Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Valrilene Mourão da Silva

O GeoGebra como Ferramenta de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Funções

Teresina - 2025

Valrilene Mourão da Silva

Dissertação de Mestrado:

O GeoGebra como Ferramenta de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Funções

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. Vitaliano de Sousa Amaral
Coorientadora: Dr.^{a} Lya Raquel Oliveira dos Santos

Teresina - 2025

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S586g Silva, Valrilene Mourão da.
O GeoGebra como ferramenta de apoio ao ensino e à aprendizagem de funções / Valrilene Mourão da Silva. -- 2025.
106 f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2025.
"Orientador: Prof. Dr. Vitaliano de Sousa Amaral. Coorientadora: Profa. Dra. Lya Raquel Oliveira dos Santos".

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Software - GeoGebra. 3. Funções. 4. Valor de contorno. I. Amaral, Vitaliano de Sousa. II. Santos, Lya Raquel Oliveira dos. III. Titulo.

CDD 510

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de mestre em matemática intitulada: ***O GeoGebra como Ferramenta de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem de Funções,*** defendida pela mestranda Valrilene Mourao da Silva, em 12 de junho de 2025 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Vitaliano de Sousa Amaral - Orientador
Presidente da Banca examinadora

Lya Raquel Oliveira dos Santos - Coorientadora
Examinador Interno

Marcos Vinicio Travaglia
Examinador Interno

Pedro Bonfim de Assunção Filho
Examinador Externo

Dedico esta dissertação à minha família em especial aos meus pais (Albino Mourão da Silva e Rosa Maria da Silva).

Agradecimentos

Destaco o meu principal agradecimento ao meu amoroso Pai Celestial, por me conceder os meios para alcançar essa maravilhosa conquista.

Gratidão ao meu Orientador(Prof. Dr. Vitaliano de Sousa Amaral) por todo o empenho e dedicação e pelo aprendizado que obtive com ele, sua contribuição foi sem dúvida essencial, bem como a minha Co - orientadora (Profa. Dr.ª Lya Raquel Oliveira dos Santos).

Gratidão ao meu esposo (José Filho) e filhos(Pedro e Gabriel) pelo apoio essencial, compreensão e ajuda em todos os momentos.

Gratidão aos amigos pela torcida, apoio e incentivo em especial ao meu amigo e irmão em Cristo (Wagner D.Silva) por seu incentivo quase que diário, isso fez muita diferença nos momentos desafiadores.

Gratidão aos amigos (Alinne, Wallace, Juliano, Neves, Marcos e Gemilson) do curso pelo incentivo, ajuda e companheirismo em todo o percurso.

Gratidão a todos os professores do curso que esforçaram - se, comprometeram - se e contribuíram de algum modo para minha formação.

"A matemática se revela em mentes sensíveis, capazes de ver uma espiral em um girassol, ângulos em uma estrela e Deus no infinito".

Manoel Rodrigues Paiva

Resumo

Esta dissertação discute o uso do software GeoGebra como ferramenta de apoio no ensino e aprendizagem de Matemática, com ênfase no estudo de funções. A proposta central é explorar como o uso de recursos visuais e interativos pode facilitar a compreensão de conceitos fundamentais, especialmente no ensino médio. O trabalho concentra-se na abordagem de diferentes tipos de funções - quadráticas, cúbicas, logarítmicas e exponenciais - analisando como o GeoGebra pode contribuir para a construção do conhecimento matemático de forma mais dinâmica e significativa. Através de atividades práticas desenvolvidas com o software, espera-se que dessa forma entre em conformidade com o que, Oliveira(2021, p.6)[16] defende "O uso do software GeoGebra nas aulas de Matemática na aprendizagem do ensino de função é muito eficaz, levando o aluno a pensar e aprender de forma dinâmica e construtiva"e que assim os alunos demonstrem maior engajamento, desenvolvam intuições visuais sobre o comportamento das funções e compreendam melhor aspectos como domínio, imagem, crescimento, decrescimento, raízes e concavidade. Concluímos que o GeoGebra é uma ferramenta eficaz no processo de ensino-aprendizagem, promovendo um ambiente mais interativo e estimulante para o estudo da Matemática.

Palavras-chave: Ensino; Função; GeoGebra.

Abstract

This dissertation discusses the use of GeoGebra software as a support tool in the teaching and learning of Mathematics, with an emphasis on the study of functions. The central proposal is to explore how the use of visual and interactive resources can facilitate the understanding of fundamental concepts, especially in high school. The work focuses on the approach of different types of functions - quadratic, cubic, logarithmic and exponential - analyzing how GeoGebra can contribute to the construction of mathematical knowledge in a more dynamic and meaningful way. Through practical activities developed with the software, it is expected that in this way it will comply with what Oliveira (2021, p.6) [16] defends "The use of GeoGebra software in Mathematics classes in the learning of function teaching is very effective, leading the student to think and learn in a dynamic and constructive way"and that thus the students demonstrate greater engagement, develop visual intuitions about the behavior of functions and better understand aspects such as domain, image, growth, decrease, roots and concavity. We conclude that GeoGebra is an effective tool in the teaching-learning process, promoting a more interactive and stimulating environment for the study of Mathematics.

Keywords: Teaching; Function; GeoGebra.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A matemática é a área do conhecimento responsável por estudar os números, as formas, a organização de estruturas algébricas, variações dentre outras. Em sua estrutura encontramos subáreas, as quais possibilitam uma certa organização de conteúdos e conhecimentos relacionados para uma melhor compreensão da mesma. A Aritmética, por exemplo, é responsável pelo estudo dos números e das operações aritméticas; a Álgebra, pelo estudo das equações e das expressões algébricas; a Geometria encarrega-se do estudo das figuras geométricas planas e espaciais, abordando perímetros, áreas, volumes e outros resultados pertinentes; temos também a Trigonometria, que se ocupa do estudo das funções trigonométricas, as quais relacionam de forma única medidas de ângulos com o conjunto dos números reais, entre outros. O ponto principal nessa subdivisão é o de que essas subáreas estão totalmente interligadas e conectadas entre si. Bem como, podemos dizer, que ela contribui de modo significativo para o avanço das ciências de modo geral, e dessa forma para o bem da humanidade. Se tirássemos tudo o que temos sobre a matemática, o que nos restaria? Como viveríamos por exemplo, sem os números naturais? Essas reflexões nos fazem entender a grande importância que a matemática possui em nossa vida. Será que podemos transmitir essa importância em nosso ensino? Como podemos fazer isso?

Em todo esse tempo como docente, muitas palavras como: "matemática é difícil", "professora, não consigo"ou ainda "onde vou usar isso em minha vida"soam até hoje em meus ouvidos de maneira recorrente. Percebo que os alunos de modo geral, já possuem uma percepção a respeito da disciplina que já veio sendo construída e repassada ao longo das gerações. Isso de certa forma bloqueia o progresso da aprendizagem matemática de muitos alunos, cabendo a nós enquanto professores, buscarmos maneiras de desconstruir essa ideia construída ao longo da vida acadêmica deles. Desse modo, algo que precisamos realizar em nosso cotidiano de sala de aula é promover um ambiente propício ao desenvolvimento do pensamento matemático e envolver nossos estudantes no processo de ensino da matemática. Esse é um grande desafio devido ao leque de variáveis que estão envolvidas no processo de ensino e aprendizagem, entretanto precisamos persistir em busca de realizar esse grande feito.

Segundo Duval (apud Freitas 2013, p.18) [10], em relação ao processo de compreensão na aprendizagem de matemática podemos considerar duas faces da atividade matemática, o qual as chama de face exposta e face oculta. A primeira, compreendendo os objetos matemáticos como números, funções, equações, polígonos, poliedros, etc e a segunda, compreendendo os aspectos cognitivos e epistemológicos específicos da matemática. Em relação a isso, podemos complementar e utilizar essa ideia para compreendermos melhor o processo de ensino e aprendizagem de matemática, pois nesse sentido percebemos que quando você fala a palavra matemática para alguém, a primeira ideia que vem a sua mente é uma enorme quantidade de números e símbolos, operações, figuras e gráficos. A princípio sem significado algum, entretanto como professores de matemática faz parte de nossa missão ensinarmos essas coisas, ajudando-os a enxergarem a face oculta, ao darmos um significado aos objetos matemáticos que a face exposta contém.

Existem muitos fatores que podemos considerar quando falamos a respeito de enquanto professores buscarmos métodos eficientes de ensino. Ao observar, por exemplo, a vivência em sala de aula, bem como a vivência com outros colegas professores que atuam a mais tempo na rede de ensino, especialmente no ensino básico, destaco a disposição em procurarmos capacitação constante em nossa área, visando sempre o aprimoramento de nossa prática.

Além disso, evitar cair no comodismo que os livros didáticos podem proporcionar até certo ponto, precisamos considerar a ideia de termos que pensar em estratégias, metodologias e ferramentas que podemos utilizar para melhorar nossa prática e com isso motivar o processo de ensino e aprendizagem, contribuindo assim com aulas mais elaboradas e interessantes.

Outro aspecto que podemos considerar, seria procurar olhar a aprendizagem do ponto de vista dos alunos, realmente podermos refletir sobre esses fatores podem nos inspirar por encontrar meios e estratégias mais eficazes capazes de contribuir para melhorias no processo de aprendizagem matemática.

Considerando tudo o que foi abordado - desde a importância da matemática para a vida cotidiana e para a sociedade como um todo até as formas de tornar seu ensino mais eficiente e eficaz -, definiu-se como objetivo geral deste trabalho apresentar uma ferramenta interessante e abrangente, capaz de atuar como facilitadora e auxiliar no ensino de matemática. Busca-se, com isso, promover um ambiente de aprendizagem mais propício e atrativo, que estimule os estudantes a enxergar a disciplina de forma mais significativa, favorecendo o processo de aprendizagem. Para isso, alguns objetivos específicos foram determinados:

- Apresentar o programa GeoGebra como uma importante ferramenta de ensino;
- Expor alguns conceitos básicos e definições matemáticos;
- Realizar a abordagem desses conteúdos utilizando a ferramenta GeoGebra.

Para Ferreira, Campos e Wodewotzki (apud Oliveira 2013, p. 163) [16], “a tecnologia é essencial no processo de visualização, e ela, por sua vez, ocupa um papel pedagógico fundamental na compreensão de conteúdos matemáticos”. De fato, podemos utilizar a tecnologia como nossa aliada e temos atualmente, grandes contribuições nesse sentido de através dela podermos levar ao nosso aluno um conhecimento mais "tangível", e interessante. A ponto de despertar a curiosidade e questionamentos que contribuem para processo de aprendizagem de matemática.

Uma dessas, a quem destacamos com enfase é o software GeoGebra, um recurso acessível e disponível para nos ajudar enquanto profissionais comprometidos com os bons resultados de nossa prática.

De acordo com Lourenço (2002, p.105) apud Bonfim [5],

> além de servir, de maneira clara, para a exploração de resultados e para o incentivo de investigações, os softwares educacionais podem sugerir caminhos à realização de demonstrações desconhecidas, propondo artifícios que, muitas vezes, em demonstrações formais são necessários e de difícil compreensão (Lourenço, 2002, p. 105).

Desse modo podemos dizer que esse tipo de recurso é tido como um facilitador de aprendizagem, de modo a favorecer uma compreensão mais clara de conteúdos até então abstratos e complexos.

O presente trabalho traz uma abordagem especificamente de um dos conteúdos mais abstratos do ensino de matemática, que é o conteúdo de funções, e utilizaremos o software GeoGebra como ferramenta de apoio.

No Capítulo 1, apresentamos o software GeoGebra, destacando suas principais funcionalidades e seu potencial didático. No capítulo seguinte, discutimos conceitos fundamentais relacionados ao ensino de funções, com ênfase nas funções quadrática, cúbica, exponencial e logarítmica. Em cada caso, o GeoGebra é utilizado como ferramenta de apoio à visualização e à compreensão dos conteúdos explorados. Por fim, no Capítulo 3, apresentamos as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 1

O Software GeoGebra e Sua Importância no Ensino de Matemática

Uma das ferramentas que podemos utilizar como recurso para abordagem de conteúdos matemáticos e assim, promover uma maior assertividade na assimilação por nossos alunos, é o software matemático chamado GeoGebra, desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg. Seu próprio nome sugere - nos uma ideia do que oferece em sua estrutura, para contribuir significativamente com o ensino de matemática, abrangendo e relacionando Álgebra e Geometria, planilhas, gráficos, estatística e cálculo em um só ambiente.

Na Figura abaixo, apresentaremos a interface do GeoGebra Clássico, cujo acesso pode ser na versão online ou através de software instalado no computador. A versão online encontra - se no link `https://www.GeoGebra.org/classic`.

Figura 1.1: Interface do GeoGebra Clássico - Versão online

[1] : Local em que dar o acesso a todas as Ferramentas disponíveis, como por exemplo: determinar os extremos de uma função, traçar polígonos e retas perpendiculares, etc.

[2] : Local destinado para a inserção do comando para por exemplo, inserir a lei de formação de uma função;

[3] : Local onde configuramos detalhes específicos, como escala dos eixos, tamanho da fonte, cores, malha quadriculada, etc.

De acordo com, Ribeiro e Souza (2016) [21]

> Ao se utilizar o GeoGebra, nos encontramos com o mundo já conhecido dos softwares, mas ainda pouco explorado, que poderia nos fornecer um leque muito interessante de práticas educativas (...) acreditamos que a utilização de estratégias como o software GeoGebra pode tornar as aulas mais dinâmicas, o que implica numa participação ativa do aluno e, de fato, auxiliar na promoção de um ensino centralizado no educando.

Nesse contexto, pode-se afirmar que dispomos de um instrumento valioso para o ensino e a aprendizagem, com potencial para ser utilizado de forma eficaz em sala de aula. No entanto, para que isso se concretize, é imprescindível que o professor receba formação adequada para sua utilização. É com esse objetivo que se propõe o presente trabalho.

Recursos de visualização geométrica e algébrica encontram-se amplamente disponíveis neste software, e a partir deste ponto, serão explorados alguns deles, com vistas à construção e à representação de conteúdos diversos, tais como: funções, determinação de máximos e mínimos, raízes de funções, bem como a identificação de intervalos de crescimento e decrescimento.

Além de reunir diversas representações matemáticas em um único ambiente, o GeoGebra promove uma abordagem investigativa da Matemática, permitindo que os alunos testem hipóteses, manipulem variáveis e observem resultados em tempo real. Essa interatividade favorece a construção ativa do conhecimento e estimula o pensamento crítico e a autonomia dos estudantes.

O software também atende a diferentes estilos de aprendizagem, tornando conceitos abstratos mais acessíveis por meio de visualizações, simulações e animações, o que beneficia especialmente turmas heterogêneas. Sua versatilidade metodológica permite uso em aulas expositivas, trabalhos em grupo e projetos interdisciplinares, ampliando o repertório de práticas pedagógicas.

Por fim, vale ressaltar que o GeoGebra potencializa, mas não substitui o papel do professor. Ao integrar essa ferramenta ao planejamento pedagógico, o docente enriquece o processo de ensino-aprendizagem e promove um ensino mais dinâmico, participativo e alinhado às demandas da cultura digital.

Em um mundo cada vez mais tecnológico temos a necessidade de aprendermos a utilizar os recursos disponíveis em prol de um melhor aperfeiçoamento e atualização na pratica docente.

O uso de tecnologias digitais, programas ou softwares - como o GeoGebra, por exemplo - está em conformidade com uma das competências da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2017, p.9) [4] onde diz

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Nesse sentido, estaremos utilizando de modo criativo, significativo e reflexivo a tecnologia digital em nossa prática escolar mais precisamente no ambiente sala de aula para disseminar e produzir conhecimentos matemáticos com o uso desta ferramenta como facilitadora auxiliar.

No capítulo a seguir, abordaremos o uso do GeoGebra como ferramenta auxiliar no ensino de algumas funções, com destaque para as funções quadrática, cúbica, exponencial e logarítmica.

Capítulo 2

Uso do GeoGebra no ensino de funções

O ensino de funções desempenha um papel fundamental na formação matemática dos estudantes, sendo um dos conceitos centrais para a compreensão da Álgebra e do Cálculo. No entanto, muitos alunos enfrentam dificuldades ao lidar com a abstração envolvida nesse tema. Ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, surgem como aliadas no processo de ensino e aprendizagem, proporcionando uma abordagem dinâmica e interativa.

Este capítulo explora o uso do GeoGebra no ensino de funções, destacando como essa ferramenta pode contribuir para a visualização de conceitos, a exploração de propriedades e o desenvolvimento do raciocínio matemático. Através de exemplos e aplicações práticas, busca-se evidenciar os benefícios da utilização do software para tornar o aprendizado mais intuitivo e significativo. No Apêndice A apresentamos um quia prático para uso do GeoGebra no estudo das funções quadráticas, cúbicas, exponenciais e logarítmicas.

2.1 Funções

Nesta seção, exploraremos os principais conceitos e definições sobre funções, fornecendo uma base teórica essencial para o entendimento do restante do capítulo.

Definição 2.1.1. *Dado dois conjuntos não vazios A e B, chamamos de* ***função*** *de A em B uma* ***relação*** *ou* ***regra*** *que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$. Denotamos $f : A \to B$ e lemos "f de A em B". O valor y correspondente a x será denotado por $f(x)$, ou seja, $y = f(x)$.*

Definição 2.1.2. *Chamamos de* ***domínio*** *da função $f : A \to B$ o conjunto A, denotado por*

$$Dom(f) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

O conjunto B é chamado de ***contradomínio*** *de f. Já a* ***imagem*** *da função $f : A \to B$ é o* *subconjunto de B dado por*

$$Im(f) = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}.$$

*O **gráfico** de f é o conjunto de pontos do plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definido por*

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \text{ com } x \in A\}.$$

Exemplo 2.1.1. *Dados os conjuntos $A = \{1, 4, 7\}$ e $B = \{0, 3, 12, 15, 21\}$. A relação de A em B expressa por $y = 3x$, com $x \in A$ e $y \in B$ é uma função.*

De fato, através da Figura 2.1, a seguir, podemos notar que:

- Todos os elementos de A estão associados a elementos de B;

- Cada elemento de A está associado a um **único** elemento de B como demonstrado na Figura 2.1.

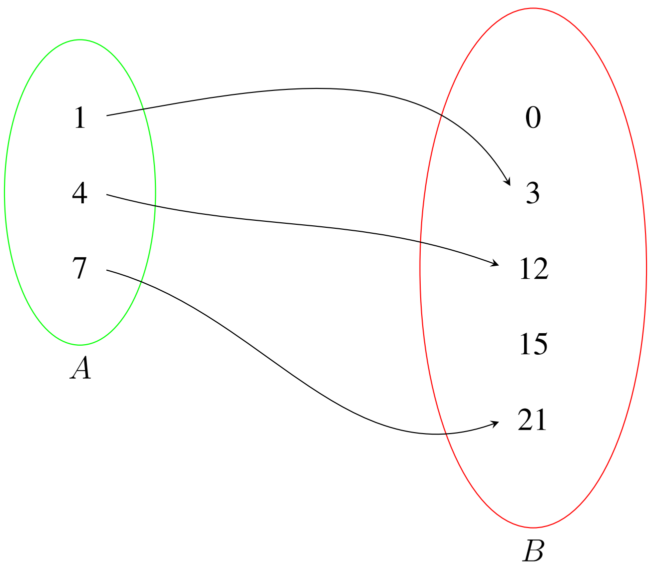

Figura 2.1: Representação de uma função de A em B

Como o gráfico de uma função é formado por pontos da forma $(x, f(x))$, ele pode ser representado geometricamente no plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Geometricamente, um conjunto de pontos representa o gráfico de uma função se toda reta vertical contiver no máximo um ponto desse conjunto. Veremos isso a seguir por meio de um exemplo utilizando o GeoGebra.

Exemplo 2.1.2. *O conjunto $M = \{(x, y), \text{ onde } y = x^7 + x^6 + x^2\}$ representa o gráfico de uma função, já o conjunto $N = \{(x, y), \text{ onde } x = y^7 + y^6 + y^2\}$ não representa o gráfico de uma função. Verificaremos isso a seguir com uso do GeoGebra.*

- *Para o conjunto M procedemos da seguinte forma: é fácil ver que o conjunto M é formado pelos pontos da forma $(x, x^7+x^6+x^2)$. No GeoGebra Clássico digitar* `(x,x^7+x^6+x^2)` *após isso aparecerá a curva que contém os pontos do conjunto M. Após isso, na quarta janela selecionar a função "Reta Perpendicular"e clicar duas vezes espaçadamente sobre o eixo OX. Veja Figura 2.2.*

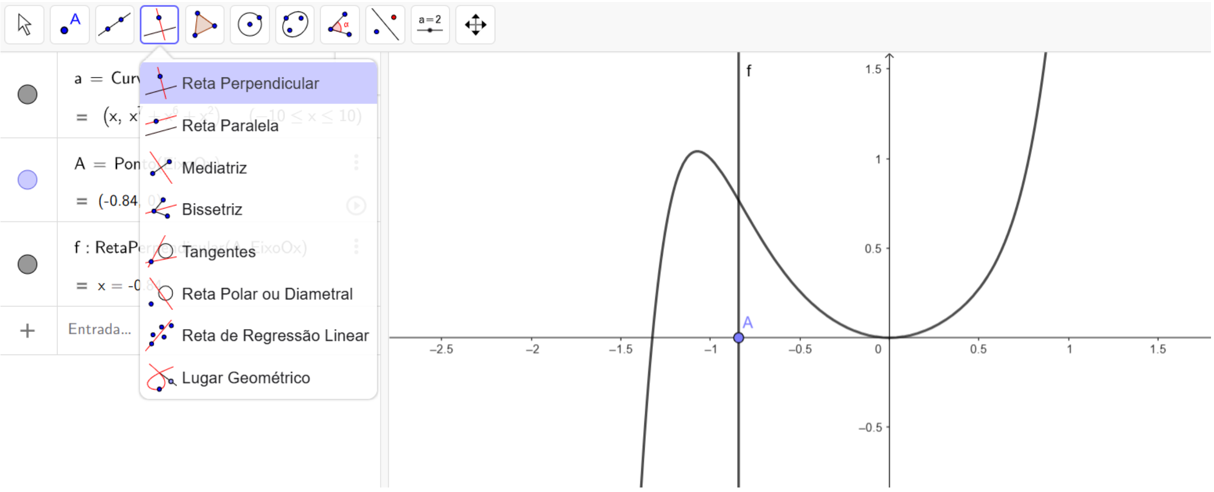

Figura 2.2: Representação Geométrica do conjunto M.

Desativando a ferramenta na primeira janela e clicando no ponto A na Figura 2.2 e movimentando horizontalmente veremos que a reta vertical intersecta a curva do conjunto em, no máximo, um ponto, portanto o conjunto M representa o gráfico de uma função.

- *Para o conjunto N procedemos de forma semelhante: é fácil ver que o conjunto N é formado pelos pontos da forma $(y^7+y^6+y^2, y)$. No GeoGebra digitar* `(y^7+y^6+y^2,y)` *a pós isso aparecerá a curva que contém os pontos do conjunto N. Seguindo os mesmos passos feitos para o conjunto M, obteremos a Figura 2.3.*

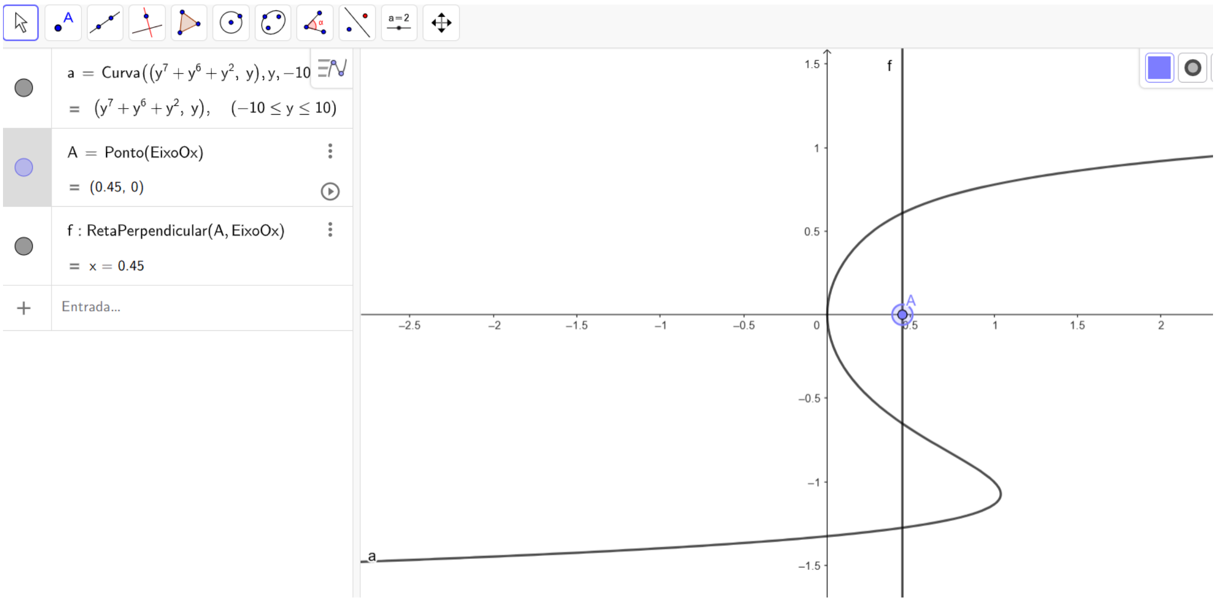

Figura 2.3: Representação Geométrica do conjunto N.

Movimentando horizontalmente veremos que em alguns pontos a reta vertical intersecta a curva do conjunto em mais de um ponto, portanto o conjunto N não representa o gráfico de uma função.

Dessa forma, começa-se a evidenciar a importância do GeoGebra como recurso de apoio no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

2.1.1 Classificação das Funções

Nesta subseção apresentaremos alguns tipos de funções e alguns conceitos importantes sobre elas, onde abordaremos algumas propriedades com o suporte do GeoGebra.

Definição 2.1.3. *Uma função $f : A \to B$ é chamada de sobrejetora (ou sobrejetiva) quando todos os elementos do conjunto B são atingidos por algum elemento de A através da função f.*

Exemplo 2.1.3. *Se temos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$, ela é sobrejetora porque todos os números em $\mathbb{R}_+$ (números reais positivos) podem ser obtidos como resultado de algum número real x ao quadrado.*
De fato, para cada $y \in \mathbb{R}_+$ tome $x = \sqrt{y}$, de onde segue que $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$.

Definição 2.1.4. *Uma função $f : A \to B$ é chamada de injetora (ou injetiva) se não houver dois valores diferentes em A que tenham a mesma "saída"em B. Em outras palavras, para cada $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Observação 2.1.1. *A definição 2.1.4 é equivalente a dizer que $f(x) = f(y)$ implica em $x = y$.*

Geometricamente, uma função é injetiva quando toda reta horizontal(paralela ao eixo OX) intersectar o gráfico de f em no máximo um ponto.

Exemplo 2.1.4. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$. Iremos mostrar que f é injetiva. Suponha $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = f(y)$, ou seja, $x + 1 = y + 1$. Isso implica $x = y$, o que torna a função injetiva.*

A injetividade de uma função pode ser verificada geometricamente usando o GeoGebra, veja como será feito no Exemplo 2.1.5 a seguir.

Exemplo 2.1.5. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^5 + 2x$, representa uma função injetiva, ou seja, $f(x) = f(y) \iff x = y$.*

No GeoGebra Clássico fazer o gráfico de $f(x) = x^5 + 2x$. Em seguida, na quarta janela, selecionar a função "Reta Perpendicular"e clicar duas vezes espaçadamente no eixo OY obtendo uma reta horizontal. Veja Figura A.20.

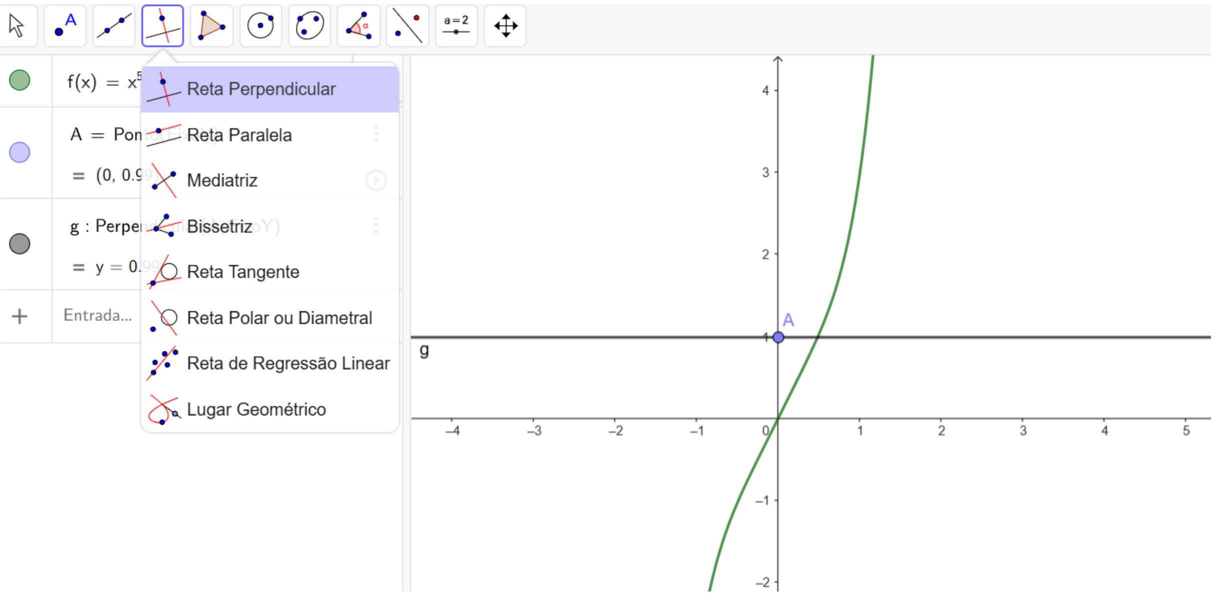

Figura 2.4: Gráfico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^5 + 2x$

Após o processo anterior, desativar a função na primeira janela, clicar no ponto de interseção da reta com o eixo OY e movimentar a reta verticalmente. Assim podemos perceber que a reta intersecta o gráfico de f é um único ponto. Portanto podemos garantir que f é injetiva.

Definição 2.1.5. *As funções podem ser classificadas conforme seu comportamento em relação ao crescimento ou decrescimento:*

1. *Crescente: Quando $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$.*
2. *Decrescente: Quando $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.*
3. *Não-decrescente: Quando $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$ (a função pode permanecer constante ou aumentar).*

4. *Não-crescente: Quando $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \geq f(x_2)$ (a função pode permanecer constante ou diminuir).*

Podemos analisar uma função como visto no Exemplo 2.1.5, de acordo com seus intervalos de crescimento e decrescimento. O uso do GeoGebra nos permite uma abordagem visual bastante interessante a qual estaremos apresentando e descrevendo a partir do exemplo a seguir:

Exemplo 2.1.6. *Analise a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^3 + 2x^2$ quanto aos seus intervalos de crescimento e decrescimento, com o uso do GeoGebra.*

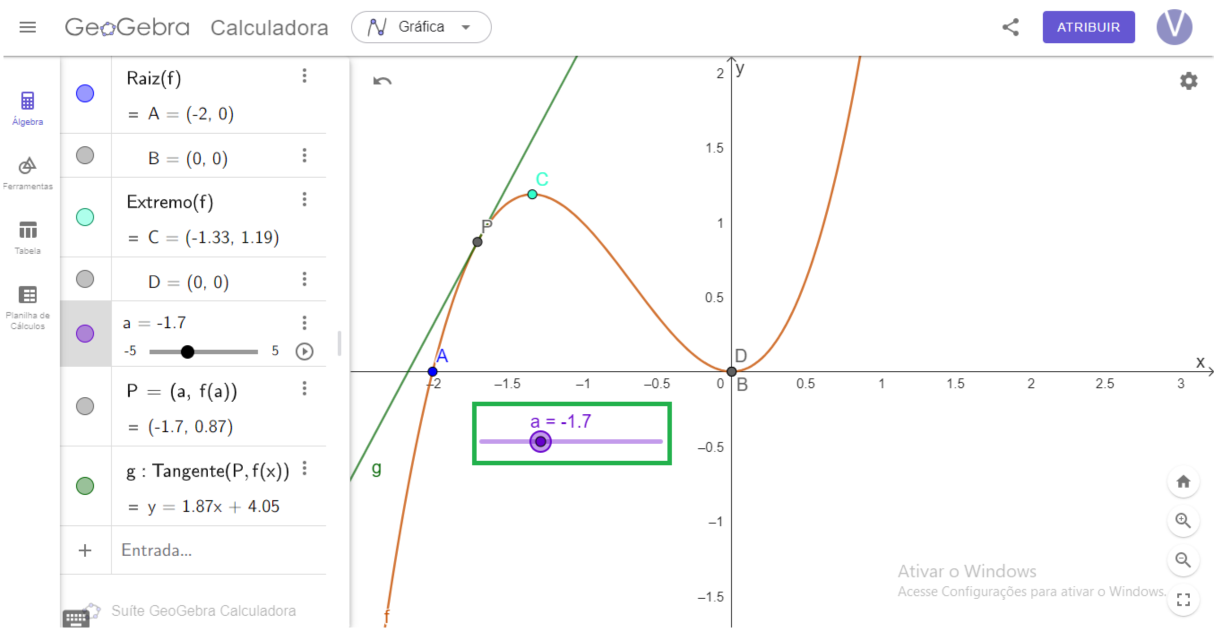

Figura 2.5: Inclinação da reta tangente ao gráfico no intervalo $(-2; -1,33)$

Solução. Observe no gráfico apresentado na Figura 2.6 que no intervalo $(-\infty; -1,33)$ a reta tangente aponta para cima significando inclinação positiva o que remete a conclusão de que $f(x) = x^3 + 2x$ é crescente neste intervalo.

