o triângulo abaixo, onde h é a medida da altura do prédio e AE representa a altura do teodolito.

Figura 4.21: Exemplo 5 - Resolução de problemas



Fonte: Autoria própria (2025)

Na figura destacamos três triângulos: O triângulo ACD , o triângulo BCD e o triângulo ABC . Agora nos resta decidir qual destes triângulos nos leva ao valor de h .

Veja que no triângulo ACD a medida do segmento CD pode ser facilmente calculada pela Lei dos Senos, veja.

Pela figura, temos que $\widehat{ADC} = 115^\circ$, por ser suplementar de $\widehat{BDC} = 65^\circ$, e $\widehat{ACD} = 25^\circ$, pela soma dos ângulos internos de um triângulo. Assim, aplicando a Lei dos Senos no triângulo ACD , teremos:

$$\frac{20}{\sin(25^\circ)} = \frac{\overline{CD}}{\sin(40^\circ)} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{20 \cdot \sin(40^\circ)}{\sin(25^\circ)}.$$

Utilizando uma calculadora científica, encontramos: $\sin(25^\circ) \approx 0,42$ e $\sin(40^\circ) \approx 0,64$, daí ficamos com:

$$\overline{CD} = \frac{20 \cdot 0,64}{0,42} \implies \overline{CD} = \frac{12,8}{0,42} \implies \overline{CD} \approx 30,5.$$

Com a medida $\overline{CD} = 30,5$ podemos utilizar o seno do ângulo de 65° para encontrarmos a medida h ou seja:

$$\sin(65^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \implies \sin(65^\circ) = \frac{h}{30,5} \implies h = \sin(65^\circ) \cdot 30,5.$$

Novamente com o uso de uma calculadora científica, obtemos $\sin(65^\circ) \approx 0,9$, logo:

$$h = 0,9 \cdot 30,5 \implies h = 27,45.$$

Note, pela figura que a altura do prédio será dada por: $27,45 + 1,55 = 29$. Portanto a altura será de 29 m .

A distância inicial entre o topógrafo e o prédio, está representada por m . Para encontrarmos esta medida podemos utilizar o Teorema de Pitágoras no triângulo BCD , ou $\cos(65^\circ)$ ou ainda $\tan(65^\circ)$. Vamos optar pela $\tan(65^\circ)$.

Com o auxílio de uma calculadora encontramos $\tan(65^\circ) \approx 2,14$, assim teremos:

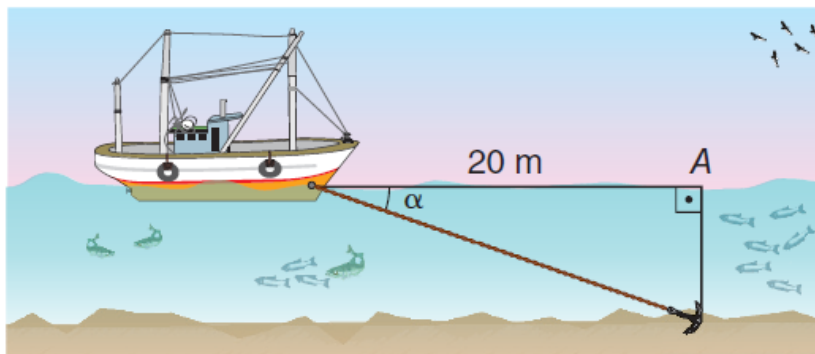
$$\tan(65^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{h}{d} \implies \tan(65^\circ) = \frac{27,45}{d} \implies d = \frac{27,45}{2,14} \implies d \approx 12,6.$$

Logo, a distância inicial entre o topógrafo e o prédio era de $12,6\text{ m}$. □

Exemplo 4.6. *Manoel Paiva - Editora Moderna (2010)*

A âncora de um barco pescueiro, depois de lançada, atingiu o fundo do rio. Como a profundidade do rio nesse ponto é menor que o comprimento da corda que prende a âncora ao barco, este se moveu 20 m em relação ao ponto A , de onde foi lançada a âncora, esticando completamente a corda, que formou um ângulo agudo de medida α com a superfície do rio tal que $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$. Calcular a profundidade do rio nesse ponto.

