UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

CÂMPUS ARAPIRACA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Natiely Sampaio Costa

Um estudo sobre o uso das demonstrações matemáticas na educação básica: uma ferramenta para potencializar o ensino e a aprendizagem de matemática

ARAPIRACA

2025

NATIELY SAMPAIO COSTA

Um estudo sobre o uso das demonstrações matemáticas na educação básica: uma ferramenta para potencializar o ensino e a aprendizagem de matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do *Campus* Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do grau de Mestra em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti.

ARAPIRACA

2025

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca Setorial *Campus* Arapiraca - BSCA

C838e Costa, Natiely Sampaio
Um estudo sobre o uso das demonstrações matemáticas na educação básica [recurso eletrônico]: uma ferramenta para potencializar o ensino e a aprendizagem de matemática / Natiely Sampaio Costa. – Arapiraca, 2025.
6756 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2025.
Disponível em: Universidade Digital (UD) – UFAL (*Campus* Arapiraca).
Referências: f. 47-48.
Apêndices: f. 49-56.

1. Matemática. 2. Ensino de matemática. 3. Lógica matemática. I. Bonutti, Moreno Pereira. II. Título.

CDU 51

Bibliotecário responsável: Márcio Thiago dos Santos Albuquerque
CRB - 4 / 2052

NATIELY SAMPAIO COSTA

Um estudo sobre o uso das demonstrações matemáticas na Educação Básica: Uma ferramenta para potencializar o ensino e a aprendizagem de Matemática

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática do *Campus* Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 28 de fevereiro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
MORENO PEREIRA BONUTTI
Data: 07/03/2025 09:18:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti
Orientador (PROFMAT-Arapiraca/UFAL)

Documento assinado digitalmente
JOSE FABIO BOIA PORTO
Data: 10/03/2025 09:41:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Ms. José Fábio Boia Porto
Membro interno (PROFMAT-Arapiraca/UFAL)

Documento assinado digitalmente
WAGNER XAVIER RIBEIRO
Data: 07/03/2025 09:33:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Wagner Xavier Ribeiro
Membro externo (IFAL)

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Moreno Pereira Bonutti pela sua orientação e apoio.

À Revva Sacramento, uma grande matemática e amiga, deixo aqui meus agradecimentos por toda dedicação e ajuda oferecidas a mim.

Ao meu professor e amigo Me. Ícaro Vidal Freire por todo suporte.

À Sofia Morato por ter sido uma grande parceira nessa caminhada e sempre ter me incentivado. .

RESUMO

Este trabalho discute a importância das demonstrações matemáticas e sua aplicação no ensino, destacando as demonstrações e a fundamentação Lógica que as estrutura como um fator de singularidade da Matemática enquanto ciência. Assim, é revisitado brevemente os fundamentos da Lógica Matemática necessários para a construção de uma demonstração, bem como são apresentadas algumas técnicas utilizadas afim de contextualizar a temática e oferecer suporte a professores, auxiliando-os a superar possíveis dificuldades relacionadas à construção e aplicação das demonstrações em suas aulas. Entende-se que as demonstrações nas aulas de Matemática, além de promoverem o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de argumentação dos alunos, podem ainda ser um fator de motivação e maior compreensão dos conceitos estudados e até mesmo do que é fazer e pensar Matemática, para além de aplicações de fórmulas e de técnicas mecanizadas.

Palavras-chave: demonstrações; lógica matemática; ensino de matemática.

ABSTRACT

This thesis discusses the importance of mathematical demonstrations and their application in teaching, highlighting the demonstrations and the logical foundation that structures them as a factor of singularity in Mathematics as a science. Thus, the fundamentals of Mathematical Logic necessary for constructing a demonstrations are briefly revisited, and some techniques are presented to contextualize the topic and provide support to teachers, helping them overcome potential challenges related to the construction and application of demonstrations in their classes. It is understood that demonstrations in Mathematics classes, besides fostering the development of students' logical reasoning and argumentative skills, can also serve as a source of motivation and a deeper understanding of the concepts studied, as well as the very nature of doing and thinking Mathematics, beyond the application of formulas and mechanized techniques.

Keywords: demonstration; mathematical logic; mathematics education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Diferente das demais áreas do conhecimento, a Matemática tem um caráter singular por estar fundamentada em axiomas e por tudo que é produzido de novo ser deduzido através da lógica e ser provado por meio de demonstrações. Uma vez provada a sua veracidade, os resultados matemáticos não se tornam mais passíveis de refutação. Um conceito na matemática nunca é obsoleto, mas sim pode ser agregado ou generalizado, o que já a torna uma ciência muito bela.

Nessa configuração, as demonstrações ganham um papel ainda mais notório, pois são através delas que se comprova a veracidade de um resultado. É claro que a importância das demonstrações está para além disso, devido ao seu modelo de desenvolvimento lógico-formal, ela pode contribuir para o aperfeiçoamento do raciocínio, compreensão dos conceitos estudados e também para a visualização da Matemática lógica construtiva na qual os resultados não surgem como mágica.

No campo do ensino de matemática, conforme Almouloud, Regnier e Fusco (2009) a demonstração é importante também porque apresenta novos métodos e ferramentas para resolução de problemas, bem como amplia o conhecimento matemático de quem a escreve. Aliadas, a resolução de problemas e a demonstração podem ser uma alternativa para mostrar ao aluno a aplicabilidade e a importância dos conteúdos matemáticos nos diversos campos do conhecimento. Como aponta Pietropaolo (2005), se o objetivo é que os estudantes experimentem e interiorizem uma característica essencial da Matemática, não se pode supor um ensino sem prova, pois estes estão intrinsecamente relacionados.

É muito comum nas escolas o ensino de Matemática se resumir praticamente à resolução de exercícios e memorização de fórmulas, o que pouco ajuda no desenvolvimento do raciocínio lógico dos estudantes e pouco estimula a sua criticidade e criatividade. Daí a relevância de se estudar formas de introduzir as provas e demonstrações no ensino de modo que não seja apenas um excesso de formalismo, mas sim, auxiliem no aprendizado de Matemática por parte dos estudantes da Educação Básica.

Em concordância com isso, Silva e Marra Júnior (2020) defendem o uso das demonstrações como forma de romper a passividade que envolve os estudantes. Para além do convencimento, esse uso pode ainda auxiliar a entender que a Matemática é construída sobre um encadeamento lógico de ideias. Embora a intuição seja importante, ela é limitada, fazendo-se necessário construir, comunicar, conjecturar, convencer e ser convencido.

Nesse sentido, o objetivo desta dissertação é mostrar, através dos resultados da pesquisa desenvolvida com estudantes do ensino médio, como as demonstrações podem enriquecer a aula de Matemática, aumentando a interação entre aluno e professor, pois os alunos podem participar ativamente do processo de argumentação de uma demonstração com a mediação do docente, podendo também motivá-los e contribuir para a não mecanização da aprendizagem.

A hipótese que norteia esta pesquisa é de que, ao ser expostos a esse tipo abordagem, os alunos são estimulados a explicar e justificar resultados e soluções, apresentados em aula, com ênfase nos processos de argumentação matemática, competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) Brasil (2017). Além disso, apresentar demonstrações durante as aulas pode aproximar mais o estudante da verdadeira essência do que é a Matemática enquanto ciência e como ela se diferencia das demais.

Entretanto, não é raro que o uso das demonstrações fique restrito às salas das universidades, ou apenas como um recurso para obter a aprovação nas avaliações. Ainda segundo Almouloud, Regnier e Fusco (2009) a dificuldade que muitos professores possuem com a transposição dessas demonstrações para ensino básico está muito ligada também a própria dificuldade do professor em escrevê-las e compreende-las. Não sabendo, por exemplo, identificar o que é a hipótese e o que é a tese, dados essenciais para a construção da demonstração.

Assim, este trabalho também visa, por meio dos dois primeiros capítulos, fornecer um suporte ao professor de matemática que possa ter dificuldade em utilizar essa ferramenta em suas aulas. Nos cursos de licenciatura, os alunos se deparam com diversas demonstrações, que são muito importantes para a formação do professor, pois, além de desenvolver o pensamento crítico e o poder da argumentação, permitem que os futuros docentes compreendam profundamente os conceitos matemáticos, o que é essencial para que eles também sejam capazes de explicar esses conceitos com profundidade ao aluno e responder as dúvidas e questionamentos que possam surgir em suas aulas.

De acordo com Pietropaolo (2005), os conhecimentos didáticos sobre provas estariam dentre os muitos conhecimentos necessários para o professor de Matemática exercer sua função docente. Então, faz sentido destinar uma parte dessa pesquisa para professores entusiastas e futuros professores que desejam aprofundar-se mais sobre a essência das demonstrações, como se constrói uma demonstração e quais técnicas utilizar.

2 NOÇÕES DE LÓGICA

A lógica é a ciência que preocupa-se com o estudo do raciocínio, em particular, a Lógica Matemática é o estudo do tipo de raciocínio feito pelos matemáticos. Além de ser a base da Matemática, uma vez que esta se configura como uma área em que qualquer conclusão necessita de argumentos e provas, a lógica também pode se fazer presente em outras áreas que que exijam raciocínios mais aprofundados e elaborados, assim como também pode ser útil em situações cotidianas.

Dado que o objetivo do trabalho é estudar a importância do uso das demonstrações nas aulas de matemática da educação básica, o presente capítulo pretende fazer uma breve abordagem dos conceitos básicos de lógica como proposições, quantificadores, conectivos lógicos, que são de fundamental importância no estudo das demonstrações, pois são eles que formam a estrutura das redações de qualquer prova na Matemática. Para tanto, foram utilizados como referência deste capítulo Morais Filho (2012) e Alencar Filho (2017).

2.1 Proposições

Definição 2.1. Chama-se proposição ou sentença todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo, tal que satisfaz a três condições:

1. *É estruturada como uma oração afirmativa declarativa (não é interrogativa, nem exclamativa);*

2. *Satifaz o PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo;*

3. *Satisfaz o PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO: Toda a proposição ou é verdadeira ou é falsa, nunca uma terceira alternativa.*

Da definição acima já podemos concluir que a lógica matemática é bivalente, isto é, só há dois valores lógicos para uma sentença em Matemática: verdadeiro ou falso.

Exemplo 2.1. Alguns exemplos de sentenças matemáticas:

1. A medida da diagonal de um quadrado de lado l é $l\sqrt{2}$.

2. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \leq |x|$.

3. Todo numéro ímpar é primo.

2.2 Quantificadores

Observe a seguinte afirmação:

$$5x+4=10.$$

Ela satisfaz a condição 1 da definição 2.1, no entanto, a frase é verdadeira para o caso em que $x=\frac{6}{5}$ e é falsa para qualquer outro $x \neq \frac{6}{5}$. Portanto, não há como determinar se a essa é verdadeira ou é falsa, uma vez que nada foi dito sobre a variável x.

Frases abertas como esta, podem facilmente tornar-se em uma sentença fazendo o uso dos quantificadores. Por exemplo:

"Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $5x+4=10$".

Ou ainda:

"Para todo $x \in \mathbb{R}$, $5x+4=10$".

Observe que a primeira é verdadeira, mas a segunda não. Os termos utlizados "existe" e "para todo" chamam-se, respectivamente, quantificador existencial e quantificador universal e são denotados usando-se os símbolos $\exists$ e $\forall$, nessa ordem.

2.3 Conectivos e proposições compostas

Quando estudamos elementarmente sobre teoria dos conjuntos, vemos que é possível construir novos conjuntos a partir de conjuntos dados utilizando operações como união ou interseção. Como no caso dos conjuntos, quando trabalhamos com proposições matemáticas, também podemos construir outras proposições a partir de proposições dadas, utilizando os conectivos lógicos. Nesse caso dizemos que trata-se de uma proposição composta. Os conectivos mais usados em Mtemática são: ***"e"***, ***"ou"***, ***"Se,... então"***, ***"Se, e somente se"*** e ***"Não"***.

Abordaremos agora os conectivos ***"e"***, ***"ou"***, que são comumente chamados de conectivos de conjunção e disjunção, respectivamente e denotamos por $\wedge$ e $\vee$.

Exemplo 2.2. Se temos as proposições

P: "Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 > 2$"

e

$$\text{Q: “Existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x+1 > 1\text{”}$$

podemos construir as proposições compostas

$$P \wedge Q\text{: “Existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 > 2\text{” e } x+1 > 1$$

e

$$P \vee Q\text{: “Existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 > 2 \text{ ou } x+1 > 1\text{”.}$$

Quanto ao valor lógico dessas novas proposições, definimos que a proposição conjuntiva $P \wedge Q$ será verdadeira, se, e somente se, ambas as proposições são verdadeiras.