De modo análogo, podemos analisar no intervalo $(-1,33; 0)$ e concluímos que neste intervalo a função é decrescente, visto que a inclinação da reta tangente ao gráfico é negativa, ver Figura 2.6.

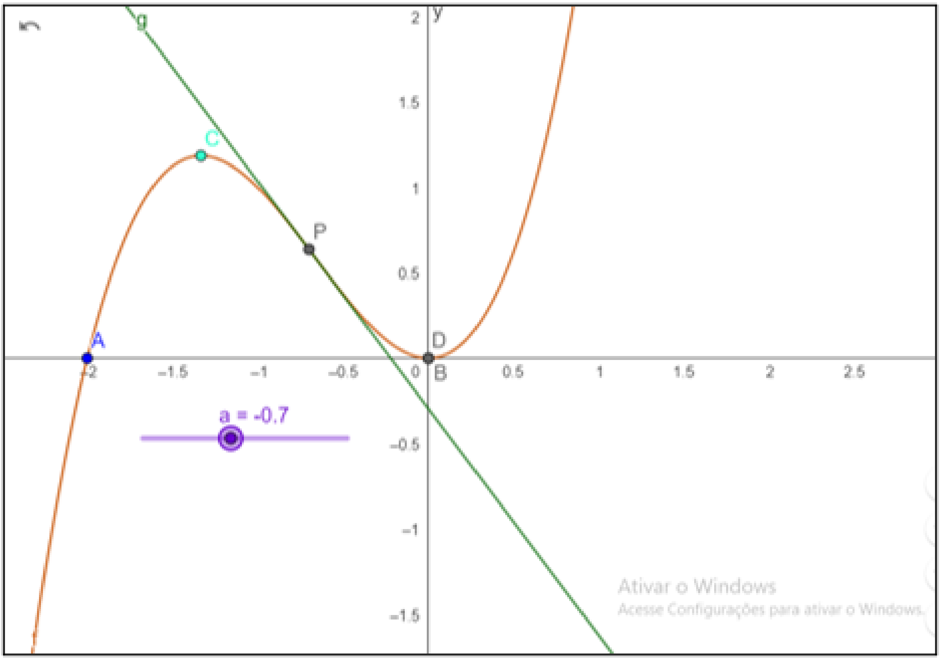

Figura 2.6: Inclinação da reta tangente ao gráfico no intervalo $(-1, 33; 0)$

No intervalo $(0, +\infty)$ como mostra a Figura 2.7, a inclinação da reta tangente é positiva o que nos faz concluir que neste intervalo a função é crescente.

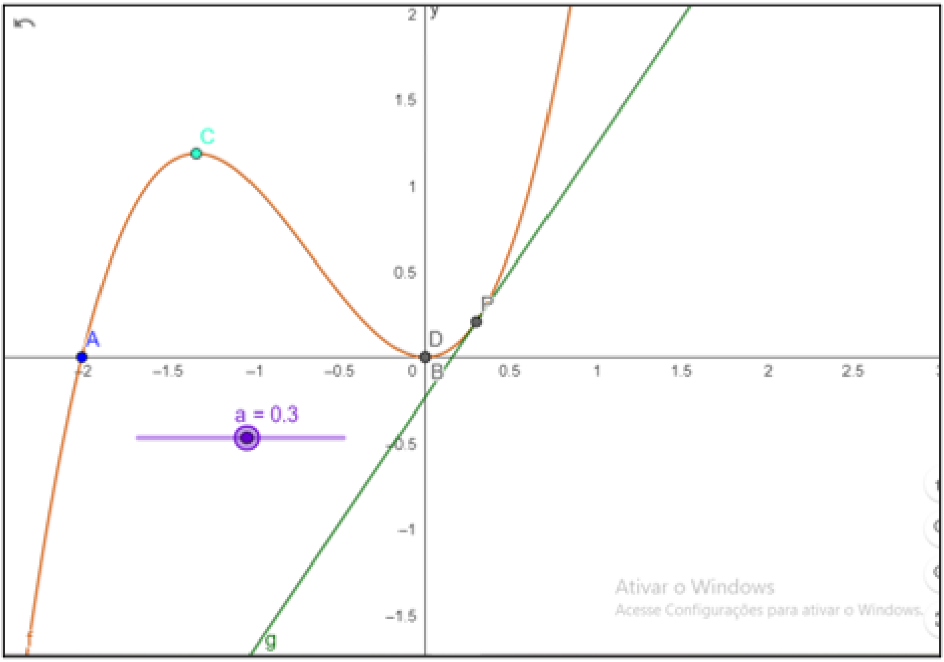

Figura 2.7: Inclinação da reta tangente ao gráfico no intervalo $(0, +\infty)$

$\square$

A visualização geométrica das propriedades de uma função é crucial para o entendimento da teoria envolvida, e, nesse contexto, o uso do GeoGebra se revela fundamental. Ao longo desta dissertação, veremos como essa ferramenta desempenha um papel importante nesse processo.

2.2 Zeros de Funções

A seguir, discorreremos a respeito do conceito de zeros de funções o qual será exemplificado graficamente e por meio de exemplos.

Definição 2.2.1. *O zero ou raiz de uma função f é o valor de x para o qual o valor da função aplicada em x é zero, ou seja, $f(x) = 0$.*

Exemplo 2.2.1. *Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 + 5x + 6$. Os zeros dessa função são os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Nesse caso, $x = -2$ e $x = -3$ são zeros, pois $f(-2) = 0$ e $f(-3) = 0$.*

Geometricamente, os zeros ou raízes de uma função f, são as abscissas dos pontos em que seu gráfico intersecta o eixo OX. Veja Figura 2.8 a seguir.

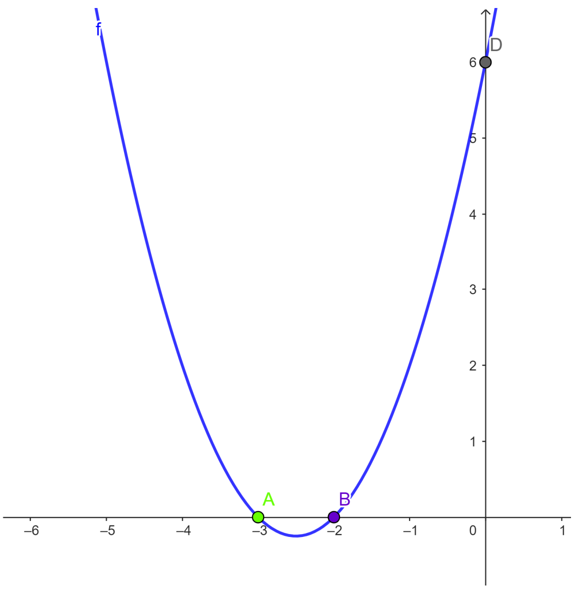

Figura 2.8: Gráfico da função $f(x) = x^2 + 5x + 6$.

As abscissas dos pontos A e B são, neste caso os zeros ou raízes da função.

De modo geral, para determinar os zeros ou raízes de uma função f basta resolver a equação $f(x) = 0$, ou seja, determinar todos os valores de x para que $f(x) = 0$. Veja um exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3 - 4x$. Determinamos os zeros ou raízes de f ao resolvermos a equação dada por: $x^3 - 4x = 0 \implies x(x^2 - 4) = 0 \implies x = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$ o que nos dá $x = 0, x = -2, x = 2$ como soluções, e a estes chamamos de zeros ou raízes da função f.*

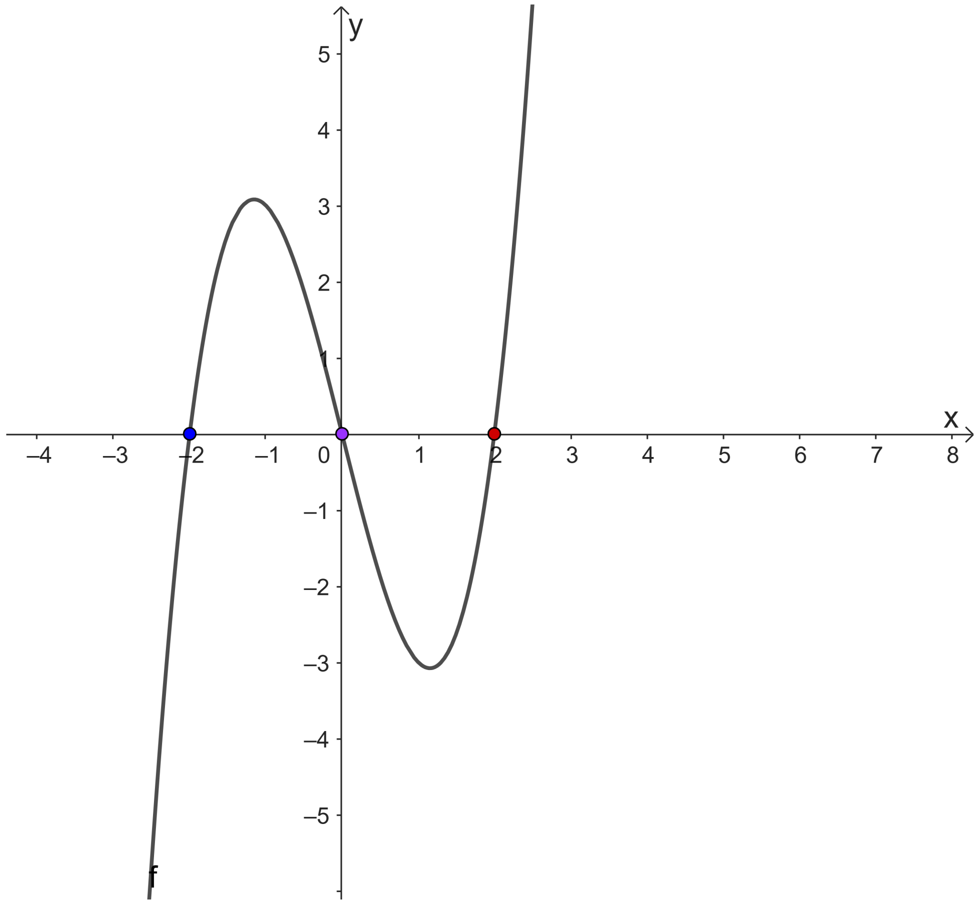

Figura 2.9: Gráfico de $f(x) = x^3 - 4x$

Notemos que os valores $x = 0, x = -2, x = 2$ possuem imagem igual a 0, isto é $f(x) = 0$ para $x = 0, x = -2, x = 2$.

Para determinar os zeros de uma função f através do GeoGebra basta construir seu gráfico e escolher as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo OX. Veja as figuras 2.8 e 2.9.

Podemos perceber que o GeoGebra é um recurso didático fundamental para tornar mais concreta a compreensão de propriedades importantes das funções, como injetividade, sobrejetividade e monotonicidade. A possibilidade de manipular gráficos dinamicamente, traçar retas horizontais ou tangentes e visualizar em tempo real o comportamento da função permite que os estudantes desenvolvam intuições geométricas e articulem conceitos algébricos com representações visuais. Essa abordagem está em alinhamento com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destaca a importância de articular diferentes representações matemáticas - algébricas, gráficas e geométricas - no processo de ensino e aprendizagem, bem como de integrar recursos tecnológicos como ferramentas que potencializam a construção de significados e o desenvolvimento do pensamento matemático. Ao explorar visualmente o comportamento das funções e suas propriedades, os estudantes ampliam sua compreensão conceitual e fortalecem conexões entre teoria e prática. Assim, o GeoGebra não apenas complementa a abordagem tradicional, mas potencializa o aprendizado ao favorecer a construção ativa do conhecimento matemático.

O restante deste capítulo será dedicado ao estudo de quatro tipos específicos de funções, com o apoio do GeoGebra. Abordaremos, de forma mais detalhada, as funções quadráticas, cúbicas, exponenciais e logarítmicas, explorando suas propriedades, gráficos e aplicações por meio de uma abordagem visual e interativa.

2.3 Funções Quadráticas

Trataremos a partir de agora sobre a função quadrática, onde alguns conceitos e definições a seu respeito serão apresentados e explorados por meio de exemplos e ilustrações gráficas.

Definição 2.3.1. *Chamamos de* **Função do 2° grau** *ou* **Função quadrática***, toda função* $f : I \to \mathbb{R}$ *do tipo* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, com* $a, b, c \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$ *e* I *um conjunto formado por números reais.*

Exemplo 2.3.1. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, onde* $f(x) = x^2 - 3x + 2$ *é uma função quadrática.*

Os zeros da função quadrática, correspondem às raízes reais da equação do 2° grau correspondente.

Exemplo 2.3.2. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, onde* $f(x) = x^2 - 3x + 2$ *, podemos dizer que os zeros desta função são os valores de* x *para os quais vale* $f(x) = 0$*. Usando a fórmula de Bháskara, que será apresentada na sequência, encontramos:* $x_1 = 2$ *e* $x_2 = 1$*. Estes são os zeros de* $f(x)$*.*

A seguir apresentaremos a forma canônica de uma função quadrática, e esta forma facilita a determinação de máximos, mínimos bem como também obter a tão famosa Fórmula de Bháskara.

Proposição 2.3.1. *Toda função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *pode ser escrita como*

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac. \tag{2.1}$$

A fórmula dada (2.1) *é chamada de forma canônica de* f*.*

Demonstração. Demonstração baseada em Ferreira, p.22, 2018 [9]. Usando algumas manipulações algébricas e o método de completar quadrados obtemos o seguinte.

$$\begin{aligned}
f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.
\end{aligned}$$

De onde segue que f pode ser escrita da forma $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. ■

Exemplo 2.3.3. *Escrever a função* $f(x) = x^2 - 3x + 2$ *na sua forma canônica.*

Solução. Aplicando o que foi deduzido como forma canônica de uma função quadrática, temos que:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Substituindo os coeficientes de f, obtemos, o que se segue:

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

. □

Como consequência da forma canônica da função quadrática de f podemos obter a famosa fórmula de Bhaskara. De fato, se x é um zero de f então pela forma canônica temos

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0,$$

de onde segue que

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}.$$

Como $a \neq 0$, então podemos dividir ambos os lados da equação anterior obtendo

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2},$$

passando a raiz na equação anterior obtemos $x + \dfrac{b}{2a} = \pm\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}$. De onde segue que

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \text{ (Fórmula de Bhaskara)}$$

Uma outra consequência da forma canônica de f é que seu gráfico é uma parábola.

Geometricamente, define-se uma parábola como o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo, chamado *foco*, e de uma reta fixa, chamada *diretriz*.

Seja $F = (h, k)$ o foco e seja a reta $y = d$ a diretriz. Desejamos encontrar o conjunto de todos os pontos $P = (x, y)$ tais que a distância de P ao foco seja igual à distância de P à diretriz, ou seja,

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, \text{diretriz}), \tag{2.2}$$

onde $\text{dist}(P, F) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ é a distância do ponto $P = (x, y)$ ao foco $F = (h, k)$ e $\text{dist}(P, \text{diretriz}) = |y - d|$ a distância do ponto $P = (x, y)$ à reta horizontal $y = d$.

Assim, a equação em (2.2) pode ser reescrita da forma

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = |y - d|,$$

de onde segue que

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = (y-d)^2.$$

Isolando y na última expressão obtemos

$$y = \frac{1}{2(k-d)}(x-h)^2 + \frac{1}{2}(d+k). \tag{2.3}$$

Igualando os segundos membros equações (**??**) e (2.3) obtemos

$$h = -\frac{b}{2a},\ d = -\frac{\Delta + 1}{4a} \text{ e } k = \frac{1 - \Delta}{4a}.$$

Assim, podemos concluir que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com:

- foco $F = \left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{1 + 4ac - b^2}{4a}\right)$.
- reta diretriz $y = -\dfrac{b^2 - 4ac + 1}{4a}$.

Clique para ver a ilustração geométrica.

Na subseção é apresentado mais uma importante aplicação da forma canônica da função quadrática.

2.3.1 Máximos e Mínimos da Função Quadrática

Primeiramente, definiremos os conceitos de máximo e de mínimo de forma geral, ou seja: para uma função qualquer, sem restrições específicas sobre seu comportamento. Esses conceitos são fundamentais para a compreensão do comportamento das funções, pois nos permitem identificar pontos de interesse em que a função atinge seus valores mais altos ou mais baixos em um determinado intervalo ou domínio.

Definição 2.3.2. *O valor máximo de uma função f em um conjunto $A \subset D(f)$ é o maior valor que $f(x)$ assume em A. O valor mínimo é o menor valor que $f(x)$ assume em A. O ponto onde f assume valor máximo é chamado de ponto de máximo, e o ponto onde f assume valor mínimo é chamado de ponto de mínimo de f,*

Exemplo 2.3.4. *O ponto de mínimo de $f(x) = x^2$ é $x = 0$ e o valor mínimo de f é 0, pois $f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$.*

Podemos visualizar isso através do gráfico apresentado na Figura 2.10. Note que o menor valor que $f(x)$ assume ocorre quando $x = 0$, e nesse ponto, temos $f(0) = 0$. Assim, dizemos que $x = 0$ é o ponto de mínimo da função, já que nenhum valor de x no domínio da função resulta em um valor de $f(x)$ menor do que $f(0)$.

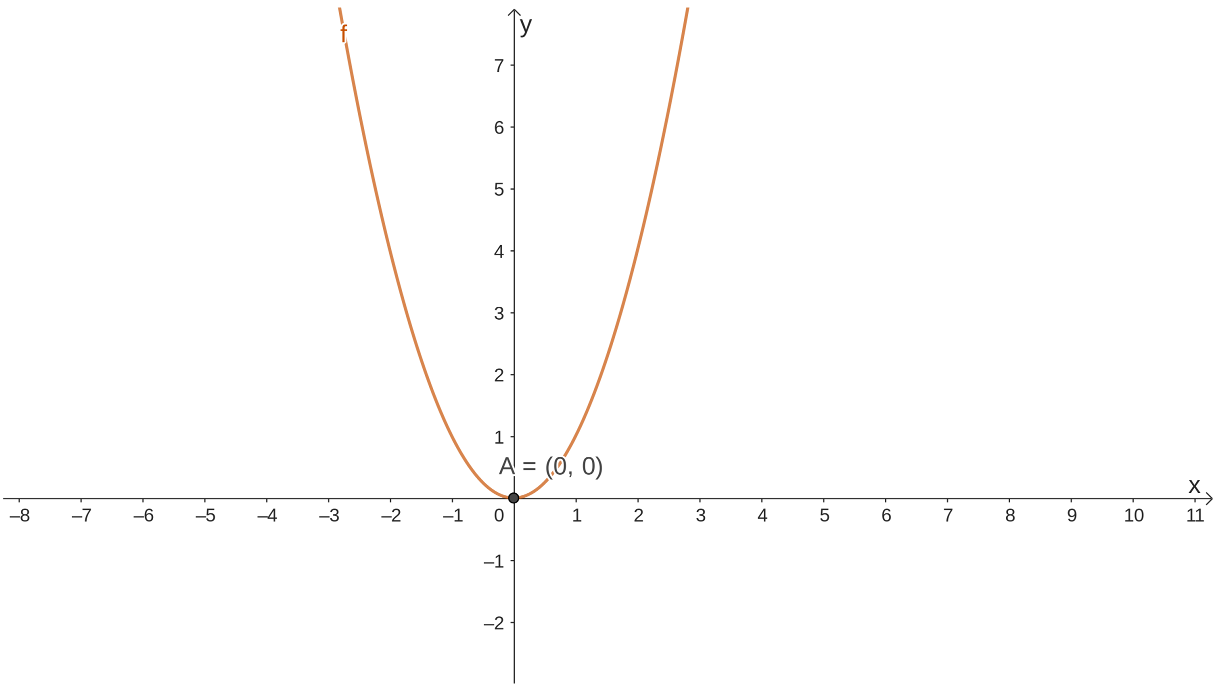

Figura 2.10: Gráfico de $f(x) = x^2$

Exemplo 2.3.5. *O ponto de máximo de $f(x) = 1 - x^2$ é $x = 0$ e o valor máximo de f é 1, pois $f(x) = 1 - x^2 \leq 1 = f(0)$.*

Como descrito na Figura 2.11 abaixo, a função atinge seu valor máximo em $x = 0$, que é o ponto de máximo, pois é nesse ponto que a função alcança o maior valor, ou seja, $f(0) = 1$.

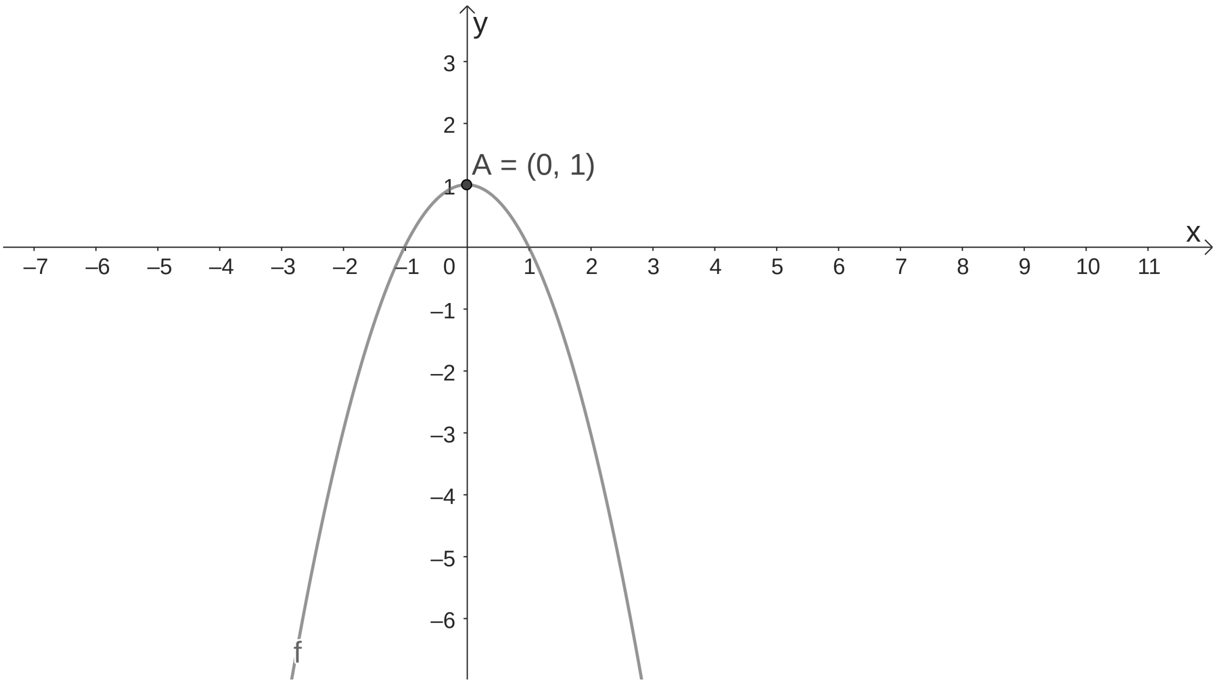

Figura 2.11: Gráfico de $f(x) = 1 - x^2$

Na sequência iremos estudar o máximo e mínimo da função quadrática usando apenas a forma canônica e sem o uso de derivadas nem conhecimento avançado de cálculo diferencial.

Teorema 2.3.2. *Seja a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. O ponto de máximo ou de mínimo de f é dado por $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e seu valor máximo ou mínimo é dado por $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$.*

Demonstração. Da Proposição 2.3.1 temos $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$. Se $a > 0$, temos $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Assim, $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} \geq \dfrac{-\Delta}{4a} = f(x_v)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo de f e x_v ponto de mínimo.
Se $a < 0$, temos $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$. Assim, $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} \leq \dfrac{-\Delta}{4a} = f(x_v)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $y_v = \dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo de f e x_v ponto de máximo.
Concluindo a prova do teorema. ■

Observação 2.3.1. *Motivou -se usar a letra v subescrita, pois conforme as figuras abaixo, o ponto e o valor seja de máximo ou de mínimo, correspondem as coordenadas do vértice do gráfico (parábola) de f.*

Podemos visualizar graficamente conforme apresentado na Figura 2.12:

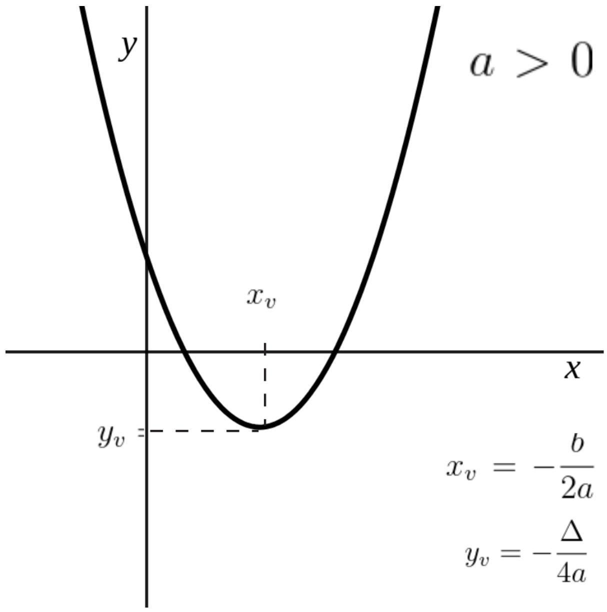

Figura 2.12: Ilustração gráfica do mínimo de uma função quadrática

Na Figura 2.12, apresentamos a parábola que representa o gráfico da função quadrática $f(x) = ax + bx + c$ com $a > 0$, cuja concavidade é voltada para cima e possui como vértice o ponto $V = (x_v, y_v)$, as coordenadas de V correspondem ao ponto de mínimo e valor mínimo de f, respectivamente.

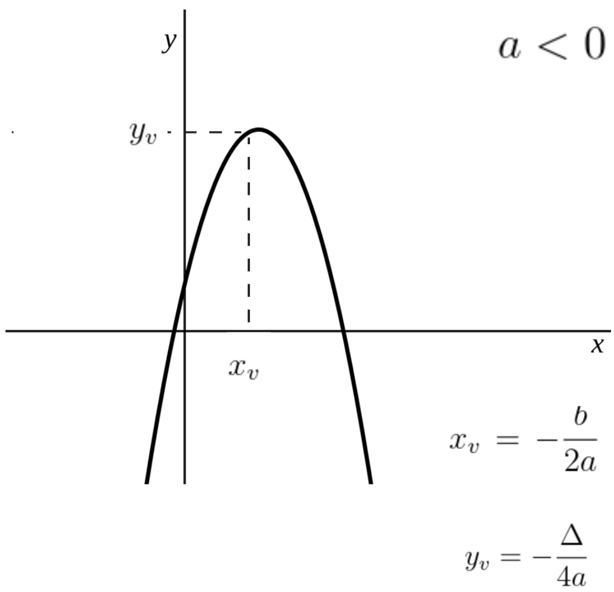

Figura 2.13: Ilustração gráfica do máximo de uma função quadrática.

Na Figura 2.13, apresentamos a parábola que representa a função quadrática $f(x) = ax + bx + c$ com $a < 0$, cuja concavidade é voltada para baixo e possui como vértice o ponto $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, as coordenadas de V neste caso, correspondem ao ponto de máximo e valor máximo de f, respectivamente.

A seguir, apresentamos alguns exemplos que podem ser resolvidos fazendo uso do Teorema 2.3.2.

Exemplo 2.3.6. *Um agricultor possui* 16 *metros de arame para cercar terrenos no formato retangular, quais as dimensões - de comprimento e largura - máximas de um terreno neste formato para o qual a área cercada seja máxima?*

Solução. Sejam x e y as dimensões do terreno no formato retangular. Podemos dizer que:

$$2x + 2y = 16 \tag{2.4}$$

Seja A a área do terreno dada por:

$$A = x.y \tag{2.5}$$

De 2.4, $x + y = 8 \implies y = 8 - x$, substituindo em 2.5 encontramos $A(x) = x.(8 - x) = -x^2 + 8x$ representa a área. Devemos buscar o ponto de máximo e o valor máximo da função $A(x) = -x^2 + 8x$.

De acordo com o Teorema 2.3.2, o ponto $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ é candidato a ponto de máximo ou de mínimo de $A(x)$. Como em $A(x)$ temos $a = -1$ e $b = 8$, então o candidato a ponto de máximo ou de mínimo é $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8}{-2} = 4$. Além disso, como $a = -1 < 0$, podemos afirma que $x_v = 4$ é ponto de máximo de A. Logo, as dimensões do terreno para as quais a área seja máxima são: $x = 4$ e $y = 8 - 4 = 4$ ou $y = 4$.

Analisando graficamente a seguir temos:

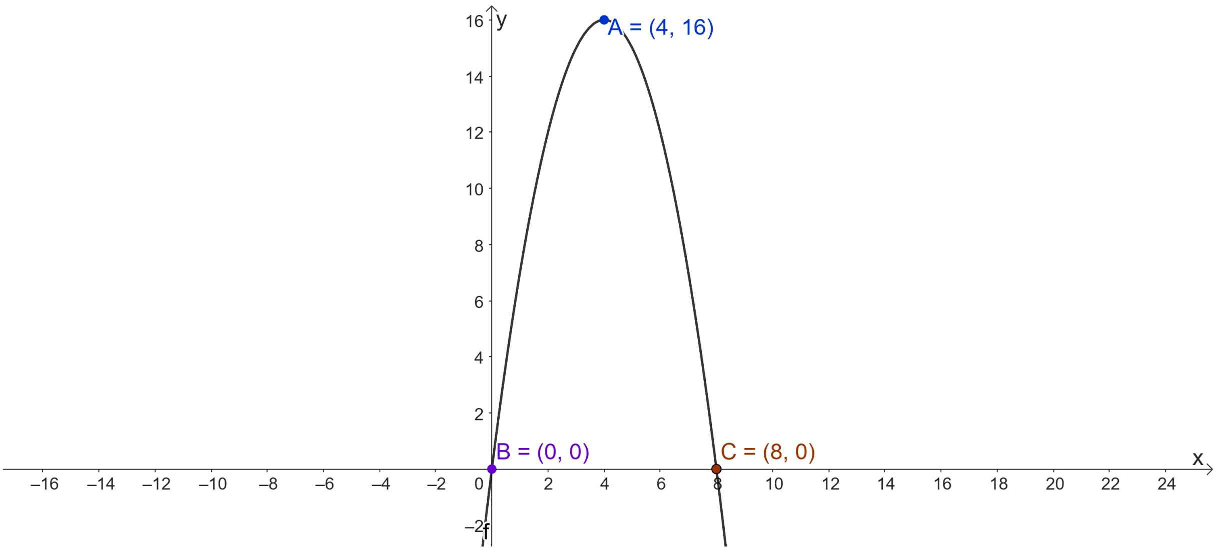

Figura 2.14: Gráfico de $A(x) = x.(8 - x)$

Note que, a função atinge valor máximo igual a 16 para $x = 4$, isto é, o ponto de máximo de $A(x)$ é $x = 4$, e o valor máximo é $A(x) = 16$, confirmando graficamente que as dimensões do terreno para as quais a área seja máxima são: $x = 4$ e $y = 8 - 4 = 4$ ou $y = 4$.

□

Exemplo 2.3.7. *[17, Problema R5. Cap 7, p. 206] Sabe-se que, sob certo ângulo de lançamento, a altura h atingida por uma pedra, em metro, em função do tempo t, em décimo de segundo, é dada por $h(t) = \dfrac{-t^2}{60} + t$.*

a) Em quanto tempo, após o lançamento, a pedra atinge o solo, suposto no mesmo plano horizontal de onde ela foi lançada?

b) Qual a altura máxima atingida pela pedra em relação ao plano horizontal de onde foi lançada? e em quanto tempo, após o lançamento, a mesma atinge a altura máxima?