Figura 4.22: Exemplo 6 - Resolução de problemas.



Fonte: Manuel Paiva (2010)

Solução. Para este problema iremos apresentar duas soluções possíveis para fixação dos conceitos básicos em Trigonometria, acompanhe.

Primeira solução: Considerando a figura, temos que a profundidade do rio é a distância do ponto A até a âncora e vamos chamar esta distância de x . Esta medida x é exatamente o cateto oposto ao ângulo α e como o cateto adjacente mede 20 m podemos utilizar a tangente de α . Entretanto, a medida de α não é conhecida, assim, como utilizar a tangente nesta situação? Lembre-se da relação Fundamental da Trigonometria!. Como é dado o seno de α , pela relação fundamental podemos encontrar o cosseno de α e com estes valores obtemos o tangente de α , assim teremos:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1 \implies \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \implies \implies \cos(\alpha) = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} = \pm \frac{12}{13}.$$

Como α é um ângulo agudo, então devemos tomar o cosseno como positivo, ou seja, $\cos(\alpha) = \frac{12}{13}$.

Agora, ficamos com:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}.$$

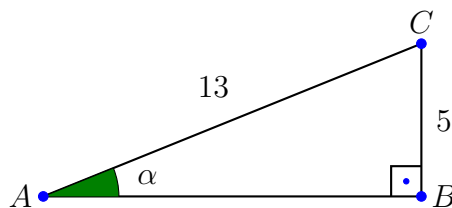
Com isso, podemos executar o plano que traçamos, ou seja:

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{20} \implies x = \tan(\alpha) \cdot 20 \implies x = 20 \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{3} \approx 8,3.$$

Portanto, a profundidade do rio é de aproximadamente $8,3\text{ m}$.

Segunda solução: Nesta segunda solução iremos encontrar a $\tan(\alpha)$ utilizando outra estratégia. Considerando que foi dado $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$ e sabemos que $\sin(\alpha)$ é a razão entre a medida do cateto oposto pela medida da hipotenusa, então a expressão $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$ indica que temos um triângulo retângulo cujo cateto oposto a α mede 5 e a hipotenusa mede 13. Conforme a figura a seguir.

Figura 4.23: Figura para a segunda resolução do problema 6



Fonte: Autoria própria (2025)

Este triângulo ABC é semelhante ao triângulo apresentado no enunciado do problema pelo caso A.A (Ângulo - Ângulo), pois ambos possuem um reto e o ângulo α em comum, dessa forma as razões trigonométricas neste triângulo ABC são as mesmas no triângulo apresentado no exercício. Então para encontrarmos $\tan(\alpha)$ basta calcular primeiramente a medida do lado AB utilizando o Teorema de Pitágoras, veja.

$$13^2 = (\overline{AB})^2 + 5^2 \implies (\overline{AB})^2 = 169 - 25 \implies (\overline{AB})^2 = 144 \implies \overline{AB} = \sqrt{144} = 12.$$

Assim a medida do cateto adjacente é $\overline{AB} = 12$. Sendo, então $\tan(\alpha) = \frac{\text{C.O}}{\text{C.A}}$, teremos: $\frac{5}{12}$, isso no triângulo ABC .

Calculando agora $\tan(\alpha)$ na Figura 4.6 do problema, obtemos: $\tan(\alpha) = \frac{x}{20}$. Mas, esta razão é equivalente à $\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$.

