UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS ARAPIRACA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

MATEUS RODRIGUES MELO

CONHECIMENTOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO NOVO ENSINO MÉDIO: UMA OPORTUNIDADE DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA

ARAPIRACA-AL
2025

MATEUS RODRIGUES MELO

CONHECIMENTOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO NOVO ENSINO MÉDIO: UMA OPORTUNIDADE DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do *Campus* Arapiraca-AL da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Iury Rafael Domingos de Oliveira.

ARAPIRACA-AL

2025

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca Setorial *Campus* Arapiraca - BSCA

M528c Melo, Mateus Rodrigues
Conhecimentos de matemática financeira no novo ensino médio [recurso eletrônico]: uma oportunidade de educação financeira / Mateus Rodrigues Melo. – Arapiraca, 2025.
61 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Iury Rafael Domingos de Oliveira.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2025.
Disponível em: Universidade Digital (UD) – UFAL (*Campus* Arapiraca).
Referências: f. 61-62.

1. Matemática. 2. Educação financeira. 3. Matemática financeira – Novo ensino médio. I. Oliveira, Iury Rafael Domingos de. II. Título.

CDU 51

Bibliotecário responsável: Márcio Thiago dos Santos Albuquerque
CRB - 4 / 2052

MATEUS RODRIGUES MELO

Conhecimentos de matemática financeira no Novo Ensino Médio: uma oportunidade de educação financeira

Trabalho de Conclusão de Dissertação submetido à banca examinadora do curso Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 15 de agosto de 2025.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Iury Rafael Domingos de Oliveira – UFAL
(Orientador/Presidente)

Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti – UFAL
(Avaliador interno)

Prof. Dr. Diego Alves Adauto - UERN
(Avaliador externo)

Dedico este trabalho a minha mãe, Josefa Rodrigues da Silva Melo (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, por todas as suas bençãos, oportunidades e proteção em minha vida. Obrigado, meu Deus!

Agradeço a minha mãe, Josefa Rodrigues da Silva Melo, “Dona Dida”, que foi morar com Deus durante esse meu trajeto no PROFMAT, que com toda a sua preocupação, ligava todas as sextas-feiras perguntando se já estava voltando para casa. Que saudades, mãe! Obrigado por tudo!

Agradeço a toda minha família, que é a grande benção e alicerce da minha vida – meu pai (José Rocha), meus irmãos (Jhonatan, Marco, Mônica e Zuleica) e minha noiva (Juliana). Gratidão por sempre estarem presentes na minha vida!

Agradeço a Eloísa, uma pessoa que conheci graças ao PROFMAT, dividimos muitas viagens e construímos uma amizade. Além disso, tanto que me ajudou no PROFMAT e, especialmente, nessa dissertação.

Agradeço a todos os meus colegas de sala do PROFMAT (Natielly, Edicláudio, Vagner, Jadiel, Jaelson, Jones, Weverton, Elberlania e Paulo). Obrigado por toda ajuda e companheirismo, minhas sextas-feiras foram mais divertidas, graças a vocês.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, em especial meu orientador, o Prof. Dr. Iury Domingos, por todos os seus ensinamentos e contribuições a essa dissertação. Agradecimento especial também ao professor Sidney, que sempre foi compreensível e se dispôs a ajudar, mesmo quando eu não merecia.

RESUMO

A educação financeira é um tema contemporâneo de grande relevância para pessoas de todas as idades, especialmente para os jovens do Ensino Médio, que em breve passarão a participar ativamente do mundo financeiro. Esses estudantes estarão expostos a diversas oportunidades e riscos, cujas consequências podem impactar significativamente suas vidas. Apesar do amplo acesso à informação, acreditamos que a educação financeira deve ser tratada de forma sistematizada, e a escola desempenha um papel fundamental nesse processo — especialmente por meio da matemática, disciplina que mais se aproxima diretamente do tema. Neste trabalho, discutimos a importância da educação financeira, a abordagem da matemática financeira como instrumento para a tomada de decisões conscientes e apresentamos sugestões de ferramentas digitais que podem apoiar esse processo. Ao final, propomos uma disciplina eletiva de Educação Financeira, alinhada às diretrizes do Novo Ensino Médio.

Palavras-chave: educação financeira; matemática financeira; novo ensino médio.

ABSTRACT

Financial education is a contemporary topic of great relevance for people of all ages, especially for high school students who will soon engage actively in the financial world. These young individuals will face various opportunities and risks that may significantly impact their lives. Despite the wide availability of information, we argue that financial education should be addressed in a systematic and structured manner, with schools playing a key role in this process—particularly through mathematics, the subject most closely related to the theme. This study discusses the importance of financial education, explores how mathematical concepts can support informed financial decision-making, and suggests digital tools that can assist in this learning journey. Finally, we present a proposal for an elective course on Financial Education, aligned with the guidelines of the New High School curriculum reform in Brazil.

Keywords: financial education; financial mathematics; new high school curriculum.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, há uma crescente conscientização no Brasil sobre a importância da educação financeira, sobretudo no âmbito escolar. Uma amostra dessa preocupação é que foi instituída em 22 de dezembro de 2010, por meio do Decreto Presidencial nº 7.397, a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF e com isso ela passou a ser uma política de estado, isto é, de caráter permanente.

Um dos objetivos da ENEF é “aumentar a capacidade do cidadão para realizar escolhas conscientes sobre a administração dos seus recursos”. Nesse mesmo sentido, Andrade (2023) acredita que:

> A educação financeira desempenha um papel fundamental na vida de todos, independentemente de idade, ocupação ou renda. Ela é o processo de adquirir conhecimentos, habilidades e atitudes necessárias para tomar decisões financeiras inteligentes e responsáveis. A educação financeira é uma ferramenta poderosa que capacita as pessoas a gerenciar seu dinheiro de forma eficaz, estabelecer metas financeiras realistas e alcançar a estabilidade financeira.

Seguindo o mesmo raciocínio, a integração das competências financeiras nos currículos escolares é uma tarefa que também vem sendo amplamente discutida, visto que a formação de cidadãos em se tratando de educação financeira é também um papel da educação escolar, pois pode contribuir para uma sociedade economicamente mais estável e resiliente.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), documento norteador de todos os currículos nacionais de educação básica, traz a educação financeira desde o ensino fundamental como tema contemporâneo, transversal e integrador entre os componentes curriculares, isto é, no contexto das habilidades e competências que os estudantes devem desenvolver durante suas trajetórias acadêmicas, podendo ser objeto de estudo de diferentes componentes curriculares, em especial no componente curricular de matemática.

Por exemplo, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 295, grifo nosso) traz a habilidade EF05MA06, do 5º ano do Ensino Fundamental, que diz que os estudantes devem:

> Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em **contextos de educação financeira**, entre outros.

Essa habilidade aparece também em séries posteriores e isso nos diz, portanto, que há de fato uma preocupação acerca do desenvolvimento contínuo da educação financeira desde as séries iniciais, embora que os conceitos não sejam ainda tão complexos.

Segundo Andrade (2023): “quando estamos cientes dos princípios básicos da educação financeira, podemos evitar dívidas excessivas, gastos impulsivos e situações financeiras desfavoráveis”. Em síntese, é possível afirmarmos que a educação financeira tem grande influência na redução dos exacerbados níveis de consumismo e endividamento populacional, dentre outros aspectos que são de interesse na busca pelo desenvolvimento econômico do país.

Por outro lado, decisões financeiras são indissociáveis da matemática e isso é indubitável. Sendo assim, compreender os conceitos e suas aplicabilidades é um excelente caminho para tomar decisões mais inteligentes. Além disso,

> […] muitas das competências e dos conhecimentos matemático-financeiros necessários para promover a educação financeira passam a ter, como principal meio de disseminação, a escola. A relação entre educação financeira e escola torna-se indissociável, não cabendo isolá-la como disciplina autônoma, hermética e estanque […] (Hoffman e Moro, 2012, p.49).

Isto é, mesmo vivendo numa Era contemporânea de acesso rápido e fácil à informação, compreendemos que a escola continua sendo o melhor lugar para se ter acesso a conhecimentos matemáticos voltados para a vida financeira. Desde os mais simples aos mais complexos conceitos a matemática financeira, todos podem ser úteis para tomar decisões mais assertivas.

Acreditamos que enfrentar esses temas durante a vivência do Ensino Médio é muito importante, pois em um futuro breve a maioria dos estudantes iniciarão suas vidas economicamente ativas, conquistarão seus primeiros empregos, receberão seus primeiros salários e, consequentemente, buscarão conquistar seus primeiros bens móveis, imóveis e modificarão seus padrões de vida.

Com isso, é evidente que opções como empréstimos e financiamentos parecem ser boas opções, pois elas permitem uma “antecipação dos sonhos”, isto é, permitem que consigam comprar algo que no momento não têm condição de comprar (à vista). Todavia, essas são escolhas podem impactar a saúde financeira desses jovens por vários anos ou até mesmo por toda vida.

Nesse sentido, o Novo Ensino Médio (Lei nº 14.945/2024), que propõe uma estrutura curricular mais flexível, ofertando aos estudantes possibilidades de escolha de disciplinas optativas que atendam aos seus interesses e às suas necessidades, surge como uma oportunidade crucial para reavaliar e fortalecer a inclusão de conteúdos relacionados à matemática financeira, pautados no desenvolvimento da educação financeira.

Portanto, esse estudo se justifica pois acreditamos que o entendimento de conceitos e habilidades matemáticas aplicadas a contextos financeiros não apenas prepara os jovens para a vida adulta evitando sofrimentos financeiros, mas também promove uma participação socioeconômica mais ativa e crítica.

Estamos também levando em consideração que boa parte dos estudantes têm muitas dificuldades e deficiências no que diz respeito à aprendizagem de matemática, dessa maneira, não temos como objetivo atingir somente aqueles estudantes com plena proficiência em matemática, mas também alunos que possam ter dificuldades de aprendizagem.

Sendo assim, na abordagem da matemática financeira, buscaremos discutir quais os melhores caminhos para se compreender os conceitos e realizar os cálculos matemáticos necessários, inclusive com e sem uso de fórmulas.

Além disso, cientes de que uma grande parcela dos estudantes possa ainda não ser atingida, mesmo com os esforços para facilitação da aprendizagem da matemática financeira, tendo em vista que muitos estudantes possuem extrema defasagem, também traremos uma abordagem tecnológica com base em financiamentos e empréstimos, utilizando *sites* de calculadoras *on-lines* que efetuam os cálculos e listam informações importantes para a tomada de decisões financeiras.

Essa abordagem pode levar a crer que estamos eximindo a responsabilidade de aprender os processos matemáticos, que podem ser complexos, mas acreditamos que todas as pessoas podem ter decisões financeiras mais inteligentes utilizando essas ferramentas tecnológicas, independentemente de sua proficiência em matemática, isto é, que essa abordagem traz benefícios tanto para aqueles alunos que conseguem entender matemática financeira, quanto para aqueles que pouco entendem.

Portanto, compreendemos que vale a pena assumir esses riscos. Visando mitigá-los, é importante analisar qual a melhor forma de inserir essa abordagem em meio ao processo de ensino-aprendizagem. Acreditamos que tal abordagem melhor se adequa em fase final, quando os alunos já foram expostos aos conhecimentos matemáticos necessários.

No objetivo de concretizar essas discussões, sugerimos aos professores leitores dessa dissertação que possam utilizar esse trabalho como um modelo para elaboração de uma sequência didática a fim de basear uma proposta de eletiva que trata de matemática financeira, pautada no desenvolvimento da educação financeira, que seja acessível aos estudantes, dentro das possibilidades do Novo Ensino Médio (Lei nº 14.945/2024).

Com esse intuito, concluiremos esse trabalho com uma demonstração da eletiva, com sugestão de emenda e distribuição das aulas e uma pequena demonstração de algumas ferramentas tecnológicas.

Essa sugestão se justifica pois nesse trabalho traremos uma abordagem teórica dos conhecimentos de matemática financeira, com exemplos de aplicação dos conceitos em situações cotidianas relacionadas a empréstimos e financiamentos. Acreditamos que dessa maneira possamos ter impacto na formação dos estudantes, de modo a prepará-los para enfrentar os desafios financeiros do século XXI.

Salientamos que durante todo o referencial teórico, utilizamos como referência os materiais teóricos de matemática financeira do Portal da OBMEP. Foram eles: Holanda & Muniz Neto [201-?], Holanda & Muniz Neto (2018a), Holanda & Muniz Neto (2018b), Holanda & Muniz Neto (2018c). Além desses materiais, também utilizamos o volume 11 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar: Iezzi, Hazzan & Degenszajn (2013).

2 MATEMÁTICA FINANCEIRA: CONCEITOS BÁSICOS

2.1 Porcentagem

Certamente um dos conteúdos que mais facilmente conseguimos visualizar aplicação na vida real, sobretudo em se tratando de dinheiro, é a porcentagem. Sendo assim, é imprescindível que tenhamos conhecimento desse tema.

Podemos definir a porcentagem como uma representação numérica que provém da razão entre dois números em fração centesimal, a qual utilizamos o símbolo de % em vez do denominador 100.

São exemplos de porcentagens e suas representações em frações centesimais: 60% = $60\% = \frac{60}{100}$, $25\% = \frac{25}{100}$ e $10\% = \frac{10}{100}$.

2.1.1 Porcentagem de uma quantidade

O cálculo da porcentagem de uma quantidade é utilizado para determinar quanto uma porcentagem representa ao relacioná-la a uma quantidade. Vejamos um exemplo:

Exercício (porcentagem de uma quantidade): Um investidor comprou uma ação no valor de R$ 97,00 e vendeu obtendo um lucro de 12,5% (desconsiderando todas as taxas de administração e impostos). Por quanto esse investidor vendeu essa ação?

Solução: Para realizar esse tipo de cálculo, basta multiplicarmos a porcentagem com a quantidade e dividir por 100. Sendo assim, denominando por X o valor procurado, temos que:

$$X = \frac{12{,}5 \cdot 97}{100} \cong 12{,}13.$$

Portanto, o lucro foi de R$ 12,13 e o preço que o investidor pagou pela ação foi R$ 97,00, logo, para determinar o preço de venda basta somarmos o valor inicial ao lucro obtido, sendo assim, o preço de venda foi de R$ 109,13.

2.1.2 Porcentagem da variação entre dois valores

Em algumas situações procuramos saber quanto foi a variação entre duas quantidades e determiná-la em porcentagem. Vejamos um exemplo:

Exemplo: Uma pessoa foi a uma loja e observou que o preço de um produto que antes custava R$ 130,00, passou a custar R$ 156,00. Qual foi a variação percentual do preço?

Solução: Para determinar a variação em porcentagem, podemos utilizar a seguinte fórmula:

$$P=\frac{V}{I}\cdot 100\%$$

Sabemos que R$ 26,00 é a variação de preço, enquanto o valor inicial é R$130,00. Sendo assim, utilizando a fórmula, temos:

$$P=\frac{26}{130}\cdot 100\% \Leftrightarrow \mathrm{P} = 20\%.$$

Portanto, de R$ 130,00 para R$ 156,00 teve uma variação (um aumento) de 20%.