Solução. a) Nesse caso podemos relacionar o tempo em que a pedra atinge o solo com o tempo em que a altura é zero. Desse modo, podemos dizer que corresponde aos zeros da função. Fazendo $h(t) = 0$, temos: $h(t) = \dfrac{-t^2}{60} + t = 0$, ao resolvermos encontramos $t = 0$ ou $t = 60$ são as raízes ou zeros de $h(t)$. A raiz positiva, isto é, $t = 60$ indica o tempo em que a pedra atinge o solo após o lançamento.

b) A altura máxima atingida corresponde a ordenada do vértice V da parábola que é o gráfico da função: $h(t)_v = -\dfrac{\Delta}{4a} \implies h(t)_v = 15$.
Bem como, o tempo para que a pedra atinja a altura máxima corresponde a abcissa do do vértice V, dada por: $t_v = -\dfrac{b}{2a} \implies t_v = 30$.

Dessa forma, concluímos que a altura máxima é 15 metros, e o tempo para que a pedra atinja a altura máxima é de 30 décimos de segundos, em outras palavras temos o valor máximo e o ponto de máximo da função.

□

Exemplo 2.3.8. *[17, Problema R6. Cap 7, p. 207] Uma indústria produz diariamente x kL (quilolitro) de óleo de milho, com $2 \leq x \leq 7$. O custo y de produção diário, em real por quilolitro de óleo produzido, é dado pela função $y = 40x^2 - 400x + 2600$. Qual deve ser a produção diária para que o custo seja mínimo? E qual é o custo diário mínimo?*

Solução. A produção diária para que o custo seja mínimo, corresponde a abcissa do do vértice V, dada por: $x_v = -\dfrac{b}{2a} \implies x_v = 5$.

Além disso, o custo mínimo corresponde a ordenada do vértice V da parábola gráfico da função: $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} \implies y_v = 1600$.

Dessa forma, concluímos que a custo mínimo é de $R\$1600,00$, e a produção diária para a qual o custo é mínimo é de 5 kL, em outras palavras temos o valor mínimo e o ponto de mínimo da função. Veja na Figura 2.15 que o valor mínimo correspondente é de fato 1600.

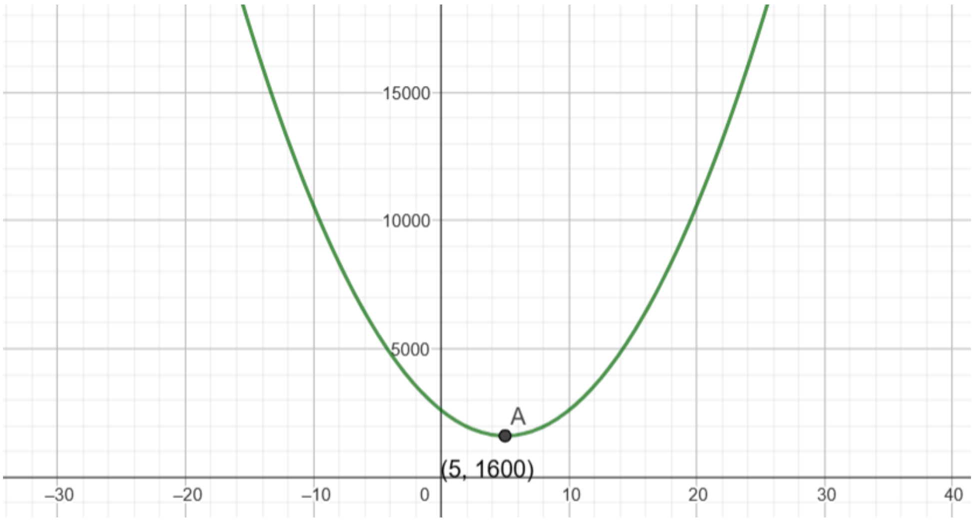

Figura 2.15: Gráfico de $y = 40x^2 - 400x + 2600$

$\square$

O ponto A em destaque no gráfico de coordenadas $(5, 1600)$ indica o vértice da parábola da função quadrática que modela o problema em destaque, onde seu valor mínimo é 1600 e cujo ponto de mínimo é 5.

2.3.2 Estudo do comportamento do gráfico da função quadrática através de seus coeficientes

Os coeficientes de uma função quadrática, conforme apresentado na Definição 2.3.1, desempenham um papel fundamental na determinação das características do seu gráfico. Cada coeficiente influencia diferentes aspectos da parábola associada à função: o coeficiente a define a concavidade e a taxa de crescimento ou decrescimento da curva; o coeficiente b afeta a posição do vértice e a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de intersecção com o eixo y; e o coeficiente c representa a interseção do gráfico com o eixo y e a medida que c varia, o gráfico de f se movimenta verticalmente. Portanto, analisar esses coeficientes nos permite compreender melhor o comportamento da função e interpretar suas propriedades geométricas de maneira mais clara e precisa.

Para visualizar o comportamento do gráfico de uma função quadrática, basta digitar `ax^2+bx+c` no GeoGebra, apertar a tecla ENTER e depois variar os coeficientes a, b e c.

A seguir, daremos mais detalhes sobre a função de cada coeficiente sobre o coportamento do gráfico da função quadrática.

- O coeficiente a determina a concavidade da parábola, como descrito anteriormente. A Figura 2.16 abaixo ilustra claramente o comportamento da função quadrática $f(x) = ax^2 + 3x + 2$ à medida que o coeficiente a varia.

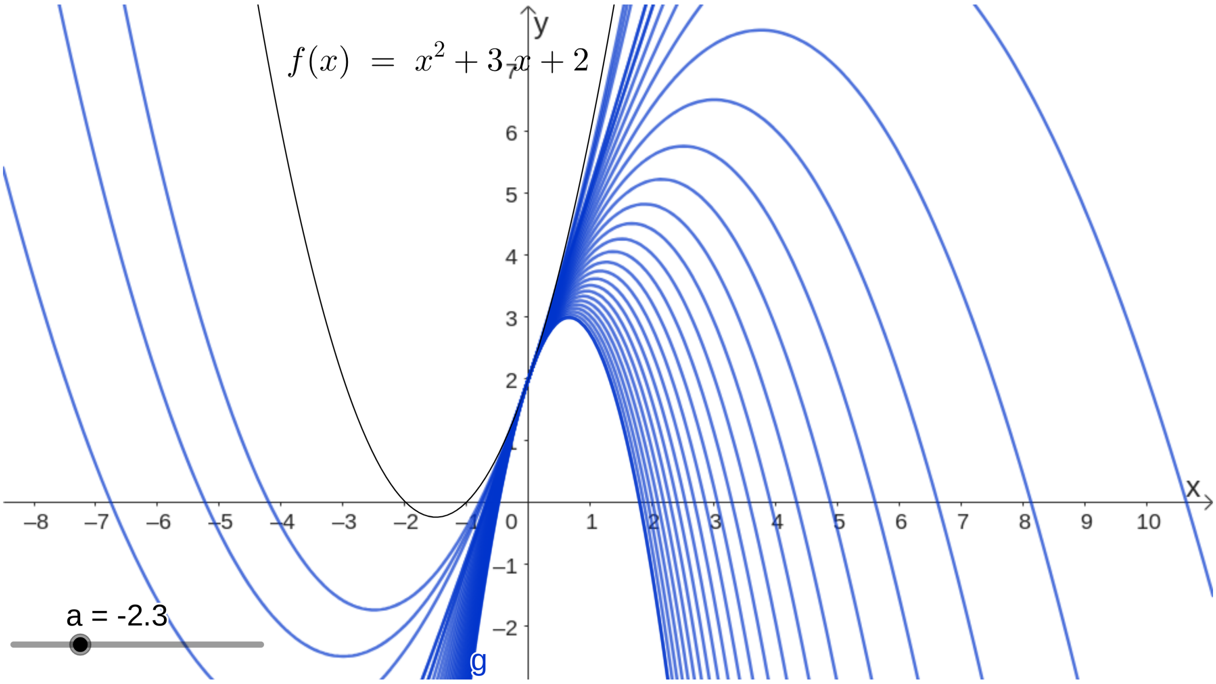

Figura 2.16: Gráfico construído usando a ferramenta do controle deslizante no GeoGebra

Note que à concavidade muda a medida que o a varia assumindo valores positivos ou negativos.

Além disso, podemos perceber que, à medida que $|a|$ aumenta, a função cresce ou decresce mais rapidamente, tornando a concavidade da parábola mais fechada. Por outro lado, quando $|a|$ diminui, a abertura da concavidade aumenta, fazendo com que o gráfico da função se aproxime de uma reta à medida que a tende a zero. Mas por que isso acontece? A observação da variação do coeficiente a a permite compreender como ele afeta a concavidade e a abertura da parábola, sendo um elemento-chave para explorar diferentes configurações dessa função.

Observe que, o coeficiente a sendo 0 a função deixa de ser uma função quadrática passando a ser uma função afim cujo gráfico é uma reta como mostra a Figura 2.17 a seguir.

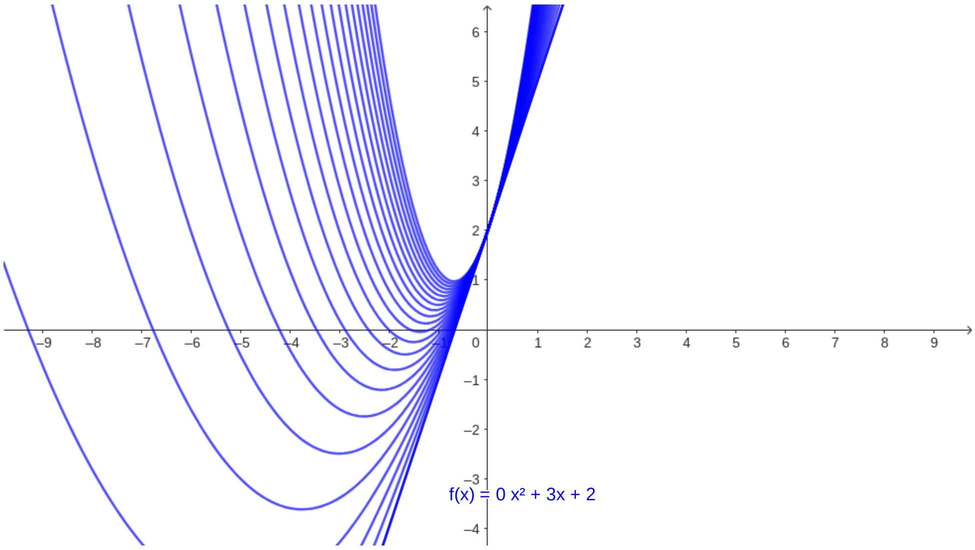

Figura 2.17: Ilustração gráfica do caso $a = 0$

Veja que, no gráfico apresentado na Figura 2.18 abaixo, conseguimos visualizar melhor a reta que representa o gráfico de f quando $a = 0$.

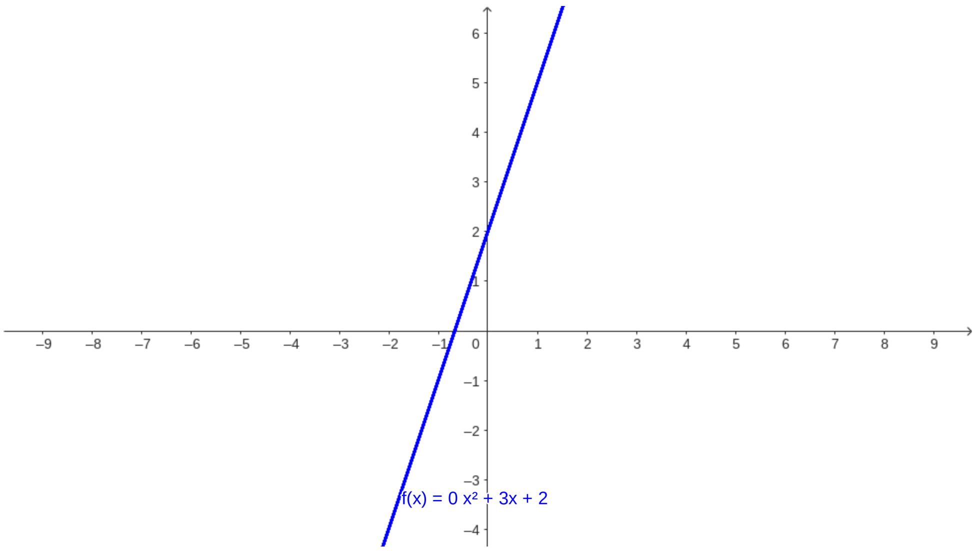

Figura 2.18: Gráfico de f quando $a = 0$.

- O coeficiente b está relacionado à inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de interseção com o eixo Y.

Antes de darmos continuidade à análise do comportamento de f através de seus coeficientes, falaremos um pouco sobre coeficiente angular e reta tangente ao gráfico de uma função quadrática.

Dizemos que uma reta r é tangente ao gráfico de uma função quadrática f quando há um único ponto de interseção entre r e f e, além disso, o gráfico da função f fica inteiramente contido em apenas um dos semiplanos determinados pela reta r. Ver Almeida [1], Definição

3.3.3, p. 43. Em outras palavras, isso significa que a interseção entre r e f possui um único ponto e que r não é paralela ao eixo Y.

Diante dessa definição, surge a seguinte pergunta: como saber se uma reta r é tangente ao gráfico de uma função quadrática?

Para determinar se uma reta r é tangente ao gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, verificamos se elas possuem exatamente um ponto em comum e se r não é paralela ao eixo Y. Isso pode ser feito da seguinte forma.

Para que a reta r não seja paralela ao eixo Y, sua equação pode ser escrita da seguinte forma: $y = mx + n$.

Para encontrar os pontos de interseção entre a reta e a parábola, igualamos as equações:

$$ax^2 + bx + c = mx + n.$$

Reorganizando os termos:

$$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0.$$

Essa é uma equação do segundo grau na variável x. Para que a reta seja tangente ao gráfico da função quadrática, essa equação deve ter **uma única solução real**, ou seja, seu **discriminante** deve ser igual a zero. O discriminante é dado por:

$$\Delta = (b - m)^2 - 4a(c - n).$$

Se $\Delta = 0$, a equação tem uma única solução, o que significa que a reta toca a parábola em um único ponto e, portanto, é tangente ao gráfico da função quadrática.

O **coeficiente angular** de uma reta, também chamado de **inclinação da reta**, indica a taxa de variação de y em relação a x. Ele determina o quão inclinada a reta está e o sentido do seu crescimento.

Matematicamente, dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencentes à reta, o coeficiente angular m é calculado por:

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se a equação da reta estiver na forma reduzida $y = mx + n$, então m é justamente o coeficiente angular.

Interpretação geométrica:

- Se $m > 0$, a reta é crescente (sobe da esquerda para a direita).

- Se $m < 0$, a reta é decrescente (desce da esquerda para a direita).

- Se $m = 0$, a reta é horizontal.

- Se a reta for vertical, o coeficiente angular não está definido, pois a variação de x é zero, tornando a fração indefinida.

Retomaremos agora a análise do coeficiente b.

Quando $b > 0$ o gráfico de f corta o eixo Y no sentido crescente, ver Figura 2.19.

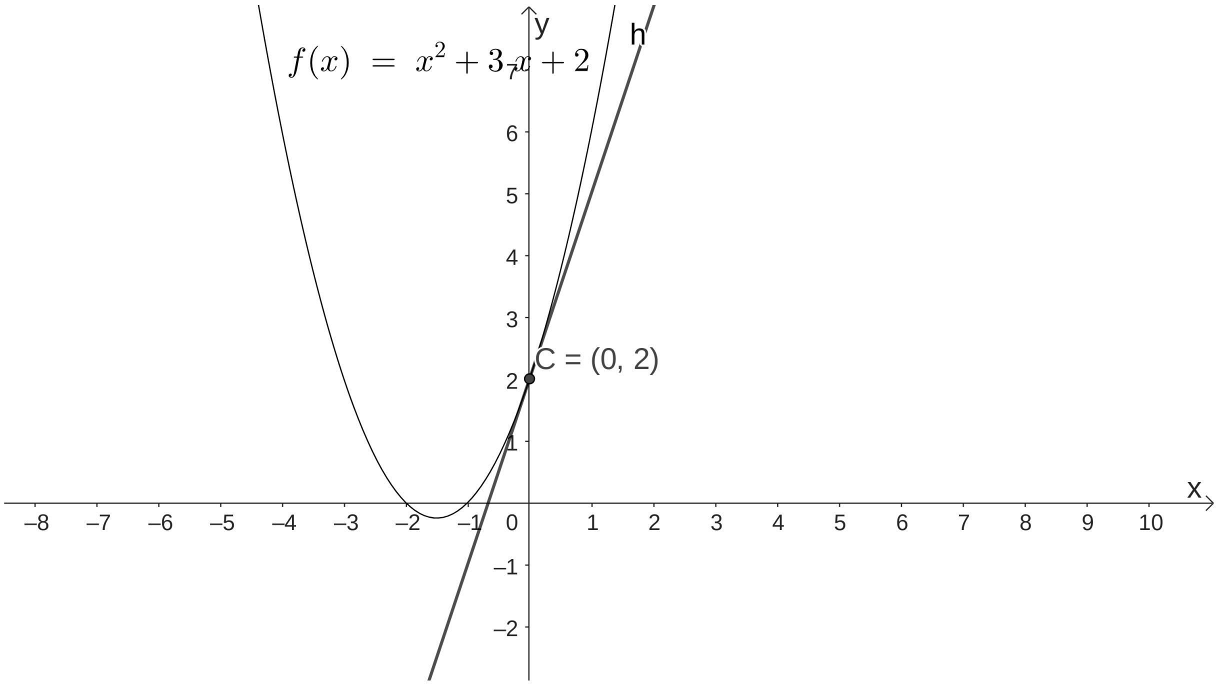

Figura 2.19: Gráfico da função quadrática quando $b > 0$

A reta h é a reta tangente ao gráfico de f e aponta no sentido positivo do eixo Y , como ilustrado na Figura 2.19 . O valor de b é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função quadrática no ponto $(0, c)$.

Quando $b < 0$ o gráfico de f corta o eixo Y no sentido decrescente, ver Figura2.20.

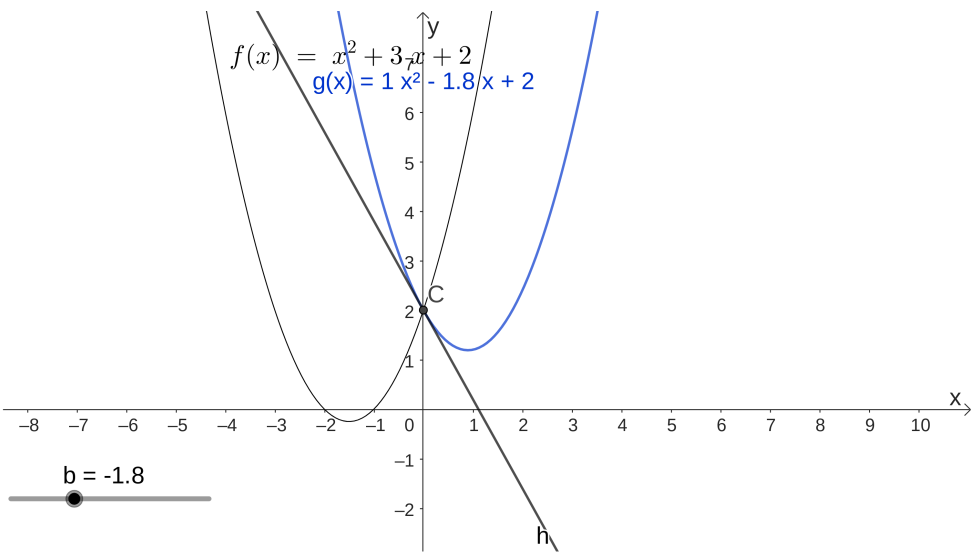

Figura 2.20: Gráfico da função quadrática g quando $b < 0$

Quando $b = 0$ a reta tangente é paralela ao eixo X, isto é, seu coeficiente angular é 0, de fato isso ocorre quando o vértice da parábola possui coordenadas $(0, c)$.

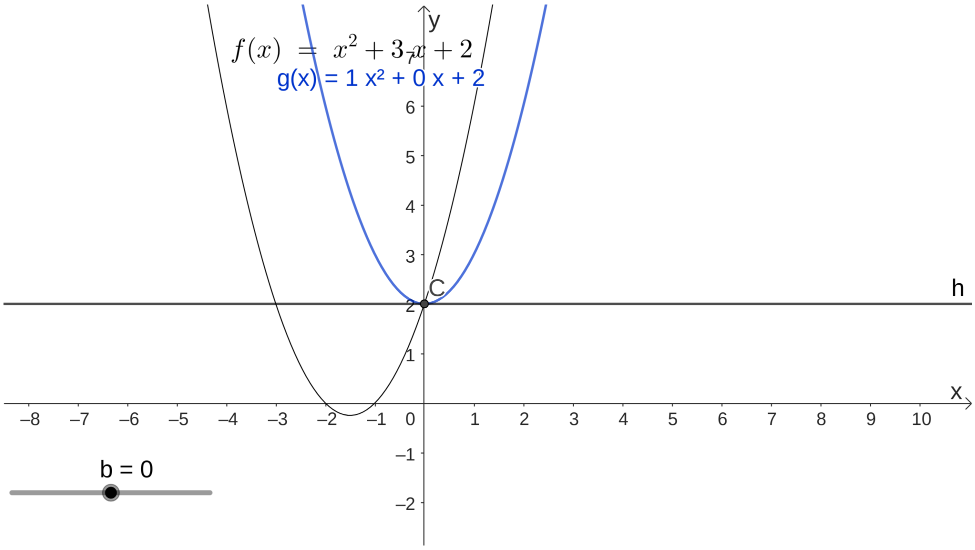

Figura 2.21: Gráfico da função quadrática g quando $b = 0$

Seja $y = mx + n$ a equação da reta h tangente ao gráfico de f no ponto $(0, c)$. Assim, temo que $c = m0 + n = n$, lodo $n = c$ e assim a reta h tem equação $y = mx + c$. Para que h seja tangente ao gráfico de f é necessário a reta e o gráfico de f tenha um único ponto em comum, ou seja, é necessário que a equação $ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ tenha uma única solução, onde isso acontece de $\Delta = (b-m)^2 - 4a(c-n)$, ou seja, se $\Delta = (b-m)^2$ pois $c = n$, o que implica $b = m$. Portante b é o coeficiente angular da esta h tangente ao gráfico de f no ponto $(0, c)$.

Para visualizar geometricamente por meio do GeoGebra, proceda da seguinte forma:

- Abra o GeoGebra Clássico e digite `ax^2 + bx + c`, pressionando Enter em seguida.
- Em seguida, digite `bx + c` e pressione Enter novamente.
- Varie o coeficiente b e observe o que acontece com o gráfico da parábola em relação à reta.

Essa exploração permite compreender melhor o papel do coeficiente b na posição e orientação do gráfico da função quadrática.

- O coeficiente c corresponde ao ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Y e, à medida que c varia, o gráfico de f se desloca verticalmente. É fácil ver que o gráfico de f intersecta o eixo Y quando $x = 0$, ou seja, o ponto $(0, c)$ pertence ao gráfico de f. Como ilustrado a seguir, a variação de c provoca um deslocamento vertical da parábola.

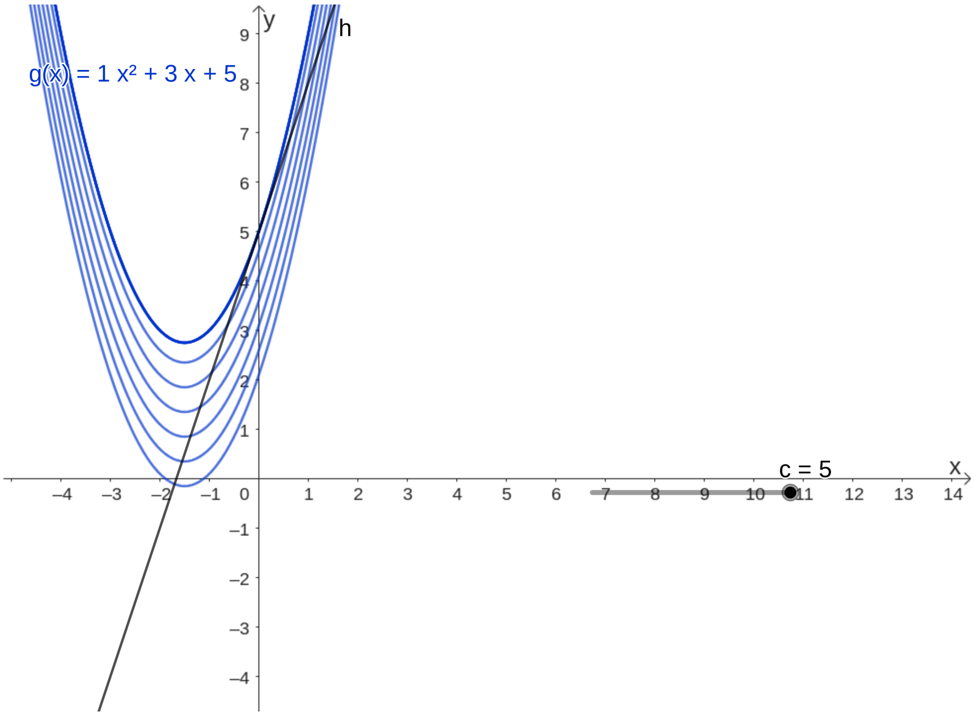

Figura 2.22: Variação do Coeficiente c da Função quadrática no intervalo $[2, 5]$

Note que, na Figura 2.22 o coeficiente c cresce no intervalo $[2, 5]$ o que produziu no gráfico uma trajetória no sentido positivo do eixo Y, trajetória essa destacada no gráfico.

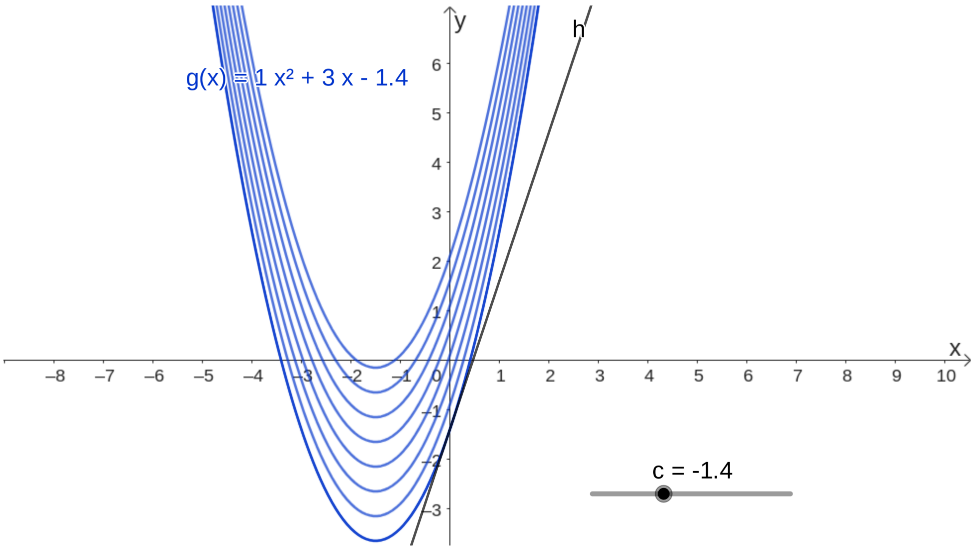

Figura 2.23: Variação do Coeficiente c da Função quadrática no intervalo $[-1.4, 2]$

Do mesmo modo, a Figura 2.23 expressa a trajetória do gráfico a medida que o parâmetro c decresce no intervalo $[-1.4, 2]$, em que o gráfico se desloca verticalmente no sentido negativo do eixo Y.

A partir da análise geométrica realizada anteriormente com base nos coeficientes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos observar que, ao manter o coeficiente a fixo e variar os coeficientes b e c, o gráfico de f sofre apenas transformações por translação. Ou seja, o gráfico muda de posição no plano cartesiano, mas mantém sua forma original.

Esse comportamento pode ser comprovado através da forma canônica:

Sejam as funções

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \quad \text{com } \Delta = b^2 - 4ac,$$

e

$$g(x) = a\left(x + \frac{\tilde{b}}{2a}\right)^2 - \frac{\tilde{\Delta}}{4a}, \quad \text{com } \tilde{\Delta} = \tilde{b}^2 - 4a\tilde{c}.$$

Seus respectivos gráficos são dados por

$$G_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\big\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right\},$$

e

$$G_g = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(x)\big\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = a\left(x + \frac{\tilde{b}}{2a}\right)^2 - \frac{\tilde{\Delta}}{4a}\right\}.$$

Nosso objetivo é mostrar que G_f e G_g têm a mesma forma geométrica, diferindo apenas por uma translação.

Definamos os parâmetros de translação:

$$a_0 = \frac{\tilde{b} - b}{2a}, \quad c_0 = \frac{\Delta - \tilde{\Delta}}{4a}.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} g(x) &= a\left(x + \frac{\tilde{b}}{2a}\right)^2 - \frac{\tilde{\Delta}}{4a} \\ &= a\left((x + a_0) + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a} - c_0\right) \\ &= f(x + a_0) + c_0. \end{aligned}$$

Portanto, temos a relação:

$$g(x) = f(x + a_0) + c_0.$$

Isso significa que o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f por uma translação. Em termos de conjuntos:

$$G_g = \{(x, y) = (u - a_0, f(u) + c_0) : (u, f(u)) \in G_f\}.$$

Como a translação é uma transformação que preserva a forma geométrica do gráfico, concluímos que os gráficos G_f e G_g representam a mesma parábola em posições diferentes no plano.

Para visualizar geometricamente por meio do GeoGebra, siga os passos abaixo:

– Abra o GeoGebra Clássico e digite `ax^2 + bx + c`, pressionando Enter em seguida.
– Varie o coeficiente c e observe o que acontece com o gráfico da parábola.

Essa exploração permite compreender melhor o papel do coeficiente c, que é responsável por deslocar a parábola verticalmente no plano cartesiano, sem alterar sua concavidade ou inclinação.

O estudo do comportamento do gráfico da função quadrática por meio de seus coeficientes é uma abordagem essencial no ensino da Matemática no Ensino Médio, pois permite que os alunos desenvolvam uma compreensão mais intuitiva e visual das propriedades dessa função. Ao relacionar os coeficientes à forma e posição do gráfico, os estudantes conseguem perceber padrões e regularidades que facilitam a interpretação geométrica e algébrica das equações quadráticas. Além disso, observa-se que o uso de ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, pode contribuir para tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo, favorecendo a experimentação e estimulando a análise crítica por parte dos estudantes. Dessa forma, essa abordagem não apenas reforça conceitos matemáticos fundamentais, mas também estimula o raciocínio lógico e a resolução de problemas, competências essenciais para o desenvolvimento acadêmico dos alunos.

2.4 Função Cúbica

Nesta seção, estudaremos o comportamento da função cúbica de forma semelhante ao que foi feito com a função quadrática. No entanto, devido à maior complexidade da função cúbica - que pode apresentar mudanças de concavidade e pontos de inflexão — utilizaremos o conceito de derivadas, ainda que de maneira intuitiva e discreta, para analisar seus intervalos de crescimento, decrescimento e outras características relevantes do gráfico.

Definição 2.4.1. *Chamamos de Função Cúbica a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *com* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *com* $a \neq 0$.

Algo curioso a respeito da função cúbica, é que seu gráfico pode variar de forma, a depender dos coeficientes a, b, c, d, podendo ficar mais alongado ou menos alongado, mais curvilíneo ou menos o que contrasta bastante ao compararmos com a função quadrática por exemplo em que a mesma preserva a aparência do gráfico mudando apenas o local do plano cartesiano e pontos de intersecção com os eixos coordenados a medida em que os seus coeficientes mudam. Para podermos analisar o comportamento da função cúbica geometricamente, é válido ressaltar como por exemplo podemos encontrar os zeros dela.

Inicialmente realizamos o estudo acerca dos zeros de f, tomando $f(x) = 0$ obtendo uma equação cúbica cujas raízes são encontradas através da fórmula de Cardano - Tartaglia.

Partindo da forma reduzida do polinômio cúbico, dada por

$$g(t) = t^3 + pt + q,$$

conforme demonstrado em [27, p.38], onde:

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \quad \text{e} \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a},$$

os zeros da função original $f(x)$ podem ser obtidos a partir das raízes de $g(t)$, por meio da substituição:

$$x = t - \frac{b}{3a}.$$

A seguir, utilizaremos um exemplo de função cúbica para explorar e determinar os zeros de $f(x)$.

