Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Marcos Rodrigues de Sousa

ENSINAR COM AS MÃOS, APRENDER COM SIGNIFICADO: UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS NA TRIGONOMETRIA ESCOLAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Teresina - 2025

Marcos Rodrigues de Sousa

Dissertação de Mestrado:

ENSINAR COM AS MÃOS, APRENDER COM SIGNIFICADO: UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS NA TRIGONOMETRIA ESCOLAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação submetida à Coordenaçao do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador: Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira.

Coorientadora: Prof^a. Dr^a. Lya Raquel Oliveira dos Santos.

Teresina - 2025

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S725e Sousa, Marcos Rodrigues de.
Ensinar com as mãos, aprender com significado: um estudo sobre a utilização de materiais concretos na trigonometria escolar na Educação Básica / Marcos Rodrigues de Sousa. -- 2025.
132 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2025.
"Orientador: Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira. Coorientadora: Profa. Dra. Lya Raquel Oliveira dos Santos".

1. Matemática Estudo e Ensino. 2. Trigonometria. 3. Didática de Ensino. 4. Educação Básica. I. Oliveira, Gilvan Lima de. II. Santos, Lya Raquel Oliveira dos. III. Titulo.

CDD 510.07

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Marcos Rodrigues de Sousa

ENSINAR COM AS MÃOS, APRENDER COM SIGNIFICADO: UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS CONCRETOS NA TRIGONOMETRIA ESCOLAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação submetida à banca examinadora abaixo discriminada em defesa pública e aprovada em 22/08/2025.

BANCA EXAMINADORA

Gilvan Lima de Oliveira

Prof.: Dr. Gilvan Lima de Oliveira. (Orientador)

Universidade Federal do Piauí

Lya Raquel Oliveira dos Santos

Profª. Drª. Lya Raquel Oliveira dos Santos. (Coorientadora)

Universidade Federal do Piauí

Aurineide Castro Fonseca

Profª. Drª. Aurineide Castro Fonseca

Universidade Federal do Piauí

Prof.: Me. Mário Gomes dos Santos

Universidade Federal do Piauí

Afonso Norberto da Silva

Prof.: Dr. Afonso Norberto da Silva

Universidade Estadual do Piauí

Teresina - 2025

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho, primeiramente, à Deus e depois à minha mãe, Maria Rodrigues de Sousa, que sempre esteve ao meu lado durante todos os momentos da minha vida e, principalmente, pelo apoio incondicional depositado a mim para a concretização deste projeto.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus, por estar ao meu lado durante toda a jornada, por ser meu amparo, meu alicerce, minha fortaleza durante todo o processo deste projeto.

Em segundo lugar, a minha família, em especial, a minha mãe, pelo apoio e incentivo despendido durante todo o percurso, estendo este, aos meus familiares.

À Sociedade Brasileira da Matemática – SBM, pela oportunidade e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela bolsa de estudos ofertada que foi de grande valia para a concretização dos meus estudos.

À UFPI pela oportunidade de capacitação e pela qualidade do curso ofertado.

Aos professores do programa do Profmat da UFPI que contribuíram, significativamente, para o meu desenvolvimento, crescimento acadêmico e profissional.

Ao meu orientador, Professor Dr. Gilvan Lima de Oliveira e à minha coorientadora, Professora Dr.ª Lya Raquel Oliveira dos Santos, pela paciência, pelos ensinamentos, atenção, apoio e incentivo dado durante todo o curso.

Aos meus colegas mestrandos do programa Profmat da UFPI dos anos de 2023 e 2024 pelos estímulos, compartilhamentos, ensinamentos e apoio despendido durante o curso.

À direção da escola (CETI Desembargador Heli Sobral) que leciono, em nome, do diretor César Honório, estendo meus agradecimentos aos demais colegas da Escola e, em especial, aos alunos do Ensino Médio que se fizeram presentes participando no desenvolvimento e construção deste Projeto de Pesquisa.

““Mas graças a Deus, que nos dá a vitória por meio de nosso Senhor Jesus Cristo.”.

1 Coríntios 15:57.

RESUMO

Este trabalho investiga como o uso de materiais concretos pode aprimorar o ensino-aprendizagem da trigonometria na Educação Básica. A pesquisa foi desenvolvida no CETI Desembargador Heli Sobral, em Teresina-PI, com alunos do Ensino Médio durante as aulas de matemática. O material concreto utilizado foi o Círculo Trigonométrico Interativo (CTI), construído pelo mestrando, que possibilitou aos estudantes aplicar os conceitos teóricos de trigonometria de forma prática, lúdica e dinâmica. A proposta teve como objetivos analisar o impacto do dispositivo na compreensão dos conceitos, identificar estratégias de abordagem mais eficazes, estimular a resolução de problemas contextualizados e coletar o feedback dos alunos sobre sua experiência. Fundamentada em referências teóricas e na BNCC (Brasil, 2018), a pesquisa mostrou que o uso do dispositivo promoveu maior engajamento, raciocínio lógico, criatividade e autonomia dos estudantes. Os resultados indicaram que as aulas se tornaram mais atrativas e significativas, refletindo em melhor desempenho tanto nos testes aplicados durante o projeto quanto nas avaliações bimestrais, evidenciando a efetividade do material na aprendizagem da trigonometria.

Palavras-chave: educação matemática; experimentação; material concreto; trigonometria.

ABSTRACT

This study investigates how the use of concrete materials can enhance the teaching and learning of trigonometry in Basic Education. The research was conducted at CETI Desembargador Heli Sobral, in Teresina, Brazil, with high school students during mathematics classes. The concrete material employed was the Interactive Trigonometric Circle (CTI), designed by the researcher, which enabled students to apply theoretical concepts of trigonometry in a practical, playful, and dynamic way. The objectives included analyzing the impact of the CTI on students' understanding of trigonometric concepts, identifying more effective teaching strategies, encouraging the resolution of contextualized problems, and collecting students' feedback on their learning experience. Grounded in theoretical references and the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC, 2018), the study revealed that the CTI fostered greater engagement, logical reasoning, creativity, and autonomy among learners. The results demonstrated that classes became more attractive and meaningful, leading to improved performance both in the project's assessments and in subsequent bimonthly evaluations, thus evidencing the effectiveness of the material in trigonometry learning.

Keywords: mathematics education; experimentation; concrete material; trigonometry.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

O processo educacional tem sofrido intensas transformações com o avanço e inserção das ferramentas tecnológicas no ambiente escolar. Nesse contexto, Desmurget (2021), em A fábrica de cretinos digitais, alerta para os riscos do uso indiscriminado das telas, ressaltando impactos negativos no desenvolvimento cognitivo e no aprendizado dos estudantes. Houve uma evolução perceptível com relação à quantidade e qualidade dos materiais didáticos utilizados pelos docentes em sala de aula, que se resumiam, até pouco tempo, a um quadro negro, giz, apagador e livro didático e nos últimos anos, com estes avanços, já dispomos de outros recursos didáticos mais modernos, a saber: tablets, datashow, smartphones, lousa digital dentre outros, que surgiram para facilitar e fomentar este processo educacional.

Para Pinto (2005, p. 792), "a função da tecnologia coincide com a promoção da liberdade pelas perspectivas que abre ao homem para refletir sobre si, seus problemas e exigências". Desse modo, almeja-se que os alunos deixem de memorizar fórmulas e despertem o seu pensamento crítico e reflexivo num presente que seja construído de modo edificante e construtivo.

Atualmente estamos lidando com discentes cada vez mais ligada às tecnologias exigindo, com isso, novas práticas didáticas de abordagem dos conteúdos de sala de aula que despertem o interesse, o entendimento das informações e o desenvolvimento de novas habilidades. Este contato ficou ainda mais visível e presente nos últimos anos de pandemia onde professores e alunos se viram "obrigados" a fazer uso de diversas tecnologias para manter ativo o processo educacional que se deu de forma online e/ou hibrida através do ensino à distância.

Para Moran (2002, p. 1): "Educação a distância é o processo de ensino-aprendizagem, mediado por tecnologias, onde professores e alunos estão separados espacial e/ou temporalmente", com isso, mostrou-se que é possível realizar adaptações significativas e construtivas por intermédio das tecnologias para dar prosseguimento ao processo de ensino e aprendizagem.

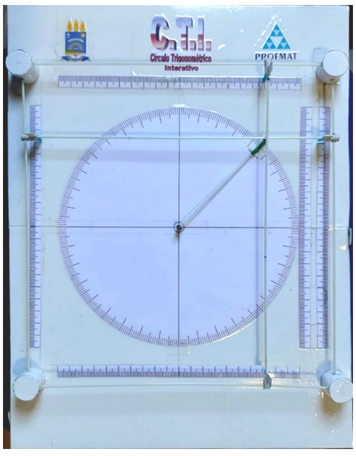
> Será essencial identificar o papel que essas novas tecnologias podem desempenhar no processo de desenvolvimento educacional e, isso posto, resolver como utilizá-las de forma a facilitar uma efetiva aceleração do processo em direção a educação para todos, ao longo da vida, com qualidade e garantia de diversidade. (Werthein, 2000, p. 77)

Dessa forma, este trabalho visa avaliar se o uso deste material concreto pré-fabricado e inventado pelo pesquisador deste projeto servirá como uma nova ferramenta didática eficaz no ensino dos conteúdos de matemática, mais precisamente na introdução ao estudo de trigonometria no ensino Fundamental/Médio e se o mesmo vai despertar o interesse/curiosidade, facilitar a compreensão de forma intuitiva através de uma proposta interativa, lúdica e acessível deste mecanismo, corroborado pelo livro didático.

> Essas novas tecnologias trouxeram grande impacto sobre a Educação, criando novas formas de aprendizado, disseminação do conhecimento e especialmente, novas relações entre professor e aluno. Existe hoje grande preocupação com a melhoria da escola, expressa, sobretudo, nos resultados de aprendizagem dos seus alunos. Estar informado é um dos fatores primordiais nesse contexto. Assim sendo, as escolas não podem permanecer alheias ao processo de desenvolvimento tecnológico ou à pena de perder-se em meio a todo este processo de reestruturação educacional (Ferreira, 2014, p.15)

Desse modo, se faz necessário pensar em novas formas de ensino-aprendizagem aliando as tecnologias a este processo que pode se dar, inclusive, por materiais concretos que visem oportunizar aos discentes a se tornarem ativos no processo de construção de conhecimentos. Pensando nisso, surgiu o CTI (Círculo Trigonométrico Interativo), conforme Figura 1, com o objetivo de criar uma ponte acessível entre o aluno e os conhecimentos a serem adquiridos. A referida ferramenta terá seu funcionamento descrito e detalhado no Capítulo 3.

Figura 1: CTI - Círculo Trigonométrico Interativo



Fonte: Autor

Nesse ínterim, o projeto será desenvolvido na Escola Pública Estadual do Piauí, CETI Desembargador Heli Sobral, Figura 2, localizada em Teresina no bairro Mocambinho, na Avenida Jornalista Josípio Lustosa, s/n, nas turmas do Ensino Médio nas salas de aula da própria escola.

Figura 2: CETI Desembargador Heli Sobral

Fonte: https://lh3.googleusercontent.com/gps-cs-s/AC9h4noaT4wkYMYgHqZ7IaF1sSjM4Y594BrFWkv5YcQyTydtNgtpoTYeZ$_M 9SQnI05xF_I 1n1-vx_v q30T3S3sXqDzWcJy3XyACtjnxdulmZsm1HKvW6exZQG8ZrR2P_P0kcyoRza_1 U027_Q = s680 - w680 - h510 - rw$

Dentro desta proposta esperamos que este trabalho traga muitas reflexões sobre a importância do uso das diversas tecnologias como ferramenta auxiliar do processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos no ambiente escolar, o que, por sua vez, se torna uma tarefa desafiadora para os docentes, como dizia Moran (2005, p. 16), “quanto mais avança a tecnologia, mais se torna importante termos educadores maduros intelectual e emocionalmente, pessoas curiosas, entusiasmadas, abertas, que saibam motivar e dialogar.”.

Portanto, é preciso que os profissionais da educação busquem constantemente se capacitar para atender as novas demandas educacionais explorando outros meios e recursos alternativos para motivar os alunos para um aprendizado eficiente.

Diante das informações acima surgiu o tema: "Ensinar com as mãos, aprender com significado: um estudo sobre a utilização de materiais concretos na Trigonometria Escolar na Educação Básica"como proposto do projeto de pesquisa.

A trigonometria é um ramo vital da Matemática que desempenha um papel importante no desenvolvimento das habilidades de um aluno no que diz respeito à resolução de problemas que envolvem medidas e ângulos. Além disso, o ensino da trigonometria é muitas vezes um grande desafio para os discentes. Como tal, a dificuldade temática inclui o desafio da compreensão dos conceitos abstratos bem como o uso prático de tais conceitos. Portanto, a maioria dos estudantes enfrenta dificuldades em visualizar e realçar os detalhes relacionados aos conceitos acima referidos, incluindo as noções elementares de seno e cosseno.

Havendo a impossibilidade de visualizar e descrever algumas funções relacionadas ao seno e cosseno, em especial, pode ser uma das razões pelas quais os alunos perdem o interesse no tópico. Os pesquisadores da área educacional enfatizam a eficácia do uso de materiais concretos na superação das dificuldades que surgem na abordagem de tal tema. Os materiais concretos incluem modelos tridimensionais, instrumentos geométricos e representações visuais que podem ser utilizados para a melhoria do ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos considerados abstratos pelos discentes.

Dessa forma, a abordagem proposta mostra-se uma excelente estratégia para transformar conceitos abstratos da matemática em experiências práticas e visuais. Ao conectar teoria e prática, ela permite que os alunos compreendam com mais clareza como esses conceitos se aplicam ao cotidiano, facilitando a percepção de seu funcionamento e relevância.

Em todo o caso, embora as teorias educacionais e as práticas pedagógicas tenham evoluído, muitos professores ainda enfrentam desafios ao incorporar satisfatoriamente os materiais concretos no processo de ensino da trigonometria. Portanto, esta dissertação tem como orientação o seguinte questionamento: Como o uso de materiais concretos pode contribuir para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem da trigonometria em contextos escolares?

Especificamente, essa questão se decompõe em outras observações, como a apreciação dos materiais de aprendizagem concreta mais adequados e a melhor maneira de integrá-los ao currículo e avaliar seu impacto nas habilidades dos estudantes. Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo analisar esses fatores com o intuito de obtenção de informações práticas que possam aprimorar a prática pedagógica.

A razão pela qual este tema foi escolhido é a necessidade de melhorar as estratégias pedagógicas envolvidas no ensino da trigonometria. Considerando que o uso de materiais concretos pode abordar questões relacionadas à visualização e à aplicação prática dos conceitos, este estudo visa contribuir para a literatura preenchendo a lacuna de evidências empiricamente feitas sobre a eficácia desse tipo específico de responsabilidade profissional e propor evidências baseadas em recomendações para os educadores, assim como já citava Delval (1998):

> [...] a escola não deve servir para a produção de indivíduos submissos, nem para a simples transmissão de conhecimentos concretos, [...] sua função deve ser a de favorecer o desenvolvimento psicológico e social..., contribuindo para que se tornem adultos livres e autônomos dentro da sociedade. (Delval , 1998, p. 147)

Desse modo, um dos diferenciais deste projeto é o baixo custo de investimento e implementação, a facilidade de aquisição e manipulação dos assessórios e a diversidade de ideias que podem ser desenvolvidas em diferentes níveis de complexidade.

Posto isto, pretende-se estabelecer a viabilidade de se trabalhar com esta proposta em qualquer escola da rede pública com o intuito de amenizar as dificuldades de compreensão e assimilação dos conteúdos matemáticos aqui referidos de forma prática, lúdica e construtiva mostrando as vantagens e desvantagens do seu uso. Já dizia Moran (2006),

> A educação escolar precisa compreender e incorporar mais as novas linguagens, desvendar os seus códigos, dominar as possibilidades de expressão e as possíveis manipulações. É importante educar para usos democráticos, mais progressistas e participativos das tecnologias, que facilitem a evolução dos indivíduos. (Moran, 2006, p.36)

A motivação para esta pesquisa surge da inquietação do professor diante de alunos que, em geral, limitam-se a memorizar fórmulas e realizar cálculos de forma mecânica, sem relacioná-los à vida cotidiana. Busca-se, portanto, oferecer uma formação contemporânea, crítica e significativa, integrando materiais concretos ao processo de ensino-aprendizagem.

Dessa forma, pretende-se favorecer diferentes estilos e necessidades dos estudantes, contribuindo para uma aprendizagem prática, intuitiva e mais eficaz da trigonometria.

Logo, este trabalho de pesquisa tem como objetivo geral investigar como o uso de materiais concretos pode contribuir para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem da trigonometria em contextos escolares. E como objetivos específicos temos os seguintes:

1. Analisar o impacto dos materiais concretos na compreensão dos conceitos trigonométricos pelos alunos.

2. Identificar as melhores estratégias de abordagem dos conceitos básicos da trigonometria e suas relações através do material concreto.

3. Aprender a resolver problemas práticos contextualizados utilizando o material concreto analisado.

4. Coletar feedback dos alunos sobre a utilização dos materiais concretos e suas percepções sobre a melhoria no processo de aprendizagem.

Assim, a presente pesquisa se propõe a abordar os objetivos delineados de maneira sistemática e aprofundada, com o intuito de apresentar um esclarecimento claro e conciso sobre cada um deles.

Capítulo 1

REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico aborda as bases cruciais do aprendizado, dando ênfase as teorias como a da Aprendizagem Significativa, proposta por Moreira e Masini (1982), que considera o saber que os alunos já possuem como alicerce para novas aquisições. Salienta que aprender é um trajeto ativo e constante de reestruturação do pensamento, e na Perspectiva da Experimentação ganha força quando atrelado ao mundo do discente e facilitado por meios como a prática e o manuseio de objetos reais. Tais caminhos incentivam a ação, o raciocínio e a imersão completa dos aprendizes, tornando o ensino mais abrangente e relevante.

A Pirâmide de Aprendizagem de Glasser serve para realçar que maneiras mais dinâmicas, como o fazer e o ensinar uns aos outros, são as que mais fixam o saber. Desse modo, o texto defende o uso de práticas ativas e ferramentas tangíveis, com os materiais concretos, para ampliar a assimilação dos temas e fazer do aluno o ator principal de sua jornada educativa.

1.1 Fundamentos da Aprendizagem

A aprendizagem é um processo complexo e multifacetado que envolve a aquisição, a organização e a aplicação de conhecimentos e habilidades. Para compreender como os materiais concretos podem ser utilizados de maneira eficaz no ensino, é essencial explorar os fundamentos da aprendizagem, considerando as teorias e abordagens que a sustentam.

Teoria da Aprendizagem

Este trabalho de dissertação tem como referencial teórico diversos autores que se complementam para alicerçar esta proposta de projeto. A aprendizagem é um processo que acontece, também, na interação do indivíduo com o ambiente, como já afirmava Libâneo (1994, p.84): "Em sentido geral, qualquer atividade humana praticada no ambiente em que vivemos pode levar a uma aprendizagem.". Pensando nisso, buscamos, inicialmente, desenvolver este trabalho através da interação dos discentes com o ambiente escolar, já que aprender não é um ato isolado e exige-se que o aprendente tenha disposição para adquirir novos conhecimentos.

> Por alguma razão, o sujeito que aprende deve se predispor a relacionar (diferenciando e integrando) interativamente os novos conhecimentos à sua estrutura cognitiva prévia, modificando-a, enriquecendo-a, elaborando-a e dando significados a esses conhecimentos. (Moreira, 2012, p.25)

Dentro deste contexto, o sujeito precisa se predispor a vincular os novos conhecimentos a sua estrutura cognitiva prévia, em um movimento contínuo de diferenciação e integração. Em outras palavras, ao aprender algo novo, a pessoa não apenas acrescenta informações ao que já sabe, mas transforma e reorganiza o conhecimento prévio. O processo de aprendizagem é eficaz quando os novos conteúdos são comparados, contrastados e integrados ao que já se conhece e alteram a estrutura cognitiva dessa pessoa.

O aprendizado é um processo de adaptação, uma reorganização que enriquece o conhecimento, tornando-o mais sofisticado e significativo. Dessa forma, não é uma aquisição passiva de informações, mas um esforço ativo para dar significado ao que é aprendido, integrando conscientemente as várias peças dispersas de informações ao entendimento do sujeito.

Aprendizagem Significativa

Alguns autores da aprendizagem significativa, assim como David Ausubel [1] alertam e chamam a atenção para a ideia de que alunos não são depósitos ou folhas em branco que precisam ser preenchidas de acordo com os interesses das instituições ou docentes, pois, quando chegam às escolas eles já trazem consigo uma bagagem de vivência ou estrutura cognitiva já vivenciada e construída, que ele chama de subsunçor [2], que servirão de alicerces para a aquisição de novos conhecimentos. Temos segundo Moreira e Masini (2001) sobre a teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel que,

[1] David Ausubel (1918-2008) nasceu em Nova York, graduou – se em medicina e psicologia. Dedica-se a psicologia educacional e a teoria cognitivista em parte pelos castigos e humilhações sofridas na escola durante sua infância

[2] A palavra "subsunçor" não existe em português; trata-se de uma tentativa de aportuguesar a palavra inglesa "subsumer". Seria mais ou menos equivalente a inseridor, facilitador ou subordinador.

> A essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias simbolicamente expressas sejam relacionadas de maneira substantiva (não-literal) e não arbitrária ao que o aprendiz já sabe, ou seja, a algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante para a aprendizagem dessas ideias. Este aspecto especificamente relevante pode ser, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito, uma proposição, já significativo. (Moreira e Masini, 2001, p. 41)

Pensando nisso sabemos que os alunos do ensino médio devem possuir uma estrutura cognitiva bem desenvolvida que pode ser preparada e ampliada para receber novos conhecimentos cabendo ao docente saber direcionar da melhor forma possível esse processo de ensino-aprendizagem, que neste caso, será feito com a inserção de material concreto como mecanismo de aquisição de novos conhecimentos.

A Perspectiva da Experimentação

Na experimentação podemos ter um recurso pedagógico interessante de ensino que nos leva a analisar fenômenos que transcendem a teoria levando o aluno a tornar-se investigador e a levantar e construir hipóteses e discussões sobre um determinado objeto na busca de respostas para um determinado problema.

Em consonância com Lewin e Lomascólo (1998, p. 148), "a situação de formular hipóteses, preparar experiências [...] analisar resultados, quer dizer, encarar trabalhos de laboratório como 'projetos de investigação', favorece fortemente a motivação dos estudantes [...]", com esta proposta alternativa buscamos incentivá-los a ter contatos com outros meios de ensino e a proporcioná-los a produção de novas habilidades, mudanças conceituais e porque não o seu desenvolvimento integral, perante uma condução bem clara e objetiva do docente.

> É importante que se sugira novos experimentos para serem aplicados em salas de aula, como forma de diversificar a atuação docente, mas deve-se lembrar de que quando se sugere experimentos de baixo custo, de fácil e rápida execução, que servem para auxiliar e ajudar o professor que não conta com material didático, não podemos esquecer que o nosso papel é cobrar das autoridades competentes, laboratórios e instalações adequadas bem como materiais didáticos, livros, entre outros, para que se tenha o mínimo necessário para que se desenvolva a prática docente de qualidade. (Soares, 2004, p. 12)

Logo, sabemos da importância da presença do Estado como provedor principal da Educação nas escolas públicas, principalmente, no quesito financeiro. Com investimentos mais direcionados para as propostas citadas acima como: local apropriado para desenvolvimento de projetos, na aquisição de materiais didáticos indicado para a realização dos mesmos, na capacitação dos docentes para que consigam lidar com estas novas propostas de ensino e aprendizagem alternativas de experimentação no ambiente escolar oportunizando ao corpo discente um novo olhar sobre a aquisição do conhecimento.

1.2 Abordagens Pedagógicas

Diversas abordagens pedagógicas reconhecem o uso de materiais concretos como uma estratégia eficaz para promover uma melhor compreensão dos conteúdos por parte dos alunos. O ensino baseado nestas ferramentas enfatiza projetos de vida real que incorporam a prática do que foi aprendido. Materiais concretos pode-se apoiar nisso, permitindo que os alunos tornem o que aprenderam em algo tangível fazendo parte do produto final do projeto. Outra é a aprendizagem ativa, onde a participação dos alunos é atraída para o processo de aprendizagem. Materiais concretos levam a uma experiência mais envolvente e dinâmica, onde os alunos se envolvem com os objetos diretamente, de forma ativa, neste processo de aprendizagem construtiva.

A aprendizagem baseada em problemas estimula os alunos a buscar soluções para situações reais ou simuladas, promovendo o desenvolvimento do pensamento crítico e da aplicação prática do conhecimento. Materiais concretos podem ser especialmente úteis aqui, impulsionando o aluno a tornar a situação abstrata em uma em que possam usar os materiais para realmente aplicar e resolver o que aprenderam.

Finalmente, o ensino multissensorial reconhece que diferentes tipos de estímulo podem levar a diferentes formas de ideias. Materiais concretos dão ao aluno uma experiência tátil e visual adicional que pode levar a uma compreensão mais profunda e memorável do que apenas instruções verbais ou leitura. Como tal, os fundamentos de aprendizagem e as várias teorias fornecem uma base teórica forte sobre o porquê os materiais concretos funcionam e como eles podem se integrar adequadamente para uma experiência educacional mais rica e envolvente.

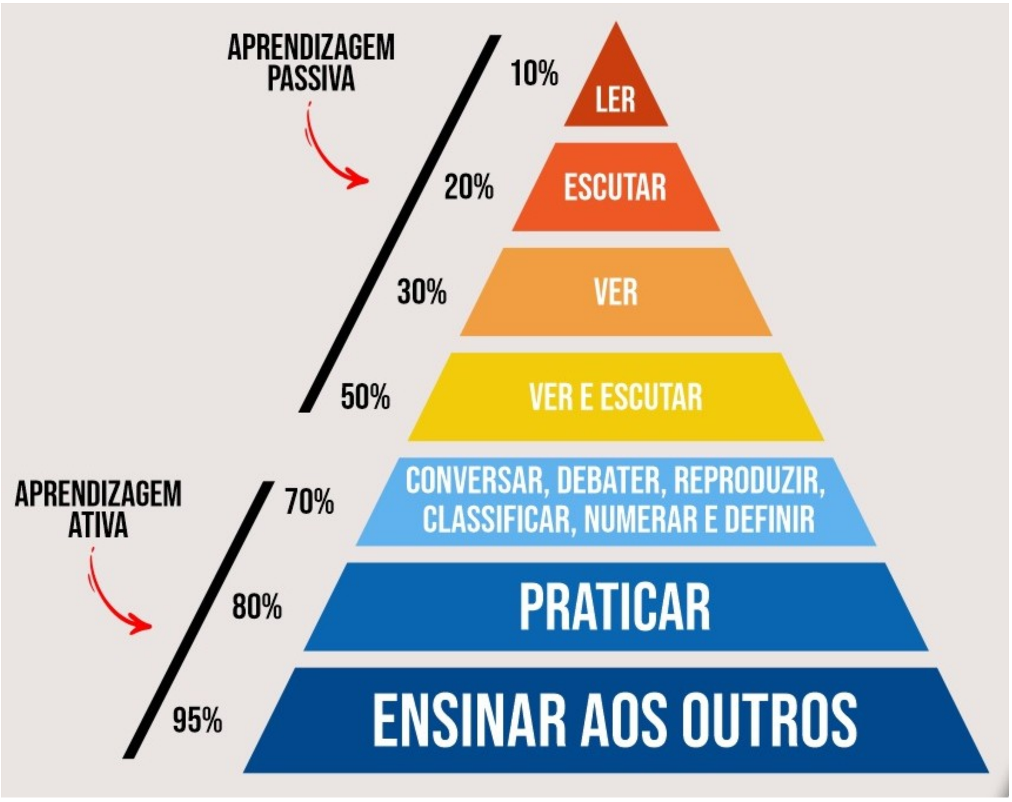
Pirâmide de Aprendizagem

A Pirâmide de Aprendizagem de William Glasser (1925-2013), do notável psiquiatra e educador americano, é um modelo de como alguns métodos de ensino e aprendizado afetam a retenção. Glasser desenvolveu a pirâmide para chamar a atenção para a necessidade na educação de usar estratégias mais interativas e práticas de ensino para superar as metodologias passivas. Os níveis da Pirâmide de Aprendizado de Glasser, conforme a Figura abaixo, são os seguintes:

- Ler (retenção de 10%): a leitura de texto é o método mais passivo e, portanto, menos eficaz para a retenção do conhecimento.

- Ouvir (retenção de 20%): escutar palestras e instruções é mais útil, mas ainda não é ativo o suficiente.
- Ver (retenção de 30%): observação de demonstrações e atividades é um passo mais ativo, apesar de ser "observativo".
- Ver e escutar (retenção de 50%): realizar os dois tópicos anteriores ao mesmo tempo.
- Conversar, debater, reproduzir, classificar, numerar e definir (retenção de 70%): realizar algum(as) destas atividades durante um determinado processo.
- Participar (retenção de 80%): discussão, atividade prática ou imitação pode melhorar significativamente a retenção.
- Ensinando outros (retenção de 95,%): ensinar a outras pessoas o que foi aprendido é a estratégia mais eficaz. Requer a compreensão do conteúdo e a capacidade de transmiti-lo de maneira clara.

Figura 1.1: Pirâmide de Aprendizagem de William Glasser



Fonte: https://www.plantareducacao.com.br/wp-content/uploads/2021/08/Piramide-de-APrendizagem-Glasser-1.png

Observa-se na Figura acima que o processo de aprendizagem de acordo com William Glasser acontece de dentro para fora, ou seja, do individual para o coletivo. Esta proposta busca otimizar o aprendizado dos indivíduos com foco no processo ativo tornando-os centro de sua própria aprendizagem incentivando à autonomia.

Portanto, observa-se que as metodologias ativas e interativas podem proporcionar melhores resultados no processo de aquisição dos conhecimentos, visto que os alunos colocarão a "mão na massa", através da manipulação do material concreto para compreender os conteúdos pesquisados, fortalecendo assim as bases dos princípios matemáticos.

Capítulo 2

TRIGONOMETRIA

Neste capítulo, exploraremos uma visão abrangente sobre a origem da trigonometria e suas diversas aplicações na atualidade, destacando também os principais desafios enfrentados no processo de ensino-aprendizagem dessa área do conhecimento. Abordaremos os conceitos fundamentais da trigonometria, suas fórmulas, e o estudo dos sinais das razões trigonométricas — seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante —, além de noções essenciais como semirretas, ângulos, perpendicularismo, paralelismo, plano cartesiano, círculo trigonométrico e as principais relações entre essas ideias.

O objetivo é evidenciar a importância da trigonometria como base para a construção do conhecimento matemático no contexto escolar, promovendo uma compreensão mais significativa e contextualizada por parte dos alunos.

2.1 Panorama Histórico e Aplicações da Trigonometria

Breve Histórico

O desenvolvimento da trigonometria remonta a tempos antigos, e entre os principais achados históricos que revela os primeiros registros matemáticos das civilizações antigas destaca-se a Tabela de Argila Plimpton 322 (c. 1800 a.C.), escrita em cuneiforme pelos babilônios, que inclui, entre outros, tabelas trigonométricas rudimentares. Outro marco importante foi o Papiro Rhind (c. 1650 a.C.), um documento egípcio, conforme a Figura 4, que apresenta a solução de 85 problemas, abrangendo uma ampla gama de áreas do conhecimento no Egito Antigo. Esses artefatos ilustram as primeiras tentativas de compreender e formalizar as relações geométricas que mais tarde dariam origem à trigonometria.

A história da trigonometria é oriunda da antiga civilização babilônica, mas começou a desenvolver-se de forma sistemática na Grécia Antiga nos estudos das efemérides celestes, do cálculo do tempo e, em seguida, pensada em trabalhos da Geografia. A trigonometria esférica, ou seja, estudo dos triângulos sobre a esfera, um dos primeiros estudos sobre a trigonometria, teve contribuições de Euclides (c. 300 a.C.) considerado “pai da geometria” em sua obra o Fenômenos, e logo depois de Teodósio (c. 20 a.C.) no livro Sobre a Esfera, devido ás necessidades da época em beneficiar a Astronomia.

Figura 2.1: Papiro Rhind

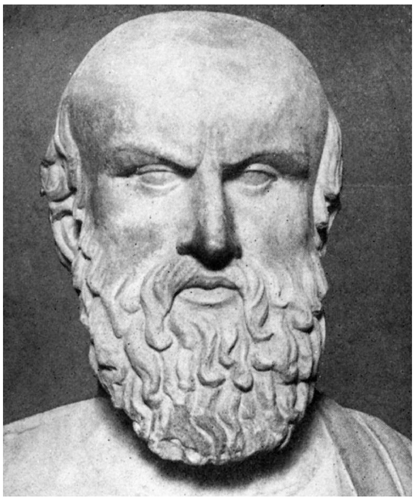
Fonte:

$https : //pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind/media/Ficheiro : Rhind_Mathematical.jpg$

Embora não conhecessem os conceitos trigonométricos como o conhecemos hoje, os egípcios já o utilizavam na construção das pirâmides e os babilônicos nos cálculos astronômicos, mas, foram os gregos que iniciaram o seu estudo mais formal. Dentre estes podemos destacar os trabalhos de Hipócrates de Quio (460 – 370 a.C.) um dos pioneiros no estudo das relações entre os lados e os ângulos de triângulos; Aristarco de Samos (c. 300 a.C) em sua obra intitulada de: Sobre as Distâncias do Sol e da Lua, que descrevia entre outras coisas, a distância da Terra ao Sol, o diâmetro do Sol e da lua; Apolônio de Perga (c. 200 a.C.) que achou uma aproximação para o valor de $\pi = 3{,}1416$ em sua obra Entrega Rápida, que mais tarde foi utilizada pelos hindus.

Outra figura importante dentro deste contexto é o matemático Hiparco de Nicéia (c. 180 a.C.), Figura 5, que era considerado o “pai da trigonometria” por suas contribuições significativas para esta área, dentre elas, a primeira tabela trigonométrica e o desenvolvimento da divisão do círculo em 360 graus, em seus trabalhos de cordas e que, posteriormente, atingiu seu ápice com a obra Almagesto de Cláudio Ptolomeu (c. 150 a.C.) que mostrava como funcionava, matematicamente, o sistema solar, sendo suas tabelas amplamente utilizadas pelos astrônomos durante séculos.

Figura 2.2: Hiparco de Nicéia



Fonte:
https://www.meteorologiaenred.com/wp-content/uploads/2020/05/Hiparco-deNicea-apo.jpg

Posteriormente a estes acontecimentos tivemos contribuições significativas no mundo islâmico como os trabalhos desenvolvidos por Al-Battani (825-929 d.C) que sistematizou a trigonometria como uma disciplina separada da geometria e desenvolveu as funções da tangente, secante e cossecante com aplicações em cálculos astronômicos e dos trabalhos de AlKhwarizmi (780-1476 d.C) que tornou a trigonometria acessível aos matemáticos e astrônomos da época com o aprimoramento das tabelas astronômicas e dos cálculos mais precisos para a navegação.