2.2 Logaritmos

Embora o conceito de logaritmos pareça distante no que se refere à matemática financeira, existe uma situação em particular, dentro do estudo do regime de capitalização composta (o qual veremos posteriormente), em que precisamos compreender o conceito, a aplicabilidade e as propriedades de logaritmos.

Definição de logaritmo: *Sejam* a, b, c *números reais, tais que* $a, b > 0$*,* $b \neq 1$*. Definimos:*

$$\log_b a = c <=> b^c = a$$

Em outras palavras, é válida a igualdade $\log_b a = c$ se, e somente se, $b^c = a$.

Vale ressaltar que quando a base do logaritmo não é explicitada, considera-se o que chamamos de logaritmo decimal, isto é, o logaritmo cuja base é 10. Sendo assim, consideremos para todos os casos:

$$\log_{10} a = \log a.$$

Propriedades de logaritmos: *Sejam* b, x, y *números reais, tais que* $b, x, y > 0$ *e* $b \neq 1$*, consideremos as seguintes propriedades de logaritmos:*

$$\text{(P1) } \log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y);$$

$$\text{(P2) } \log_b\left(\frac{x}{y}\right)=\log_b(x)-\log_b(y);$$

$$\text{(P3) } \log_b(x^y)=y\cdot\log_b(x).$$

Como utilizamos os conhecimentos de logaritmos apenas como ferramenta matemática para resolução de alguns problemas, deixamos a cargo do leitor buscar conhecimentos que vão além dos mencionados acima, bem como a demonstração das propriedades mencionadas[1]. Quanto a aplicação, quando for necessário, mencionaremos o que será utilizado.

2.3 Definições importantes de matemática financeira

Capital: Denominado por C, é valor inicial empregado que sofrerá a ação dos juros (valor tomado de empréstimo, por exemplo).

Juros: Denominado por J, são os valores que excedem o capital inicial numa aplicação financeira. Em síntese, é o preço que se paga (ou recebe) quando toma emprestado ou empresta um certo capital. Em termos matemáticos, os juros representam a ação do dinheiro em relação ao tempo, quanto mais dinheiro e mais tempo, maiores serão os juros pagos ou recebidos, fixada uma taxa de juros.

Taxa de juros: Denominado por i, é o valor, geralmente dado em porcentagem, que vai ditar qual será a ação dos juros em relação ao tempo. Ela pode ser dada a partir de várias unidades de tempo, como ao dia (a.d.), ao mês (a.m.), ao bimestre (a.b.), ao trimestre (a.t.), ao semestre (a.s.) e ao ano (a.a.), sendo mais comuns, para o cidadão, as taxas dadas ao mês e ao ano.

Período/tempo: Denominado por t, é o tempo em que o dinheiro sofre a ação dos juros, relacionando-se diretamente à taxa de juros. Se quisermos utilizar a taxa de juros com incidência mensal (a.m.), precisamos que o período esteja na unidade “meses”, por exemplo.

Montante: Denominado por M, é o valor correspondente à soma do capital (C) com os juros (J). Em termos de equação, temos que:

$$M=C+J.$$

[1] Consultar o material de A. P. Neto & A. C. M. Neto (2019).

2.4 Os juros

Os problemas da vida real que tratam de juros podem ser situações de pouca complexidade, como fixado um juros, a pessoa já sabe quanto pagará, como também casos mais complexos, que sofre a ação do tempo e precisa-se fazer um cálculo mais complexo que o anterior para determinar o quanto pagará.

Suponhamos a seguinte situação: uma pessoa vai a uma loja comprar um determinado tênis, podendo escolher dentre as duas opções de pagamento: à vista por R$ 150,00 ou a prazo em até 6 parcelas mensais no carnê da loja, por R$ 180,00.

Note que nessa situação, o consumidor pagará um pagamento excedente de R$ 30,00 fixos (que representa 20% do valor do produto), independentemente se ele decidir pagar em duas ou até 6 parcelas, pois já foi exposto o valor do juros nestas condições.

Essa situação é mais simples, pois basta que o consumidor realize uma simples subtração para observar a diferença dos valores nas duas opções de compra, que ele saberá quanto pagará de juros (em reais), podendo ele decidir facilmente qual das opções mais lhe agrada.

Esse tipo de abordagem dos juros é muito comum nessas situações de compra de produtos simples, em lojas físicas, pois por uma análise de risco de não receber o valor completo do produto, preferem que a venda seja realizada com pagamento à vista. Por isso, expõem os juros de forma mais evidente possível para que o cliente consiga perceber a vantagem de pagar à vista.

Todavia, há situações bem mais complexas. Analisemos a seguinte situação: uma loja dispôs a um cliente duas opções de pagamento na compra de *smartphone*: à vista por R$ 2.000,00 ou a prazo em até 2 vezes no cartão de crédito (parcelas iguais e mensais), com taxa de juros de 1% ao mês.

Em contraposição à situação anterior, caso o consumidor decida pagar com a opção a prazo, o valor dos juros, em reais, altera-se dependendo da quantidade de parcelas que ele escolherá, visto que os juros são dados com taxa mensal de 1% ao mês, isto é, a dívida se modifica a cada mês. Vejamos:

- Pagamento em 1 parcela (conhecido como *crédito à vista*)

A dívida inicial é de R$ 2.000,00 e como ele pagará toda a dívida após 1 mês, sofrerá a ação dos juros apenas uma vez, logo pagará R$ 2,000,00 acrescido de 1% de R$ 2.000,00:

$$2.000 + \frac{1 \cdot 2000}{100} = 2.020.$$

Logo, ele pagará R$ 2.020,00.

- Pagamento em 2 parcelas

Caso o cliente escolha pagar em duas parcelas, a dívida sofrerá a ação dos juros do primeiro mês, da amortização (redução da dívida) após o pagamento da primeira parcela e dos juros do segundo mês, tornando a situação mais difícil de um cidadão comum compreender os cálculos para fixação de uma parcela.

Nesse caso, os conhecimentos básicos sobre o sistema de amortização francês (que discutiremos posteriormente) podem favorecer essa compreensão. Utilizando esses conhecimentos, saberíamos que a parcela seria de R$ 1.015,02, conforme os cálculos a seguir podem confirmar (desconsideremos variações irrisórias devido às aproximações relativas aos valores decimais, isto é, de poucos centavos):

i. Dívida após sofrer os juros do primeiro mês (R$ 2.000,00 acrescido de 1% de R$ 2.000,00):

$$2000 + \frac{1 \cdot 2000}{100} = 2020$$

ii. Dívida após o pagamento da 1ª parcela de R$ 1.015,02:

$$2.020 - 1.015,02 = 1.004,98$$

iii. Dívida após sofrer os juros do segundo mês (R$ 1.004,98 acrescido de 1% de R$ 1.004,98):

$$1.004,98 + \frac{1 \cdot 1.004,98}{100} \cong 1.015,02$$

iv. Dívida após o pagamento da segunda (última) parcela de R$ 1.105,02:

$$1.015,02 - 1.015,02 = 0$$

Então, de fato as parcelas fixas precisarão ser de R$ 1.015,02 para que após dois meses a dívida seja quitada.

2.5 Juros simples

De maneira simples, podemos definir que os juros simples é um regime de capitalização em que os juros são constantes durante todo período, calculado a partir de uma porcentagem (taxa de juros i) do capital, isto é, é um regime que os juros em cada período é dado por $C \cdot i$.

Note então que se os juros incidirem por um período t, os juros serão calculados pela seguinte fórmula:

$$J = C \cdot i \cdot t.$$

Consequentemente, como sabemos que o montante é definido é dado pela fórmula $M = C + J$, temos então que:

$$M = C + J \Leftrightarrow M = C + C \cdot i \cdot t \Leftrightarrow M = C \cdot (1 + i \cdot t).$$

Vejamos um exemplo de aplicação de juros simples:

Exercício de juros simples: Uma pessoa fez um investimento no valor de R$ 25.000,00 em regime de juros simples, com taxa de juros fixada em 2,5%, durante um período de 5 meses. Ao final dos 5 meses, quanto de juros essa pessoa receberá?

Solução: Novamente, como os juros incidem sempre sobre o capital, todos os meses renderão um juros de 2,5% de R$ 25.000,00. Sendo assim, após os 5 meses, ela receberá juros de:

$$J = 5 \cdot \frac{2{,}5}{100} \cdot 25.000 \Leftrightarrow J = 3.125.$$

Portanto, o valor correspondente aos juros em cinco meses será R$ 3.125,00.

Exercício sobre o montante de juros simples: Em um contrato de valor R$ 22.500,00, há uma cláusula que prevê multa de vencimento de 2% a.m. calculada a partir do valor do contrato. Se o devedor só pagar no 14º mês após o vencimento, quanto ele pagará?

Solução: Como vimos, em geral os juros simples são aplicados em situações de multa, já que prevista os juros a partir sempre do valor do contrato. Sendo assim, teremos que:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t) \Leftrightarrow M = 22.500 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 14) \Leftrightarrow M = 28.800.$$

Logo, ele pagará R$ 28.800,00.

2.6 Juros compostos

Diferentemente dos juros simples que sempre incidem sobre o valor inicial, sendo constante durante todo o período, os juros compostos é um regime de capitalização que a incidência de juros ocorre sobre o valor acumulado a cada período.

Antes de qualquer uso de fórmula, vejamos uma situação de como os juros compostos funcionam.

Suponhamos que seja realizada uma aplicação no valor de R$ 10.000,00 a juros compostos de taxa 2% por 3 meses.

Após 1 mês, teremos os juros de 2% de R$ 10.000,00, logo teremos o seguinte cálculo para determinação do montante M_1 após sofrer a incidência de juros por uma vez:

$$M_1 = M_0 + M_0 \cdot i.$$

Mas o M_o é o próprio capital C, sendo assim, tem-se que:

$$M_1 = 10.000 + \frac{2}{100} \cdot 10.000 \Leftrightarrow M_1 = 10.200.$$

Após 2 meses, teremos os juros de 2% do valor acumulado, isto é, 2% do M_1. Logo teremos o seguinte cálculo para determinação do montante M_2 acumulado após o segundo mês:

$$M_2 = 10.200 + \frac{2 \cdot 10.200}{100} \Leftrightarrow M_2 = 10.404.$$

Após 3 meses, teremos os juros de 2% do valor acumulado, isto é, 2% do M_2. Logo teremos o seguinte cálculo para determinação do montante M_3 acumulado após o terceiro mês:

$$M_3 = 10.404 + \frac{2 \cdot 10.404}{100} \Leftrightarrow M_3 = 10.612{,}08.$$

Sendo assim, após 3 meses, o montante acumulado será de R$ 10.612,00. Contudo, como queríamos determinar apenas os juros J_3 após 3 meses, podemos apenas subtrair o capital C do M_3:

$$J_3 = M_3 - C \Leftrightarrow J_3 = 10.612{,}08 - 10.000 \Leftrightarrow J_3 = 612{,}08.$$

Portanto, os juros serão R$ 612,08.

Como vimos, apenas entendendo o conceito de juros compostos conseguimos resolver exercícios que tratam o tema. Contudo, torna-se bastante trabalhoso, logo compreendemos ser de grande valia o conhecimento de uma ou mais fórmulas que ajude a fazer o cálculo, sobretudo em situações mais complexas.

Sendo assim, conheceremos algumas das fórmulas que se aplicam em situações do regime de capitalização composto.

Teorema 1. *O montante M, no regime de juros compostos, é dado por:*

$$M = C \cdot (1+i)^t.$$

Demonstração do teorema 1. Sendo M_t o montante após o período t, sabemos que:

$$M_t = M_{(t-1)} + M_{(t-1)} \cdot i \Leftrightarrow M_t = M_{(t-1)} \cdot (1+i).$$

Com base nisso, podemos determinar o montante final M, em função do tempo t, utilizando a seguinte recorrência:

$$\begin{cases} M_1 = C \cdot (1+i) \\ M_2 = M_1 \cdot (1+i) \\ M_3 = M_2 \cdot (1+i) \\ \vdots \\ M_{t-1} = M_{t-2} \cdot (1+i) \\ M = M_{(t-1)} \cdot (1+i) \end{cases}$$

Multiplicando membro a membro todas as equações, teremos:

$$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \ldots \cdot M_{t-1} \cdot M = C \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \ldots M_{t-1} \cdot (1+i)^t$$

Utilizando a lei do corte, temos que é M é dado pela seguinte fórmula:

$$M = C \cdot (1+i)^t \qquad \blacksquare$$

Essa fórmula é muito importante e a partir dela surgem "outras fórmulas". Isto é, essa fórmula que é utilizada para determinar o montante, pode ser também utilizada para determinar o capital aplicado ou tomado de empréstimo, o tempo de incidência de juros ou a taxa de juros. Por esse motivo, acreditamos que é importante conhecer essas variações.

Vejamos alguns exemplos de aplicação do teorema 1:

Exercício de aplicação do teorema 1 (determinação do montante): Um capital de R$ 12.000,00 foi aplicado em regime de juros compostos por um período de 12 meses a uma taxa de 1% ao mês. Qual o valor do montante? Use $(1{,}01)^{12} \cong 1{,}1268$.

Solução: Como queremos determinar o valor do montante, podemos utilizar o teorema 1. Sendo assim, fazendo as devidas substituições, temos:

$$M=C\cdot(1+i)^t \Leftrightarrow M=12.000\cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)^{12} \Leftrightarrow M=12.000\cdot(1{,}01)^{12} \Leftrightarrow M=13.521{,}60.$$

Logo, o montante será aproximadamente R$ 13.521,60.

Exercício de aplicação do teorema 1 (determinação do capital): Uma pessoa pegou um empréstimo para ser pago em uma única parcela após 6 meses da contratação. Sabendo que o valor da parcela será de R$ 17.326,40 e que a taxa de juros contratada foi de 3% ao mês, qual foi o valor do empréstimo? Use $(1{,}03)^6 \cong 1{,}19$.

Solução: Temos que $M=17.326{,}40$ e $i=3\%$ *a.m.* Como queremos determinar o capital, podemos utilizar a teorema 1. Ao isolarmos o valor de C, temos que:

$$C=\frac{M}{(1+i)^t} \Leftrightarrow C=\frac{17.326{,}40}{\left(1+\frac{3}{100}\right)^t} \Leftrightarrow C=\frac{17.326{,}40}{(1{,}03)^6} \Leftrightarrow \mathrm{C} \cong 14.560.$$

Portanto, o valor do capital (valor do empréstimo) foi de R$ 14.560,00.

Exercício de aplicação do teorema 1 (determinação do tempo de incidência de juros): Um cliente atrasou uma parcela de R$ 1.150,00 até que essa mesma parcela se tornasse um montante de R$ 1.530,65. Considerando que o regime de capitalização dessa operação é composto e que existe uma cláusula no contrato que impõe uma taxa de juros para atraso de parcelas é 10% ao mês, sem outras cobranças, determine o tempo de atraso dessa parcela, em meses. Use log (1,331) ≅ 0,1242 e log (1,1) ≅ 0,0414.

Solução*:* Como estamos levando em consideração o regime de juros compostos e queremos determinar o tempo de incidência de juros, podemos utilizar o teorema 1. Ao isolarmos t na fórmula, temos que:

$$t=\frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}$$

ou ainda:

$$t=\frac{\log(M)-\log(C)}{\log(1+i)}$$

Vamos estudar cada a possibilidade de aplicação de cada fórmula.