Exemplo 2.4.1. *Considerando a função $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$, determine os zeros de f.*

Solução. Note que, neste caso, os valores dos coeficientes são $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$ e $d = -1$. Fazendo $f(x) = 0$, obtemos a seguinte equação cúbica:

$$x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0.$$

Utilizaremos a fórmula apresentada anteriormente para encontrar as raízes. Para isso, primeiramente calculamos os valores de p e q, os quais serão utilizados para escrever a forma reduzida da equação.

Calculando:

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = \frac{1}{1} - \frac{3^2}{3 \cdot 1^2} = 1 - 3 = -2,$$

portanto, $p = -2$;

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{2 \cdot 3^3}{27 \cdot 1^3} - \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 1^2} + \frac{-1}{1} = 2 - 1 - 1 = 0,$$

logo, $q = 0$.

Dessa forma, a equação reduzida correspondente é:

$$t^3 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t(t^2 - 2) = 0,$$

cujas raízes são:

$$t = 0, \quad t = \sqrt{2}, \quad t = -\sqrt{2}.$$

Agora, utilizamos a relação $x = t - \frac{b}{3a}$ para obter as raízes de $f(x)$:

$$\begin{aligned}
&\text{Para } t = 0 \Rightarrow x_1 = 0 - \frac{3}{3 \cdot 1} = -1;\\
&\text{Para } t = \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41;\\
&\text{Para } t = -\sqrt{2} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{2} - 1 \approx -2{,}41.
\end{aligned}$$

□

Observe agora como ficam essas raízes no gráfico de f, ver Figura 2.24 a seguir:

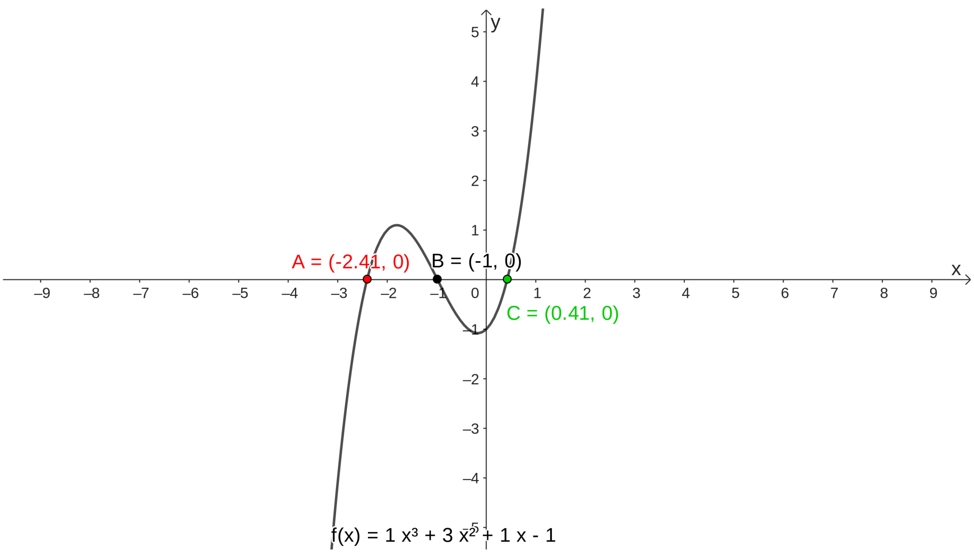

Figura 2.24: Representação Gráfica das raízes de $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$

Vale ressaltar, conforme a Figura 2.24, que as abscissas dos pontos A, B e C correspondem aos zeros da função f, obtidos por meio da forma reduzida, conforme mostrado anteriormente.

Analisando uma equação polinomial de grau 3, podemos dizer que há algumas possibilidades para suas raízes:

1. Possuir uma raiz real com multiplicidade três: Neste caso, o gráfico de uma função cúbica cujos zeros são obtidos a partir de uma equação cúbica com tal característica interceptará o eixo x em um único ponto. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 2.4.2. *Determinar os zeros ou raízes de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$

Solução. Encontrar os zeros de f é encontrar as raízes de $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$.

Podemos utilizar a fórmula de Cardano, ou podemos fatorar a expressão do seguinte modo:

Note que, a expressão pode ser escrita como $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. De fato,

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3.x^2.2 + 3.x.2^2 - 2^3 = (x - 2)^3 = (x - 2).(x - 2).(x - 2) = 0$$

Isto é, suas raízes são: $x_1 = x_2 = x_3 = 2$.

Possuindo como representação gráfica a Figura 2.25 a seguir:

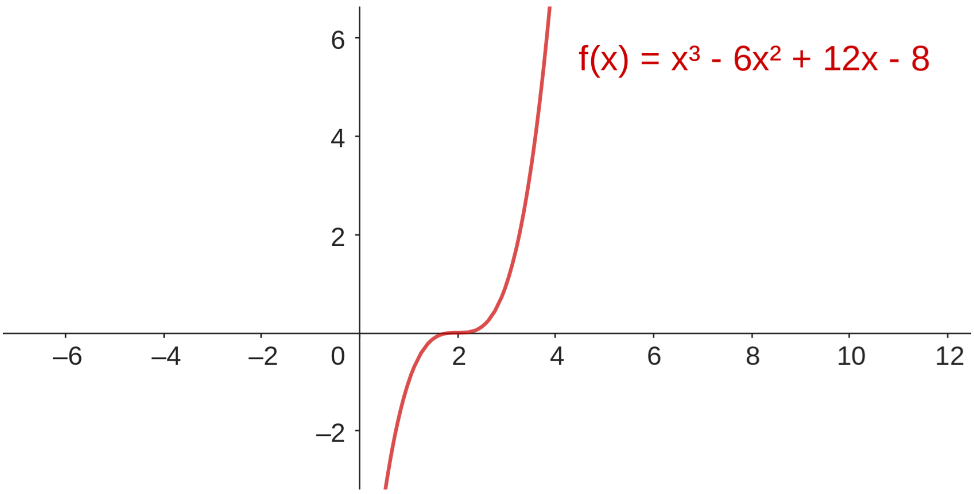

Figura 2.25: Representação Gráfica das raízes de $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

O fato de possuir raiz real com multiplicidade 3, significa que o gráfico passa no eixo das abscissas em um único ponto. $\square$

2. Possuir três raízes reais, sendo uma delas com multiplicidade dois: neste caso, o gráfico da função cúbica, cujos zeros são obtidos a partir de uma equação cúbica com essa característica, interceptará o eixo X em dois pontos distintos.

Exemplo 2.4.3. *Determinar os zeros da função* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Solução. Observe que $x_1 = -1$ zera f, usando o dispositivo prático de Briot - Ruffini conseguiremos determinar as demais raízes de $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$.

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x + 1} = x^2 - 4x + 4$$

As raízes de

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

são as demais raízes de f. Veja que

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \implies (x-2)^2 = 0 \implies (x-2)(x-2) = 0,$$

portanto $x_2 = x_3 = 2$. Desse modo, os zeros de f são $x_1 = -1, x_2 = x_3 = 2$.

Na Figura 2.26, a seguir, mostraremos o comportamento geométrico desse tipo de função.

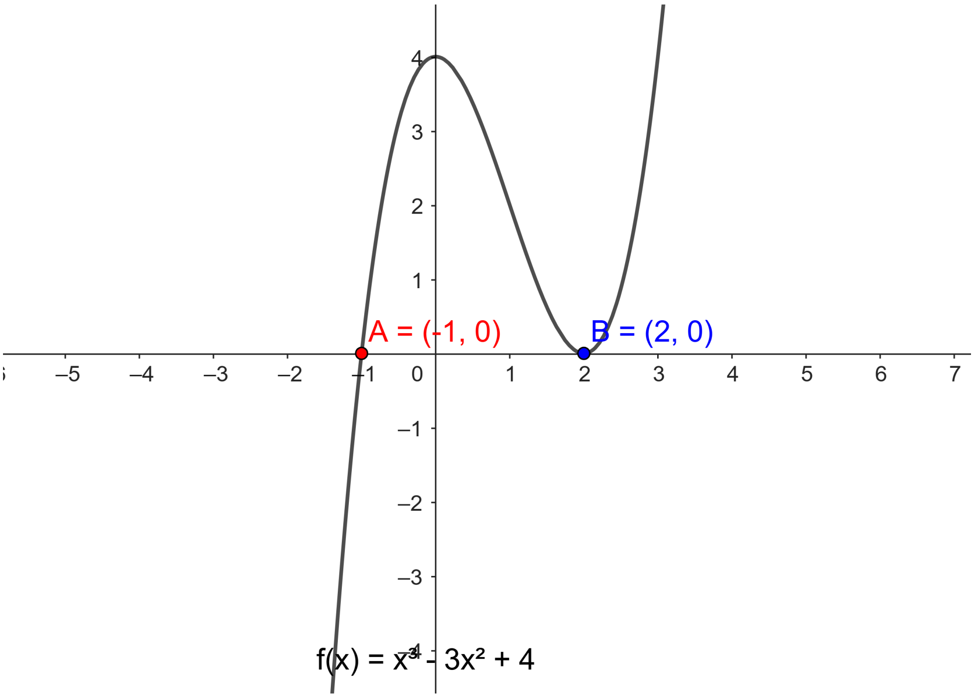

Figura 2.26: Representação Gráfica das raízes de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Na figura 2.26 o gráfico de f corta o eixo das abscissas em dois pontos distintos.

$\square$

3. Possuir três raízes reais distintas: Neste caso, o gráfico de uma função cúbica cujos zeros são obtidos a partir de uma equação cúbica com essa característica, interceptará o eixo X em três lugares distintos como visto no exemplo 2.4.1;

4. Uma raiz real e duas raízes complexas: Neste caso, o gráfico de uma função cúbica cujos zeros são obtidos a partir de uma equação cúbica desse tipo, interceptará o eixo X em um só ponto.

Exemplo 2.4.4. *Encontrar os zeros ou raízes da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$

Solução. Fazendo $f(x) = 0$, temos: $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$, usando a fórmula de Cardano, encontramos o seguinte:

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$$

portanto,

$$p = \frac{2}{1} - \frac{2^2}{3.1^2} = \frac{2}{3} \implies p = \frac{2}{3};$$

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

logo,

$$q = \frac{2.2^3}{27.1^3} - \frac{2.2}{3.1^2} + \frac{1}{1} = \frac{16}{27} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{16 - 36 + 27}{27} = \frac{7}{27} \implies q = \frac{7}{27}.$$

Dessa forma, a equação reduzida correspondente é:

$$t^3 + \frac{2}{3}t + \frac{7}{27} = 0 \tag{2.6}$$

De modo geral, as raízes da equação $t^3 + pt + q = 0$ serão encontradas a partir da dedução a seguir. Utilizaremos a ideia encontrada em [22]:

Em $t^3 + pt + q = 0$, considere $t = u + v \Rightarrow (u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$. Desenvolvendo a expressão, temos:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

A igualdade ocorre quando:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = \frac{-p}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \end{cases}$$

Note que podemos dizer que u^3 e v^3 são raízes de uma equação do tipo $w^2 - Sw + P = 0$. Neste caso, podemos escrever a equação relacionada como sendo $w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$. Aplicando a fórmula de Bhaskara, encontramos:

$$w = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4(1)\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2} = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{4p^3}{4 \cdot 27}} = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Desse modo:

$$w_1 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Em outras palavras, $w_1 = u^3 \Rightarrow u = \sqrt[3]{w_1}$ e $w_2 = v^3 \Rightarrow v = \sqrt[3]{w_2}$. O que nos dá $t = u + v$.

Aplicando esse resultado na equação 2.6, onde $p = \frac{2}{3}$ e $q = \frac{7}{27}$, temos:

$$w_1 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Desenvolvendo os valores de w_1 e w_2, encontramos:

$$t = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{3}$$

Isto é, substituindo em $x = t - \frac{b}{3}$ (ver [22]), temos:

$$x = \frac{-1}{3} - \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow x = -1$$

A raiz real da equação $x^3+2x^2+2x+1 = 0$ é $x_1 = -1$. As outras raízes podemos encontrá-las a partir do dispositivo prático de Briot-Ruffini, onde escrevemos:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x + 1} = x^2 + x + 1$$

As raízes dessa equação $x^2 + x + 1 = 0$ são as demais raízes ou zeros da função:

$$x_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{e} \quad x_3 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Portanto, as raízes da função $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ são:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad x_3 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

A seguir, temos o gráfico de f:

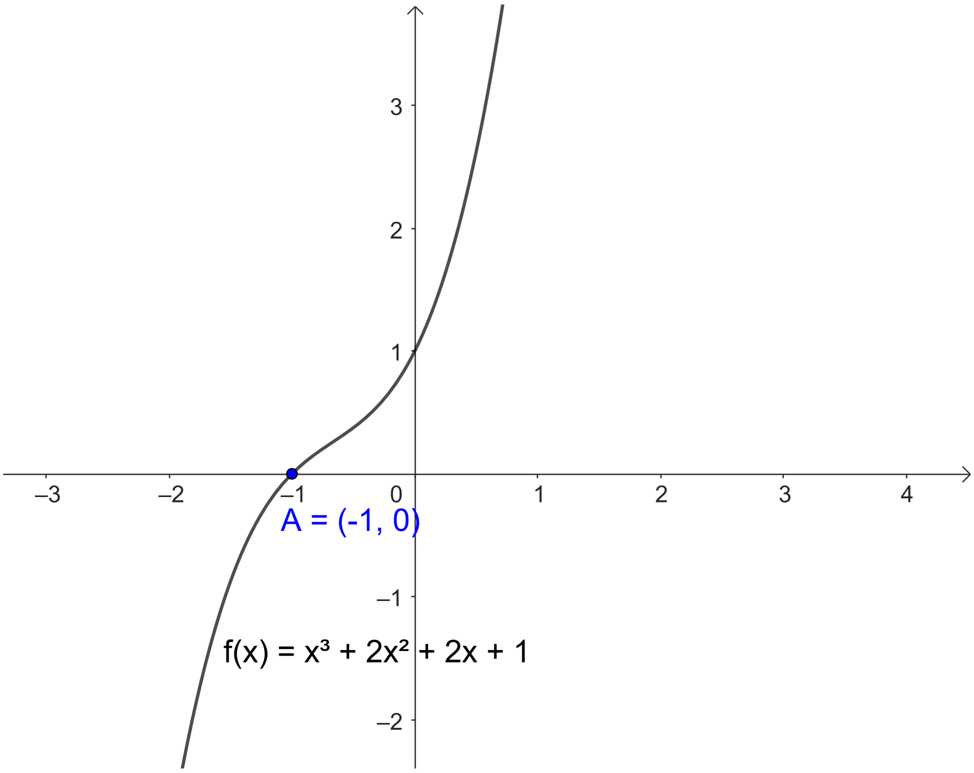

Figura 2.27: Representação gráfica das raízes de $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Vejamos que o gráfico intercepta o eixo X em apenas um ponto, característica observada em decorrência dos zeros da função.

□

Na subseção a seguir, analisaremos a influência dos coeficientes de uma função cúbica em seu comportamento. Para isso, utilizaremos o GeoGebra para ilustrar a importância da representação gráfica, facilitando a compreensão das variações no gráfico conforme os coeficientes são ajustados.

2.4.1 Estudo das propriedades da função do 3º grau através de seus coeficientes

Por meio do GeoGebra, podemos observar o comportamento do gráfico da função f à medida que seus coeficientes variam. Para realizar essa análise, consideramos $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

As figuras 2.28 e 2.29 abaixo ilustram como o gráfico da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se modifica à medida que o coeficiente a varia, enquanto os demais coeficientes permanecem fixos: $b = 3$, $c = 1$ e $d = -1$.

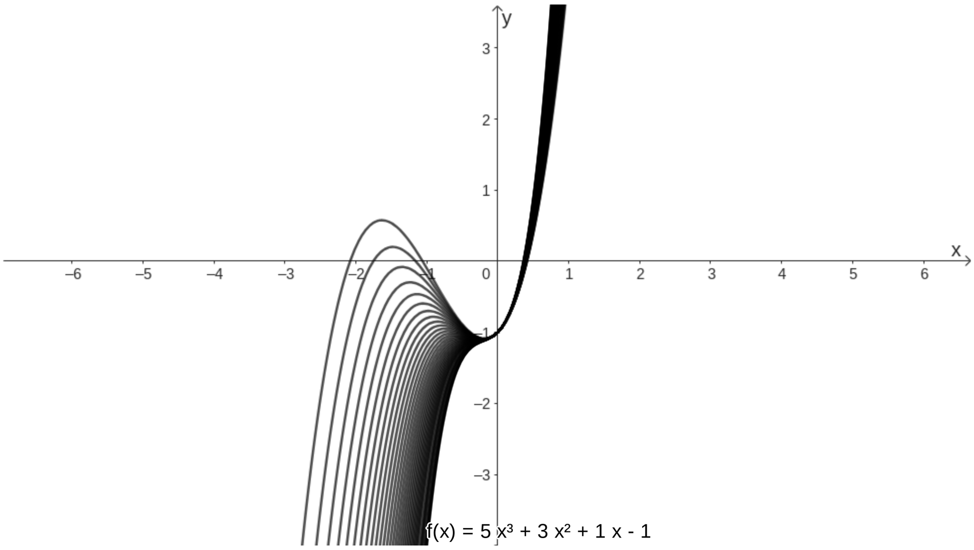

Figura 2.28: Gráfico da função $f(x) = ax^3 + 3x^2 + x - 1$ para valores de a no intervalo $[1, 5]$

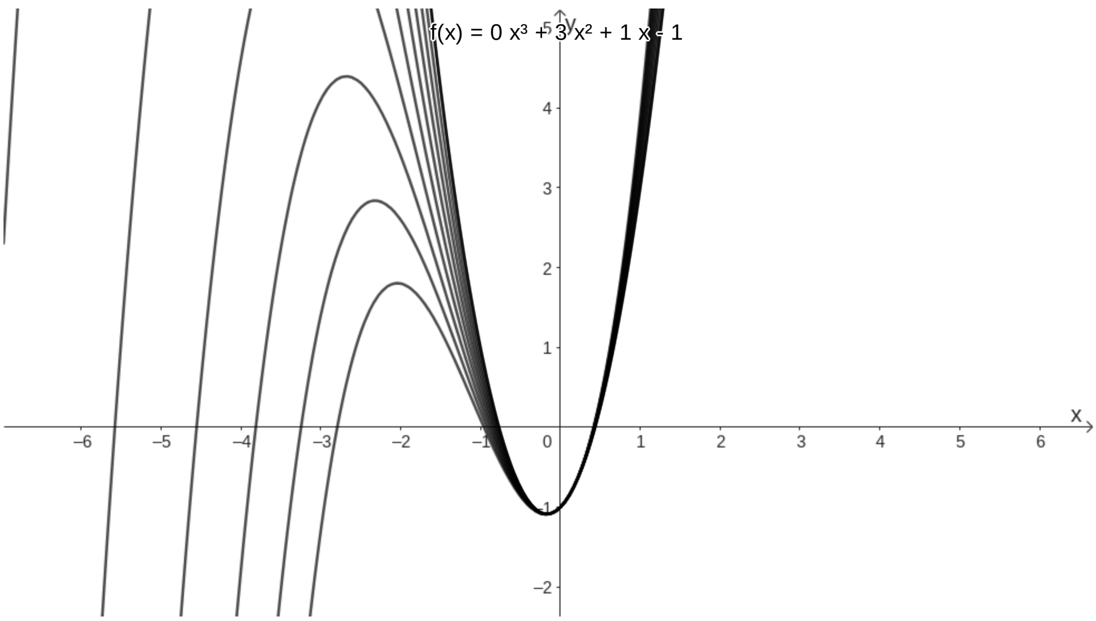

Figura 2.29: Gráfico da função $f(x) = ax^3 + 3x^2 + x - 1$ quando a varia no intervalo $[0, 1]$

A Figura 2.28 ilustra o comportamento do gráfico da função $f(x) = ax^3 + 3x^2 + x - 1$ para valores de a no intervalo $[1, 5]$. Já a Figura 2.29 mostra o gráfico da mesma função quando a varia no intervalo $[0, 1]$.

A Figura 2.30 a seguir mostra o comportamento do gráfico da função $f(x) = ax^3 + 3x^2 + x - 1$, agora com a variando no intervalo $[-5, 0]$.

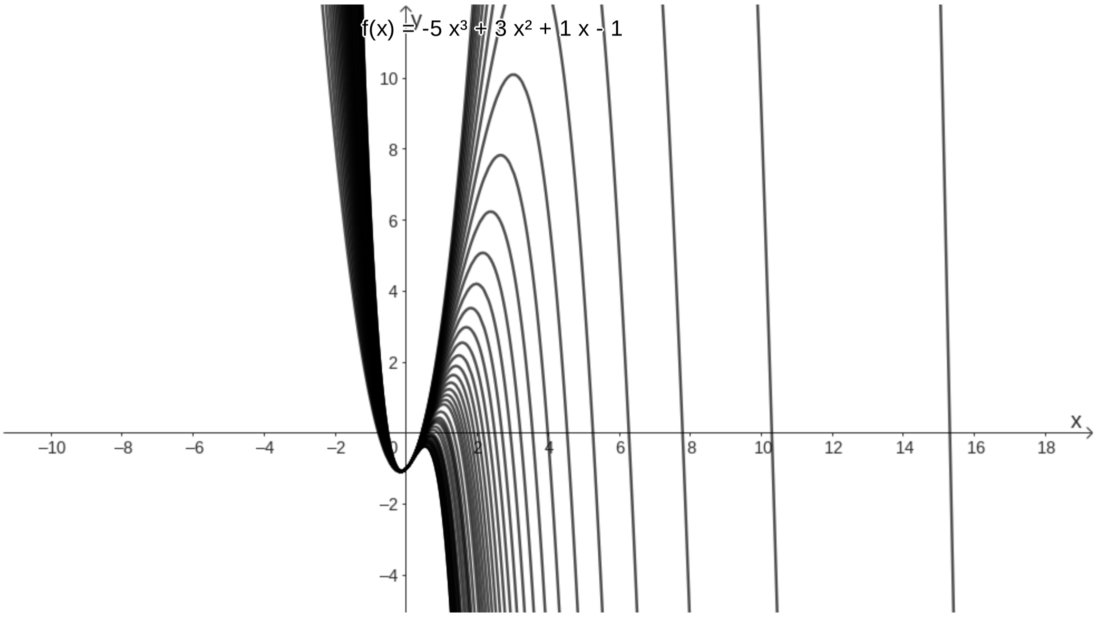

Figura 2.30: Gráfico da função $f(x) = ax^3 + 3x^2 + x - 1$ quando a varia no intervalo $[-5, 0]$

Observamos que ocorreu um comportamento semelhante ao das Figuras 2.28 e 2.29, com a principal diferença de que o comportamento do gráfico se deslocou para o lado oposto em relação ao eixo Y.

Para analisar o comportamento do gráfico da função $f(x) = ax^3 + 3x^2 + x - 1$, basta digitar `ax^3 + 3x^2 + x - 1`, apertar a tecla Enter e variar o coeficiente a.

Uma pergunta que pode surgir é: quais propriedades da função cúbica f podem ser extraídas a partir da observação do comportamento de seus coeficientes e de seu gráfico? Algumas respostas serão apresentadas ao longo desta subseção.

Primeiramente, consideramos a função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e as seguintes funções associadas:

- Derivada de primeira ordem de f: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$;
- Derivada de segunda ordem de f: $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f''(x) = 6ax + 2b$.

Utilizaremos as funções apresentadas anteriormente para estudar o comportamento do gráfico da função cúbica, bem como algumas de suas propriedades.

Neste tópico, não abordaremos os detalhes da teoria das derivadas, pois esse não é nosso foco principal. Contudo, apresentaremos alguns resultados relacionados às derivadas adaptados para a função cúbica, com o objetivo de despertar a curiosidade. Para mais informações sobre a teoria das derivadas, consulte o Apêndice B e as referências citadas.

A ideia de inserir derivadas surgiu com o objetivo de iniciar uma conexão entre os conteúdos abordados no ensino médio e aqueles desenvolvidos no ensino superior, promovendo uma transição mais significativa e contextualizada para os estudantes.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto de máximo local ou de mínimo local da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Pelo Teorema B.2.1, temos:

$$f'(x_0) = 3a{x_0}^2 + 2bx_0 + c = 0. \tag{2.7}$$

Resolvendo essa equação do segundo grau em x_0, pela fórmula de Bhaskara, obtemos:

$$x_0 = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c}}{2 \cdot 3a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}.$$

Observe que para x_0 seja um número real é necessário que $4b^2 - 12ac$ seja não negativo, ou seja, que $4b^2 - 12ac \geq 0$.

Assim, podemos concluir que, para que exista um ponto de máximo ou mínimo local, ou seja, para é necessária que $4b^2 - 12ac \geq 0$.

Exemplo 2.4.5. *Considerando a função $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ analise a existência de máximo ou mínimo local, a partir de $f'(x)$.*

Solução. Note que, $f'(x) = 0$ se $4b^2 - 12ac \geq 0$, desse modo temos:

$4b^2 - 12ac = 4.2^2 - 12.1.1 = 16 - 12 = 4 \ > 0.$

Vejamos graficamente a conclusão estabelecida ao analisarmos o gráfico a seguir:

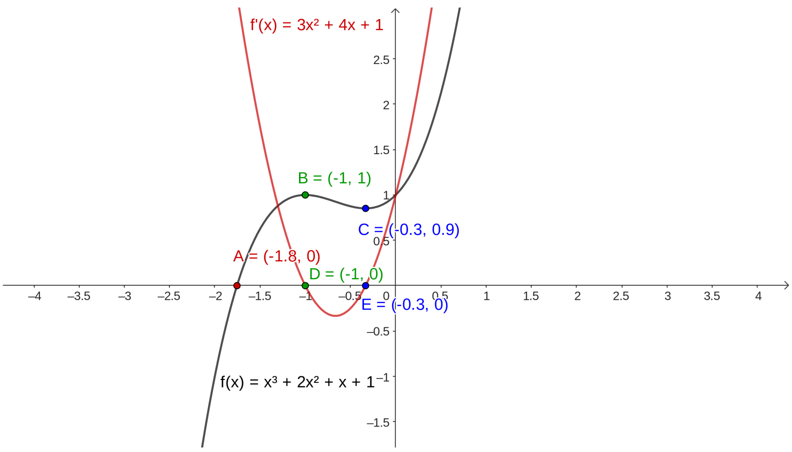

Figura 2.31: Ilustração Gráfica dos extremos de $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

Vale ressaltar que $f'(x) = 0$ quando $x = -1$ e $x = 0,3$, além disso a função f assume valor máximo local em $x = -1$ e mínimo local em $x = 0,3$. Os pontos B e C do gráfico contém os pontos e valores de máximo e mínimo locais de f.

$\square$

Se $4b^2 - 12ac < 0$, então $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de onde segue que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.4.6. *Analise a função $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ quanto a existência de máximo ou mínimo local a partir de $f'(x)$.*

Solução. Note que, $f'(x) = 0$ se $4b^2 - 12ac \geq 0$, desse modo temos:

$4b^2 - 12ac = 4.3^2 - 12.3.2 = 36 - 72 = -36 \ < 0$, portanto não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0$. Vejamos graficamente a conclusão estabelecida ao analisarmos a Figura 2.32:

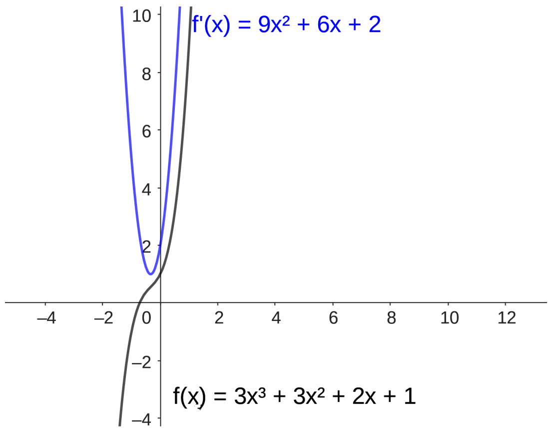

Figura 2.32: Ilustração Gráfica dos extremos de $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Analisando o gráfico de f' (em azul) e de f (em preto), percebemos que o gráfico de f' está totalmente acima do eixo das abscissas, o que indica que a função f é estritamente crescente em todo o seu domínio. Esse fato será comprovado nos resultados a seguir.

$\square$

Para $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, o Teorema B.2.2 pode ser reescrito da seguinte forma:

Teorema 2.4.1. *Seja a função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definida em $\mathbb{R}$ e I um intervalo de $\mathbb{R}$.*

a) Se $3ax^2 + 2bx + c > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.

b) Se $3ax^2 + 2bx + c < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.

Exemplo 2.4.7. *Analise a função $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ quanto aos intervalos de crescimento e decrescimento a partir da função $f'(x)$.*

Solução. Considere a função $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ cujo gráfico encontra - se a seguir:

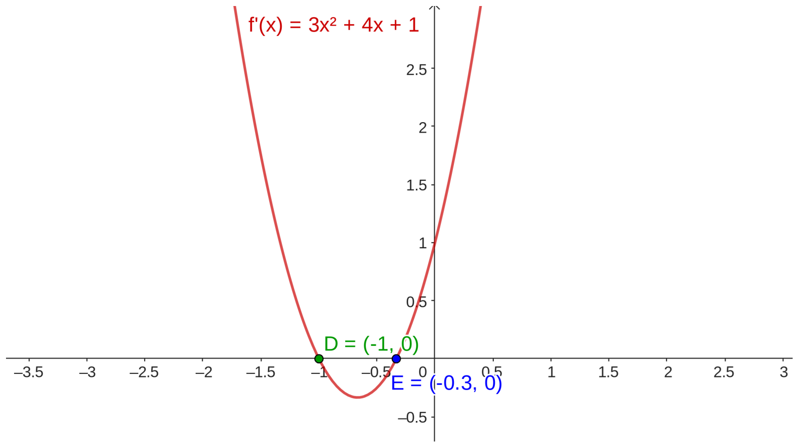

Figura 2.33: Ilustração Gráfica de $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$

Podemos ver que $f'(x) < 0$ no intervalo $[-1, 0.3]$ e $f'(x) > 0$ fora deste. O que queremos representar através desta análise é o comportamento de f como descrito no gráfico abaixo:

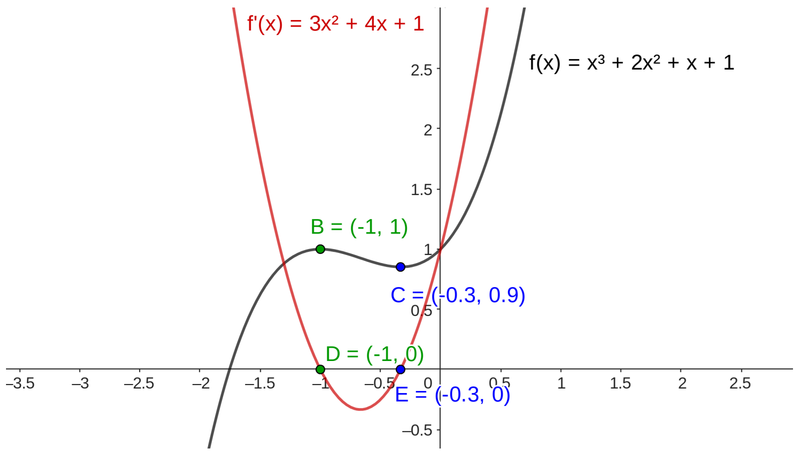

Figura 2.34: Representação gráfica da análise da monotonicidade de $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ a partir de f'

De fato, f decresce no intervalo $[-1, 0.3]$ em que $f'(x) < 0$ e cresce nos intervalos em que $f'(x) > 0$.

$\square$

Mostraremos a seguir que a análise de crescimento e decrescimento da função cúbica depende apenas de seus coeficientes a, b e c.

Separamos em dois casos:

- **Caso 1:** quando $a > 0$.
  - Se $\Delta = 4b^2 - 12ac \leq 0$, então a função $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ tem uma única raiz real ou não tem raiz real. Logo, seu gráfico está sempre acima ou sempre abaixo do

eixo Ox. Como $3a > 0$, temos que o gráfico de f' está sempre acima do eixo Ox, ou seja, $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, pelo item (a) do Teorema 2.4.1, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é crescente em $\mathbb{R}$.

– Se $\Delta = 4b^2 - 12ac > 0$, então $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ tem duas raízes reais distintas. Como $3a > 0$, temos que:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x \text{ fora do intervalo } \left(\frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}, \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right)$$

$$\text{e } f'(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ no intervalo } \left(\frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}, \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right).$$

Assim, pelo Teorema 2.4.1, se $a > 0$ e $\Delta > 0$, então f é crescente fora do intervalo

$$\left(\frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}, \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right)$$

e decrescente dentro dele.

- **Caso 2:** quando $a < 0$.