Logo:

$$\frac{x}{20} = \frac{5}{12} \implies x = \frac{20 \cdot 5}{12} = \frac{100}{12} \implies x \approx 8,3.$$

Portanto, a profundidade do rio é de aproximadamente 8,3 m. $\square$

Exemplo 4.7. (ENEM/MEC) - 2017

Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B \cdot \cos(kt)$ em que A , B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

Solução. Segundo George Polya, primeiro devemos compreender o problema. para tanto, considerando as informações contidas na tabela, observamos duas informações revelantes para a resolução do problema: A pressão mínima e máxima que serão fundamentais para modelarmos a função $P(t)$. A segunda etapa, como sabemos, é a inter-relação dos dados do problema para estabelecermos um plano. Veja que o problema apresenta o máximo e mínimo da função $P(t)$ e já sabemos que a função $\cos(t)$ assume valor mínimo igual a -1 e valor máximo igual 1 . Assim, devemos nos perguntar, quando que a função $P(t) = A + B \cdot \cos(kt)$ terá valor mínimo e máximo? Resposta: Quando $\cos(kt) = -1$ teremos que $P(t)$ será mínimo e para $\cos(kt) = 1$, $P(t)$ é máximo, desta forma, com estas duas informações, vamos descobrir os valores de A , B e k , e finalmente escrever expressão da função $P(t)$. Assim estaremos executando o nosso plano, que é a terceira etapa na nossa resolução.

Se para $\cos(kt) = -1$, a pressão é mínima, então teremos:

$$A + B \cdot (-1) = 78 \implies A - B = 78 \quad (1)$$

Quando se tem $\cos(kt) = 1$, a pressão é máxima, então ficaremos com:

$$A + B \cdot (1) = 120 \implies A + B = 120 \quad (2)$$

Com isso, por (1) e por(2), teremos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} A - B = 78 \\ A + B = 120 \end{cases}$$

Somando as equações obtemos $2A = 198$, daí $A = 99$.

Substituindo o valor de A na segunda equação teremos $B = 120 - 99$, de onde se tem $B = 21$

Agora nos resta encontrar o valor de k . Antes disso, observe que o enunciado afirma que t representa a variável tempo, medida em **segundo**, entretanto na tabela apresentada no problema o número de batimento é por **minuto**, 90 bpm. Pelo enunciado ainda, um batimento cardíaco representa o tempo necessário para se dá um volta completa no ciclo

trigonométrico. Assim, vamos descobrir qual o tempo, em segundos, para que se tenha uma volta completa, ou seja.

$$\frac{90}{1} = \frac{60s}{x} \implies x = \frac{60}{90} \implies x = \frac{2}{3}.$$

Assim, $\frac{2}{3}s$ é o período da função $P(t) = A + B \cdot \cos(kt)$. Por outro lado, já sabemos que o período é dado $P = \frac{2\pi}{|c|}$, que no nosso problema, c está representado por K , daí ficamos com:

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{2}{3} \implies k = \frac{3 \cdot 2\pi}{2} \implies k = 3\pi.$$

Logo a função $P(t)$ obtida pelo cientista é:

$$P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi t).$$

Plano executado com sucesso. Agora pela última etapa da resolução de problemas proposta por Polya, iremos fazer um retrospecto da nossa solução com a seguinte interrogação: A nossa expressão para $P(t)$ está realmente correta?

Para verificarmos se a função $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi t)$ está correta vamos analisar se o seu mínimo e máximo são, respectivamente, 78 e 120.

Para tanto, a função $P(t)$ será mínima quando $\cos(3\pi t)$ for mínimo e isso ocorre, por exemplo, para $t = 1$, daí se $t = 1$, teremos:

$$P(1) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi \cdot 1) \implies P(1) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi) = 78.$$

Mas, quanto vale o $\cos(3\pi)$?. Considerando a Figura 3.48, sabemos que π corresponde à meia volta sobre o ciclo trigonométrico e 2π é uma volta completa, desta forma 3π é uma volta e meia sobre o ciclo, assim π e 3π possuem o mesmo cosseno, isto é $\cos(3\pi) = -1$, daí ficaremos com:

$$P(1) = 99 + 21 \cdot (-1) \implies P(1) = 99 - 21 = 78.$$

Sendo exatamente a pressão mínima dada no enunciado. Por outro lado, se substituirmos t por 0, obteremos o seu valor máximo, veja:

$$P(0) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi \cdot 0) \implies P(0) = 99 + 21 \cdot \cos(0)$$