- Fórmula $t=\frac{\log(M)-\log(C)}{\log(1+i)}$

Note que $M=1.530{,}65$ e $C=1.150{,}00$, mas não temos quaisquer informações acerca do valor de $\log(1.150)$, nem tampouco do $\log(1.530{,}65)$. Portanto, a aplicação dessa fórmula possivelmente não é conveniente.

- Fórmula $t=\frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}$

Note que $M=1.530{,}65$ e $C=1.150{,}00$, assim:

$$\frac{M}{C}=\frac{1.530{,}65}{1.150}=1{,}331.$$

Além disso, temos também que:

$$1+i=1+0{,}1=1{,}1.$$

Perceba que o enunciado traz os dados referentes aos valores do $\log(1{,}331)$ e do $\log(1{,}1)$. Portanto, a aplicação dessa fórmula de fato é conveniente. Sendo assim, podemos determinar o valor de t usando-a. Vejamos:

$$t=\frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)} \Leftrightarrow t=\frac{\log\frac{1.530{,}65}{1.150}}{\log(1+0{,}1)} \Leftrightarrow t=\frac{\log(1{,}331)}{\log(1{,}1)} \Leftrightarrow t\cong 3.$$

Como i é dado na unidade a.m., então o valor de t encontrado está em meses, portanto, o atraso foi de 3 meses.

Exercício de aplicação do teorema 1 (determinação do tempo de incidência de juros): Um cliente aplicou um capital de R$ 10.000, a uma taxa de juros de 13% a.a. em regime de juros compostos. Após certo tempo, esse cliente tinha a resgatar um montante de aproximadamente R$ 239.900,00, desconsiderando todos os impostos e taxas de administração. Sabendo que o cliente efetuou o resgate do montante acumulado no momento citado, durante quanto tempo esse capital ficou aplicado? Use log (239.900) ≅ 5,38 e log (1,13) ≅ 0,0531.

Solução: Como queremos determinar o tempo em que um capital ficou aplicado a juros compostos, vamos estudar a possibilidade de aplicação de cada uma das duas variantes da fórmula do teorema 1, as quais vimos no exercício anterior.

- Fórmula $t=\dfrac{\log\left(\dfrac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}$

Note que $\dfrac{M}{C}=\dfrac{239.900}{10.000}=239{,}9$. Não temos explicitamente o valor do $\log(239{,}9)$, embora possamos determinar a partir de algumas propriedades de logaritmo e do $\log(239.900)$, já que:

$$239{,}9=\frac{239900}{1000}.$$

Porém, esse processo dificulta a resolução do problema. Portanto, a aplicação dessa fórmula a princípio não parece conveniente.

- Fórmula $t=\dfrac{\log(M)-\log(C)}{\log(1+i)}$

Sabemos que $\log(M)=\log(239.900)$ é um dado do enunciado do problema, bem como:

$$\log(1+i)=\log(1+0{,}13)=\log(1{,}13).$$

Agora, portanto, podemos utilizar essa fórmula, realizando as devidas substituições:

$$t=\frac{\log(M)-\log(C)}{\log(1+i)} \Leftrightarrow t=\frac{\log(239.900)-\log(10.000)}{\log(1+0{,}13)} \Leftrightarrow t=\frac{5{,}38-4}{0{,}0531} \Leftrightarrow t\cong 26.$$

Como a taxa de juros está na unidade a.a., o valor de t encontrado está em anos. Portanto, o capital ficou aplicado por aproximadamente 26 anos.

Exercício de aplicação do teorema 1 (determinação da taxa de juros): Um cliente com pouca educação financeira recebeu uma proposta de um cartão de crédito com limite acima da sua capacidade de pagamento. Ao aceitar o cartão de crédito e começar a usá-lo desenfreadamente atingiu um valor de R$ 12.000,00. Como o cliente não tinha condições de pagar a fatura por completo, pagou apenas R$ 2.000,00 e o restante entrou no crédito rotativo, que utiliza o regime de capitalização composta. Após 3 meses dessa dívida, o cliente procurou saber dela, surpreendendo-se pelo fato de que já se acumulava em R$ 14.000,00.

Qual foi a taxa de juros cobrada a esse cliente, considerando que o cliente não fez outras dívidas? Use $\sqrt[3]{1,4} \cong 1,1187$.

Solução: Como queremos determinar a taxa de juros, podemos utilizar o teorema 1 isolando o termo i. Sabemos o valor de $t=3$ (meses), $M=14.000$ e $C=10.000$. Sendo assim, temos:

$$i=\sqrt[t]{\frac{M}{C}}-1 \Leftrightarrow i=\sqrt[3]{\frac{14.000}{10.000}}-1 \Leftrightarrow i \cong 0,1187=11,87\,\%.$$

Como t está em meses, então tem-se que o valor de i encontrado está na unidade ao mês. Portanto, a taxa de juros que lhes foi cobrada foi de 11,87% ao mês.

2.7 Juros simples x juros compostos

Como pudemos ver, existem diversas diferenças entre os juros simples e os juros compostos, como na forma em que atuam e no grau de relevância e aplicabilidade. Enquanto dificilmente observamos aplicabilidade dos juros simples no cotidiano por vias oficiais e legais, os juros compostos estão presentes em praticamente todos os tipos de aplicação financeira. Por este motivo, abordaremos essas diferenças, mas focaremos no estudo dos juros compostos.

Podemos notar que o crescimento dos juros compostos ocorre de forma muito mais acentuada que os juros simples. Essa análise é natural, visto que enquanto os juros simples incidem sempre sobre o mesmo valor inicial (o capital), os juros compostos vão se acumulando, fato que chamamos de “juros sobre juros”.

Analiticamente, podemos estudar o montante de juros simples e compostos como funções. Enquanto o primeiro é descrito pela lei de formação da fórmula $M=C\cdot(1+i\cdot t)$, onde M está em função de t e sua forma é do tipo polinômio de grau 1, enquanto o segundo é descrito pela lei de formação da fórmula $M=C\cdot(1+i)^t$, onde M está em função de t e sua forma é do tipo exponencial.

Como se sabe, funções polinomial do 1º grau tem gráficos descritos por retas, enquanto funções exponenciais têm gráficos descritos por curvas exponenciais. Sendo assim, o montante dos juros simples será representado graficamente por uma reta, enquanto o montante dos juros compostos será representado por uma curva exponencial.

Em todo caso, $t \geq 0$. Além disso, também teremos predominantemente juros e montantes positivos, portanto, podemos também considerar que o domínio das duas funções bem como suas respectivas imagens estão contidos no intervalo $[0, \infty)$.

Sendo assim, os gráficos das duas funções são estritamente crescentes.

Para ilustrar esse conhecimento, vamos considerar uma situação hipotética de dois capitais de R$ 5.000,00 que sofre a ação dos juros à mesma taxa de juros fixada a 10% a.a., mas um no regime de juros simples e o outro no regime de juros compostos.

Modelando a situação, temos duas funções:

- $s(t)=5000 \cdot (1+0,1 \cdot t) \Leftrightarrow s(t)=5000+10 \cdot t$, $t \geq 0$ (juros simples);
- $c(t)=5000 \cdot (1+0,1)^t \Leftrightarrow c(t)=5000 \cdot (1,1)^t$, $t \geq 0$ (juros compostos).

Sendo *s* o montante a juros simples e *c* o montante a juros compostos.

Observemos o quadro a seguir que compara os montantes a juros simples e compostos em mesmas condições (capitais, períodos e taxas idênticas).

Quadro 1 – R$ 5.000,00 aplicado a juros simples e compostos à 10% a.a. por 3 anos

t	**s(t)**	**c(t)**	**Comparativo**
0	R$ 5.000,00	R$ 5.000,00	-
6 meses (1/2 ano)	R$ 5.250,00	R$ 5.244,04	s(t) > c(t)
9 meses (3/4 de um ano)	R$5.375,00	R$ 5.370,50	s(t) > c(t)
1 ano	R$ 5.500,00	R$ 5.500,00	s(t) = c(t)
2 anos	R$ 6.000,00	R$ 6.050,00	s(t) < c(t)
3 anos	R$ 6.500,00	R$ 6.655,00	s(t) < c(t)

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Há três observações de relevância quando comparamos os juros simples com os juros compostos, que podemos facilmente notar ao observarmos a tabela comparativa acima. São elas:

1) Quando $0<t<1$, temos que o montante dos juros simples **é maior que** o montante dos juros compostos;

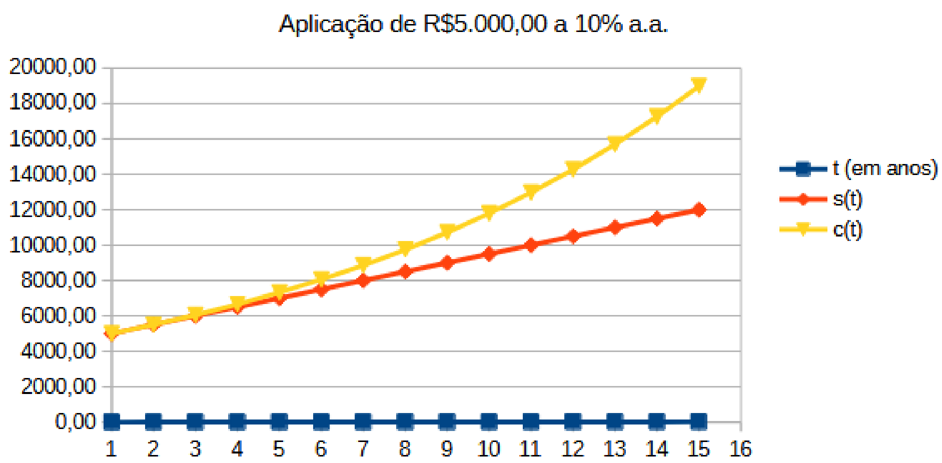
2) Quando $t=1$, temos que o montante dos juros simples **é igual** ao montante dos juros compostos;

3) Quando $t>1$, temos que o montante dos juros simples **é menor que** o montante dos juros compostos.

Isto é, se uma pessoa está pagando juros e esses incidirem por menos de um período, se for em regime de juros simples pagará mais juros. Caso incida por exatamente um período, os juros são iguais, mas se for mais de um período, pagará mais juros se for em regime de juros compostos.

Vejamos essa situação ampliada há 15 anos exposta no gráfico a seguir:

Gráfico 1: Juros Simples x Juros Compostos



Fonte: elaborado pelo autor (2025) – Utilizando o Libre Office Calc.

Podemos notar que a longo prazo a discrepância entre os montantes é significativa, sendo os juros compostos bem superiores em relação aos juros simples, mesmo fixando a taxa de juros e o capital aplicado.

3 MATEMÁTICA FINANCEIRA: CONCEITOS MAIS AVANÇADOS

No capítulo anterior, vimos conceitos básicos que precisaremos para compreender todo o campo da matemática financeira, sobretudo a porcentagem, os termos da matemática financeira e os juros simples e compostos. Também vimos que os juros simples pouco se aplicam na vida real, enquanto os juros compostos estão presentes em basicamente todas as operações financeiras que envolvem a incidência de juros.

Nesse capítulo, estudaremos sobre tempo de capitalização, taxas equivalentes, capitalização e descapitalização (antecipação e postecipação de parcelas) e sistemas de amortização (SAC – sistema de amortização constante; SAF/PRICE – sistema de amortização francês ou tabela price).

Consideremos, a partir de então, apenas o regime de juros compostos, tendo em vista sua ampla aplicabilidade e relevância – em caso de exceção, será mencionado.

3.1 Taxas equivalentes

As taxas equivalentes são taxas de mesmo valor, porém que podem ser apresentadas em unidades diferentes. Para compreender o conceito e a relevância de se aplicar o que são taxas equivalentes, vamos supor a seguinte situação: um investidor dispondo de um capital de R$ 10.000,00, deseja realizar um investimento para resgatar após um ano da aplicação. Estudando sobre as possibilidades de investimento, fica em dúvida entre dois investimentos, A e B, cujas rentabilidades são dadas da seguinte forma:

- Investimento A: 6% a.t.
- Investimento B: 2% a.m.

Qual seria o investimento mais rentável?

Naturalmente, podemos pensar que os dois investimentos têm rentabilidades iguais, pois o investimento B que rende 2% a.m., renderia, ao trimestre, três vezes essa quantia mensal, isto é, 6%.

Contudo, isso está errado, pois devemos levar em consideração que no regime de juros compostos os juros se acumulam. Vejamos na prática a comparação entre esses dois investimentos:

- Investimento A

Um capital de R$ 10.000,00 aplicado por 3 meses (1 trimestre) à taxa de juros de 6% a.t., em regime de juros compostos. Temos então que $C=10.000$, $i=6\%a.t.$ e $t=1$ trimestre. Sendo assim, utilizando o teorema 1, temos:

$$M_A=1.000 \cdot (1+0{,}06)^1 \Leftrightarrow M_A=10.600.$$

Logo, no investimento A, o cliente teria uma rentabilidade de R$ 600,00.

- Investimento B

Um capital de R$ 10.000,00 aplicado por 3 meses à taxa de juros de 2% a.m. Temos então que $C=10.000$, $i=2\%a.m.$ e $t=3\,meses$. Sendo assim, utilizando o teorema 1, temos:

$$M_B=10.000 \cdot (1+0{,}02)^3 \Leftrightarrow M_B=10.612{,}08.$$

Logo, no investimento B, o cliente teria uma rentabilidade de R$ 612,08.

Chegamos à conclusão que 2% a.m. renderam R$ 12,08 a mais de juros do que 6% a.t., em igual período, portanto, essas taxas não são equivalentes, embora intuitivamente pareçam ser. Isso nos mostra que precisamos aprender a comparar as taxas e saber quando são equivalentes.

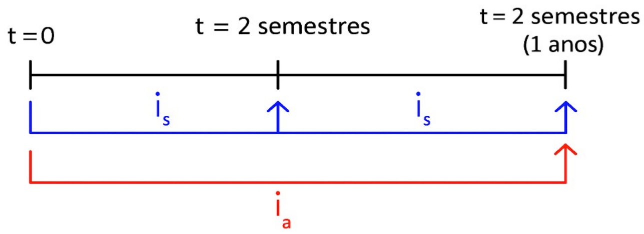
Para estudar esse conteúdo, compreendemos que mais importante que nos apoiarmos na construção e uso de fórmulas, devemos analisar cada situação para determinar uma taxa equivalente, para compreender o processo realizado, visto que a fórmula para esse cálculo é complexa.

Vejamos dois exemplos de como podemos fazer isso na prática.

Exercício sobre taxas equivalentes: Qual a taxa semestral equivalente à taxa de 16% ao ano? Use $\sqrt[2]{(1{,}16)} \cong 1{,}077$.

Solução: A princípio, consideremos i_s como a taxa semestral equivalente a taxa anual $i_a=16\%$ e observemos o esquema a seguir:

Figura 1 – Esquema de taxas equivalentes



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Note que o fator de correção anual $(1+i_a)$ só atua uma única vez, enquanto o fator de correção semestral (i_s) atua duas vezes, no mesmo período (visto que dois semestres é equivalente a um ano).