– Se $\Delta = 4b^2 - 12ac \leq 0$, então a função $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ tem uma única raiz real ou não tem raiz real. Logo, seu gráfico está sempre acima ou sempre abaixo do eixo Ox. Como $3a < 0$, temos que o gráfico de f' está sempre abaixo do eixo Ox, ou seja, $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, pelo item (b) do Teorema 2.4.1, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é decrescente em $\mathbb{R}$.

– Se $\Delta = 4b^2 - 12ac > 0$, então $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ tem duas raízes reais distintas. Como $3a < 0$, temos que:

$$f'(x) < 0 \quad \text{para } x \text{ fora do intervalo } \left(\frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}, \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right)$$

$$\text{e } f'(x) > 0 \text{ dentro do intervalo } \left(\frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}, \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right).$$

Assim, pelo Teorema 2.4.1, se $a < 0$ e $\Delta > 0$, então f é decrescente fora do intervalo

$$\left(\frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}, \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right)$$

e crescente dentro dele.

Exemplo 2.4.8. *Considere a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$, analise os intervalos de crescimento e decrescimento a partir de $f'(x)$.*

Solução. Observe que f possui $a > 0$, e sua derivada é $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$. Além disso, $\Delta = 36 + 24 = 60 > 0$, vejamos o comportamento de f', temos $f'(x) = 0$ para $x = -2,3$ e

$x = 0,3$.

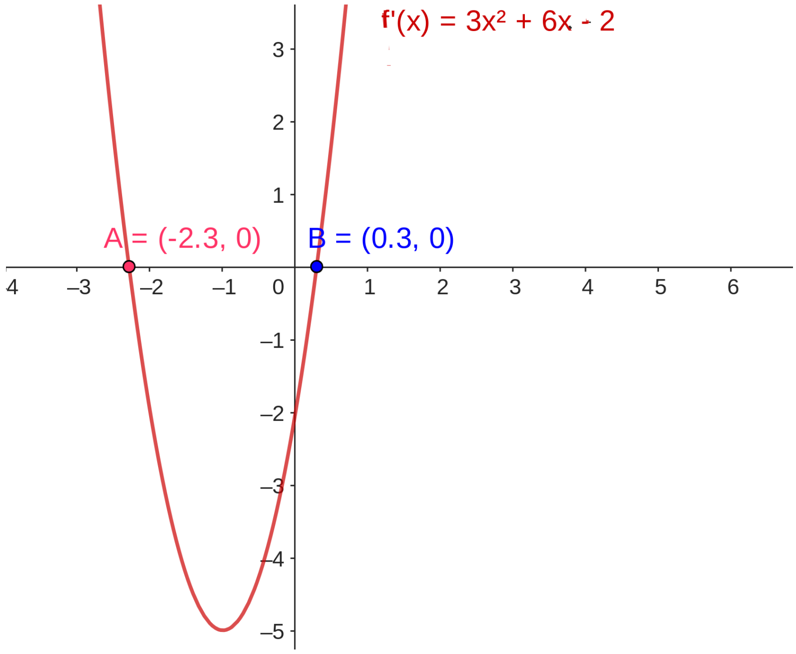

Figura 2.35: Ilustração Gráfica de $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$

Na Figura 2.36, apresentamos uma captura de tela do GeoGebra que mostra a representação gráfica das funções f e f'. Essa visualização torna evidente os intervalos em que a função f é crescente ou decrescente, destacando a utilidade da derivada na análise do comportamento de funções. O uso do GeoGebra, nesse contexto, é de grande importância pedagógica, pois permite explorar conceitos matemáticos de forma visual, interativa e acessível aos alunos. Figuras semelhantes, geradas com o mesmo recurso, serão apresentadas ao longo da sequência para apoiar a compreensão de novos exemplos e propriedades.

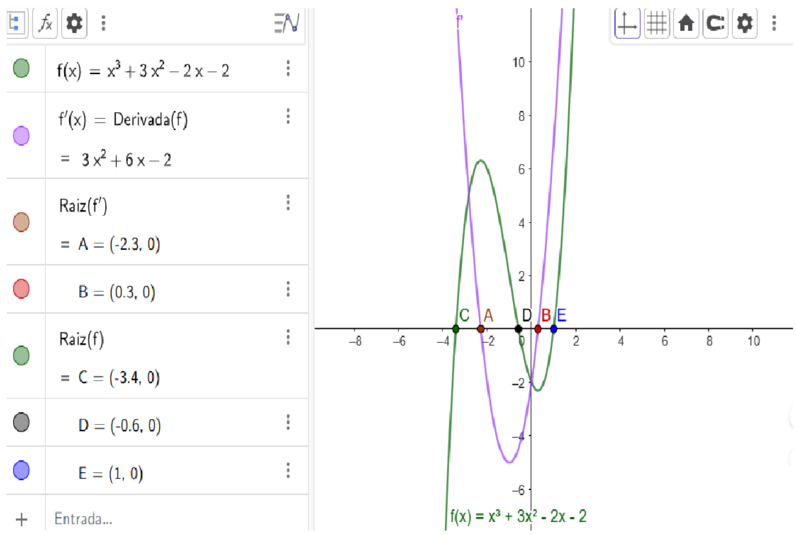

Figura 2.36: Ilustração Gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ e sua derivada

Relacionando com o Teorema 2.4.1 temos que f é crescente fora do intervalo $[-2.3, 0.3]$ e decrescente dentro deste intervalo.

□

Exemplo 2.4.9. *Considere a função $f(x) = -x^3+3x^2-2$, analise os intervalos de crescimento e decrescimento a partir de $f'(x)$.*

Solução. Observe que f possui $a < 0$, e sua derivada é $f'(x) = -3x^2 + 6x$. Além disso, $\Delta = 36 > 0$, vejamos o comportamento de f', temos $f'(x) = 0$ para $x = 2$ e $x = 0$.

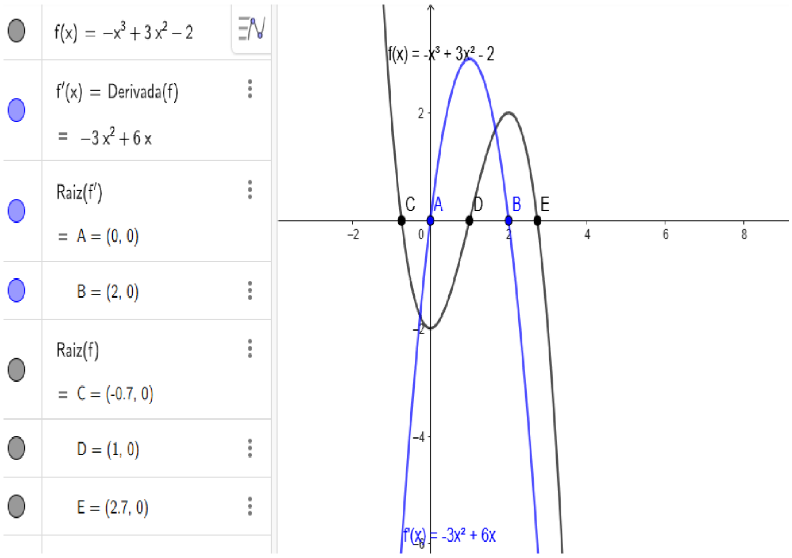

Figura 2.37: Ilustração Gráfica de $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ e de sua derivada

No gráfico acima vemos os intervalos de crescimento e decrescimento de f. Relacionando com o Teorema 2.4.1 temos que f é decrescente fora do intervalo $[0, 2]$ e crescente dentro deste intervalo. □

De acordo com o que foi visto anteriormente, os candidatos a ponto de máximo local e de mínimo local de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ são os pontos

$$\frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} \quad \text{e} \quad \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}.$$

Para a função cúbica, o Teorema B.2.3 pode ser reescrito da seguinte forma:

Teorema 2.4.2. (Teste da primeira derivada) *Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definida em $\mathbb{R}$ e seja $x_0 \in \mathbb{R}$ uma raiz de $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, ou seja,*

$$x_0 = \frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} \quad \textit{ou} \quad x_0 = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}.$$

*(a) Se existem dois números reais x_1 e x_2 com $x_1 < x_0 < x_2$ tais que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_1, x_0)$ e $f'(x) < 0$ para todo $x \in (x_0, x_2)$, então x_0 é um ponto de **máximo local** de f.*

*(b) Se existem dois números reais x_1 e x_2 com $x_1 < x_0 < x_2$ tais que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (x_1, x_0)$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, x_2)$, então x_0 é um ponto de **mínimo local** de f.*

Veremos a seguir que as condições do Teorema 2.4.2 podem ser verificadas envolvendo apenas os coeficientes a, b e c.

Dividimos em dois casos:

- **Caso 1:** Se $a > 0$ e $\Delta = 4b^2 - 12ac > 0$, então, pelo que vimos na análise do Teorema 2.4.1, temos que:
  - $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c > 0$ para todo x à esquerda de $\dfrac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$;
  - $f'(x) < 0$ no intervalo $\left(\dfrac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}, \dfrac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right)$;
  - $f'(x) > 0$ para todo x à direita de $\dfrac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$.

  Assim, $\dfrac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$ é um ponto de **máximo local** de f e $\dfrac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$ é um ponto de **mínimo local** de f.

- **Caso 2:** Se $a < 0$ e $\Delta = 4b^2 - 12ac > 0$, então, pelo Teorema 2.4.1, temos que:
  - $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c < 0$ para todo x à esquerda de $\dfrac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$;
  - $f'(x) > 0$ no intervalo $\left(\dfrac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}, \dfrac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right)$;
  - $f'(x) < 0$ para todo x à direita de $\dfrac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$.

  Assim, $\dfrac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$ é um ponto de **mínimo local** de f e $\dfrac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$ é um ponto de **máximo local** de f.

Assim, o Teorema 2.4.2 pode ser reescrito da seguinte forma:

Teorema 2.4.3. *Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definida em $\mathbb{R}$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ as raízes distintas de $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, ou seja,*

$$x_1 = \frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} \quad e \quad x_2 = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}.$$

*a) Se $a > 0$, então x_1 é um ponto de **máximo local** de f e x_2 é um ponto de **mínimo local** de f.*

*b) Se $a < 0$, então x_1 é um ponto de **mínimo local** de f e x_2 é um ponto de **máximo local** de f.*

Exemplo 2.4.10. *Considere $f(x) = x^3+4x^2-3x-4$, analise a existência de pontos de máximo e/ou mínimo local a partir do estudo de $f'(x)$.*

Solução. Aplicaremos o resultado do Teorema 2.4.3. Note que $a = 1 > 0$ e seja $f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$ a derivada primeira de f. Veja que

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3 = 0 \implies x_1 = -3 \text{ e } x_2 = \frac{1}{3} \text{ são raizes de } f'.$$

Logo como $a > 0$, pelo resultado do Teorema 2.4.3, temos que x_1 é ponto de máximo local e x_2 é ponto de mínimo local.

Agora, vejamos o comportamento de f geometricamente, por meio de seu gráfico.

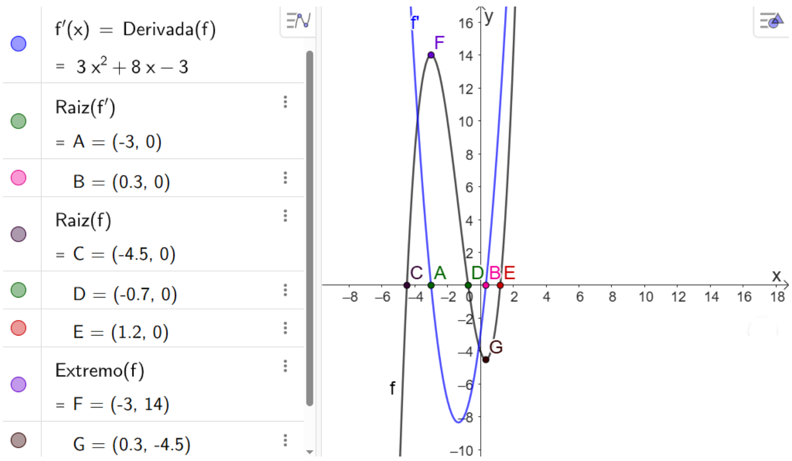

Figura 2.38: Ilustração Gráfica de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 4$ e de sua derivada

As abscissas dos pontos A e B representam os zeros da função $f'(x)$, cujas coordenadas estão indicadas no gráfico apresentado na Figura 2.38 acima. Nesse caso, observe que $a > 0$ e que as raízes de f' correspondem aos extremos locais de f. O máximo local de f ocorre em $x = -3$ e o mínimo local em $x = 0{,}3$, que, no gráfico, correspondem às ordenadas dos pontos F e G, respectivamente.

$\square$

Exemplo 2.4.11. *Analise a existência de pontos de máximo e/mínimo locais da função $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x - 1$ a partir do estudo de $f'(x)$.*

Solução. Aplicando o resultado do Teorema 2.4.3, temos que, como

$$a = -1 < 0,$$

buscaremos os valores de x para os quais $f'(x) = 0$, que serão os pontos de máximo e mínimo locais.

Veja que $f'(x) = -3x^2 + 8x - 3$, cujas raízes são:

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{28}}{-6} \approx 0{,}5 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{28}}{-6} \approx 2{,}2.$$

No gráfico a seguir, podemos explorar visualmente tais características.

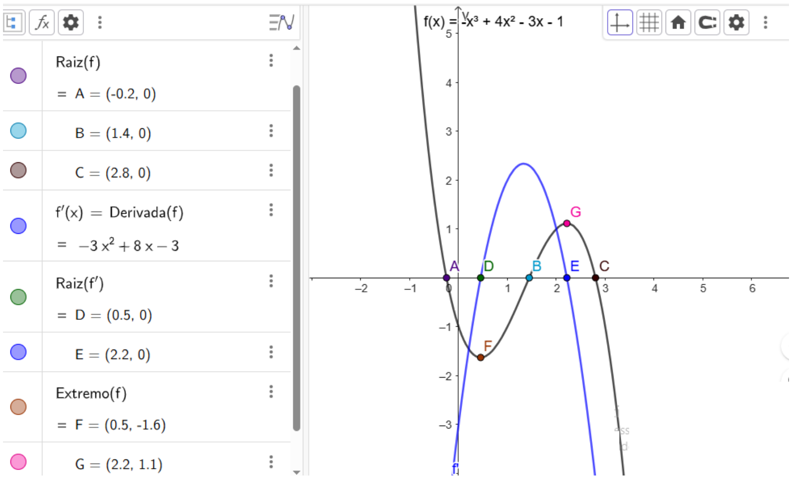

Figura 2.39: Ilustração Gráfica de $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x - 1$ e de sua derivada

Veja que, pela aplicação do resultado do Teorema 2.4.3 para o caso $a < 0$, temos que os pontos $x_1 = 0{,}5$ e $x_2 = 2{,}2$ correspondem, respectivamente, a um ponto de mínimo local e a um ponto de máximo local. Esses valores também são as abscissas dos zeros de f', representados no gráfico pelos pontos D e E.

$\square$

A seguir reescrevemos os teoremas B.2.4 e B.2.5 para o caso em que f é uma função cúbica.

Teorema 2.4.4. **(Teste da segunda derivada)** *Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definida em $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ uma raiz de $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, ou seja,*

$$x_0 = \frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} \quad \textit{ou} \quad x_0 = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}.$$

*a) Se $f''(x_0) = 6ax_0 + 2b > 0$, então x_0 é um ponto de **mínimo local** de f.*

*b) Se $f''(x_0) = 6ax_0 + 2b < 0$, então x_0 é um ponto de **máximo local** de f.*

Exemplo 2.4.12. *Seja $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 2$, use o teste da segunda derivada para determinar o ponto de máximo ou de mínimo local de f.*

Solução. Note que: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 4$, logo, usando a fórmula de Bhaskara, obtemos que

$$f'(x) = 0 \implies x_0 = -2{,}5 \text{ e } x_1 = 0{,}5.$$

Aplicando o Teorema 2.4.4 (Teste da Segunda Derivada), temos que:

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(x_0) = f''(-2{,}5) = -9 \implies f''(-2{,}5) < 0$$

Portanto, $x_0 = -2{,}5$ é ponto de máximo local de f.

De modo análogo,

$$f''(x_1) = f''(0{,}5) = 9 \implies f''(0{,}5) > 0$$

Portanto, $x_1 = 0{,}5$ é ponto de mínimo local de f.

A seguir, Figura 2.40, podemos ver o esboço de seu gráfico.

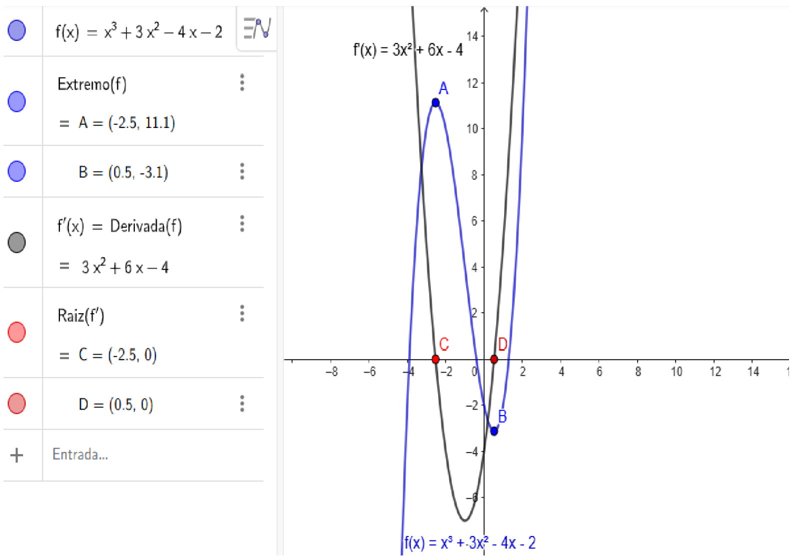

Figura 2.40: Ilustração Gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 2$ e de sua derivada

Como descrito no gráfico, as abscissas dos pontos A e B são os extremos locais de f, e correspondem também os zeros de f', que são as abscissas dos pontos C e D.

$\square$

Sobre a concavidade do gráfico de uma função cúbica temos os seguinte resultado que é uma adaptação do Teorema B.2.5.

Teorema 2.4.5. *Seja a função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definida em $\mathbb{R}$.*

a) *Se existe um intervalo I tal que $f''(x) = 6ax + 2b > 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f tem concavidade para cima em I.*

b) *Se existe um intervalo I tal que $f''(x) = 6ax + 2b < 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f tem concavidade para baixo em I.*

Para que f seja uma função cúbica, é necessário que $a \neq 0$. Assim, os itens a) e b) do Teorema 2.4.5 podem ser reescritos da seguinte forma:

a) O gráfico de f tem concavidade para cima:

- no intervalo $I = \left(\dfrac{-2b}{6a}, +\infty\right)$, se $a > 0$;
- no intervalo $I = \left(-\infty, \dfrac{-2b}{6a}\right)$, se $a < 0$.

b) O gráfico de f tem concavidade para baixo:

- no intervalo $I = \left(\dfrac{-2b}{6a}, +\infty\right)$, se $a < 0$;
- no intervalo $I = \left(-\infty, \dfrac{-2b}{6a}\right)$, se $a > 0$.

Exemplo 2.4.13. *Analise a concavidade do gráfico de $f(x) = 2x^3 - 5x^2$, a partir do estudo do sinal da segunda derivada de f.*

Solução. A segunda derivada de $f(x)$ é a função $f''(x) = 12x - 10$. Note que, $a > 0$ e $f''(x) > 0$ para

$$x \in (0.8$$

$\overline{3}, +\infty)$ desse modo, pelo item a) do Teorema 2.4.5, temos que a concavidade de f será voltada para cima neste intervalo. Analogamente, temos que $f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0.8\overline{3})$ e desse modo, pelo item b) do Teorema 2.4.5, a concavidade de f será voltada para baixo nesse intervalo.

Veja na Figura 2.41 a representação gráfica para melhor compreensão:

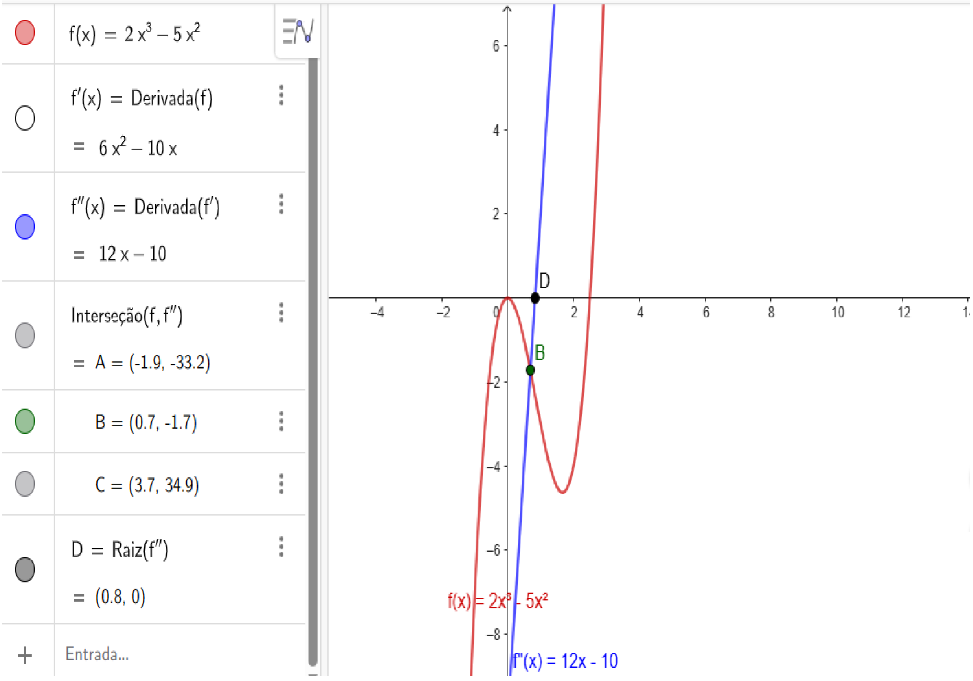

Figura 2.41: Análise da concavidade de $f(x) = 2x^3 - 5x^2$ a partir de f”

$\square$

Exemplo 2.4.14. *Analise a concavidade do gráfico de $f(x) = -2x^3 - 5x^2$, a partir do estudo do sinal da segunda derivada de f.*

Solução. A segunda derivada de $f(x)$ é a função $f''(x) = -12x - 10$.

Note que, $a < 0$ e $f''(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -0.8)$, desse modo a concavidade de f será voltada para cima neste intervalo. Analogamente, teremos que $f''(x) < 0$ para $x \in (-0.8, +\infty)$ e desse modo a concavidade de f será voltada para baixo nesse intervalo.

Veja a representação gráfica para melhor compreensão:

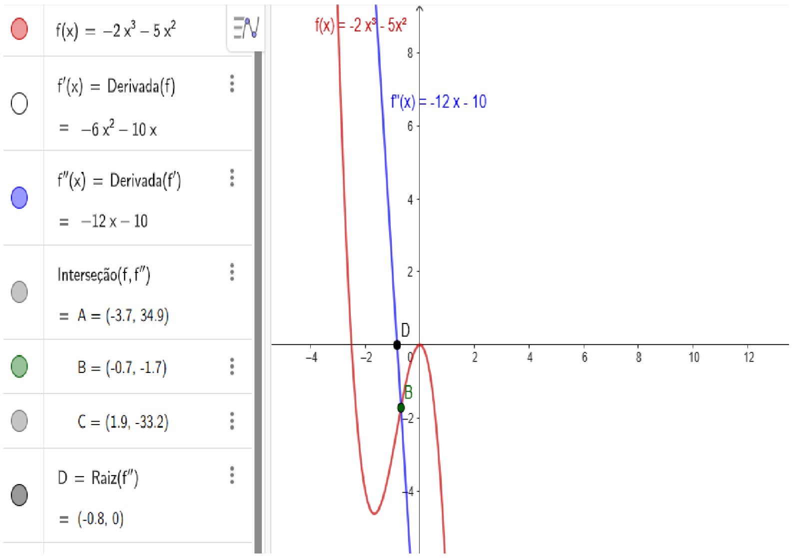

Figura 2.42: Análise da concavidade de $f(x) = -2x^3 - 5x^2$ a partir de f”

$\square$

Podemos observar que $\dfrac{-2b}{6a}$ é o ponto onde o gráfico de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ muda de concavidade.

Ao explorar a função cúbica com o apoio de ferramentas como o GeoGebra, é possível tornar o ensino da Matemática mais interessante e envolvente. A possibilidade de ver os gráficos em tempo real e interagir com os coeficientes, nos fornece uma compreensão de forma mais intuitiva de como a função cúbica se comporta. Isso não só desperta o interesse, mas também facilita a construção do conhecimento, tornando o processo de ensino mais dinâmico e significativo.

2.5 Funções Exponenciais e Logarítmicas

Nessa seção, abordaremos as funções exponenciais e logarítmicas, que são fundamentais em diversos campos da matemática e suas aplicações. Ambas as funções têm propriedades que as tornam indispensáveis para o estudo de fenômenos que envolvem taxas de variação e escalas multiplicativas.

Ressaltamos que algumas propriedades das funções exponencial e logarítmica serão omitidas, pois o foco principal aqui é o estudo do comportamento gráfico por meio do GeoGebra.

2.5.1 Função Exponencial

A função exponencial, definida por $f(x) = a^x$, com base $a > 0$, descreve crescimento e decrescimento de grandezas, sendo amplamente utilizada em modelos de crescimento populacional, física e finanças.

Por que a função exponencial é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$?

Seja $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Vamos mostrar que:

A seguir daremos uma resposta para a pergunta anterior.

Considere $x < y$, logo existe $r > 0$ tal que $y = x + r$. Assim,

$$a^y = a^{x+r} = a^x \cdot a^r.$$

Caso 1: Se $a > 1$, então $a^r > 1$, e portanto $a^y = a^x \cdot a^r > a^x$. Logo, a função exponencial $f(x) = a^x$ é **estritamente crescente** se $a > 1$.

Caso 2: Se $0 < a < 1$, então $a^r < 1$, e portanto $a^y = a^x \cdot a^r < a^x$. Logo, a função exponencial $f(x) = a^x$ é **estritamente decrescente** se $0 < a < 1$.

Ao utilizarmos o GeoGebra como recurso para apresentar a função exponencial podemos analisar visualmente o que acontece com o gráfico a partir da variação da base a.

- Para $0 < a < 1$ temos a função decrescente como descrita abaixo.

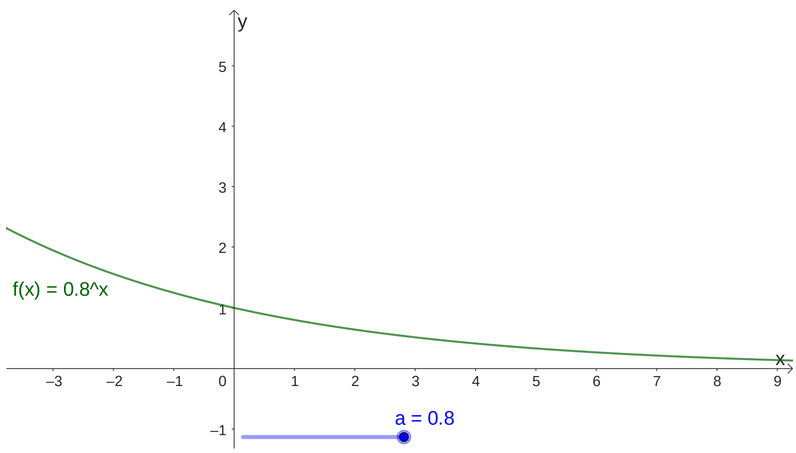

Figura 2.43: Gráfico de uma função exponencial com $0 < a < 1$.

Ao utilizarmos a função do controle deslizante no GeoGebra podemos visualizar o comportamento do gráfico quando a varia neste intervalo.

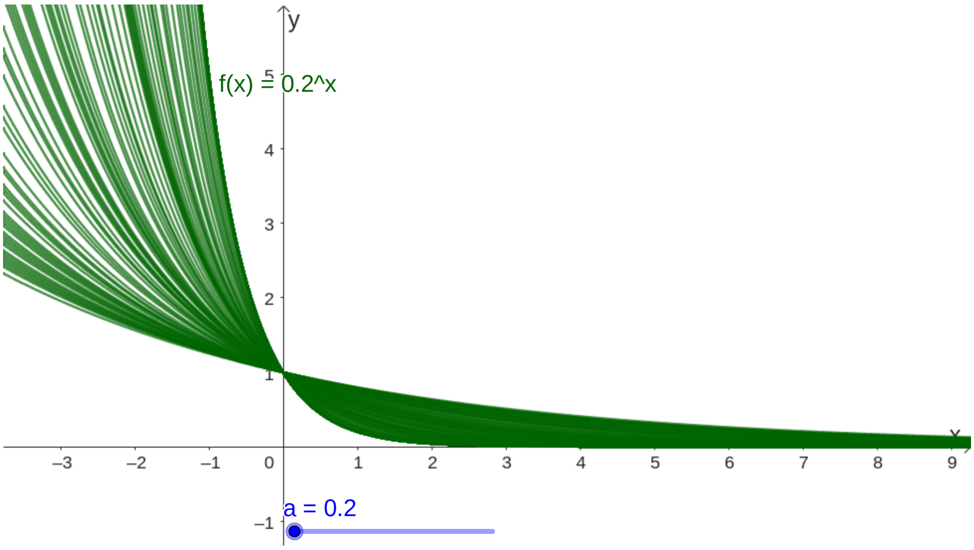

Figura 2.44: Gráfico de uma função exponencial com a variando no intervalo $(0, 1)$.

- Para $a > 1$ temos a função crescente.

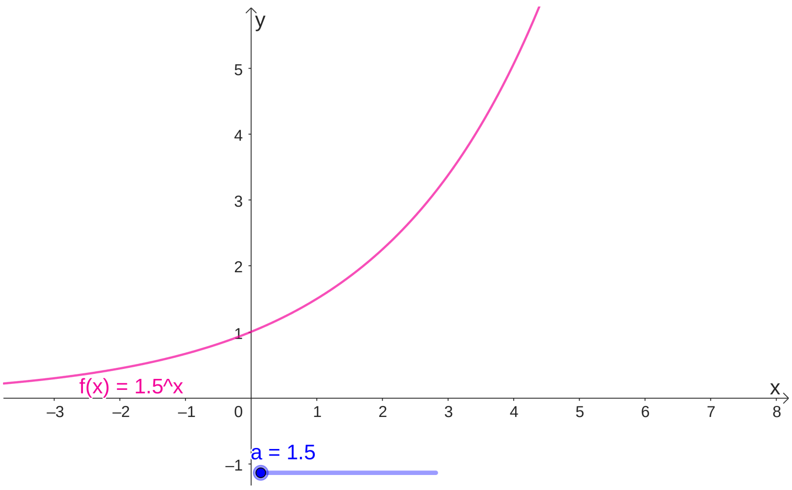

Figura 2.45: Gráfico de uma função exponencial com $a > 1$.

A visualização do gráfico quando $a > 1$ utilizando o controle deslizante, apresenta - se a seguir.

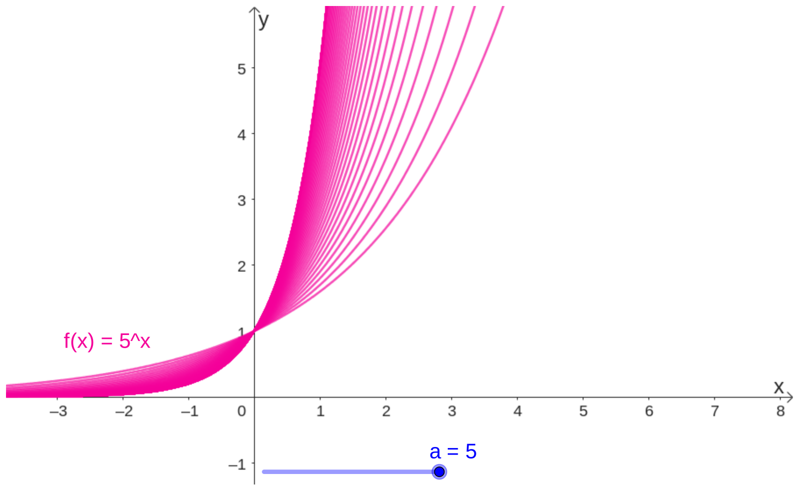

Figura 2.46: Gráfico de $f(x) = a^x$ para $1 < a \leq 5$

Podemos observar, através da Figura A.20, que quanto maior for o valor de a, mais rápido a função cresce. Fica como desafio mostrar essa observação de forma genérica.

Observação 2.5.1. *Ressaltamos que estamos levando em consideração sempre $a > 0$;*

Observação 2.5.2. *O gráfico de uma função exponencial não toca o eixo X em nenhum ponto, pois não existe valor para x que torne $f(x) = 0$;*

Observação 2.5.3. *O gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ intercepta o eixo Y em único ponto $y = 1$. Isso porque $f(0) = a^0 = 1$.*

A função exponencial aparece naturalmente em diversos contextos da Matemática Aplicada e outras ciências. Abaixo destacamos algumas aplicações importantes, acompanhadas de exemplos numéricos.