Durante o Renascimento, entre os séculos XIV e XVI, tivemos as contribuições de Fibonacci (1172-1250), que em sua obra Prática da Geometria colaborou na expansão marítima européia com o uso da trigonometria na Cartografia e na Topografia, da contribuição dos alemães, dentre eles, George Peurbach (1423-1462) que traduziu o Almagesto para desenvolver tabelas de senos mais precisas e, em seguida, por João Regiomontano (1436-1476) com sua obra, De Triangulis, para resolução de triângulos usando a Trigonometria do triângulo retângulo.

Na trigonometria moderna do século XVII podemos citar as contribuições significativas de René Descartes (1596-1650), Isaac Newton (1700–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) no trabalho sobre o cálculo infinitesimal que permitiu a expansão da trigonometria para outras áreas como, física, engenharia, música, arquitetura, dentre outras.

A trigonometria é o ramo da matemática que estuda as relações entre ângulos e os lados dos triângulos. O seu nome origina-se das palavras gregas “trigonon” e “metron”, que significam um triângulo e uma medida, respectivamente, refletindo a sua principal área de interesse, isto é, a medição dos triângulos. Os principais conceitos deste campo, como as funções seno, cosseno e tangente, são necessários para compreender as relações angulares e proporções de lados num triângulo, o que o torna base essencial para a construção de outros conhecimentos matemáticos.

Aplicações da Trigonometria

A trigonometria é utilizada, por exemplo, na construção civil para calcular alturas e distâncias inacessíveis, na navegação para determinar rotas por meio da localização geográfica, e até mesmo na tecnologia, como nos sistemas de GPS e em softwares de modelagem 3D. Além disso, áreas como a medicina fazem uso de princípios trigonométricos em exames de imagem, enquanto a engenharia de som e a física recorrem a suas funções para compreender ondas e vibrações.

Os sistemas de GPS dependem da trigonometria para calcular a distância e a rota de um lugar. Arquitetura e construção; O conceito é usado ao planejar e construir edifícios, pontes, etc. Esses são apenas alguns exemplos de como a trigonometria facilita nosso entendimento e interação com o mundo ao nosso redor.

Além disso, a trigonometria é importante para descrever todos os tipos de movimentos periódicos. Mais do que isso, essa ciência é uma base da química e é amplamente usada na geografia, cartografia, astronomia e muitos outros campos do conhecimento. Segundo Ramos et al.,

> O diálogo com professores de áreas afins que fazem uso de conceitos de trigonometria pode ser frutífero através da compreensão das aplicações desses conceitos em contextos diversificados e da promoção de a reflexão acerca de suas relações matemáticas próprias. (Ramos et al., 2014, p.2)

Observa-se, nas contribuições dos autores, a relevância de integrar a trigonometria de forma contextualizada em diversas áreas do conhecimento, proporcionando aos discentes uma abordagem diferenciada no processo de ensino-aprendizagem. A trigonometria, como fundamento essencial, permeia praticamente todas as áreas do saber.

Dificuldades comuns no ensino de Trigonometria

Apesar de sua importância, o ensino de trigonometria é muitas vezes um desafio para estudantes e educadores. A principal questão é a abstração dos conceitos; as funções trigonométricas são difíceis de visualizar e podem ser difíceis de entender. Os estudantes muitas vezes têm dificuldade de imaginar como essas funções se aplicariam a situações reais. É um desafio decorar fórmulas a seco; é especialmente desmotivador. Se eles não estiverem conectados com o porquê e como, então tal tarefa facilmente se transforma em uma lesma mecânica inexistente e não criativa.

Além disso, a geometria é mais visual e muitos docentes não dispõem de habilidades motoras para desenhar e/ou recursos tecnológicos e didáticos para expor esta temática, em especial, o estudo da trigonometria no ciclo que acaba se tornando abstrata. Por fim, os estudantes podem achar a trigonometria desconectada de suas vidas reais e, portanto, sem sentido.

Compreender a relevância do que está sendo aprendido é um dos principais impulsos em qualquer campo, especialmente para um assunto tão cheio de detalhes quanto a trigonometria. Assim, este conteúdo precisa ser ensinada de tal maneira que os conceitos se tornem mais acessíveis e interessantes aos alunos para que consigam visualizá-los nos diversos contextos.

Animar como uma estratégia de ensino, palpável e dinâmica, almejando renomear as coisas para que soem menos intimidadoras e mais acessível, tornando o processo de assimilação mais prática, inclusive, na resolução de problemas iminentes que sirvam para facilitar a abordagem da trigonometria como um campo prazeroso e menos desprovido de sentido para os estudantes.

2.2 Fundamentos e Elementos da Trigonometria

Introdução a Trigonometria

A trigonometria além do estudo que envolve as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos pelas razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) é fundamental para o estudo de resolução de problemas envolvendo triângulos nos diversos contextos.

Entre os conceitos fundamentais de trigonometria que serão abordados neste trabalho e que servirão como base para a construção de novos conhecimentos, destacam-se os triângulos retângulos e seus elementos, como a hipotenusa e os catetos. Além disso, exploraremos as razões trigonométricas que relacionam os lados do triângulo com seus ângulos, incluindo o seno, o cosseno, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante, em conjunto com outros conceitos que serão apresentados nos próximos subitens deste trabalho.

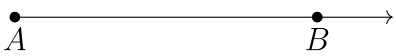
A trigonometria abrange, também, o círculo unitário, que é uma visualização gráfica do sistema trigonométrico. Permite visualizar as funções trigonométricas até ângulos não limitados a um triângulo retângulo. O círculo unitário expande o uso da trigonometria para ângulos agudos ou obtusos, ou até mesmo ângulos negativos. Com isso, é possível visualizar e entender o comportamento das funções seno, cosseno e tangente acima de 90°, por exemplo.

Além disso, podemos perceber que tais funções são periódicas, e se repete regular-mente. Contribuindo, também, para resolução de problemas geométricos, descrevendo fenômenos naturais e tecnológicos com mais precisão, dentre muitas outras aplicações.

Semirreta

Uma semirreta é um subconjunto da reta que possui um ponto inicial fixo e se estende infinitamente em uma direção a partir desse ponto. Formalmente, uma semirreta $\overrightarrow{AB}$ pode ser definida como o conjunto de todos os pontos P da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que estão à direita do ponto A, na direção de B, conforme a figura 2.3 abaixo,

Figura 2.3: Semirreta $\overrightarrow{AB}$



Fonte: Autor

Compreendido esta ideia faremos uso desta informação para entendermos outros conceitos dentro do processo de ensino-aprendizagem da trigonometria no ciclo.

Ângulos

Os ângulos fazem parte das noções básica da geometria e é dado pela reunião de dois segmentos de reta orientados (semirretas) a partir de um ponto comum, chamado de vértice do ângulo, gerando um arco que os conecta definindo o tamanho do ângulo.

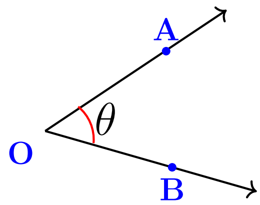
Conforme visualizamos na Figura 2.4 temos O como ponto de encontro entre as duas semirretas $(\overrightarrow{OA})$ e $(\overrightarrow{OB})$ originando um ângulo que pode ser denominado de θ ou $A\hat{O}B$ (no sentido horário ou orientado negativamente) ou $B\hat{O}A$ (no sentido anti-horário ou orientado positivamente) ou $\angle AOB$, como representação de ângulo.

Os ângulos, por sua vez, podem ser medidos em graus (°) ou radianos (rad).

- **Lados do ângulo**: $(\overrightarrow{0A})$ e $(\overrightarrow{0B})$
- **Vértice do ângul**o: O
- **Graus**: Um círculo completo é dividido em 360 graus.
- **Radianos**: Um círculo completo equivale a 2π radianos.

Observação: O graus e radianos são duas unidades de medida para ângulos, mas com definições e aplicações diferentes. Um grau é uma divisão de um círculo em 360 partes iguais, enquanto um radiano é definido como o ângulo subtendido por um arco cujo comprimento é igual ao raio do círculo

Figura 2.4: Ângulo $A\hat{O}B$



Fonte: Autor

Definidos os pontos acima poderíamos mensurar este ângulo através de várias ferramentas, sendo a mais comum nas escolas, o transferidor, porém, neste projeto será utilizado o CTI.

Tipos de Ângulos

No estudo da trigonometria, é possível analisar e classificar diferentes tipos de ângulos, que podem ser categorizados da seguinte forma:

1. **Ângulo Agudo**: Um ângulo que mede menos de 90° ou $\frac{\pi}{2}$ radianos. Temos como exemplos ângulos de 25°, 59°, 89° ou $\frac{\pi}{3}$ radianos, $\frac{\pi}{5}$ radianos e etc.

2. **Ângulo Reto**: Um ângulo que mede exatamente 90° ou $\frac{\pi}{2}$ radianos. Representa uma inclinação perpendicular, como os cantos de uma folha de papel A4.

3. **Ângulo Obtuso**: Um ângulo que mede mais de 90° e menos de 180° ou entre $\frac{\pi}{2}$ e π radianos. Um exemplo seria um ângulo de 150° ou $\frac{5\pi}{6}$ radianos.

4. **Ângulo Raso**: Um ângulo que mede exatamente 180° ou π radianos. Representa uma linha reta.

5. **Ângulo Côncavo ou Ângulo Reflexo**: Um ângulo que mede mais de 180° e menos de 360° ou entre π e 2π radianos. Por exemplo, um ângulo de 240° ou $\frac{4\pi}{3}$ radianos.

6. **Ângulo Completo**: Um ângulo que mede exatamente 360° ou 2π radianos. Representa uma rotação completa, voltando à posição original no sentido anti-horário.

Aprender os diversos tipos de ângulos e suas características próprias é necessário não apenas para a compreensão da geometria, mas para compreender as suas aplicações em diversas situações matemáticas e práticas.

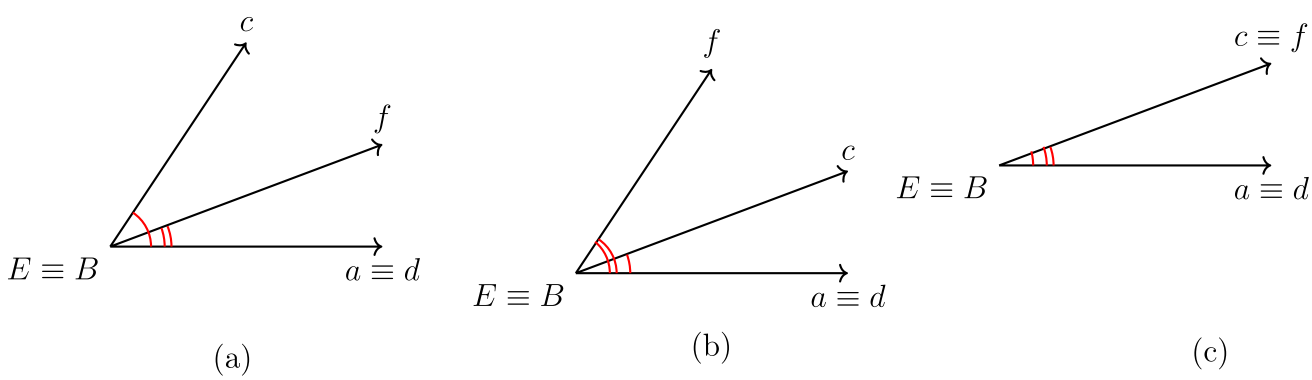
Comparação de ângulos - congruência

Comparar ângulos é uma técnica importante para a geometria, pois é através dela que determinamos várias propriedades das figuras planas. O conceito de igualdade dos ângulos é mais frequentemente chamado de congruência. Dois ângulos são considerados congruentes quando possuem a mesma medida. A palavra “congruente“ vem do latim e significa “coincidir” ou “corresponder”. Assim, ângulos congruentes são iguais em abertura, mesmo que estejam em posições diferentes, em tamanhos diferentes de figuras ou voltados para lados distintos.

De acordo com Iezzi (2013), dados dois ângulos $a\hat{B}c$ e $d\hat{E}f$, podemos transportar o ângulo $d\hat{E}f$ sobre $a\hat{B}c$, de tal forma que a semirreta $\overrightarrow{ED}$ coincida com a semirreta $\overrightarrow{BA}$. Surgem, então, três hipóteses:

1. Ef é semirreta interna a $a\hat{B}c$. Então $a\hat{B}c > d\hat{E}f$. Ver Figura 2.5 (a)
2. Ef é semirreta externa a $a\hat{B}c$. Então $a\hat{B}c < d\hat{E}f$. Ver Figura 2.5 (b)
3. Ef coincide com Bc. Então $a\hat{B}c \equiv d\hat{E}f$. Neste caso, os ângulos $a\hat{B}c$ e $d\hat{E}f$ são congruentes. Ver Figura 2.5 (c)

Figura 2.5: Comparação de ângulos



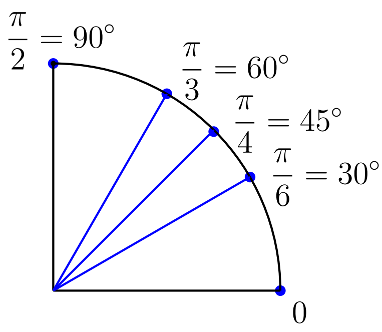
Fonte: Autor

Estes conceitos são essenciais para compreensão de ângulos complementares, suplementares e replementares que serão estudados mais adiante e aprofundados no uso do ciclo trigonométrico.

Ângulos notáveis

Os ângulos notáveis são os ângulos mais conhecidos e trabalhados na trigonometria, cujas medidas servem de base para a inserção dos cálculos das principais funções trigonométricas estudadas nos livros didáticos, como, seno, cosseno e tangente. Os principais ângulos notáveis são 30° ou $\frac{\pi}{6}$, 45° ou $\frac{\pi}{4}$ e 60° ou $\frac{\pi}{3}$ localizados no ciclo trigonométrico de acordo com a Figura 2.6.

Figura 2.6: 1º quadrante no ciclo trigonométrico



Fonte: Autor

Esses ângulos são apresentados no Ensino Fundamental, explorados no Ensino Médio e, posteriormente, aprofundados no estudo das funções trigonométricas. Por suas propriedades conhecidas e valores trigonométricos exatos, os ângulos notáveis facilitam o desenvolvimento do raciocínio matemático e a resolução de diversos problemas geométricos e algébricos.

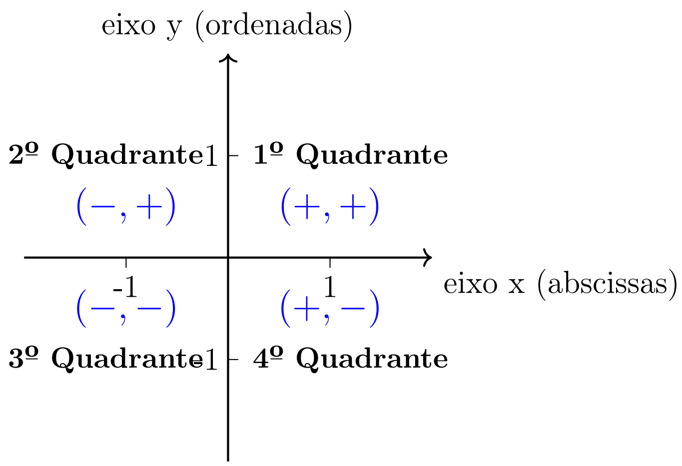
Plano Cartesiano ou $\mathbb{R}^2$

O plano cartesiano foi inventado em 1637 pelo matemático e filósofo francês René Descartes. O plano cartesiano é um sistema de coordenadas que consiste na intersecção de dois eixos perpendiculares que compartilham um plano em comum, sendo o eixo vertical chamado de eixo das ordenadas e o horizontal chamado de eixo das abscissas. Descartes inventou o plano cartesiano para ilustrar a localização de pontos no plano e representar pontos, planos, retas, curvas e círculos usando equações matemáticas.

No plano cartesiano, de acordo com Cavalcante (2015, p. 25) as coordenadas podem ser positivas ou negativas, dependendo do quadrante em que se encontram. Ou seja, a coordenada cartesiana (x, y) terá valores positivos quando estiver à direita ou acima da origem, e valores negativos quando estiver à esquerda ou abaixo, conforme a definição dos quadrantes (Ver Figura 2.7).

- **1° quadrante**: os números serão positivos, pois teremos x $>$ 0 e y $>$ 0.
- **2° quadrante**: teremos x $<$ 0 e y $>$ 0.
- **3° quadrante**: os números serão negativos, pois teremos x $<$ 0 e y $<$ 0.
- **4° quadrante**: teremos x $>$ 0 e y $<$ 0.

Figura 2.7: Quadrantes no plano cartesiano



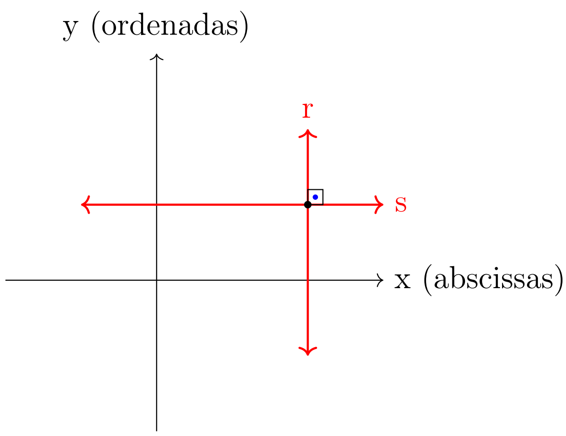
Fonte: Autor

A compreensão dos sinais nos quadrantes vai ajudar na interpretação e resolução do estudo do seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante e suas relações trigonométricas.

Noções de perpendicularismo

A noção de perpendicularismo será abordada pela definição de Muniz Neto (2013, p.13) que afirma, "Dadas duas retas r e s no plano, dizemos que r é perpendicular a s, que s é perpendicular a r ou, ainda, que r e s são perpendiculares quando r e s tiverem um ponto em comum e formarem ângulos de 90° nesse ponto. Escrevemos $r \perp s$ para denotar que duas retas r e s são perpendiculares." Veremos na Figura 2.8, geometricamente, uma representação deste enunciado no plano cartesiano.

Figura 2.8: Retas perpendiculares no plano cartesiano



Fonte: Autor

Como exemplo prático, para situar os nossos alunos dentro do ambiente escolar de sala de aula, temos as quinas de uma parede retangular que formam ângulos retos no encontro das arestas perpendiculares entre si.

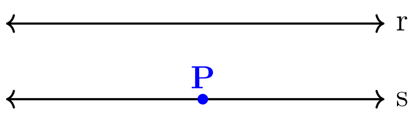
Noções de paralelismo

O paralelismo na matemática é o estudo das relações entre retas, retas e planos e entre planos e das consequências destas relações. No plano euclidiano o paralelismo de duas retas de acordo com o site brasilescola.com [1] pode se dar da seguinte forma:

> Postulado das paralelas: Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada. Na Figura abaixo, dada a reta r, temos: $P \in s$, $s \parallel r$, s é única. Esse postulado, conhecido também como postulado de Euclides (300 a.C.), é a propriedade que caracteriza a Geometria Euclidiana. Duas retas distintas são paralelas quando estão no mesmo plano e não têm ponto comum.

Podemos visualizar o enunciado acima, geometricamente, na Figura 2.9.

Figura 2.9: Retas paralelas



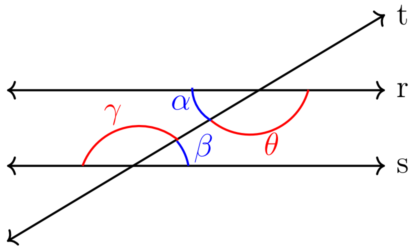
Fonte: Autor

Como exemplo prático, temos os trilhos de um trem em linha reta que são projetados de forma que fiquem paralelos entre si.

Outra noção que iremos abordar no nosso trabalho é a da região interna entre duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal. Tomando o exemplo citado acima, sejam as retas $r \parallel s$ cortada por uma reta transversal t que determinará na parte interna quatro ângulos conforme o demonstrado na Figura 2.10. Com isso teremos que os ângulos $\alpha = \beta$ e $\gamma = \theta$, pois são alternos internos.

[1] https://brasilescola.uol.com.br/matematica/paralelismo-1.htm

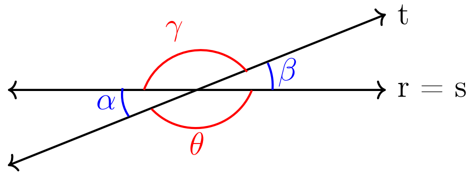
Figura 2.10: Retas paralelas - ângulos alternos internos



Fonte: Autor

Podemos observar, também, que esses ângulos $\alpha = \beta$ e $\gamma = \theta$ podem ser classificados como opostos pelo vértices, se as retas r e s forem coincidentes no mesmo ponto de encontro com a transversal, conforme mostrado na Figura 2.11.

Figura 2.11: Retas concorrentes - ângulos opostos pelo vértice



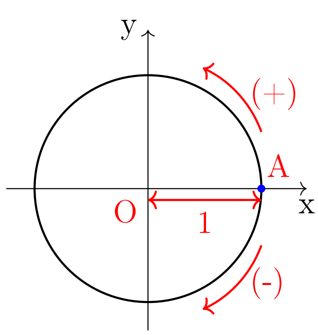
Fonte: Autor

Utilizaremos essas noções como base para determinar os principais tópicos de pesquisa abordados neste trabalho.

2.3 Círculo Trigonométrico

Antes de explorarmos as razões trigonométricas, é importante compreendermos o conceito de ciclo trigonométrico. Consoante Zago (1997), o ciclo trigonométrico é definido como uma circunferência que atende às seguintes condições: seu centro coincide com a origem do sistema cartesiano ortogonal, possui raio unitário e tem como ponto de partida dos arcos o ponto $A(1, 0)$, conforme mostrado na Figura 2.12.

Figura 2.12: Ciclo trigonométrico



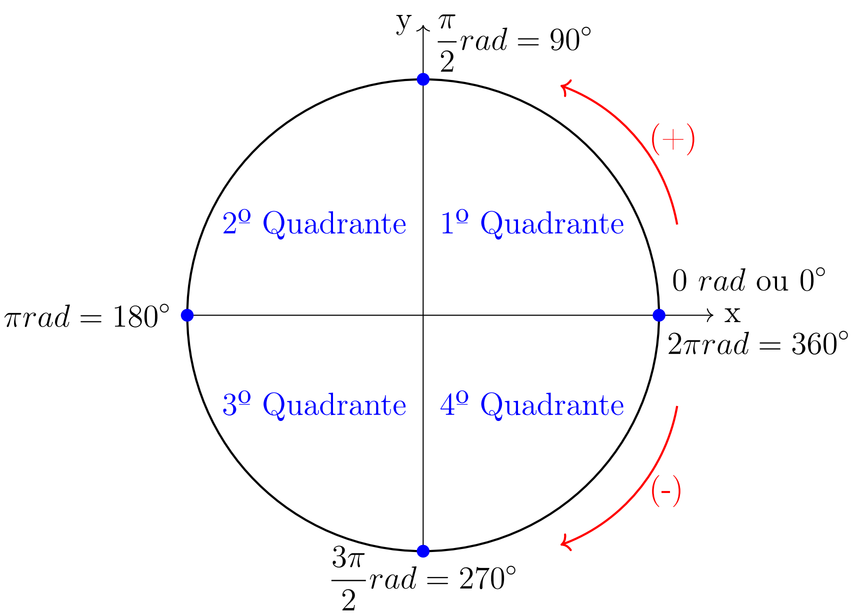
Fonte: Autor

Sendo assim, os ângulos, por sua vez, são medidos a partir do eixo das abscissas (eixo x) podendo ser positivos quando medidos no sentido anti-horário e negativos, no sentindo horário. Neste círculo temos como comprimento o valor de 2π que corresponde a uma volta completa ou equivalentemente a 360°. De forma proporcional, é possível associar os ângulos de $90° = \frac{\pi}{2}$, $180° = \pi$ e $270° = \frac{3\pi}{2}$, aos principais marcos do círculo unitário, os quais determinam os quatro quadrantes, que são definidos no sentido anti-horário.

Considerando θ como o ângulo em análise, podemos estudar a sua posição e a relação com esses quadrantes (Ver Figura 2.13).

- **1º quadrante**: encontraremos os números reais que variam de $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ou $0° \leq \theta \leq 90°$.
- **2º quadrante**: encontraremos os números reais que variam de $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ ou $90° < \theta \leq 180°$.
- **3º quadrante**: encontraremos os números reais que variam de $\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ ou $180° < \theta \leq 270°$.
- **4º quadrante**: encontraremos os números reais que variam de $\frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$ ou $270° < \theta \leq 360°$.

Figura 2.13: Quadrantes no ciclo trigonométrico



Fonte: Autor

A partir das posições dos ângulos dentro do círculo trigonométrico pode-se estabelecer relações entre eles determinando e classificando outros conforme as definições abaixo.

- **Ângulos congruentes**: são os ângulos que possuem a mesma medida.
- **Ângulos complementares**: são os ângulos cuja soma é igual a 90°.
- **Ângulos suplementares**: são os ângulos cuja soma é igual a 180°.
- **Ângulos replementares**: são os ângulos cuja soma é igual a 360°.

O estudo dos ângulos complementares, suplementares e replementares é fundamental na trigonometria, pois permite compreender relações importantes entre ângulos e suas funções trigonométricas. Os ângulos complementares ajudam a estabelecer conexões entre seno e cosseno, enquanto os suplementares auxiliam na interpretação de simetrias no ciclo trigonométrico. Já os ângulos replementares são úteis para a compreensão de padrões em rotações completas.

Todos estes conceitos corroborarão para alicerçar o estudo dos ângulos no ciclo trigonométrico.

Redução ao primeiro quadrante no circulo trigonométrico

A ideia da redução ao primeiro quadrante consiste em, após identificarmos um arco em qualquer outro quadrante, determinarmos os valores correspondentes a um arco no primeiro quadrante com a mesma razão trigonométrica, como o do seno, cosseno ou tangente, através da simetria de reflexão, tomando cuidado com o sinal das funções relacionadas.

Sob a ótica de Bonjorno Junior e Sousa (2020, p.103), "Quando relacionamos o seno e o cosseno de um arco de qualquer quadrante com os valores do seno e do cosseno de um arco do primeiro quadrante, dizemos que estamos fazendo uma redução ao primeiro quadrante." Este processo descrito será feito nos quatro quadrantes do ciclo trigonométrico, tanto no sentido horário, como no sentido anti-horário.

Redução do segundo para o primeiro quadrante

De acordo com Iezzi (2013) temos para a redução do 2° ao 1° quadrante a seguinte afirmação: dado um número real x, tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao eixo dos senos.

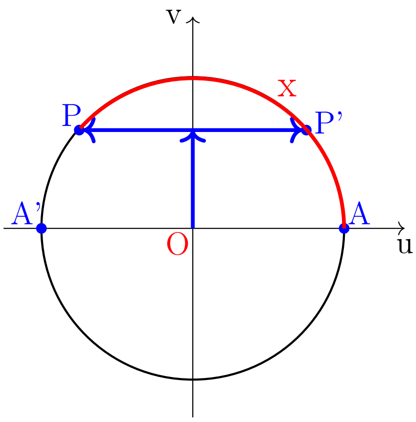
Temos, conforme a figura 2.14, que

$\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{PA'} = \pi$ (no sentido anti-horário) e, como $\overset{\frown}{AP'} = \overset{\frown}{PA'}$, vem

$\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{AP'} = \pi$ e, portanto

$(\overset{\frown}{AP'}) = \pi$ - x.

Figura 2.14: Redução do 2° para o 1° quadrante



Fonte: Autor

Com isso, analisando os sinais dos quadrantes acima e as razões trigonométricas estudadas tem-se as seguintes correlações quanto aos valores e aos sinais dos números do segundo para o primeiro quadrante, a saber,

- $\sin x = \sin(\pi - x)$,
- $\cos x =$ - $\cos(\pi - x)$,
- $\tan x =$ - $\tan(\pi - x)$,
- $\cot x =$ - $\cot(\pi - x)$,
- $\sec x =$ - $\sec(\pi - x)$ e
- $\operatorname{cossec} x = \operatorname{cossec}(\pi - x)$.

Por exemplo, sendo $x = \dfrac{2\pi}{3}$ teremos:

- $\sin(\dfrac{2\pi}{3}) = \sin(\dfrac{\pi}{3})$,
- $\cos(\dfrac{2\pi}{3}) =$ - $\cos(\dfrac{\pi}{3})$,
- $\tan(\dfrac{2\pi}{3}) =$ - $\tan(\dfrac{\pi}{3})$,

Essas identidades são úteis para simplificar expressões e resolver equações trigonométricas, facilitando a análise dos ângulos no segundo quadrante com base nas funções do primeiro quadrante.

Redução do terceiro para o primeiro quadrante

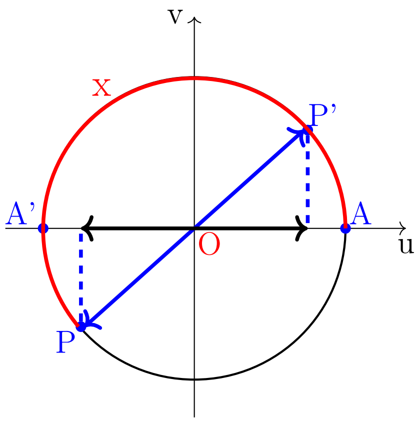
Já para fazermos a redução do 3° para o 1° quadrante Iezzi (2013) propõe: dado um número real x, tal que $\pi <$ x $< \dfrac{3\pi}{2}$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao centro.

Temos, conforme a figura 2.15, que

$\overset{\frown}{AP}$ - $\overset{\frown}{PA'} = \pi$ (no sentido anti-horário) e, portanto como $\overset{\frown}{AP'} = \overset{\frown}{A'P}$, vem

$\overset{\frown}{AP'} =$ x - π.

Figura 2.15: Redução do 3° para o 1° quadrante



Fonte: Autor

Com isso, analisando os sinais dos quadrantes acima e as razões trigonométricas estudadas tem-se as seguintes correlações quanto aos valores e aos sinais dos números do terceiro para o primeiro quadrante, a saber,

- $\sin x$ = - $\sin(x - \pi)$,
- $\cos x$ = - $\cos(x - \pi)$,
- $\tan x = \tan(x - \pi)$,
- $\cot x = \cot(x - \pi)$,
- $\sec x$ = - $\sec(x - \pi)$ e
- $\operatorname{cossec} x$ = - $\operatorname{cossec}(x - \pi)$.

Por exemplo, sendo $x = \dfrac{7\pi}{6}$ teremos:

- $\cot(\dfrac{7\pi}{6}) = \cot(\dfrac{\pi}{6})$,
- $\sec(\dfrac{7\pi}{6})$ = - $\sec(\dfrac{\pi}{6})$,
- $\operatorname{cossec}(\dfrac{7\pi}{6})$ = - $\operatorname{cossec}(\dfrac{\pi}{6})$,

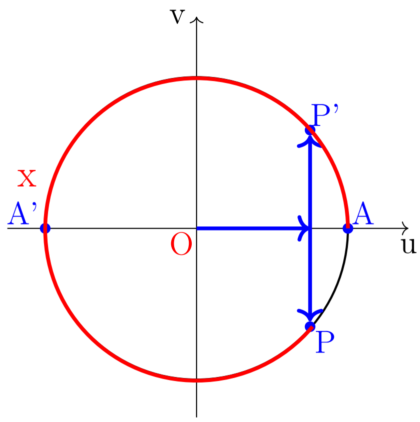
Tais propriedades são fundamentais para a resolução de problemas trigonométricos, pois permitem trabalhar com ângulos do terceiro quadrante a partir do conhecimento das funções no primeiro quadrante.

Redução do quarto para o primeiro quadrante

Finalmente com relação a redução do 4° para o 1° quadrante, Iezzi (2013) descreve: dado um número real x, tal que $\dfrac{3\pi}{2}$ < x < 2π seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao eixo dos cossenos.

Temos $\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{PA} = 2\pi$ (no sentido anti-horário) e, como $\overset{\frown}{AP'} = \overset{\frown}{PA}$, vem $\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{AP'} = 2\pi$ e, portanto $\overset{\frown}{AP'} = 2\pi$ - x, conforme figura 2.16 abaixo.

Figura 2.16: Redução do 4° para o 1° quadrante



Fonte: Autor

Portanto, tem-se as seguintes correlações quanto aos valores e aos sinais dos números do quarto para o primeiro quadrante, a saber,

- $\sin x$ = - $\sin(2\pi - x)$,
- $\cos x = \cos(2\pi - x)$,
- $\tan x$ = - $\tan(2\pi - x)$,
- $\cot x$ = - $\cot(2\pi - x)$,
- $\sec x = \sec(2\pi - x)$ e
- $\text{cossec}\, x$ = - $\text{cossec}(2\pi - x)$.

Por exemplo, sendo $x = \dfrac{16\pi}{9}$ teremos:

- $\cos(\dfrac{16\pi}{9}) = \cos(\dfrac{2\pi}{9})$,
- $\cot(\dfrac{16\pi}{9})$ = - $\cot(\dfrac{2\pi}{9})$,
- $\sec(\dfrac{16\pi}{9}) = \sec(\dfrac{2\pi}{9})$,

Esse conhecimento permite converter ângulos do quarto quadrante em expressões equivalentes no primeiro, facilitando cálculos e análises em trigonometria, que serão colocados em prática com o estudo do CTI.

2.4 Razões Trigonométricas no Círculo

No ciclo trigonométrico de raio unitário, onde este é uma convenção matemática que simplifica as relações e facilita os cálculos, pode-se trabalhar com as seguintes razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante.

Para a função seno e cosseno temos:

- No ciclo trigonométrico, um ponto $P(x, y)$ é determinado pelo ângulo θ formado com o eixo positivo do eixo x.
- O cosseno (cos) do ângulo θ é a projeção da coordenada do ponto sobre o eixo x (ou

seja, a coordenada x do ponto).

- O seno (sin) do ângulo θ é a projeção da coordenada do ponto sobre o eixo y (ou seja, a coordenada y do ponto).
- Isso significa que qualquer ponto no círculo trigonométrico pode ser escrito como $P(\cos\theta, \sin\theta)$.

Para a função tangente e cotangente temos:

- A tangente (tan) é definida como a inclinação da reta que passa pela origem e pelo ponto $P(x, y)$, ou seja, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.
- A cotangente (cot) é o inverso da tangente: $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
- Essas razões representam inclinações porque são relações entre as coordenadas y e x, formando um coeficiente angular de uma reta.

Para a função cossecante e secante temos:

- A secante (sec) e a cossecante (cossec) são inversas do cosseno e do seno, respectivamente.
- $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$.
- $\operatorname{cossec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$.
- Elas representam distâncias radiais, pois indicam quão longe um ponto está da origem ao longo das retas verticais e horizontais associadas ao seno e ao cosseno.

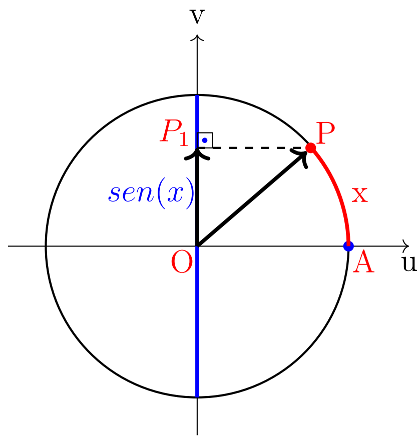
Em resumo, seno e cosseno medem projeções nos eixos, tangente e cotangente medem inclinações, e secante e cossecante medem distâncias relacionadas ao raio do círculo trigonométrico.