Sendo assim, como $1+i$ é sempre positivo, independentemente do período associado à taxa de juros, podemos afirmar que:

$$(1+i_s)\cdot(1+i_s)=(1+i_a) \Leftrightarrow (1+i_s)^2=(1+i_a) \Leftrightarrow 1+i_s=\sqrt[2]{1+i_a} \Leftrightarrow i_s=-1+\sqrt[2]{1+i_a}$$

Isto é, nessa situação temos que:

$$i_s=-1+\sqrt[2]{1+i_a} \Leftrightarrow i_s=-1+\sqrt[2]{1{,}16} \Leftrightarrow i_s \cong 0{,}077=7{,}7\,\%.$$

Portanto, a taxa semestral equivalente à taxa de 16% a.a. é 7,7%.

Exercício sobre taxas equivalentes: Qual a taxa anual equivalente à taxa de 0,5% ao mês? Use $(1{,}005)^{12} \cong 1{,}062$.

Solução: Com pensamento semelhante ao que utilizamos na situação anterior, percebemos que o fator de correção mensal $(1+i_m)$ atua 12 vezes, ao passo que o fator de correção anual $(1+i_a)$ atua uma única vez. Portanto, temos que:

$$(1+i_m)^{12}=(1+i_a) \Leftrightarrow i_a=(1+i_m)^{12}-1.$$

Isto é, nessa situação temos que:

$$i_a=(1+0{,}05)^{12}-1 \Leftrightarrow i_a \cong 0{,}062=6{,}2\,\%.$$

Portanto, a taxa anual equivalente à taxa 0,5% a.m. é 6,2%.

3.2 Sistemas de amortização: características comuns

Os sistemas de amortização são de grande importância, visto que as operações financeiras de empréstimos ou financiamento, que são utilizadas por grande parte da população, utilizam-se desses conhecimentos.

Basicamente, os sistemas de amortização, que possuem regras diferentes, dizem como será paga uma dívida que contratualmente foi proposto um pagamento parcelado.

A parcela P é o valor pago periodicamente e é composta por dois componentes: os juros J, que seria como o "pagamento" pela instituição financeira emprestar o valor, e a amortização A, que é o que de fato reduz o valor da dívida. Assim, temos que:

$$P = J + A$$

Por exemplo, se em um determinado momento uma dívida é de R$ 20.000,00 e a parcela atua de R$1.500,00 é composta por R$1.000,00 de juros e R$500,00 de amortização, após o pagamento da parcela, a dívida passa a ser de R$19.500,00, pois se subtrai apenas o valor referente à amortização.

Toda essa estrutura de pagamentos em relação ao tempo é chamada de sistema de amortização. Embora existam outros sistemas de amortização, focaremos nos principais sistemas utilizados pelas instituições financeiras do Brasil. São eles: o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema de Amortização Francês – também conhecido por "Tabela Price" (SAF/PRICE)

Vale lembrar que tanto no SAC, quanto no SAF/PRICE, o saldo devedor é, obviamente, decrescente, e consequentemente, os juros, que dependem do saldo devedor, também são decrescentes. Portanto, os únicos valores que podem variar são os valores referentes à parcela e à amortização.

Teorema 2. *O saldo devedor de uma dívida após o pagamento da k-ésima parcela, em qualquer sistema de amortização, é dado por:*

$$S_k = C - \left(A_1 + A_2 + A_3 + \dots A_k\right)$$

Onde A_i é a amortização na i-ésima parcela.

Demonstração do teorema 2: Sabemos que o saldo devedor S_k em um determinado período k é dado pelo S_{k-1} (saldo devedor do período anterior) menos a amortização A_k (amortização da k-ésima parcela).

Utilizando esse raciocínio para todas as parcelas, temos a seguinte recorrência:

$$\begin{cases} S_1 = C - A_1 \\ S_2 = S_1 - A_2 \\ S_3 = S_2 - A_3 \\ \vdots \\ S_k = S_{(k-1)} - A_k \end{cases}$$

Somando membro a membro, temos:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{(k-1)} + S_k = C + S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{(k-1)} - \left(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k\right).$$

Realizando a lei do corte, temos:

$$S_k = C - \left(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_k\right) \quad \blacksquare$$

Corolário 2.1 (soma das amortizações): *Em qualquer sistema de amortização, a soma das amortizações de uma dívida é igual ao saldo devedor inicial. Isto é:*

$$C = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_t.$$

Demonstração do corolário 2.1: Note ainda que S_t, o saldo devedor final, deve ser zero para a dívida ser totalmente quitada. Portanto, partindo do teorema 2, temos que:

$$S_t = C - \left(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_t\right) = 0 \Leftrightarrow C = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_t. \quad \blacksquare$$

<u>Noção de juros de uma parcela:</u> Em todos os sistemas de amortização, o juro da k-ésima parcela é calculado pelo produto do saldo devedor atual (após o pagamento da parcela anterior) pela taxa de juros (i). Isto é:

$$J_k = S_{(k-1)} \cdot i.$$

3.2.1 Antecipação e postecipação de parcelas

A antecipação e a postecipação de parcelas independem do sistema de amortização utilizado e a maneira como acontecem é muito intuitiva.

Lembremo-nos que sempre nos juros compostos, multiplicamos um valor X que sofrerá os juros pelo fator de correção $(1+i)$ e assim, no próximo período, teremos o valor corrigido em $X \cdot (1+i)$. De maneira geral, após um período $n \leq t$, temos que o valor será corrigido em $X \cdot (1+i)^n$.

Na **antecipação de parcelas**, o princípio utilizado é que antecipando uma parcela, a pessoa não pagará os juros daquele período até a parcela, mas a parcela é calculada anteriormente e nela já incluem esses juros. Sendo assim, a lógica utilizada para recalcular e corrigir o valor da parcela será retirar esses juros inclusos “indevidamente”. Para tal, basta dividir pelo fator de correção $(1+i)^n$. Logo, uma parcela P antecipada em n períodos equivale a nova parcela $P'=\frac{P}{(1+i)^n}$.

Exercício sobre antecipação de parcela: Uma pessoa contratou um financiamento habitacional em que as parcelas mensais foram fixadas em R$ 720,00 e a taxa de juros que foi aplicada foi de 0,5% ao mês. No pagamento da primeira parcela, ela analisa também o pagamento antecipado da última parcela, do 360º mês. Qual o valor dessa parcela antecipada? Use $(1{,}005)^{359} \cong 6$.

Solução: Note que a última parcela será antecipada em 359 períodos, logo temos que:

$$P'=\frac{720}{(1+0{,}005)^{359}} \Leftrightarrow P'=\frac{720}{(1{,}005)^{359}} \Leftrightarrow P'=120.$$

Logo, a última parcela antecipada ao mês 1 será de R$ 120,00.

Essa estratégia é bastante conhecida entre contratantes de financiamentos devido à discrepância entre o valor normal da parcela e o valor antecipado. Isto é, com bem menos do que o valor da parcela original, pode-se quitar uma parcela antecipadamente. Isso faz com que uma pessoa praticante dessa estratégia e que se esforce para economizar ou gerar renda extra, pague um financiamento em bem menos tempo do que estava previsto. Vale ressaltar que o Programa Minha Casa Minha Vida permite o financiamento em até 35 anos.

Em se tratando da **postecipação de parcelas**, a lógica é parecida. Se uma pessoa postecipa uma parcela por n períodos, a parcela não será mais a mesma, pois sofrerá a ação dos juros por esse período não contabilizado anteriormente. Para isso, multiplicamos o valor da parcela pelo fator de correção $(1+i)^n$. Isto é, o valor da parcela P postecipada em n períodos passa a ser:

$$P'=P \cdot (1+i)^n.$$

Além disso, quando ocorre não só a mera postecipação (que pode ser negociada no banco), mas também o atraso no pagamento da parcela, é ainda mais comum que no contrato haja multa além dos juros contratado. Nesse caso, a parcela passaria a ser:

$$P' = P \cdot (1+i)^n + multa.$$

Em síntese, postecipar uma parcela significa pagar aquela parcela em momento futuro ao que se esperava. A postecipação pode ser negociada, logo o banco exige o pagamento dos juros referente ao período postecipado, que anteriormente não havia sido programado, mas pode não exigir pagamento de multa, sobretudo em prol do relacionamento com o cliente. Enquanto o atraso de parcela, que é a postecipação não negociada, é comum que além dos juros se pague multa.

Exercício sobre postecipação (negociada) de parcela – sem multa: Um cliente de um banco contratou um empréstimo à taxa de 2% a.m. e, próximo à data do pagamento de uma determinada parcela, no valor de R$ 500,00, observou que não conseguiria honrá-la. Portanto, negociou com seu gerente para só pagá-la após três meses, pagando os juros desse período, mas sem multa. Considerando que nenhuma outra parcela foi atrasada, qual o valor dessa parcela atrasada que foi paga após esses três meses? Use $(1{,}02)^3 \cong 1{,}061$.

Solução: Note que a parcela postecipada, nesse caso, é paga apenas com a correção dos juros do período postecipado. Sendo assim, temos que:

$$P' = 500 \cdot (1+0{,}02)^3 \Leftrightarrow P' = 500 \cdot (1{,}02)^3 \Leftrightarrow P' \cong 530{,}50.$$

Logo, o valor dessa parcela postecipada em 3 meses será R$ 530,50.

Exercício sobre postecipação (atraso) de parcela – com multa: Um cliente de um banco contratou um empréstimo à taxa de 2% a.m. e, na data do pagamento, não conseguiu honrar com uma parcela de R$ 500,00 e, portanto, só conseguiu pagá-la após três meses. Considerando que nenhuma outra parcela foi atrasada e que o banco cobra uma multa de 5% do valor da parcela, além dos juros, qual o valor da parcela atrasada que foi paga após esses três meses? Use $(1{,}02)^3 \cong 1{,}061$.

Solução: Note que a parcela postecipada, nesse caso, é paga com juros excedentes e multa de 5% do valor da parcela. Sendo assim, temos que:

$$P' = 500 \cdot (1+0{,}02)^3 + \frac{5 \cdot 500}{100} \Leftrightarrow$$

$$P' = 530{,}50 + \frac{2500}{100} \Leftrightarrow$$

$$P' \cong 555{,}50.$$

Logo, o valor da parcela postecipada em atraso de 3 meses será R$ 555,50.

3.3 Sistema de Amortização Constante (SAC)

O SAC é um método de amortização de dívidas que divide o valor principal da dívida em parcelas de valores distintos, os juros são calculados a partir do saldo devedor restante e a amortização (abatimento da dívida) é igual em todas as parcelas.

Como após o pagamento de algumas parcelas haverá amortização do saldo devedor, que ficará menor, e os juros são calculados a partir do saldo devedor, consequentemente, os juros também serão menores. Além disso, como a parcela é dada pela soma entre juros e amortização, temos que a amortização é constante e os juros são decrescentes, então temos a garantia que as parcelas também serão decrescentes.

Teorema 3. *No SAC, a amortização é dada por:*

$$A=\frac{C}{t}$$

Demonstração do teorema 3: Sabemos que pela definição do SAC as amortizações são constantes. Sendo assim:

$$A_1=A_2=A_3=\ldots=A_t=A$$

Com isso, adaptando à situação ao SAC, teremos que:

$$C=A+A+A+\ldots+A \text{ (com } t \text{ parcelas de A)} \Leftrightarrow C=t\cdot A \Leftrightarrow A=\frac{C}{t}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 4. *No SAC, o saldo devedor, após o pagamento da k-ésima parcela, é dado por:*

$$S_k=C-k\cdot A \text{ ou } S_k=C\cdot\left(1-\frac{k}{t}\right).$$

Demonstração do teorema 4: Do teorema 2, temos que:

$$S_k=C-(A+A+A+\ldots+A) \text{ (com } k \text{ parcelas de "A")} \Leftrightarrow S_k=C-k\cdot A. \qquad \blacksquare$$

Utilizando o teorema 3, temos:

$$S_k=C-k\cdot\left(\frac{C}{t}\right) \Leftrightarrow S_k=C\cdot\left(1-\frac{k}{t}\right). \qquad \blacksquare$$

Teorema 5. *No SAC, os juros presentes na k-ésima parcela é dado por:*

$$J_k = C \cdot \left(\frac{t-k+1}{t} \right) \cdot i$$

Demonstração do teorema 5: Utilizando a noção de juros da k-ésima parcela, $J_k = S_{(k-1)} \cdot i$, e o teorema 4, temos que:

$$J_k = S_{(k-1)} \cdot i \Leftrightarrow J_k = C \cdot \left(1 - \frac{k-1}{t} \right) \cdot i \Leftrightarrow J_k = C \cdot \left(\frac{t-k+1}{t} \right) \cdot i. \qquad \blacksquare$$

Teorema 6. *No SAC, a k-ésima é dada por:*

$$P_k = \frac{C \cdot \left[(t-k+1) \cdot i + 1 \right]}{t}$$

Demonstração do teorema 6: Da definição de parcela, temos que:

$$P_k = A + J_k.$$

Utilizando os resultados dos teoremas 3 e 5 na equação anterior, temos que:

$$P_k = \frac{C}{t} + C \cdot \left(\frac{t-k+1}{t} \right) \cdot i \Leftrightarrow P_k = \frac{C \cdot \left[(t-k+1) \cdot i + 1 \right]}{t}. \qquad \blacksquare$$

Acreditamos que essa fórmula tem apresentação complexa, de modo que parece uma alternativa mais simples calcular separadamente A e J_k e só depois determinar o valor de P_k com a soma desses valores.

Teorema 7. *No SAC, os juros totais $J(totais)$ é dado por:*

$$J(totais) = C \cdot \left(\frac{t+1}{2} \right) \cdot i$$

Demonstração do teorema 7: Sabemos, pelo teorema 5, que:

$$\begin{cases} J_1 = C \cdot i \\ J_2 = C \cdot \left(\frac{t-1}{t}\right) \cdot i \\ J_3 = C \cdot \left(\frac{t-2}{t}\right) \cdot i \\ \vdots \\ J_t = C \cdot \left(\frac{1}{t}\right) \cdot i \end{cases}$$

Somando membro a membro, temos:

$$J_1 + J_2 + \ldots J_t = \frac{C \cdot [t-0+t-1+t-2+t-3+\ldots+t-t] \cdot i}{t} \Leftrightarrow$$

$$J_1 + J_2 + \ldots J_t = \frac{C \cdot [t \cdot (t+1) - (0+1+2+\ldots+t)] \cdot i}{t}.$$

Denominemos $J_1 + J_2 + \ldots J_t$ por $J(totais)$:

$$J(totais) = \frac{C \cdot \left(t^2 + t - \frac{t+t^2}{2}\right) \cdot i}{t} \Leftrightarrow J(totais) = \frac{C \cdot \left(\frac{t^2+t}{2}\right) \cdot i}{t} \Leftrightarrow J(totais) = C \cdot \left(\frac{t+1}{2}\right) \cdot i. \quad \blacksquare$$

Para aplicarmos esses teoremas é necessário atentarmo-nos à unidade de tempo entre a taxa i com relação a t. Por exemplo, geralmente a quantidade de parcelas t é dado em meses (parcelas mensais), então nesse caso, precisamos da taxa “ao mês”. Quando a taxa não está na mesma unidade de tempo, retomamos os conhecimentos acerca de “taxas equivalentes”.