Por sua vez, definiremos que uma proposição disjuntiva $P \vee Q$ é verdadeira, apenas quando pelo menos uma das proposições P ou Q for verdadeira; reciprocamente, apenas quando pelo menos uma das duas proposições for verdadeira, é que a proposição $P \vee Q$ será verdadeira.

Principalmente quando se apresentam os conjuntos-solução de equações ou inequações, fica clara a relação entre a disjunção e conjunção de sentenças e as operações entre conjuntos união e interseção. Perceber essa relação pode ser interessante para que se evite confusões entre a linguagem matemática quando se está escrevendo uma proposição ou demonstração e a linguagem cotidiana, pois é comum na linguagem usual utilizar o “ou” como uma conjunção gramatical excludente, ou seja, é como se a união de dois conjuntos fosse algo separado de sua intersecão. Algo que na Matemática não faz sentido, uma vez que dados dois conjuntos A e B, tem-se $A \cap B \subset A \cup B$.

Como Almouloud, Regnier e Fusco (2009), trazem em seu artigo “Resolver problemas envolvendo prova e demonstração: uma dificuldade para professores de ensino básico”, há uma dificuldade dos professores da Educação Básica em reconhecer os dados básicos que compõe um teorema, e isso por sua vez dificulta o processo de demonstração de tais resultados. Logo, entender a estrutura lógica que compõe proposições, teoremas e axiomas é fundamental para o processo de desmistificação do uso de demonstrações no ensino básico.

2.4 Sentenças condicionais e implicativas

Na Lógica Formal, a duas proposições dadas, P e Q, associa-se uma outra proposição “$P \to Q$” chamada sentença condicional, que é lida como “Se P , então Q”. Neste contexto, a proposição P chama-se antecedente e a proposição Q consequente. A priori, a proposição Q

não é deduzida logicamente a partir de P, mas na Matemática estamos interessados em estudar as sentenças condicionais de maneira que Q possa ser deduzida de P sempre que esta última ocorrer.

Definição 2.2. Sentença condicional é uma sentença composta

$$\text{Se } P, \text{então } Q$$

formada por duas sentenças P e Q, ligadas pelo conectivo "Se. . . então", de maneira que a sentença Q pode ser deduzida da sentença P, todas as vezes em que admitirmos a ocorrência de P.

Para nossos objetivos, a maneira de checar que uma sentença "Se P, então Q" é condicional, será por meio de uma **demonstração**, com a qual se pode deduzir a sentença Q, admitindo a sentença P. Esse procedimento é o que chamamos de método dedutivo.

Podemos denotar uma sentença condicional, ou sentença implicativa "Se P, então Q" por

$$P \Rightarrow Q$$

que pode ser lida como P **implica** Q, que para um texto em Matemática tem o mesmo significado. Quanto às sentenças condicionais ou implicativas, observamos:

Proposição 2.1. *(Transitividade) Sejam P, Q, R sentenças. Então $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$ resulta $P \Rightarrow R$.*

Outras duas formas de apresentar a sentença implicativa $P \Rightarrow Q$ muito comum na hora de enunciar teoremas:

"P é condição suficiente para Q",

ou

"Q é condição necessária para P".

Resumidamente, para os propósitos em Matemática, uma sentença implicativa "Se P , então Q" é válida, quando todo elemento que satisfaz P, cumprir necessariamente a sentença Q.

Exemplo 2.3. n é um número inteiro divisível por $6 \Rightarrow n$ é um número par.

Exemplo 2.4. Se em um quadrilátero convexo seus pares de lados opostos forem congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

2.5 Recíproca

A **recíproca** de uma sentença implicativa $P \Rightarrow Q$ é definida como a sentença $Q \Rightarrow P$. Ou seja, Se $P,$ então Q, sua recíproca será a sentença Se $Q,$ então P. Observe que é possível ter uma sentença verdadeira, cujo valor lógico da sua recíproca seja falso; semelhantemente pode ocorrer do valor da sentença ser falso e recíproca ser verdadeira. Em resumo, o valor da recíproca independe do valor da sentença.

Quando a sentença é válida e sua recíproca também, dizemos que há uma **equivalência**, isto é, as sentenças são equivalentes.

Se tivermos duas proposições P e Q, tais que $P \Rightarrow Q$ e, simultaneamente, sua recíproca $Q \Rightarrow P$ sejam ambas verdadeiras, dizemos que:

- P (vale) se, e somente se, Q (vale).
- P é condição necessária e suficiente para Q.
- P é equivalente a Q.

E, neste caso, denotamos por "$P \Leftrightarrow Q$". É muito comum que nas proposições e teoremas, as equivalências apareçam escritas como nos itens acima, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.5. Sejam a, b e m números inteiros com $m > 0$, então $a \equiv b \mod m \Leftrightarrow m|(a-b)$. Nesse exemplo temos uma equivalência, o quer dizer que vale ambos os sentidos da afirmação, a implicação e a sua recíproca.

No próximo exemplo, observe o caso cujo a implicação é verdadeira, mas a recíproca não é.

Exemplo 2.6. Seja a sentença implicativa relativa a um triângulo T:

- $p \Rightarrow q$: Se T é equilátero, então T é isósceles.

A recíproca desta proposição é:

- $p \Leftarrow q$: Se T é isósceles, então T é equilátero.

Aqui, a implicação $p \Rightarrow q$ é verdadeira(V), mas a sua recíproca $p \Leftarrow q$ é falsa(F) .

2.6 Negação

Na Matemática tão importante quanto afirmar é aprender a negar. A negação de uma sentença P é a sentença "não P", cuja notação é $\sim P$. Definimos o valor lógico da sentença $\sim P$ como o oposto do valor lógico da sentença P. Dessa forma, conforme o PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO, temos:

$$P \text{ é verdadeiro} \Rightarrow \sim P \text{ é falso.}$$
$$P \text{ é falso} \Rightarrow \sim P \text{ é verdadeiro.}$$

Por consequência, ou P é verdadeira ou $\sim P$ é verdadeiro, excludentemente. P é falso ou $\sim P$ é falso, excludentemente.

Diferentemente da linguagem cotidiana, negar uma afirmação matemática não se resume a reformular a sentença usando o oposto ou os antônimos das palavras que formam essa sentença. Por exemplo, no dia-a-dia negar a afirmação "toda laranja é azeda", poderia ser dizer que "nem toda laranja é azeda". Na Matemática, afirmação como essa seria negada de uma forma mais útil de acordo com o objetivo desejado. Para tanto, veremos como a negação se relaciona com os conceitos de quantificadores e conectivos lógicos já abordados em seções anteriores.

Sejam P e Q proposições. Para formular a negação de sentenças conjuntivas e disjuntivas, basta observar que sempre vale as equivalências[1]

$$\sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$$

e

$$\sim (P \vee Q) \Leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q).$$

Em resumo, a negação de uma disjunção P ou Q é a conjunção " não P e não Q"; enquanto que a negação de uma conjunção "P e Q" é a disjunção "não P ou não Q".

Exemplo 2.7. A negação da disjunção $P \vee Q$: *A soma* $e + \pi$ *é irracional ou é maior do que* $5,86$ é a conjunção $\sim P \wedge \sim Q$: *A soma* $e + \pi$ *é racional e é menor do que ou igual a* $5,86$.

Para os quantificadores universais e existenciais, a negação funciona de maneira similar aos casos dos conectivos. Para discutir como a negação se comporta para tais quantificadores será usado um pouco da Linguagem de Conjuntos.

[1] Essas equivalências podem ser facilmente verificadas por meio de uma tabela verdade.

Seja X subconjunto contido em um conjunto universo $\mathcal{U}$, define-se o complementar de X em relação a $\mathcal{U}$ o conjunto

$$A^C = \{x \in \mathcal{U}; x \notin A\}.$$

Se $P(x)$ é uma sentença aberta que depende de uma variável x, onde $x \in \mathcal{U}$, denotamos os seguintes conjuntos

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ é válida}\}.$$

e

$$\mathcal{P}^C = \{x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ não é válida}\}.$$

Dizer que "$\exists x \in \mathcal{U}; P(x)$ é válida" equivale a afirmar que $\mathcal{P} \neq \emptyset$, e, portanto, negar esta sentença significa afirmar que $\mathcal{P} = \emptyset$, ou seja, $\mathcal{P}^C = \mathcal{U}$. Esta última igualdade equivale afirmar que "$\forall x \in \mathcal{U}$, $P(x)$ não vale". Diante do que foi discutido, tem-se a seguinte negação

$$\sim (\exists x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ é válida}) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ não é válida. })$$

De maneira muito semelhante, verifica-se que

$$\sim (\forall x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ é válida}) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ não é válida. })$$

Exemplo 2.8. Negar a sentença "Todo número da forma $2^{2^n} + 1$ é primo para $n \in \mathbb{N}$" é afirmar que "Existe número composto da forma $2^{2^n} + 1$ para n natural".

Exemplo 2.9. Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 89$ ou $x^2 \leq 34$. Negar esta afirmação seria dizer que " Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $x \leq 89$ e $x^2 > 34$."

Para finalizar esta seção, vamos encontrar a negação de uma sentença implicativa. Anteriormente foi visto que sentença implicativa "Se H , então T" é válida, quando todo elemento que satisfizer a hipótese H cumprir necessariamente a tese T e, reciprocamente, quando todo elemento que satisfizer a hipótese H cumprir a tese T , temos a validade da sentença "Se H , então T".

Portanto, negar sentença "Se H , então T" é dizer que "existe um elemento que satisfaz a hipótese H e que não cumpre a tese T", ou seja, para algum elemento, não se pode deduzir T, assumindo ocorrência de H.

Na Lógica Formal, este fato é afirmado da seguinte maneira:

$$\sim (H \rightarrow T) \equiv (H \wedge \sim T).$$

Por exemplo, uma das implicações do Teorema de Pitágoras é que *Se o triângulo é retângulo, então o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas de seus catetos.* Assim, a negação desse Teorema será: *Existe um triângulo que é retângulo, mas cujo quadrado da medida da hipotenusa é diferente da soma dos quadrados das medidas de seus catetos.*

A negação de sentenças matemáticas será muito importante mais adiante quando forem discutidas as técnicas de demonstração no próximo capítulo. Dessa forma, será possível observar que as vezes é bem mais fácil ou conveniente provar certos resultados por procedimentos indiretos de demonstração que usam fortemente a negação de proposições vistas nesta seção.

3 TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Segundo Morais Filho (2012), expor suas ideias e saber redigir uma demonstração tem tanta relevância quanto inventá-las; não basta apenas resolver exercícios ou entender teorias matemáticas. O ato de escrever melhora o raciocínio, fortalece as convicções nos argumentos, apura os pensamentos e deve se tornar uma prática, principalmente quando o objetivo é ensinar Matemática. Escrever um texto matemático, quer seja uma simples resolução de um problema a uma dissertação é um excelente exercício de Lógica.

Nesse sentido, tendo em vista que uma das intenções desta pesquisa é justamente fornecer um suporte ao professor de matemática para que ele introduza as demonstrações em suas aulas, este capítulo se dedica a exibir algumas técnicas recorrentes de demonstração matemática, que devem ser familiares a todo professor de Matemática e que podem ser incorporadas as aulas de Matemática no ensino médio ou fundamental. Assim, foram divididas quatro seções de acordo com o método de demonstração utilizado, em cada seção há exemplos e resultados demonstrados pelo respectivo método, ilustrando assim como eles são utilizados na prática.

Apesar de todos os exemplos apresentados serem próximos do ensino básico, é importante ressaltar que a atuação do professor ao demonstrá-los é imprescindível para a introdução das provas e demonstrações na aula de Matemática, visto que muitos termos técnicos e estruturas lógicas, fortemente utilizadas aqui, não fazem parte do cotidiano dos alunos. Então se faz necessário que o professor separe algumas aulas, ou encontros para desenvolver esses conceitos de lógica que foram apresentados no capítulo anterior (com adaptações é claro).