Seno de um ângulo

De acordo com Iezzi (2013) defini-se seno de um ângulo como: Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos **seno** de x (e indicamos $\sin x$) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Para cada número real $x \in [0, 2\pi]$ existe uma única imagem P e cada imagem P tem um único valor para sen x ($\overline{OP_1} = \text{sen } x$).

Desse modo, observa-se geometricamente na Figura 2.17 que o segmento (em azul) que determina os valores para o seno de x pertence ao eixo das ordenadas.

Figura 2.17: Seno de x



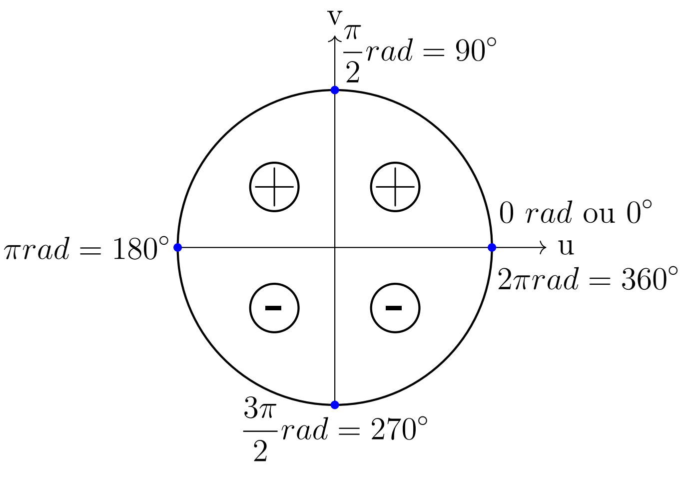
Fonte: Autor

O seno é umas das funções trigonométricas fundamentais que relacionam os ângulos de um triângulo retângulo com os comprimentos de seus lados. Ela é definida como a razão entre o comprimento do lado oposto ao ângulo e o comprimento da hipotenusa, ou seja, dado um ângulo θ neste triângulo teremos, $\text{seno}(\theta) = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$.

No ciclo trigonométrico o seno varia de –1 (em 270°) a 1 (em 90°), sendo positivo nos 1° e 2° quadrantes, ou seja, entre $0 < \theta < 180°$ e negativo nos 3° e 4° quadrantes, ou seja, entre $180° < \theta < 360°$ em uma volta completa.

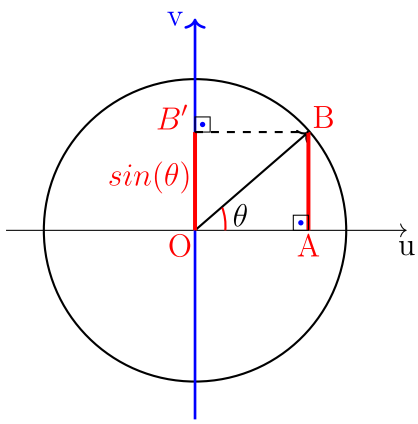
Na Figura 2.18, visualizamos geometricamente os sinais da razão seno em cada quadrante; já na Figura 2.19, observamos um exemplo do valor do seno (em vermelho) representado no eixo das ordenadas, correspondente a um ângulo igual a θ.

Figura 2.18: Sinais do seno



Fonte: Autor

Figura 2.19: Eixo do seno



Fonte: Autor

Dado um ângulo θ qualquer no círculo trigonométrico unitário conforme a Figura 2.19 e sabendo que a hipotenusa será sempre igual a 1 teremos que o seno será igual ao comprimento do lado oposto ao ângulo, ou seja,

$$\text{seno}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \text{cateto oposto} = \overline{AB} \approx \overline{OB'}.$$

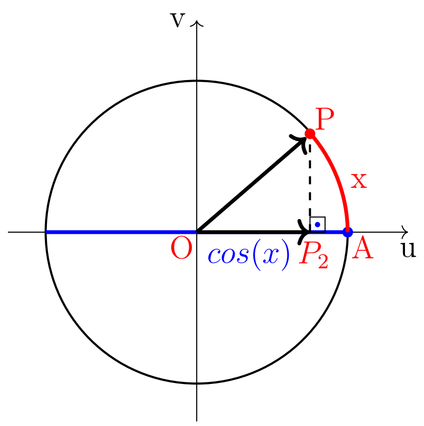
Observa-se no eixo dos senos que se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então sen x é crescente. E se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então sen x é decrescente. Isso pode ser verificado escolhendo dois ângulos quaisquer dentro de um mesmo quadrante, calculando os senos e comparando os valores obtidos.

Portanto, a função seno terá os valores correspondentes aos ângulos analisados no eixo das ordenadas.

Cosseno de um ângulo

Com relação a definição do cosseno de um ângulo, de acordo com Iezzi (2013), tem-se: Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos **cosseno** de x (e indicamos $\cos x$) a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Para cada número real $x \in [0, 2\pi]$ existe uma única imagem P e cada imagem P tem um único valor para cos x ($\overline{OP_2}$ = cos x).

Figura 2.20: Cosseno de x



Fonte: Autor

Desse modo, observa-se geometricamente na Figura 2.20 que o segmento (em azul) que determina os valores para o cosseno de x pertence ao eixo das abscissas.

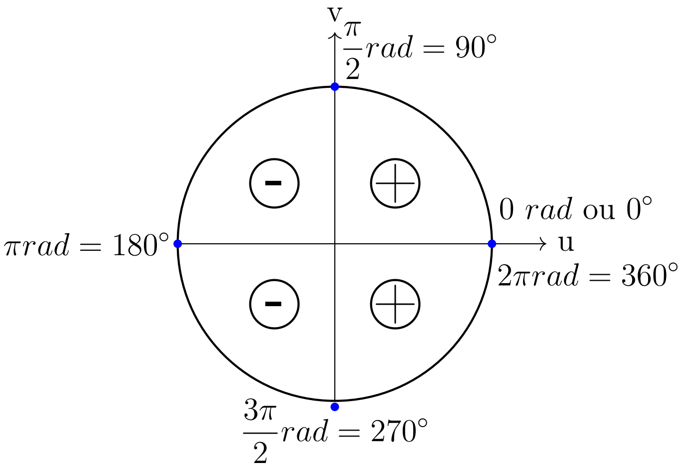
O cosseno é outra função trigonométrica fundamental que, assim com a função seno, relaciona os ângulos de um triângulo retângulo com os comprimentos de seus lados. Ela é definida como a razão entre o comprimento do lado adjacente ao ângulo e o comprimento da hipotenusa, ou seja, dado um ângulo θ neste triângulo teremos,

$$\text{cosseno}(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}.$$

No ciclo trigonométrico o cosseno varia de –1 (em 180°) a 1 (em 0° ou 360°), sendo positivo nos 1° e 4° quadrantes, ou seja, entre $-\ 270^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ e negativo nos 2° e 3° quadrantes, ou seja, entre $90^{\circ} < \theta < 270^{\circ}$ em uma volta completa.

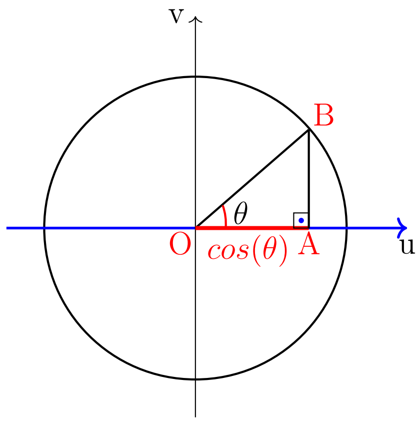
Vejamos na Figura 2.21, á esquerda, o sinal em cada quadrante do cosseno de um ângulo θ e na Figura 2.22, à direita uma demonstração deste enunciado.

Figura 2.21: Sinais do cosseno



Fonte: Autor

Figura 2.22: Eixo do cosseno



Fonte: Autor

Observa-se no eixo dos cossenos que se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então cos x é decrescente. E se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então cos x é crescente, que pode ser verificado tomando e comparando os valores correspondentes a dois ângulos quaisquer do mesmo quadrante.

Dado um ângulo θ qualquer no círculo trigonométrico unitário conforme a Figura 2.22 acima e sabendo que a hipotenusa será sempre igual a 1 teremos que o cosseno será igual ao comprimento do lado adjacente ao ângulo, ou seja,

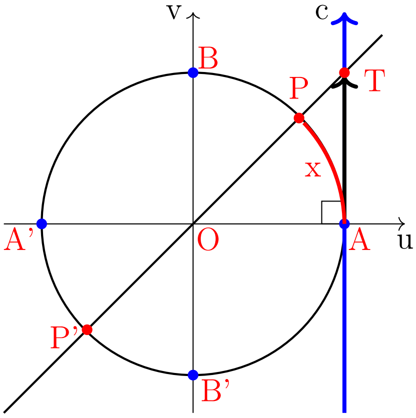
$$\text{cosseno}(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \text{cateto adjacente} = \overline{OA}.$$

Portanto a função cosseno terá os valores correspondentes aos ângulos analisados no eixo das abscissas.

Tangente de um ângulo

Para a tangente de um ângulo, por sua vez, pode-se definir de acordo com Iezzi (2013) como sendo: Dado um número real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k.\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos **tangente** de x (e indicamos $\tan x$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

Figura 2.23: Tangente de x



Fonte: Autor

Desse modo, observa-se geometricamente na Figura 2.23 o eixo determinante da tangente (reta azul).

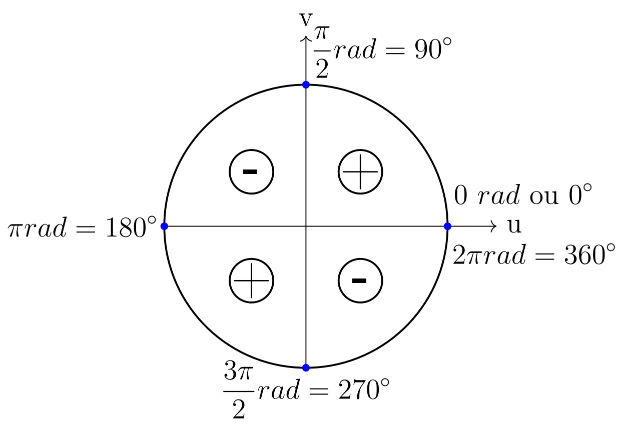
A tangente de um ângulo no triângulo retângulo é dada pela razão entre o comprimento do lado oposto sobre o comprimento do lado adjacente ($\overline{OA} = 1$) ao ângulo dado, ou seja, dado um ângulo θ neste triângulo teremos, conforme mostra a Figura 2.23,

$$\text{tagente}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT},$$

e temos que a mesma não está definida nos pontos $\dfrac{\pi}{2} + k.\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

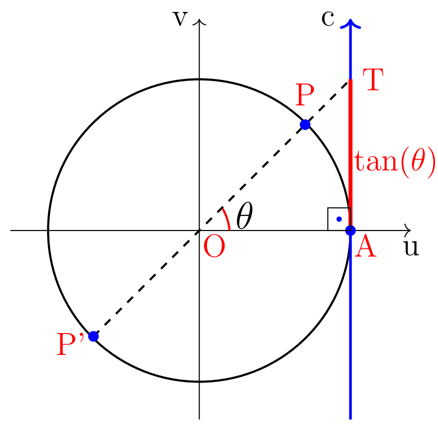
A Figura 2.24 apresenta os sinais da tangente em seus respectivos quadrantes, enquanto a Figura 2.25 ilustra geometricamente essa propriedade.

Figura 2.24: Sinais da tangente



Fonte: Autor

Figura 2.25: Eixo da tangente



Fonte: Autor

No ciclo trigonométrico a tangente pode assumir qualquer valor real, sendo positivo nos quadrantes ímpares ($1°$ e $3°$), ou seja, entre $0° < \theta < 90°$ e $180° < \theta < 270°$ e negativo nos quadrantes pares (2° e 4°), ou seja, entre 90° $< \theta <$ 180° e 270° $< \theta <$ 360° em uma volta completa e inexistente nos ângulos de 90° e 270° ou $\frac{\pi}{2} + k.\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, pois o cosseno nestes pontos é igual a zero, gerando uma indeterminação, a saber

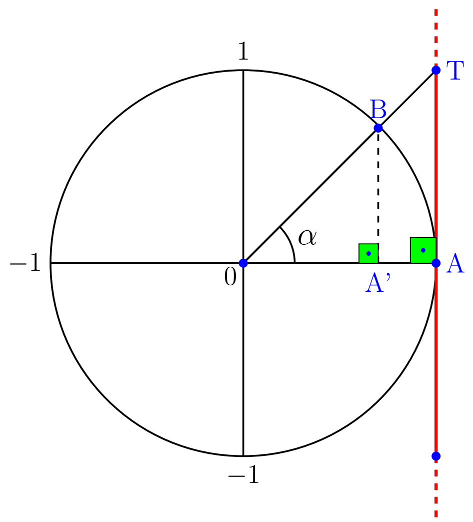
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Podemos extrair aqui a relação entre a tangente, seno e cosseno de qualquer ângulo através da relação de semelhança de triângulos, conforme a Figura 2.26. Analisando os triângulos OA'B e OAT verifica-se que são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo) pois ambos possuem um ângulo reto e compartilham do mesmo ângulo α e desta forma obtemos a seguinte relação:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\overline{AT}}{1} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha, \text{ com } \cos\alpha \neq 0.$$

Observação: toda reta tangente a um círculo é perpendicular ao raio do círculo no ponto de tangência. Isso é conhecido como Teorema Tangente-Raio.

Figura 2.26: Fórmula da tangente



Fonte: Autor

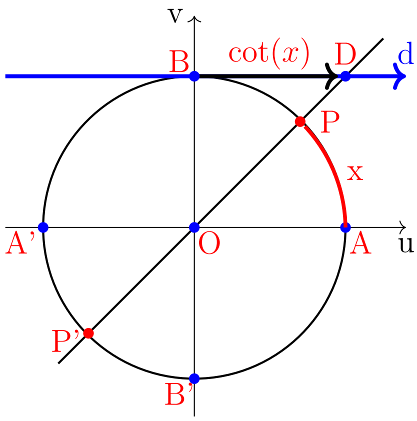
Observe que, à medida que x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, a função $\tan x$ é crescente. Isso pode ser verificado escolhendo dois ângulos quaisquer dentro de um mesmo quadrante, calculando suas tangentes e comparando os valores obtidos.

Dito isso, a função tangente terá os valores correspondentes aos ângulos analisados na reta tangente ao eixo u (eixo das abscissas) do círculo no ponto A (Figura 2.26).

Cotangente de um ângulo

No tocante a cotangente de um ângulo registra-se a definição dada por Iezzi (2013) da seguinte maneira: Dado um número real x, $x \neq k.\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua interseção com o eixo das cotangentes. Denominamos **cotangente** de x (e indicamos $\cot x$) a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$.

Figura 2.27: Cotangente de x

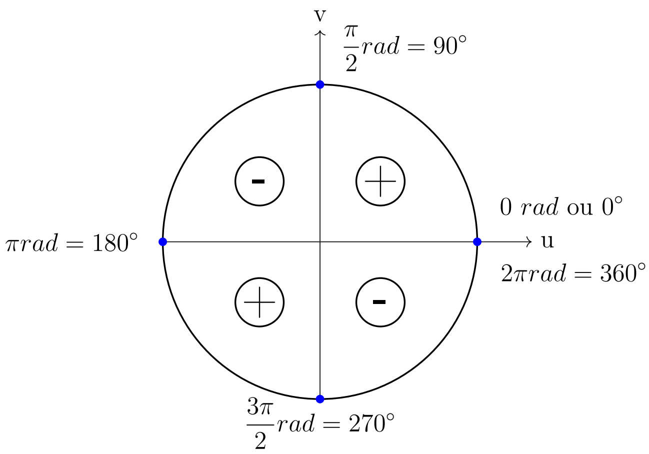


Fonte: Autor

Desse modo, observa-se geometricamente na Figura 2.27 o eixo determinante da cotangente (reta azul).

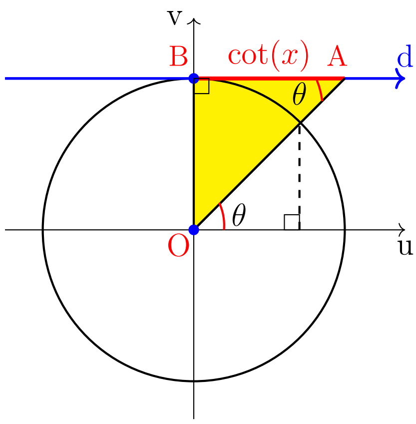
A Figura 2.28 apresenta os sinais da cotangente em seus respectivos quadrantes, enquanto a Figura 2.29 ilustra geometricamente essa propriedade.

Figura 2.28: Sinais da cotangente



Fonte: Autor

Figura 2.29: Eixo da cotangente



Fonte: Autor

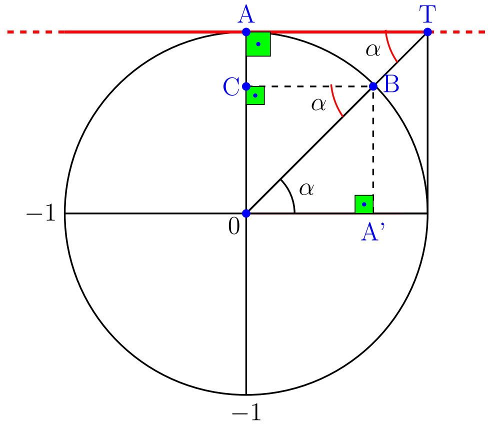
A cotangente de um ângulo no ciclo trigonométrico será determinada na reta paralela ao eixo das abscissas (eixo x) e tangente ao círculo no ponto B. Dado um ângulo θ a sua medida será dada pela seguinte relação,

$$\text{cotagente}(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{BD}{1} = \overline{BD},$$

e que a mesma não está definida nos pontos $k.\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Agora vejamos a relação entre a cotangente, o seno e o cosseno de um ângulo qualquer através da relação de semelhança de triângulos, conforme a Figura 2.30. Observa-se que os triângulos OA'B e OCB são congruentes por LLL (lado-lado-lado), pois possuem a mesma hipotenusa e os lados paralelos são iguais, ou seja, $\overline{OA'} \cong \overline{CB}$ e $\overline{OC} \cong \overline{A'B}$ e por sua vez, temos $\triangle OBC \sim \triangle OTA$ por AA (ângulo-ângulo) pois ambos possuem um ângulo reto e compartilham do mesmo ângulo α e desta forma obtemos a seguinte relação:

Figura 2.30: Fórmula da cotangente



Fonte: Autor

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AT}}{1} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha, \text{ com } \sin\alpha \neq 0.$$

No ciclo trigonométrico a cotangente pode assumir qualquer valor real, sendo positivo nos quadrantes ímpares (1° e 3°), ou seja, entre $0° < \theta < 90°$ e $180° < \theta < 270°$ e negativo nos quadrantes pares (2° e 4°), ou seja, entre $90° < \theta < 180°$ e $270° < \theta < 360°$ em uma volta completa e inexistente nos ângulos de 0° e 180° ou $k.\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, pois a tangente nestes pontos é igual a zero, gerando uma indeterminação, a saber $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$.

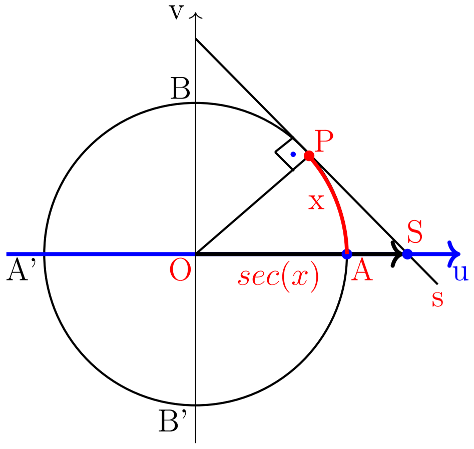
Observe que, à medida que x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, a função $\cot x$ é decrescente. Isso pode ser verificado escolhendo dois ângulos quaisquer dentro de um mesmo quadrante, calculando suas cotangentes e comparando os valores obtidos.

Portanto, a função cotangente terá os valores correspondentes aos ângulos analisados na reta tangente ao eixo v (ordenada) do círculo no ponto B.

Secante de um ângulo

Já a secante de um ângulo, de acordo com Iezzi (2013), pode ser definida como sendo: Dado um número real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k.\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos

Figura 2.31: Secante de x



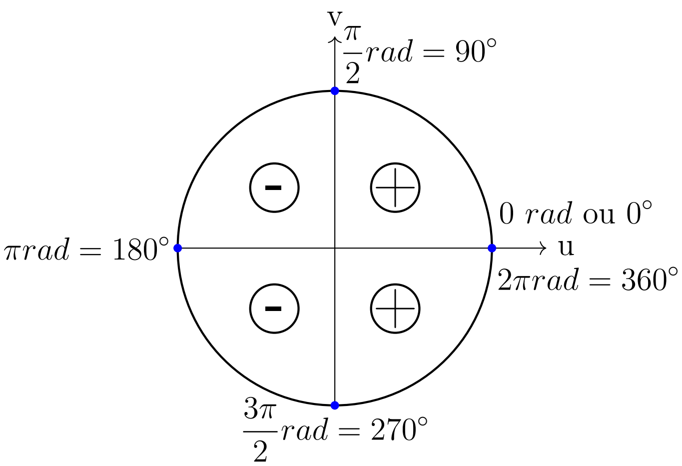
Fonte: Autor

a reta s e seja S o ponto de interseção com o eixo dos cossenos. Denominamos **secante** de x (e indicamos $\sec x$) a medida da abscissa $\overline{OS}$ (Ver Figura 2.31).

A secante de um ângulo qualquer θ é a medida do comprimento do segmento ($\overline{OS}$), que vai da origem do plano cartesiano até o ponto de encontro entre a reta tangente ao ciclo e o eixo dos cossenos (eixo x) e não está definida nos pontos $\frac{\pi}{2} + k.\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

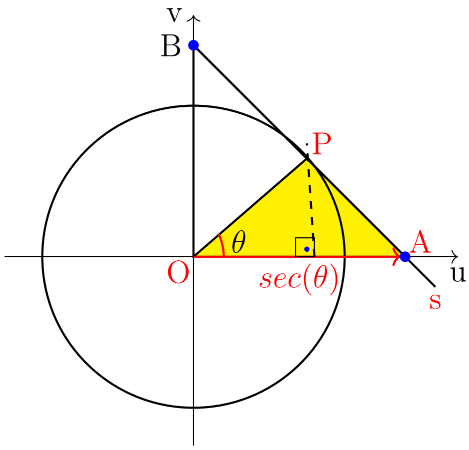
A Figura 2.32 apresenta os sinais da razão trigonométrica secante em seus respectivos quadrantes, evidenciando onde ela assume valores positivos ou negativos no ciclo trigonométrico. Já a Figura 2.33 ilustra geometricamente essa propriedade, por meio da construção do segmento secante associado ao ângulo θ, permitindo uma melhor compreensão visual de seu comportamento em cada quadrante.

Figura 2.32: Sinais da secante



Fonte: Autor

Figura 2.33: Eixo da secante



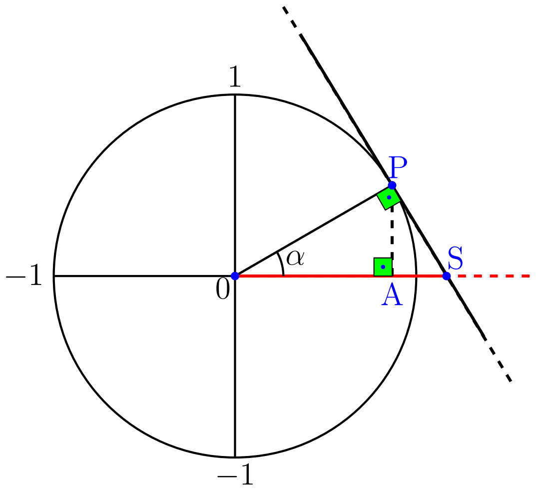
Fonte: Autor

A secante, também, pode ser determinada pela seguinte fórmula,

$$\text{secante } \theta = \frac{1}{\cos\theta},$$

que pode ser demonstrada de forma análoga às anteriores, conforme a Figura 2.34.

Figura 2.34: Fórmula da secante



Fonte: Autor

Percebe-se que os triângulos $OAP \sim OPS$ por AA (ângulo-ângulo), pois ambas possuem um ângulo reto e compartilham do mesmo ângulo α, com isso obteremos,

$\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OS}} \Rightarrow \dfrac{\cos\alpha}{1} = \dfrac{1}{\overline{OS}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\overline{OS}} \Rightarrow \overline{OS} = \dfrac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, com $\cos\alpha \neq 0$.

No ciclo trigonométrico a secante pode assumir qualquer valor real, sendo positivo nos quadrantes 1° e 4°, ou seja, entre $0° \leq \theta < 90°$ e $270° < \theta \leq 360°$ e negativo nos quadrantes 2° e 3°, ou seja, entre $90° < \theta < 270°$ em uma volta completa e inexistente nos ângulos de 90° e 270° ou $\dfrac{\pi}{2} + k.\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, pois o cosseno nestes pontos é igual a zero, gerando uma indeterminação, a saber $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$.

Temos, também, que se x percorre o 1° ou o 2° quadrante, então $\sec x$ é crescente e se x percorre o 3° ou 4° quadrante, então $\sec x$ é decrescente. Isso pode ser verificado escolhendo dois ângulos quaisquer dentro de um mesmo quadrante, calculando as secantes e comparando os valores obtidos.

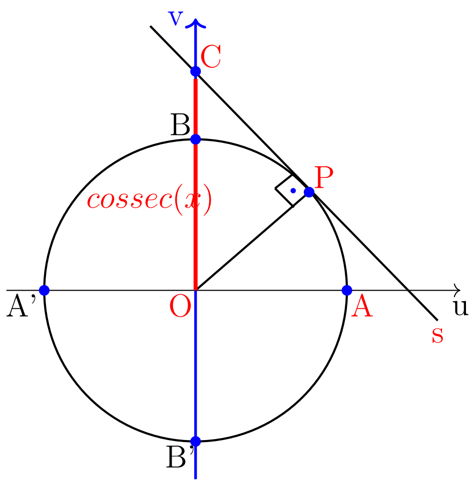
Portanto, a função secante terá os valores correspondentes no prolongamento do raio unitário da abscissa x conforme mostrado na Figura 2.34.

Cossecante de um ângulo

Finalmente, temos para a cossecante de um ângulo de acordo com Iezzi (2013) a seguinte definição: Dado um número real x, $x \neq k.\pi$, seja P sua imagem no ciclo.

Consideremos a reta s e seja C sua interseção com o eixo dos senos. Denominamos **cossecante** de x (e indicamos $\operatorname{cossec} x$) a medida do segmento $\overline{OC}$ (Ver Figura 2.35).

Figura 2.35: Cossecante de x

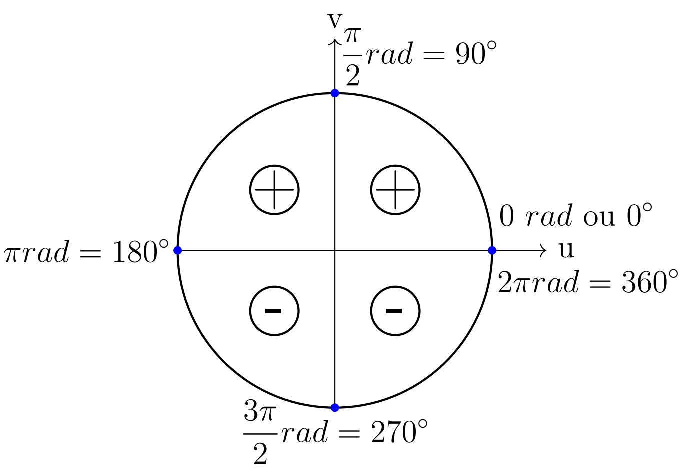


Fonte: Autor

A cossecante de um ângulo qualquer θ é a medida do comprimento do segmento $\overline{OC}$, que vai da origem do plano cartesiano até o ponto de encontro entre a reta tangente ao ciclo e o eixo dos senos (eixo y) e não está definida nos pontos $k.\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A cossecante, também, pode ser determinada pela seguinte fórmula, cossecante $\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$. Sua demonstração pode ser visualizada na Figura 2.37.

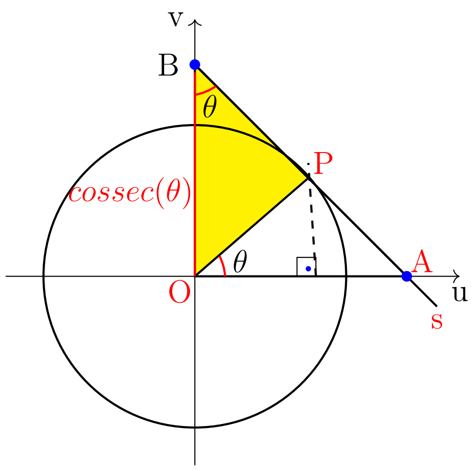
A Figura 2.36 apresenta os sinais da tangente em seus respectivos quadrantes, enquanto a Figura 2.38 ilustra geometricamente essa propriedade.

Figura 2.36: Sinais da cossecante



Fonte: Autor

Figura 2.37: Eixo da cossecante

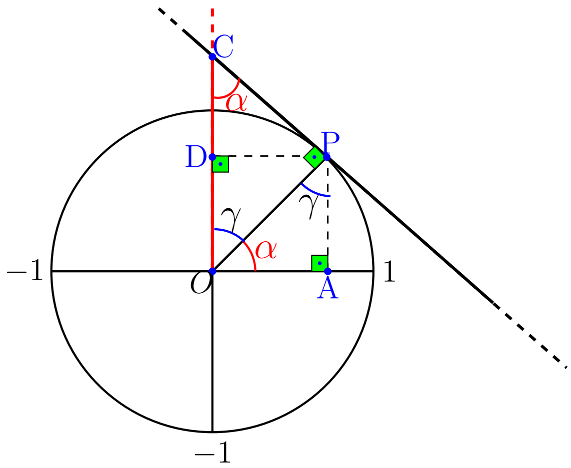


Fonte: Autor

Observa-se que os triângulos $OAP \sim ODP$ são congruentes pelo caso LLL (lado-lado-lado), pois possuem a mesma hipotenusa e os lados paralelos são iguais, ou seja,

$\overline{OD} \cong \overline{AP}$ e $\overline{DP} \cong \overline{OA}$, e por sua vez, temos $\triangle OCP \sim \triangle OPD$ pelo caso AA (ângulo-ângulo), pois possuem um ângulo reto e compartilham do mesmo ângulo γ, logo, teremos que os triângulos $OPC \sim OAP$ resultando na seguinte relação,

Figura 2.38: Fórmula da cossecante



Fonte: Autor

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OC}}{1} \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \overline{OC} \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cossec}\alpha, \text{ com } \sin\alpha \neq 0.$$

No ciclo trigonométrico a cossecante pode assumir qualquer valor real, sendo positivo nos quadrantes 1° e 2°, ou seja, entre $0° < \theta < 180°$ e negativo nos quadrantes 3° e 4°, ou seja, entre $180° < \theta < 360°$ em uma volta completa e inexistente nos ângulos de 0°, 180° e 360° ou $k.\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, pois o seno nestes pontos é igual a zero, gerando uma indeterminação, a saber $\operatorname{cossec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$.

Constata-se que se x percorre o 2° ou o 3° quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é crescente e se x percorre o 1° ou 4° quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é decrescente. Isso pode ser verificado escolhendo dois ângulos quaisquer dentro de um mesmo quadrante, calculando as cossecantes e comparando os valores obtidos.

Portanto, a função cossecante terá os valores correspondentes no prolongamento do raio unitário da ordenada y.

Relações Fundamentais Trigonométricas

As relações trigonométricas derivadas desempenham um papel fundamental na matemática, especialmente no cálculo e na geometria. Elas surgiram a partir da necessidade de compreender o comportamento das funções trigonométricas, como o seno, o cosseno e a tangente, em termos de suas taxas de variação. Essas relações não só expandem nosso entendimento dessas funções, mas também geram novas fórmulas e identidades que são essenciais para o desenvolvimento de conceitos matemáticos mais avançados. Entre as principais relações trigonométricas derivadas que exploraremos em nosso estudo e em suas aplicações, destacam-se as seguintes:

i. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ii. $1 + \cot^2 x = \text{cossec}^2\, x$

iii. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

iv. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

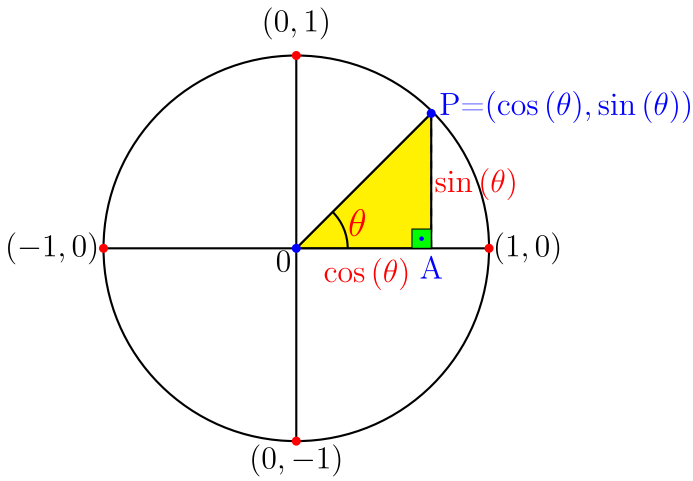
v. $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

vi. $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

vii. $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

Estudando, por exemplo, a primeira relação trigonométrica no CTI podemos verificar que qualquer ponto no ciclo trigonométrico terá coordenadas $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, sendo θ um ângulo qualquer. Observa-se na Figura 2.39 que o triângulo OAP é retângulo em A e sejam os lados **b** e **c** (catetos) e **a** (hipotenusa) e da relação do Teorema de Pitágoras temos,

Figura 2.39: Relação fundamental da trigonometria



Fonte: Autor

- Resolução Algébrica -

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

$$(\overline{OA})^2 + (\overline{AP})^2 = (\overline{OP})^2$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1^2$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Portanto, com base na manipulação do dispositivo e na aplicação do ângulos em questão, buscamos validar empiricamente as relações trigonométricas previamente mencionadas. Através dessa análise prática, pretendemos confirmar que tais relações se mantêm consistentes, fortalecendo e consolidando os conhecimentos adquiridos durante o processo experimental.

Capítulo 3

MATERIAL CONCRETO E METODOLOGIA

Neste tópico, exploraremos o conceito, os fundamentos teóricos e a relevância do uso de materiais concretos no contexto educacional, destacando sua potencialidade como ferramenta para facilitar o processo de ensino-aprendizagem dos conhecimentos matemáticos pelos discentes.