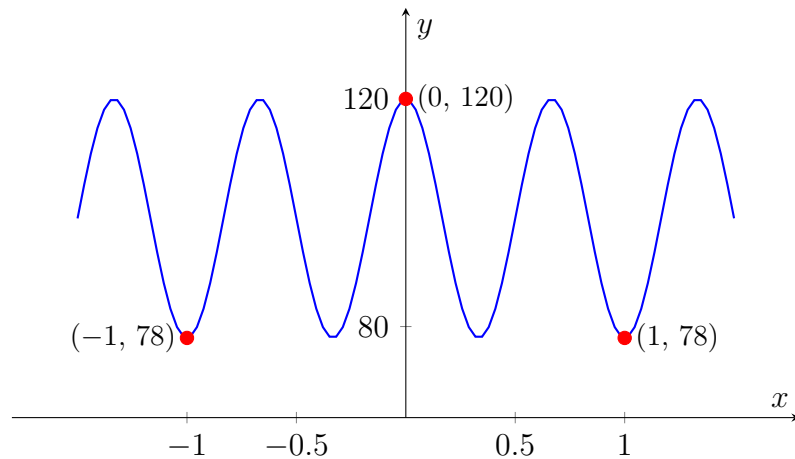
Sendo $\cos(0) = 1$, ficamos com:

$$P(0) = 99 + 21 \cdot 1 \implies P(0) = 99 + 21 = 120$$

Que é exatamente o valor da pressão máxima.

A Figura 4.24, a seguir, retrata graficamente a solução problema.

Figura 4.24: Representação gráfica da função $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi t)$



Fonte: Autoria própria (2025)

Com isso, concluímos que a solução do problema está correta.

□

A trajetória percorrida ao longo desse capítulo permitiu consolidar os conhecimentos abordados nos capítulos anteriores, demonstrando como os conceitos de semelhança de triângulos e Trigonometria — tanto no triângulo retângulo quanto na circunferência — articulam-se de maneira eficiente na resolução de problemas. Por meio de situações contextualizadas, evidenciou-se o potencial da Trigonometria para lidar com distâncias inacessíveis, medidas indiretas e outras aplicações práticas relevantes ao cotidiano e ao ensino. A conexão entre teoria e prática mostrou-se essencial para promover uma aprendizagem significativa, favorecendo a compreensão e a construção dos conceitos por parte dos estudantes.

Capítulo 5

Considerações finais

Toda sequência de conteúdos a ser desenvolvida em sala de aula deve ser cuidadosamente planejada, levando em consideração os aspectos favoráveis e desfavoráveis e seu impacto na aprendizagem. Tal planejamento deve abranger não apenas a seleção adequada de estratégias e metodologias, mas também a escolha criteriosa de recursos didáticos que favoreçam a construção de aprendizagens significativas. Nesse sentido, a proposta desenvolvida ao longo desta dissertação buscou contribuir de forma efetiva para o ensino e a aprendizagem da Trigonometria, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, áreas em que frequentemente se observa uma defasagem conceitual sobre esse conteúdo.

A escolha da temática justifica-se pela relevância da Trigonometria no currículo escolar e por sua ampla aplicação em diversas áreas do conhecimento, como a Física, a Engenharia e a Tecnologia. No entanto, sua abordagem tradicional, muitas vezes restrita à memorização de fórmulas e aplicação mecânica de procedimentos, acaba por afastar os estudantes do real significado dos conceitos. Diante disso, propôs-se neste trabalho uma sequência de conteúdos que contempla uma abordagem mais contextualizada, exploratória e interativa, com foco na compreensão conceitual e na aplicação prática da Trigonometria.