3.1 Demonstração direta

Um dos métodos de demonstração mais simples é o da **demonstração direta**, no qual para provar que uma proposição $P \Rightarrow Q$, admitimos a hipótese P como verdadeira e através de um processo lógico-dedutivo, se deduz diretamente a tese Q. Esse processo lógico-dedutivo usado em uma demonstração é composto por argumentos que podem ser axiomas, definições e outros resultados já provados. E os recursos podem ser diversos: geométricos, aritméticos, algébricos, analíticos, argumentos combinatórios, dentre outros.

Exemplo 3.1. Se n é um número ímpar, então n^2 também é um número ímpar.

Aqui temos uma proposição do tipo se P, então Q, onde a hipótese é n ser ímpar e a tese é que n^2 é impar.

Demonstração. Se n é ímpar, então $n = 2k+1$ onde k é número inteiro. Logo

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1,$$

onde $m = 2k^2 + 2k$ é um número inteiro. Portanto, n^2 é também ímpar. ■

Observe que nesse caso a dedução de que n^2 é ímpar decorreu diretamente da hipótese que n é impar.

Exemplo 3.2. Prove que todo quadrado de um número inteiro deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4.

Observe que essa proposição não está apresentada na forma $P \Rightarrow Q$. Mas ela poderia ser entendida como "Se x é um número inteiro então x^2 deixa resto 1 ou 0 na divisão por 4". Então para para demonstrar tal fato, partiremos da hipótese que x é inteiro e deduziremos o que se quer demonstrar.

Demonstração. Da hipótese de k ser um número inteiro, temos duas possibilidades para k :

1. k é par.

2. k é ímpar.

Se k for par, então $\exists\ m$, com m inteiro, tal que $k = 2m$. Logo,

$$k^2 = (2m)^2 = 4m^2,$$

que deixa resto 0 na divisão por 4.

Por outro lado, se k for ímpar, então $\exists\ p$, com p inteiro, tal que $k = 2p+1$ e

$$k^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4(p^2 + p) + 1,$$

que deixa resto 1 na divisão por 4.

Portanto, se k é um número inteiro, então k^2 deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4. ■

Exemplo 3.3 (ITA)**.** Seja $z = a + bi$ um número complexo. Se $z + \dfrac{1}{z}$ e um número real, então mostre que $b = 0$ ou $|z| = 1$.

Prova. Se $z = a + bi$ então,

$$z + \frac{1}{z} = a + bi + \frac{1}{a + bi}.$$

Multiplicando pelo conjugado de z, $\bar{z} = a - bi$, e com algumas manipulações convenientes, obtém-se que

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= a + bi + \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \\ z + \frac{1}{z} &= \frac{(a^2 + b^2)a + (a^2 + b^2)bi + (a - bi)}{a^2 + b^2} \\ z + \frac{1}{z} &= \frac{a(a^2 + b^2 + 1)}{a^2 + b^2} + \frac{(a^2 + b^2 - 1)b}{a^2 + b^2} i. \end{aligned}$$

Como por hipótese, $z + \frac{1}{z}$ é real, a parte imaginária desse número tem de ser zero, logo,

$$\frac{(a^2 + b^2 - 1)b}{a^2 + b^2} = 0.$$

Mas isso só ocorre se $b = 0$ ou $(a^2 + b^2 - 1) = 0$, neste último caso

$$a^2 + b^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

∎

3.2 Redução ao absurdo

Para demonstrar uma proposição $P \Rightarrow Q$ podemos, para efeito de demonstração, supor que a proposição não é válida, isto é, admitindo a hipótese como verdadeira, a tese é falsa e usar esse fato para chegar a uma contradição. Essa técnica de demonstração chama-se **demonstração por contradição ou redução a um absurdo**. Metodologicamente, dada uma sentença $P \Rightarrow Q$, para demonstrá-la usando o método de redução a um absurdo: Admitindo a hipótese, nega-se a tese e supõe que esta seja verdadeira, ou seja, $\sim Q$ é válida, daí utilizando isso deduzimos uma contradição, o que garantirá que essa suposição não pode ocorrer e daí $\sim Q$ ser falsa equivale a Q ser verdadeira. Logo, a proposição é válida.

O que garante esse método de demonstração é o seguinte fato:

Proposição 3.1.

$$(H \to T) \Leftrightarrow [(H \wedge \sim T) \to F]$$

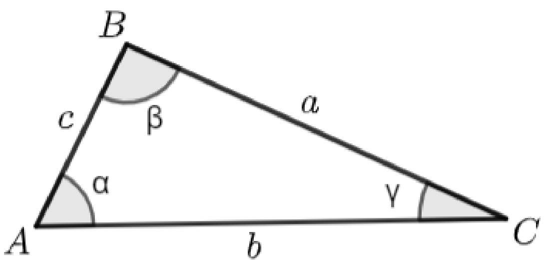
onde F indica uma proposição falsa.

Interpretando essa equivalência, vemos que para provar que $H \to T$, supõe-se a hipótese verdadeira, mas que a tese seja falsa, ou seja, que ocorre $H \wedge \sim T$, daí deve se deduzir uma sentença contraditória como $Q \wedge \sim Q$ (que tem sempre valor lógico falso). Mas sabemos que não podemos deduzir uma sentença falsa partindo de uma que seja verdadeira. Logo, $H \wedge \sim T$ não pode ocorrer e, como $H \wedge \sim T \Leftrightarrow \sim (H \to T)$, concluímos que $\sim (H \to T)$ não ocorre (é falsa) e, portanto, $H \to T$ como desejávamos.

Exemplo 3.4. Em um triângulo escaleno, nenhuma bissetriz interna pode ser altura.

Demonstração. Seja ABC um triângulo escaleno qualquer, conforme a figura 1 abaixo.

Figura 1 – Triângulo escaleno

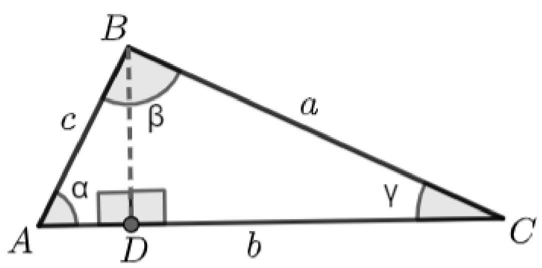


Fonte:Autora (2024)

Sabe-se que α, β e γ são todos distintos entre si e $a \neq b \neq c$.

Sem perda de generalidade, suponhamos por absurdo que a bissetriz de β seja a altura relativa ao lado AC.

Figura 2 – Bissetriz e altura do triângulo escaleno



Fonte:Autora (2024)

Assim, $A\hat{B}D$ e $C\hat{B}D$ são congruentes pois BD é bissetriz de $A\hat{B}C$. Além disso, BD é um lado comum ao triângulo ABD e CBD. Por fim, também é possível ver que os dois ângulos $A\hat{D}B - C\hat{D}B = 90°$, pois D é o pé da altura relativa a AC. Portanto, conlui-se que os triângulos

ABD e CBD são congruentes pelo caso de congruência Ângulo Lado Ângulo. Isso, por sua vez, implica que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Absurdo, pois o triângulo é escaleno. ■

Exemplo 3.5 (Olímpiada Russa)**.** Sejam a, b, c números reais. Mostre que pelo menos uma das equações a seguir tem uma raiz real.

$$x^2 + (a-b)x + (b-c) = 0;$$
$$x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0;$$
$$x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0.$$

Prova. Sejam a, b, c números reais (essa é a hipótese assumida). Suponha que nenhuma das equações acima admita raiz real (observe que a tese acaba de ser negada). Como todas as equações são quadráticas, para que elas não admitam raízes reais seus discriminantes devem ser menores que zero. Logo devemos ter

$$(a-b)^2 - 4(b-c) < 0;$$
$$(b-c)^2 - 4(c-a) < 0;$$
$$(c-a)^2 - 4(a-b) < 0.$$

Somando membro a membro as desigualdades acima obtemos que

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 4 \cdot [(b-c) + (c-a) + (a-b)] < 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 < 0.$$

O que contradiz a hipótese inicial, pois o quadrado de números reais é sempre não negativo. (Em termos de lógica formal, a contradição que chegamos é a, b, c são números e $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 < 0$).

■

Exemplo 3.6 (Euclides)**.** Mostre que existe um número infinito de números primos.

Prova. Em outras palavras, o que se deseja provar é que sendo X o conjunto de todos os números primos, então X é um conjunto infinito. Suponhamos então, por absurdo, que X é o conjunto de todos os números primos e que X seja finito, digamos

$$X = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}.$$

Considere o número natural

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

N é maior do que 1 e do que qualquer $p_i \in X$, com $1 \leq i \leq n$, então N não é primo, isto é, N é múltiplo de um primo. Logo, deve existir um número primo $p_k \in X$ tal que $p_k | N$ e $p_k | p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot \ldots \cdot p_n$. Mas então

$$p_k | N - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = 1.$$

Da última igualdade obtemos $p_k = 1$, o que é um absurdo pois p_k é primo. ■

Diferentemente da demonstração direta, aqui não se parte da hipótese para deduzir a tese. Ao demonstrar por absurdo uma sentença $H \rightarrow T$, a conclusão de que T é verdadeira é feita a partir da técnica de demonstração utilizada, por esse motivo esse tipo de demonstração é chamada de indireta.

3.3 Contrapositiva

A contrapositiva é também uma técnica de demonstração indireta, em que pode ser vista como um caso particular da redução ao absurdo, em que a a contradição é chegar na negação da hipótese. Logo, retornando à Proposição 3.1, teríamos

$$(H \rightarrow T) \Leftrightarrow (H \wedge \sim T) \rightarrow \sim H, \tag{1}$$

onde $\sim H$ é uma proposição falsa, visto que supomos a hipótese verdadeira. Por essa mesma razão, da hipótese ser verdadeira, a proposição $(H \wedge \sim T)$ absorve o valor proposicional de $\sim T$. Em outras palavras, se $\sim T$ é verdadeira, então $(H \wedge \sim T)$ é verdadeira. Mas se $\sim T$ é falsa, então $(H \wedge \sim T)$ também o será. Logo, nesse caso, podemos escrever a equivalência (1) como

$$(H \rightarrow T) \Leftrightarrow (\sim T \rightarrow \sim H).$$

Assim, pode-se concluir que, em particular, provar uma proposição condicional $P \rightarrow Q$ é equivalente a provar sua contrapositiva $\sim Q \rightarrow \sim P$.

Vejamos alguns exemplos, extraídos do Portal da Obmep[1] que podem ser facilmente abordados em sala de aula.

[1] O Portal de Matemática da OBMEP oferece, gratuitamente, videoaulas, apostilas teóricas, cadernos de exercícios, problemas resolvidos, aplicativos e testes que cobrem todo o currículo de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, além de tópicos adicionais para complementar e aprofundar o aprendizado.

Exemplo 3.7. Suponha que x seja um número inteiro tal que $5x+11$ é ímpar. Mostre que x é par.

Numa prova direta, seria usada hipótese que $5x+11$ é ímpar para deduzir a tese que x é um número par[2]. Vejamos agora como a prova procede utilizando o método da contrapositiva.

Prova por contrapositiva. (A contrapositiva da implicação *Se* $5x+11$ *é ímpar, então x é par* é a proposição *Se x é ímpar, então* $5x+11$ *é par.* Vamos então provar diretamente esta última sentença). Suponha que x não é par. Logo, x será impar. Assim, $5x$ também será ímpar, pois é o produto de dois números ímpares. Por fim, $5x+11$ será par, pois é a soma de dois ímpares. Portanto $5x+11$ não é ímpar.

■

Exemplo 3.8. Considere 100 números naturais não nulos cuja soma é 5049. Mostre que existem dois destes números que são iguais.

Prova. Suponhamos que esses números naturais sejam todos distintos. Então podemos enumerá-los de tal forma que

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{99} < a_{100}.$$

Note que o menor valor que a_1 pode assumir é 1, isto é, $a_1 \geq 1$, analogamente $a_2 \geq 2$, $a_3 \geq 3, \ldots, a_{99} \geq 99$, $a_{100} \geq 100$. Somando todas essas desigualdades obtemos:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{99} + a_{100} \geq 1 + 2 + \ldots + 99 + 100.$$

Seja $S = 1 + 2 + \ldots + 99 + 100$, para calcular a soma S utilizamos o seguinte procedimento[3]: Primeiramente escrevemos a soma S com as cem parcelas em ordem crescente:

$$S = 1 + 2 + \ldots + 99 + 100. \tag{2}$$

■

Em seguida, escrevemos a soma S com os cem termos em ordem decrescente:

$$S = 100 + 99 + \ldots + 2 + 1. \tag{3}$$

[2] Se $5x+11$ é impar, então $5x$ é par. Logo, $2|5x$, mas como 2 e 5 são primos entre si, segue que $2|x$.