O material concreto é definido como uma abordagem pedagógica que tem suas raízes em teorias que dão ênfase ao papel que as experiências sensoriais e práticas desempenham no amadurecimento das destrezas de resolução de problemas por parte dos educandos. É uma abordagem pedagógica que é amplamente utilizada na educação infantil e nos primeiros anos da escolaridade, uma vez que ajuda os educadores a compreenderem ideias altamente abstratas, já que os educandos têm a oportunidade de interagir fisicamente com o conhecimento a aprender.

Pensando nisso, este trabalho almeja proporcionar aos alunos da Educação Básica a oportunidade de vivenciar, de forma prática, a construção de novos conhecimentos por meio do uso de materiais concretos.

3.1 Fundamentos Teóricos do Material Concreto na Educação

O uso de material concreto em educação é uma prática baseada nas teorias de grandes educadores e psicólogos como Jean Piaget e Maria Montessori. De acordo com a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget, crianças passam por estágios de desenvolvimento em que a manipulação de objetos físicos é essencial para auxiliar o desenvolvimento de pensamento lógico, cabendo ao docente a incumbência de intermediar este processo, a saber, "... o que se deseja é que o professor deixe de ser um conferencista e que estimule a pesquisa e o esforço, ao invés de se contentar com a transmissão de soluções já prontas (Piaget, 1973, p. 18).

Ratificando esta fala, Lorenzato (2009, p.61), defende a importância da inserção do material concreto no processo de ensino-aprendizagem,

> O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos.

Portanto, o material concreto é um recurso vital para ajudá-los a fazer a transição para o pensamento construtivo. Outra figura central na pedagogia, Maria Montessori, também viu a importância dos materiais concretos para a educação. Ela afirmou que as "mãos são as ferramentas da mente" e a manipulação de objetos é a chave para aprendizado. Os materiais de Montessori, como caixas de blocos e contas de cores, foram projetados para auxiliar o ensino de conceitos como matemática e linguagem de uma maneira tangível e intuitiva, pois estes materiais trabalham qualidades como: "[...] cor, forma, dimensão, som, grau de aspereza, peso, temperatura, etc" (Montessori, 1965, p. 99).

Sendo assim, o uso de material concreto é importante dentro do processo educacional. Essa abordagem prática não apenas reforça a teoria, mas também desenvolve habilidades como a resolução de problemas, a colaboração e a autonomia, essenciais para o crescimento acadêmico e pessoal dos estudantes.

Material Concreto na Educação

Material concreto na educação refere-se a qualquer recurso físico que é usado no processo de explicação de conceitos teóricos diversos. O material inclui uma grande variedade de elementos diversificados como: blocos, moedas, figuras geométricas, ábacos, maquetes e muitos outros. O objetivo é demonstrar que, ao utilizar recursos físicos manipuláveis, os alunos conseguem visualizar e compreender de maneira mais clara e eficaz os conceitos ensinados, promovendo um aprendizado mais tangível e significativo.

O fator importante disso é que o material concreto ajuda os estudantes no "toque", ou "experimente" o que está sendo dito, o que muitas vezes pode ser mais eficaz do que ouvir ou ler sobre o assunto, como afirma Lorenzato (2009, p. 21),

> Convém termos sempre em mente a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental por parte do aluno. E o material didático pode ser um excelente catalisador para o aluno construir seu saber matemático.

Dessa forma, para que a implementação de materiais concretos seja eficiente, é necessário planejar e adaptá-la ao currículo educacional. Os professores devem escolher os materiais que atendam aos objetivos de aprendizagem e sejam relevantes ao nível de desenvolvimento dos alunos. É importante a integração com conceitos abstratos e que o ensino deve ser complementado com discussões e reflexões sobre a experiência prática dos discentes enquanto aprendem conceitos abstratos. Assim, os instrutores não só permitem que os alunos reduzam o tédio, mas também os ajudam a entender a relevância da experiência nas lições dadas.

O progresso dos alunos deve ser monitorado para garantir um ensino-apredizagem mais eficaz e duradouro com o uso de atividades concretas que contribuam para um melhor entendimento. A aprendizagem de conceitos deve ir além de ser interessante e divertida, devendo também desempenhar um papel fundamental na construção sólida e significativa do conhecimento, garantindo que os alunos absorvam e apliquem o conteúdo de forma profunda e duradoura.

Dessa forma, o material concreto contribui para a construção de uma base sólida, que favorece o domínio da matemática em diferentes níveis de ensino.

A metodologia deste projeto será detalhada com relação aos procedimentos de pesquisa, incluindo o local de aplicação, as etapas a serem seguidas e a forma de coleta de dados. Também serão especificados o público-alvo, o processo de análise dos dados e os materiais utilizados, com registros fotográficos que ilustrem cada item.

Além disso, serão apresentados os tópicos que serão abordados durante as aulas, com o devido registro de objetivos, materiais necessários, tempo estimado e número de alunos envolvidos. Para cada tema, será descrito de forma clara o passo a passo da aplicação, acompanhado de fotos das atividades realizadas, garantindo um acompanhamento visual do processo.

Durante a aplicação do projeto, serão abordados os seguintes tópicos: determinação e identificação de ângulos, classificação dos tipos de ângulos, cálculo do complementar, suplementar e replementar de ângulos notáveis. Além disso, será realizada a redução ao primeiro quadrante no círculo trigonométrico.

Serão estudadas as funções trigonométricas, incluindo seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante de um ângulo, além de algumas das principais relações fundamentais da trigonometria. Esses temas proporcionarão uma compreensão aprofundada dos conceitos e aplicações trigonométricas.

Essa pesquisa foi aprovada pelo Parecer Consubstanciado do Comitê de Ética e Pesquisa da UFPI, segundo o parecer número 7.705.992. (Ver figura 4.1)

Figura 3.1: CEP - Comitê de Ética e Pesquisa da UFPI

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - CAMPUS MINISTRO PETRÔNIO PORTELA - UFPI

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Pesquisador: MARCOS RODRIGUES DE SOUSA
Área Temática:
Versão: 3
CAAE: 87541924.0.0000.5214
Instituição Proponente: Universidade Federal do Piauí - UFPI
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 7.705.992

Assim, consideramos o projeto APROVADO.

Fonte: Plataforma Brasil

Esta pesquisa será empreendida de forma qualitativa buscando investigar quais as contribuições que as intervenções pedagógicas realizadas por meio dos materiais concretos e desempenhadas no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos podem nos proporcionar.

> [...] a fonte de dados é o ambiente natural, constituindo investigador o instrumento principal; a investigação qualitativa é descritiva; os instrumentos qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; o significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (Bogdan; Biklen, 1994, p. 47–51)

Dessa forma é de essencial importância prezar pelo estudo qualitativo pois nos fornecerá ferramentas para uma análise explícita do processo de ensino-aprendizagem da matemática com o uso de instrumentos qualitativos.

Inicialmente vamos selecionar alunos do Ensino Médio da escola onde o mestrando leciona para fazermos um estudo que vise analisar a eficiência da aplicação de material concreto no ensino-aprendizagem da matemática. A aplicação será baseada em livros didáticos de diversos autores, como: Bonjorno, Giovanni Jr., Paulo Câmara, Luiz R. Dante, Fernando Viana, dentre outros, e será trabalhado em sala de aula com o auxílio do material concreto confeccionado pelo docente.

A análise dos dados será feito durante todo o processo de ensino, pois sabemos que a aprendizagem é um processo contínuo e faremos uso da observação, de questionários e avaliações de cunho objetivo e subjetivo para analisarmos o desempenho deles e verificar se o que foi vivenciado durante todas as etapas do processo procedeu-se de forma construtiva e eficiente, com análise dos prós e contras da metodologia aplicada.

3.2 Materiais e Aplicação Prática

Descrição dos Materiais Utilizados

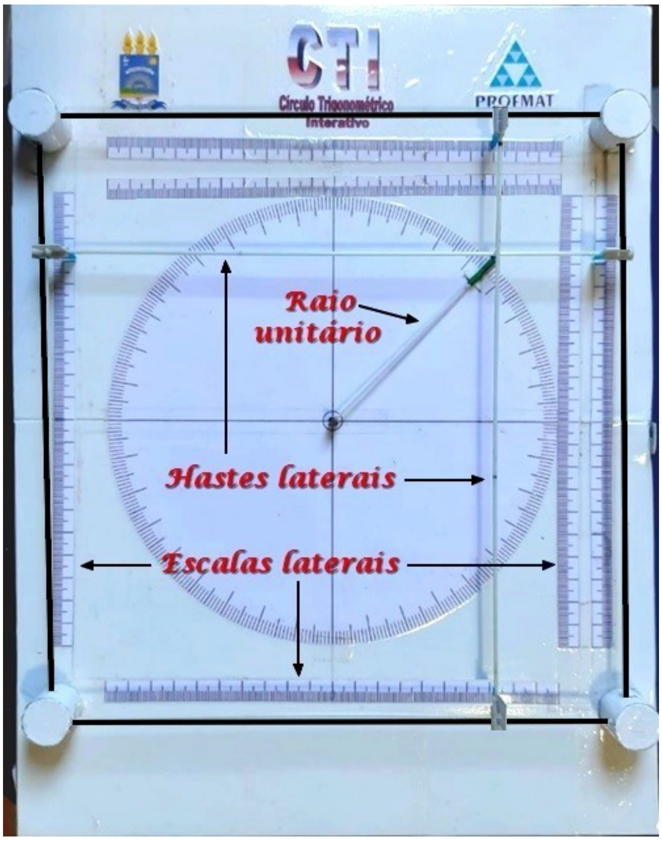
O dispositivo recebeu o nome de CTI (Círculo Trigonométrico Interativo) e foi desenvolvido utilizando materiais recicláveis provenientes de diversas fontes. A escolha desses materiais busca promover autonomia e uma aprendizagem significativa. Além disso, a ideia foi criar uma ferramenta inovadora e acessível para o ensino de trigonometria. Os materiais utilizados na confecção foram os seguintes:

- MDF, sigla para Medium Density Fiberboard, tirados de móveis velhos;
- Pedaços de cabo de vassoura;
- Varetas de fibras para fabricação de pipas;
- Pedaços de plásticos, papéis diversos (coloridos, vergê, ofício), pregos e parafusos;
- Restos de cola branca, supercola instantânea, durex, papel de parede e folha transparente para encapar livro;
- Impressões em folhas A4 das retas, círculo trigonométrico e dos símbolos do dispositivo;
- Folhas de EVA e raios de bicicleta.

O CTI é um dispositivo de custo extremamente baixo, com dimensões compactas de 42 cm de comprimento, 32 cm de largura e 3 cm de altura, pesando cerca de 1,2 kg, o que garante grande facilidade no manuseio e no transporte (Ver figura 4.2).

No centro do dispositivo há um círculo impresso sem nenhuma numeração expressa, contendo apenas mini traços num total de 360, sendo que destes, há os que são múltiplos de 10 (maiores), múltiplos de 5 (médios) e os unitários (menores). Possui, também, retas impressas e paralelas nas laterais que representam o valor de 2 unidades (diâmetro) do círculo de raio 1 e seus submúltiplos. Sobre o mesmo há 4 "torres" circulares (pedaços de cabo de vassoura de 2cm) nas laterais do MDF que sustentam os 4 raios de bicicleta, formando um quadrilátero, que equilibram duas hastes de fibras que se movimentam na horizontal e vertical do dispositivo.

Figura 3.2: CTI – Circulo Trigonométrico Interativo



Fonte: Autor

Dentre os acessórios do Ciclo Trigonométrico Interativo que foram confeccionados pelo docente e que iremos utilizar durante o processo de aplicação de ensino-aprendizagem de trigonometria estão os seguintes itens abaixo:

- Raio de 11,5cm;
- Raio duplo (diâmetro) de 23cm;
- Raio alongado de 36cm;
- Raio com tangente (29cm);
- Setores circulares de EVA (30°, 45° e 60°);
- Triângulos retângulos de EVA com ângulos de 30°, 45° e 60°;
- Escalas laterais estendida ao eixo das abscissas e das ordenadas.

Podemos visualizar na figura 4.3 abaixo a imagem de cada um destes acessórios descritos acima.

Figura 3.3: Acessórios do CTI

Fonte: Autor

Este dispositivo propõe facilidade na manipulação, tanto para docentes, como para discentes, pois não requer, nem treinamentos e nem conhecimentos avançados para sua aplicação, pois possui uma interface simples e funcional para uma aprendizagem acelerada e autônoma dos envolvidos, seja executado individualmente ou em grupo, otimizando, inclusive, o tempo.

A inserção destes acessórios no projeto traz como proposta uma rápida adaptação que visa otimizar o processo de manipulação e compreensão dos temas abordados, tornando uma experiência fluida e incentivando o engajamento dos alunos.

Aplicação Prática do Material Concreto no Ensino de Trigonometria

O CTI será utilizado pelos alunos nas salas de aula da escola onde o mestrando leciona, durante as aulas de matemática. A aplicação ocorrerá logo após a exposição oral dos conteúdos, apoiada por materiais didáticos como pincel, quadro acrílico e apagador.

À medida que cada tópico de trigonometria for sendo trabalhado, os alunos manipularão o dispositivo de forma prática, consolidando os conceitos teóricos apresentados. Durante esse processo, o professor acompanhará ativamente as atividades, promovendo discussões e realizando intervenções sempre que necessário, enriquecendo a aprendizagem e favorecendo a construção do conhecimento.

As aulas que contemplam o uso de materiais concretos ocorrerão especificamente nas turmas do Ensino Médio da própria instituição de ensino, o CETI Desembargador Heli Sobral. A implementação dessas atividades será realizada ao longo da semana, com uma carga horária que variará entre três a cinco horas-aula semanais.

Cada aula terá a duração aproximada de sessenta minutos, proporcionando um tempo adequado para a exploração dos conteúdos e para a realização das atividades práticas. A seleção das turmas participantes será feita em articulação com a coordenação pedagógica, levando em consideração fatores como a disponibilidade de horários compatíveis.

Durante o processo de manipulação do CTI serão aplicadas atividades, objetivas e subjetivas, propostas e trabalhadas com base nos livros didáticos e corroboradas com outros exercícios práticos elaborados pelo docente no momento da aplicação para esclarecer ou ratificar os discussões iminentes que ocorrerem durante o processo de utilização.

3.3 Construção e Exploração dos Conceitos Trigonométricos

Determinando Ângulos

Objetivo: Aprender a determinar ângulos especificando os seus respectivos quadrantes.

Material necessário: CTI e o acessório que representa o raio.

Tipo de atividade: Realizada individualmente.

Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

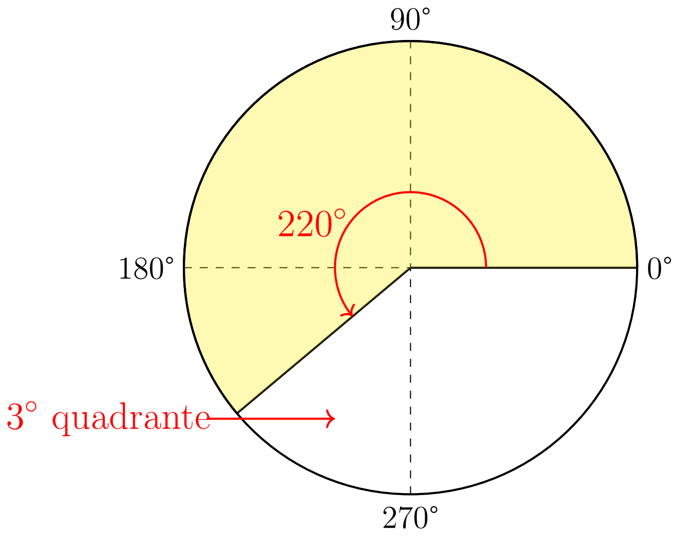
Após o contato visual com o dispositivo e entendido as noções básicas de ângulos e arcos, os alunos são estimulados a determinar no CTI alguns ângulos, sugerido pelo docente, especificando seus quadrantes correspondentes através do deslocamento do raio, conforme mostra a Figura 3.4.

Figura 3.4: Aluno manipulando o CTI na determinação de ângulos

Fonte: Autor

Por exemplo, é pedido ao aluno para localizar o ângulo de 220° no CTI e o mesmo deve saber fazê-lo através do raio unitário e em seguida deve saber identificar o seu quadrante conforme mostra a Figura 3.5. Processo este que será executado individualmente por todos os alunos, em mais de uma oportunidade, até que o tópico seja assimilado efetivamente por eles.

Figura 3.5: Determinando ângulos



Fonte: Autor

Desse modo, pretendemos construir nos alunos a noção de ângulos, de sua localização nos quadrantes, tanto no sentido horário, como no sentido anti-horário, inclusive em períodos superiores a 2π.

Identificando os Tipos de Ângulos

Objetivo: Aprender a determinar e a identificar os tipos de ângulos estudados.

Material necessário: CTI e o acessório que representa o raio.

Tipo de atividade: Realizada individualmente.

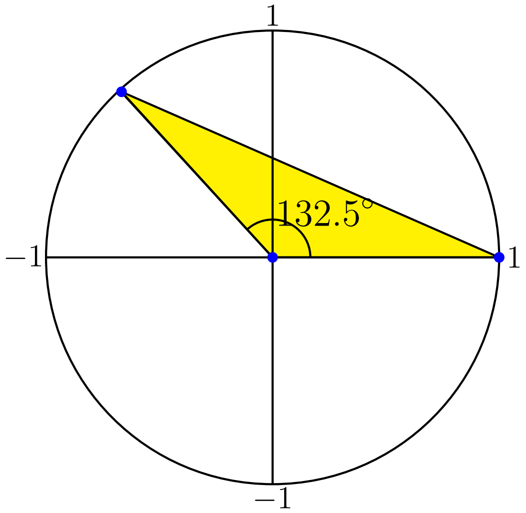
Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

Compreendido os conceitos dos tipos de ângulos abordados na aula, nesta etapa, os alunos são desafiados a mostrar através do deslocamento do raio no CTI, tomando como base inicial o ângulo 0°, exemplos de ângulos agudo, reto, obtuso, raso, côncavo e completo dentro de um período de 2π com repetições à medida que se fizer necessário.

O objetivo é mostrar que a compreensão dos diferentes tipos de ângulos é essencial não só em matemática, mas na nossa vida diária. Os ângulos são fatores predominantes em muitas áreas de nossa vida e saber sobre os tipos de ângulos auxilia numa melhor compreensão e solução de problemas, além de fornecer a base para muitos outros conceitos mais avançados estudados na trigonometria.

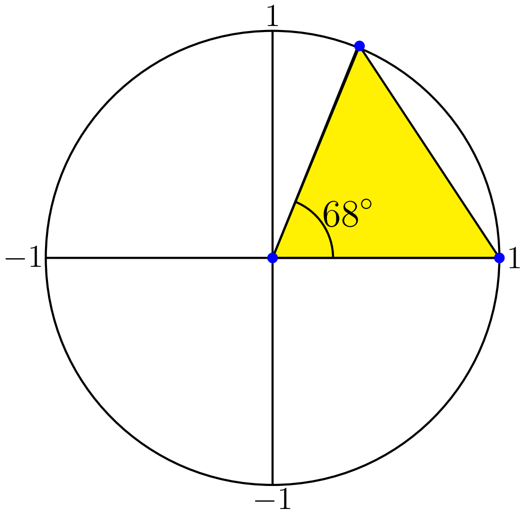
A Figura 3.6 apresenta um exemplo de ângulo obtuso, enquanto a Figura 3.7 ilustra um exemplo de ângulo agudo.

Figura 3.6: Ângulo obtuso



Fonte: Autor

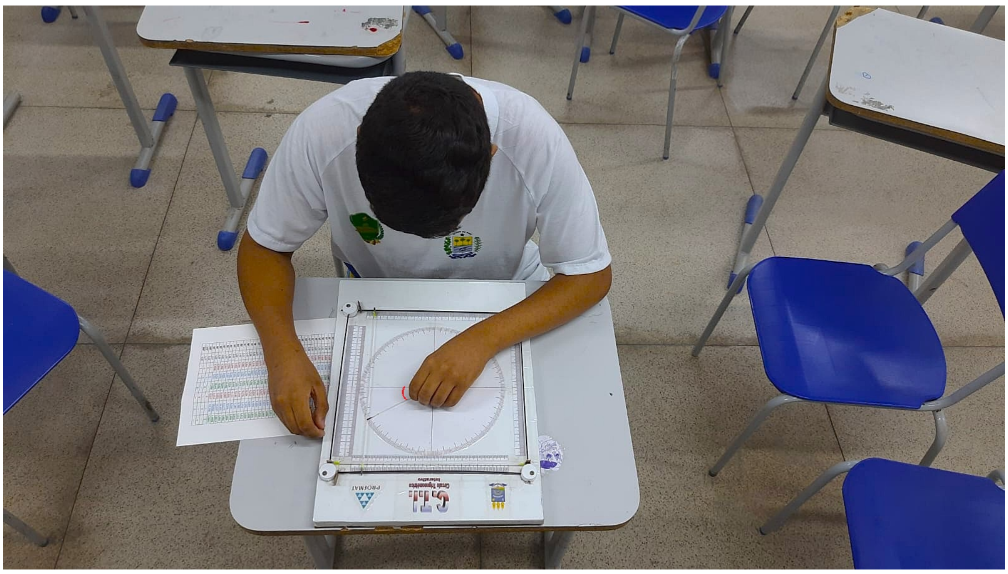
Figura 3.7: Ângulo agudo



Fonte: Autor

Através da Figura 3.8, é possível observar um momento significativo de interação entre o aluno e o CTI, evidenciando o potencial pedagógico desse recurso. Na imagem, o estudante realiza a manipulação do material de maneira ativa, utilizando-o para representar visualmente um dos tipos de ângulos, o agudo, caracterizado por sua abertura inferior a 90°.

Figura 3.8: Aluno manipulando o CTI para identificar os tipos de ângulos



Fonte: Autor

Dessa forma, pretendemos mostrar aos alunos que todos os ângulos no ciclo trigonométrico, a partir da origem, têm sua classificação dentro dos tipos de ângulos estudados no livro didático e que é possível mensurá-los, identificá-los e classificá-los com o uso do CTI.

Determinando o Complementar, Suplementar e o Replementar dos Ângulos Notáveis

Objetivo: Aprender a determinar e identificar ângulos complementares, suplementares e replementares dos ângulos notáveis.

Material necessário: CTI e as hastes laterais.

Tipo de atividade: Realizada individualmente.

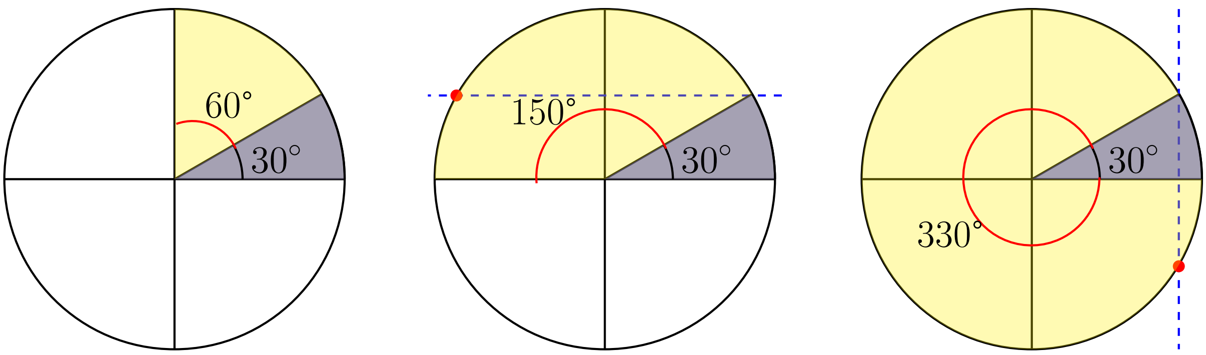
Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

Entendido como se localiza, na prática, os ângulos no CTI e compreendido as definições de ângulos complementares, suplementares e replementares os alunos devem mostrar, após citado um ângulo qualquer no primeiro quadrante pelo docente, seu respectivo ângulo complementar, suplementar e replementar através das hastes do dispositivo.

Por exemplo, citando um ângulo de 30° o aluno deverá localizá-lo no mecanismo, determinando o seu complementar pela contagem dos traçinhos a partir deste ângulo no primeiro quadrante até completar os 90°.

Prosseguindo, com a haste paralela ao eixo das abscissas sobre o ângulo de 30° deve saber localizar o seu suplementar no segundo quadrante que corresponde ao ângulo de 150°, percebendo que o arco de 0° a 30° é o mesmo de 150° a 180° e, finalmente, com a haste perpendicular ao eixo das abscissas sobre este mesmo ângulo, deve saber localizar o seu replementar no 4° quadrante que corresponde ao ângulo de 330°, pois o ângulo de 0° a 30° possui o mesmo arco do ângulo de 330° a 360°, conforme a Figura 3.9.

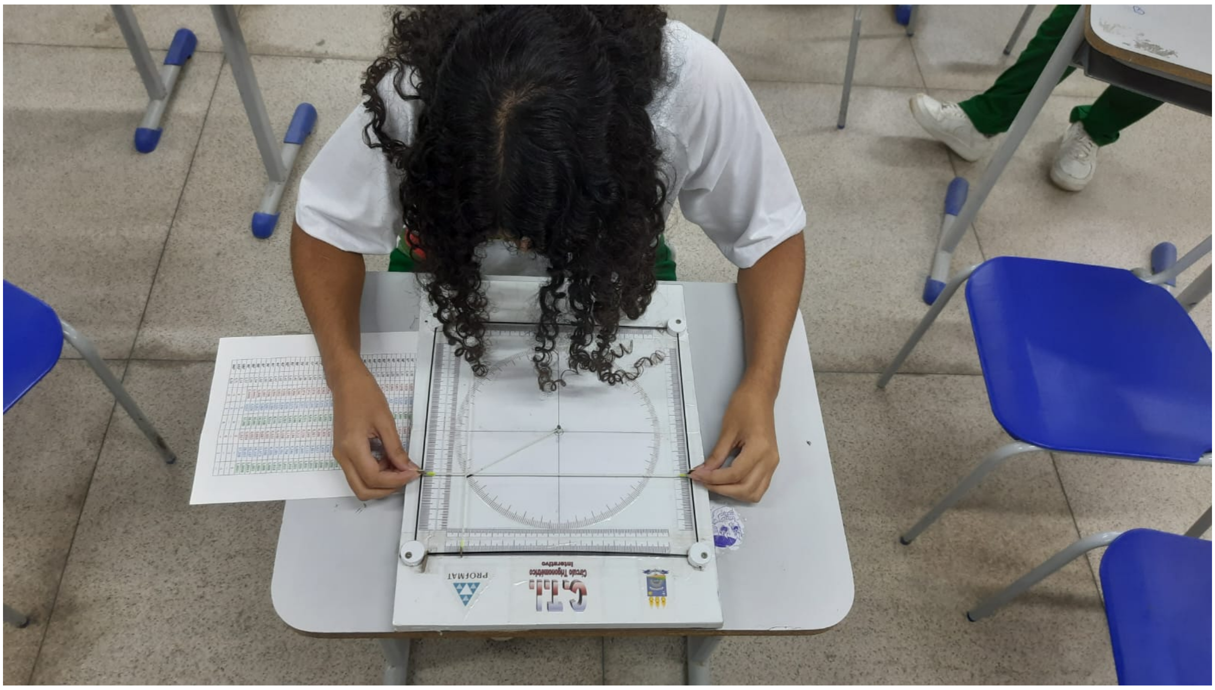
Figura 3.9: Determinando o complementar, suplementar e replementar do ângulo de 30º



Fonte: Autor

Nesse momento, a aluna, figura 3.10, coloca em prática a atividade proposta previamente pelo docente, demonstrando total compreensão dos objetivos pedagógicos envolvidos. A execução ocorre de forma simples, eficaz e segura, evidenciando que não houve dificuldades no manuseio nem na interação com o dispositivo didático, o que reforça a acessibilidade e funcionalidade do material.

Figura 3.10: Aluna manipulando o CTI para determinar o complementar, suplementar e replementar do angulo de 30°.



Fonte: Autor

Sendo assim, almejamos familiarizar os alunos com os conceitos de complementar, suplementar e replementar de qualquer ângulo no ciclo trigonométrico através do CTI, aprendendo a determiná-los, facilitando a interpretação e cálculo destes quando formos usar as relações trigonométricas posteriormente.

Aprendendo a Fazer a Redução ao Primeiro Quadrante no Círculo Trigonométrico

Objetivo: Aprender a determinar o ângulo correspondente no primeiro quadrante dos ângulos do segundo, terceiro e quarto quadrante no CTI.

Material necessário: CTI, o acessório que representa o diâmetro e as hastes laterais.

Tipo de atividade: Realizada individualmente.

Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

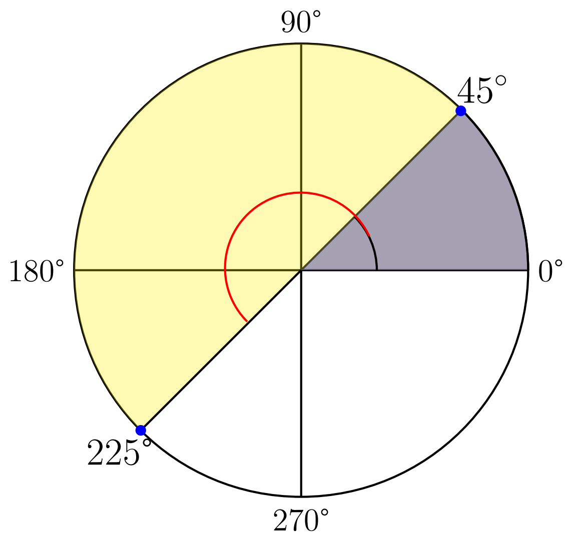
Nesta etapa os alunos irão aprender a tomar qualquer ângulo no segundo, terceiro ou quarto quadrantes e através das hastes e do raio duplo (diâmetro) do CTI encontrar um correspondente no primeiro quadrante.

Por exemplo, para encontrar um ângulo correspondente do segundo quadrante no primeiro, o aluno utilizará a haste horizontal ao eixo das abscissas do CTI e deverá perceber que ao posicioná-la sobre este ângulo determinará um outro no primeiro quadrante correspondente a ele, pois ambos terão a mesma medida de arco, de forma análoga a ideia de ângulo suplementar. Com ângulos no terceiro quadrante o aluno poderá usar tanto a haste horizontal como a vertical de inicio para levá-lo para o quadrante mais próximo.

Caso use a haste vertical, o aluno determinará um arco correspondente no segundo quadrante e repetindo a etapa anterior determinará o arco correspondente no primeiro quadrante e usando a haste horizontal determinará no quarto quadrante um arco correspondente a este e através da haste vertical determinará o arco correspondente no primeiro quadrante.

Como solução direta deste, o aluno pode usar o diâmetro do CTI para determinar tal ângulo, conforme a Figura 3.11. E por fim, estando o ângulo no quarto quadrante o aluno usará a haste vertical ao eixo das abscissas que determinará um arco de medida igual no primeiro quadrante.

Figura 3.11: Redução do ângulo de 225° ao primeiro quadrante através do diâmetro



Fonte: Autor

Visualizamos na Figura 3.12 exemplo deste processo, onde o docente pediu para o aluno fazer a redução de um ângulo ao primeiro quadrante.

Figura 3.12: Aluna manipulando o CTI na redução dos ângulos para o primeiro quadrante

Fonte: Autor

Com isso, espera-se que o aluno não apenas consiga trazer qualquer ângulo dos demais quadrantes para o primeiro, mas também seja capaz de calcular corretamente o seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante desses ângulos, respeitando os sinais dos respectivos quadrantes e aplicando as fórmulas adequadas de modo preciso em diversos contextos, inicialmente, com o auxílio do CTI e posteriormente de maneira autônoma nas resoluções de problemas.

Seno de um Ângulo

Objetivo: Aprender a determinar o seno de qualquer ângulo no CTI.

Material necessário: CTI com suas hastes e as escalas laterais (esquerda e direita).

Tipo de atividade: Realizada em grupo.

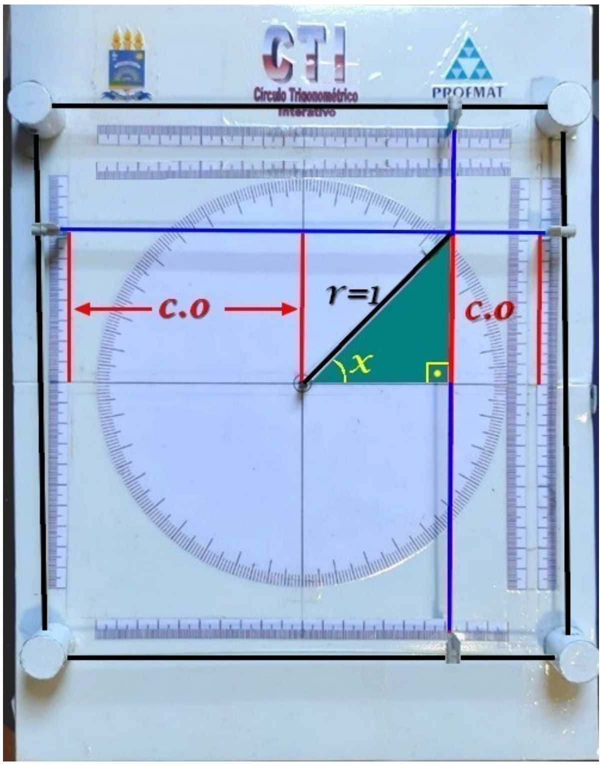
Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

Neste momento, os alunos irão visualizar a compreensão do cálculo do seno, do eixo envolvido, dos sinais dos quadrantes e do intervalo de variação, exibido no Capítulo 2 (Seno de um ângulo), em uma demonstração prática no CTI, sendo que estes 3 últimos serão validados visualmente.

Utilizando as hastes laterais, o raio, e se necessário, os triângulos de EVA, os alunos poderão visualizar de forma concreta como encontrar o valor do seno de qualquer ângulo. Aqui eles devem perceber que o raio e a haste vertical posicionadas sobre um dado ângulo x junto ao eixo das abscissas formam um triângulo retângulo (verde), conforme a Figura

3.13. Temos que a hipotenusa é unitária e o cateto oposto é o segmento (em vermelho no triângulo) limitado na haste vertical pela haste horizontal e o eixo das abscissas, o que a torna solução do seno, com valores correspondentes nas escalas laterais direita e esquerda, pois são segmentos (em vermelho) paralelos de mesma medida.

Figura 3.13: Demonstração do cálculo do seno no CTI.