Durante o desenvolvimento do trabalho, foram destacadas sugestões didáticas para os professores, organizadas em seções e subseções, com o intuito de facilitar a implementação da proposta em sala de aula. Entre essas sugestões, incluem-se questionamentos que estimulam o pensamento crítico, antecipação de dúvidas recorrentes dos alunos e propostas de atividades com o uso de tecnologias educacionais, como o software Geogebra e a plataforma PhET Interactive Simulations. Essas ferramentas possibilitam visualizações dinâmicas e experimentações que tornam o conteúdo mais acessível e envolvente para os estudantes, ao mesmo tempo em que promovem maior interação com os conceitos matemáticos.

No entanto, para que tais sugestões sejam efetivamente incorporadas à prática docente, é fundamental que o professor esteja disposto a romper com sua zona de conforto

e com o modelo tradicional e tecnicista de ensino, o qual ainda predomina em muitas escolas. A adoção de metodologias ativas, centradas no estudante e orientadas para a construção do conhecimento de forma colaborativa e investigativa, exige do docente uma postura reflexiva, criativa e aberta à inovação. Isso demanda, inclusive, formação continuada e momentos de troca de experiências entre os profissionais da educação, de modo a fortalecer a cultura de experimentação pedagógica e de aprimoramento contínuo.

A proposta apresentada nesta dissertação também abre possibilidades para futuras investigações e desdobramentos. Por exemplo, seria extremamente enriquecedor realizar estudos de campo com aplicação prática da sequência dos conteúdos sugerida, a fim de observar seus efeitos na aprendizagem dos alunos e na atuação docente. Além disso, a coleta de dados por meio de entrevistas com professores e estudantes poderia fornecer informações mais detalhadas sobre os principais desafios enfrentados no ensino da Trigonometria. Esses dados permitiriam não apenas validar e aperfeiçoar a proposta aqui apresentada, mas também subsidiar novas iniciativas voltadas à melhoria do ensino da matemática como um todo.

Outro aspecto relevante a ser considerado em investigações futuras refere-se à inclusão da interdisciplinaridade como elemento potencializador da aprendizagem. A Trigonometria, por suas múltiplas aplicações, pode ser explorada em conexão com conteúdos da Física, Geografia, Arte e até mesmo com situações cotidianas, favorecendo uma abordagem mais integrada do conhecimento e estimulando o interesse dos alunos. Nesse contexto, o trabalho com projetos, estudos de caso e resolução de problemas reais são estratégias que podem complementar e enriquecer ainda mais a sequência proposta.

Conclui-se, portanto, que o trabalho desenvolvido nesta dissertação contribui significativamente para o repensar do ensino da Trigonometria no Ensino Médio, ao propor uma abordagem fundamentada em práticas sustentadas por recursos didáticos atuais. Espera-se que essa proposta inspire professores a explorar novas possibilidades pedagógicas, valorizando o protagonismo do aluno no processo de aprendizagem e promovendo um ensino mais significativo, prazeroso e eficaz.

Referências Bibliográficas

ALVES, Alberto Cunha. **O Geogebra como ferramenta didática no ensino de Geometria Euclidiana**. 2013. Dissertação de mestrado (PROFMAT). Universidade Federal do Piauí - UFPI. Disponível em: <<https://profmato-sbm.org.br/dissertacoes/?aluno=alberto+cunha&titulo=&polo=>>. Acesso em: 14 de maio de 2025.

BARROS, Rafael Lameira; SÁ, Pedro Franco de. Incrível história do número pi. **Revista História da Matemática para Professores**, v. 8, n. 1, p. 1–11, 2022. Disponível em: <<https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/80>>. Acesso em: 28 de nov. de 2024.