[3] A técnica utilizada é corriqueiramente atribuída ao brilhante matemático alemão Carl Friedrich Gauss.

Somando as igualdades (2) e (3), temos que

$$\begin{aligned} S+S &= (100+1)+(99+2)+\ldots+(2+99)+(1+100) \\ 2S &= \underbrace{101+101+\ldots+101+101}_{\text{100 parcelas}} \\ 2S &= 100\cdot 101. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos $2S = 10.100$. Logo, $S = 5.050$.

Isto nos permite concluir que a soma de 100 números naturais distintos é sempre pelo menos 5.050, nunca podendo ser 5.049, o que contradiz assim a hipótese do problema.

No próximo exemplo tem-se um caso de propriedade para o mdc de números inteiros, em que vale a recíproca da afirmação. Nesse tipo de proposição, a demonstração em geral é feita em duas partes para dar conta de provar os dois sentidos da implicação.

Exemplo 3.9. Mostre que, dados a,b e c números inteiros, $(a,bc) = 1$, se , e somente se, $(a,b) = (a,c) = 1$.

Primeiro vamos mostrar que se $(a,bc) = 1$, então $(a,b) = (a,c) = 1$. Usando a contrapositiva dessa implicação vamos supor que $(a,b) = d$, onde d é diferente de 1 e então provar que $(a,bc) \neq 1$.

Demonstração. $\Rightarrow$) De fato, se $(a,b) = d$ então $d|a$ e $d|b$, consequentemente $d|bc$. Daí, sendo $(a,bc) = m$, sabemos que m é o maior divisor comum de a,bc então $d|m$, e como $d \neq 1$, segue que $m \neq 1$. Portanto, conlcuí-se que

$$(a,bc) = 1 \Rightarrow (a,b) = (a,c) = 1.$$

Agora vamos mostrar a segunda parte da proposição: se $(a,b) = (a,c) = 1$, então $(a,bc) = 1$.

$\Leftarrow$) Supondo por absurdo que $(a,bc) = d$, onde d é diferente de 1, temos por definição que $d|a$ e $d|bc$. Como por hipótese $(a,b) = 1$ e $d \neq 1$, então $d \nmid b$. Mas $d|bc$, logo, $d|c$. Isso implica que $(a,c) = d = 1$. O que é um absurdo, pois supomos $d \neq 1$. Assim, mostramos que

$$(a,bc) = 1 \Leftarrow (a,b) = (a,c) = 1.$$

Portanto,

$$(a,bc) = 1 \Leftrightarrow (a,b) = (a,c) = 1.$$

■

3.4 Método da indução

O princípio da indução serve de base para este método muito importante de demonstração de teoremas e outros resultados sobre o conjunto dos números naturais, tendo aplicações em uma série de problemas, como identidades, desigualdades, divisibilidade, recorrências Lima (2018).

Admitiremos como fato, a seguinte propriedade dos números naturais:

Axioma 3.1. Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e toda vez que $n \in X$ implica que $n+1 \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Esta propriedade fornece uma das mais poderosas técnicas de demonstração em Matemática: a demonstração por indução.

Para maior compreensão do teorema apresentado a seguir, admita que $P(n)$ seja uma sentença matemática que dependa de uma variável natural n, a qual se torna verdadeira ou falsa quando n for substituído por um número natural dado qualquer. Tais sentenças serão ditas sentenças abertas definidas sobre o conjunto dos naturais.

Teorema 3.2 (Prova por Indução Matemática)**.** *Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que*

1. *P(1) é verdadeira;*
2. *Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(n)$é verdadeira, segue que $P(n+1)$ é verdadeira. Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 3.10. Seja $S_n = 1+2+3+\ldots+n$ a soma dos n primeiros números naturais. Mostre que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

para todo número n natural escolhido.

Demonstração. Note que para $n = 1$

$$S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

é válida.

Agora, suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos S_n verdadeira, isto é

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1+2+\ldots+n+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

o que estabelece a veracidade de S_{n+1}. Logo, pelo princípio da indução, S_n é válida para todo número n natural. ■

O próximo exemplo, mostra que uma determinada proposição pode ser verdadeira apenas a partir de um determinado $a \in \mathbb{N}$, mas não necessariamente para valores menores do que a. Estes casos podem ser demonstrados utilizando uma generalização do Teorema (3.2) que pode ser enunciada da seguinte maneira:

Teorema 3.3. *Sejam $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{N}$ Suponha que*

1. *P(a) é verdadeira e*
2. *qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq a$, sempre que $P(n)$é verdadeira, segue-se que $P(n+1)$ é verdadeira.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.11. $P(n)$: $2^n > n^2$ é verdadeira, para todo número natural $n \geq 5$.

De fato, $P(5) : 2^5 > 5^2$ é válida. Suponhamos que para $n \geq 5$, tenhamos

$$2^n > n^2$$

verdadeira. Então, multiplicando ambos os lados da desigualdade por 2 segue-se que

$$2^{n+1} > 2n^2.$$

Por outro lado, note que $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$, esta última igualdade é positiva para $n \geq 3$. Como supomos $n \geq 5$, então vale que

$$2^{n+1} > 2n^2 > (n+1)^2,$$

isto prova que $P(n+1)$ é válida. Logo, pelo Teorema (3.3), $2^n > n^2$ para todo número natural maior do que ou igual a 5.

Em sala de aula os casos iniciais poderiam ser exibidos para que fosse verificado, na prática, o porquê de ser exigido que o caso base iniciasse no natural 5 e não no 1 como foi feito em exemplos anteriores. Note que $P(1) : 2^1 > 1^2$ é verdadeira, no entanto, $P(2) : 2^2 > 2^2$ é falsa, $P(3) : 2^3 > 3^2$ é falsa e $P(4) : 2^4 > 4^2$ é falsa.

Exemplo 3.12. O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado por

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Demonstração. Embora não dito explicitamente no enunciado, $n \geq 3$, uma vez que para valores de n menores que 3 não há polígono a ser formado.

Para $n = 3$,

$$d_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$$

é verdadeira, pois não há diagonais em um triângulo (polígono de 3 lados).

Suponha que para $n > 3$ tenhamos

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

como o número de diagonais de um polígono convexo de n lados e vértices $V_1, V_2, \ldots . V_{n-1}, V_n$.

Então acrescentado 1 vértice, digamos V_{n+1}, pode-se formar um polígono de $n+1$ lados, desse novo vértice partem $n-2$ diagonais, que é o número de vértices não consecutivos, observe que e o antigo lado V_1V_n com acréscimo desse vértice torna-se uma diagonal. Então nessa nova configuração, temos para um polígono de $n+1$ lados

$$\begin{aligned}
d_{n+1} =& \frac{n(n-3)}{2} + (n-2) + 1 \\
=& \frac{n(n-3) + 2(n-2) + 2}{2} \\
=& \frac{n^2 - n - 2}{2} \\
=& \frac{n^2 - n - 2}{2} \\
=& \frac{(n+1)(n-2)}{2}
\end{aligned}$$

diagonais. De sorte que da última igualdade, obtemos o número de diagonais

$$d_{n+1} = \frac{(n+1)\left[(n+1)-3\right]}{2},$$

o que conclui, por indução, que $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ é número de diagonais de qualquer polígono convexo de n lados.

$\blacksquare$

Alguns esclarecimentos acerca do método e da demonstração apresentada no exemplo anterior: poderia parecer que estamos usando o fato de $P(n)$ ser verdadeira para deduzir que $P(n+1)$ é verdadeira para em seguida concluir que $P(n)$ é verdadeira. Em outras, palavras usa-se a tese para provar o teorema? Não é bem assim, observe que dado um número natural n, temos duas categorias mutuamente excludentes para uma certa proposição P, com base no que foi visto no capítulo 2:

(i) ou $P(n)$ é verdadeira

(ii) ou $P(n)$ é falsa.

A hipótese 2 do Teorema 3.2 não exige em absoluto que assumamos $P(n)$ verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, podendo eventualmente ser falsa para algum valor de n, ou mesmo para todos os valores de n. O que a hipótese 2 exige é que toda vez que algum n pertença à categoria *(i)* acima, então $n+1$ também pertença a essa mesma categoria; não exigindo nada quando n pertencer à categoria *(ii)*. Para exemplificar, observe que a sentença aberta $P(n): \ n = n+1$ satisfaz (por vacuidade), à hipótese 2 do Teorema 3.2. Mas o que falha para que o Teorema garanta que $P(n)$ é verdadeira para todo n é que a primeira hipótese do 3.2 não é verificada, pois $P(1): \ 1 = 2$ é uma sentença falsa.

Segundo Hefez (2009), é preciso ter clareza da natureza singular da Indução Matemática que diferente da indução empírica das ciências naturais, em que é comum, após um certo número, necessariamente finito, de experimentos, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Na Matemática, como já foi discutido na introdução desta pesquisa, não se pode trabalhar com afirmações que não se provem verdadeiras.

Isso por se só já se põe como um tópico bastante rico para se abordar na sala de aula, mostrando para os alunos o quão especial e bela é a Matemática. Sempre fica claro qual a natureza de disciplinas como biologia, física etc. Então por que não explorar a singularidade da natureza da Matemática, como a ciência baseada nas demonstrações?

4 METODOLOGIA

A fim de analisar a importância do uso das demonstrações e exemplificar como seu uso pode enriquecer uma aula de matemática, neste capítulo será apresentada a descrição das aulas de duas turmas do Ensino Médio, em que o conteúdo abordado foi a lei dos senos e lei dos cossenos. A escolha deste conteúdo foi feita em razão do tema trigonometria já estar sendo abordado em sala de aula, pois compõe o currículo das séries. O planejamento das aulas estão presente no Apêndice A.

Para fins de comparação, foram aplicados dois questionários, um para uma turma de 3ª série, em que o conteúdo seria abordado sem as demonstrações e o outro questionário seria para uma turma de 2ª série em que seriam feitas as devidas demonstrações.

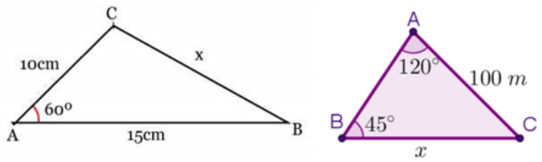
A pesquisa foi realizada com 46 estudantes do Ensino Médio de uma Escola Estadual de tempo integral na cidade de Marechal Deodoro, em Alagoas. O questionário respondido pela turma de 3ª série continha três questões, onde duas eram objetivas e uma era aberta. Já o questionário 2 respondido pela 2ª série continha seis questões, dentre as quais cinco eram objetivas e uma aberta. Os questionários permitiram observar como os estudantes se sentem diante das demonstrações utilizadas pela professora.

4.1 Descrição da aula da 2ª série

Essa aula foi ministrada em uma turma de 2ª série que ainda não havia estudado trigonometria em um triângulo qualquer, apenas no triângulo retângulo. No entanto, como já haviam estudado vetores na disciplina de Física, eles já tinham sido apresentados a lei dos cossenos, mas não foi explicada a validade de tal resultado. Assim, o objetivo desta aula foi apresentar a eles as leis e suas respectivas demonstrações.

A aula foi iniciada com o seguinte questionamento para os alunos: seria possível determinar o valor do lado de medida x nos triângulos da figura abaixo?

Figura 3 – Problema inicial: determinar a medida do lado desconhecido



Fonte: Autora (2024)

Alguns alunos sugeriram que, no primeiro triângulo poderia calcular $\mathrm{sen}(60°) = \frac{x}{15}$. Neste momento, oportunamente foi explicado que o triângulo não era retângulo e que assim x não seria medida do cateto e muito menos 15 seria a medida da hipotenusa. Deste modo, uma aluna sugeriu baixar uma altura de extremidades no vértice C e no ponto Hpertencente ao lado AB. Assim, apareceria um triângulo retângulo e poderia ser usado os conhecimentos que já adquiridos com conteúdo anterior. Utilizando essa ideia e foram calculadas as medidas de CH e de AH por meio do seno e do cosseno de 60°. Consequentemente, foi possível determinar a medida de HB e finalizar a questão calculando o valor de x por meio do teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo CHB.

Embora essa resolução tenha sido eficiente e alcançado o resultado desejado, foi questionado aos alunos se seria possível tornar a conta mais simples, evitando tantos passos. Um deles lembrou que tinha a lei dos cossenos, mas que não lembrava mais como aplicar.