Fonte: Autor

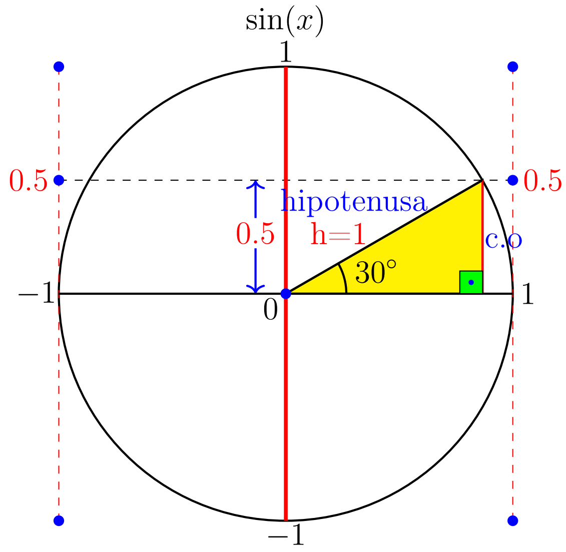
$$\text{seno}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \text{cateto oposto}.$$

Tomando, como exemplo, a procura do valor do seno de 30° o aluno deve saber localizar este ângulo no CTI através do ponteiro de raio unitário e em seguida com a movimentação da haste horizontal sobre o eixo vertical (eixo y) deve saber posicionar a haste sobre este ângulo e conseguir fazer a leitura sobre as retas impressas nas laterais do CTI do valor correspondente ao ângulo dado, conforme podemos visualizar geometricamente na Figura 3.14.

Observa-se que o raio unitário representa a hipotenusa, nos restando o valor do cateto oposto que é o valor do seno do ângulo procurado. De posse dessas informações e da fórmula estudada, assim como dos ângulos notáveis, podemos realizar os cálculos usando a fórmula do seno e depois conferir as respostas com a aplicação do CTI.

$$sen(x) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c.o}{1} = c.o$$

Figura 3.14: Calculando o seno de 30°



Fonte: Autor

$$sen(30°) = \frac{c.o}{h} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

Para determinar em quais quadrantes o seno de x é crescente ou decrescente, podemos utilizar o CTI. Para isso, basta selecionar dois ângulos quaisquer no mesmo quadrante, calcular os valores do seno para cada um deles e, em seguida, comparar os resultados obtidos. Essa abordagem é semelhante ao procedimento de cálculo do seno, conforme discutido anteriormente. Por exemplo, considerando os ângulos notáveis no primeiro quadrante, temos a sequência $30° < 45° < 60°$. Para esses ângulos, os valores de seno serão:

$$\sin 30° = 0,5, \; \sin 45° = 0,707, \; \sin 60° = 0,866$$
$$0,5 < 0,707 < 0,866$$

Isso demonstra, experimentalmente, que o seno é crescente no primeiro quadrante. De maneira análoga, podemos aplicar o mesmo raciocínio para os outros quadrantes, verificando se o seno é crescente ou decrescente em cada um deles com o uso do CTI. Ou, como segunda opção de visualização, movimentar a haste horizontal a partir do ângulo 0° em direção ao ângulo de 90° e perceber no eixo das ordenadas que os valores dos senos aumentam, ou seja, é crescente. De modo análogo, o procedimento e a análise pode ser feito nos outros quadrantes.

Vejamos na Figura 3.15 os alunos determinando o seno de um ângulo com o uso do CTI.

Figura 3.15: Alunos manipulando o CTI para determinar o seno dos ângulos.

Fonte: Autor

Portanto, busca-se proporcionar aos discentes não apenas a compreensão do conceito de seno no ciclo trigonométrico, mas também capacitá-los a calcular o seno de qualquer ângulo por meio das fórmulas apropriadas, com verificação, posterior, no CTI. Além disso, busca-se ampliar sua percepção sobre a aplicabilidade desse conhecimento em diferentes contextos, fortalecendo sua compreensão matemática e sua capacidade de resolução de problemas.

Cosseno de um Ângulo

Objetivo: Aprender a determinar o cosseno de qualquer ângulo no CTI.

Material necessário: CTI, as hastes e as escalas laterais (superior e inferior).

Tipo de atividade: Realizada em grupo.

Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

Agora vamos colocar em prática a compreensão do cálculo do cosseno, do eixo envolvido, dos sinais dos quadrantes e do intervalo de variação, conforme exibido no Capítulo 2 (Cosseno de um ângulo), em uma demonstração prática no CTI, sendo que estes 3 últimos serão validados visualmente.

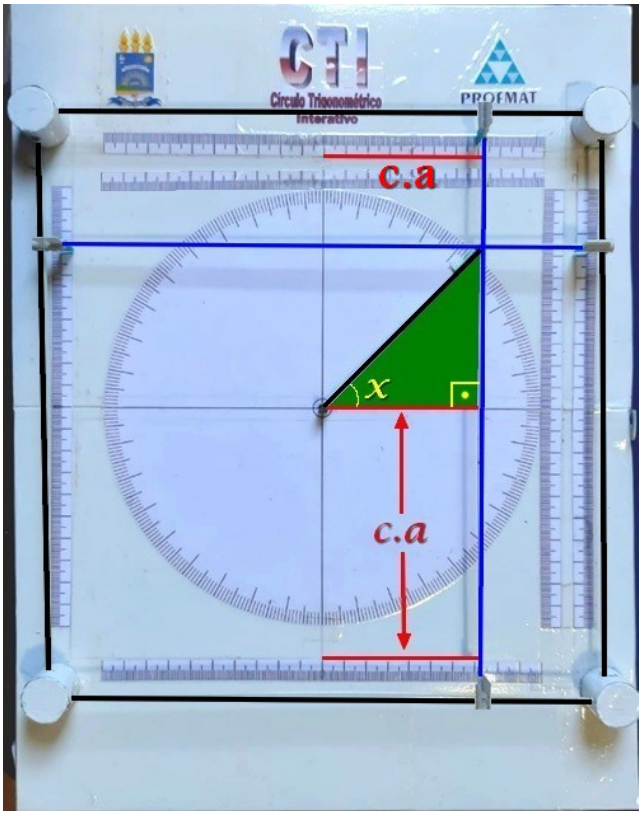
Utilizando as hastes laterais, o raio e os triângulos de EVA (este, quando necessário), os alunos poderão visualizar de forma concreta como encontrar o valor do cosseno de qualquer ângulo.

Aqui eles devem perceber que o raio e a haste vertical posicionadas sobre um dado ângulo x junto ao eixo das abscissas formam um triângulo retângulo (verde), conforme mostra a Figura 3.16, onde a hipotenusa é unitária e o cateto adjacente é o segmento (em vermelho no triângulo) limitado no eixo das abscissas (eixo dos cossenos) pela haste vertical e o eixo das ordenadas, o que a torna solução do cosseno, com valores correspondentes nas escalas laterais superior e inferior, pois são segmentos (em vermelho) paralelos de mesma medida.

A atividade descrita permite que os alunos compreendam, de forma visual e concreta, a definição trigonométrica do cosseno a partir da construção de um triângulo retângulo no círculo trigonométrico. Por meio da manipulação das hastes e dos triângulos de EVA, eles conseguem identificar com clareza o cateto adjacente ao ângulo como a representação do valor do cosseno, reforçando a ideia de que esse valor corresponde à projeção do raio no eixo das abscissas.

Essa abordagem prática favorece a assimilação do conceito e estabelece uma ponte eficaz entre a teoria e a aplicação geométrica.

Figura 3.16: Demonstração do cálculo do cosseno no CTI.



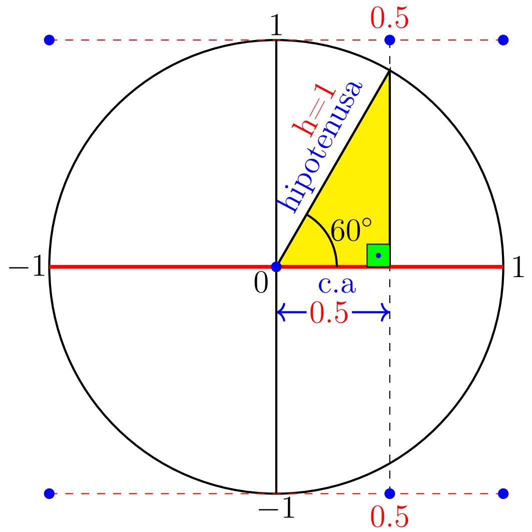
Fonte: Autor

Tomando, como exemplo, a procura do valor do cosseno de 60°, o aluno deve saber localizar este ângulo no CTI através do ponteiro de raio unitário e em seguida com a movimentação da haste vertical sobre o eixo horizontal (eixo x) deve saber posicionar esta haste sobre o ângulo, paralelo ao eixo das ordenadas, e conseguir fazer a leitura sobre a reta impressa na parte superior ou inferior do valor correspondente ao ângulo dado, conforme é mostrado geometricamente na Figura 3.17.

Observa-se que o raio unitário representa a hipotenusa, nos restando o valor do cateto adjacente que é o valor do cosseno do ângulo procurado. Cálculo este, que poderá ser ratificado algebricamente pela fórmula do cosseno ou através dos valores da tabela dos ângulos notáveis estudados no livro didático.

$$cos(x) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c.a}{1} = c.a$$

Figura 3.17: Calculando o cosseno de 60°



Fonte: Autor

$$\cos(60°) = \frac{c.a}{h} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

Para determinar em quais quadrantes o cosseno de x é crescente ou decrescente, podemos utilizar o CTI. Para isso, basta selecionar dois ângulos quaisquer no mesmo quadrante, calcular os valores do cosseno para cada um deles e, em seguida, comparar os resultados obtidos. Essa abordagem é semelhante ao procedimento de cálculo do cosseno, conforme discutido anteriormente. Por exemplo, considerando os ângulos no segundo quadrante, temos a sequência $120° < 135° < 150°$. Para esses ângulos, os valores de cosseno serão:

$$\cos 120° = -0,5, \cos 135° = -0,707, \cos 150° = -0,866$$
$$-0,5 > -0,707 > -0,866$$

Isso verifica que o cosseno é decrescente no segundo quadrante. De maneira análoga, podemos aplicar o mesmo raciocínio para os outros quadrantes, verificando se o cosseno é crescente ou decrescente em cada um deles com o uso do CTI. Ou, como segunda opção de visualização, movimentar a haste vertical a apartir do ângulo 90° em direção ao ângulo de 180° e perceber no eixo das abscissas que os valores dos cossenos diminuem, ou seja, é decrescente. De modo análogo, o procedimento e a análise pode ser feito nos outros quadrantes.

Na Figura 3.18 podemos visualizar os alunos determinando o cosseno de um ângulo através do CTI.

Figura 3.18: Alunos manipulando o CTI para determinar o cosseno dos ângulos

Fonte: Autor

Por conseguinte, busca-se consolidar junto aos alunos não apenas a compreensão do conceito de cosseno no ciclo trigonométrico, mas também capacitá-los a calcular o cosseno de qualquer ângulo por meio do CTI. Além disso, pretende-se prepará-los para aplicar esse conhecimento em fórmulas posteriores e em diversos contextos, fortalecendo sua habilidade matemática e sua compreensão prática do tema.

Tangente de um Ângulo

Objetivo: Aprender a determinar a tangente de qualquer ângulo no ciclo trigonométrico.

Material necessário: CTI, o acessório que representa o ponteiro estendido, as hastes laterais e a primeira escala lateral direita.

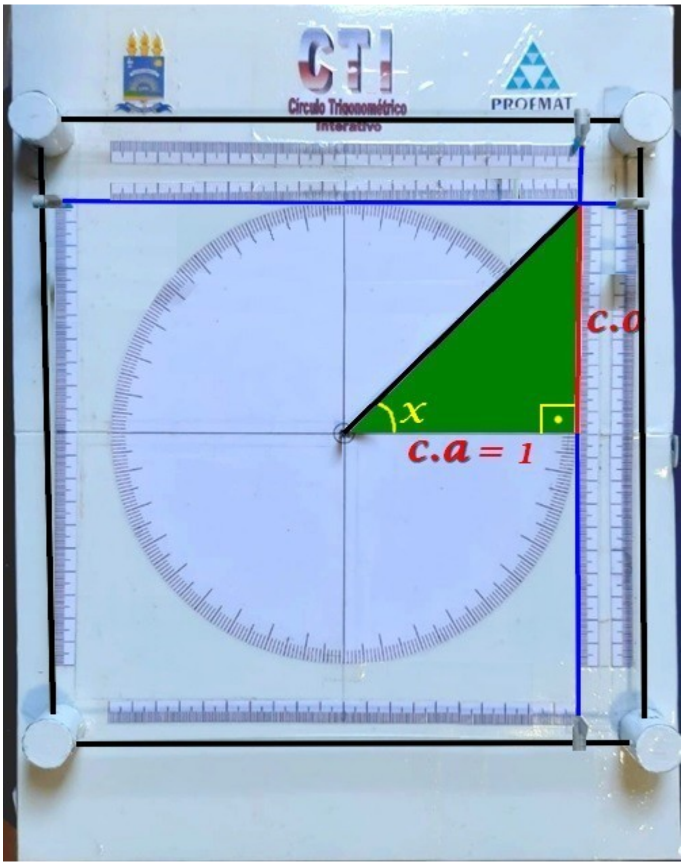
Tipo de atividade: Realizada em grupo.

Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

Nesta etapa, vamos colocar em prática a compreensão do cálculo da tangente, da reta envolvida, dos sinais dos quadrantes e do intervalo de variação, exibido no Capítulo 2 (Tangente de um ângulo), em uma demonstração prática no CTI, sendo que estes 3 últimos serão validados visualmente. Já para entender o cálculo da tangente utilizaremos as hastes laterais, o raio estendido e o triângulo de EVA (este, se necessário), onde os alunos poderão visualizar de forma concreta como encontrá-lo dado um ângulo qualquer.

Aqui eles devem perceber que o raio estendido sobreposto sobre o ângulo dado e a haste vertical tangenciando o ângulo 0° junto ao eixo das abscissas formam um triângulo retângulo (em verde), conforme mostra a Figura 3.19, onde o cateto adjacente é unitária e o cateto oposto é o segmento limitado (em vermelho no triângulo) na haste vertical pela haste horizontal e o eixo das abscissas, o que a torna solução da tangente, conforme descrito pela fórmula. O valor em real deste ângulo deve ser feito na primeira escala vertical à direita do CTI.

Figura 3.19: Demonstração do cálculo da tangente no CTI.



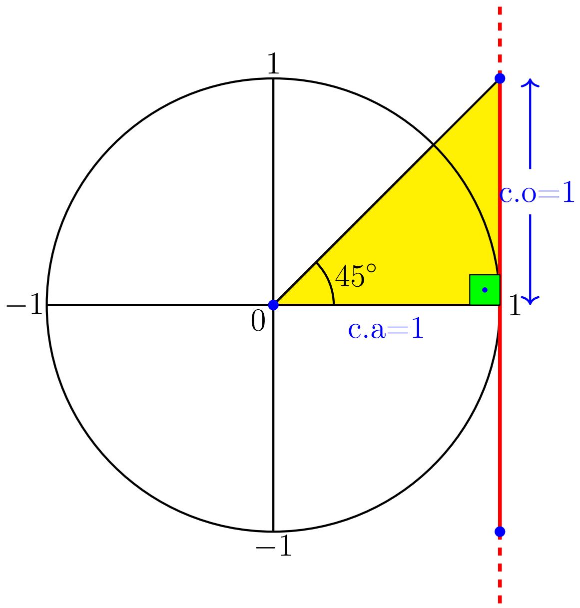
Fonte: Autor

Tomando, como exemplo, a procura do valor da tangente de 45° o aluno deve saber localizar este ângulo no CTI e em seguida com a movimentação do ponteiro estendido precisa saber posicioná-lo sobre o mesmo e logo após deve conseguir fazer a leitura sobre a primeira reta impressa na lateral direita tangente ao círculo do valor correspondente ao ângulo dado, conforme está, geometricamente, mostrado na Figura 3.20.

Observa-se que o raio unitário representa o cateto adjacente, nos restando o valor do cateto oposto que é a medida do segmento que vai de 0° até o ponto de encontro entre o raio estendido e a haste vertical. Cálculo este, que pode ser ratificado algebricamente pela fórmula da tangente ou através dos valores da tabela dos ângulos notáveis estudados no livro didático.

$$\tan(x) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{c.o}{1} = c.o$$

Figura 3.20: Calculando a tangente de 45°



Fonte: Autor

$$\tan(45°) = \frac{c.o}{c.a} = \frac{1}{1} = 1$$

Para verificarmos se a tangente de x é crescente em qualquer um dos quadrantes no CTI basta selecionar dois ângulos quaisquer no mesmo quadrante, calcular os valores da tangente para cada um deles e, em seguida, comparar os resultados obtidos. Essa abordagem do cálculo é semelhante ao procedimento de cálculo da tangente discutido anteriormente.

Por exemplo, se selecionarmos quaisquer ângulos, como os descritos abaixo, no terceiro quadrante e calcularmos suas respectivas tangentes teríamos para a sequência de ângulos $210° < 225° < 240°$ os seguintes valores no CTI:

$$\tan 210° = 0,577,\ \tan 225° = 1,\ \cos 240° = 1,732$$
$$0,577 < 1 < 1,732$$

Isso verifica que a tangente é crescente no terceiro quadrante. De maneira análoga, podemos aplicar o mesmo raciocínio para os outros quadrantes, verificando se a tangente é crescente ou decrescente com o uso do CTI. Ou, como segunda opção de visualização, movimentar a raio duplo partindo do ângulo de 180° em direção ao ângulo de 270° e perceber no eixo da tangente que os valores destas aumentam, ou seja, é crescente. De modo análogo, o procedimento e a análise pode ser feito nos outros quadrantes.

Na Figura 3.21, os alunos calculam a tangente de um ângulo utilizando o CTI. Eles localizam o ponto correspondente a esse ângulo no círculo unitário. A partir das coordenadas, eles determinam o valor da tangente.

Figura 3.21: Alunos manipulando o CTI para determinar a tangente dos ângulos

Fonte: Autor

Outro modo de aprendizagem para o cálculo da tangente de um ângulo x qualquer no CTI é aplicando a fórmula da tangente que é dado por $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ e logo após identificar o valor destes termos (da segunda igualdade) no ciclo basta efetuar a divisão do valor do seno pelo cosseno deste ângulo dado.

Cotangente de um Ângulo

Objetivo: Aprender a determinar a cotangente de qualquer ângulo no ciclo trigonométrico.

Material necessário: CTI, o acessório que representa o ponteiro estendido, as hastes laterais e a escala lateral superior tangente ao círculo no ângulo de 90°.

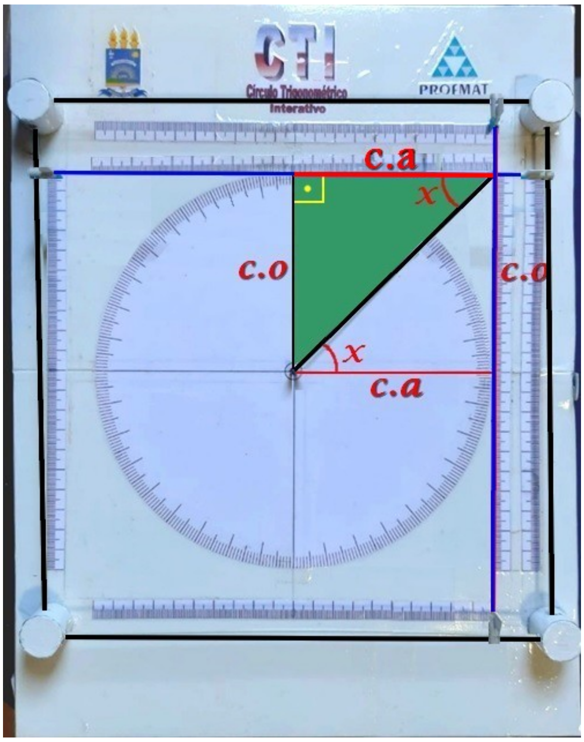
Tipo de atividade: Realizada em grupo.

Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

Neste tópico, vamos colocar em prática a compreensão do cálculo da cotangente, da reta envolvida, dos sinais dos quadrantes e do intervalo de variação, conforme exibido no Capítulo 2 (Cotangente de um ângulo), em uma demonstração prática no CTI, sendo que estes 3 últimos serão validados visualmente. Utilizando as hastes laterais, o raio estendido e o triângulo de EVA (este, se necessário), os alunos poderão visualizar de forma concreta como encontrar o valor da cotangente de um ângulo qualquer.

Aqui eles devem perceber que o raio estendido sobreposto sobre o ângulo dado e a haste horizontal tangenciando o ângulo 90° sobre o eixo das ordenadas formam um triângulo retângulo (em verde), conforme mostra a Figura 3.22, onde o cateto oposto (raio) é unitária e o cateto adjacente é o segmento limitado (em vermelho no triângulo) na haste horizontal pela haste vertical e o eixo das ordenadas, o que o torna solução da cotangente.

Figura 3.22: Demonstração do cálculo da cotangente no CTI.



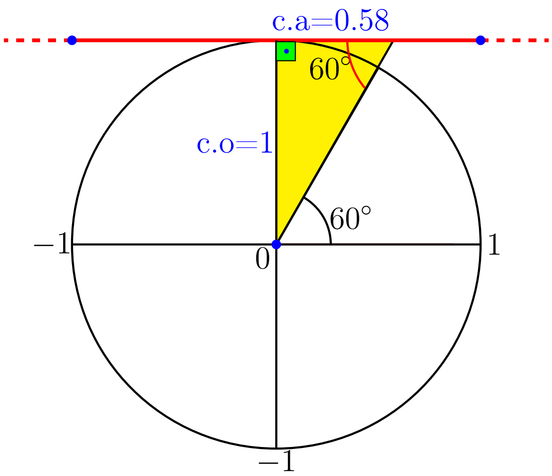
Fonte: Autor

Tomando, como exemplo, a procura do valor da cotangente de 60° o aluno deve saber localizar este ângulo no CTI e em seguida com a movimentação do raio estendido precisa saber posicioná-lo sobre este ângulo e após deve conseguir fazer a leitura sobre a reta impressa na parte superior que tangencia o ângulo de 90° do valor correspondente ao ângulo dado, conforme é visualizado, geometricamente, na Figura 3.23.

Observa-se que o raio unitário representa o cateto oposto, nos restando o valor do cateto adjacente que é o valor da cotangente do ângulo procurado. Cálculo este, que poderá ser ratificado algebricamente pela fórmula da cotangente ou através dos valores da tabela dos ângulos notáveis estudados no livro didático.

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{c.a}{1} = c.a$$

Figura 3.23: Calculando a cotangente de 60°

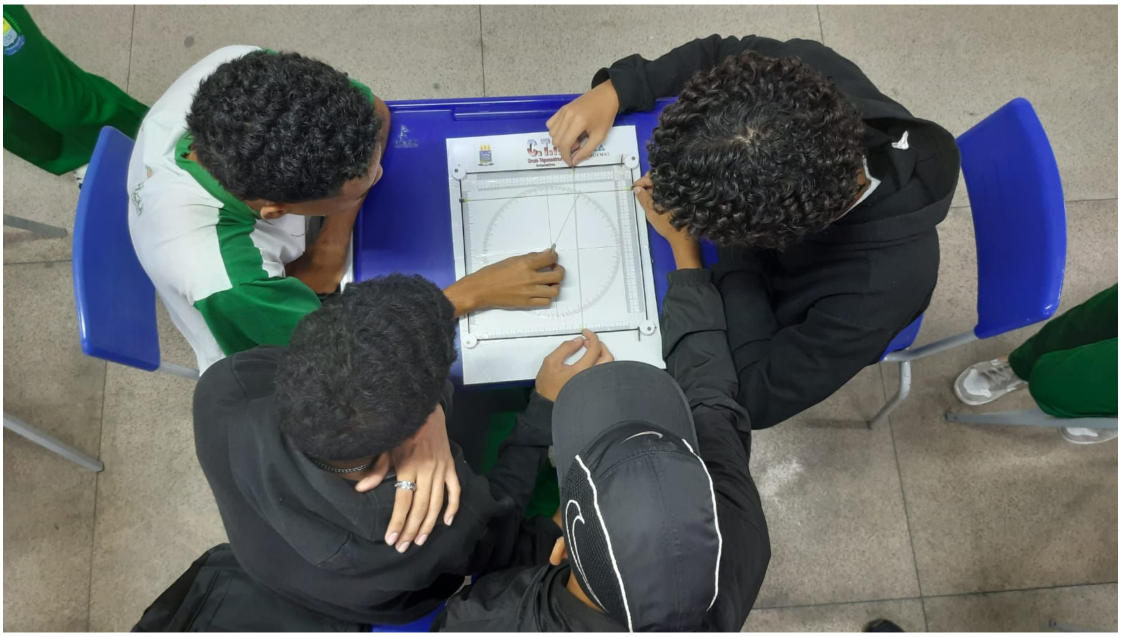


Fonte: Autor

$$\cot(60°) = \frac{c.a}{c.o} = \frac{0.58}{1} = 0.58$$

A Figura 3.24 ilustra um momento importante da atividade prática em sala de aula, no qual os alunos utilizam o CTI para explorar o conceito de cotangente de um ângulo.

Figura 3.24: Alunos manipulando o CTI para determinar a cotangente dos ângulos



Fonte: Autor

Nesse registro, é possível observar os estudantes engajados na tarefa de localizar com precisão o ponto correspondente a um determinado ângulo no círculo unitário, utilizando as marcações e referências disponíveis no material concreto.

Após identificarem esse ponto, os alunos prosseguem com a análise das coordenadas cartesianas obtidas, compreendendo como essas informações podem ser aplicadas no cálculo da razão trigonométrica em questão.

Para verificarmos se a cotangente de x é decrescente em qualquer um dos quadrantes no CTI basta selecionar dois ângulos quaisquer no mesmo quadrante, calcular os valores da cotangente para cada um deles e, em seguida, comparar os resultados obtidos. Essa abordagem do cálculo é semelhante ao procedimento de cálculo da cotangente discutido anteriormente.

Por exemplo, se selecionarmos quaisquer ângulos, como os descritos em seguida, no primeiro quadrante e calcularmos suas respectivas secantes teríamos para a sequência de ângulos $30° < 45° < 60°$ os seguintes valores:

$$\cot 30° = 1,732, \, \cot 45° = 1, \, \cot 60° = 0,577$$
$$1,732 > 1 > 0,577$$

Isso verifica que a cotangente é decrescente no primeiro quadrante. De maneira análoga, podemos aplicar o mesmo raciocínio para os outros quadrantes, verificando se a cotangente é decrescente ou crescente com o uso do CTI. Ou, como segunda opção de visualização, movimentar a raio duplo partindo do ângulo de 0° em direção ao ângulo de 90° e perceber no eixo da cotangente que os valores destes diminuem, ou seja, é decrescente. De modo análogo, o procedimento e a análise pode ser feito nos outros quadrantes.

Pode-se, também, determinar o valor da cotangente de um ângulo no CTI fazendo uso da sua fórmula e efetuando as operações corretamente, ou seja, dividindo o valor do cosseno pelo valor do seno do ângulo dado, pois, $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Secante de um Ângulo

Objetivo: Aprender a determinar a secante de qualquer ângulo no CTI.

Material necessário: CTI, o acessório que representa o raio com tangente e a escala lateral estendida ao eixo das abscissas.

Tipo de atividade: Realizada em grupo.

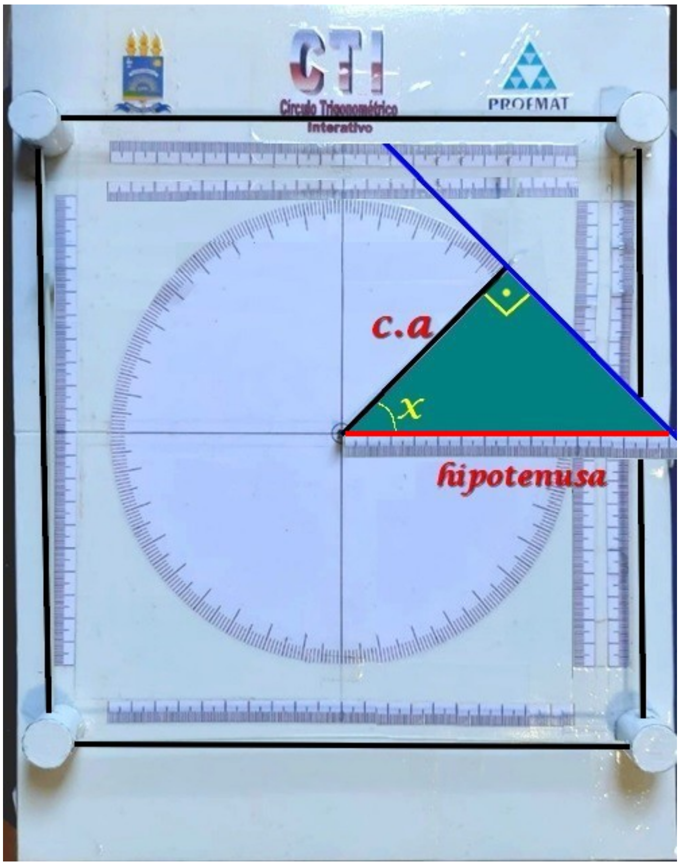
Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

Agora colocaremos em prática a compreensão do cálculo da secante, do eixo envolvido, dos sinais dos quadrantes e do intervalo de variação, conforme exibido no Capítulo 2

(Secante de um ângulo), em uma demonstração prática no CTI, sendo que estes 3 últimos serão validados visualmente. Utilizando o raio com tangente e o triângulo de EVA (este, se necessário), os alunos poderão visualizar de forma concreta como encrontrar o valor da secante de um dado ângulo.

Aqui eles devem perceber que o raio com tangente sobreposto sobre o ângulo dado e junto ao eixo das abscissas formam um triângulo retângulo (em verde), conforme mostra a Figura 3.25, onde o cateto adjacente é unitário e a hipotenusa é o segmento limitado (em vermelho no triângulo) no eixo das abscissas que vai da origem do plano cartesiano a reta que o tangencia, o que o torna solução da secante conforme descrito pela sua fórmula. A leitura do valor deve ser feito na escala estendida acoplada ao CTI, sob o eixo das abscissas.

Figura 3.25: Demonstração do cálculo da secante no CTI .



Fonte: Autor

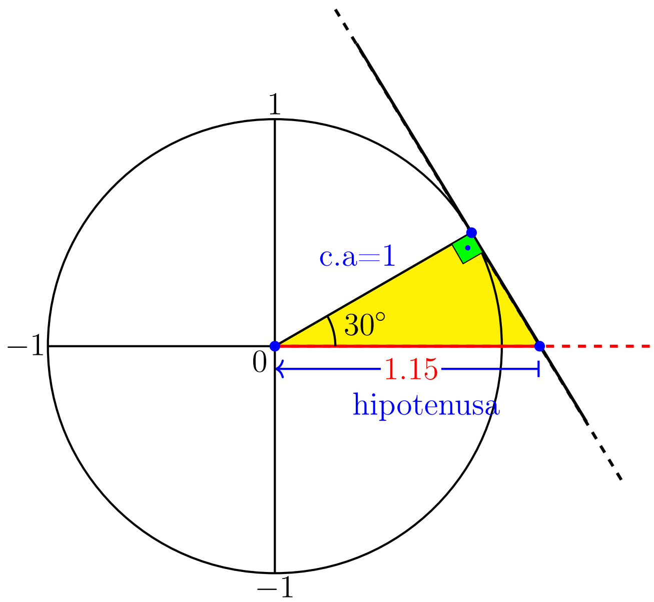
Nesse momento da atividade, os alunos devem compreender visualmente como se constrói a secante de um determinado ângulo por meio da manipulação do CTI. Essa construção geométrica reforça a visualização da secante como a projeção alongada do raio sobre o eixo horizontal, ultrapassando, em alguns casos, a circunferência.

A leitura do valor correspondente à secante deve ser realizada na escala estendida que acompanha o CTI, posicionada logo abaixo do eixo das abscissas, permitindo uma medição precisa e facilitando a associação entre representação visual e valor numérico.

Com essa abordagem concreta, os alunos conseguem compreender o comportamento da função secante de forma clara, dinâmica e intuitiva, aproximando teoria e prática no processo de aprendizagem.

Tomando, como exemplo, a procura do valor da secante de 30° o aluno deve saber localizar este ângulo no CTI e em seguida com a movimentação do raio com tangente deve saber posicioná-lo sobre este ângulo e após precisar fazer a leitura sobre a reta impressa no prolongamento do eixo das abscissas do valor correspondente ao ângulo dado, conforme pode ser visualizado, geometricamente, na Figura 3.26.

Figura 3.26: Calculando a secante de 30°



Fonte: Autor

Observa-se que o raio unitário representa o cateto adjacente, nos restando o valor da hipotenusa que é o valor da secante do ângulo procurado. Cálculo este, que poderá ser ratificado algebricamente pela fórmula da secante ou através dos valores da tabela dos ângulos notáveis estudados no livro didático.

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{h}{1} = h$$

$$\sec(30°) = \frac{\text{h}}{\text{c.a}} \approx \frac{1.15}{1} \approx 1.15$$

A Figura 3.27 mostra os alunos determinando a secante de um ângulo usando o CTI em uma das atividades proposta em sala de aula.

Figura 3.27: Alunos manipulando o CTI para determinar a secante dos ângulos

Fonte: Autor

Para verificarmos se a secante de x é crescente ou decrescente em qualquer um dos quadrantes no CTI basta selecionar dois ângulos quaisquer no mesmo quadrante, calcular os valores da secante para cada um deles e, em seguida, comparar os resultados obtidos. Essa abordagem do cálculo é semelhante ao procedimento de cálculo da secante discutido anteriormente.

Por exemplo, se selecionarmos quaisquer ângulos no CTI , como os descritos em seguida, no segundo quadrante e calcularmos suas respectivas secantes teríamos para a sequência de ângulos $120° < 135° < 150°$ os seguintes valores:

$$\sec 120° = -2, \sec 135° = -1,414, \sec 150° = -1,154$$
$$-2 < -1,414 < -1,154$$

Isso verifica que a secante é crescente no segundo quadrante. De maneira análoga, podemos aplicar o mesmo raciocínio para os outros quadrantes, verificando se a secante é crescente ou decrescente com o uso do CTI . Ou, como segunda opção de visualização, movimentar o raio com tangente partindo do ângulo de 90° em direção ao ângulo de 180° e perceber no eixo da abscissa que os valores das secantes aumentam, ou seja, é crescente. De modo análogo, o procedimento e a análise pode ser feito nos outros quadrantes.

Dentro da proposta do uso do CTI o aluno também pode se valer da fórmula da secante para ratificar o cálculo acima e aprender um novo modo de calcular a secante de um ângulo x qualquer dado. Sabendo que a fórmula do cálculo é dado por, $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ pode-se dividir o raio unitário pelo valor do $\cos(x)$ para encontrar o valor da secante.

Cossecante de um Ângulo

Objetivo: Aprender a determinar a cossecante de qualquer ângulo no ciclo trigonométrico.

Material necessário: CTI, o acessório que representa o raio com tangente e a escala lateral estendida ao eixo das ordenadas.

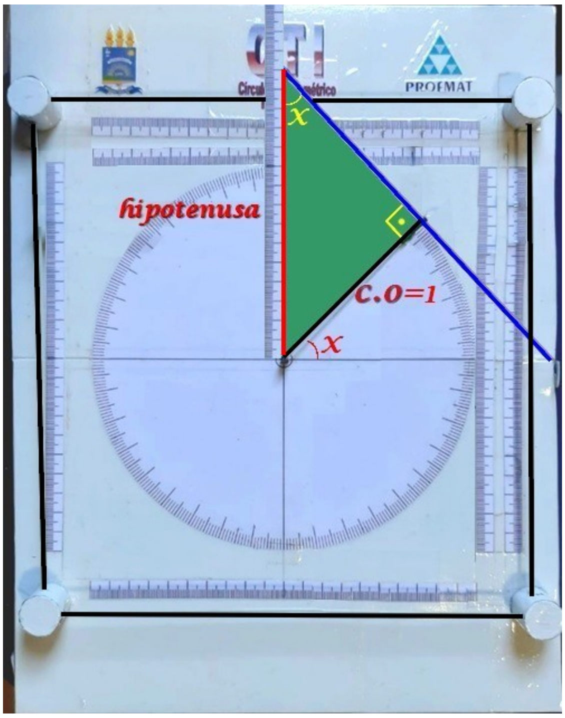
Tipo de atividade: Realizada em grupo.

Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

Por fim, vamos ver na prática a compreensão do cálculo da cossecante, do eixo envolvido, dos sinais dos quadrantes e do intervalo de variação, conforme exibido no Capítulo 2 (Cossecante de um ângulo), em uma demonstração prática no CTI, sendo que estes 3 últimos serão validados visualmente. Utilizando o raio com tangente e o triângulo de EVA (este, se necessário), os alunos poderão visualizar de forma concreta como encrontrar o valor da cossecante de um ângulo qualquer.

Aqui eles devem perceber que o raio com tangente sobreposto sobre o ângulo dado e junto ao eixo das ordenadas formam um triângulo retângulo (em verde), conforme mostra a Figura 3.28, onde o cateto oposto é unitário e a hipotenusa é o segmento limitado (em vermelho no triângulo) na ordenada que vai da origem do plano cartesiano à reta que a tangencia, o que a torna solução da cossecante. A leitura do valor correspondente a cossecante deve ser feito na escala estendida acoplada ao CTI, à esquerda do eixo das ordenadas.

Figura 3.28: Demonstração do cálculo da cossecante no CTI.



Fonte: Autor

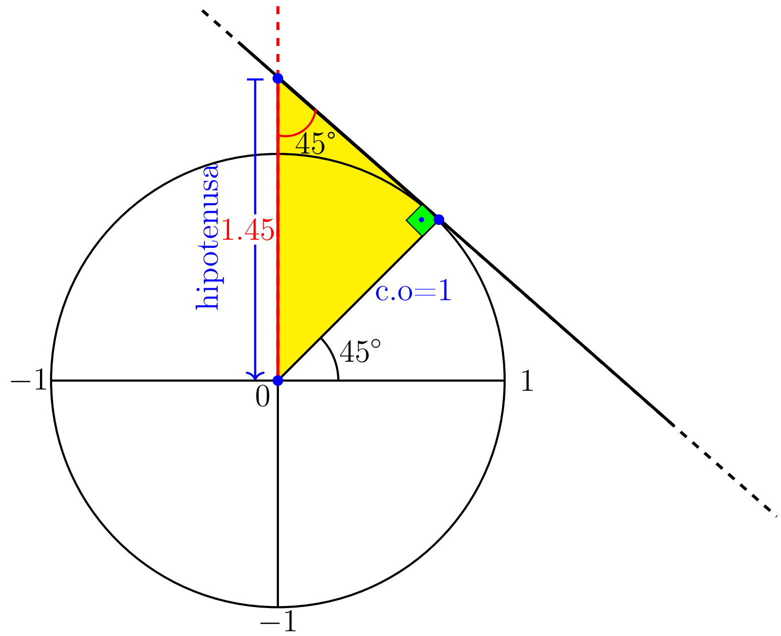
Tomando, como exemplo, a procura do valor da cossecante de 45° o aluno deve saber localizar este ângulo no CTI e em seguida com a movimentação do raio com tangente deve saber posicioná-lo sobre este ângulo e logo em seguida deve saber fazer a leitura sobre a reta impressa no prolongamento do eixo das ordenadas do valor correspondente ao ângulo dado, conforme é visualizado, geometricamente, na Figura 3.29.

Observa-se que o raio unitário representa o cateto oposto, nos restando o valor do hipotenusa que é o valor da cossecante do ângulo procurado. Cálculo este, que poderá ser ratificado algebricamente pela fórmula da cossecante ou através dos valores da tabela trigonométrica (Ver apêndice - 6.3) dos ângulos disponibilizados como material complementar pelo docente.

$$\text{cossec}(x) = \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{h}{1} = h$$

$$\text{cossec}(60°) = \frac{\text{h}}{\text{c.o}} \approx \frac{1.15}{1} \approx 1.15$$

Figura 3.29: Calculando a cossecante de 60°



Fonte: Autor

Para verificarmos se a cossecante de x é crescente ou decrescente em qualquer um dos quadrantes no CTI basta selecionar dois ângulos quaisquer no mesmo quadrante, calcular os valores da cossecante para cada um deles e, em seguida, comparar os resultados obtidos. Essa abordagem do cálculo é semelhante ao procedimento de cálculo da cossecante discutido anteriormente.

A Figura 3.30 retrata uma etapa importante da atividade prática realizada com o uso do CTI, em que os alunos se dedicam à determinação da cossecante de um determinado ângulo. Nesse momento, os estudantes utilizam os recursos do CTI para localizar o ponto correspondente ao ângulo no círculo unitário, analisando cuidadosamente a posição desse ponto em relação aos eixos cartesianos. A atividade requer atenção à ordenada (eixo y), pois é a partir dela que se extrai o valor do seno, fundamental para o cálculo da cossecante.

Após identificarem corretamente o ponto, os alunos utilizam as coordenadas obtidas para aplicar a fórmula da cossecante, que é o inverso do seno. Essa operação permite que compreendam, de forma prática e concreta, a lógica por trás dessa razão trigonométrica.

Figura 3.30: Alunos manipulando o CTI para determinar a cossecante dos ângulos

Fonte: Autor

Por exemplo, se selecionarmos quaisquer ângulos, como os descritos abaixo, no terceiro quadrante e calcularmos suas respectivas cossecantes teríamos para a sequência de ângulos $210° < 225° < 240°$ os seguintes valores:

$$\text{cossec}\,210° = -2,\ \text{cossec}\,225° = -1,414,\ \text{cossec}\,240° = -1,154$$
$$-2 < -1,414 < -1,154$$

Isso verifica que a cossecante é crescente no terceiro quadrante. De maneira análoga, podemos aplicar o mesmo raciocínio para os outros quadrantes, verificando se a cossecante é crescente ou decrescente com o uso do CTI. Ou, como segunda opção de visualização, movimentar o raio com tangente partindo do ângulo de 180° em direção ao ângulo de 270° e perceber no eixo da ordenada que os valores das cossecantes aumentam, ou seja, é crescente. De modo análogo, o procedimento e a análise pode ser feito nos outros quadrantes.

Com isso, pode-se fazer uso da fórmula da cossecante para mostrarmos a validade do cálculo anterior no CTI ao dividirmos o raio unitário pelo seno do ângulo x dado, pois, temos que $\text{cossec}(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$.

3.4 Relações e Contextualização

Relações Fundamentais Trigonométricas

Objetivo: Aprender a identificar e usar as relações fundamentais trigonométricas dado um ângulo qualquer.

Material necessário: CTI e o acessório que representa o raio.

Tipo de atividade: Realizada em grupo.

Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

Nesta etapa, os alunos irão verificar a efetividade das relações trigonométricas fundamentais por meio da manipulação de material concreto. Dado um ângulo x qualquer, os discentes deverão identificar cada razão trigonométrica correspondente no dispositivo utilizado. Em seguida, aplicarão as fórmulas das relações fundamentais, realizando os cálculos necessários para comprovar a veracidade dessas expressões.

Por exemplo, se formos analisarmos a relação fundamental, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dado um ângulo $x = 30°$ o aluno deve saber localizar o valor do seno e do cosseno de $30°$ no CTI e depois resolver as suas respectivas potências finalizando com as operação de soma e verificar se o resultado final satisfará a igualdade no valor 1, ou aproximadamente, já que estamos lidando com duas casas decimais.

Aqui os alunos devem perceber que os ângulos envolvidos são catetos de um triângulo retângulo implícito de hipotenusa unitária e que satisfazem o Teorema de Pitágoras, pois ao serem elevados ao quadrado resultam um valor igual a 1, ou seja, $sen^2(30°) + cos^2(30°)$ $= 1$, conforme mostram a resolução algébrica e o gráfico da figura 3.31.

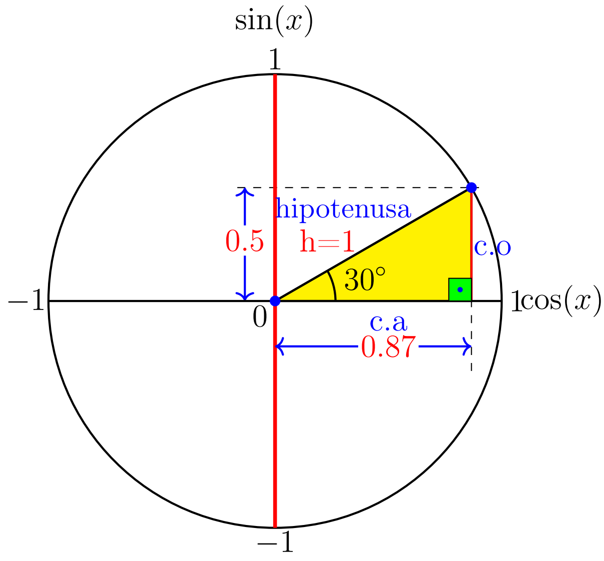
$$\sin^2(30°) + \cos^2(30°) \approx$$

$$0,5^2 + 0,87^2 \approx$$

$$0,25 + 0,75 = 1$$

De posse dessas informações pode-se fazer este estudo para outros ângulos notáveis abordados no livro didático e verificar a veracidade da relação fundamental estudada.

Figura 3.31: Gráfico da relação fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$



Fonte: Autor

O foco aqui não é demonstrações de fórmulas, apenas verificações algébricas dos valores correspondentes aos termos das relações trigonométricas dado um ângulo qualquer.

E de forma análoga consegue-se trabalhar com as outras relações trigonométricas listadas durante o processo de estudos de sala de aula, a saber,

i. $1 + \cot^2 x = \text{cossec}^2\, x$

ii. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

iii. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

iv. $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

v. $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

vi. $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

vii. $cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$

Dentro do contexto da demonstração poderíamos pegar, por exemplo, o item (ii) destas relações e partindo da identidade fundamental teríamos,

Sabemos que

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Dividindo **tudo** por $\cos^2 x$ (onde $\cos x \neq 0$):

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \implies \tan^2 x + 1 = \sec^2 x.$$

Pronto. (Válida para x com $\cos x \neq 0$, isto é, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; nesses pontos tan e sec nem estão definidas.)

Essas são apenas algumas das diversas relações trigonométricas que podemos explorar com o dispositivo, dentre muitas outras, tanto para verificar valores no conjunto dos reais quanto para nos aprofundarmos algebricamente através de outros exemplos.

A Figura 3.32 mostra os alunos verificando a veracidade de algumas das relações trigonométricas abordadas neste trabalho (acima) dado um ângulo qualquer usando o CTI. Eles estão localizando o ponto correspondente a esse ângulo no círculo unitário e depois resolvendo os cálculos algébricos aplicado a fórmula.

Figura 3.32: Alunos manipulando o CTI para verificar as outras relações trigonométricas

Fonte: Autor

Ao utilizar o CTI neste processo espera-se que os estudantes consigam experimentar a matemática de maneira prática, o que não só reforçaria o aprendizado, mas também despertaria o interesse e a curiosidade pela disciplina.

Contextualização no CTI

Objetivo: Aprender a usar o CTI na resolução de problemas contextualizados.

Material necessário: CTI e o acessório que representa o raio.

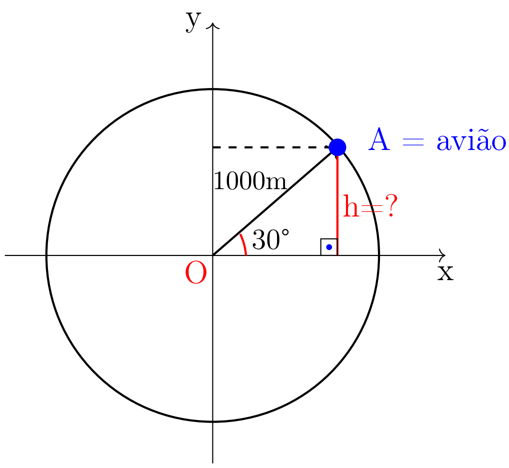
Tipo de atividade: Realizada em grupo.

Duração: 2 horas-aula de 60 minutos.

Dentro da proposta da contextualização foram entregues aos discentes uma lista de exercícios com esta temática para eles tentarem resolver utilizando o CTI. Na questão 3 da lista contida no apêndice 6.1 temos o seguinte questionamento:
"03. (UFPI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, é:"

Espera-se que o aluno seja capaz de visualizar mentalmente a situação em que o avião se encontra, representando-a de forma clara no CTI, construindo um triângulo retângulo, onde a hipotenusa mede 1000 metros, e identifique o ângulo formado entre o ponto final da trajetória do avião (ângulo de 30°) e a superfície plana. A tarefa consiste em determinar o valor do cateto oposto a esse ângulo. Percebendo que utilizaríamos a razão trigonométrica do seno para resolvê-lo, conforme mostra o gráfico da Figura 3.33 e a resolução algébrica ao lado direito desta figura.

Figura 3.33: Contextualização do avião



Fonte: Autor

Resolução algébrica

$$sen(\mathrm{x}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{1000} \Longrightarrow$$

$$2\mathrm{h} = 1000 \Longrightarrow$$

$$\mathrm{h} = 500 \text{ metros}$$

Podemos visualizar na Figura 3.34 um grupo de aluno manipulando o CTI para resolver a questão 3 proposta acima.

Figura 3.34: Alunos manipulando o CTI para resolver a questão 3 proposta anteriormente

Fonte: Autor

Dessa forma, o uso de material concreto poderia favorecer o desenvolvimento de habilidades cognitivas, promover um ambiente de aprendizado mais interativo e contribuir para a construção de um raciocínio matemático mais sólido e confiável.

Capítulo 4

RESULTADOS

Neste capítulo, apresentaremos os resultados obtidos durante a experimentação do CTI pelos discentes. A análise destina-se a interpretar os dados obtidos, apontando as expectativas, os procedimentos, prós e contras do uso do dispositivo que possam fornecer informações relevantes sobre o trabalho em estudo. Os resultados são, assim, primeiramente apresentados de uma maneira descritiva, seguida de uma discussão crítica que compara os achados obtidos com a literatura revisitada. Com base nessa verificação, procuramos responder às perguntas da pesquisa colocada, testar as hipóteses levantadas e avaliar a eficácia dos métodos aplicados durante todo o processo de manipulação do dispositivo.

4.1 Atividades e Coleta de Dados

Observações do Processo de Manipulação

O primeiro contato visual que os discentes tiveram com o mecanismo, pode ser descrito de forma tranquila, positiva e sem restrições. Eles ficaram um pouco ociosos, no começo, mas, com muita vontade de descobrir de que forma aquele dispositivo iria auxiliá-los na construção do conhecimento. À medida que os tópicos dos conteúdos eram explicados na teoria para depois ser estudados e assimilados na prática com a manipulação no CTI os alunos foram se soltando e percebendo que a teoria fazia sentido durante o processo de manejo da ferramenta.

O processo de manipulação do dispositivo ocorreu corroborado pela teoria e pelas atividades objetivas de intervenção propostas pelo docente durante e após o processo de utilização do CTI, a exemplo das que foram registradas no apêndice 6.1 deste trabalho.

Elencaremos agora como se procedeu, nas primeiras impressões de contado dos discentes, a manipulação do dispositivo em cada um dos temas citados na metodologia deste trabalho.

Na fase introdutória de determinação de ângulos no CTI, observou-se um número expressivo de acertos por parte da maioria dos alunos. Eles se mostraram motivados, confiantes e encorajados à medida que o nível de dificuldade aumentava, o que contribuiu para o avanço nas etapas subsequentes do processo de aprendizagem e descoberta dos conhecimentos trigonométricos.

Durante o processo de identificação dos tipos de ângulos, os alunos perceberam, na prática, que o dispositivo facilitou a construção, visualização e mensuração dos ângulos de maneira simples e descomplicada. Eles conseguiram reconhecer cada tipo de ângulo ao longo da utilização do recurso, com o apoio de situações contextualizadas do ambiente escolar, o que tornou o aprendizado mais significativo e prático.

Quanto ao processo de identificar e calcular os ângulos complementares, suplementares e replementares, observou-se que a identificação e compreensão dos ângulos complementares e suplementares ocorreram de forma mais acessível e clara. No entanto, houve uma maior dificuldade no cálculo de ângulos replementares superiores a 180°, que foi superada com a repetição do processo em diversas oportunidades, permitindo maior familiaridade e domínio do conteúdo.

No quesito aprender a fazer a redução ao primeiro quadrante no CTI os alunos se saíram bem e tiveram êxito na manipulação do dispositivo com bastantes acertos na grande maioria das tentativas, percebendo que o processo de utilizar as hastes laterais para fazê-lo contribuiu, consideravelmente, na assimilação do conteúdo, conforme será mostrado na seção 4.1 - Resultado da atividade, na 01° questão.

Quanto ao estudo do seno foi verificado que os alunos assimilaram bem a parte de identificação do eixo envolvido, dos sinais nos quadrantes e do intervalo de variação. Já na parte da identificação da fórmula no CTI, de início, sentiram dificuldade em localizar os catetos, mas depois de outras tentativas, conseguiram diferenciar todos as partes envolvidas, inclusive como calcular o valor do mesmo, tanto no mecanismo, como algebricamente nos cadernos. Esse processo ocorreu de forma acessível e clara para a maioria dos envolvidos, conforme será mostrado na seção 4.1 - Resultado da atividade, na 02° questão.

No processo de estudo do cosseno dos ângulos o mesmo procedeu de forma análoga ao do seno quanto a parte de identificação do eixo envolvido, dos sinais nos quadrantes e do intervalo de variação. No tocante a visualização da fórmula, diferentemente do tema anterior, os alunos identificaram com mais facilidade os catetos e a hipotenusa na construção do triângulo retângulo utilizando o dispositivo, o que facilitou o aprendizado do cálculo do valor do cosseno dos ângulos dados, inclusive na resolução algébrica de verificação nos cadernos, posteriormente.

Referente a tangente, os discentes conseguiram visualizar, sem dificuldades, a reta da tangente, os sinais dos quadrantes e o intervalo de variação. Quanto a percepção da fórmula no CTI, a mesma se deu de forma satisfatória, pois os alunos já estavam se familiarizando com a identificação dos catetos e hipotenusa. No processo de determinação da tangente de um ângulo no CTI os alunos perceberam, claramente e sem muita dificuldade, que os valores correspondentes aos ângulos aumentavam infinitamente à medida que estes se aproximavam de 90° e 270°, com exceção destes.

De modo análogo ao anterior, a visualização da reta cotangente, dos sinais dos quadrantes, do intervalo de variação e da identificação das partes da fórmula no CTI aconteceu de forma tranquila e acessível pela maioria dos estudantes.

Com relação à determinação da cotangente de um ângulo, que se procedeu de forma análoga ao da tangente, os alunos tiveram sucesso neste processo e conseguiram compreender o conceito da cotangente e souberam diferenciá-lo do conceito da tangente, com muitos acertos durante a manipulação, conforme será mostrado na seção 4.1 - Resultado da atividade, na 08° questão.

No processo de estudo da secante, nos primeiros itens, foi fácil a visualização da reta secante, dos sinais dos quadrantes e do intervalo de variação. Quanto a identificação da fórmula no CTI, no começo, apresentaram dificuldade em identificá-la, porém foi sanada no processo de repetição de outros exemplos.

Quanto a determinação dos valores correspondentes a secante dos ângulos dados, depois de compreendido o eixo no dispositivo, observou-se que os alunos não tiveram dificuldade em encontrar os valores procurados e perceberam, visivelmente, o conceito da mesma dentro da proposta de manipulação da ferramenta. Perceberam, também, que à medida que os ângulos se aproximavam de 90° e 270°, os valores cresciam infinitamente.

No caso da cossecante e de igual modo ao processo de visualização do anterior foi fácil para a maioria dos alunos identificarem a reta da cossecante, os sinais dos quadrantes e do intervalo de variação no CTI. A visualização da fórmula da cossecante foi facilitada pelo método anterior, e de pronto, foi simples reconhecer as partes envolvidas, inclusive, ajudou na percepção de que à medida que os ângulos se aproximavam de 0°, 180° e 360° os valores cresciam ilimitadamente, conforme será mostrado na seção 4.1 - Resultado da atividade, na 10° questão.

Por fim, ao estudar as outras relações trigonométricas fundamentais abordadas no projeto, observamos que os alunos conseguiram identificar no CTI os valores dos ângulos solicitados, pois já os conheciam de estudos anteriores. No entanto, tiveram certa dificuldade ao desenvolver a parte algébrica e verificar a veracidade das fórmulas. Contudo, após repetirem o processo com outros exemplos, foi possível perceber uma melhoria significativa na assimilação das fórmulas por parte dos alunos.

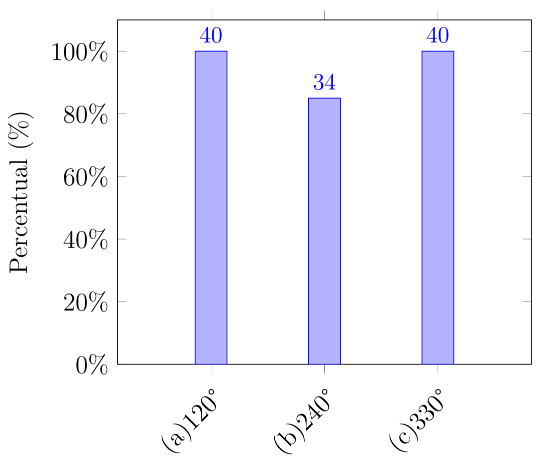
Resultado da Atividade

A atividade avaliativa foi realizada em sala de aula com os alunos organizados em grupos de 3 a 4 integrantes, promovendo um ambiente colaborativo para pesquisa, discussão, análise e resolução das questões propostas. Durante a atividade, os estudantes utilizaram o Círculo Trigonométrico Interativo (CTI) como recurso didático, aplicando os conhecimentos adquiridos ao longo da jornada de ensino-aprendizagem da introdução à trigonometria. Como resultado desse processo, foram obtidos os seguintes dados, acompanhados de suas respectivas porcentagens de acertos.

Na questão 1, os alunos foram orientados a localizar os ângulos trabalhados no CTI e, em seguida, realizar a redução desses ângulos ao primeiro quadrante.

1. Determine no CTI através do processo de redução ao primeiro quadrante os ângulos abaixo.

Figura 4.1: Dados coletadas da atividade - questão 1



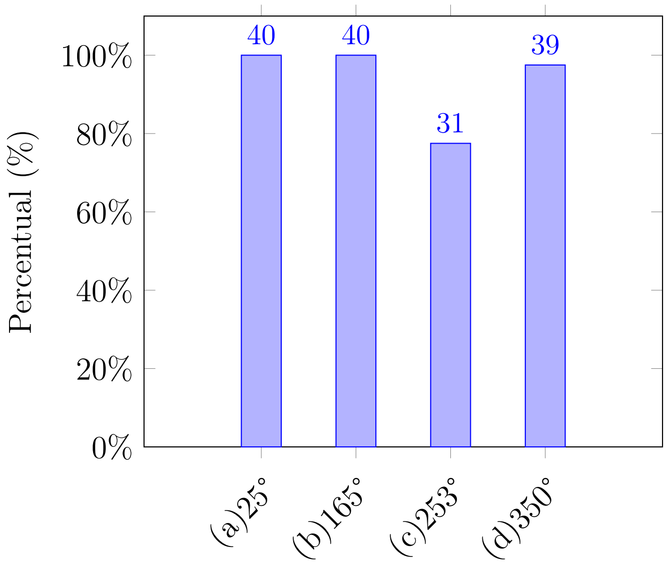
Fonte: Dados da pesquisa

A análise dos dados revela que a utilização do material concreto CTI foi eficaz para a maioria dos alunos na resolução de questões envolvendo a redução ao primeiro quadrante. O alto número de acertos nas alternativas (100% de acertos em 330° e 120°, e 85% em 240°) indica que os estudantes conseguiram visualizar e compreender melhor os ângulos no círculo trigonométrico por meio da manipulação concreta. Mesmo na alternativa com menor desempenho (240°), o índice de acerto ainda foi expressivo (85%), o que reforça a contribuição positiva do CTI no processo de aprendizagem da trigonometria.

Na questão 2 foi solicitado aos alunos que localizassem os ângulos dados na questão e depois identificassem o valor do seno no CTI.

2. Localize os ângulos no CTI e calcule o valor do seno, no conjunto dos reais, de cada ângulo.

Figura 4.2: Dados coletadas da atividade - questão 2



Fonte: Dados da pesquisa

Os resultados obtidos com o uso do material concreto CTI demonstram sua efetividade na compreensão do conceito de seno de ângulos. As alternativas com ângulos mais simples ou localizados em quadrantes com sinais mais previsíveis, como 25° e 165°, tiveram 100% de acertos, enquanto 350° apresentou apenas um erro, evidenciando alto desempenho geral.

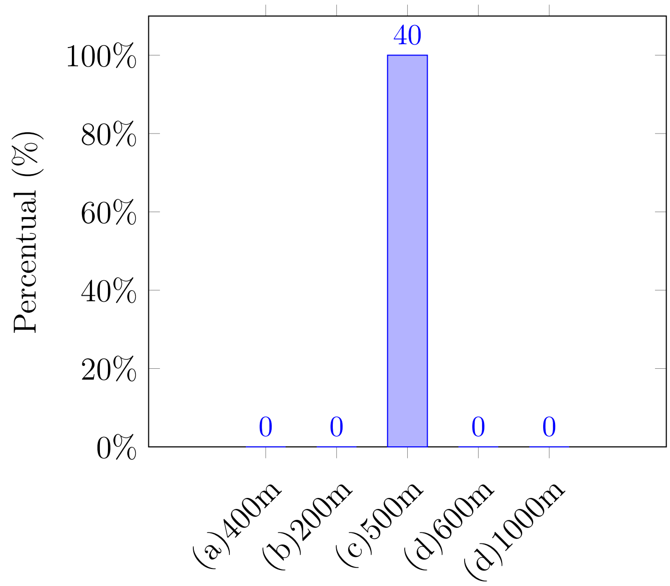
Mesmo no caso do ângulo 253°, que envolve maior complexidade por estar no terceiro quadrante, 31 alunos (77,5%) acertaram, o que ainda representa um resultado positivo. Esses dados indicam que o CTI facilitou a visualização e a identificação dos valores do seno, promovendo um aprendizado mais concreto e acessível para a maioria dos alunos.

Na questão 3, os alunos foram instigados a interpretar geometricamente o enunciado por meio do CTI e, posteriormente, a determinar a resposta por meio de procedimentos algébricos.

3. (UFPI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, é:

A aplicação do CTI na resolução da questão envolvendo a decolagem de um avião com ângulo de 30° revelou-se eficaz, pois todos os 40 alunos chegaram à alternativa correta (500m).

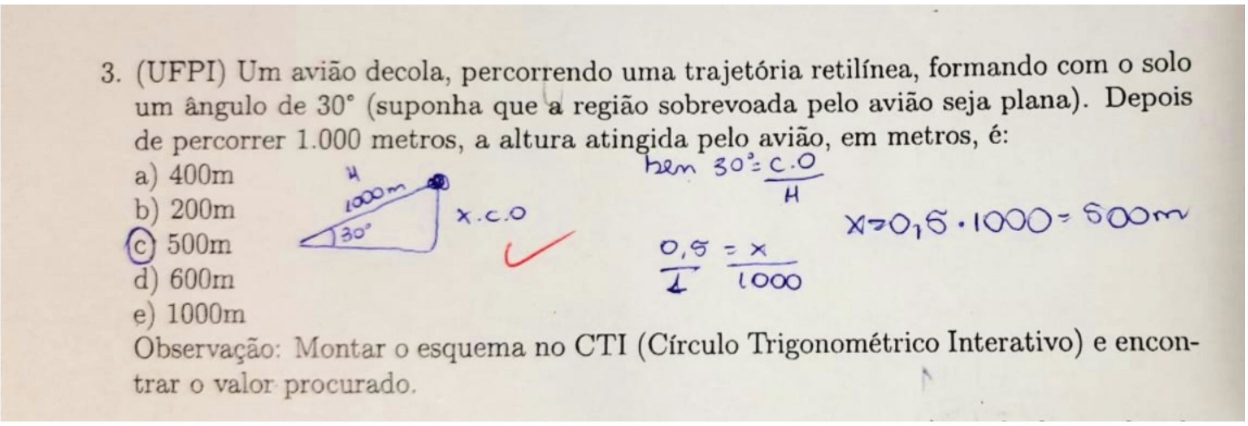
Figura 4.3: Dados coletadas da atividade - questão 3



Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, apenas 30 deles apresentaram os cálculos correspondentes, o que sugere que, embora o material concreto tenha contribuído significativamente para a intuição geométrica e a escolha correta da resposta, ainda há necessidade de fortalecer a formalização matemática por meio de registros algébricos.

Figura 4.4: Resolução do aluno K


3. (UFPI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, é:

a) 400m
b) 200m
c) 500m
d) 600m
e) 1000m

Observação: Montar o esquema no CTI (Círculo Trigonométrico Interativo) e encontrar o valor procurado.

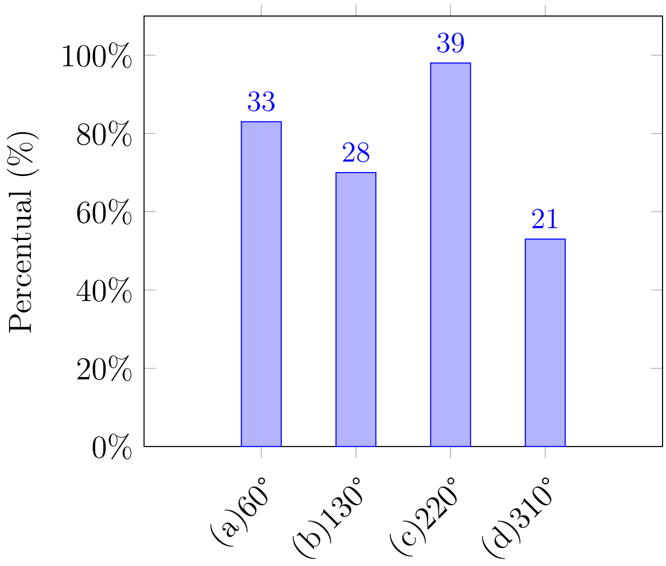
Fonte: Dados da pesquisa

Podemos visualizar na imagem 4.4 a resolução geométrica e algébrica do aluno na resolução da questão 03 da atividade de avaliação.

Na questão 4 foi solicitado aos alunos que identificassem os ângulos abordados na questão e depois determinassem o cosseno dos respectivos ângulos com o uso do CTI.

4. Localize os ângulos no CTI e calcule o valor do cosseno, no conjunto dos reais, de cada ângulo.

Figura 4.5: Dados coletadas da atividade - questão 4



Fonte: Dados da pesquisa

A atividade envolvendo a localização de ângulos e o cálculo do cosseno no CTI apresentou resultados variados, refletindo diferentes níveis de compreensão conforme a posição dos ângulos nos quadrantes. Os maiores índices de acerto ocorreram nos ângulos 220° (39 acertos) e 60° (33 acertos), sugerindo maior familiaridade dos alunos com ângulos do terceiro e primeiro quadrante.

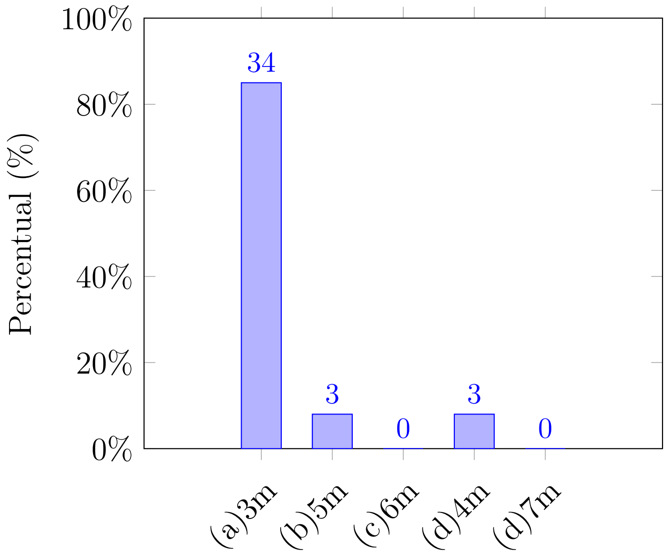
Já os ângulos 130° (28 acertos) e, principalmente, 310° (apenas 21 acertos), indicam maior dificuldade na identificação do sinal e do valor do cosseno em quadrantes menos intuitivos. Esses resultados mostram que o CTI contribuiu para a aprendizagem, mas também apontam a necessidade de reforçar a interpretação dos sinais e valores trigonométricos nos diferentes quadrantes.

Na questão 5 foi pedido aos alunos que representassem geometricamente o enunciado no CTI e depois encontrassem algebricamente a solução com o auxilio do dispositivo.

5. Uma escada de 6 metros está encostada em uma parede, formando um ângulo de 60° com o chão. Qual é a distância, em metros, do pé da escada até a parede?

A resolução da questão envolvendo a escada de 6 metros e o ângulo de 60° com o solo, utilizando o CTI, mostrou-se eficiente, com 34 dos 40 alunos chegando à resposta correta (3 metros).

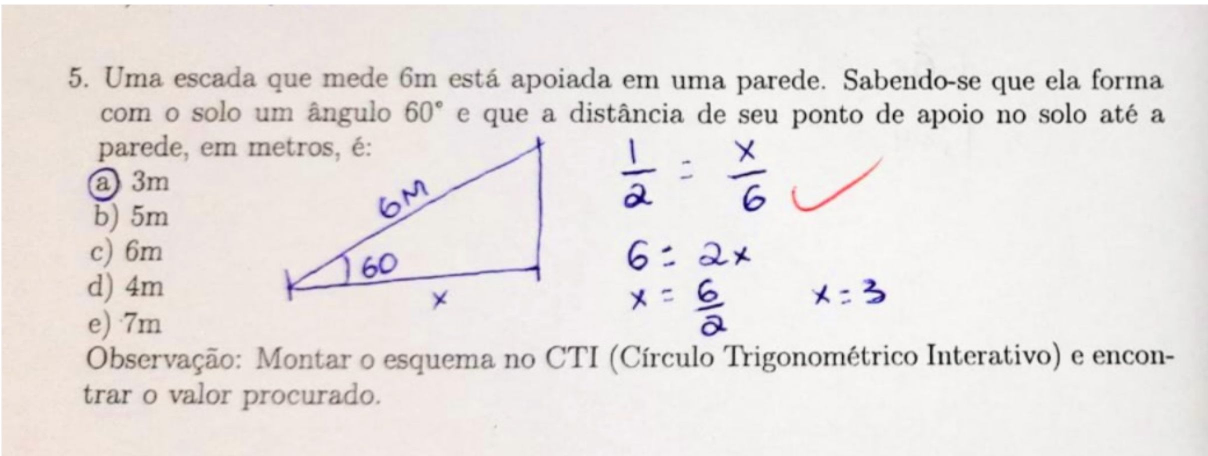
Figura 4.6: Dados coletadas da atividade - questão 5



Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, destes 34 alunos somente 50%, ou seja, 17 deles apresentaram os cálculos, indicando que, embora o uso do material concreto tenha favorecido a visualização da situação e a identificação da alternativa correta, alguns alunos ainda não consolidaram a habilidade de formalizar matematicamente o raciocínio por meio de relações trigonométricas, conforme resolvido algebricamente pelo aluno L (figura 4.7).