Quanto ao montante final pago (M) no SAC compreendemos que não é necessário a construção de uma fórmula direta, basta somar o saldo devedor inicial com os juros totais:

$$M = C + J(totais).$$

3.3.1 Resumo e aplicação das fórmulas do SAC

Sugerimos para o conteúdo do SAC, o uso das seguintes fórmulas:

- Determinação da amortização por parcela: $A = \frac{C}{t}$;
- Determinação do saldo devedor após uma k-ésima parcela: $S_k = C - k \cdot A$ ou $S_k = C \cdot \left(1 - \frac{k}{t}\right)$;

- Determinação dos juros de uma k-ésima parcela: $J_k = C \cdot \left(\frac{t-k+1}{t}\right) \cdot i$;

- Determinação do valor de uma k-ésima: $P_k = A + J_k$ ou $P_k = \frac{C \cdot \left[(t-k+1) \cdot i + 1\right]}{t}$;

- Determinação dos juros totais: $J(totais) = C \cdot \left(\frac{t+1}{2}\right) \cdot i$;

- Determinação do montante final: $M = C + J(totais)$.

Vejamos um exercício que podemos aplicar esses conhecimentos sobre SAC.

Exercício de aplicação das fórmulas do SAC: Uma pessoa contratou um empréstimo de R$ 48.000,00 a 3% ao mês para ser pago de forma parcelada em 24 parcelas mensais, utilizando o SAC.

a) Quanto amortizará em cada mês?

Solução: Como o empréstimo foi realizado pelo SAC, temos que todo mês será amortizado o mesmo valor. Para determinar esse valor da amortização, utilizaremos o teorema 3, sabendo que $C = 48.000$ (em reais) e $t = 24$ (em meses). Sendo assim, temos:

$$A = \frac{C}{t} \Leftrightarrow A = \frac{48.000}{24} = 2.000.$$

Portanto, será amortizado R$ 2.000,00 em cada mês.

b) Qual o saldo devedor após o pagamento da 12ª parcela?

Solução: Conforme o teorema 4, temos que:

$$S_k = C - k \cdot A \Leftrightarrow S_{12} = 48.000 - 12 \cdot 2.000 \Leftrightarrow S_{12} = 24.000.$$

Logo o saldo devedor após o pagamento da 12ª parcela é R$ 24.000,00.

c) Qual o valor pago de juros na 20ª parcela?

Solução: Para determinar o valor dos juros de uma determinada parcela, podemos utilizar o teorema 5, onde k é o número da parcela. Sendo assim, calculemos o valor dos juros da 20ª parcela (J_{20}):

$$J_k = C \cdot \left(\frac{t-k+1}{t}\right) \cdot i \Leftrightarrow J_{20} = 48.000 \cdot \left(\frac{24-20+1}{24}\right) \cdot 0{,}03 \Leftrightarrow J_{20} = 300.$$

Portanto, o valor pago de juros na 20ª parcela será de R$ 300,00.

d) Qual o valor da 20ª parcela?

Solução: Sabemos que o valor uma parcela é dado pela soma da amortização com os juros. Assim temos que $A=2.000$ e $J_{20}=300$, então:

$$P_k=A+J_k \Leftrightarrow P_{20}=2.000+300 \Leftrightarrow P_{20}=2.300.$$

Portanto, a 20ª parcela será no valor de R$ 2.300,00.

e) No total, quanto de juros foram pagos?

Solução: Para determinar o total de juros pagos por meio do SAC, podemos utilizar o teorema 7 e realizando as substituições dos necessários. Vejamos:

$$J(totais)=C \cdot \left(\frac{t+1}{2}\right) \cdot i \Leftrightarrow J(totais)=48.000 \cdot \left(\frac{24+1}{2}\right) \cdot 0,03 \Leftrightarrow J(totais)=18.000.$$

Portanto, o total de juros pagos foi R$ 18.000,00.

f) Qual o montante final pago por esse empréstimo?

Solução: Sabemos que o montante final é pode ser calculado pela fórmula $M=C+J$, realizando as substituições dos dados necessários, temos que:

$$M=C+J(totais) \Leftrightarrow M=48.000+18.000 \Leftrightarrow M=66.000.$$

Portanto, o montante final pago por esse empréstimo foi R$ 66.000,00.

3.4 Sistema de Amortização Francês ou Tabela Price (SAF/PRICE)

O SAF/PRICE é um método de amortização de dívidas que divide o valor principal da dívida em parcelas iguais e os juros são calculados a partir do saldo devedor restante.

Sabemos que os juros acompanham o saldo devedor (que é decrescente) e que as parcelas são constantes. Com isso, podemos garantir que no SAF/PRICE a amortização é crescente a cada parcela.

Teorema 8. *No SAF/PRICE a parcela* P *é dada por:*

$$P=C \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t-1}$$

Demonstração do teorema 8: A estratégia para demonstração desse teorema parte da ideia de antecipar todas as parcelas ao instante inicial. Claramente, se fizermos isso, temos que o somatório de todas as parcelas é igual ao capital tomado no empréstimo/financiamento. É como se o pagamento fosse feito exatamente no momento da contratação do empréstimo/financiamento e isso não acarretaria juros algum.

Note que cada uma das parcelas precisam ser antecipadas ao instante inicial, de forma que P_1 precisa ser antecipada em 1 período, P_2 precisa ser antecipada em 2 períodos e assim sucessivamente, até que P_t, a última parcela, seja antecipada em t períodos. Para tal, temos então que C é igual ao somatório de todas as parcelas antecipadas. Isto é:

$$C=\frac{P_1}{(1+i)}+\frac{P_2}{(1+i)^2}+\frac{P_3}{(1+i)^3}+...+\frac{P_t}{(1+i)^t}.$$

Mas, lembremo-nos que todas as parcelas são iguais, isto é, $P_1=P_2=P_3=...=P_t=P$.

Sendo assim, temos que:

$$C=\frac{P}{(1+i)}+\frac{P}{(1+i)^2}+\frac{P}{(1+i)^3}+...+\frac{P}{(1+i)^t} \Leftrightarrow C=P\cdot\left[\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+...+\frac{1}{(1+i)^t}\right].$$

Observe ainda que a expressão acima entre colchetes é uma soma de PG finita de t termos. Considere como primeiro termo $\frac{1}{(1+i)^t}$ e a razão $1+i$ (ordem inversa). Assim, utilizando a fórmula de soma de PG finita[2], temos que:

$$C=P\cdot\frac{1}{(1+i)^t}\cdot\frac{(1+i)^t-1}{1+i-1} \Leftrightarrow C=P\cdot\frac{1}{(1+i)^t}\cdot\frac{(1+i)^t-1}{i} \Leftrightarrow C=P\cdot\frac{(1+i)^t-1}{i\cdot(1+i)^t}.$$

Invertendo C com P, temos que:

$$P=C\cdot\frac{i\cdot(1+i)^t}{(1+i)^t-1}.$$

■

Esse teorema é de suma importância, pois precisaremos da fórmula encontrada em todas as demais fórmulas, pois tendo em vista a sua complexidade, desmembrar das outras fórmulas as tornarão muito mais complexas. Logo, o melhor caminho para resolução dos questionamentos quanto ao SAF/PRICE sempre partirá da determinação do valor da parcela.

---

[2] Fórmula de soma dos n termos de uma PG finita: $S_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$, na qual:
S_n é soma de n termos da PG; a_1é o primeiro termo da PG; q é a razão da PG; n é o número de termos da PG.

Lema 1. *No SAF/PRICE, a sequência das amortizações* $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{k+1})$ *é uma PG de razão* $1+i$*. Isto é:*

$$A_{k+1} = A_k \cdot (1+i).$$

Demonstração do Lema 1: Note que $S_{k+1} = S_k - A_{(k+1)}$.

Somando e subtraindo J_{k+1} no segundo membro da equação, temos que:

$$S_{k+1} = S_k - A_{(k+1)} + J_{k+1} - J_{k+1} = S_k + J_{k+1} - \left(A_{(k+1)} + J_{k+1}\right).$$

Agora, note que $A_{(k+1)} + J_{k+1} = P$. Sendo assim, temos:

$$S_{k+1} = S_k + J_{k+1} - P.$$

Entretanto, sabemos que $J_{k+1} = S_k \cdot i$, então teremos que:

$$S_{k+1} = S_k + S_k \cdot i - P \Leftrightarrow S_{k+1} = S_k \cdot (1+i) - P.$$

Daí temos que:

$$\begin{cases} S_k = S_{k-1} \cdot (1+i) - P \\ S_{k+1} = S_k \cdot (1+i) - P \end{cases}.$$

Subtraindo a primeira da segunda equação, temos que:

$$S_{k+1} - S_k = (1+i) \cdot (S_k - S_{k-1}).$$

Agora perceba que $S_{k+1} - S_k = A_{k+1}$ e $S_k - S_{k-1} = A_k$. Portanto,

$$A_{k+1} = A_k \cdot (1+i). \qquad \blacksquare$$

Teorema 9. *No SAF/PRICE, a amortização* A_k *da k-ésima parcela é dada por:*

$$A_k = (P - C \cdot i) \cdot (1+i)^{k-1}.$$

Demonstração do teorema 9: Pelo Lema 1, temos então que $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma PG de razão $(1+i)$. Assim, utilizando a fórmula do termo geral de uma PG[3], temos que:

$$A_k = A_1 \cdot (1+i)^{k-1}.$$

Entretanto, sabemos que:

$$P = A_1 + J_1 \text{ e } J_1 = C \cdot i \Leftrightarrow A_1 = P - J_1 \Leftrightarrow A_1 = P - C \cdot i \text{ (*)}.$$

---

[3] Fórmula do termo geral de uma PG: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, onde:
a_n é o termo geral da PG; a_1 é o primeiro da PG; q é a razão da PG; n é a posição do termo na PG.

Portanto, concluímos que:

$$A_k = (P - C \cdot i) \cdot (1+i)^{k-1}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 10. *No SAF/PRICE, o saldo devedor* S_k *após a k-ésima parcela é dado por:*

$$S_k = C - \frac{(P - C \cdot i) \cdot \left[(1+i)^k - 1\right]}{i}$$

Demonstração do teorema 10: Sabemos que o saldo devedor após a P_k pode ser obtido da seguinte forma:

$$S_k = C - (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k).$$

Pela Lema 1, sabemos que a sequência das amortizações é uma PG de razão $1+i$. Portanto, vamos utilizar uma variante da fórmula de soma de PG finita[4]:

$$S_k = C - \frac{A_k \cdot (1+i) - A_1}{(1+i) - 1} \Leftrightarrow S_k = C - \frac{A_k \cdot (1+i) - A_1}{i}.$$

Sabemos por pelo teorema 9 que $A_1 = P - C \cdot i$ (*) e que $A_k = (P - C \cdot i) \cdot (1+i)^{k-1}$. Substituindo essas informações na equação acima, temos:

$$S_k = C - \frac{(P - C \cdot i) \cdot (1+i)^{k-1} \cdot (1+i) - P - C \cdot i}{i} \Leftrightarrow S_k = C - \frac{(P - C \cdot i) \cdot (1+i)^k - (P - C \cdot i)}{i} \Leftrightarrow$$

$$S_k = C - \frac{(P - C \cdot i) \cdot \left[(1+i)^k - 1\right]}{i}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 11. *No SAF/PRICE o juro* J_k *presente na k-ésima parcela é dado por:*

$$J_k = C \cdot i - (P - C \cdot i) \cdot \left[(1+i)^{k-1} - 1\right]$$

Demonstração do teorema 11: Sabemos que em todo caso $J_k = S_{k-1} \cdot i$ e, pelo teorema 10, que $S_{k-1} = C - \frac{(P - C \cdot i) \cdot \left[(1+i)^{k-1} - 1\right]}{i}$. Daí, temos então que:

$$J_k = C \cdot (i) - \frac{(P - C \cdot i) \cdot \left[(1+i)^{k-1} - 1\right]}{i} \cdot (i) \Leftrightarrow J_k = C \cdot i - (P - C \cdot i) \cdot \left[(1+i)^{k-1} - 1\right]. \qquad \blacksquare$$

---

[4] Fórmula da soma de n termos de uma PG: $S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$, onde:

S_n é a soma dos n termos; a_1 é o primeiro termo da PG; a_n última termo da PG a ser somado; q é a razão da PG.

O montante total M pago em uma dívida é trivial, visto que sabemos que são pagas t parcelas iguais a P. Logo,

$$M = t \cdot P.$$

Os juros totais $J(totais)$ pago em uma dívida no SAF/PRICE obteremos simplesmente por:

$$J(totais) = M - C$$

3.4.1 Resumo e aplicação das fórmulas do SAF/PRICE

Sugerimos para o conteúdo do SAF/PRICE, o uso das seguintes fórmulas:

- Determinação do valor de cada parcela: $P = C \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$;
- Determinação da amortização de uma k-ésima parcela: $A_k = (P - C \cdot i) \cdot (1+i)^{k-1}$;
- Determinação dos juros de uma k-ésima parcela: $J_k = P - (P - C \cdot i) \cdot (1+i)^{k-1}$;
- Determinação do saldo devedor após uma k-ésima parcela: $S_k = C - \frac{(P - C \cdot i) \cdot [(1+i)^k - 1]}{i}$;
- Determinação do montante final: $M = t \cdot P$;
- Determinação dos juros totais: $J(totais) = M - C$.

Vejamos uma situação-problema para aplicação dessas fórmulas.

Exercício de aplicação do teorema 8: Uma pessoa foi ao banco simular um empréstimo no valor de R$ 60.000,00. Foi realizada para ela a seguinte proposta:

- Valor tomado de empréstimo: R$60.000,00;
- Taxa de juros: 2% a.m.
- Quantidade de parcelas: 60.

Qual o valor da parcela que a pessoa deverá pagar se contratar esse empréstimo? Use $(1{,}02)^{60} \cong 3{,}28$.

Solução: Substituindo $C = 60.000$, $i = 0{,}02$ e $t = 60$ na fórmula da parcela, encontrada no teorema 8, temos que:

$$P = C \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1} \Leftrightarrow P = 60000 \cdot \frac{0{,}02 \cdot (1+0{,}02)^{60}}{(1+0{,}02)^{60} - 1} \Leftrightarrow P = 60000 \cdot \frac{0{,}02 \cdot (1{,}02)^{60}}{(1{,}02)^{60} - 1} \Leftrightarrow$$

$$P \cong 1726{,}32.$$

Portanto, o valor da parcela será R\$ 1.726,32.

Exercícios (SAF/PRICE): Imagine que você é gerente de uma financeira responsável pelo financiamento de uma motocicleta no valor de R\$ 16.000,00, utilizando o SAF/PRICE, à taxa de juros 3% a.m. para ser paga em 48 parcelas. Após pagar a 15ª parcela, o cliente sentiu-se curioso em saber as seguintes informações. Responda, utilizando as seguintes aproximações $(1{,}03)^{48} \cong 4{,}13$, $(1{,}03)^{14} \cong 1{,}51$ e $(1{,}03)^{15} \cong 1{,}558$.

a) Quanto será amortizado com o pagamento dessa parcela?