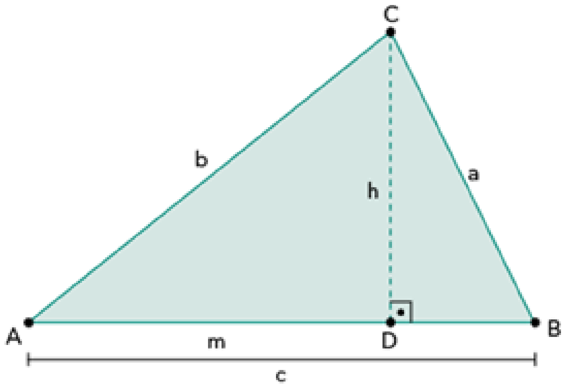
Seguindo a aula e, antes de abordar mais especificamente as leis dos senos e dos cossenos, foi definido com eles os valores do seno e do cosseno de 90°, e do seno e do cosseno dos ângulos obtusos, em particular dos ângulos de 120°, 135° e 150°, que são os suplementos dos ângulos notáveis de 60°, 45° e 30°. Eles já sabiam alguns desses valores por conta das aulas de Física, mas foi ressaltado que em breve, quando forem estudar a circunferência trigonométrica, estes resultados ficariam mais compreensíveis.

Na sequência, foi enunciada a lei dos cossenos destacando que esta é válida para todo tipo de triângulo. Após essa introdução, foi retomado o mesmo exemplo feito anteriormente e os alunos perceberam que o resultado coincidiu, além disso destacaram que foi bem mais simples de resolver deste modo.

Concluída a apresentação da lei, foi questionado aos alunos o porquê dessa fórmula ser válida. Pontuando que deu certo no exemplo anterior, mas o que garantiria que daria certo para qualquer exemplo? Essa foi a deixa para demonstrar esse resultado. Também foi mencionado que para realizar a demonstração podíamos seguir alguns passos da resolução proposta pela aluna para achar o valor de x no primeiro triângulo, porém, seria feita com lados medindo a,b e c a fim de generalizar a situação.

A demonstração então foi iniciada baixando a altura relativa ao lado AB e dividindo a figura em dois triângulos retângulos, conforme a figura abaixo, assim foi possível usar os resultados que eles já sabiam sobre estes triângulos.

Figura 4 – Altura do triângulo relativa ao lado AB



Fonte: Autora (2024)

No triângulo ADC foi calculado o valor do seno e do cosseno do ângulo $\hat{A}$, obtendo

$$\cos\hat{A} = \frac{m}{b}.$$

Já no triângulo BCD a ideia foi aplicar o teorema de Pitágoras, obtendo:

$$(c-m)^2 + h^2 = a^2 \tag{4}$$

Neste momento, uma aluna sugeriu que se aplicasse o teorema de Pitágoras também no triângulo ADC, assim:

$$m^2 + h^2 = b^2. \tag{5}$$

Com essas duas igualdades obtidas por meio do teorema de Pitágoras, um aluno comentou que eles chegaram em um sistema. Neste momento, as sugestões dos alunos se tornaram protagonistas e demonstração foi sendo realizada de um modo um pouco diferente do que havia sido planejado. Eles observaram que se subtraíssem as equações alguns elementos seriam anulados, como por exemplo o h^2 e o m^2. Desta maneira, surgiu a seguinte igualdade:

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2\cdot c\cdot m \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2c\cdot m \tag{6}$$

Tal igualdade já encontra-se bastante similar a lei dos cossenos, com a única diferença que aparece o m. Logo, foi perguntado o que poderia ser feito, mas eles não tiveram ideias. Assim, a ideia foi que usassem o valor encontrado para o $cos(\hat{A})$ e isolassem a variável m, ou seja,

$$\cos\hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow \cos\hat{A} \cdot b = m. \tag{7}$$

Finalmente, substituindo o valor encontrado em (7) na igualdade (6) concluímos então a validade da lei dos cossenos.

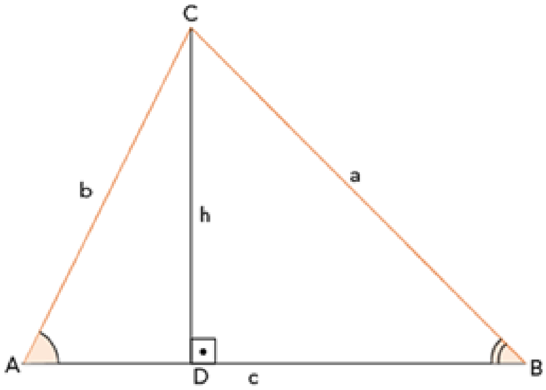
Essa discussão foi importante pois os alunos participaram de forma ativa dando sugestões do que poderia ser feito, essa postura pode possibilitar uma maior compreensão a respeito do processo de demonstração, uma vez que eles participaram da construção e não apenas ficaram como meros "telespectadores" do processo.

Finalizada essa primeira etapa da lei dos cossenos, foi dada continuidade a argumentação da lei dos senos. A primeira coisa discutida foi que no triângulo da direita na figura 3, a lei dos cossenos não seria suficiente para achar o valor de x, visto que não se sabe a medida do lado AB, o que acarretaria uma equação com duas incógnitas. Para resolver essa situação, eles também sugeriram que uma altura AH fosse traçada relativa ao lado BC. Desta vez, eles se encontraram em um empasse. Por um lado, concluíram que $\overline{AH} = \overline{HB}$, visto que o triângulo AHB é isósceles de base AB, já que possui dois ângulos internos de $45°$. Porém, no triângulo AHC os ângulos internos encontrados foram de medidas $15°$ e $75°$, os quais eles não conhecem os valores das razões trigonométricas, o que dificultou a resolução. Então foi necessário explicar a eles que haveria a possibilidade de usar o teorema de Pitágoras, mas que ainda assim havia o problema de duas incógnitas em uma única equação.

Diante dessa dificuldade, surgiu o contexto ideal para enunciar a lei dos senos, mostrando como ela seria aplicada nessa situação. Eles gostaram dessa lei, por ser mais simples do que a lei dos cossenos. Em seguida, foi discutido o que seria necessário entendermos porque ela funciona. Assim, construído um triângulo qualquer de lados a,b e c, e seguindo a ideia da demonstração anterior[1], foi sugerido traçar a altura relativa a AB, conforme a figura 5.

[1] Segundo o planejameno da aula, a demonstração da lei dos senos seria seguindo uma argumentação distinta da adotada na aula, onde utilizaria o triângulo inscrito na circunferência e por construção geométrica. Essa mudança se deu apenas para favorecer um encadeamento didático mais natural aos alunos, uma vez que estes apresentaram desenvoltura na demonstração anterior.

Figura 5 – Altura do triângulo relativa ao lado AB



Fonte: Autora (2024)

Como a lei dos senos relaciona os lados do triângulo com os senos dos ângulos desse mesmo triângulo, foi sugerido que calcular os senos dos ângulos. Assim, obtemos:

$$\text{sen}(\hat{A}) = \frac{h}{b}$$

e

$$\text{sen}(\hat{B}) = \frac{h}{a}.$$

Comparando essas duas igualdades, foi possível observar que o h aparecia nas duas, então foi isolado seu valor, obtendo

$$h = \text{sen}(\hat{A}) \cdot b \text{ e } h = \text{sen}(\hat{B}) \cdot a.$$

Ao se depararem com essas equações eles mesmos perceberam que podiam igualar as igualdades e, daí, obtiveram que

$$\frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{a}{\text{sen}(\hat{A})}.$$

Ocorreu então uma pergunta interessante de uma aluna que havia entendido a validade do resultado para os lados a e b, mas que queria entender sobre o lado c presente na fórmula e que não havia aparecido nessa igualdade. Essa pergunta foi aproveitada para seguir a argumentação e mostrar a igualdade para o lado de medida c. Inicialmente foi observado que o ângulo $\hat{C}$ não aparecia nesses triângulos retângulos que anteriormente analisados, então seria necessário traçar uma outra altura. E assim foi feito com a altura BH, relativa ao lado AC. Naquele momento foi sugerido que se repetissem os passos anteriores para concluir que

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})}.$$

De posse dessas duas igualdades, foi possível concluir parcialmente, nessa aula, a lei dos senos.

Continuando a conclusão do resultado em outro dia letivo, foi preciso considerar o triângulo conforme a figura 5 e uma circunferência de raio r que passa pelos seus vértices, bem como relembrar com os alunos que a medida do ângulo inscrito numa circunferência é metade da metade da medida do ângulo central que ele subentende. Logo, foi possível construir o triângulo retângulo ACD, cujo ângulo reto é o $\hat{C}$ e cuja hipotenusa seria o diâmetro da circunferência, ou seja, $2r$. Como o objetivo era obter a lei dos senos, foi perguntado o que poderia ser feito em seguida para que aparecesse o seno nessa parte. Nesse momento um dos alunos sugeriu que fosse calculado o seno no triângulo ACD, onde se obteve que

$$\operatorname{sen}\hat{D} = \frac{b}{2r}.$$

Diante dessa igualdade, surgiu a primeira dúvida dos alunos, eles queriam saber como essa igualdade ajudaria, uma vez que o ângulo $\hat{D}$ construído não fazia parte da fórmula que havia sido deduzida na aula passada. Nesse momento foi interessante intervir para relembrar do segundo fato importante para essa demonstração: dois ângulos que subtendem o mesmo arco são congruentes. Dessa forma, foi argumentado, com um auxílio do desenho no quadro, que $\hat{D} = \hat{B}$. Assim

$$\operatorname{sen}\hat{D} = \frac{b}{2r} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{2r}.$$

Com essa igualdade, uma aluna sugeriu que isolássemos o $2r$ ficando com

$$2r = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}.$$

Juntando essa igualdade ao que já havia sido demonstrado na aula, foi possível concluir a lei dos senos.

4.2 Descrição da aula da 3ª série

Essa aula foi uma revisão das leis dos senos e dos cossenos, pois os estudantes já haviam estudado esse conteúdo no 2º ano, entretanto, desde aquele momento, o estudo foi realizado sem as demonstrações.

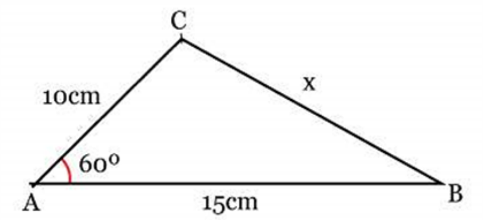
No início da aula foi recordado que em triângulos que não são retângulos não podemos utilizar as razões trigonométricas do modo que foi definido, por exemplo,

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}},$$

pois nesse caso não existem nem catetos nem a hipotenusa. Sendo assim, surgiu a seguinte questão : o que se deve fazer nessas situações em que é dado um triângulo qualquer e é solicitado o valor de um ângulo ou de um lado? Como eles já haviam estudado o assunto, rapidamente um aluno respondeu que é possível usar a lei dos cossenos ou a lei dos senos.

Assim, surgiu o momento oportuno para relembrar as fórmulas e diferenciar quando cada uma deve ser usada. Esse momento foi muito pertinente pois foi perceptível a importância de se existir as duas leis, pois uma só não seria suficiente para resolver todos os tipos de problemas. Por exemplo, na figura 6, é possível aplicar a lei dos cossenos, pois ficaríamos com a seguinte equação de uma incógnita: $x^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cos(60°)$ e daí concluir que $x = 5\sqrt{7}$ cm.

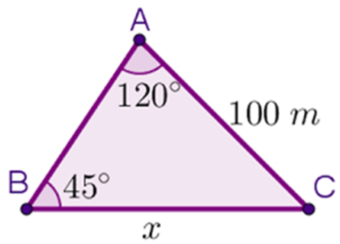
Figura 6 – Problema inicial: determinar a medida x do lado *BC*



Fonte: Autora (2024)

Entretanto, no exercício da figura 7, supondo que $\overline{AB} = y$, ao ser aplicada a lei dos cossenos surgiria a seguinte equação de duas incógnitas: $x^2 = y^2 + 100^2 - 2 \cdot y \cdot 100 \cdot cos(120°)$, o que impossibilitaria resolver o problema apenas com essa informação, visto que a equação não possui uma solução única. Deste modo, seriam necessários outros recursos além da lei dos cossenos. Neste caso, portanto, seria mais interessante usar a lei dos senos, obtendo a seguinte equação $\frac{x}{\text{sen}(120°)} = \frac{100}{\text{sen}(45°)}$, e assim concluindo que $x = 50\sqrt{6}$ m.