Figura 4.7: Resolução do aluno L



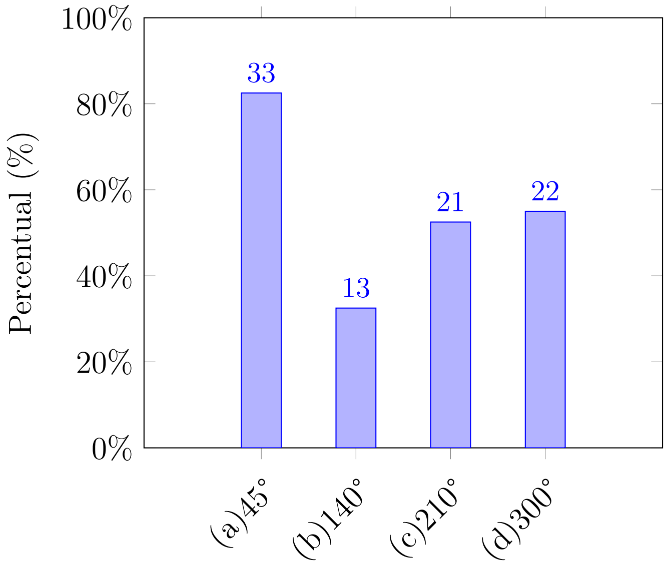
Fonte: Dados da pesquisa

Isso sugere que o CTI é uma ferramenta valiosa para compreensão conceitual, mas deve ser acompanhado de práticas que reforcem a competência no registro dos procedimentos matemáticos.

Na questão 6 foi solicitado aos alunos que identificassem no CTI os ângulos dados e depois determinassem o valor da tangente de cada um deles com o dispositivo.

6. Determine o valor do tangente através do CTI, no conjunto dos reais, dos seguintes ângulos.

Figura 4.8: Dados coletadas da atividade - questão 6



Fonte: Dados da pesquisa

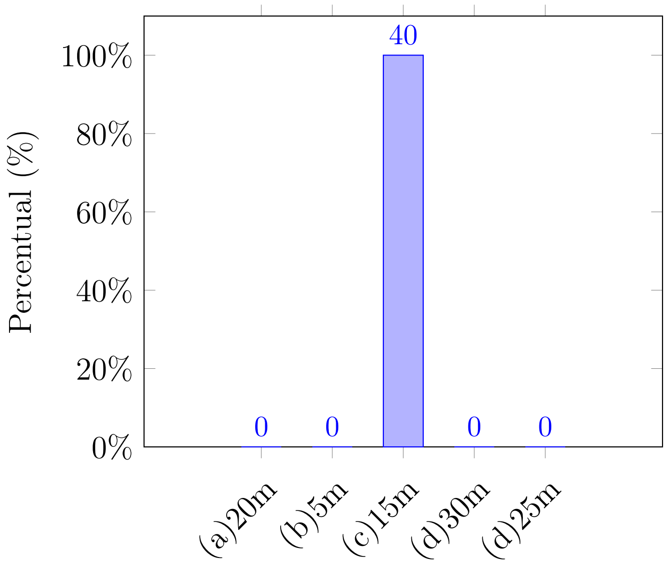
A atividade que envolveu o cálculo da tangente de ângulos utilizando o CTI apresentou resultados que indicam tanto acertos significativos quanto desafios conceituais. O alto número de acertos em 45° (33 alunos) demonstra que os alunos compreenderam bem a tangente em ângulos notáveis do primeiro quadrante.

No entanto, os acertos foram consideravelmente menores para ângulos localizados em outros quadrantes: apenas 32,5% em 140°, 52,5% em 210° e 55% em 300°, sugerindo dificuldades na interpretação do sinal e do valor da tangente fora do primeiro quadrante. Esses dados revelam que, embora o CTI tenha auxiliado na visualização, é necessário aprofundar o trabalho com as propriedades da tangente, especialmente quanto ao comportamento da função em diferentes quadrantes e sua relação com os ângulos de referência.

Na questão 7, os alunos foram incentivados a interpretar geometricamente o enunciado utilizando o CTI e, em seguida, a realizar os cálculos algébricos com o auxílio do próprio dispositivo.

7. Quando o Sol se encontra a 45° acima do horizonte, uma árvore projeta sua sombra no chão com o comprimento de 15 m. Determine a altura dessa árvore:

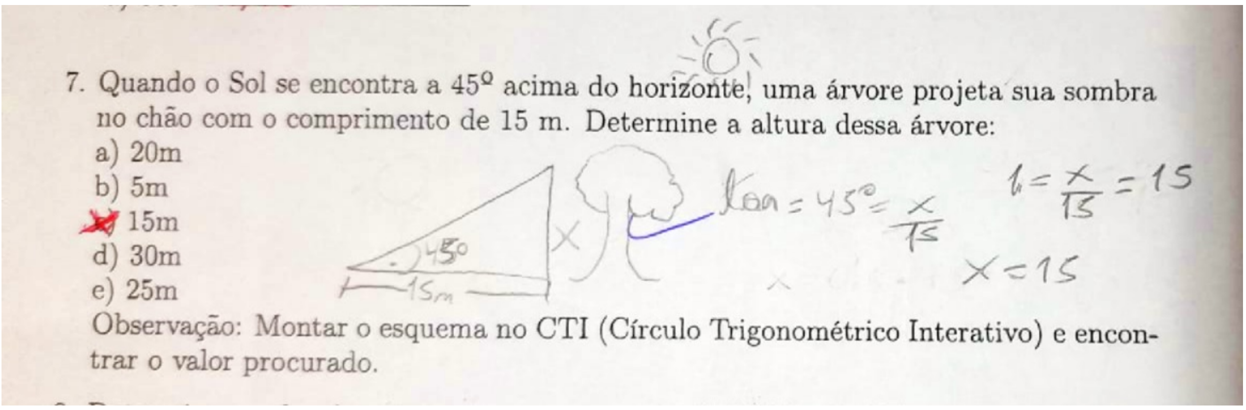
Figura 4.9: Dados coletadas da atividade - questão 7



Fonte: Dados da pesquisa

Na questão envolvendo a projeção da sombra de uma árvore com o Sol a 45° do horizonte, todos os 40 alunos identificaram corretamente a resposta (15 metros) com o auxílio do CTI, o que demonstra a eficácia do material concreto na visualização e interpretação da situação, conforme mostra a resolução do aluno N (figura 4.10).

Figura 4.10: Resolução do aluno N



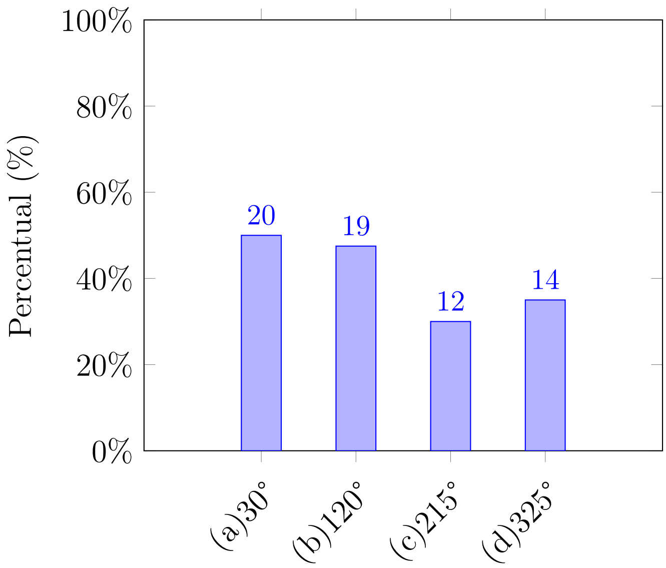
Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, destes 67,5% apresentaram os cálculos que justificam a resposta, evidenciando que, apesar da compreensão conceitual promovida pelo CTI, parte dos alunos ainda não consolidou a formalização matemática por meio da tangente de 45°. Isso indica que o material concreto foi útil para facilitar o raciocínio visual e espacial, mas há necessidade de reforçar o desenvolvimento das habilidades de registro e justificativa algébrica.

Na questão 8 foi solicitado aos alunos que identificassem os ângulos pedidos no CTI e depois identificassem a cotangente dos mesmos.

8. Determine o valor da cotangente com o uso do CTI, no conjunto dos reais, dos seguintes ângulos.

Figura 4.11: Dados coletadas da atividade - questão 8



Fonte: Dados da pesquisa

A atividade que envolveu o cálculo da cotangente utilizando o CTI apresentou os resultados mais baixos entre as funções trigonométricas analisadas, com menos da metade dos alunos acertando cada item: 50% em 30°, 47,5% em 120°, 30% em 215° e 35% em 325°.

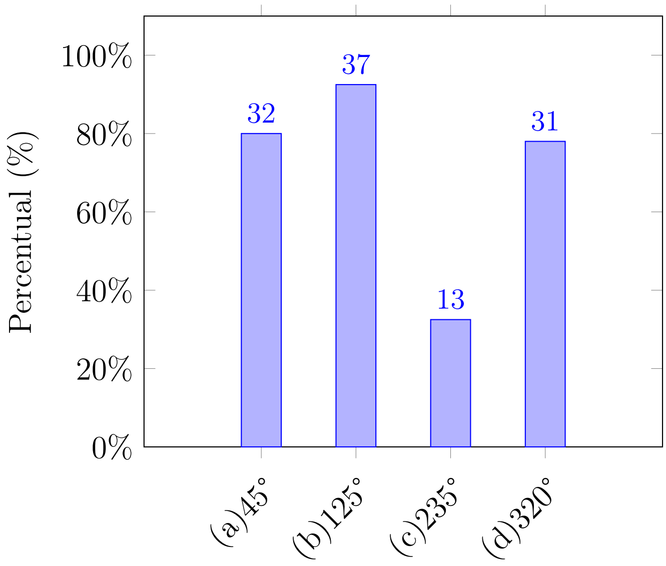
Esses dados indicam que, embora o CTI auxilie na visualização dos ângulos e no entendimento de funções como seno, cosseno e tangente, a função cotangente ainda representa uma dificuldade significativa para os alunos, possivelmente por ser menos abordada nas práticas tradicionais e exigir maior domínio das relações entre razão trigonométrica e quadrantes.

Assim, os resultados apontam para a necessidade de aprofundar o trabalho com essa função específica, aliando o uso do CTI a estratégias que reforcem sua definição, comportamento e aplicação nos diferentes quadrantes.

Na questão 9 foi solicitado aos alunos que identificassem os ângulos dados no dispositivo e depois determinassem a secante de cada um deles no CTI.

9. Determine o valor do secante através do CTI, no conjunto dos reais, dos seguintes ângulos.

Figura 4.12: Dados coletadas da atividade - questão 9



Fonte: Dados da pesquisa

A análise dos resultados da atividade sobre secante, utilizando o CTI, mostra um desempenho geral positivo, especialmente nos ângulos 125° (92,5% de acertos), 45° (80% de acertos) e 320° (77,5% de acertos), indicando que a maioria dos alunos conseguiu relacionar a secante com o cosseno e interpretar corretamente seu valor nos respectivos quadrantes.

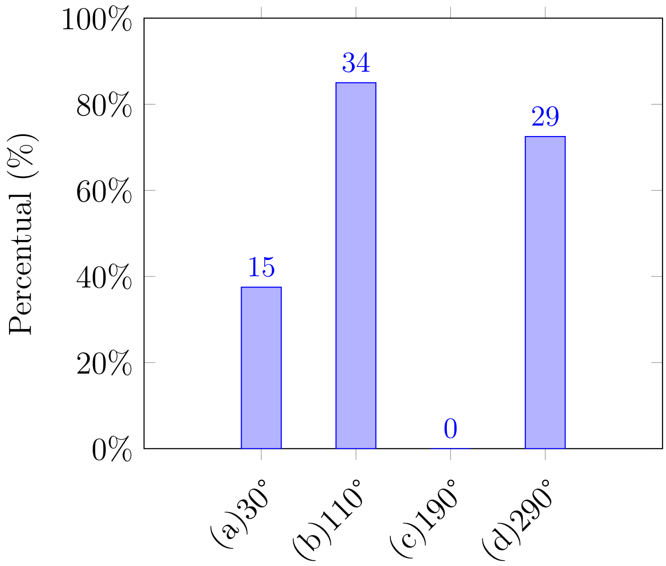
No entanto, o baixo número de acertos em 235° (32,5%) evidencia dificuldades específicas em ângulos do terceiro quadrante, onde o sinal e o valor da função exigem atenção redobrada. Esses dados sugerem que o CTI foi eficaz na construção da noção de secante, mas reforçam a importância de trabalhar mais profundamente os conceitos em quadrantes onde as funções assumem valores negativos ou menos intuitivos.

E por fim na questão 10 foi pedido aos discentes que identificassem os ângulos abordados no CTI e depois identificassem o valor de cada um deles no dispositivo.

10. Determine o valor do cossecante utilizando o CTI, no conjunto dos reais, dos seguintes ângulos.

A atividade envolvendo o cálculo da cossecante com o uso do CTI apresentou resultados mistos, refletindo tanto avanços quanto lacunas no aprendizado. O alto número de acertos nos ângulos 110° (85%) e 290° (72,5%) indica que os alunos conseguiram aplicar corretamente a relação entre a cossecante e o seno, interpretando os valores com apoio visual.

Figura 4.13: Dados coletadas da atividade - questão 10



Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, o desempenho foi significativamente mais baixo em 30°, com apenas 37,5% acertos, sugerindo possível confusão quanto ao valor exato deste por ultrapassar os limites do dispositivo. A alternativa do ângulo de 190° foi anulada por que o mesmo ultrapassou todos os limites do dispositivo, ficando inviável sua medição, porém, foi um erro cometido pelo docente na hora da elaboração da questão que mostrou para eles a ideia de números que tendem ao infinito.

Esses resultados reforçam que, embora o CTI auxilie na visualização e na compreensão de conceitos trigonométricos, é necessário fortalecer o entendimento específico nos quadrantes menos intuitivos.

Conclusão do Questionário

A aplicação do CTI demonstrou um impacto significativamente positivo na aprendizagem dos alunos em conteúdos de trigonometria. Observa-se, ao longo das dez questões propostas, um elevado índice de acertos, especialmente nas atividades que envolvem conceitos fundamentais como redução ao primeiro quadrante, identificação de razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) e resolução de problemas geométricos aplicados.

Destaca-se que em diversas questões, como as de números 1, 2, 3 e 7, os índices de acerto atingiram 100%, evidenciando que os alunos não apenas compreenderam os conceitos abordados, mas também conseguiram aplicá-los corretamente. Mesmo nas questões mais desafiadoras, como as que envolvem cotangente, secante e cossecante (questões 8, 9 e 10), os percentuais de acerto foram satisfatórios, indicando que o uso do material concreto favoreceu a visualização e o entendimento dessas razões menos exploradas no ensino tradicional.

A utilização do material concreto possibilitou uma aprendizagem significativa, favorecendo a apropriação dos conceitos da trigonometria escolar. O CTI revelou-se um recurso didático capaz de tornar o conteúdo mais acessível, dinâmico e contextualizado, ressaltando a relevância pedagógica dos materiais manipulativos no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Resultado do Questionário

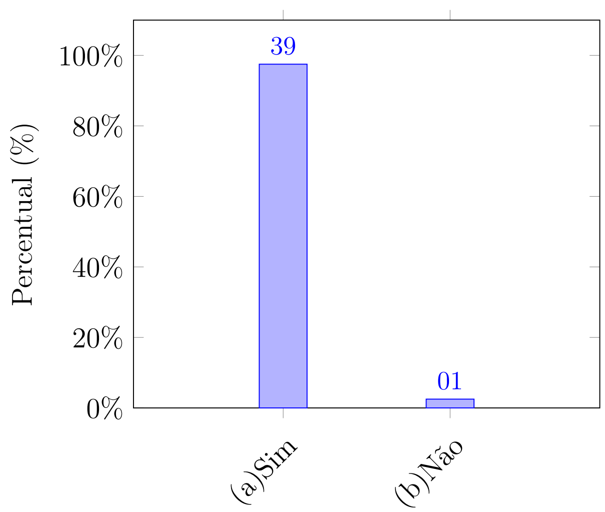
Ao término do processo de manipulação do dispositivo, foi aplicado um questionário aos alunos com o propósito de avaliar a percepção deles em relação a todas as etapas vivenciadas durante a utilização do CTI. Essa ação teve como objetivo compreender não apenas a eficácia pedagógica do recurso, mas também as impressões dos discentes quanto à clareza dos conceitos abordados, à praticidade do uso do dispositivo e ao impacto desse recurso na construção do conhecimento em Trigonometria.

Os dados coletados por meio desse questionário foram organizados e analisados com base nas respostas às perguntas objetivas e subjetivas previamente elaboradas pelo docente. Essas perguntas faziam parte de um conjunto de atividades impressas, planejadas para abranger diferentes aspectos da experiência dos alunos com o CTI. A íntegra do questionário aplicado pode ser consultada no apêndice 6.2 deste trabalho, onde estão descritas as questões utilizadas para embasar a análise qualitativa e quantitativa dos resultados.

Inicialmente, questionamos os alunos se, em algum momento de sua trajetória escolar, algum professor de Matemática já havia utilizado materiais concretos durante as aulas.

1. Algum professor já fez uso de materiais concretos em suas aulas de Matemática?

Figura 4.14: Dados coletadas do questionário - questão 1



Fonte: Dados da pesquisa

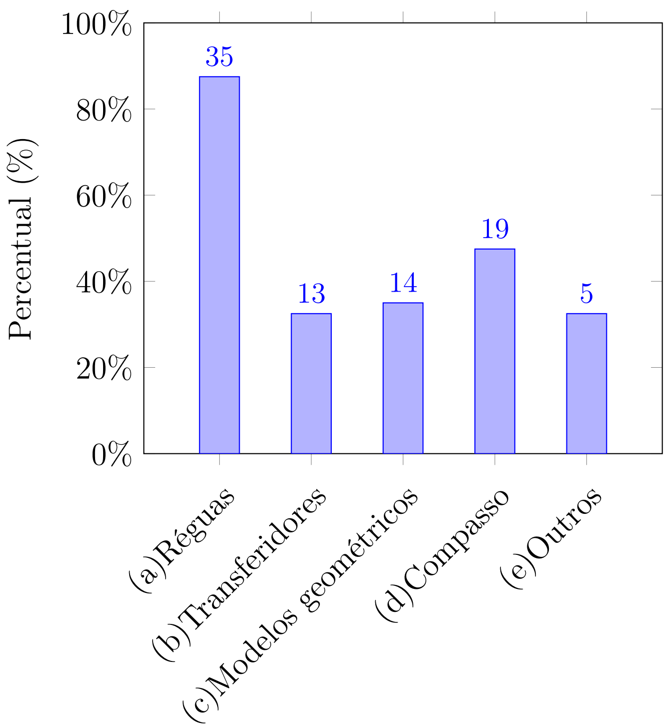
Com base nos dados coletados (Figura 4.14), observa-se que a grande maioria dos alunos (97,5%) já teve a oportunidade de experimentar o uso de materiais concretos nas aulas de Matemática, o que indica uma abordagem mais prática e visual no ensino dessa disciplina. Apenas um aluno afirmou não ter utilizado esse tipo de recurso, sugerindo que o uso de materiais concretos pode estar sendo cada vez mais integrado ao processo pedagógico, contribuindo para uma aprendizagem mais eficaz e significativa para os estudantes.

Em seguida, perguntamos aos discentes quais tipos de materiais concretos já haviam sido utilizados por eles nas aulas de Matemática no ambiente escolar.

2. Quais tipos de materiais concretos você já utilizou ou utiliza em suas aulas de Matemática?

A análise dos dados (Figura 4.15) revela que, entre os alunos, os materiais mais utilizados nas aulas de Matemática são as réguas, com 35 alunos mencionando seu uso. Além disso, o compasso também se destaca, sendo utilizado por 19 alunos. Os transferidores e modelos geométricos são menos frequentes, com 13 e 14 respostas, respectivamente, indicando que, embora sejam importantes, são menos comuns no contexto da turma.

Figura 4.15: Dados coletadas do questionário - questão 2



Fonte: Dados da pesquisa

Há também uma pequena quantidade de respostas relacionadas a outros materiais (5), o que sugere que os alunos podem estar utilizando recursos adicionais, embora em menor escala. Isso demonstra que a maioria dos estudantes tem acesso a materiais fundamentais para o aprendizado prático da Matemática, mas ainda há um potencial para maior diversificação de recursos.

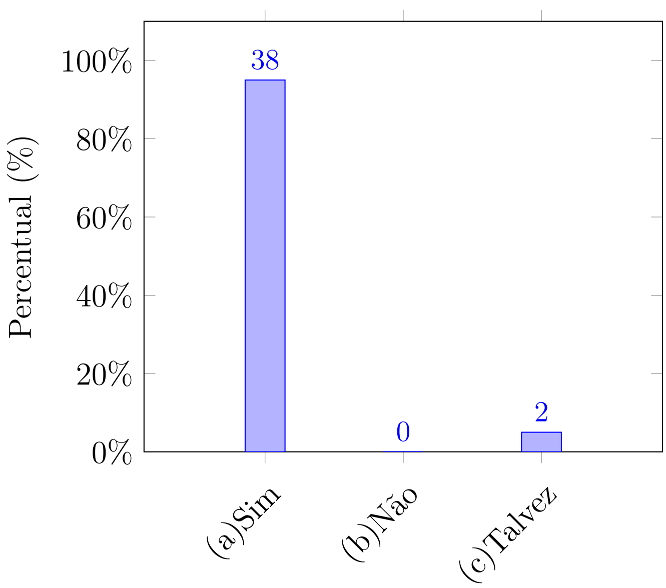
Dentre os outros materiais concretos que os alunos citaram que já utilizaram em algum momento em sala de aula foram os seguintes: dados, baralho, moedas, material dourado, dentre outros. Materiais estes que geralmente são citados em livros didáticos, sem nenhum novidade.

Na questão seguinte, os alunos foram questionados se a utilização de materiais concretos - em especial o CTI - contribuiu para facilitar a assimilação dos conteúdos de Trigonometria.

3. Você acredita que o uso de materiais concretos pode facilitar a compreensão dos conceitos de trigonometria?

Os dados coletados (Figura 4.16) indicam que a grande maioria dos alunos (38) acredita que o uso de materiais concretos pode facilitar a compreensão dos conceitos de trigonometria, o que demonstra uma percepção positiva sobre a aplicação desses recursos no ensino da disciplina.

Figura 4.16: Dados coletadas do questionário - questão 3



Fonte: Dados da pesquisa

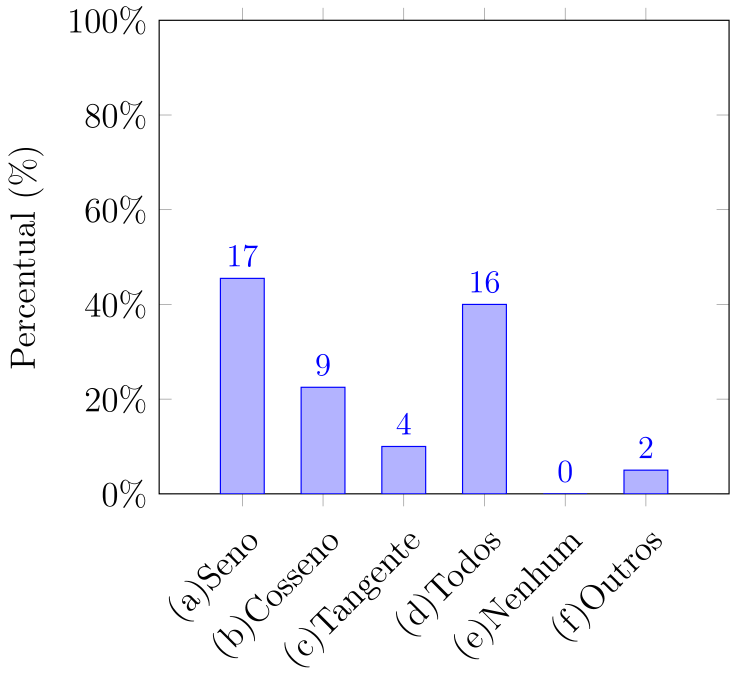
O gráfico também mostra que apenas 2 alunos mostraram dúvida, marcando a opção "Talvez", e nenhum aluno afirmou que o uso de materiais concretos não seria útil. Esse resultado sugere que os estudantes reconhecem o potencial das ferramentas práticas para tornar os conceitos de trigonometria mais acessíveis e compreensíveis, refletindo uma tendência favorável ao uso de métodos pedagógicos mais interativos e concretos.

Nesta questão, os discentes foram convidados a indicar quais dos conteúdos estudados e manipulados por meio do CTI lhes pareceram mais acessíveis ou mais fáceis de assimilar, sendo possível marcar mais de uma alternativa.

4. Quais conceitos de trigonometria você considera que foram mais fáceis de assimilar com o uso de materiais concretos?

A análise dos dados (Figura 4.17) revela que o conceito de seno foi o mais fácil de assimilar para a maioria dos alunos, com 17 respostas, indicando que esse conceito se beneficia de maneira mais significativa do uso de materiais concretos. O conceito de cosseno também foi mencionado, mas por um número menor de alunos (9), enquanto a tangente foi citada por apenas 4.

Figura 4.17: Dados coletadas do questionário - questão 4



Fonte: Dados da pesquisa

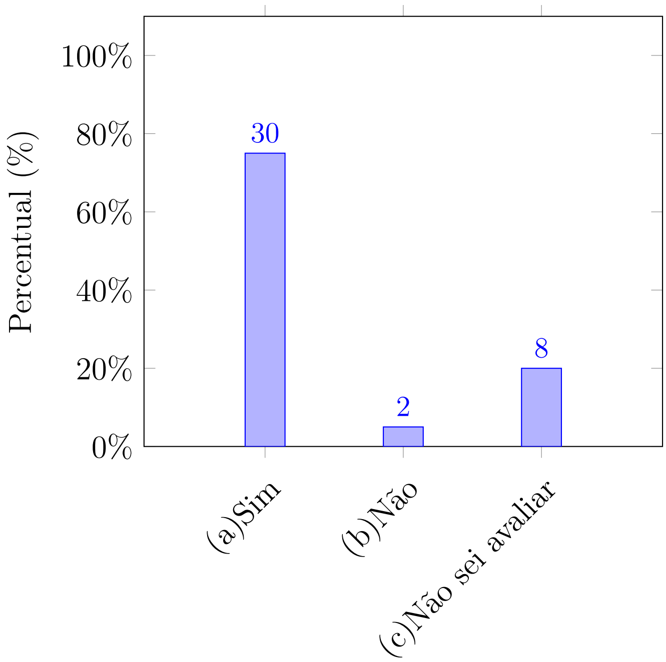
Um grupo relevante de alunos (16) acredita que todos os conceitos de trigonometria foram facilitados pelo uso de materiais concretos, mostrando uma visão ampla e positiva sobre a aplicação desses recursos. Além disso, 2 alunos mencionaram conceitos relacionados a ângulos e redução como sendo mais fáceis de compreender com esses materiais. Destaca-se que a opção "nenhum" não foi assinalada por nenhum dos discentes, o que evidencia a relevância do dispositivo na promoção da aprendizagem e na compreensão dos conteúdos matemáticos.

Na questão 5, os alunos foram questionados se consideram os materiais concretos — especialmente o CTI - mais eficazes do que os recursos tradicionais, como quadro, giz e livro, comumente utilizados pelos professores de Matemática.

5.Você percebeu alguma melhoria no seu desempenho e nas avaliações ao utilizar materiais concretos nas aulas de trigonometria?

Os dados indicam (Figura 4.18) que a maioria dos alunos (30) percebeu uma melhoria em seu desempenho e nas avaliações ao utilizar materiais concretos nas aulas de trigonometria, o que reforça a eficácia dessa abordagem no processo de aprendizagem. Apenas 2 alunos afirmaram não ter notado melhora, enquanto 8 disseram não saber avaliar, o que pode refletir insegurança ou dificuldade em fazer essa relação diretamente.

Figura 4.18: Dados coletadas do questionário - questão 5



Fonte: Dados da pesquisa

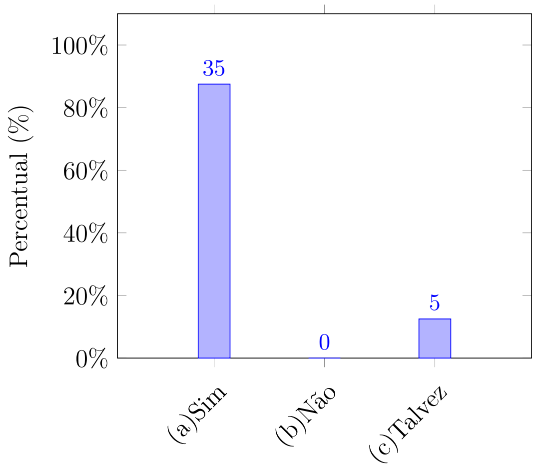
Ainda assim, a predominância de respostas positivas aponta que os materiais concretos contribuíram significativamente para a compreensão e o rendimento dos estudantes em conteúdos considerados abstratos, como os da trigonometria.

Na questão seguinte, os alunos foram indagados sobre a validade do uso de materiais concretos como recurso auxiliar nas avaliações de conteúdos relacionados à Trigonometria.

6. Você acredita que o uso de materiais concretos pode ser incorporado nas avaliações de trigonometria?

A análise dos dados (Figura 4.19) mostra que a maioria dos alunos (35) acredita que o uso de materiais concretos pode ser incorporado nas avaliações de trigonometria, indicando uma percepção positiva quanto à aplicabilidade desses recursos também em momentos formais de verificação de aprendizagem.

Figura 4.19: Dados coletadas do questionário - questão 6



Fonte: Dados da pesquisa

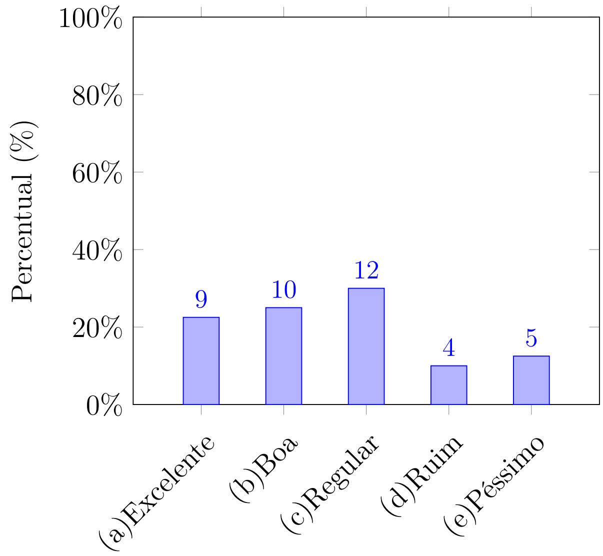
Nenhum aluno rejeitou a ideia, e apenas 5 demonstraram incerteza ao marcar a opção "Talvez", o que reforça a receptividade dos estudantes a métodos avaliativos mais práticos e visuais.

Esse resultado sugere que os alunos não apenas reconhecem os benefícios dos materiais concretos durante o processo de ensino, mas também os consideram eficazes para medir o próprio desempenho de forma mais significativa.

Na questão seguinte foi perguntado aos discentes se na escola que estudam existem materiais concretos disponíveis para serem utilizados por eles nas aulas de matemática.

7. Como você avalia a disponibilidade de materiais concretos em sua escola para o ensino de Matemática?

Figura 4.20: Dados coletadas do questionário - questão 7



Fonte: Dados da pesquisa

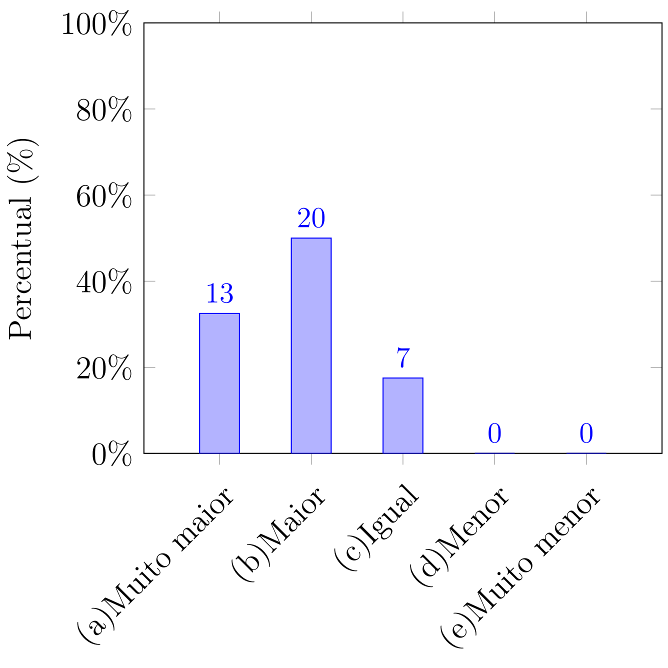
Os dados indicam (Figura 4.20) que a avaliação da disponibilidade de materiais concretos na escola para o ensino de Matemática é bastante variada entre os alunos. Apenas 9 consideram essa disponibilidade excelente e 10 a classificam como boa, enquanto a maioria avalia como regular (12). Além disso, um número significativo de alunos a considera insuficiente, com 4 apontando como ruim e 5 como péssima.

Esses resultados sugerem que, embora parte dos estudantes reconheça esforços na oferta desses recursos, ainda há uma carência percebida por muitos, indicando a necessidade de melhorias na infraestrutura e no acesso a materiais concretos para tornar o ensino mais eficiente e equitativo.

Nesta questão, os alunos foram questionados se consideram a utilização de materiais concretos mais atrativa e eficaz no ensino de Matemática em comparação a outros métodos tradicionais de ensino.

8. Na sua opinião, qual é o seu nível de interesse ao utilizar materiais concretos em comparação com outros métodos de ensino?

Figura 4.21: Dados coletadas do questionário - questão 8



Fonte: Dados da pesquisa

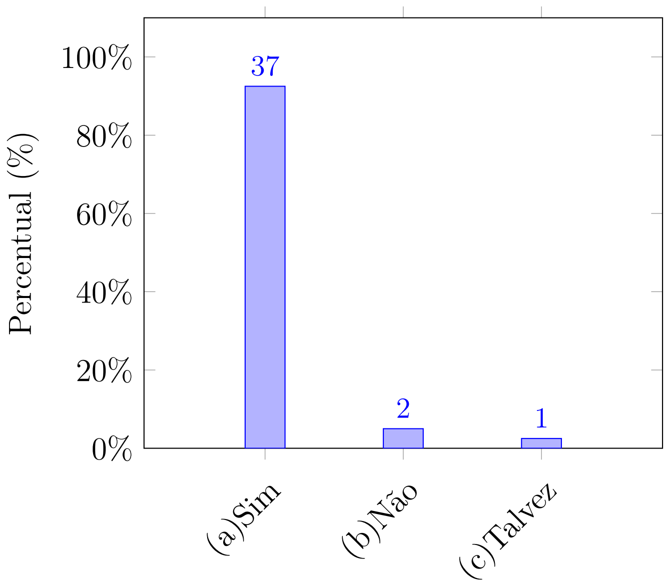
Percebe-se no gráfico (Figura 4.21) um grande interesse por parte dos alunos por mais práticas com materiais concretos na construção dos conhecimentos em sala de aula. Sair da zona de conforto, tanto para os estudantes quanto para os docentes, seria uma excelente alternativa no processo de ensino dos conteúdos matemáticos.