Solução: Como queremos saber o valor da amortização de uma determinada parcela, vamos aplicar o teorema 9. No entanto, primeiro devemos saber o valor da parcela. Utilizando o teorema 8, teremos que $P \cong 633{,}24$.

Aplicando agora o teorema 9, substituindo $C = 16000$, $i = 0{,}03$, $t = 48$ e $P = 633{,}24$, teremos:

$$A_k = (P - C \cdot i) \cdot (1+i)^{k-1} \Leftrightarrow A_{15} \cong (633{,}24 - 16000 \cdot 0{,}03) \cdot (1+0{,}03)^{15-1} \Leftrightarrow$$

$$A_{15} \cong (633{,}24 - 480) \cdot (1{,}03)^{14} \Leftrightarrow A_{15} \cong 234{,}41.$$

Logo, com o pagamento da 15ª parcela será amortizado um total de R\$ 234,41.

b) Qual o saldo devedor após o pagamento dessa parcela?

Solução: Já sabemos, pelo exercício anterior, que $P \cong 633{,}24$. Além disso, sabemos que $C = 16000$ e $i = 0{,}03$. Portanto, teremos pelo teorema 10 que:

$$S_k = C - \frac{(P - C \cdot i) \cdot \left[(1+i)^k - 1\right]}{i} \Leftrightarrow S_{15} = 16000 - \frac{(633{,}24 - 16000 \cdot 0{,}03) \cdot \left[(1+0{,}03)^{15} - 1\right]}{0{,}03} \Leftrightarrow$$

$$S_{15} = 16000 - \frac{(633{,}24 - 480) \cdot \left[(1{,}03)^{15} - 1\right]}{0{,}03} \Leftrightarrow S_{15} = 13149{,}74.$$

Logo, o saldo devedor após o pagamento da 15ª parcela ficará em R\$ 13.148,74.

c) Exercício de aplicação do teorema 11: Quanto só de juros tem nessa parcela?

Solução: Sabemos pelo teorema 8 que $P \cong 633{,}24$. Além disso, temos que $C=16000$ e $i=0{,}03$. Sendo assim, aplicando o teorema 11, teremos que:

$$J_k = C \cdot i - (P - C \cdot i) \cdot \left[(1+i)^{k-1} - 1\right] \Leftrightarrow$$

$$J_{15} = 16000 \cdot 0{,}03 - (633{,}24 - 16000 \cdot 0{,}03) \cdot \left[(1+0{,}03)^{15-1} - 1\right] \Leftrightarrow$$

$$J_{15} = 480 - (633{,}24 - 480) \cdot \left[(1{,}03)^{14} - 1\right] \Leftrightarrow J_{15} = 401{,}85.$$

Logo, os juros pagos somente na 15ª parcela serão de R$ 401,85.

d) Exercício sobre o montante total pago: Qual o montante final que será pago nesse financiamento?

Solução: Pelo teorema 8, temos que $P=633{,}24$. Assim, teremos que:

$$M = t \cdot P \Leftrightarrow M = 48 \cdot 633{,}24 \Leftrightarrow M = 30395{,}52.$$

Portanto, o montante final pago será R$ 30.385,52.

e) Exercício sobre o juro total pago: Quanto de juros será pago nesse financiamento?

Solução: Sabemos pelo exercício (d) que o montante M pago foi de R$ 30.385,52. Além disso, que o capital C foi R$ 16.000,00. Portanto, teremos que:

$$J(total) = M - C \Leftrightarrow J(total) = 30395{,}52 - 16000 \Leftrightarrow J(total) = 14395{,}52.$$

Portanto, o total de juros pagos nesse financiamento será R$ 14.395,52.

3.5 SAC x SAF/PRICE

Para melhor compreendermos as diferenças entre o SAC e o SAF/PRICE, vamos considerar uma situação-problema de uma pessoa que deseja contratar um empréstimo no valor de R$ 12.000,00 e pagar em 12 meses (1 ano) e a ela sejam oferecidas as duas opções de amortização com iguais condições, isto é, à mesma taxa de juros de 2% a.m., no SAC e no SAF/PRICE.

Sendo assim, temos os seguintes cenários:

Figura 2 – Amortização utilizando o SAC

Nº	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 12.000,00
1	R$ 1.239,97	R$ 239,97	R$ 1.000,00	R$ 11.000,00
2	R$ 1.219,97	R$ 219,97	R$ 1.000,00	R$ 10.000,00
3	R$ 1.199,97	R$ 199,97	R$ 1.000,00	R$ 9.000,00
4	R$ 1.179,97	R$ 179,97	R$ 1.000,00	R$ 8.000,00
5	R$ 1.159,98	R$ 159,98	R$ 1.000,00	R$ 7.000,00
6	R$ 1.139,98	R$ 139,98	R$ 1.000,00	R$ 6.000,00
7	R$ 1.119,98	R$ 119,98	R$ 1.000,00	R$ 5.000,00
8	R$ 1.099,99	R$ 99,99	R$ 1.000,00	R$ 4.000,00
9	R$ 1.079,99	R$ 79,99	R$ 1.000,00	R$ 3.000,00
10	R$ 1.059,99	R$ 59,99	R$ 1.000,00	R$ 2.000,00
11	R$ 1.039,99	R$ 39,99	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00
12	R$ 1.020,00	R$ 20,00	R$ 1.000,00	R$ 0,00
Totais	**R$ 13.559,78**	**R$ 1.559,78**	**R$ 12.000,00**	

Fonte: site iDinheiro (2025). Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-de-financiamento-sac/. Acesso em: 25 de jul. 2025.

Figura 3 – Amortização utilizando o SAF/PRICE

Nº	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 12.000,00
1	R$ 1.134,72	R$ 240,00	R$ 894,72	R$ 11.105,28
2	R$ 1.134,72	R$ 222,11	R$ 912,61	R$ 10.192,68
3	R$ 1.134,72	R$ 203,85	R$ 930,86	R$ 9.261,81
4	R$ 1.134,72	R$ 185,24	R$ 949,48	R$ 8.312,33
5	R$ 1.134,72	R$ 166,25	R$ 968,47	R$ 7.343,87
6	R$ 1.134,72	R$ 146,88	R$ 987,84	R$ 6.356,03
7	R$ 1.134,72	R$ 127,12	R$ 1.007,59	R$ 5.348,43
8	R$ 1.134,72	R$ 106,97	R$ 1.027,75	R$ 4.320,69
9	R$ 1.134,72	R$ 86,41	R$ 1.048,30	R$ 3.272,39
10	R$ 1.134,72	R$ 65,45	R$ 1.069,27	R$ 2.203,12
11	R$ 1.134,72	R$ 44,06	R$ 1.090,65	R$ 1.112,47
12	R$ 1.134,72	R$ 22,25	R$ 1.112,47	R$ 0,00
Totais	**R$ 13.616,58**	**R$ 1.616,58**	**R$ 12.000,00**	

Fonte: site iDinheiro (2025). Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-financiamento-price/. Acesso em: 25 de jul. 2025.

Observando esses cenários, podemos destacar as duas principais diferenças:

1) No SAC, as primeiras parcelas são maiores que as parcelas no SAF/PRICE (que são todas iguais). Já as últimas, são menores.

2) Os juros totais pagos no SAF/PRICE são maiores do que no SAC.

A princípio, parece ser menos prejudicial à saúde financeira da pessoa se ela escolher o SAC, visto que os juros totais serão menores. Quanto maior for a quantidade de parcelas, maior será essa vantagem do SAC em relação ao SAF/PRICE, nesse sentido.

Todavia, pelas parcelas iniciais do empréstimo serem maiores no SAC, pode ser que a pessoa não tenha condições de assumir essa responsabilidade e que não consiga pagar a parcela por completo, acarretando mais juros e até multa, o que pode a longo prazo prejudicar todo planejamento financeiro da pessoa.

De fato, maior parte da dívida no SAC está sendo quitada no início, o que justifica o menor montante pago, mas isso não é apenas vantagem. Pensemos numa situação de um financiamento habitacional que por ter incentivo governamental, pode ser dividido em até 420 parcelas (35 anos) e com taxa de juros menores.

Além da maior previsibilidade do valor da parcela ao longo de todo o período, que pode ser considerada uma vantagem por parte das pessoas, ainda há o fato da depreciação da moeda frente a todos os cenários econômicos do país e do mundo (inflação). Isto é, uma parcela de R$ 600,00 atuais, por exemplo, futuramente (próximo aos futuros 35 anos) pode ser um valor irrisório, dependendo da valorização salarial e da inflação.

Vejamos o quadro a seguir com as principais características e diferenças desses sistemas de amortização:

Quadro 2 – Comparação entre as características do SAC e do SAF/PRICE.

	SAC	**SAF/PRICE**
Juros	Decrescentes	Decrescentes
Amortizações	Constantes	Crescentes
Parcelas	Decrescente	Constantes

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Sendo assim, a escolha pelo sistema de amortização não é tão simples e envolve muitos fatores e quanto mais parcelas, maior será essa dificuldade em escolher.

4 AS ELETIVAS NO NOVO ENSINO MÉDIO: UMA OPORTUNIDADE

De acordo com o Novo Ensino Médio (Lei nº 14.945/2024), o Ensino Médio deverá ter uma carga horária mínima de 600 horas para itinerários formativos, isto é, disciplinas de aprofundamento. Dentre elas, destacam-se as eletivas, que são disciplinas optativas. Em síntese, a escola oferta disciplinas eletivas e os alunos podem ser qual(is) eletiva(s) ele tem interesse em participar. Os professores, que são os agentes que ministram as eletivas, podem criar seus materiais e emendas da disciplina, com uma liberdade maior se comparada às disciplinas básicas, que o Novo Ensino Médio traz como "Formação Geral Básica".

É evidente que essa escolha deve levar em consideração os interesses dos estudantes, como também suas necessidades. É nesse sentido que podemos falar das eletivas como oportunidade de educação financeira. Os professores de Matemática, tendo em vista que é o componente curricular que mais se relaciona com a educação financeira, poderão criar disciplinas eletivas de matemática financeira que possa enfatizar a construção da educação financeira.

Sendo assim, acreditamos que pensar numa eletiva nesse sentido possa ter um grande resultado na vida dos professores e alunos que poderão ter essa oportunidade. Nesse sentido, apresentaremos uma proposta de eletiva que os professores leitores dessa dissertação podem utilizar integralmente ou adaptar às suas realidades.

4.1 Proposta da eletiva

Para elaborar nossa proposta de eletiva, acreditamos que devemos partir essencialmente do planejamento de ensino. Definir informações como a quantidade de aulas e o planejamento de conteúdos por encontro é, portanto, de suma importância.

As eletivas, em geral, são semestrais. Dessa forma, a quantidade possível para uma eletiva é algo em torno de 18 a 22 encontros, cada um com 2 aulas. Levando em consideração que existem variáveis que podem influenciar na quantidade de encontros, como feriados ou quaisquer imprevistos que podem acontecer, vamos idealizar a eletiva considerando uma quantidade de 18 encontros.

Sabemos que a proposta do Novo Ensino Médio com as disciplinas eletivas é que elas tenham um caráter prático e de aprofundamento, acreditamos que devemos pensar em aulas teórico-práticas que se relacionem entre si e motivem os estudantes a aprender e construir um objeto da disciplina. Sendo assim, iremos propor a eletiva com viés tecnológico, de modo que os estudantes criarão juntos calculadoras no ambiente do Libre Office Calc que resolvam situações cotidianas que podem ser interessantes.

4.2 Ementa da eletiva

Tendo em vista que a disciplina é de Matemática e Educação Financeira, temos que abordar os conteúdos mais importantes de Matemática Financeira de forma que os estudantes possam aplicar esses conhecimentos em situações reais, para que esses conteúdos façam sentido durante as aulas.

Reconhecemos que a matemática é complexa para alguns estudantes, devido a diversos fatores, e por isso muitos desses não têm interesse em aprender processos matemáticos. Contudo, ressignificar a matemática, fazendo com que os alunos consigam ver a aplicabilidade dela em seus cotidianos, compreendendo sua importância, é também papel e desejo de todo professor de matemática. Por isso, não devemos dissociá-la da educação financeira.

Sendo assim, nossa proposta é que os seguintes conteúdos sejam abordados na eletiva: porcentagem (descontos e acréscimos), regimes de capitalização (juros simples e compostos), taxas equivalentes, antecipação e postecipação de parcelas de empréstimos ou financiamentos e sistemas de amortização (SAC e SAF/PRICE), conforme abordamos em nosso referencial teórico.

Portanto, propomos a seguinte ementa:

Quadro 3 – Ementa da eletiva

Encontros	Tema da aula
1º	Porcentagem: conceito e resolução de exercícios sobre acréscimos e descontos.
2º	Juros Simples: conceito e resolução de exercícios.
3º	Juros Compostos: conceito e resolução de exercícios.
4º	Juros compostos e taxas equivalentes: conceito e resolução de exercícios.
5º	Juros Compostos na prática: simulação de investimentos do Tesouro Direto.
6º e 7º	Construção de calculadora no Libre Office Calc que determina montante, juros, capital ou tempo de incidência de juros compostos.
8º	Empréstimos e financiamentos: conhecendo um contrato.
9º	Sistema de Amortização Constante (SAC): conceito e resolução de exercícios.
10º	Sistema de Amortização Francês (SAF/PRICE): conceito e resolução de exercícios.
11º	SAC x SAF/PRICE: resolução de exercícios.
12º e 13º	SAC x SAF/PRICE: análise de situações problemas para discutir qual opção mais viável.

14º e 15º	Construção de calculadora no Libre Office Calc que determina o valor das parcelas, do montante a ser pago e o valor de uma parcela amortizada (antecipada).
16º	Financiamento habitacional e Programa Minha Casa Minha Vida.
17º	Aluguel + investimento x financiamento da casa própria.
18º	Financiamento de veículos (motocicleta e carro).

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

4.3 Plano de ensino

No que diz respeito ao plano de ensino da eletiva, precisamos pensar como podemos abordar os conteúdos da ementa da melhor forma possível, descrevendo a forma de avaliação e metodologia utilizada em cada aula.