1. Crescimento populacional

Modela situações em que a taxa de crescimento de uma população é proporcional à quantidade existente no instante considerado:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

onde P_0 representa a população inicial, r é a taxa de crescimento (constante) e t é o tempo decorrido, geralmente em anos. Para mais detalhes, o leitor pode consultar [18].

Exemplo 2.5.1. *Uma população de bactérias começa com $P_0 = 1\,000$ e cresce a uma taxa de $r = 0{,}2$ por dia Qual será a população após 3 dias?*

$$P(3) = 1000 \cdot e^{0{,}2 \cdot 3} \approx 1000 \cdot e^{0{,}6} \approx 1000 \cdot 1{,}8221 \approx 1822.$$

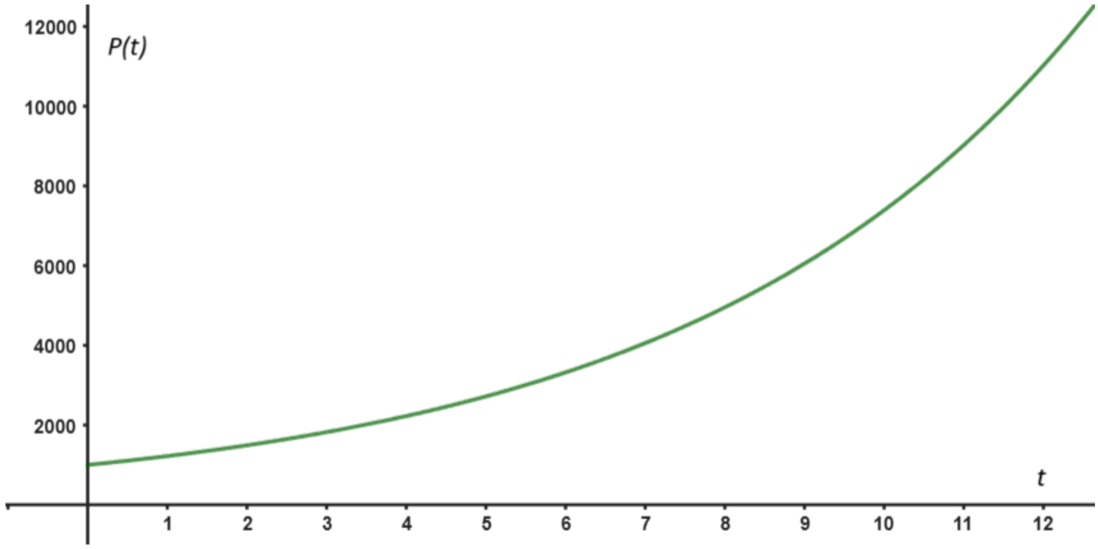

Figura 2.47: Ilustração do gráfico de $P(t) = P_0e^{rt}$

Na Figura 2.47, ilustramos o comportamento da função $P(t) = P_0e^{rt}$, onde $P_0 = 1000$ é a população inicial e $r = 0{,}2$. Podemos perceber que, conforme previsto pela teoria das funções exponenciais, a população de bactérias cresce à medida que o tempo aumenta.

2. Decaimento radioativo

Representa a diminuição da quantidade de uma substância radioativa (ou de qualquer material sujeito a um processo de decaimento natural) ao longo do tempo. O modelo é dado por:

$$N(t) = N_0e^{-\lambda t}$$

onde:

- $N(t)$ é a quantidade de substância que resta no tempo t;
- N_0 é a quantidade inicial no tempo $t = 0$;
- $\lambda > 0$ é a constante de decaimento (específica do material), geralmente expressa em unidades de tempo inversas como segundos (s^{-1}), minutos (min^{-1}), horas (h^{-1}) ou anos (ano^{-1});
- t é o tempo decorrido (geralmente em segundos, horas, anos etc.).

Para mais detalhes, consulte [2].

Exemplo 2.5.2. *Uma amostra tem $N_0 = 500$ g de material radioativo e $\lambda = 0{,}1$ ano^{-1}. Obtenha sua quantidade, ainda radiotiva, que resta após 10 anos:*

$$N(10) = 500 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 10} = 500 \cdot e^{-1} \approx 500 \cdot 0{,}3679 \approx 183{,}95g.$$

Graficamente, temos:

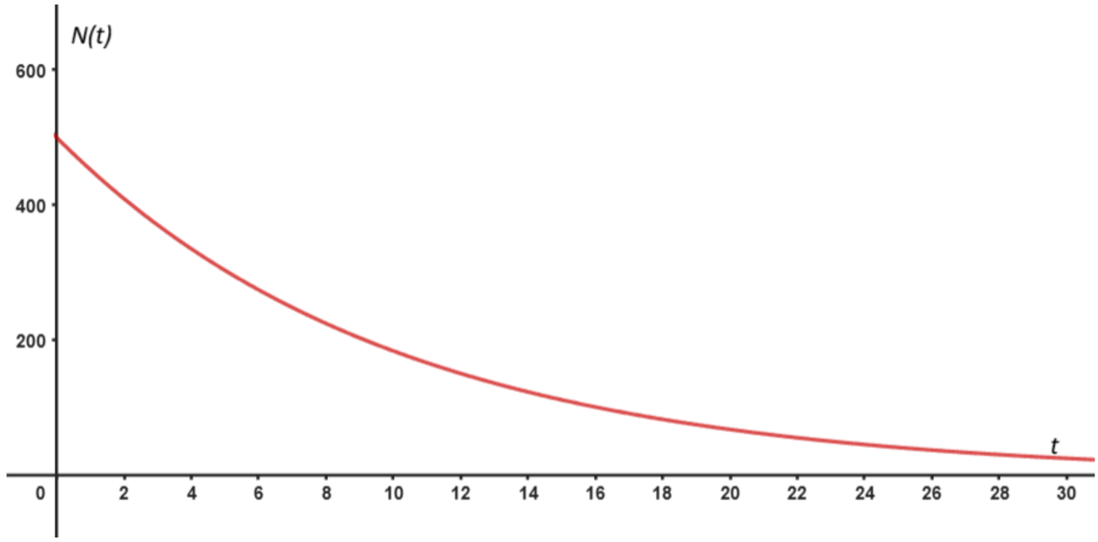

Figura 2.48: Ilustração do gráfico de $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

Na Figura 2.48, ilustramos o comportamento da função $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, onde $N_0 = 500$ e $\lambda = 0{,}1$. Podemos perceber que, como prevê a teoria sobre a função exponencial, a quantidade de uma substância radioativa diminui à medida que o tempo aumenta.

3. Juros compostos contínuos

Os **juros compostos contínuos** são um modelo matemático idealizado, onde a capitalização de juros ocorre de forma contínua, ou seja, infinitamente frequente. A fórmula geral dos juros compostos contínuos é:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{rt} \tag{2.8}$$

Onde:

- $A(t)$ é o montante acumulado após o tempo t,
- A_0 é o capital inicial (principal),
- r é a taxa de juros (em decimal),
- t é o tempo (geralmente em anos),
- e é a constante de Euler ($e \approx 2{,}71828$).

A fórmula dos juros compostos contínuos é obtida a partir da fórmula dos juros compostos discretos, onde os juros são capitalizados n vezes por período:

$$A(t) = A_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \tag{2.9}$$

Queremos agora encontrar o comportamento desta fórmula quando a frequência de capitalização n tende ao infinito, ou seja, quando os juros são compostos continuamente.

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \tag{2.10}$$

Agrupando os termos:

$$A(t) = A_0 \cdot \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n}\right]^t \tag{2.11}$$

Sabemos da definição do número de Euler que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} = e^x \tag{2.12}$$

Substituindo $x = r$, temos:

$$A(t) = A_0 \cdot (e^r)^t = A_0 \cdot e^{rt} \tag{2.13}$$

A fórmula dos juros compostos contínuos é obtida ao considerar o limite da fórmula dos juros compostos discretos quando a frequência de capitalização tende ao infinito. O resultado é uma função exponencial baseada na constante e:

$$\boxed{A(t) = A_0 \cdot e^{rt}} \tag{2.14}$$

Este modelo é útil em diversas aplicações de matemática financeira, especialmente quando se deseja modelar crescimento contínuo de investimentos ou populações.

A fórmula descreve o comportamento de um investimento onde os juros são compostos de forma **contínua**, ou seja, os juros são aplicados infinitamente pequenas vezes ao longo do período. Isso resulta em um crescimento exponencial.

A diferença entre a capitalização contínua e a capitalização composta (onde os juros são aplicados em intervalos discretos) é que, na capitalização contínua, os juros são calculados a cada instante.

Referências adicionais sobre o regime de capitalização contínua podem ser encontradas em [20].

Exemplo 2.5.3. *Um investimento de* $A_0 = R\$1\,000$ *rende juros contínuos a 5% ao ano (*$r =$

$0{,}05$*). Obtenha seu montante após 4 anos:*

$$A(4) = 1000 \cdot e^{0{,}05 \cdot 4} = 1000 \cdot e^{0{,}2} \approx 1000 \cdot 1{,}2214 \approx R\$1{,}221{,}40.$$

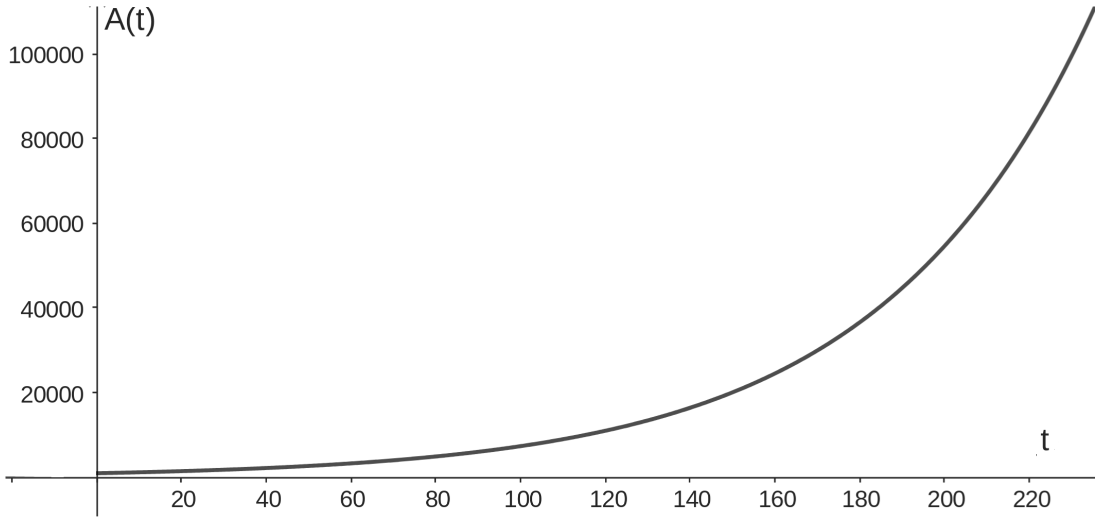

Figura 2.49: Ilustração do Gráfico de $A(t) = A_0 e^{rt}$

Na Figura 2.49, ilustramos o comportamento da função $A(t) = A_0 e^{rt}$, com $A_0 = R\$1\,000$ e $r = 0{,}05$, que representa um investimento rendendo juros contínuos de 5% ao ano. Podemos observar que, conforme previsto pela teoria das funções exponenciais, o valor do investimento cresce continuamente com o tempo. No exemplo considerado, após 4 anos, o montante é dado por:

$$A(4) = 1000 \cdot e^{0{,}05 \cdot 4} = 1000 \cdot e^{0{,}2} \approx 1000 \cdot 1{,}2214 \approx R\$1{,}221{,}40.$$

4. Carga de um capacitor (circuito RC)

Em um circuito elétrico formado por um resistor (R) e um capacitor (C) em série, a carga do capacitor ao longo do tempo é dada pela fórmula:

$$Q(t) = Q_{\text{máx}} \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

onde:

- $Q(t)$ é a carga no capacitor no tempo t;
- $Q_{\text{máx}}$ é a carga máxima que o capacitor pode atingir;
- R é a resistência do resistor;
- C é a capacitância do capacitor;
- t é o tempo decorrido;

- RC é a constante de tempo do circuito (representa a quantidade de tempo necessária para o capacitor atingir aproximadamente 63% de sua carga máxima).

Essa equação descreve o processo de *carga* do capacitor. Inicialmente, quando o circuito é fechado, o capacitor começa a acumular carga, e sua carga aumenta até atingir o valor máximo $Q_{\text{máx}}$. O fator exponencial $e^{-t/RC}$ descreve como a carga do capacitor aumenta ao longo do tempo até atingir a carga máxima.

O tempo necessário para que o capacitor atinja 63% de sua carga máxima é o tempo característico do circuito, denominado **constante de tempo** $\tau = RC$. Mais detalhes sobre o circuito RC podem ser consultados em [8].

Exemplo 2.5.4. *Um capacitor com* $Q_{\text{máx}} = 10$ *C,* $R = 100\ \Omega$*,* $C = 0{,}01$ *F. Qual a carga após* $t = 1$ *s?*

$$Q(1) = 10 \cdot \left(1 - e^{-1/(100\cdot 0{,}01)}\right) = 10 \cdot \left(1 - e^{-1}\right) \approx 10 \cdot (1 - 0{,}3679) \approx 6{,}321.$$

A figura abaixo nos permite enxergar o comportamento do gráfico de $Q(t) = 10(1 - e^{\frac{-t}{100.0{,}01}})$.

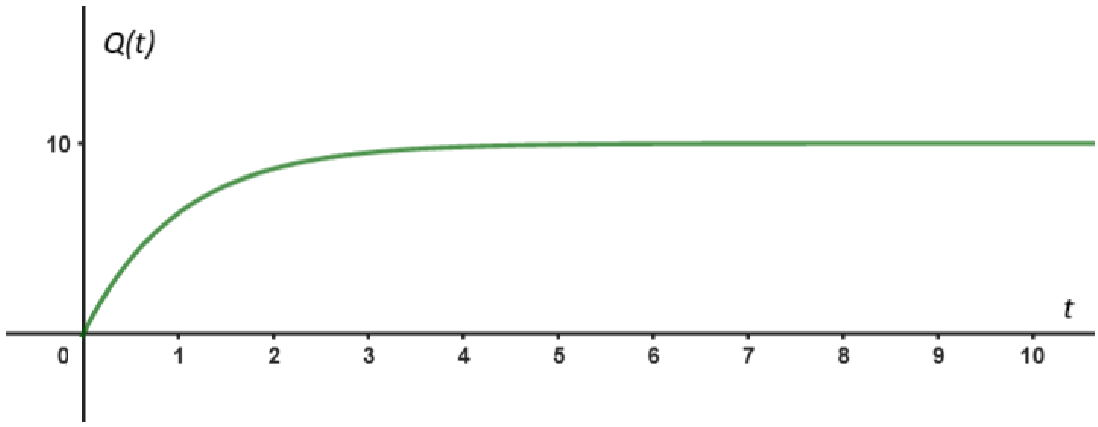

Figura 2.50: Ilustração do Gráfico de $Q(t) = Q_{\text{máx}}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

Na Figura 2.50, ilustramos o comportamento da função $Q(t) = Q_{\text{máx}}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$, que descreve a carga acumulada em um capacitor ao longo do tempo. Para os valores $Q_{\text{máx}} = 10$, $R = 100$ e $C = 0{,}01$.

Como podemos observar no gráfico, a carga se aproxima gradualmente do valor máximo à medida que o tempo avança, conforme previsto pela teoria dos circuitos RC e das funções exponenciais.

Através dos exemplos anteriores, podemos perceber que estudo das funções exponenciais é essencial para modelar diversos fenômenos, como crescimento populacional, decaimento radioativo, juros compostos e circuitos elétricos. O uso de ferramentas como o GeoGebra é fundamental nesse processo, pois permite uma visualização interativa dos gráficos, facilitando a compreensão do impacto das variáveis nas funções. Além de ajudar a entender conceitos abstratos de forma mais prática, o GeoGebra integra álgebra e geometria, tornando o estudo dessas funções mais dinâmico e acessível.

2.5.2 Função Logarítmica

A função logarítmica, inversa da exponencial, é dada por $f(x) = \log_a(x)$, e surge naturalmente na resolução de equações exponenciais, além de ser essencial em diversas áreas, como cálculo, teoria da informação, análise de algoritmos, energia transportada por ondas - sonoras (escala de decibéis) e sísmicas (escala Richter).

Definição 2.5.1. *Chamamos de Função Logarítmica de base a, toda função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$; $f(x) = log_a x$, com $0 < a \neq 1$.*

Ao escrevermos $log_a x = b$, lemos: logaritmo de x na base a é igual a b, queremos dizer que $a^b = x$, com $0 < a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Definição 2.5.2. *Uma função $f : A \to B$ é dita inversível se existe uma função $g : B \to A$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$ e $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Essa função g é chamada de função inversa de f e é denotada por f^{-1}.*

A função $f(x) = \log_a x$ é a inversa da função exponencial $g(x) = a^x$, pois $f(g(x)) = \log_a(a^x) = x$. De fato, pela definição de logaritmo, temos que $\log_a(a^x) = x$, já que $a^x = a^x$. Portanto, $f(g(x)) = x$, o que mostra que a função logarítmica é a inversa da função exponencial.

Embora o conteúdo de cálculo diferencial não seja o foco desta dissertação, a seguir usaremos derivadas para provar que a inversa de uma função crescente derivável é também uma função crescente.

Seja f^{-1} a inversa de uma função crescente f que possui derivada. Como f é crescente, sua derivada $f'(x)$ é positiva para todo x no domínio de f. Assim, temos que a derivada de f^{-1}, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, também é positiva. Portanto, f^{-1} é crescente.

Usando o resultado acima, sabendo que a função exponencial é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, e que a função logarítmica é a inversa da exponencial, concluímos que: A função logarítmica é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

Na sequência desta subseção provaremos a afirmação acima sem o uso de derivadas. Antes veremos nos Exemplos 2.5.5 e 2.5.6 os casos em que é considerado log com bases 2 e $\frac{1}{2}$.

Exemplo 2.5.5. *Analise a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$; $f(x) = log_2 x$, quanto a sua monotonicidade.*

Solução. Tomando $x, y \in \mathbb{R}_+^*$; $x < y$, queremos analisar o que ocorre com as respectivas imagens, quando pegamos de modo geral dois elementos quaisquer do domínio nessas condições, para aplicarmos a definição 2.1.5.

Note que,

$$log_2 x = a \implies 2^a = x \text{ e } log_2 y = b \implies 2^b = y$$

.

Ora, como $x < y \implies 2^a < 2^b$. Daí e do fato da exponencial $g(x) = 2^x$ ser crescente, temos que

$$2^a < 2^b \implies a < b, \text{ de onde segue que, } log_2 x < log_2 y.$$

Assim, temos que $x < y$ implica $f(x) < f(y)$. Portanto, pela definição 2.1.5 a função f é crescente.

□

Exemplo 2.5.6. *Analise a função* $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *;* $g(x) = log_{\frac{1}{2}} x$*, quanto a sua monotonicidade.*

Solução. Tomando $x, y \in \mathbb{R}_+^*$; $x < y$, queremos analisar o que ocorre com as respectivas imagens, quando pegamos de modo geral dois elementos quaisquer do domínio nessas condições, para aplicarmos a definição 2.1.5.

Note que,

$$log_{\frac{1}{2}} x = a \implies \left(\frac{1}{2}\right)^a = x \text{ e } log_{\frac{1}{2}} y = b \implies \left(\frac{1}{2}\right)^b = y$$

Note que,

$$log_{\frac{1}{2}} x = a \implies \left(\frac{1}{2}\right)^a = x \text{ e } log_{\frac{1}{2}} y = b \implies \left(\frac{1}{2}\right)^b = y$$

Ora, como $x < y \implies \left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$. Daí e do fato da exponencial $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ser decrescente, temos que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b \implies a > b, \text{ de onde segue que, } log_{\frac{1}{2}} x > log_{\frac{1}{2}} y.$$

Assim, temos que $x < y$ implica $f(x) > f(y)$. Portanto, pela definição 2.1.5 a função f é decrescente.

□

Podemos explorar esses resultados através do GeoGebra como segue abaixo:

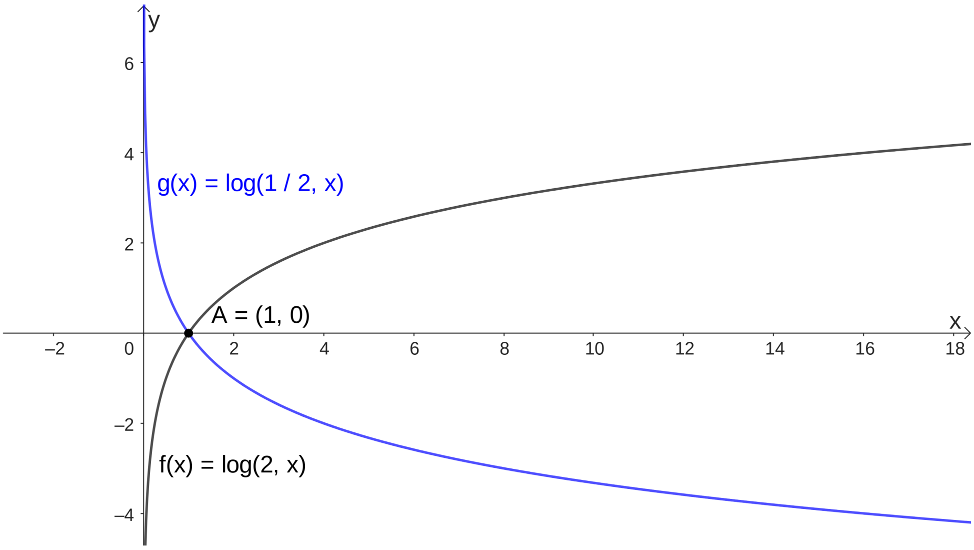

Figura 2.51: Ilustração Gráfica de $f(x) = log_2 x$ e $g(x) = log_{\frac{1}{2}} x$

Observação 2.5.4. *O ponto A de coordenadas $(1, 0)$ representa o ponto de intersecção entre as curvas que representam os gráficos de f e g. No caso especial de $a = 2$ e $a = \frac{1}{2}$, temos que $g(x) = -f(x)$.*

A seguir, sem usar derivadas, provaremos que a função $f(x) = log_a x$ é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$, generalizando os exemplos anteriores $a = 2$ e $a = \frac{1}{2}$.

- **Caso 1.** Consideramos $a > 1$ e $0 < x < y$. Temos que:

$$log_a x = r \implies a^r = x \text{ e } log_a y = s \implies a^s = y.$$

Veja que $x < y \implies a^r < a^s$, daí e do fato de que a função exponencia $g(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$, temos que: $a^r < a^s$ implica em $r < s$. De onde segue que

$$x < y \implies log_a x = r < log_a y = s \text{ ou seja, } x < y \implies f(x) < f(y).$$

Portanto, pelo resultado 2.1.5 a função f é crescente quando $a > 1$.

- **Caso 2.** Consideramos $0 < a < 1$ e $0 < x < y$. Temos que:

$$log_a x = r \implies a^r = x \text{ e } log_a y = s \implies a^s = y.$$

Veja que $x < y \implies a^r < a^s$, daí e do fato de que a função exponencia $g(x) = a^x$ é decrescente se $0 < a < 1$, temos que: $a^r < a^s$ implica em $r > s$. De onde segue que

$$x < y \implies log_a x = r > log_a y = s \text{ ou seja, } x < y \implies f(x) > f(y).$$

Portanto, pela definição 2.1.5 a função f é decrescente quando $0 < a < 1$.

O conhecimento de função logarítmica pode ser aplicado em diversos campos da ciência como segue as aplicações adiante. Além disso, podemos dizer que este tipo de aplicação e significado transmite ao aluno uma abordagem mais interessante e aliado com o uso do GeoGebra contribui para tornar esse conhecimento um pouco mais palpável, facilitando assim a compreensão do mesmo.

A seguir, apresentaremos algumas aplicações da função logarítmica, reforçando a importância da resolução de problemas em aplicações do dia a dia no desenvolvimento do conhecimento.

1. Crescimento populacional

Como visto anteriormente, a taxa de crescimento de uma população é proporcional à quantidade existente no instante considerado:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

onde P_0 representa a população inicial, r é a taxa de crescimento (constante) e t é o tempo decorrido, geralmente em anos. Como veremos a seguir, a função logarítmica pode ser utilizada para determinar o tempo t necessário para que uma população atinja um determinado valor.

Uma população de bactérias começa com $P_0 = 1000$ indivíduos e cresce a uma taxa de $r = 0{,}2$ ao ano. Deseja-se saber após quanto tempo a população atingirá $P(t) = 2000$ indivíduos.

Sabemos que a função que modela o crescimento é:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

Substituindo os valores:

$$2000 = 1000 \cdot e^{0{,}2t}$$

Dividindo ambos os lados por 1000:

$$2 = e^{0{,}2t}$$

Aplicando logaritmo natural:

$$\ln(2) = 0{,}2t \Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{0{,}2} \approx 3{,}47$$

Portanto, a população dobrará em aproximadamente 3,47 anos.

2. Decaimento radioativo

Assim como no crescimento populacional, o decaimento radioativo pode ser modelado por uma função exponencial. Nesse caso, a taxa de variação da quantidade de material radioativo é proporcional à quantidade presente no instante considerado, mas com sinal negativo, indicando redução ao longo do tempo:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

onde N_0 representa a quantidade inicial da substância, λ é a constante de decaimento (positiva) e t é o tempo decorrido. Como veremos a seguir, a função logarítmica permite determinar o tempo t necessário para que reste uma quantidade específica do material radioativo.

Uma amostra radioativa possui $N_0 = 500$ gramas. Deseja-se saber quanto tempo levará para que reste apenas $N(t) = 100$ gramas, sabendo que a constante de decaimento é $\lambda = 0{,}1$ ano^{-1}.

A função que modela o decaimento é:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Substituindo:

$$100 = 500 \cdot e^{-0{,}1t}$$

Dividindo por 500:

$$0{,}2 = e^{-0{,}1t}$$

Aplicando logaritmo:

$$\ln(0{,}2) = -0{,}1t \Rightarrow t = \frac{-\ln(0{,}2)}{0{,}1} \approx 16{,}09$$

Assim, levará cerca de 16,09 anos para que reste 100 g da substância, ainda radiativo.

3. Juros compostos contínuos

No contexto financeiro, a capitalização contínua de um investimento pode ser modelada por uma função exponencial. Nesse modelo, os juros são aplicados de forma contínua ao saldo acumulado, fazendo com que o crescimento do montante ocorra de maneira exponencial ao longo do tempo:

$$A(t) = A_0 e^{rt},$$

onde A_0 representa o valor inicial investido, r é a taxa de juros anual (em forma decimal) e t é o tempo decorrido, geralmente em anos. Assim como nos casos anteriores, a função logarítmica pode ser usada para determinar o tempo t necessário para que o investimento atinja um determinado valor, como veremos a seguir.

Um investimento inicial de R$1000 rende juros compostos contínuos a uma taxa de 5% ao ano. Em quanto tempo o capital dobrará?

Modelo matemático:

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

Substituindo:

$$2000 = 1000 \cdot e^{0{,}05t}$$

Dividindo:

$$2 = e^{0{,}05t}$$

Aplicando logaritmo:

$$\ln(2) = 0{,}05t \Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{0{,}05} \approx 13{,}86$$

Portanto, o valor dobrará em aproximadamente 13,86 anos.

4. Carga de um capacitor

Em um circuito elétrico formado por um resistor (R) e um capacitor (C) em série, a carga do capacitor ao longo do tempo é dada pela fórmula:

$$Q(t) = Q_{\text{máx}} \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

onde $Q_{\text{máx}}$ representa a carga máxima que o capacitor pode atingir, R é a resistência do circuito, C é a capacitância e t é o tempo decorrido. A função logarítmica pode ser utilizada para determinar o tempo necessário para que o capacitor atinja uma carga específica, levando em consideração os valores de R, C e $Q(t)$. Veja o exemplo a seguir.

Em um circuito elétrico, um capacitor de capacitância $C = 0{,}01\,\text{F}$ e resistência $R = 100\,\Omega$ atinge uma carga de 90% da carga máxima. Determine o tempo necessário para que isso ocorra.

Sabemos que a função da carga é:

$$Q(t) = Q_{\text{máx}}(1 - e^{-t/RC})$$

Deseja-se $Q(t) = 0{,}9Q_{\text{máx}}$. Substituindo:

$$0{,}9 = 1 - e^{-t/1}$$

Isolando o exponencial:

$$0{,}1 = e^{-t} \Rightarrow -t = \ln(0{,}1) \Rightarrow t = -\ln(0{,}1) \approx 2{,}30$$

Logo, o capacitor atinge 90% da carga máxima em cerca de 2,30 segundos.

Capítulo 3

Considerações Finais

Este trabalho foi desenvolvido a partir da percepção a respeito da necessidade que temos de enquanto professores de matemática disseminar o conhecimento matemático de modo mais claro e interessante possível, tal percepção nos levou a pensar nas ferramentas digitais que temos a nossa disposição as quais podem ser utilizadas como aliadas nesse sentido. Desse modo, enxerga - se o software GeoGebra como uma destas ferramentas, capaz de facilitar e tornar mais interessante o ensino de matemática.

Para isso, o conteúdo de função tido como um dos menos compreendidos de modo geral, foi alvo de nossa investigação e enfoque onde buscamos de modo satisfatório realizar uma abordagem do mesmo utilizando o GeoGebra como ferramenta de apoio no ensino deste. Foi apresentado o software de modo minucioso a partir de sua interface até a utilização efetiva no ensino das funções quadrática, cúbica, exponencial e logarítmica. As funcionalidades do software são inúmeras e abrangentes, neste trabalho expomos e utilizamos apenas algumas nesse âmbito de representação e análise gráfica das funções. Alguns conceitos e definições foram expostas e abordadas tendo como ferramenta facilitadora o GeoGebra. Além de abordar os conteúdos citados, foi apresentado também o passo a passo de como utilizar o software para assim contribuir com os colegas professores para que se assim julgarem viável poderem estar incrementando sua prática docente.

Conclui - se que através do uso do software GeoGebra como instrumento de apoio, podemos enriquecer as aulas de matemática e levar aos alunos uma visão diferenciada e interessante especialmente em relação ao conteúdo de Funções, contribuindo assim para um ensino mais dinâmico e interessante capaz de estimular e incentivar positivamente os estudantes promovendo assim uma aprendizagem mais significativa.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, Ernesto Araújo de. ***Funções Quadráticas: ensino e aplicações***. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal de Sergipe. Itabaiana, 2020.

[2] ALVES, Wendel Botelho. *Sobre a datação por decaimento radioativo*. **Revista Connection Line**, Univag. Disponível em: `https://periodicos.univag.com.br/index.php/CONNECTIONLINE/article/download/122/373`. Acesso em: 28 Abr. 2025.

[3] ARAÚJO, Valdiane Sales ; SILVA, Frederico Carvalho da. *O conceito de função em livros didáticos do novo ensino médio*. **Revista Multidebates**, v.7, n.1 Palmas-TO, janeiro de 2023. ISSN: 2594-4568.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Disponível em `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf`.

[5] BONFIM, João Willian Ferreira. ***Potencializando o ensino de funções exponenciais e logarítmicas no ensino médio: uma abordagem através de atividades utilizando o GeoGebra***. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas, da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão. Imperatriz - MA, 2024. Disponível em: `https://repositorio.uemasul.edu.br/server/api/core/bitstreams/a430457b-aed0-4eba-92ed-ca9f0ca90fa3/content`. Acesso em: 10 Fev. 2025.

[6] CANUTO, Patrícia Ribeiro. ***O GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino da matemática***. Dissertação de Mestrado em Matemática - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade de Uberaba - Uberlândia, 2020. Disponível em: `https://repositorio.uniube.br/bitstream/123456789/2371/1/PATR%c3%8dCIA%20RIBEIRO%20CANUTO.PDF`. Acesso em: 14 Maio. 2025.

[7] CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA.***Currículo de referência – Itinerário Formativo em Tecnologia e Computação***. São Paulo: CIEB, 2020. **E-book em pdf**.

[8] ***Circuito RC: Processo de Carga e Descarga de Capacitores***. Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível em: `https://www2.ufjf.br/fisica//files/2010/03/A06-Circuito-RC-2015-10-21.pdf`. Acesso em 30 Abr. 2025.

[9] FERREIRA, Éverson de Moura. ***Possibilidades para o estudo de otimização no ensino médio***. Dissertação de mestrado - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Orientador: Roberto Andreani. Campinas - SP, 2018.