Figura 7 – Triângulo dado as medidas de dois ângulos e um lado.



Fonte:Autora (2024)

Após recordar as fórmulas, foram aplicados alguns exercícios. Esse momento foi tranquilo e eles foram percebendo que, em geral, dados um ângulo e dois lados, para determinar a medida do terceiro lado é possível aplicar a lei dos cossenos. Por outro lado, se o enunciado da questão fornece dois ângulos e um lado, solicitando a medida de um segundo lado, então é possível aplicar a lei dos senos.

Um momento de destaque ocorreu quando se discutia a lei dos senos. Nela aparece que $\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = 2R$, sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Um aluno questionou qual a origem do raio nessa fórmula, querendo entender o seu porquê. A pergunta foi aproveitada para questionar a turma sobre isso, com o objetivo de verificar se alguém saberia justificar, mas não souberam.

Desta forma, foi demonstrado junto com eles o porquê da fórmula. Como eles já haviam estudado recentemente a respeito de ângulos inscritos em uma circunferência, a demonstração foi de tranquila compreensão. Foi inciada a argumentação construindo a figura de um triângulo e uma circunferência circunscrita a ele. Na sequência foi feito um triângulo retângulo inscrito nesta mesma circunferência de modo que um de seus ângulos subtendesse o mesmo arco de um dos ângulos do primeiro triângulo e, assim, foi observada a igualdade entre as medidas desses ângulos. Por fim, se obteve o seno desse ângulo no triângulo retângulo, concluindo a igualdade. O aluno, então ficou muito satisfeito com a demonstração, afirmando que fazia muito sentido e que havia compreendido.

O objetivo nessa turma era não apresentar as demonstrações das fórmulas, no entanto, a própria curiosidade dos alunos e desejo de entender o porquê daquilo que lhe foi apresentado ser verdade culminou na realização de uma parte da demonstração e, deste modo, a compreensão do conteúdo estudado se mostrou mais eficiente. Tal fato ilustra a importância das demonstrações no processo de aprendizagem dos alunos.

No final da aula, os alunos receberam os questionários para que respondessem. Uma aluna fez comentários interessantes, destacando que durante o ensino fundamental ela teve um professor que fazia questão de demonstrar várias fórmulas e que ela não entendia muitas coisas, e que achava mais vantajoso apenas ser apresentada aos resultados e a forma de aplicá-los sem necessariamente ter que conhecer suas justificativas. Na aula seguinte, ocorreu um fato pertinente. A aula era revisão de cálculo de áreas. Foi entregue aos alunos uma planilha com as formas geométricas mais conhecidas e solicitado que eles fossem preenchendo as fórmulas de área que eles se recordavam. Essa mesma aluna que havia questionado a importância das demonstrações disse que estava arrependida do que havia falado, pois muitas fórmulas ela não se recordava de cabeça, a exemplo da fórmula de área do triângulo equilátero, mas que foi usando seus conhecimentos e deduziu a fórmula por meio de uma demonstração. Deste modo, ela mesma concluiu que de fato, em alguns casos, é extremamente importante saber certas demonstrações.

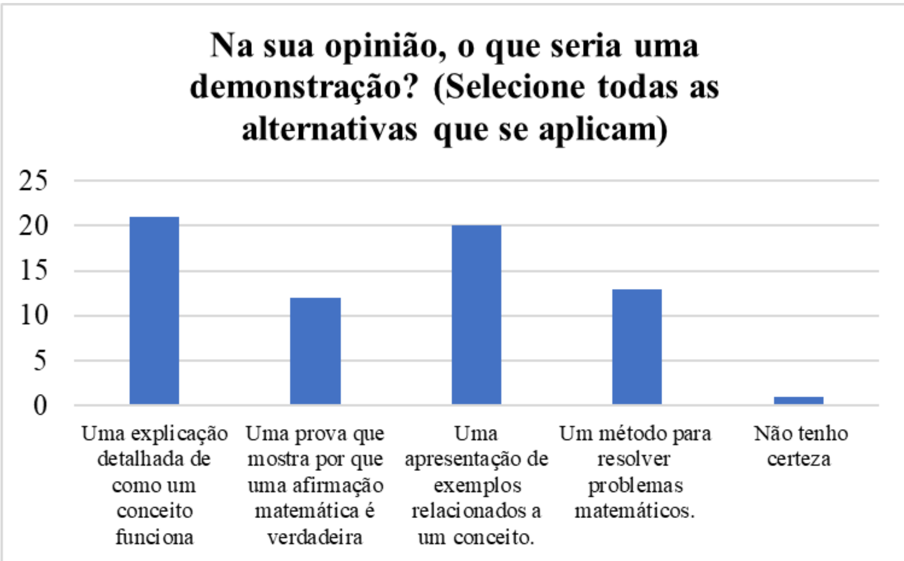
Essa fala da aluna, contrastando com a sua postura diante do problema da áreas, mostra que embora as demonstrações feitas em sala de aula e o rigor adotado pelo professor não seja o mais atrativo para aluno, ele o auxilia na criação de estratégias de resolução de problemas, na capacidade de argumentação processual e lógica, fazendo com que o aprendizado de matemática vá além da memorização de fórmulas.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1 Análise do questionário 1

A aplicação do questionário 1 foi fundamental para entender o que os alunos entendiam por demonstrações e quais as percepções deles sobre a aula de matemática com o uso das demonstrações. A primeira peganta do questionário buscava saber se o estudante lembrava-se de já ter visto alguma demonstração na sua trajetória escolar. Do público respondente, 23 (95,83%) respondeu que já se depararam com as provas e demonstrações, enquanto apenas 1 estudante afirmou que nunca havia visto. O interessante com relação a essa pergunta, é que quando perguntados em uma questão em que se poderia marcar mais de um item acerca do que era uma demonstração obteve-se o seguinte resultado, conforme a figura 8.

Figura 8 – Respostas dos alunos a pergunta 2 do questionário I



Fonte: Autora (2024)

Esse resultado indica que, embora a maioria dos estudantes tenha afirmado que já viram demonstrações nas aulas, boa parte deles não sabe de fato o que é uma demonstração. Isso mostra que pode haver uma confusão para os alunos entre o que é uma demonstração de um resultado com uma aplicação desse resultado, por exemplo um exercício bem resolvido.

Seguindo adiante, a terceira pergunta buscava aferir se o aluno havia ou não entendido os processos das demonstrações que foram realizadas. Se a resposta fosse não, era pedido que ele explicasse o que não ficou claro. Foram obtidos os seguintes resultados: 2 alunos deixaram a resposta em branco, 2 responderam que entenderam parcialmente, 2 alunos afirmaram que não entenderam, mas não foi especificado o que não foi compreendido e 18 alunos responderam que sim.

Na pergunta seguinte o interesse era verificar se a partir da demonstração das fórmulas do seno e do cosseno, o aluno se sentiu mais motivado a estudar e a justificativa de sua resposta. De um modo geral, mais da metade dos alunos (66,6%) disseram que se sentiram mais motivados, dentre essas respostas destaca-se: “Por mais que eu não seja tão boa na matéria, é muito interessante descobrir de onde surgiu uma fórmula, por exemplo.”, “Sim, pois tornou mais fácil entender o que se deve fazer para realizar exercícios.”, “Sim, porque é uma forma mais interessante, mostrando além do conteúdo”, “Sim, pois compreendi que a geometria é mais que fórmulas prontas, me fazendo apreciar o conteúdo.”

Interessante observar que dos alunos que responderam que não entenderam as demonstrações ou que entenderam parcialmente, 2 apontaram que sentiram motivados pelas provas vistas em aula, enquanto 3 alunos desse grupo afirmaram que não houve motivação por conta das demonstrações vistas. Já os alunos que responderam positivamente acerca do entendimento do processo das demonstrações, 5 desses apontaram que não sentiram-se motivados por elas ou apontaram que se sentiram “mais ou menos” quanto a motivação, o que sugere uma indiferença em relação a esse tipo de técnica. Um deles argumentou que “para mim é uma informação extra, uma curiosidade”.

Na pergunta 5, foi questionado ao aluno se a demonstração o ajudou na compreensão do conteúdo e o porquê disso. De um modo geral, 14 alunos (58,3%) responderam que sim, ajudou muito, 2 desses alunos responderam não a pergunta 3, isto é, não entenderam todos os passos da demonstração, 1 deixou em branco essa mesma questão . Interessante notar que dois alunos desse grupo de 14 que responderam que as demonstrações ajudaram na compreensão do conteúdo , também afirmaram que não se sentiram motivados por elas. Isso mostra que o aluno pode reconhecer a importância da argumentação matemática, mesmo que ele não se sinta motivado ou entusiasmado com ela. Isso se acentua principalmente entre os alunos que não tem afinidade com a disciplina.

Ainda sobre a pergunta número 5, 11 alunos apontaram que a demonstração ajudou um pouco. Dentre esses estudantes, 2 foram os que responderam que entenderam parcialmente as demonstrações, como aponta a questão 3 e o restante dos respondentes é composto de alunos que afirmaram ter compreendido todo o processo das demonstrações. E apenas 1 aluno (que não se sentiu motivado e entendeu parcialmente a demonstração) respondeu não ter certeza sobre o efeito da argumentação na sua compreensão do conteúdo.

Finalmente, na última questão, foi perguntado ao aluno se ele gostaria de aprender e ver mais demonstrações nas aulas de matemática. E como aponta o gráfico da figura 9 a seguir, praticamente 80% da turma afirma que sim, eles gostariam de ver mais demonstrações em aulas de matemática, 4 alunos (16,7% aproximadamente) afirmaram não ter certeza sobre e apenas 1 aluno respondeu que não gostaria de ver mais demonstrações, não surpreendentemente, foi o mesmo que respondeu que a demonstração matemática é apenas uma informação extra e por isso não o motivou quando perguntado na questão 4.

Figura 9 – Respostas dos alunos a pergunta 6 do questionário I

Fonte: Autora (2024)

Desses dados coletados, observa-se que apenas 3 dos alunos que entendem bem o processo de demonstração, não se sentem motivadas por esse tipo de argumentação e todos os que entenderam afirmaram que as demonstrações ajudaram muito ou um pouco na compreensão do conteúdo o que já era de se esperar.

Por outro lado, também há alunos que não entenderam as demonstrações ou que entenderam parcialmente, mas que se sentiram motivados pelas provas vistas em aula e que gostariam de ver mais argumentações como as que foram mostradas nessa aula. E há ainda uma pequena parcela desses alunos (cerca de 12,5%) que não se sentiram motivados e não gostariam de ver mais processos argumentativos como os que foram explorados na aula em questão, para esses alunos, não há certeza sobre até que ponto essas demonstrações ajudam na compreensão do conteúdo, ou que as demonstrações são apenas informações extras/curiosidades e até mesmo que esse processo de argumentação exigiria mais estudo e gasto de tempo.

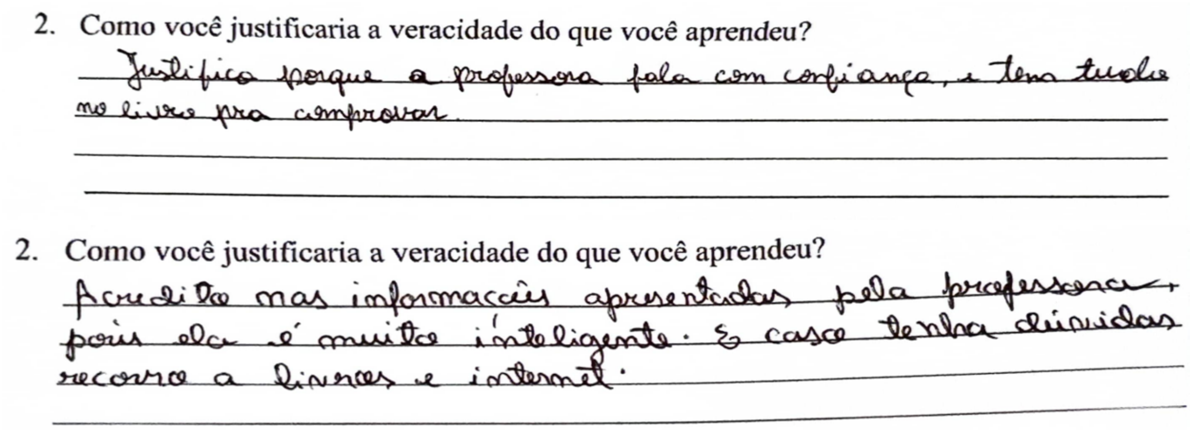
5.2 Análise do questionário 2

Nesta seção é dedicada a analisar os resultados obtidos na turma de 3ª série onde o questionário 2 foi aplicado. Nessa aula também foram apresentados as lei dos senos e dos cossenos, mas sem a demonstração de tais resultados. Os principais objetivos ao aplicar esse questionário foram: Entender até que ponto os alunos têm a tendência de questionar, criticar ou buscar justificativas lógicas para os resultados apresentados, em vez de apenas aceitá-los, avaliar a importância que os alunos dão às demonstrações e ao processo de validação dos conceitos matemáticos, em vez de focarem apenas nos resultados finais ao passo que investigava como eles se sentem quando recebem informações sem comprovação, como confiança, desconforto, insegurança ou desinteresse.