Portanto, definimos um possível plano de ensino que os professores da eletiva possam utilizar ou usar como inspiração para seu próprio plano. Vejamos:

Quadro 4 – Plano de ensino da eletiva

Tema da aula	Metodologia/Situação didática	Avaliação
Porcentagem: conceito e resolução de exercícios sobre acréscimos e descontos.	Aula expositiva dialogada com ficha de exercícios aplicada, após explanação do conteúdo, a ser respondida em dupla.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega da ficha de exercícios proposta.
Juros Simples: conceito e resolução de exercícios.	Aula expositiva dialogada com ficha de exercícios aplicada, após explanação do conteúdo, a ser respondida em dupla.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega da ficha de exercícios proposta.
Juros Compostos: conceito e resolução de exercícios	Aula expositiva dialogada com ficha de exercícios aplicada, após explanação do conteúdo, a ser respondida em dupla.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega da ficha de exercícios proposta.
Juros compostos e taxas equivalentes: conceito (taxas equivalentes) e resolução de exercícios	Aula expositiva dialogada com ficha de exercícios, aplicada após explanação do conteúdo, a ser respondida em dupla.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega da ficha de exercícios proposta.
Juros Compostos na prática: simulação de investimentos do Tesouro Direto	Pesquisa on-line dos alunos, em dupla, sobre investimentos do Tesouro Direto, guiada por preenchimento de questionário com opções de investimentos.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega de questionário sobre opções de investimento que os estudantes simularam.
Construção de calculadora no Libre Office Calc que determina montante, juros, capital ou tempo de incidência de juros compostos.	Dispondo das fórmulas que lhes foram apresentadas, os estudantes construirão uma calculadora no Libre Office Calc que determina montante, juros, capital ou tempo de incidência de juros compostos de uma aplicação financeira.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega da calculadora no Libre Office Calc.
Empréstimos e	Os estudantes pesquisarão modelos de contrato	Análise da participação e

financiamentos: conhecendo um contrato	de empréstimo e financiamentos, em dupla. Eles irão ler e destacar os principais pontos desses contratos, guiados por questionário, como taxa de juros e demais encargos, atentando-se ao CET (custo efetivo total). Após, as duplas socializarão os pontos destacados.	envolvimento na aula.
Sistema de Amortização Constante (SAC): conceito e resolução de exercícios	Aula expositiva dialogada com ficha de exercícios aplicada, após explanação do conteúdo, a ser respondida em dupla.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega da ficha de exercícios.
Sistema de Amortização Francês (SAF/PRICE): conceito e resolução de exercícios	Aula expositiva dialogada com ficha de exercícios aplicada, após explanação do conteúdo, a ser respondida em dupla.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega da ficha de exercícios.
SAC x SAF/PRICE: resolução de exercícios	Aula expositiva dialogada com ficha de exercícios aplicada, após explanação do conteúdo, a ser respondida em dupla.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega da ficha de exercícios.
SAC x SAF/PRICE: análise de situações problemas para discutir qual opção mais viável.	Os estudantes analisarão as vantagens, desvantagens e a viabilidade do SAC e do SAF/PRICE, bem como a comparação entre eles, a partir de uso de calculadoras on-line e questionário com situações-problema simuladas à realidade.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega de questionário.
Construção de calculadora no Libre Office Calc que determina o valor das parcelas, do montante a ser pago e o valor de uma parcela amortizada (antecipada)	Dispondo das fórmulas que lhes foram apresentadas, os estudantes construirão uma calculadora no Libre Office Calc que determina o valor das parcelas, do montante a ser pago e o valor de uma parcela amortizada.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega da calculadora.
Financiamento habitacional e Programa Minha Casa Minha Vida	Aula expositiva dialogada sobre as características do financiamento habitacional, subsídio do governo e programa Minha Casa Minha Vida. Simulações utilizando calculadoras on-line.	Análise da participação e envolvimento na aula.
Aluguel + investimento x financiamento da casa própria.	Os estudantes responderão questionário sobre análise entre aluguel + investimento ou financiamento habitacional, utilizando como suporte calculadoras on-line.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega de questionário.
Financiamento de veículos (motocicleta e carro).	Os estudantes pesquisarão na internet opções de venda de motocicletas e carro com financiamento e responderão questionário. Simulações serão feitas utilizando calculadora on-line.	Análise da participação e envolvimento na aula e entrega de questionário.

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

4.4 Mapa da eletiva

O mapa da eletiva é o material utilizado para fazer a propaganda da eletiva, contando as principais informações de forma mais clara possível, em linguagem acessível aos alunos. Nele deve conter informações como o nome da eletiva, quantidade de aulas, objetivo(s), dentre outras.

No quadro a seguir, mostramos o modelo do mapa da nossa proposta de eletiva.

Quadro 5 – Mapa da eletiva

Nome da Eletiva	Matemática e educação financeira
Por quanto tempo?	1 Semestre
Quantas aulas por semana?	2 aulas de 50min
Quantas encontros por semestre?	18 encontros de 2 aulas cada
Objetivo	Aumentar os recursos individuais dos alunos na tomada de decisões financeiras sobre empréstimos e financiamentos.
Componentes curriculares envolvidos	Matemática (principal); Informática (opcional).
Produto a ser desenvolvido	Calculadora de simulação de empréstimos no Libre Office Calc que determina o valor das parcelas, do montante a ser pago e o valor de uma parcela amortizada (antecipada) para ficar disponível em computador(es) da escola.
Proposta de culminância	Apresentação da calculadora de simulação financiamentos/empréstimos para a escola.

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

4.5 Uma demonstração do Libre Office Calc

O Libre Office Calc é o software de planilha da Linux e foi escolhido para desenvolvimento das planilhas na nossa proposta de eletiva, tendo em vista que é um software gratuito. Como nem todas as escolas têm sala de informática ou computadores suficientes, o Libre Office Calc passa a ser mais acessível, pois os estudantes podem levar seus próprios notebooks e emprestá-los aos colegas caso seja necessário.

Inicialmente pensamos na possibilidade de os alunos utilizarem os celulares, contudo diante das possibilidades de distrações e dificuldade de inserção das fórmulas nos aplicativos móveis de planilhas, preferimos sugerir o Libre Office Calc.

Esse software pode ser utilizado para construção de uma calculadora para simulação de aplicações financeiras, como cálculo de juros, montante, tempo de incidência de juros, ou até cálculos mais complexos, como determinação de uma parcela ou saldo devedor, basta ter um conhecimento razoável das fórmulas no Libre Office Calc.

Os símbolos que os alunos precisarão para construção das calculadoras propostas são os símbolos operadores: adição (+), subtração (-), multiplicação (*), divisão (/) e potenciação (^), bem como o uso dos parênteses para evidenciar valores. Além disso, precisa-se dos conhecimentos de expressões numéricas e algébricas.

Exemplo: calculadora que determina o montante e os juros (compostos)

Como precisa inserir algumas das informações, precisa-se determinar a célula que receberá cada informação. Observemos a imagem a seguir:

Figura 4 – Exemplo de calculadora que determina o montante e os juros compostos.

	A	B	C	D	E
1	Capital (em R$)	Taxa de Juros Mensal (em %)	Período (em meses)	Montante acumulado (em R$)	Juros compostos (em R$)
2	5000	1	12	=A2*(1+B2/100)^C2	=D2-A2

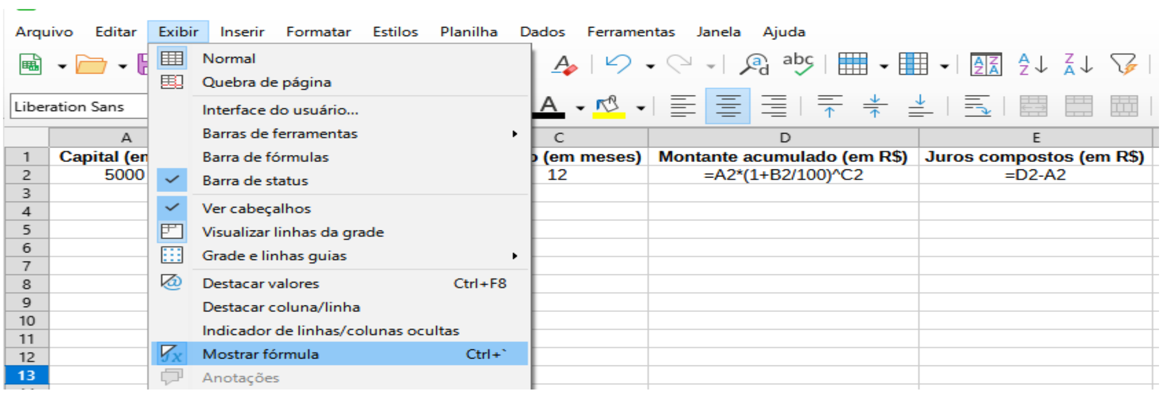
Fonte: elaborado o autor (2025) – utilizando o Libre Office Calc.

Note que a tabela limitada de A1 a C1 apenas orienta o candidato a inserir os valores da simulação nas respectivas células abaixo. Nesse caso, foi inserido na célula A2 o valor do capital, na B2 a taxa percentual de juros mensal e na C2 o período mensal da aplicação.

Já na tabela limitada de D1 a E1, temos os resultados. Na célula D2, tem a fórmula “=A2*(1+B2/100)^C2”. Se observamos A2 = C (capital), B2/100 = i (taxa de juros) e C2 = t (período). Logo, na D2 temos a fórmula de montante de juros compostos. Já na célula E2, temos “D2 – A2”, isto é, o capital subtraído do montante encontrado na célula D2, que determina, portanto, os juros compostos da aplicação.

Essa fórmula pode ser vista, pois na função “exibir”, está marcado para “mostrar fórmulas”. Depois de desmarcar, o resultado do calculo será exposto na célula B6. Observe:

Figura 5 – Função “Mostrar fórmula”:



Fonte: elaborado o autor (2025) utilizando o Libre Office Calc.

Figura 6 - Informações após desmarcar a função “Mostrar fórmula”:

	A	B	C	D	E
1	Capital (em R$)	Taxa de Juros Mensal (em %)	Período (em meses)	Montante acumulado (em R$)	Juros compostos (em R$)
2	5000	1	12	5634,13	634,13

Fonte: elaborado o autor (2025) – utilizando o Libre Office Calc.

Sendo assim, aplicando um capital de R$ 5.000,00 à taxa de juros 1% a.m. por um período de 12 meses, o montante acumulado será R$ 5.634.13, já os juros serão R$ 634,13.

Para realizar os cálculos mais complexos, como fórmula de determinação da parcela no SAF/PRICE, por exemplo, a ajuda de um professor de informática (caso a escola tenha) é muito importante. Assim, o professor da disciplina eletiva pode convidar um professor de informática para auxiliar nesse processo, se possível. Caso contrário, o próprio professor pode orientar os alunos.

Embora torne-se mais trabalhoso elaborar a calculadora, já que poderíamos propor apenas o uso de calculadoras prontas, acreditamos que a construção da calculadora ajuda na memorização das fórmulas e na assimilação do conteúdo. Por esse motivo, utilizar o Libre Office Calc faz parte da proposta da eletiva.

4.6 Uma demonstração do site iDinheiro

Conforme propõe a eletiva, os alunos poderão utilizar calculadoras já disponíveis na internet, que executam os cálculos e apresentam informações sobre as operações financeiras, que podem auxiliar na tomada de decisões. Levando em consideração que boa parte dos alunos possuem dificuldade em matemática, acreditamos que as calculadoras podem ser bastante úteis.

Além disso, qualquer cidadão pode se beneficiar dessas ferramentas, sendo ele proficiente ou não em matemática. A praticidade dessas ferramentas fazem com que possamos obter informações que podem nos ajudar a tomar decisões financeiras mais assertivas, evitando desespero econômico futuramente.

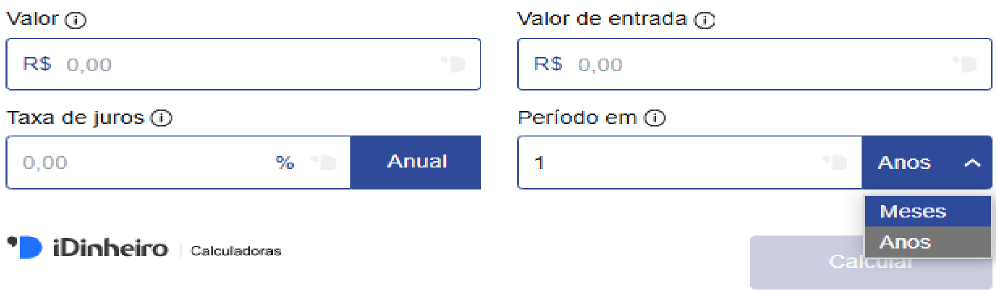
Ciente de que apresentar tais ferramentas poderá causar desinteresse em aprender os processos matemáticos envolvidos, que pode comprometer negativamente a compreensão até dos conceitos teóricos, acreditamos que o melhor momento para apresentá-las aos estudantes é em etapa final, quando os estudantes já tiveram que lidar com os processos matemáticos para desenvolver as atividades propostas da eletiva. Sendo assim, propomos que essas ferramentas sejam apresentadas aos estudantes apenas a partir do 12º encontro.

Sugerimos o uso das calculadoras do site iDinheiro.

4.6.1 Calculadora do SAC do site iDinheiro

O site iDinheiro dispõe de um ambiente intuitivo para simulação de empréstimos e financiamentos no SAC.

Figura 7 – Ambiente da calculadora SAC do site iDinheiro

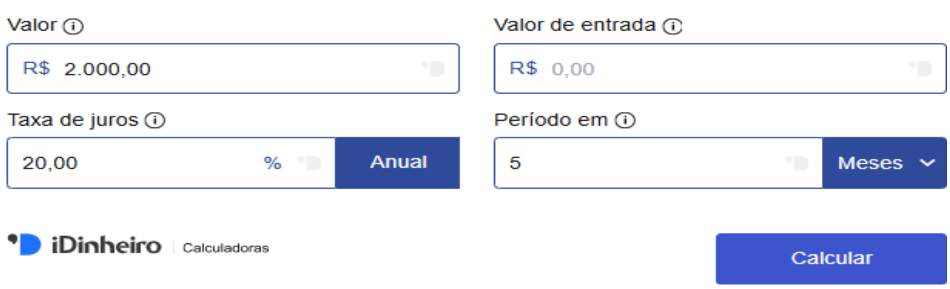


Fonte: site iDinheiro (2025). Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-de-financiamento-sac/.Acesso em: 25 de jul. 2025.

Observe que na calculadora o usuário pode inserir no campo "valor" o capital tomado de empréstimos ou financiado, a taxa de juros anual (em porcentagem), o período (que pode ser em meses ou em anos) e até valor de entrada. A quantidade de meses é, automaticamente, o total de parcelas do financiamento, isto é, sempre teremos parcelas mensais.

Uma desvantagem do uso desse site para o cálculo no SAC, é que o usuário não consegue modificar a unidade da taxa de juros, sendo limitada a "ao ano – anual", enquanto o período pode ser tanto em "meses", quanto em "anos". Dessa forma, caso o usuário disponha apenas da taxa mensal, precisa-se converter para a taxa anual equivalente.

Imagem 8 – Simulação no site iDinheiro (preenchimento das informações) – Empréstimo/Financiamento, no SAC, de R$ 2.000,00, à 20% a.a. em 5 meses.



Fonte: site iDinheiro (2025). Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-de-financiamento-sac/.Acesso em: 25 de jul. 2025.

Figura 8 – Simulação no site iDinheiro (devolutiva) – Empréstimo/Financiamento, no SAC, de R$ 2.000,00, à 20% a.a. em 5 meses.