BERNARDO, Nívio. **Lançamento: o que é Lançamento oblíquo? - Vamos Estudar Física**. Disponível em: <https://vamosestudarfisica.com/lancamento-o-que-e-lancamento-obliquo/#google_vignette>. Acesso em: 08 jan. 2025.

BEZERRA, Manuel Jairo. **Curso de Matemática para o cursos de segundo grau**. 5.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1961.

BONJORNIO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: geometria e trigonometria: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias**. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/pnem.pdf>>. Acesso em: 16 jan. de 2025.

BROLEZZI, Antonio Carlos. **A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática**. 1997. Tese (Doutorado em Didática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997. Disponível em <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-29082013-153622/pt-br.php>>. Acesso em: 07 de maio de 2025.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria/ Números Complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

CARVALHO, Paulo César; WAGNER. Eduarco; MORGADO, Augusto César; LIMA, Elon Lages. **Temas e problemas**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

COSTA, Nielce M. Lobo da. **A história da trigonometria**. Educação Matemática em Revista-Revista da SBEM,(10), p. 60–68, 2003. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo5/mod3_pdf/historia_trigono.pdf>. Acesso em: 12 de out. de 2024.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. Ed. São Paulo: Atual, 2013.

GADELHA, Daniel Abreu. **O uso do círculo trigonométrico como ferramenta didática no ensino da trigonometria**. Universidade Federal da Paraíba, 2023. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/28984>>. Acesso em: 20 de out. de 2024.

LEONARDO, Fábio Martins (Editor). **Conexões: Matemática e suas Tecnologias**. 1 Ed. São Paulo: Moderna, 2020.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar 3: trigonometria**. 9. Ed. São Paulo: Atual, 2013.

MATTOS, Robson Aldrin Lima; FAGUNDES, Teresa Cristina Pereira Carvalho. **A importância dos jogos para a construção de conceitos matemáticos. Capacitação docente e responsabilidade social: aportes pluridisciplinares**, p. 77–96, 2010. Disponível em: <<https://www.academia.edu/download/114618088/tenorio-9788523208912-05.pdf>>. Acesso em: 20 de nov. de 2024.

MÁXIMO, Antonio; ALVARENGA, Beatriz. **Curso de Física - Volume 1**. - São Paulo: Scipione, 2010.

OLIVEIRA, Carlos André Carneiro de. Trigonometria: O radiano e as funções seno, cosseno e tangente. 2014. **Tese de Doutorado. Universidade Federal de Campina Grande**. Disponível em: <<http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/2169>>. Acesso em: 18 de dez. de 2024.

OLIVEIRA, Francisco Canindé de. **Dificuldades no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades**. 2006. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/16022>>. Acesso em: 02 de fev. de 2024.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; PINHEIRO, Márcio Rodrigo da Rocha; **Coleção elementos da matemática, 1** : conjuntos, funções, aritmética. – 3 ed. – Fortaleza – Editora VestSeller - 2010.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática Paiva - 2.** — 2. ed. — São Paulo : Moderna, 2010 .

PASCHOAL, Gilmar Steigleder. **O ensino de trigonometria no ensino médio: uma abordagem com a resolução de problemas.** Universidade Federal de Santa Maria, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.ufsm.br/handle/1/16732>>. Acesso em: 10 de out. de 2024.

PEREIRA, Sandra Regina Ferreira; PEREIRA, Marcos Fabrício Ferreira. O ensino de semelhança de triângulos na opinião de alunos. **Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades.** São Paulo, v. 13. 2016. Disponível em:<https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7486_3464_ID.pdf>. Acesso em: 2 de out. de 2024

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução e adaptação - Heitor Lisboa de Araújo - Rio de janeiro: Interciência, 1995.

Simulações Interativas PhET. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/>. Acesso em: 20 de jan. de 2025.

ZAGO, Glaciete Jardim; SCIANI, Walter Antonio. **Trigonometria.** 2^a ed. São Paulo: Érica - (Coleção Estudo e Use, Série Matemática), 1997.