Seria interessante, dentro desta proposta, termos nas escolas mais investimentos do poder público em laboratórios nas diversas áreas como uma oportunidade extra de ensino-aprendizagem.

Na pergunta seguinte, os alunos foram questionados se recomendariam o uso de materiais concretos no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de Matemática para outros professores.

9. Você recomendaria o uso de materiais concretos a outros professores que ensinam conteúdos de Matemática?

Figura 4.22: Dados coletadas do questionário - questão 9



Fonte: Dados da pesquisa

Os dados indicam (Figura 4.22) que a grande maioria dos alunos (37) recomendaria o uso de materiais concretos a outros professores que ensinam conteúdos de Matemática, refletindo uma avaliação positiva sobre a eficácia e a contribuição desses recursos para o aprendizado. Nenhum aluno se posicionou contra a recomendação, enquanto 3 demonstraram dúvida ao escolher a opção “Talvez“.

Esses resultados sugerem que os estudantes reconhecem o valor dos materiais concretos como ferramentas pedagógicas importantes e acreditam que sua adoção pode beneficiar não apenas a si mesmos, mas também outros alunos em diferentes contextos escolares.

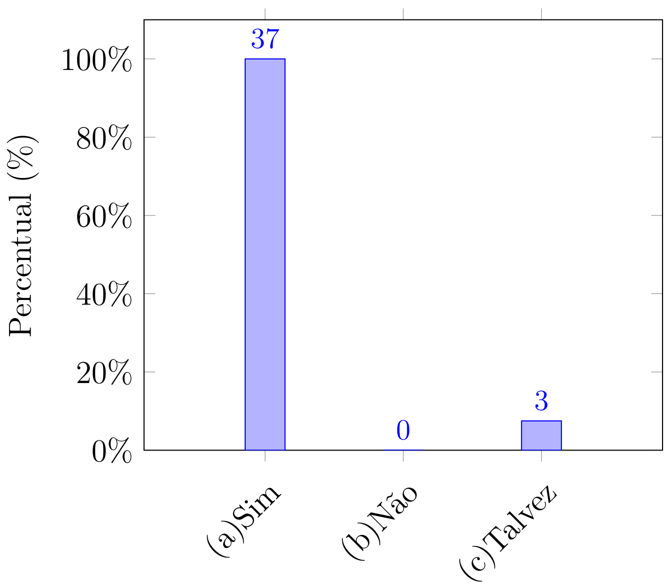
Busca-se com esta dados trazer reflexões sobre a inserção de mais materiais concretos no ambiente escolar pois torna os conceitos mais acessíveis, visuais e interativos, facilitando a compreensão para todos.

E, para finalizar, a questão seguinte procurou investigar se os alunos acreditam que o uso de materiais concretos pode beneficiar outros discentes, com diferentes estilos de aprendizagem, no processo de ensino da Trigonometria.

10. Você acredita que o uso de materiais concretos em trigonometria pode beneficiar alunos com diferentes estilos de aprendizagem?

A análise dos dados (Figura 4.23) revela que a grande maioria dos alunos (37) acredita que o uso de materiais concretos em trigonometria pode beneficiar alunos com diferentes estilos de aprendizagem, o que demonstra uma percepção positiva quanto à capacidade desses recursos em atender às variadas necessidades dos estudantes. Apenas 2 alunos discordaram dessa ideia, enquanto 1 manifestou dúvida, escolhendo a opção “Talvez“.

Figura 4.23: Dados coletadas do questionário - questão 10



Fonte: Dados da pesquisa

Esses resultados indicam que os materiais concretos são vistos como ferramentas inclusivas e eficazes para tornar o ensino de trigonometria mais acessível, possibilitando que alunos com diferentes formas de aprender possam compreender melhor os conteúdos.

Análise dos Dados Coletados

A análise dos dados coletados, tanto durante o processo de observação do docente na manipulação do dispositivo pelos alunos quanto por meio dos registros escritos, evidenciou a eficácia do material concreto no favorecimento do ensino-aprendizagem, com resultados especialmente expressivos no ensino de trigonometria.

Na visão do docente, houve um ganho significativo no entendimento dos conceitos trigonométricos pelos estudantes, além de um aumento no interesse deles em aprender mais conteúdos matemáticos pela manipulação de dispositivos, pois os ajudaram na assimilação de conceitos abstratos de trigonometria como: ângulos, seno, cosseno, tangente e com a necessidade de um pouco mais de atenção e prática no estudo da cotangente, secante e cossecante.

A análise dos dados provenientes da resolução de problemas práticos propostos pelo docente em diferentes contextos com materiais concretos foi extremamente importante. Além de possibilitar uma compreensão clara e eficaz do significado da aprendizagem através da experimentação prática, essa análise, também, permitiu entender como os alunos estão aplicando os conceitos aprendidos em situações do cotidiano.

Portanto, a análise do feedback foi essencial, pois forneceu informações valiosas sobre como aprimorar as abordagens pedagógicas e otimizar a eficácia da experimentação nos processos de aprendizagem.

4.2 Impactos do CTI na Aprendizagem

Impacto do Material Concreto na Compreensão da Trigonometria

O uso de materiais concretos no ensino de trigonometria tem um impacto significativo na assimilação dos conceitos pelos alunos. Tornar conceitos abstratos, como ângulos, razões trigonométricas e funções, tangíveis e manipuláveis facilita a compreensão e a internalização dessas ideias. Isso torna a teoria mais acessível, uma vez que as representações gráficas e simbólicas apresentadas nos livros ou em sala de aula podem ser difíceis de entender.

O trabalho com materiais concretos no processo de ensino-aprendizagem favorece conexões claras entre teoria e prática. Essa integração promove um aprendizado eficaz em matemática, fortalecendo a compreensão dos alunos e estimulando o desenvolvimento de suas habilidades na trigonometria.

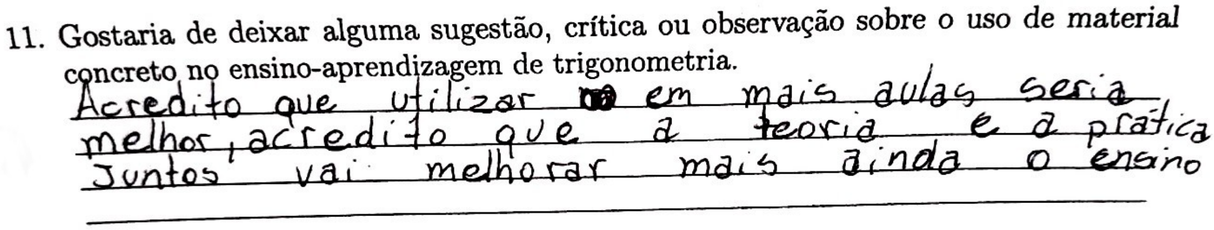
Feedback dos Alunos

O feedback dos alunos sobre o uso de materiais concretos foi fundamental para avaliar a eficácia das práticas pedagógicas com esse tipo de recurso. Nos testes aplicados, os alunos relataram que o uso desses materiais tornou o aprendizado mais acessível e envolvente, permitindo-lhes 'ver' e 'experimentar' conceitos de forma acessível e envolvente, fortalecendo a aprendizagem por meio da prática.

Eles também destacaram que a manipulação física dos materiais facilita a retenção do conteúdo e a aplicação prática do conhecimento no cotidiano. Além disso, sugeriram que deveria haver uma maior disponibilidade de materiais concretos com essa funcionalidade, especialmente para apoiar o ensino-aprendizagem da matemática no ambiente escolar, dando a eles uma oportunidade de aquisição de novas habilidades, conforme descrito pela figura 4.24.

O aluno M do sexo feminino, 17 anos e não repetente destaca que o uso de materiais concretos em mais aulas seria benéfico para o ensino de trigonometria. Ele acredita que a combinação entre teoria e prática contribui significativamente para melhorar ainda mais o processo de aprendizagem.

Figura 4.24: Opinião do aluno M sobre a questão 11 do questionário aplicado.

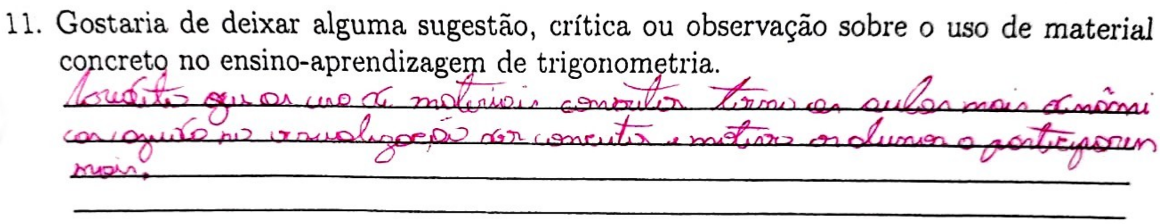

11. Gostaria de deixar alguma sugestão, crítica ou observação sobre o uso de material concreto no ensino-aprendizagem de trigonometria.

Acredito que utilizar em mais aulas seria melhor, acredito que a teoria e a prática juntos vai melhorar mais ainda o ensino

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno X do sexo masculino, 17 anos e não repetente considera que o uso de materiais concretos torna as aulas mais dinâmicas e facilita a compreensão dos conteúdos. Para ele, essa abordagem contribui para que os alunos participem mais ativamente do processo de aprendizagem. (Ver figura 4.25)

Figura 4.25: Opinião do aluno X sobre a questão 11 do questionário aplicado.

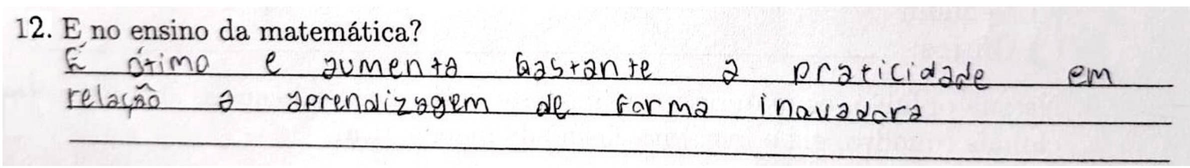

11. Gostaria de deixar alguma sugestão, crítica ou observação sobre o uso de material concreto no ensino-aprendizagem de trigonometria.

Acredito que os uso de materiais concretos tornam as aulas mais dinâmicas conseguindo na visualização dos conceitos e motiva os alunos a participarem mais.

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno Y do sexo masculino, 17 anos e não repetente expressa uma visão bastante positiva sobre o uso de materiais concretos no ensino da matemática, destacando que essa abordagem é "ótima" e contribui significativamente para aumentar a praticidade durante a aprendizagem. Além disso, ressalta que essa metodologia proporciona uma forma inovadora de aprender, sugerindo que a aplicação de recursos concretos torna o processo mais acessível, dinâmico e eficaz. (Ver figura 4.26)

Figura 4.26: Opinião do aluno Y sobre a questão 12 do questionário aplicado.

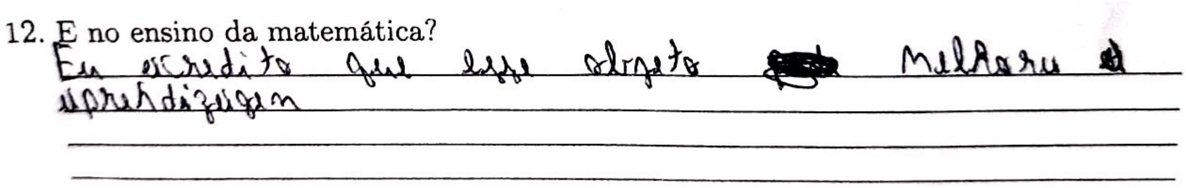

12. E no ensino da matemática?

É ótimo e aumenta bastante a praticidade em relação a aprendizagem de forma inovadora

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno Z do sexo masculino, 17 anos e não repetente acredita que o uso do material concreto contribui de forma positiva para o ensino da matemática, afirmando que esse recurso melhora a aprendizagem. Sua resposta demonstra uma percepção clara de que a utilização de objetos ou ferramentas concretas torna o processo de aprender mais eficaz. (Ver figura 4.27)

Figura 4.27: Opinião do aluno Z sobre a questão 12 do questionário aplicado.


12. E no ensino da matemática?
Eu acredito que esse objeto melhora a aprendizagem

Fonte: Dados da pesquisa

Portanto, percebe-se nas falas dos estudantes que a ferramenta ajudou muito na hora de apresentar os temas de matemática, pois despertou a curiosidade dos alunos, ajudou a entender ideias complexas, incentivou o surgimento de capacidades novas, estimulou o pensamento lógico e o envolvimento, e ainda fez o aprendizado ser mais relevante ao usar materiais práticos.

4.3 Contribuições e Perspectivas Futuras

Contribuições para o Ensino da Trigonometria

O uso de materiais concretos na alfabetização da trigonometria proporciona uma perspectiva visual e prática dos conceitos, favorecendo a compreensão dos alunos. Com ferramentas como o CTI, é possível visualizar as relações entre teoria e prática de forma clara. O material permite que os estudantes explorem diretamente as propriedades trigonométricas, ampliando a assimilação dos conteúdos e fortalecendo o aprendizado por meio da experimentação.

Da mesma forma, o uso de materiais concretos torna o aprendizado mais envolvente e motivador, estimulando a curiosidade e a capacidade analítica dos alunos. Em geral, essa abordagem torna a trigonometria relevante e significativa, promovendo experiências práticas que favorecem diferentes estilos de aprendizagem.

Sugestões para Melhorias e Pesquisas Futuras

Essas são apenas algumas das áreas em que a utilização de materiais concretos pode ter um impacto positivo no ensino da trigonometria. É fundamental que novos métodos e ferramentas sejam adequadamente explorados e testados por meio de pesquisas voltadas à avaliação de sua eficácia. Uma abordagem inovadora seria a criação de materiais concretos integrados à tecnologia, como kits que combinam componentes físicos com aplicativos de realidade aumentada ou robótica, oferecendo representações visuais mais dinâmicas das funções trigonométricas.

Além disso, seria interessante realizar um estudo aprofundado sobre os impactos da escolha de materiais concretos em diferentes estilos de aprendizagem dos alunos, especialmente aqueles com necessidades especiais. Para abordar essa questão, seria útil conduzir pesquisas voltadas para o desenvolvimento de materiais concretos adaptativos, que possam ser ajustados dinamicamente conforme o nível de compreensão de cada aluno, além de investigar como esses materiais influenciam a aprendizagem de conceitos trigonométricos com o tempo.

Outra área de pesquisa interessante seria a avaliação da qualidade da formação de professores em relação aos métodos para utilizar esses materiais de forma eficiente. Isso será fundamental para garantir a continuidade e a expansão da prática pedagógica.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Por fim, apresentaremos a conclusão do processo de aplicação do projeto, destacando os principais fatores que sustentam a utilização de materiais concretos no ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

Iniciamos este mestrado com o propósito de contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, beneficiando tanto discentes quanto docentes, por meio do desenvolvimento deste dispositivo educacional com o objetivo de investigar como o uso de materiais concretos pode contribuir para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem da trigonometria em contextos escolares, analisando o impacto dos materiais concretos na compreensão dos conceitos trigonométricos pelos alunos, identificando as melhores estratégias de abordagem dos conceitos básicos da trigonometria e suas relações através do material concreto na Educação Básica.

O uso de materiais concretos no ensino da trigonometria oferece benefícios significativos para a aprendizagem conceitual, o desenvolvimento de habilidades cognitivas e a motivação dos alunos, revelando o verdadeiro potencial desses recursos pedagógicos.

Especificamente, as ferramentas concretas na aprendizagem da trigonometria ajudam a criar uma conexão entre conceitos abstratos e exemplos práticos, facilitando a internalização de relações trigonométricas complexas durante as atividades. Isso é especialmente importante em disciplinas como a trigonometria, nas quais muitos alunos se sentem desconectados dos conceitos e do conteúdo abordado.

Além disso, o uso de materiais concretos estimula o pensamento ativo e operacional, desafiando os alunos a aplicar diferentes soluções para realizar medições e experimentos. Essa abordagem favorece múltiplos estilos de aprendizagem, ampliando as oportunidades de assimilação prática dos conceitos.

A utilização de materiais concretos contribui para ampliar a motivação dos alunos, pois possibilita resultados tangíveis que despertam interesse e engajamento. Esses recursos favorecem o processo de ensino-aprendizagem, incentivam a resolução criativa de problemas e promovem aulas mais dinâmicas e atrativas.

Por outro lado, algumas desvantagens devem ser consideradas como, o uso de materiais concretos geralmente requer uma orientação pedagógica e, às vezes, uma transformação na abordagem dos professores pode requerer um intervalo significativo de tempo.

Há, também, o fato de que nem todos os conceitos matemáticos podem ser expressos com materiais concretos inviabilizando o processo de ensino-aprendizagem. Podemos citar a falta de investimentos voltados para este tipo de proposta, além de espaços adequados para prática destes dispositivos.

Observa-se que a abordagem estudada valoriza os aspectos práticos do ensino com materiais concretos, integrando-se à base teórica e ao trabalho do professor. Dessa forma, os materiais concretos potencializam a aprendizagem ao lado da fundamentação conceitual e da mediação docente.

Desta forma, a utilização de materiais concretos pode revelar-se extremamente benéfica, na medida em que é efetuada com o devido rigor e estratégia no ensino. Ao trazer a experiência prática e visual ao contexto educacional, esses recursos permitem que conceitos abstratos, como os da matemática, sejam mais facilmente compreendidos, aproximando-se do conhecimento dos alunos.

Todavia, para que tal abordagem funcione em pleno, uma abordagem carregada de planeamento é necessária. A aula deve atender aos requisitos pedagógicos e de aprendizado e estar alinhada com a visão de recursos reais.

Portanto, a experiência realizada confirma que a inserção de materiais concretos no ensino da Matemática pode fortalecer a aprendizagem, dinamizar as aulas e enriquecer o processo educativo. Ao aliar prática e teoria, o CTI demonstrou ser uma ferramenta eficaz para tornar a trigonometria mais clara, envolvente e significativa para os estudantes, contribuindo para a construção de conhecimentos sólidos e duradouros.

Referências Bibliográficas

[1] BOGDAN, R; BIKLEN, S. ***Investigação Qualitativa em Educação***: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

[2] BONJORNO, José Ruy Giovanni Júnior; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. ***Matemática***: Ensino Médio – Conjuntos e Funções. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. ***Base Nacional Comum Curricular***. Brasília, 2018.

[4] CAVALCANTE, Luciano Moura. ***Geometria analítica***. 3. ed. Fortaleza: EdUECE, 2015. 125 p. ISBN 978-85-7826-403-1.

[5] DELVAL, Juan. ***Crescer e Penar***: A construção do conhecimento na escola. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1998.

[6] DESMURGET, Michel. ***A fábrica de cretinos digitais:*** os perigos das telas para nossas crianças. 1. ed. São Paulo: Vestígio, 2021. 352 p. ISBN 978-658-655152-5.

[7] FERREIRA, M. J. M. A. ***Novas tecnologias na sala de aula***. Monografia (Especialização em Fundamentos da Educação: ensinos Pedagógicas Interdisciplinares). Universidade Estadual da Paraíba, 2014.

[8] FORMIGHIERI, Gustavo. ***Pirâmide de Aprendizagem de William Glasser.*** Keeps.com.br, 2021. Disponível em: < https://keeps.com.br/piramide-de-aprendizagem-de-william-glasser-conceito-e-estrutura/ >. Acesso em: 13 de junho de 2024.

[9] IEZZI, Gelson. ***Fundamentos de matemática elementar 3 - trigonometria***: 506 exercícios propostos com resposta, 167 testes de vestibulares com resposta / Gelson Iezzi. — 9. ed. — São Paulo : Atual, 2013.

[10] LEWIN, A.M.F e LOMASCÓLO, T.M.M. La metodología científica en la construcción de conocimientos. ***Enseñanza de las Ciencias***, v. 20, n. 2, p. 147-510, 1998.

[11] LIBÂNEO. J. C. ***Didática***. Editora Cortez. São Paulo. São Paulo. 1994.

[12] LORENZATO. Sérgio. ***O laboratório de ensino de matemática na formação de professores***. 2. ed. Campinas – São Paulo: Autores associados, 2009.

[13] MENDES, Iran Abreu. ***Atividades históricas para o ensino da Trigonometria.*** In: MIGUEL, et al. História da Matemática em Atividades Didáticas. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 105-178.

[14] MONTESSORI, Maria. Pedagogia científica: a descoberta da criança. Tradução de Aury MORAIS, R.X.T. ***Software educacional***: A importância de sua avaliação e de seu uso na sala de aula. Fortaleza: FLF, 2003.

[15] MORAN, José Manuel. ***O que é educação à distância.*** 2002. Disponível em <http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/dist.pdf>. Acesso em 13 de julho de 2024, p. 1.

[16] MORAN. J. M. ***Novas tecnologias e mediação pedagógica***. 15. ed. Campinas: Papirus, 2006.

[17] MORAN, J. M. As múltiplas formas de aprender. ***Revista Atividades e Experiências***, São Paulo, jul 2005. Disponível em: http://ucbweb.castelobranco.br/webcaf/arquivos/23855/6910/positivo.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2023.

[18] MORAN, J. M. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T; BEHRENS, M. A. ***Novas tecnologias e mediação pedagógica.*** 15. ed. Campinas: Papirus, 2006.

[19] MOREIRA, M. A. ***Ensino e Aprendizagem***: enfoques teóricos. São Paulo: Moraes, 1985. 94p. O que é afinal aprendizagem significativa? Qurriculum : revista de teoría, investigación y práctica educativa. La Laguna, Espanha, n. 25, p. 29-56, mar. 2012.

[20] MOREIRA, Marco Antônio e MASINI, Elcie F, Salzano Mazini. ***Aprendizagem significativa***: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes LTDA, 1982.

[21] MUNIZ Neto, A. C. (2013). ***Geometria***. Rio de Janeiro: SBM.

[22] PIAGET, J. ***Epistemologia Genética.*** Tradução de Os Pensadores. Abril Cultural, 1973.

[23] PINTO. Álvaro Vieira. ***O conceito de tecnologia***. Editora Contraponto. Rio de Janeiro. 2005, 1v.

[24] RAMOS et al. ***Oficina de ensino de trigonometria para a educação básica*** – construção e análise de materiais. Disponível em:

https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/MCRAMOS94689598053.pdf Acesso em 23 de jan. 2025.

[25] SOARES. M. H. F. B. ***Multiversos Matemática***: Sequências e trigonometria. Tese de Doutorado, Universidade de São Carlos, São Carlos - SP, 2004.

[26] SOUZA, Joamir Roberto de. ***Multiversos Matemática***: Sequências e trigonometria. 1. Ed. São Paulo: FTD, 2020.

[27] WERTHEIN. J. ***A sociedade da informação e seus desafios***. Ci. Inf., Brasília, v.29, n. 2, p. 71-77, maio/ago. 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ci/v29n2/a09v29n2.pdf> Acesso em: 12 set. 2023.

[28] ZAGO, Glaciete Jardim. ***Trigonometria*** / Glaciete Jardim Zago, Walter Antônio Sciani. – São Paulo: Érica, 1997. – (Coleção Estudo e Use, Série Matemática).

Capítulo 6

APÊNDICES

6.1 Atividades Práticas

1. Determine no CTI através do processo de redução ao primeiro quadrante os ângulos abaixo.
   a) 330° b) 240° c) 120° d) 265°

2. Localize os ângulos no CTI e calcule o valor do seno, no conjunto dos reais, de cada ângulo.
   a) 25° b) 165° c) 253° d) 350°

3. (UFPI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, é:
   a) 400m b) 200m c) 500m d) 600m e) 1000m
   Observação: Montar o esquema no CTI e encontrar o valor procurado.

4. Localize os ângulos no CTI e calcule o valor do cosseno, no conjunto dos reais, de cada ângulo.
   a) 60° b) 130° c) 220° d) 310°

5. Uma escada de 6 metros está encostada em uma parede, formando um ângulo de 60° com o chão. Qual é a distância, em metros, do pé da escada até a parede?
   a) 3m b) 5m c) 6m d) 4m e) 7m
   Observação: Montar o esquema no CTI e encontrar o valor procurado.

6. Determine o valor do tangente, no conjunto dos reais, dos seguintes ângulos.
   a) 45° b) 140° c) 210° d) 300°

7. Quando o Sol se encontra a 45º acima do horizonte, uma árvore projeta sua sombra no chão com o comprimento de 15 m. Determine a altura dessa árvore:

a) 20m b) 5m c) 15m d) 30m e) 25m
Observação: Montar o esquema no CTI e encontrar o valor procurado.

8. Determine o valor da cotangente, no conjunto dos reais, dos seguintes ângulos.
a) 30° b) 120° c) 215° d) 325°

9. Determine o valor do secante, no conjunto dos reais, dos seguintes ângulos.
a) 45° b) 125° c) 235° d) 320°

10. Determine o valor do cossecante, no conjunto dos reais, dos seguintes ângulos.
a) 30° b) 110° c) 190° d) 290°

6.2 Questionário sobre o uso de material concreto no ensino-aprendizagem de Trigonometria

1. . Algum professor já fez uso de materiais concretos em suas aulas de Matemática?
( ) Sim
( ) Não

2. Quais tipos de materiais concretos você já utilizou ou utiliza em suas aulas de Matemática?
( ) Réguas
( ) Transferidores
( ) Modelos geométricos
( ) compasso
( ) Outros: ______________________________

3. Você acredita que o uso de materiais concretos pode facilitar a compreensão dos conceitos de trigonometria?
( ) Sim
( ) Não
( ) Talvez

4. Quais conceitos de trigonometria você considera que foram mais fáceis de assimilar com o uso de materiais concretos?
( ) Seno
( ) Cosseno
( ) Tangente
( ) Todos
( ) Nenhum
( ) Outros: ______________________________

5. Você percebeu alguma melhoria no seu desempenho e nas avaliações ao utilizar materiais concretos nas aulas de trigonometria?
( ) Sim
( ) Não
( ) Não sei avaliar

6. Você acredita que o uso de materiais concretos pode ser incorporado nas avaliações de trigonometria?
( ) Sim
( ) Não
( ) Talvez

7. Como você avalia a disponibilidade de materiais concretos em sua escola para o ensino de Matemática?
( ) Excelente
( ) Boa
( ) Regular
( ) Ruim
( ) Péssimo

8. Na sua opinião, qual é o seu nível de interesse ao utilizar materiais concretos em comparação com outros métodos de ensino?
( ) Muito maior
( ) Maior
( ) Igual
( ) Menor
( ) Muito menor

9. Você acredita que o uso de materiais concretos em trigonometria pode beneficiar alunos com diferentes estilos de aprendizagem?
( ) Sim
( ) Não
( ) Talvez

10. Você recomendaria o uso de materiais concretos a outros professores que ensinam conteúdos de Matemática?
( ) Sim
( ) Não
( ) Talvez

11. Gostaria de deixar alguma sugestão, crítica ou observação sobre o uso de material concreto no ensino-aprendizagem de trigonometria.

12. E no ensino da matemática?

6.3 Tabela Trigonométrica

Graus(°)	***Radiano***	**sen**	**cos**	**tan**	**csc**	**sec**	**cot**
0°	*0*	0	1	0	–	1	–
1°	*0,02*	0,017	0,9998	0,017	57,298	1,0001	57,289
2°	*0,03*	0,034	0,9993	0,034	28,653	1,0006	28,636
3°	*0,05*	0,052	0,998	0,052	19,107	1,0013	19,081
4°	*0,07*	0,069	0,997	0,069	14,335	1,002	14,300
5°	*0,09*	0,087	0,996	0,087	11,473	1,004	11,430
6°	*0,10*	0,104	0,994	0,105	9,566	1,006	9,514
7°	*0,12*	0,121	0,992	0,122	8,205	1,008	8,144
8°	*0,14*	0,139	0,990	0,140	7,185	1,010	7,115
9°	*0,16*	0,156	0,987	0,158	6,392	1,012	6,313
10°	*0,17*	0,173	0,984	0,176	5,758	1,015	5,671
11°	*0,19*	0,190	0,981	0,194	5,240	1,019	5,144
12°	*0,21*	0,207	0,978	0,212	4,809	1,022	4,704
13°	*0,23*	0,224	0,974	0,230	4,445	1,026	4,331
14°	*0,24*	0,241	0,970	0,249	4,133	1,031	4,010
15°	*0,26*	0,258	0,965	0,267	3,863	1,035	3,732
16°	*0,28*	0,275	0,961	0,286	3,627	1,040	3,487
17°	*0,30*	0,292	0,956	0,305	3,420	1,046	3,270
18°	*0,31*	0,309	0,951	0,324	3,236	1,051	3,077
19°	*0,33*	0,325	0,945	0,344	3,071	1,058	2,904
20°	*0,35*	0,342	0,939	0,363	2,923	1,064	2,747
21°	*0,37*	0,358	0,933	0,383	2,790	1,071	2,605
22°	*0,38*	0,374	0,927	0,404	2,669	1,078	2,475
23°	*0,40*	0,390	0,920	0,424	2,559	1,086	2,355
24°	*0,42*	0,406	0,913	0,445	2,458	1,094	2,246
25°	*0,44*	0,422	0,906	0,466	2,366	1,103	2,144
26°	*0,45*	0,438	0,898	0,487	2,281	1,112	2,050
27°	*0,47*	0,453	0,891	0,509	2,202	1,122	1,962
28°	*0,49*	0,469	0,882	0,531	2,130	1,132	1,880
29°	*0,51*	0,484	0,874	0,554	2,062	1,143	1,804
30°	*0,52*	0,5	0,866	0,577	2	1,154	1,732
31°	*0,54*	0,515	0,857	0,600	1,941	1,166	1,664
32°	*0,56*	0,529	0,848	0,624	1,887	1,179	1,600
33°	*0,58*	0,544	0,838	0,649	1,836	1,192	1,539
34°	*0,59*	0,559	0,829	0,674	1,788	1,206	1,482
35°	*0,61*	0,573	0,819	0,700	1,743	1,220	1,428
36°	*0,63*	0,587	0,809	0,726	1,701	1,236	1,376
37°	*0,65*	0,601	0,798	0,753	1,661	1,252	1,327
38°	*0,66*	0,615	0,788	0,781	1,624	1,269	1,279
39°	*0,68*	0,629	0,777	0,809	1,589	1,286	1,234
40°	*0,70*	0,642	0,766	0,839	1,555	1,305	1,191
41°	*0,72*	0,656	0,754	0,869	1,524	1,325	1,150
42°	*0,73*	0,669	0,743	0,900	1,494	1,345	1,110
43°	*0,75*	0,681	0,731	0,932	1,466	1,367	1,072
44°	*0,75*	0,694	0,719	0,965	1,439	1,390	1,035
45°	*0,77*	0,707	0,707	1	1,414	1,414	1
46°	*0,79*	0,719	0,694	1,035	1,390	1,439	0,965

Graus(°)	***Radiano***	**sen**	**cos**	**tan**	**csc**	**sec**	**cot**
47°	*0,80*	0,731	0,681	1,072	1,367	1,466	0,932
48°	*0,82*	0,743	0,669	1,110	1,345	1,494	0,900
49°	*0,84*	0,754	0,656	1,150	1,325	1,524	0,869
50°	*0,87*	0,766	0,642	1,191	1,305	1,555	0,839
51°	*0,89*	0,777	0,629	1,234	1,286	1,589	0,809
52°	*0,91*	0,788	0,615	1,279	1,269	1,624	0,781
53°	*0,93*	0,798	0,601	1,327	1,252	1,661	0,753
54°	*0,94*	0,809	0,587	1,376	1,236	1,701	0,726
55°	*0,96*	0,819	0,573	1,428	1,220	1,743	0,700
56°	*0,98*	0,829	0,559	1,482	1,206	1,788	0,674
57°	*0,99*	0,838	0,544	1,539	1,192	1,836	0,649
58°	*1,01*	0,848	0,529	1,600	1,179	1,887	0,624
59°	*1,03*	0,857	0,515	1,664	1,166	1,941	0,600
60°	*1,05*	0,866	0,5	1,732	1,154	2	0,577
61°	*1,06*	0,874	0,484	1,804	1,143	2,062	0,554
62°	*1,08*	0,882	0,469	1,880	1,132	2,130	0,531
63°	*1,10*	0,891	0,453	1,962	1,122	2,202	0,509
64°	*1,12*	0,898	0,438	2,050	1,112	2,281	0,487
65°	*1,13*	0,906	0,422	2,144	1,103	2,366	0,466
66°	*1,15*	0,913	0,406	2,246	1,094	2,458	0,445
67°	*1,17*	0,920	0,390	2,355	1,086	2,559	0,424
68°	*1,19*	0,927	0,374	2,475	1,078	2,669	0,404
69°	*1,20*	0,933	0,358	2,605	1,071	2,790	0,383
70°	*1,22*	0,939	0,342	2,747	1,064	2,923	0,363
71°	*1,24*	0,945	0,325	2,904	1,058	3,071	0,344
72°	*1,26*	0,951	0,309	3,077	1,051	3,236	0,324
73°	*1,27*	0,956	0,292	3,270	1,046	3,420	0,305
74°	*1,29*	0,961	0,275	3,487	1,040	3,627	0,286
75°	*1,31*	0,965	0,258	3,732	1,035	3,863	0,267
76°	*1,33*	0,970	0,241	4,010	1,031	4,133	0,249
77°	*1,34*	0,974	0,224	4,331	1,026	4,445	0,230
78°	*1,36*	0,978	0,207	4,704	1,022	4,809	0,212
79°	*1,38*	0,981	0,190	5,144	1,019	5,240	0,194
80°	*1,40*	0,984	0,173	5,671	1,015	5,758	0,176
81°	*1,41*	0,987	0,156	6,313	1,012	6,392	0,158
82°	*1,43*	0,990	0,139	7,115	1,010	7,185	0,140
83°	*1,45*	0,992	0,121	8,144	1,008	8,205	0,122
84°	*1,47*	0,994	0,104	9,514	1,006	9,566	0,105
85°	*1,48*	0,996	0,087	11,430	1,004	11,473	0,087
86°	*1,50*	0,997	0,069	14,300	1,002	14,335	0,069
87°	*1,52*	0,998	0,052	19,081	1,0013	19,107	0,052
88°	*1,54*	0,9993	0,034	28,636	1,0006	28,653	0,034
89°	*1,55*	0,9998	0,017	57,289	1,0001	57,298	0,017
90°	*1,57*	1	0	—	1	—	0
180°	*3,14*	0	-1	0	—	-1	—
270°	*4,71*	-1	0	—	-1	—	0
360°	*6,28*	0	1	0	—	1	—