Evento	Valor
Primeira Parcela	R$ 430,62
Última Parcela	R$ 406,12

Nº	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 2.000,00
1	R$ 430,62	R$ 30,62	R$ 400,00	R$ 1.600,00
2	R$ 424,50	R$ 24,50	R$ 400,00	R$ 1.200,00
3	R$ 418,37	R$ 18,37	R$ 400,00	R$ 800,00
4	R$ 412,25	R$ 12,25	R$ 400,00	R$ 400,00
5	R$ 406,12	R$ 6,12	R$ 400,00	R$ 0,00
Totais	R$ 2.091,86	R$ 91,86	R$ 2.000,00	

Fonte: site iDinheiro (2025). Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-de-financiamento-sac/. Acesso em: 25 de jul. 2025.

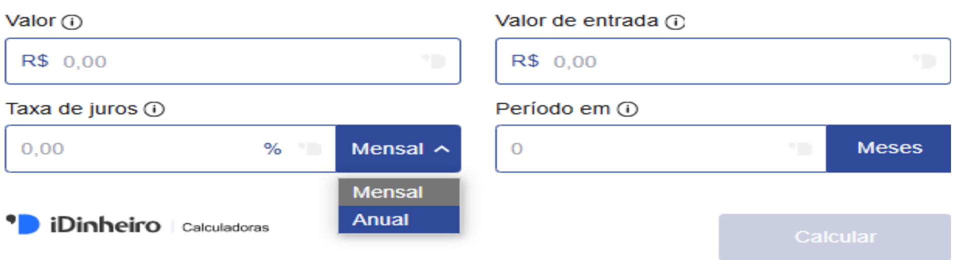
Podemos observar que o site fornece informações bem interessantes acerca da simulação realizada, como valor de cada parcela, quanto se paga de juros e amortização em cada parcela e no total, bem como o saldo devedor parcial. Essas informações são muito úteis, pois o usuário poderá refletir sobre a decisão financeira de contratar ou não um empréstimo ou financiamento.

Além disso, os estudantes podem ao usá-la reforçar informações conceituais acerca do SAC, como a amortização constante e os juros e parcelas decrescentes, que sugerem um "alívio" financeira com o passar do tempo.

4.6.2 Calculadora do SAF/PRICE do site iDinheiro

O site iDinheiro também dispõe de um ambiente intuitivo para simulação de empréstimos e financiamentos no SAF/PRICE. Vejamos:

Figura 9 – Ambiente da calculadora SAF/PRICE do site iDinheiro

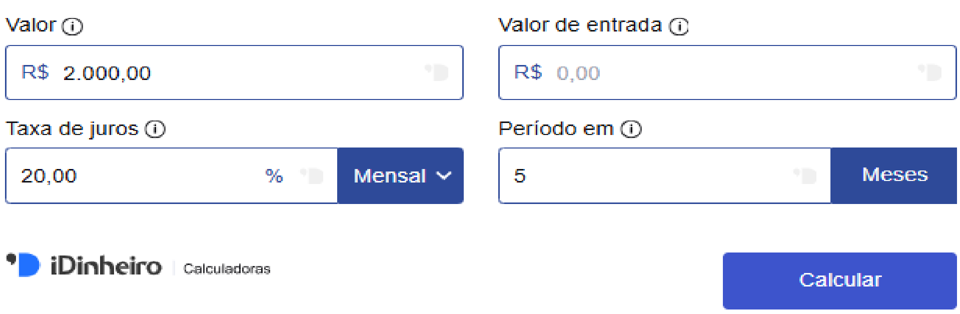


Fonte: site iDinheiro (2025). Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-financiamento-price/. Acesso em: 25 de jul. 2025.

Note que há grande semelhança ao ambiente a calculadora SAC do mesmo site. Nessa calculadora, o usuário pode inserir no campo “valor” o capital tomado de empréstimos ou financiado, a taxa de juros mensal ou anual (em porcentagem), o período (que pode ser somente em meses) e até valor de entrada. A quantidade de meses é, automaticamente, o total de parcelas do financiamento, isto é, sempre teremos parcelas mensais.

Nesse caso, a desvantagem é menor, em relação à calculadora SAC, tendo em vista que a taxa pode ser fornecida em meses ou anos, no entanto, o período pode ser dado apenas em meses – o que pode ser facilmente convertido de “anos” para “meses”, bastando multiplicar por 12.

Figura 10 – Simulação no site iDinheiro (preenchimento das informações) – Empréstimo/Financiamento, no SAF/PRICE, de R$ 2.000,00, à 20% a.a. em 5 meses



Fonte: site iDinheiro (2025). Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-financiamento-price/. Acesso em: 25 de jul. 2025.

Figura 11 – Simulação no site iDinheiro (devolutiva) – Empréstimo/Financiamento, no SAC, de R$ 2.000,00, à 20% a.a. em 5 meses

Evento	Valor
Pagamento mensal estimado	**R$ 668,76**

N°	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 2.000,00
1	R$ 668,76	R$ 400,00	R$ 268,76	R$ 1.731,24
2	R$ 668,76	R$ 346,25	R$ 322,51	R$ 1.408,73
3	R$ 668,76	R$ 281,75	R$ 387,01	R$ 1.021,72
4	R$ 668,76	R$ 204,34	R$ 464,42	R$ 557,30
5	R$ 668,76	R$ 111,46	R$ 557,30	R$ 0,00
Totais	**R$ 3.343,80**	**R$ 1.343,80**	**R$ 2.000,00**	

Fonte: site iDinheiro (2025). Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-financiamento-price/. Acesso em: 25 de jul. 2025.

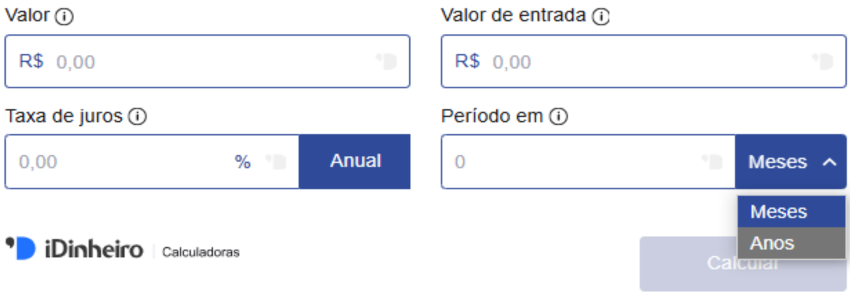
Podemos observar que o site fornece informações semelhantes às fornecidas na calculadora SAC, isto é, sobre valor de cada parcela, quanto se paga de juros e amortização em cada parcela e no total, bem como o saldo devedor parcial.

Com isso, os estudantes podem reforçar as informações conceituais acerca do SAF/PRICE, como a amortização crescente, os juros decrescentes e o valor da prestação constante.

4.6.3 Calculadora do site iDinheiro que compara SAC e SAF/PRICE

Além das calculadoras isoladas do SAC/Price, o site iDinheiro disppões também uma calculadora que apresenta informações tanto do SAC, quanto do SAF/PRICE, que podem ser utilizadas para comparar as vantagens e desvantagens de cada um dos dois sistemas de amortização, frente ao outro. No entanto, as informações gerais são mais limitadas.

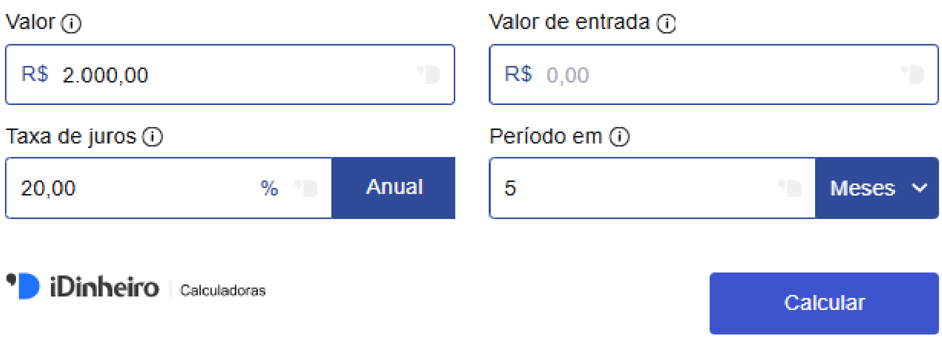
Figura 12 – Ambiente da calculadora comparativa SAC x SAF/PRICE do site iDinheiro.



Fonte: site iDinheiro (2025). Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-financiamento-sac-ou-price. Acesso em: 25 de jul. 2025.

A interface da calculadora comparativa entre SAC x SAF/PRICE é idêntica à da calculadora do SAC. O usuário pode inserir no campo “valor” o capital tomado de empréstimos ou financiado, a taxa de juros anual, o período (que pode ser em meses ou em anos) e até valor de entrada. Assim como à do SAC, a taxa só pode ser dada em anos.

Figura 13 – Simulação no site iDinheiro de comparação entre SAC x SAF/PRICE (preenchimento das informações) – Empréstimo/Financiamento de R$ 2.000,00, à 20% a.a. em 5 meses



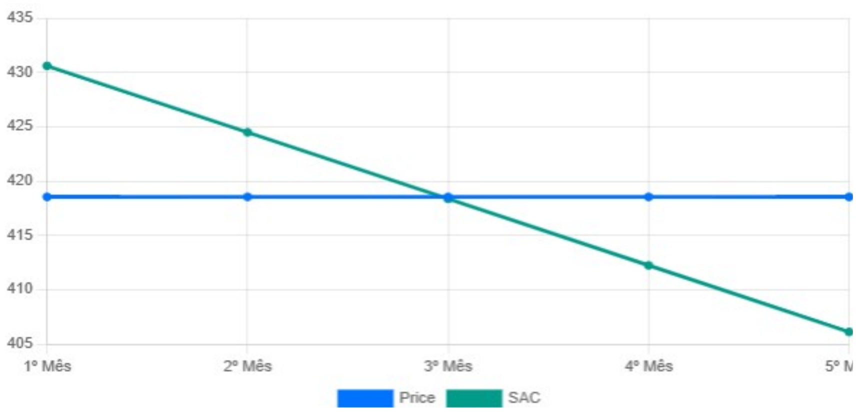
Fonte: site iDinheiro (2025). Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-financiamento-sac-ou-price. Acesso em: 25 de jul. 2025.

Figura 14 – Simulação no site iDinheiro de comparação entre SAC x SAF/PRICE (devolutiva) – Empréstimo/Financiamento, no SAC, de R$ 2.000,00, à 20% a.a. em 5 meses.

VALOR TOTAL PAGO	
SAC	PRICE
R$ 2.091,86	R$ 2.092,79

TOTAL PAGO EM JUROS	
SAC	PRICE
R$ 91,86	R$ 92,79

PAGAMENTO MENSAL ESTIMADO	
SAC	PRICE
Primeira parcela R$ 430,62	Parcelas fixas R$ 418,56
Última parcela R$ 406,12	



Fonte: site iDinheiro (2025). Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-financiamento-sac-ou-price. Acesso em: 15 de jul. 2025.

Pode-se notar que o site não fornece tantas informações quanto nas calculadoras individuais, no entanto, apresenta um comparativo interessante entre os valores das parcelas, a quantidade de juros e o valor total a ser pago. Além disso, traz a representação gráfica do valor da parcela tanto no SAC, quanto no SAF/PRICE. As informações podem ser bastante úteis na tomada de decisão, sobretudo em relação a qual dos dois sistemas de amortização é melhor em cada caso.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Motivados pela percepção da falta de educação financeira da população brasileira e, sobretudo, dos jovens, acreditamos que é de grande relevância aprimorar os conhecimentos nessa área. Consequentemente, estudar matemática financeira é imprescindível.

Acreditamos que o jovem estudante do Ensino Médio que compreender aquilo que propõe esse trabalho, de modo a aplicar esses conhecimentos em sua vida, tornar-se-á um cidadão equilibrado e educado financeiramente.

É preciso que o estudante do Ensino Médio inicie sua efetiva vida financeira de forma a compreender o impacto positivo e negativo que os juros compostos podem causar na sua vida, de modo a ter um suporte para as decisões financeiras que lhes serão exigidas, como financiar a casa própria, financiar veículos ou mesmo utilizar os juros de forma positiva, como nos casos de investimentos.

Portanto, sugerimos que os professores leitores dessa dissertação possam ser instigados a refletir sobre sua própria realidade financeira, estudar mais sobre esse tema e levar essa temática para suas salas de aula, seja na forma de eletiva, conforme foi proposta, ou mesmo nas aulas de matemática, buscando relacionar com a realidade financeira da comunidade em que os alunos se inserem para que eles possam sentir a necessidade de aprender o que lhes será proposto. Com isso, tanto os alunos quanto o próprio professor que se engajar com a temática poderão ter impactos positivos em suas futuras vidas financeiras.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Daniel. A Importância da Educação Financeira: Para uma Vida Financeira Equilibrada. **Vida e Dinheiro**, 2023. Disponível em: https://vidaedinheiro.com.br/educacao-financeira-equilibrada/#a-importancia-da-educacao-financeira. Acesso em: 15 de jul. 2025.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF)**. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/pre/pef/PORT/enef.asp?frame=1. Acesso em 11 de fev. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018.

HOFMANN, R. M.; MORO, M. L. F. Educação matemática e educação financeira: perspectivas para a ENEF. Zetetiké,v. 20, n. 2, p. 37-54, 2012. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646609. Acesso em: 02 de fev. 2025.

HOLANDA, F. B.; MUNIZ NETO, A. C. Introdução: Porcentagem, Aumentos e Descontos. **Portal da Matemática (OBMEP)**, [201-?]. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/9r1apxq69s00s.pdf. Acesso em: 12 de fev. 2025.

HOLANDA, F. B.; MUNIZ NETO, A. C. Financiamentos. **Portal da Matemática (OBMEP)**, 2018c. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/we3rpnh72yo4k.pdf. Acesso em: 12 de fev. 2025.

HOLANDA, F. B.; MUNIZ NETO, A. C. Juros Simples e Compostos. **Portal da Matemática** (OBMEP), +-2018a. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/coves0w34rkk0.pdf. Acesso em: 12 de fev. 2025.

HOLANDA, F. B.; MUNIZ NETO, A. C. Taxas Equivalentes. **Portal da Matemática**, 2018b. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/d085yqzdajsos.pdf. Acesso em: 12 de fev. 2025.

IDINHEIRO. **Calculadora financiamento PRICE**. Sítio eletrônico. Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-financiamento-price/. Acesso em: 15 de jul. 2025.

IDINHEIRO. **Calculadora de financiamento SAC**. Sítio eletrônico. Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-de-financiamento-sac/. Acesso em: 15 de jul. 2025.

IDINHEIRO. **Calculadora SAC ou Price**. Sítio Eletrônico. Disponível em: https://www.idinheiro.com.br/calculadoras/calculadora-financiamento-sac-ou-price. Acesso em: 15 de jul. 2025.

IEZZI, G.; HAZZAN, S; DEGENSZAJN, D. M. **Fundamentos de Matemática Elementar:** matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva. V. 11. 9. ed., São Paulo: Atual, 2013. Disponível em: https://barbosadejesu.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/09/fundamentos-da-matematica-elementar-11.pdf. Acesso em: 12 de fev. 2025.

PAPA NETO, A. P.; MUNIZ NETO, A. C. Função logarítmica e propriedades: Parte 1. **Portal da Matemática (OBMEP)**, 2019. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/wuivdvk7gm8ks.pdf. Acesso em: 12 de fev. 2025.