[10] FREITAS, José Luiz Magalhães de; REZENDE, Veridiana. *Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica.* **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 2, n. 3, p. 10–34, 2020. DOI: 10.33871/22385800.2013.2.3.10-34. Disponível em: `https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/5946`. Acesso em: 01 fev. 2025.

[11] ***Funções Convexas***. Disponível em: `http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/conv/conv.html`. Acesso em: 17 de Outubro de 2024.

[12] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz ***Um curso de cálculo, vol. 1 / Hamilton Luiz Guidorizzi***. - 5.ed. - [Reimpr.]. - Rio de Janeiro : LTC, 2013.

[13] LIMA, Elon Lages.*A Equação do Terceiro Grau*. **Revista Matemática Universitária**, No.5, Junho/1987.

[14] LIMA, E. L., ***Álgebra Linear***. Coleção Matemática Universitária, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1995.

[15] LIMA, Elon Lages. ***Números e Funções Reais***. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[16] OLIVEIRA, Edvaldo Ramalho de; CUNHA, Douglas da Silva. *O uso da tecnologia no ensino da Matemática: contribuições do software GeoGebra no ensino da função do 1º grau.* **Revista Educação Pública**, v. 21, nº 36, 28 de setembro de 2021.

Disponível em: `https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/36/o-uso-da-tecnologia-no-ensino-da-matematica-contribuicoes-do-is`
Acesso em: 01 Fev. 2025.

[17] PAIVA, Manoel Rodrigues. ***Matemática (Ensino Médio)***. São Paulo: Moderna, 2009.

[18] PINHEIRO, Aunaty. ***Modelos de crescimento populacional – teoria e aplicação a dados reais***. Universidade de Lisboa. Disponível em: `https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10451/53694/1/TM_Aunaty_Pinheiro.pdf`. Acesso em: 28 Abr. 2025.

[19] QUEIROZ, Cleber da Costa. ***Funções e equações polinomiais comportamento da função de 3º grau***. Dissertação de Mestrado - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística. Goiânia, 2013.

[20] ***Regime de Capitalização Contínua***. Disponível em: `https://pt.scribd.com/document/680203421/Regime-de-Capitalizac-a-o-Conti-nua`. Acesso em: 28 Abr. 2025.

[21] RIBEIRO, Tiago Nery; SOUZA, Divanízia do Nascimento. *A utilização do software GeoGebra como ferramenta pedagógica na construção de uma unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS)*. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, [S. l.], v. 1, n. 1, p. 36–51, 2016. DOI: 10.34179/revisem.v1i1.4507. Disponível em: `https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/4507`. Acesso em: 27 fev. 2025.

[22] SANTOS, Paulo Cezar de Souza. ***O uso de GeoGebra no estudo de função polinomial de grau três***. Dissertação(Mestrado) - Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Cruz das Almas - BA, 2014.

[23] SILVA, F.M; MENEGHETTI, R.C.G. ***Matemática e o pensamento computacional: uma análise na pesquisa brasileira*** XIII ENEM, SBEM, Cuiabá - MT, 2019.

[24] SILVA, Pedro Costa da. ***As desigualdades elementares e suas aplicações***. Dissertação de Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Matemática - Natal, 2019. Disponível em: `https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFRN_5483350c255945f059367d99f7a361b1` . Acesso em: 05 Jan. 2025.

[25] SILVA, J. E. B. da; FANTI, E. de L. C.; PEDROSO, H. A. *Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações.* C.Q.D. - **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 6, 2022. Disponível em: `https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/69`. Acesso em: 10 mar. 2025.

[26] SOUSA, Jakson Ferreira de. ***O uso do GeoGebra no ensino de matemática***. Dissertação de Mestrado em Ensino, Programa de PósGraduação Stricto Sensu Mestrado em Ensino, da Universidade do Vale do Taquari - UNIVATES. Lajeado, 2018.

[27] SOUZA, Fábio Nicácio Barbosa de. ***Uma abordagem geométrica para as equações cúbicas***. Dissertação de Mestrado - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal Rural de Pernambuco,UFRPE. Recife, 2013.

Apêndice A

Guia Prático do GeoGebra no Ensino de Funções

Este apêndice tem como objetivo oferecer um guia prático para a utilização do GeoGebra no ensino das funções quadráticas, cúbicas, exponenciais e logarítmicas. Após a discussão teórica desenvolvida nos capítulos anteriores - que trataram do uso do software no contexto dessas funções -, este material busca fornecer instruções objetivas e acessíveis para sua construção e análise gráfica. A proposta é auxiliar professores e estudantes no uso didático do GeoGebra, promovendo uma aprendizagem mais visual, interativa e significativa.

A.1 Função Quadrática

Descrição do passo a passo para o estudo da função quadrática através do GeoGebra.

1º Passo: Digite no campo de "Entrada"a expressão `ax^2 + bx + c` e pressione a tecla Enter para que o gráfico da função quadrática seja gerado, conforme ilustrado na Figura A.1.

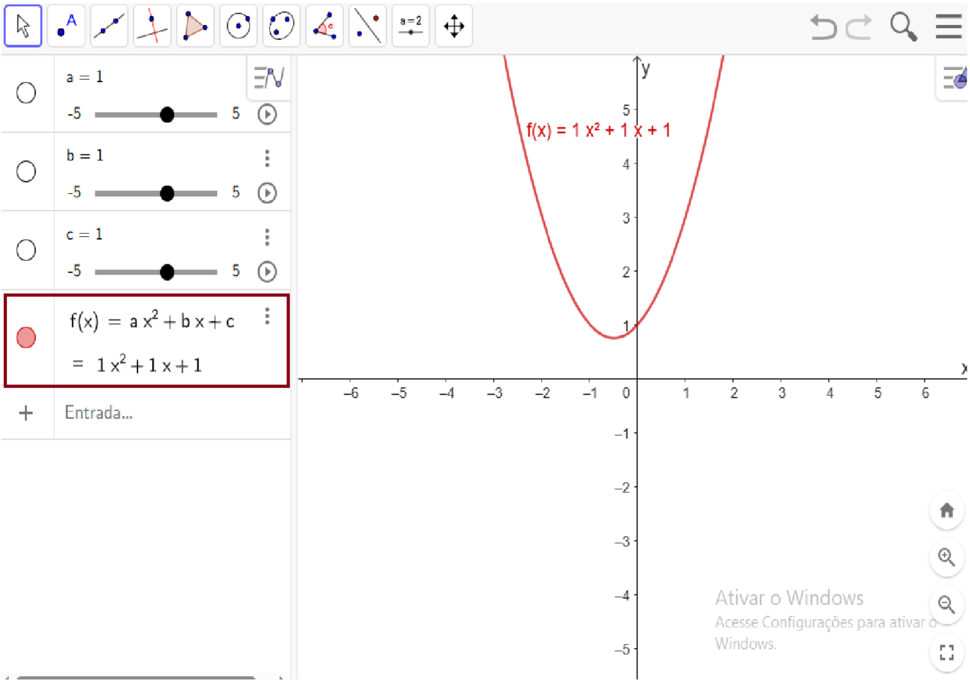

Figura A.1: Função quadrática com coeficientes $a = b = c = 1$

.

2º Passo: Note que, ao variar os coeficientes genéricos a, b e c, é possível observar como essas alterações influenciam o comportamento do gráfico da função quadrática.

Para isso, basta arrastar o controle do coeficiente desejado ao longo do intervalo indicado, conforme ilustrado nas Figuras A.2, A.3 e A.4.

- Variação do coeficiente a.

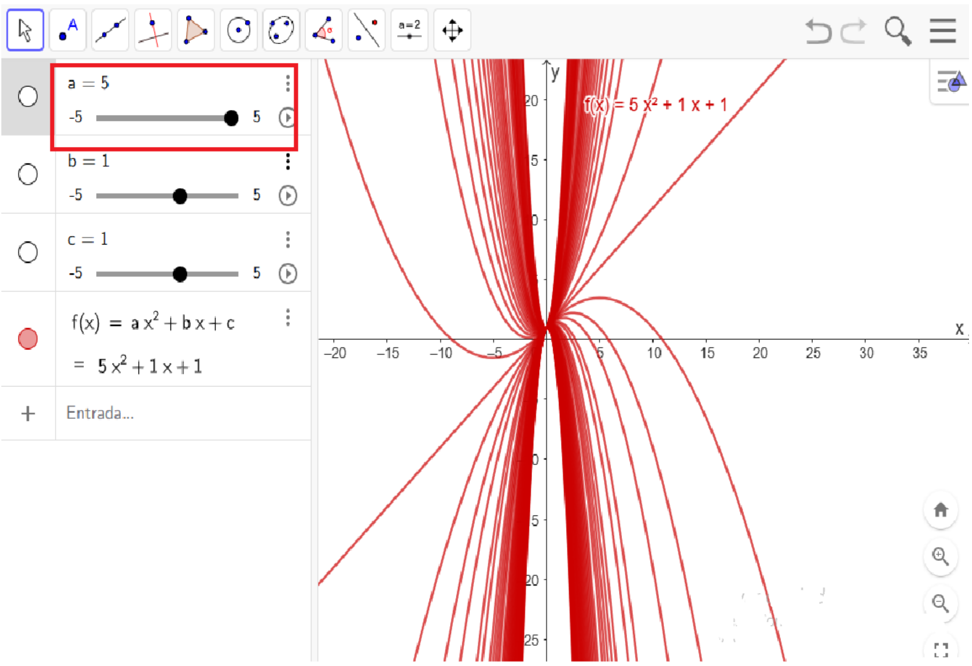

Figura A.2: Coeficiente a variando no Intervalo de [-5, 5]

- Variação do coeficiente b.

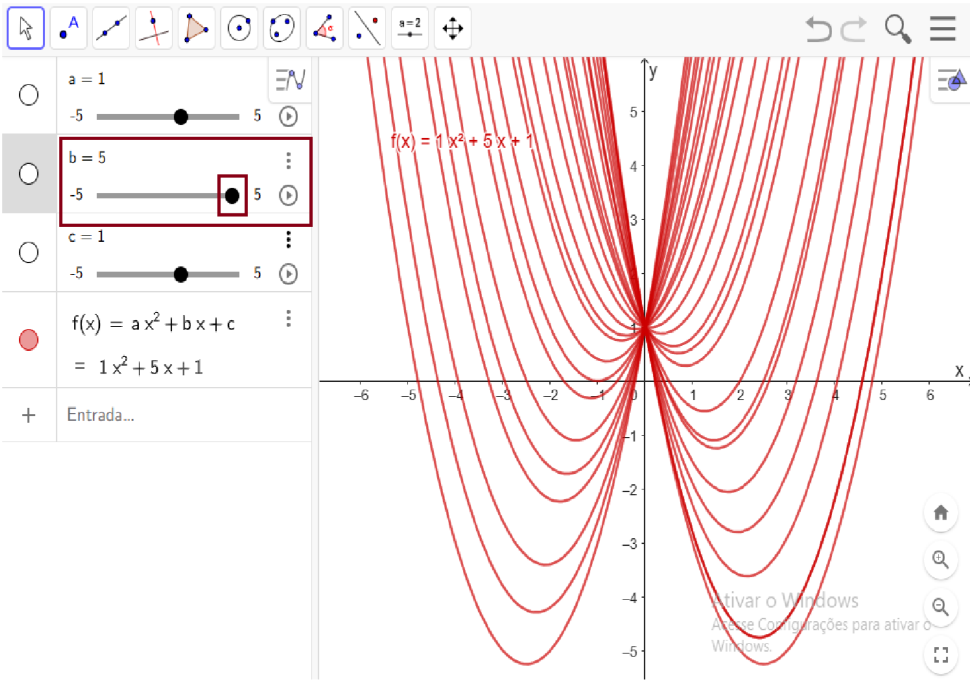

Figura A.3: Coeficiente b variando no Intervalo de [-5, 5]

- Variação do coeficiente c.

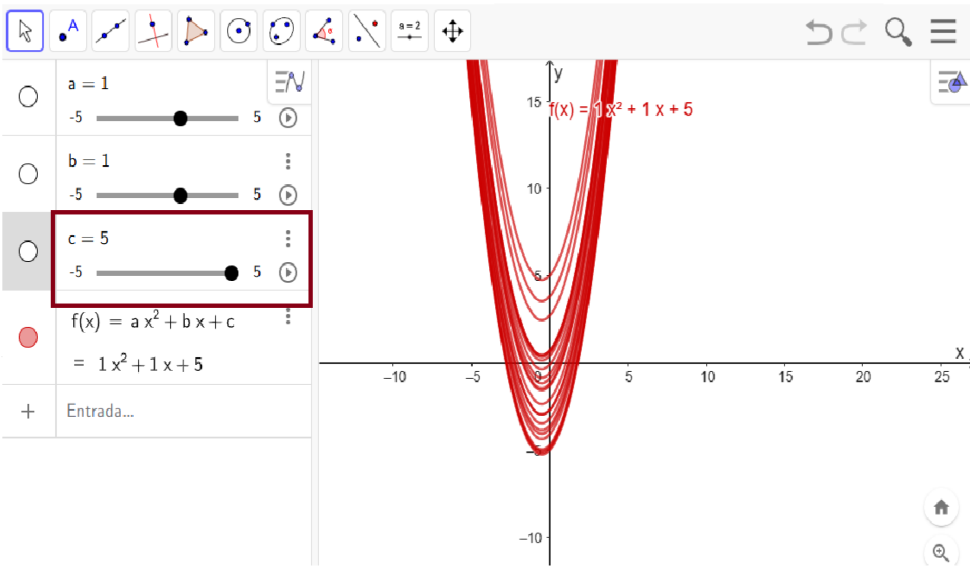

Figura A.4: Coeficiente c variando no Intervalo de [-5, 5]

A seguir, temos a descrição do passo a passo, de como determinar os zeros e pontos de máximo ou mínimo de uma função quadrática .

1º Passo: Digite no campo de "Entrada"a expressão correspondente a lei de formação da função, temos como exemplo a função $f(x) = x^2 + 6x + 8$. Digite `x^2 + 6x + 8` e dê Enter.

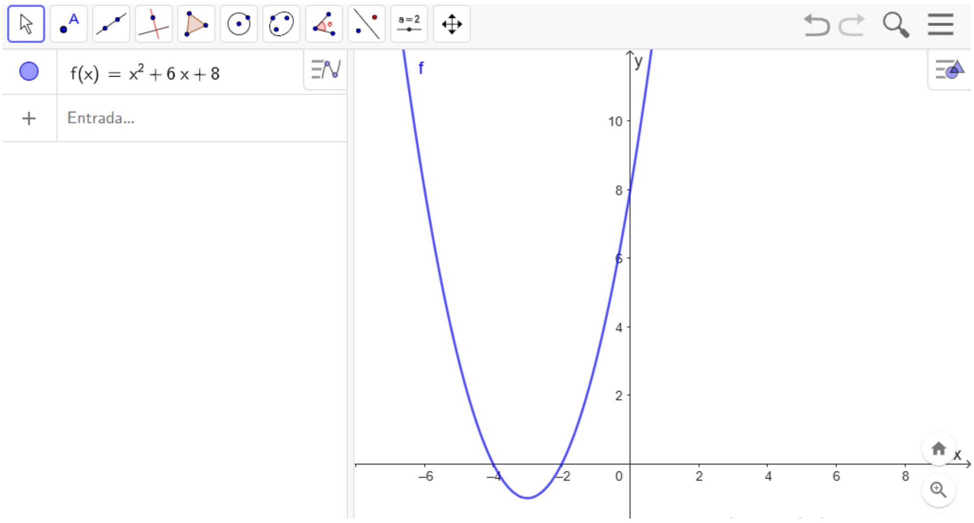

Figura A.5: Gráfico da função $f(x) = x^2 + 6x + 8$

.

2º Passo: Nas opções de Ferramentas, selecione o ícone relacionado a pontos da curva. Onde aparecerá inúmeras opções, a opção "Raízes"deverá ser selecionada.

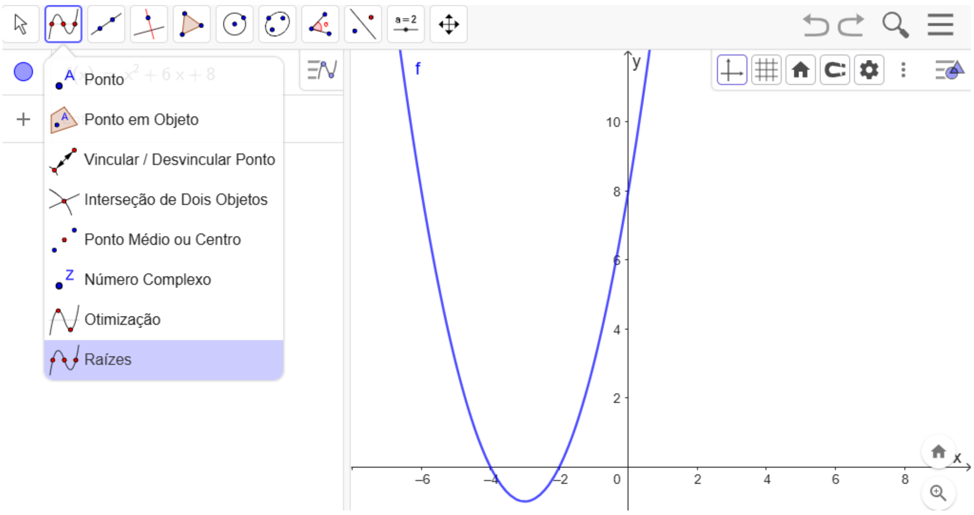

Figura A.6: Interface do GeoGebra com a barra de Ferramentas sendo acionada

.

3º Passo: Após selecionar a opção "Raízes", basta clicar sobre o gráfico da função.

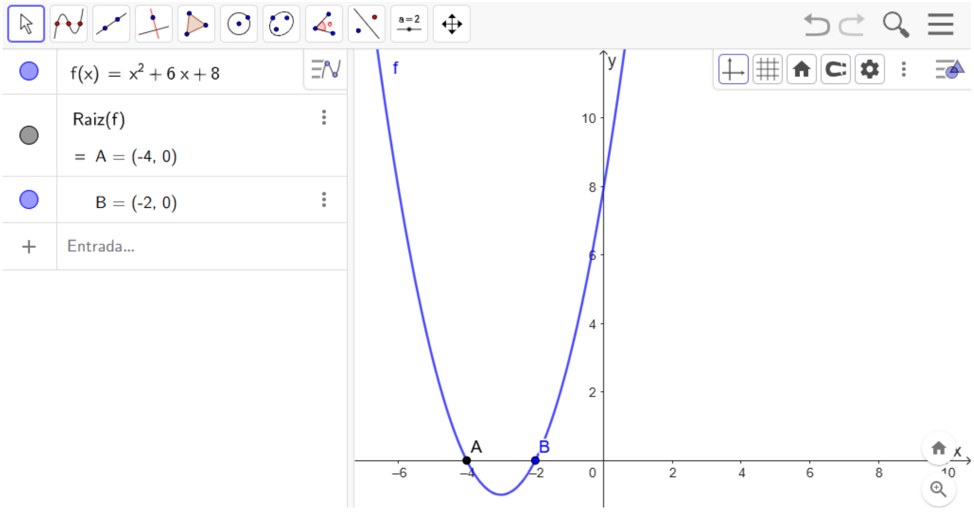

Figura A.7: As abscissas dos pontos A e B são os zeros da função $f(x) = x^2 + 6x + 8$

.

De modo análogo, conseguimos o ponto de máximo ou mínimo.

1º Passo: Refaça o que foi feito no 2º Passo A.1, e ao invés de selecionar "Raízes"selecione "Otimização".

2º Passo: Em seguida clique sobre o gráfico de f.

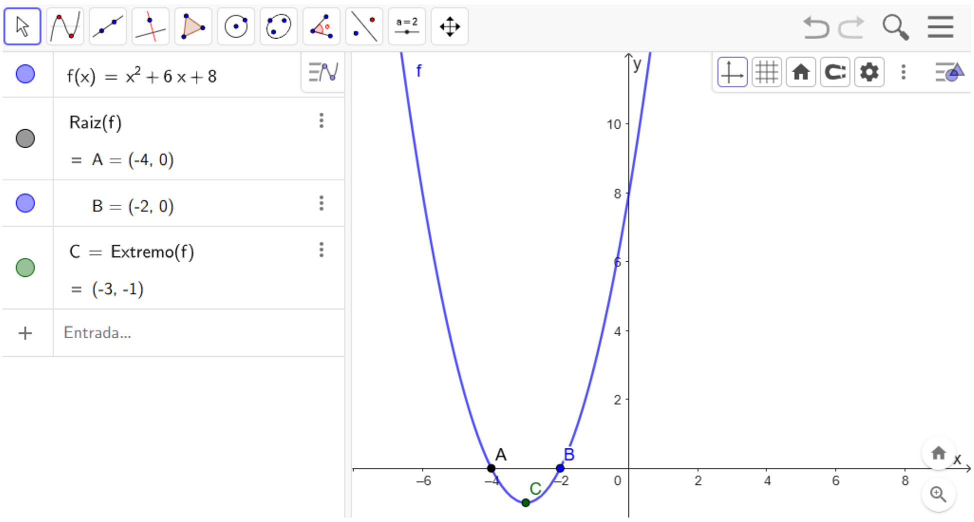

Figura A.8: A abcissa do ponto C é o ponto de mínimo de f

Para determinarmos a interseção com o eixo Y, basta refazer o 2º Passo A.1 e selecionar a opção "Interseção"de Dois Objetos, e após isso clique sobre a curva de f e sobre o eixo Y, o ponto aparecerá, como mostra o gráfico abaixo.

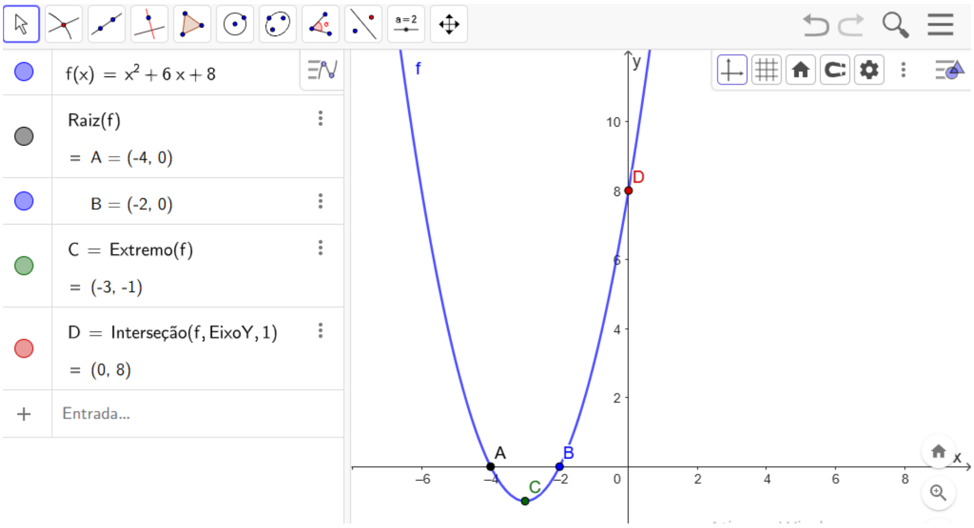

Figura A.9: A ordenada do ponto D é o ponto de interseção de f com o eixo Y

A.2 Função cúbica

Descrição do passo a passo, a ser seguido para este realizar o estudo dos intervalos de crescimento e decrescimento da função definida em 2.1.5.

Inicialmente, exploraremos um caso particular da função cúbica $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Em seguida, analisaremos o caso geral.

1° Passo: Digite no campo de "Entrada"a expressão `x^3 + 2x^2` , para que o gráfico de f apareça, como na figura A.10.

Figura A.10: Interface do GeoGebra com o comando no campo "Entrada"

2° Passo: Marcando os extremos e raízes de f. Na aba "Ferramentas"clique em "Raízes"e em seguida sobre o gráfico de f, depois volte na aba "Ferramentas", clique em "Otimização"e logo após sobre o gráfico de f, como na figura A.11.

Figura A.11: Interface do GeoGebra com o comando no campo "Ferramentas"

O gráfico ficará do seguinte modo, ver figura A.12 :

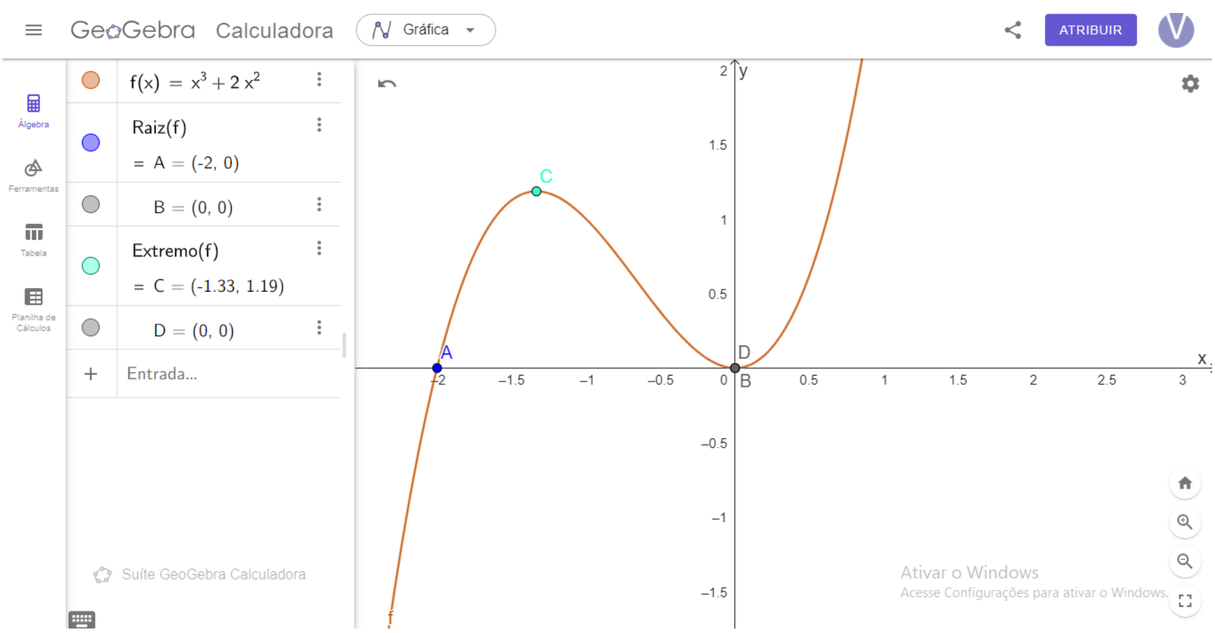

Figura A.12: Extremos e Zeros de f

3° Passo: Utilizaremos o recurso "controle deslizante"para que possamos movimentar a reta tangente ao gráfico e assim, ao analisar sua inclinação podermos tirar as devidas conclusões acerca dos intervalos de crescimento e decrescimento da função em estudo.

- Em primeiro momento, na aba "Ferramentas"clique no recurso "controle deslizante"como mostra a figura abaixo:

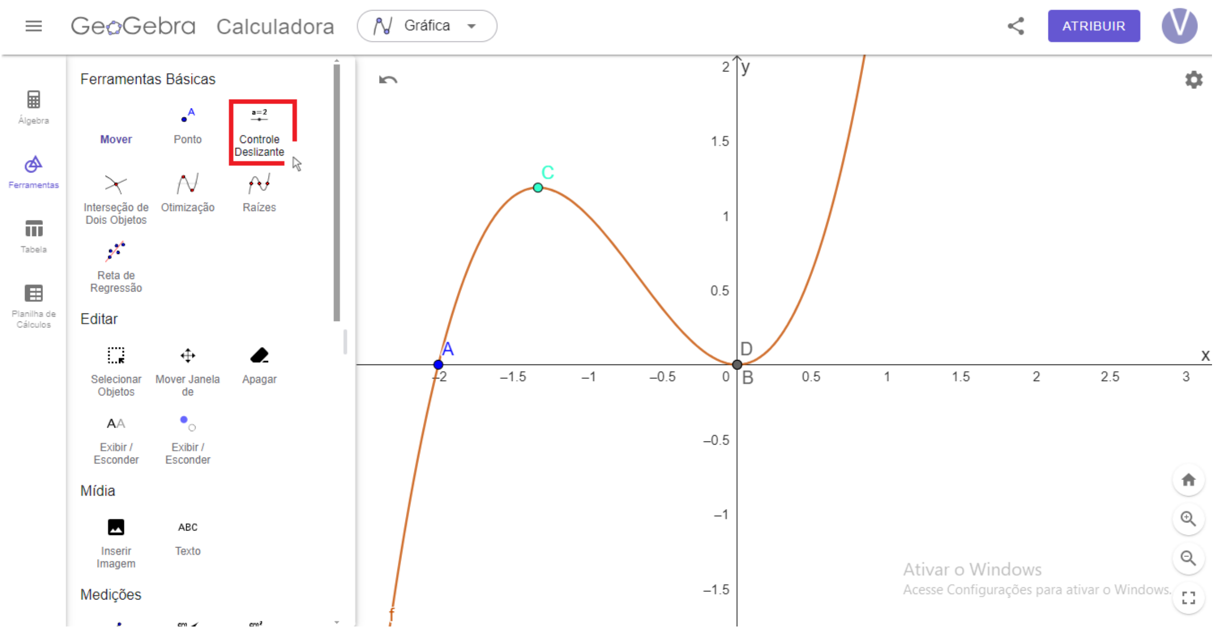

Figura A.13: Interface do GeoGebra com o comando no campo "Controle deslizante"

- Em seguida, ao abrir a tela como na figura A.14, clique em "OK".

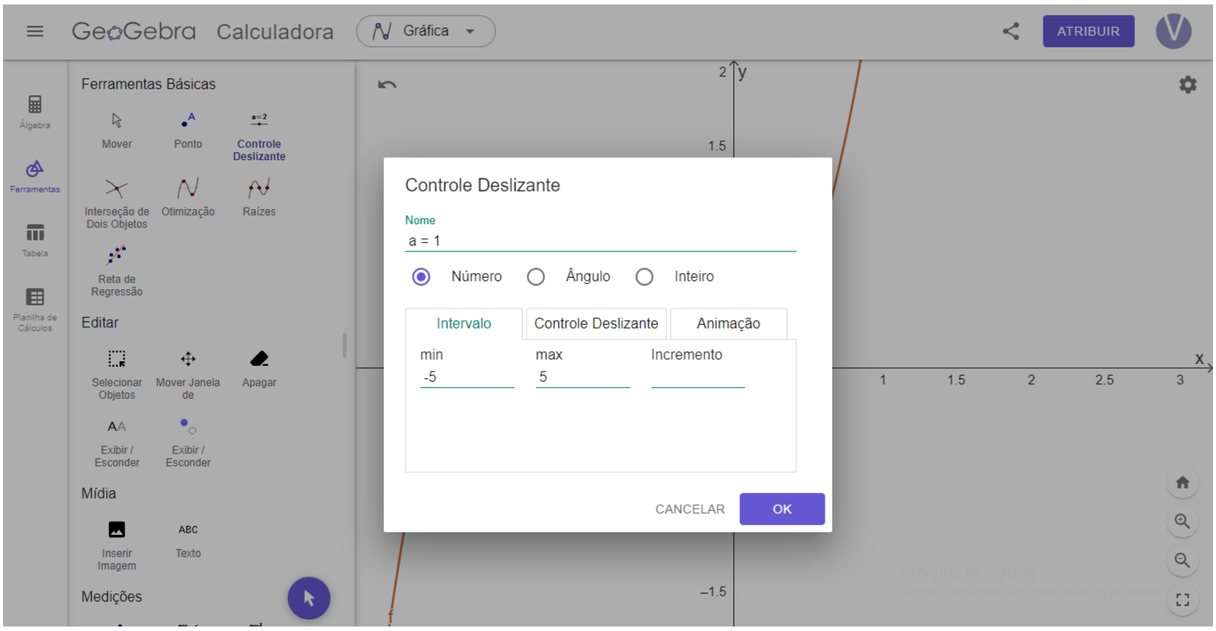

Figura A.14: Interface do GeoGebra com o comando no campo "Controle deslizante"

- Agora, iremos configurar o "controle deslizante"definindo o inicio de onde você desejar que ele inicie, basta editar os números de inicio e fim do intervalo como demarcado na figura A.15, coloque o valor de a sendo um valor que esteja no domínio de f, escolhemos o valor do ponto de máximo por ser um ponto explicito no gráfico.