No primeiro item foi questionado se o aluno havia se convencido do teoremas apresentados em sala. Os resultados apontam que 12 alunos (66,6% da turma) responderam que estavam muito convencidos, pois a professora disse que é verdade, 5 alunos respondem que estão convencidos, mas não sabem porque aquilo é verdade e apenas 1 responde que está convencido, pois o resultado está no livro.

Quando perguntados sobre como justificariam as relações matemáticas vistas em sala de aula 10 alunos responderam basicamente que acreditam nos resultados apresentados em sala porque acreditam na veracidade do que a professora e o livro apresentam. As respostas apresentadas na figura 10 confirmam isso.

Figura 10 – Respostas dadas pelos alunos a pergunta 2 do questionário II


2. Como você justificaria a veracidade do que você aprendeu?

Justifico porque a professora fala com confiança, e tem tudo no livro pra comprovar.

2. Como você justificaria a veracidade do que você aprendeu?

Acredito nas informacões apresentadas pela professora, pois ela é muito inteligente. E caso tenha dúvidas recorro a livros e internet.

Fonte: Autora (2024)

Essas respostas exemplificam exatamente o que Pietropaolo (2005) traz em sua tese, onde ressalta que os processos sociais influentes no “convencimento” dos matemáticos sobre a exatidão de novos teoremas se reproduziriam na relação entre professor e alunos. Para estes pesquisadores, é necessário que a demonstração na sala de aula não só valide, mas também explique as etapas envolvidas no processo. Se o processo de validação confirma que o teorema é verdadeiro, é a explicação que elucida para os alunos o porquê deste fato.

Além desses 10 alunos, apenas 1 respondeu que não justificaria. Os demais respondentes responderam mais no sentido de que eles aplicariam os resultados e verificariam a funcionalidade. Uma das respostas que se destacou foi a essa pergunta de como ele justificaria foi: “Testando aplicabilidade da fórmula e do conceito em algumas questões, verificando a generalidade e veracidade.” Essa resposta dá um indicativo de que o aluno consegue distinguir um exemplo de uma generalização, e mais, o processo que o aluno entende por demonstração se baseia exatamente com a forma que o professor apresenta e justifica esses resultados. Isso ressalta mais uma vez a importância do professor sempre buscar se aprofundar nos conceitos matemáticos, pois de certa forma ele é um dos maiores exemplos para o aluno do que é ser um estudioso.

Por fim, na pergunta 3 foi questionado se eles gostariam de entender o porquê das fórmulas vistas na aula serem verdadeiras. Esse questionário foi feito dessa maneira porque o objetivo era observar a postura dos alunos diante de uma aula de matemática em que os resultados são enunciados sem a presença das demonstrações. Mas o que ocorreu na realidade é que surgiram questionamentos que levaram a uma certa argumentação para justificar certos elementos presentes nas leis enunciadas[1]. O que mostra que mesmo uma turma indicando apenas estar interessada no produto final das fórmulas ou estar convencida apenas pela palavra do professor, a dúvida e a curiosidade faz parte da condição do aluno e para esses momentos o professor deve estar preparado.

[1] Ver capítulo 4 seção 4.2.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa realizou, por meio de revisão bibliográfica e de pesquisa de campo, uma análise sobre a importância do uso das demonstrações na aula de matemática do ensino básico e os ganhos que decorrem desse uso de maneira consciente.

Dessa forma, no primeiro capítulo foram revisitados alguns conceitos sobre lógica e técnicas de demonstração necessárias ao entendimento das demonstrações matemáticas, uma vez que parte do processo de adoção desse tipo de argumentação parte do pressuposto que o professor conheça bem o tema e se sinta confortável em usá-la. O objetivo era o familiarizar e relembrar conceitos como proposições, quantificadores, conectivos lógicos, já que eles formam a base estrutural de qualquer tipo de argumentação formal na matemática.

No segundo capítulo, foram discutidas as técnicas de demonstração mais frequentes: a demonstração direta, a redução ao absurdo, contra-positiva e o princípio da indução finita. Essas abordagens são essenciais para se validar formalmente os teoremas e propriedades da matemática.

No capítulo 3, foram apresentadas as aulas práticas, ministradas para duas turmas do ensino médio, cujos conteúdos seriam a lei dos senos e a lei dos cossenos. Essas aulas permitiram que se fizesse uma análise comparativa entre o ensino sem e com o uso de demonstrações. Na segunda foi possível observar na prática como a demonstração pode ser trabalhada em sala de aula e como ela pode ser apresentada de forma acessível aos alunos. A partir de um exemplo particular, no qual eles eram capazes de responder e seguindo para um caso genérico, onde a solução dada anteriormente não era suficiente, surge a necessidade de uma outra forma de validação, isso na prática mostra ao aluno a necessidade das demonstrações na matemática. Além disso, eles puderam opinar sobre os passos da demonstração, puderam questionar e conjecturar. Isso é extremamente interessante pois tira o aluno da posição de mero espectador do processo, e o torna um sujeito atuante nele. Isso se reflete nos dados obtidos em que a maioria dos alunos se sentiram motivados e perceberam a importância da demonstração.

Por outro lado, percebe-se que na aula em que não houveram demonstrações, mais da metade da turma acredita naquilo que é exposto na aula de matemática por conta da crença na figura do professor ou porque o resultado está posto no livro ou na internet. Além disso, foi possível analisar que mesmo não sendo a proposta da aula, surgem de maneira natural os questionamentos acerca dos porquês sobre os resultados apresentados. Cada aplicação de questionário serviu para se avaliar a receptividade dos alunos e a maneira com que as demonstrações afetaram a motivação deles para aprender o conteúdo. Na aula em que contava-se com a demonstração, o intuito fundamentalmente era baseado no "princípio da necessidade" proposto por Harel e Sowder (1998), favorecer a construção de uma argumentação e a partir daí mostrar ao aluno a importância e a necessidade de uma demonstração.

O quarto capítulo apresentou a análise dos resultados. Os dados obtidos nos questionários indicaram que a maior parte dos alunos se sentem mais confiantes e motivados quando sabem a lógica por trás de uma fórmula. Nesse capítulo, foi reforçada a hipótese de que a utilização das demonstrações pode tornar o ensino da matemática mais significativo e menos mecânico. Esses resultados se aproximam do que afirma Pietropaolo (2005), isto é, os motivos pelos quais as provas, rigorosas ou não, devem estar presentes nos currículos de Matemática da Educação Básica não se resumem apenas ao fato de que demonstração é a essência da Matemática. O resultados obtidos mostram que aprender matemática vai além da simples utilização das técnicas; é aprender a interpretar, construir ferramentas conceituais, criar significados, perceber problemas e resolvê-los, é desenvolver o raciocínio lógico e muito mais.

Por fim, conclui-se que o uso das demonstrações no ensino da matemática, especialmente na Educação Básica, trata-se de uma ferramenta valiosa que valida os teoremas, mas também promove o raciocínio lógico, a curiosidade e a criticidade dos estudantes. Os professores, como o questionário 2 comprovou, são peças chave no processo e é necessário que sejam formados para que utilizem essa estratégia em sala de aula. A credibilidade que os alunos depositam no professor de matemática pode ser utilizada no sentido de promover uma maior proximidade com a cultura de demonstrações. O professor pode e deve utilizar essa influência para que o aprendizado possa ser mais ativo e colaborativo, fazendo com que os alunos criem o hábito de analisar com criticidade um resultado, uma propriedade e possam pensar sobre eles de modo a desenvolver um encadeamento de ideias lógicas. É claro que a tarefa não é fácil, mas negar as demonstrações e provas no ensino de matemática é negar a própria natureza da disciplina. Além disso, essa ausência pode limitar os nossos alunos, impedindo-os de uma formação mais ampla em todas as áreas, porque o estímulo do raciocínio lógico e argumentação sólida defendida várias vezes aqui e, pela maioria dos autores sobre o tema, não se restringe a matemática, isso permeia todas as áreas do conhecimento, dentro e fora da escola.

REFERÊNCIAS

ABRIL, Roman Hector. **Demonstração de fórmulas matemáticas no ensino médio**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à lógica matemática**. [S.l.]: NBL Editora, 2017.

ÁLGEBRA-NÍVEL, Curso de; MENDES, Marcelo. Polos Olímpicos de Treinamento. **Agora**, v. 10, n. 2, p. 2, 2012.

ALMOULOUD, Saddo Ag; REGNIER, Jean-Claude; FUSCO, Cristiana Abud da Silva. **Resolver problemas envolvendo prova e demonstração:** uma dificuldade para professores de ensino básico. *In*: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICS, ENGINEERING AND SOCIETY-ICMES, 1., 2009. [S.l.: s.n.], 2009. icmes2009–02.

BICUDO, Irineu. Demonstração em Matemática. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 79–90, 2002.

BRASIL, Ministério da Educação do. **Base Nacional Comum Curricular**. [S.l.: s.n.], 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 13 dez. 2024.

HAREL, Guershon; SOWDER, Larry. Students' proof schemes: Results from exploratory studies. **American Mathematical Society**, v. 7, p. 234–283, 1998.

HEFEZ, Abramo. **Indução matemática**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.

HOLANDA, Francisco Bruno. Material Teórico-Módulo de Introdução à Lógica Matemática. **Essa**, v. 2, b2, 2019.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real-Funções de Uma Varável**. Rio de Janeiro: Impa, 2018. v. 1.

LÔBO, Jônatas da Silva. **Estudo Diagnóstico E Propostas Para Utilização De Demonstrações Matemáticas No Ensino Básico**. 2021. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual De Santa Cruz Curso De Pós-Graduação Em Matemática, Ilhéus, 2021.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro De. **Um convite à Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PIETROPAOLO, Ruy Cesar. **(Re) significar a demonstração nos currículos da educacao basica e da formação de professores de matemática**. 2005. Tese (Doutorado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SENA, Christiano Otávio de Rezende. **Demonstrações no Ensino Médio**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018.

SILVA, Jhone Caldeira; MARRA JÚNIOR, Edson Donizeti. Demonstrações matemáticas no Ensino Médio: o que pensam e sentem os estudantes. **União - Revista Iberoamericana de Educação Matemática**, 2020.

APÊNDICE A – PLANEJAMENTO DA AULA

Dados da aula	
Conteúdo:	Lei dos Cossenos e Lei dos Senos.
Turma:	2ª Série
Tempo estimado:	2 aulas de 50 minutos.

Pré requisitos:

Relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo e cosseno e seno de ângulos obtusos.

Metodologia da aula:

1º Momento: Iniciarei a aula com uma breve problematização: Dado um triângulo não retângulo e sabendo a medida de dois de seus lados e seus ângulos, como se poderia calcular a medida do terceiro lado desse triângulo? Aqui é colocar os estudantes em uma situação problema em que as relações métricas e trigonométricas aprendidas até então não serão convenientes.

2º Momento: Após esse momento inicial, apresentarei a Lei dos Cossenos como uma solução para situação problema apresentada anteriormente e como uma generalização do Teorema de Pitágoras para triângulos quaisquer. Assim, irei defini-la apresentando sua fórmula e definindo os elementos que a compõe.

3º Momento: Neste momento da aula, irei questionar se os estudantes acreditam na veracidade da fórmula. Como uma forma de instigá-los eu começarei com um exemplo particular usando um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 cm e 4 cm. Aplicando Lei dos Cossenos em um triângulo retângulo, ela se reduz ao Teorema de Pitágoras, uma vez que $\cos(90°) = 0$. Como os alunos já viram o Teorema de Pitágoras em aulas anteriores, esse caso verificará a validade da lei dos cossenos para esse específico triângulo. A pergunta que lançarei ao final desta explicação é: como fazer mostrar a validade do resultado para triângulos mais gerais?