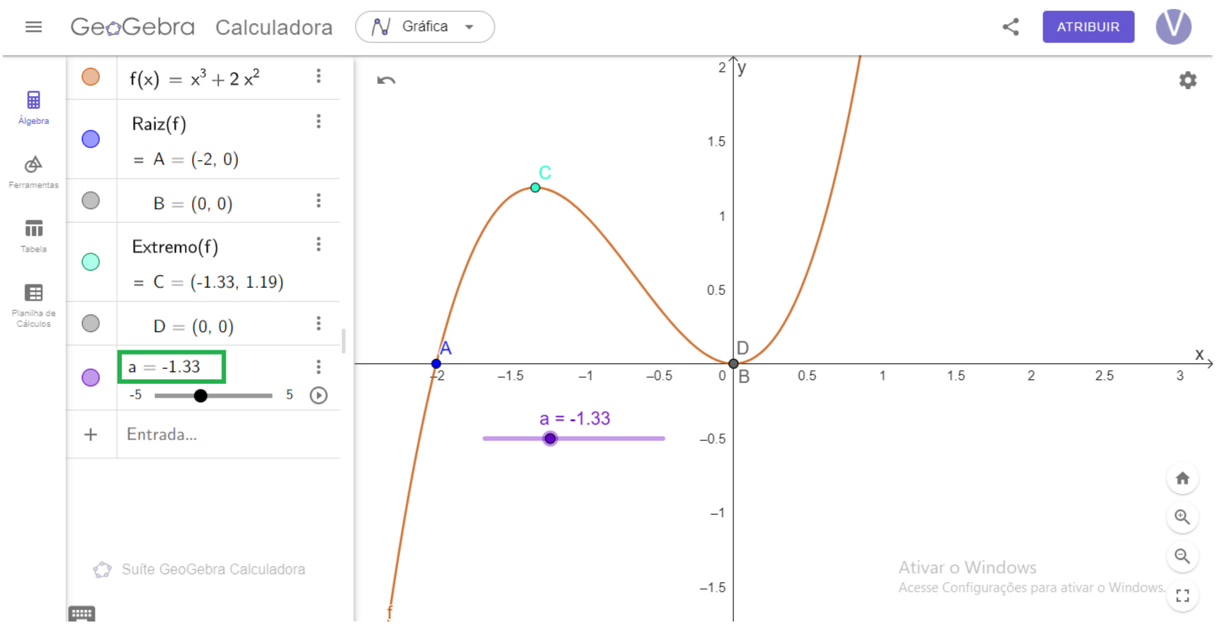

Figura A.15: Configurando o intervalo

4° Passo: Inserir o ponto P, pelo o qual a reta tangente percorrerá. No comando de "Entrada"digite `P=(a,f(a))`, dê 'Enter', ver figura A.16

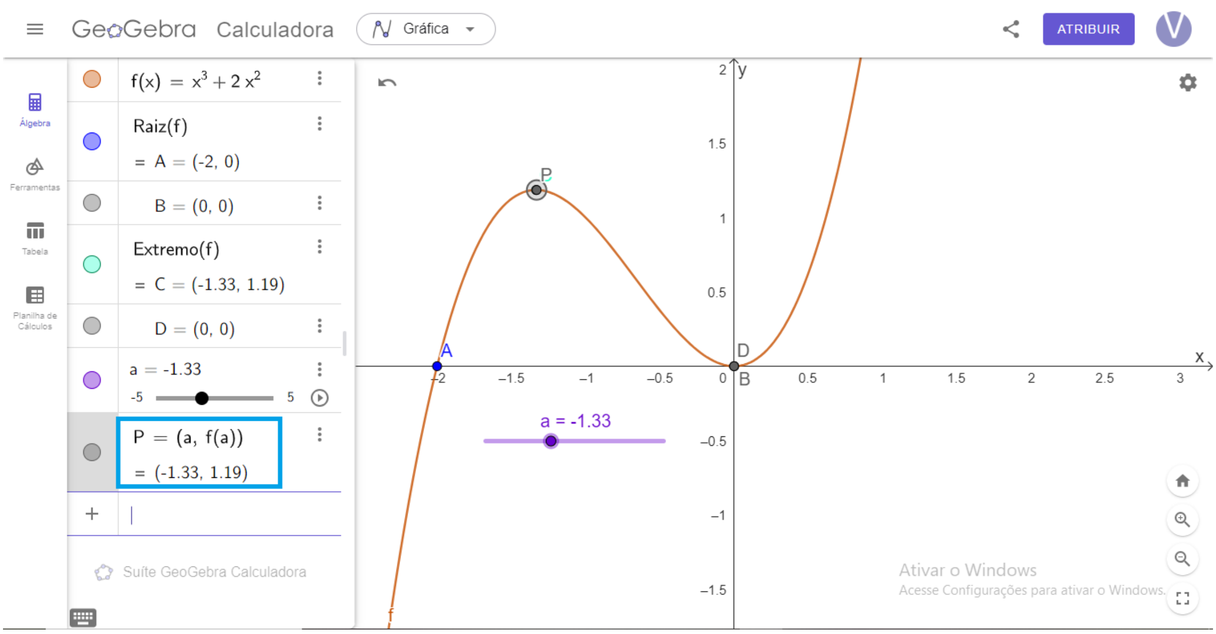

Figura A.16: Inserindo o ponto P onde a reta tangente percorrerá

5° Passo: Inserindo a reta tangente ao gráfico de f.

- Primeiramente, digite na "Entrada"g: Tan, ao fazer isso, aparecerá as opções como na figura A.17 abaixo, onde você clicará na seta que aparece no canto da categoria "Tangente", onde está sinalizado com o número 2.

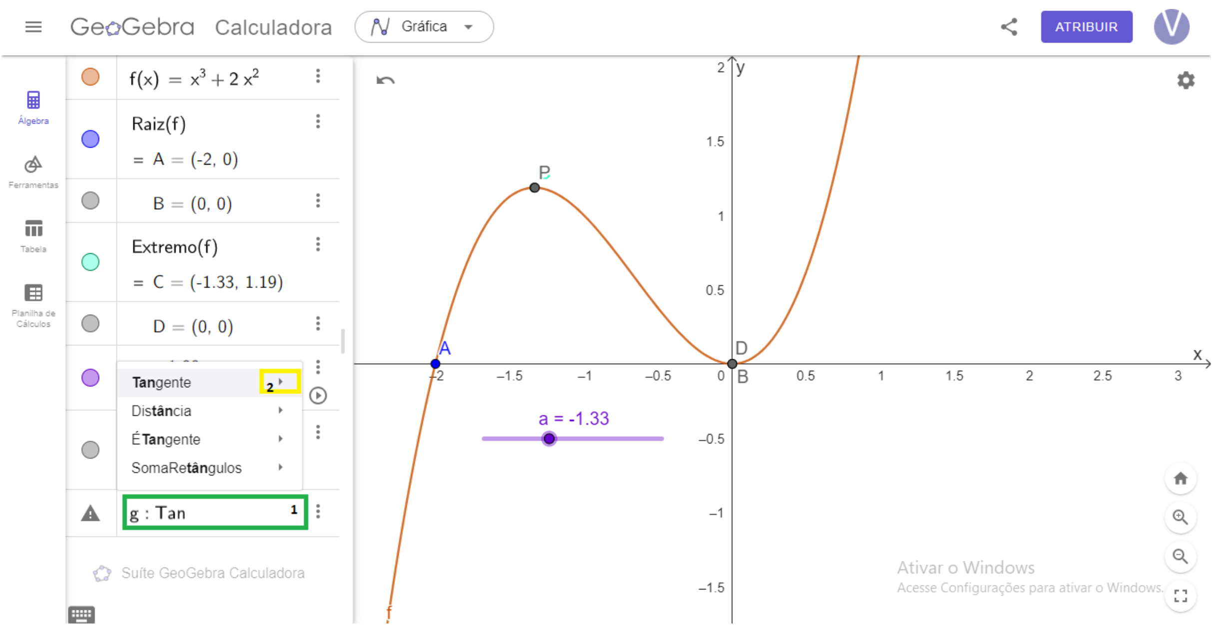

Figura A.17: Inserindo a reta tangente - parte 1

- Aparecerá outra pequena Aba com opções, onde você clicará na opção assinalada como na figura A.18 abaixo, em vermelho.

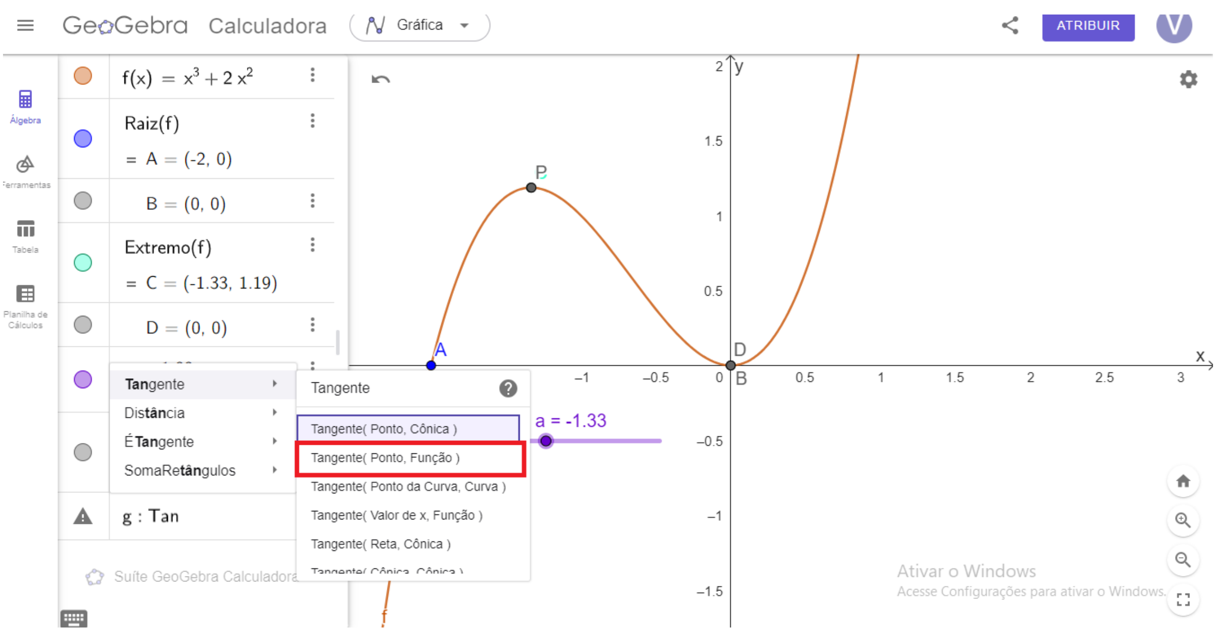

Figura A.18: Inserindo a reta tangente - parte 2

Você digitará `(P,f(x))` no campo que abrirá ao clicar na opção acima. Ficará da seguinte forma, ver figura A.19 :

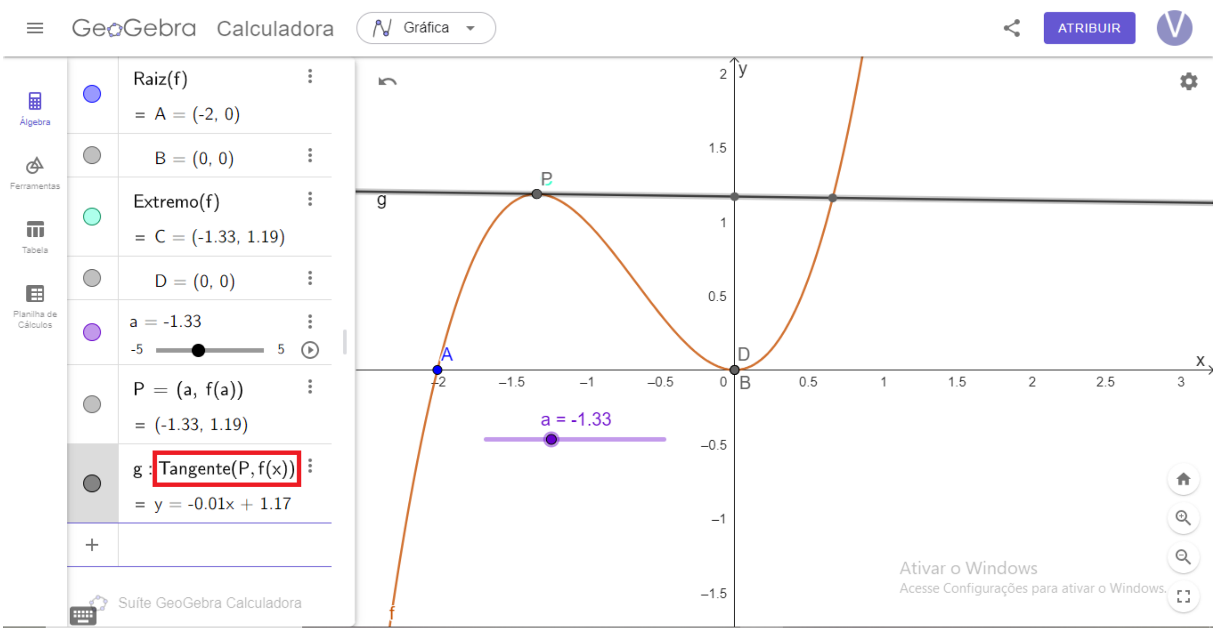

Figura A.19: Inserindo a reta tangente - parte 3

6° Passo: Acionando a animação e analisando os intervalos de crescimento e decrescimento de f, a partir da inclinação da reta tangente ao gráfico. Clicando em cima do ponto a do controle deslizante, e arrastando ele no intervalo estabelecido fará com que a reta tangente percorra o gráfico, e veremos sua inclinação. Veja a Figura abaixo A.20.

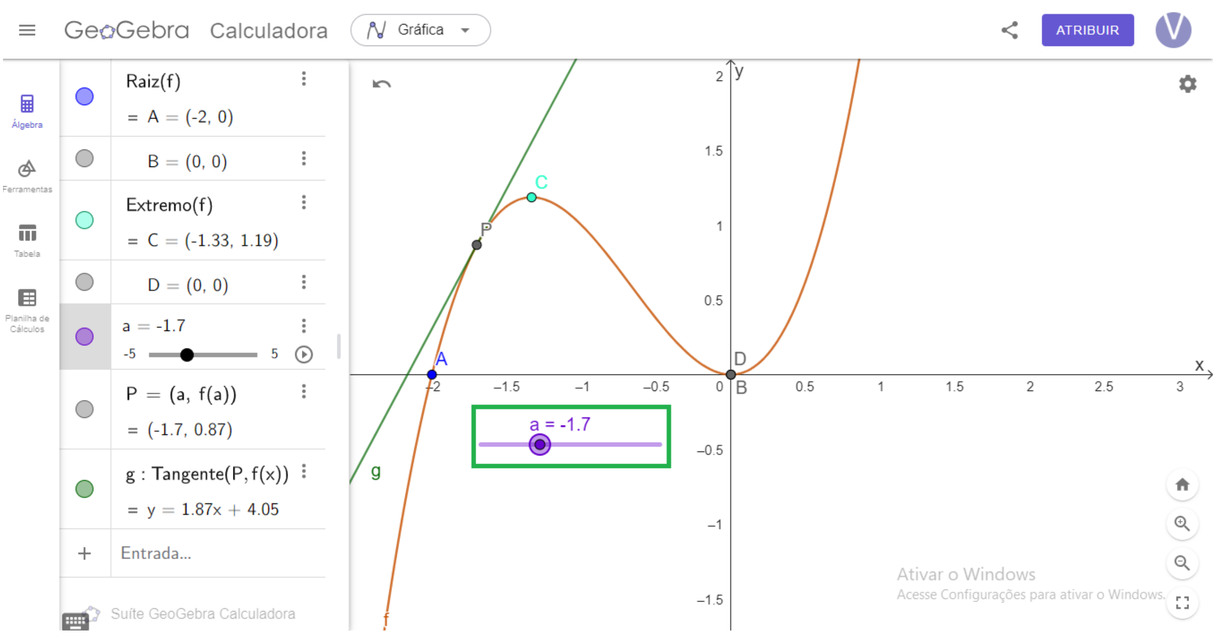

Figura A.20: Inclinação da reta tangente ao gráfico no intervalo de $(-2; -1,33)$

Observe no gráfico da Figura A.20 que no intervalo $(-\infty; -1,33)$ a reta tangente aponta para cima significando inclinação positiva o que remete a conclusão de que $f(x) = x^3 + 2x^2$ é crescente neste intervalo.

Para o caso geral, basta digitar `ax^3 + bx^2 + cx + d` no GeoGebra, pressionar *Enter* e, em seguida, movimentar os coeficientes a, b, c e d para analisar o comportamento do gráfico da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

A.3 Função Exponencial

Anteriormente, discutimos a função a^x, suas principais propriedades e como representá-las no GeoGebra. Agora, faremos um guia prático para o uso do GeoGebra na exploração da função da forma $f(x) = c \cdot a^x$.

Note que, no caso em que $c = 1$, recuperamos a função tratada na Subseção 2.5.1, e todas as propriedades abordadas anteriormente continuam válidas.

1º Passo: No campo de "Entrada"digite `f(x)=c(a^x)` e dê Enter.

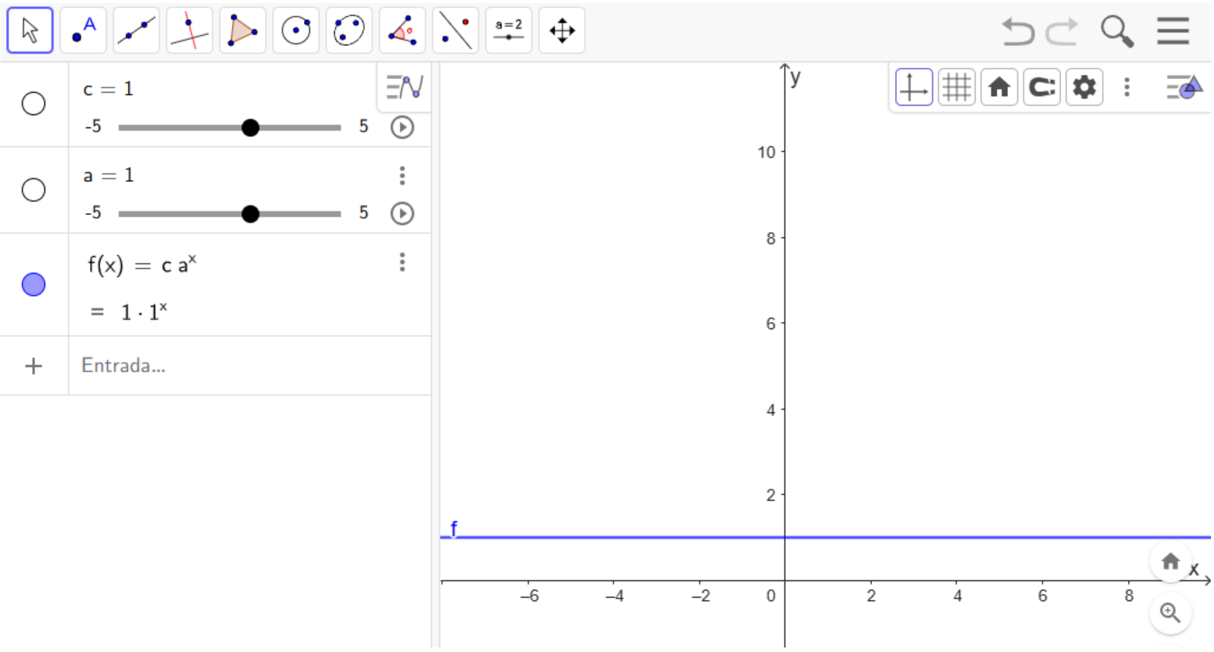

Figura A.21: Interface do GeoGebra com a função exponencial em sua formula genérica

O intervalo pode ser alterado de modo a obedecer os critérios de existência da função exponencial, de modo bem simples ao clicarmos próximo ao extremo do intervalo que desejamos editar.

2ª Passo: Movimente os coeficientes sobre o intervalo e veja o que acontece, você poderá usar o "Controle Deslizante", ou movimentar manualmente arrastando o mouse sobre o intervalo.

- Variação do coeficiente a no intervalo $(0, 1)$.

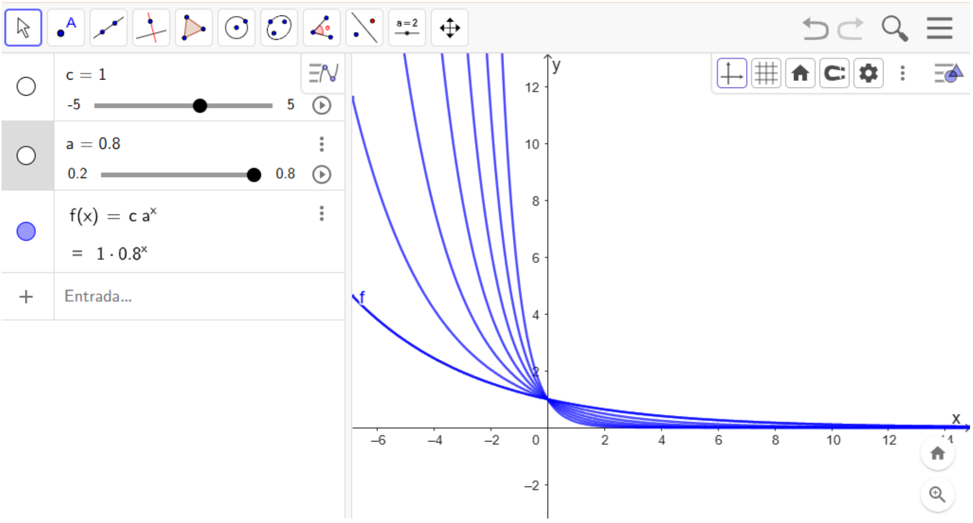

Figura A.22: Variação do coeficiente a da função $f(x) = c.a^x$ no intervalo $(0, 1)$

- Variação do coeficiente a no intervalo $(1, 5)$.

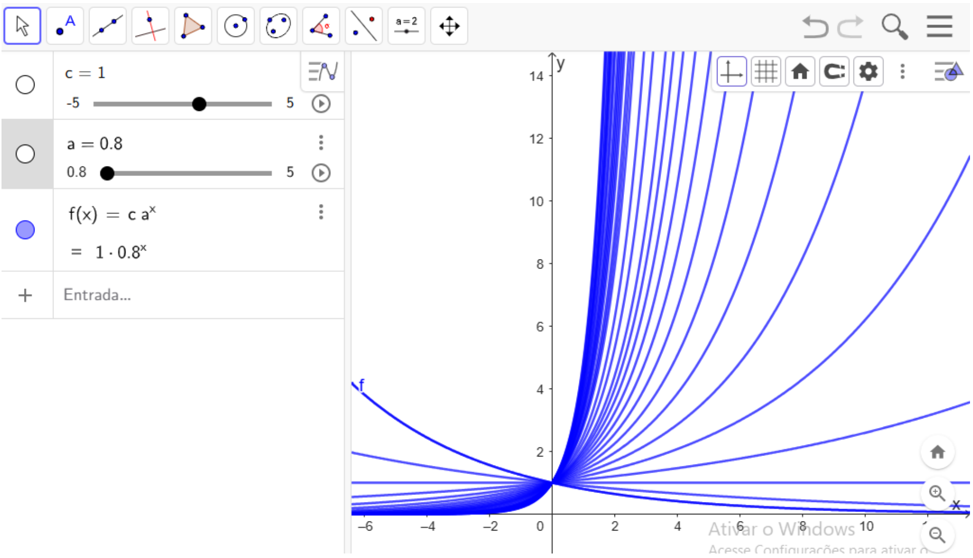

Figura A.23: Variação do coeficiente a da função $f(x) = c.a^x$ no intervalo $(1, 5)$

- Variação do coeficiente c no intervalo $(-5, 5)$.

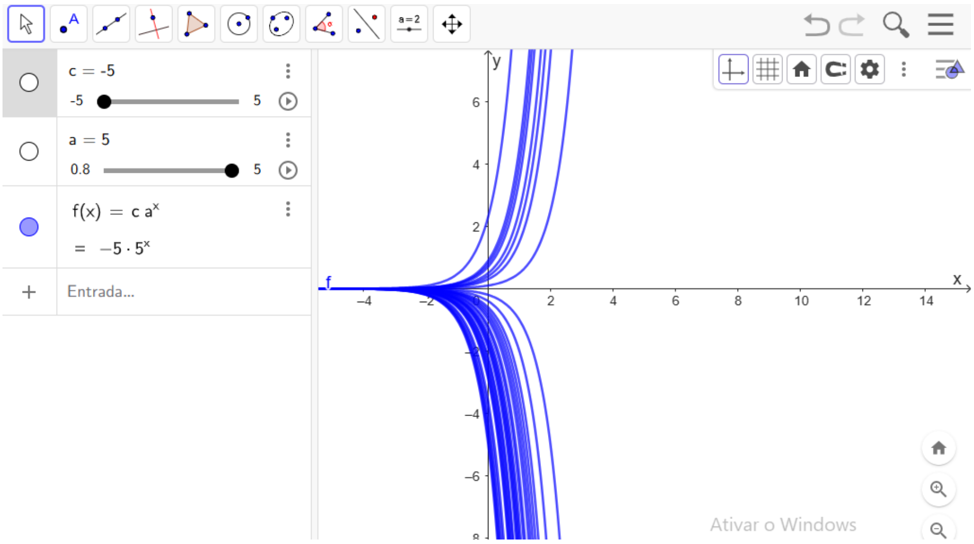

Figura A.24: Variação do coeficiente c da função $f(x) = c.a^x$ no intervalo $[-5, 5]$

A.4 Função logarítmica

De modo análogo, realizamos a representação da função logarítmica como descrito a seguir:

1º Passo: No campo de "Entrada"do GeoGebra, digite `f(x)=log(a,x)`. Ao começar a digitar aparecerá a seguinte tela.

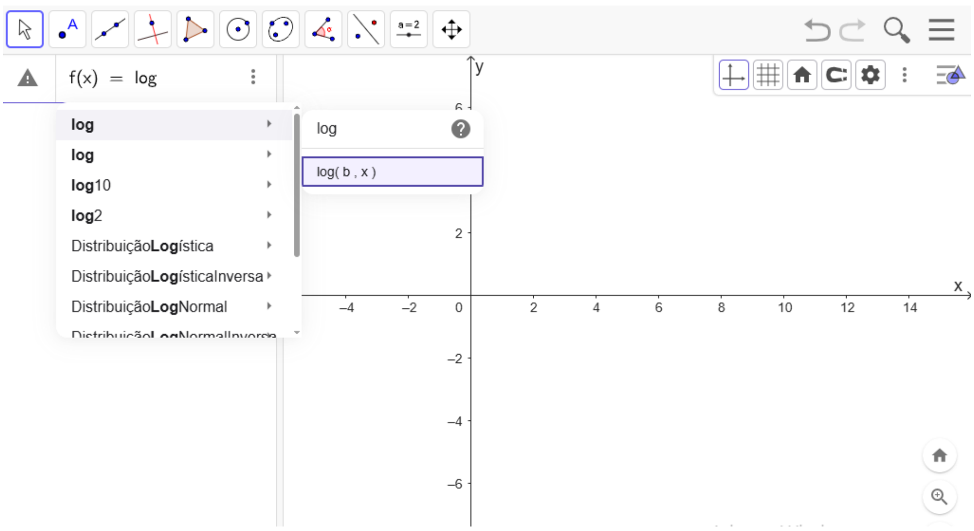

Figura A.25: Interface do GeoGebra ao digitar a Função Logarítmica

Siga a instrução acima e ao clicar na opção em destaque aparecerá o campo para ser digitado o `(a,x)` . Configure o intervalo de acordo com a condição de existência do logaritmo.

2º Passo: Faça o a variar no intervalo através da ferramenta "Controle deslizante"ou manualmente ao deslizar com o mouse sobre o intervalo, produzindo assim a figura a seguir.

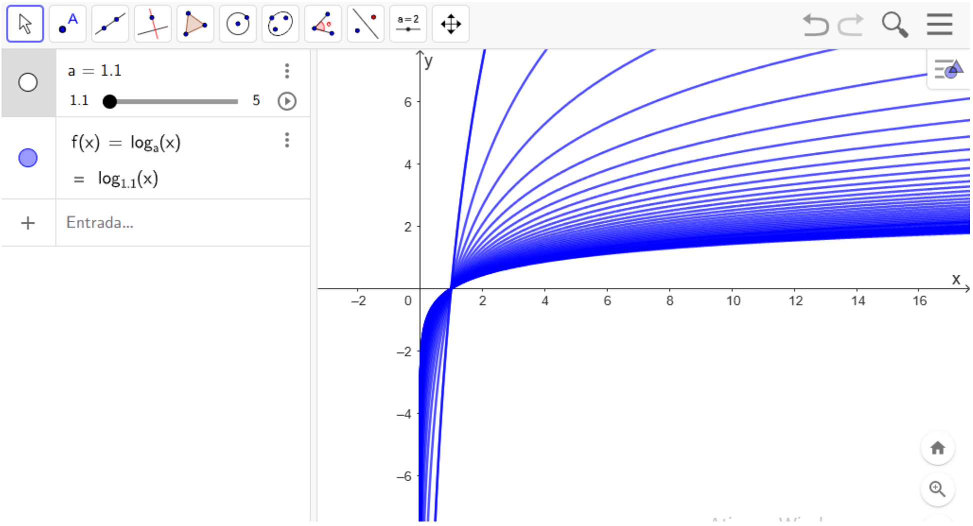

Figura A.26: Variação da base a no intervalo $(1.1, 5)$

E essa é a representação gráfica da função logarítmica $f(x) = log_a x)$ para $1 < a < 5$, através do GeoGebra.

Apêndice B

Derivadas

B.1 A Derivada

A derivada é um dos conceitos fundamentais do cálculo diferencial. Intuitivamente, ela representa a taxa de variação de uma função em relação à sua variável independente. No contexto geométrico, a derivada de uma função em um ponto corresponde à inclinação da reta tangente ao gráfico da função naquele ponto. Esse conceito permite analisar o comportamento da função, identificando intervalos de crescimento e decrescimento, além de pontos de máximo, mínimo e inflexão.

Definição B.1.1. *Dada uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é derivável no ponto $x_0 \in I$ se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. Representamos a derivada de f no ponto a por $f'(x_0)$, isto é,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Fazendo a mudança de variável $h = x - x_0$, obtemos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Proposição B.1.1. *Seja $f(x) = ax^n$ com $n \in \mathbb{N}$. Prove que $f'(x) = nax^{n-1}$.*

Demonstração. Use indução sobre n e a propriedade da derivada do produto. ■

Proposição B.1.2. *Seja $f(x) = ae^{bx}$. Então $f'(x) = abe^{bx}$.*

Proposição B.1.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = a^x$ e $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ uma constante. Então $f'(x) = a^x ln\, a$.*

B.2 Máximos, Mínimos, Crescimento e Decrescimento

Máximos e mínimos locais e globais

Seja f uma função definida em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que:

- f possui um **máximo local** em $x = a \in I$ se existe um intervalo aberto $J \subseteq I$ contendo a tal que, para todo $x \in J$, temos $f(x) \leq f(a)$.
- f possui um **mínimo local** em $x = a \in I$ se existe um intervalo aberto $J \subseteq I$ contendo a tal que, para todo $x \in J$, temos $f(x) \geq f(a)$.
- f possui um **máximo global** (ou absoluto) em $x = a \in I$ se, para todo $x \in I$, temos $f(x) \leq f(a)$.
- f possui um **mínimo global** (ou absoluto) em $x = a \in I$ se, para todo $x \in I$, temos $f(x) \geq f(a)$.

Teorema B.2.1. *Se uma f é derivável em (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ é ponto de máximo ou de mínimo, então $f'(x_0) = 0$.*

Teorema B.2.2. *Seja uma função f é derivável em um intervalo aberto I.*

a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I.

b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é decrescente em I.

c) Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ então f é constante em I.

Definição B.2.1. *(***Ponto Crítico***) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_f$, dizemos que x_0 é um ponto crítico de $f \Leftrightarrow$f'(x_0) $= 0$.*

Teorema B.2.3. (Teste da primeira derivada) *Seja f derivável no intervalo aberto (a, b) com derivada de primeira ordem contínua e $x_0 \in (a, b)$ um ponto crítico de f.*

a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, x_0)$ e $f'(x) < 0$ para todo $x \in (x_0, b)$, então x_0 é um ponto de máximo local de f.

b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, x_0)$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, b)$, então x_0 é um ponto de mínimo local de f.

c) se f' não muda de sinal em I então x_0 não é ponto de máximo nem de mínimo em (a, b).

Teorema B.2.4. (Teste da segunda derivada) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ com derivada de segunda ordem no intervalo aberto I com derivada de primeira ordem contínua e $x_0 \in I$ um ponto crítico de f.*

a) Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local de f.

b) Se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local de f.

Teorema B.2.5. *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e uma função $f : I \to \mathbb{R}$ possuindo derivadas de segunda ordem.*

a) Se para todo $x \in I$, tem - se $f''(x) > 0$, então o gráfico de f tem concavidade para cima em I.

b) Se para todo $x \in I$, tem - se $f''(x) < 0$, então o gráfico de f tem concavidade para baixo em I.