4º Momento: Naturalmente, a partir do momento anterior serei levada, junto aos alunos, a fazer a demonstração da lei dos cossenos. Como desejamos uma demonstração para triângulos quaisquer, perguntarei a eles quais os possíveis tipos de triângulos que nós podemos ter em relação aos seus ângulos. Nesse momento espera-se que os alunos respondam: acutângulo, retângulo e obtusângulo.

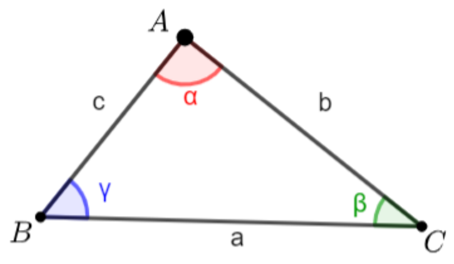
5º Momento: Aqui farei, com ajuda dos estudantes, a demonstração da lei dos cossenos. A seguir destrincho como será feito a sequência lógica da demonstração.

Teorema A.1 (Lei dos cossenos)**.** *Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Então há três casos possíveis: o triângulo pode ser acutângulo, ou obtusângulo ou retângulo.

1. Caso I (triângulo acutângulo)

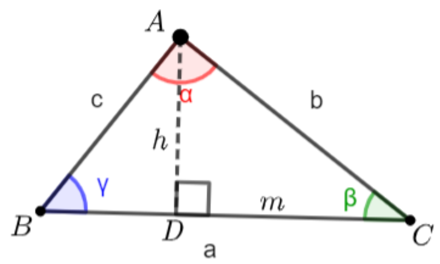
Figura 11 – Triângulo acutângulo ABC



Fonte:Autora (2024)

Seja ABC um triângulo acutângulo conforme a figura 11. Vamos mostrar que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$. Para isso considere a altura relativa ao lado BC, de modo que D seja o pé dessa altura confoerme a figura a 12.

Figura 12 – Altura do triângulo ABC relativa ao lado BC



Fonte:Autora (2024)

Denotando por m a projeçao de AC sobre BC, tem-se $\cos\beta = \frac{m}{b}$, multiplicando ambos esta equação por b, obtem-se

$$b\cos\beta = m. \tag{8}$$

Ainda no triângulo CDA, aplicando o Teorema de Pitágora, surge

$$m^2 + h^2 = b^2. \tag{9}$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras em BDA obtem-se que

$$(a-m)^2 + h^2 = c^2 \tag{10}$$

substituindo (9) em (10)

$$\begin{aligned} (a-m)^2 + h^2 &= c^2 \\ a^2 - 2am + m^2 + h^2 &= c^2 \\ a^2 + b^2 - 2am &= c^2, \end{aligned}$$

agora basta substituir m pela igualdade (8), para obter o que queríamos

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2.$$

De forma análoga pode-se mostrar que

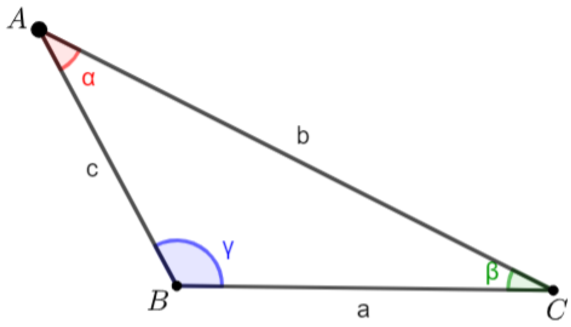
$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\gamma = b^2$$

e

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2.$$

2. Caso II (triângulo obtusângulo)

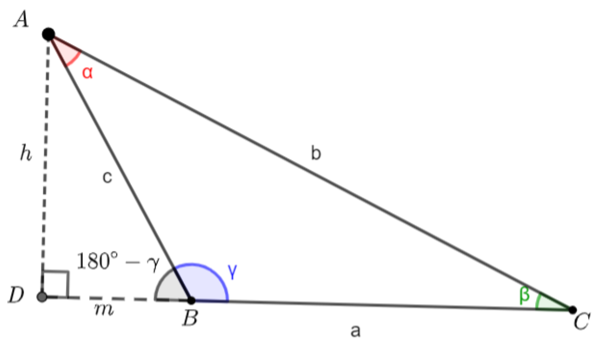
Figura 13 – Triângulo obtusângulo ABC



Fonte:Autora (2024)

Seja ABC um triângulo obtusângulo conforme a figura 13. Vamos mostrar que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\gamma$. Para isso considere a altura relativa a reta suporte de BC, de modo que D seja o pé dessa altura.

Figura 14 – Altura do triângulo ABC relativa a reta suporte do lado BC



Fonte:Autora (2024)

No triângulo CDA

$$h^2 + (m+a)^2 = b^2. \tag{11}$$

Já no triângulo BDA

$$m^2 + h^2 = c^2 \tag{12}$$

e

$$
\begin{aligned}
\cos(180^\circ - \gamma) &= \frac{m}{c} \\
c \cdot \cos(180^\circ - \gamma) &= m \\
c \cdot (-\cos\gamma) &= m \qquad (13)
\end{aligned}
$$

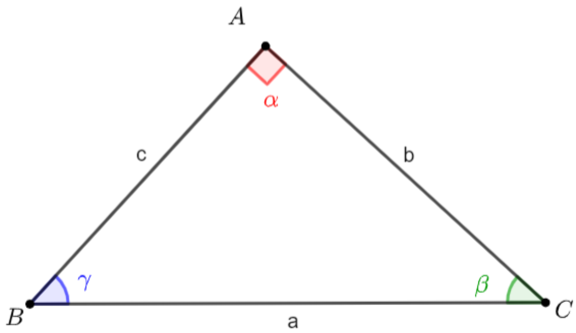
Assim, substituindo (12) e (13) em $h^2 + (m+a)^2 = b^2$, temos que

$$
\begin{aligned}
h^2 + (m+a)^2 &= b^2 \\
h^2 + m^2 + 2am + a^2 &= b^2 \\
c^2 + a^2 + 2am &= b^2 \\
c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos\gamma &= b^2. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Análogo ao que foi feito no Caso I, podemos mostrar que $b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma = a^2$ e $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2$.

3. Caso III triângulo retângulo

Figura 15 – Triângulo retângulo ABC



Fonte:Autora (2024)

Pelo Teorema de Pitágoras temos que $b^2 + c^2 = a^2$ e nesse caso como $\cos\alpha = \cos(90^\circ) = 0$

$$b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha = a^2.$$

Portanto, é válida a Lei dos cossenos para triângulos retângulos. Análogo ao que foi feito no Caso I, podemos mostrar que $a^2 + c^2 - 2ac\cos\gamma = b^2$ e $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2$.

■

6º Momento: Antes de prosseguirmos em direção a demonstração da Lei dos Senos, farei um momento prático para a utilização do resultado que acabamos de mostrar, isso ajudará os alunos a fixarem o conteúdo recém aprendido.

7º Momento: Irei prosseguir de maneira bem análoga aos 5 primeiros momentos das aulas. Com a particularidade que no caso da motivação inicial para a Lei dos Senos, será com relação aos problema de que envolvem dois ângulos e um lado conhecidos. Aqui também farei uma pequena revisitação a fatos que os alunos devem estar familiarizados antes de prosseguirmos que com a demonstração. São esses:

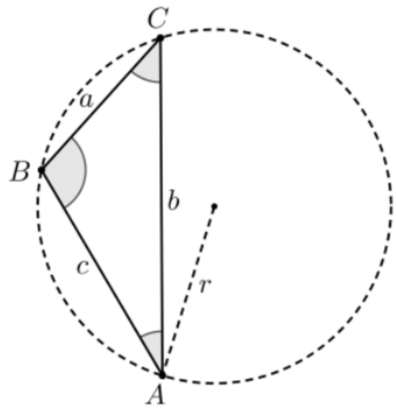
- A medida do ângulo inscrito numa circunferência é metade da metade da medida do ângulo central que ele subentende.

Teorema A.2 (Lei dos Senos)**.**

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2r$$

Demonstração. Considere um triângulo ABC de lados a,b e c. Como todo triângulo é incritível, podemos considerar a circunferência de raio r que passa pelos pontos A,B e C do triângulo, como na figura 16.

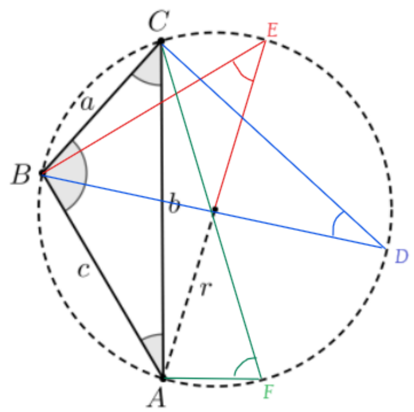
Figura 16 – Circunferência circunscrita ao triângulo ABC



Fonte:Autora (2024)

Traçando os diâmentros por A, B e C formamos três novos triângulos ABE, DCB e FAC, que são todos retângulos, pois então inscritos numa semicircunferência. Logo, $A\hat{B}E = D\hat{C}B = F\hat{A}C = 90°$.

Figura 17 – Circunferência circunscrita ao triângulo ABC



Fonte:Autora (2024)

Assim, temos que

$$\text{sen}\,\hat{E} = \frac{c}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{E}}. \tag{15}$$

$$\operatorname{sen}\hat{D} = \frac{a}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{D}}. \tag{16}$$

$$\operatorname{sen}\hat{F} = \frac{b}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{F}}. \tag{17}$$

Por fim, observe que como ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco são congruentes, temos que $\hat{E} = \hat{C}, \hat{D} = \hat{A}$ e $\hat{F} = \hat{B}$, e consequentemente os valores de seus senos serão iguais. Logo $\operatorname{sen}\hat{E} = \operatorname{sen}\hat{C}$, $\operatorname{sen}\hat{D} = \operatorname{sen}\hat{A}$ e $\operatorname{sen}\hat{F} = \operatorname{sen}\hat{B}$. Assim concluímos, com base nessas igualdades e nas equações (15), (16) e (17) que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2r.$$

■

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIOS

Questionário I

1. Na sua experiência escolar você se recorda de já ter visto demonstrações na aula de matemática?

   ( ) Sim.

   ( ) Não.

2. Na sua opinião, o que seria uma demonstração? (Selecione todas as alternativas que se aplicam)

   ☐ Uma explicação detalhada de como um conceito matemático funciona.
   ☐ Uma prova que mostra por que uma afirmação matemática é verdadeira.
   ☐ Uma apresentação de exemplos relacionados a um conceito.
   ☐ Um método para resolver problemas matemáticos.
   ☐ Não tenho certeza.

3. Você entendeu todos os processos das demonstrações que foram realizadas? Se não, o que você não entendeu?

   ( ) Sim, entendi todos os processos.
   ( ) Entendi a maioria dos processos.
   ( ) Entendi alguns processos.
   ( ) Não entendi nenhum processo.

4. A partir da demonstração das fórmulas, você se sentiu mais motivado a estudar o conteúdo? Por quê?

   ( ) Sim, ____

   ____

   ( ) Não, ____

   ____

5. Na sua opinião, a demonstração ajudou na compreensão do conteúdo?

   ( ) Sim, ajudou muito.
   ( ) Sim, ajudou pouco.
   ( ) Não, não ajudou.
   ( ) Não tenho certeza.

6. Se houvessem mais demonstrações como esta, você se interessaria em aprendê-las?

   ( ) Sim.
   ( ) Não.

Questionário II

1. Você se convenceu do resultado apresentado na aula de hoje?

   (   ) Sim, estou muito convencido pois o professor disse que é verdade.
   (   ) Sim, estou muito convencido pois está no livro de matemática.
   (   ) Sim, estou convencido, mas não sei porque é verdade.
   (   ) Não estou convencido, pois não sei porque isso é verdade.
   (   ) Não tenho certeza.

2. Como você justificaria a veracidade das fórmulas que você aprendeu?

   ____
   ____
   ____
   ____

3. Você teria interesse de saber porque essa fórmula é válida?

   (   ) Sim.
   (   ) Não.
   (   ) Não tenho certeza.