Universidade Federal de Alagoas
Campus Arapiraca
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Weverton de Barros Vieira

Um passeio pela Olimpíada Alagoana de Matemática: Problemas de álgebra e aritmética

ARAPIRACA - AL
2024

Weverton de Barros Vieira

Um passeio pela Olimpíada Alagoana de Matemática: Problemas de álgebra e aritmética

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do *Campus* Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Eben Alves da Silva

Arapiraca - AL
2024

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca Setorial *Campus* Arapiraca - BSCA

V658p Vieira, Weverton de Barros
Um passeio pela Olimpíada Alagoana de Matemática [recurso eletrônico]: problemas de álgebra e aritmética / Weverton de Barros Vieira. – Arapiraca, 2024.
67 f.: il.

Orientador: Prof. Me. Eben Alves da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2024.
Disponível em: Universidade Digital (UD) – UFAL (*Campus* Arapiraca).
Referências: f. 65-67.

1. Matemática. 2. Resolução de problemas. 3. Álgebra. 4. Aritmética. I. Silva, Eben Alves da. II. Título.

CDU 51

Bibliotecário responsável: Márcio Thiago dos Santos Albuquerque
CRB - 4 / 2052

WEVERTON DE BARROS VIEIRA

Um passeio pela Olimpíada Alagoana de Matemática: Problemas de Álgebra e Aritmética

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática do *Campus* Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 11 de dezembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
EBEN ALVES DA SILVA
Data: 17/12/2024 18:50:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____

Prof. MsC. Eben Alves da Silva
Orientador (PROFMAT-Arapiraca/UFAL)

Documento assinado digitalmente
gov.br
WAGNER OLIVEIRA COSTA FILHO
Data: 17/12/2024 19:17:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____

Prof. Dr. Wagner Oliveira Costa Filho
Membro interno (PROFMAT-Arapiraca/UFAL)

Documento assinado digitalmente
gov.br
JACQUELINE FABIOLA ROJAS ARANCIBIA
Data: 17/12/2024 19:01:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____

Prof. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia
Membro externo (UFPB)

A todos que gostam e se divertem com a matemática.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não seria possível sem o suporte e compreensão de minha família e minha companheira que estiveram comigo em todo o meu período de mestrado.

Também agradeço aos colegas de turma e a todos os professores que, entre aulas e conversas, contribuíram para minha formação pessoal e profissional. Em especial, meu orientador Eben, que foi gentil e prestativo no desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

As olimpíadas de matemática assumem um papel marcante no ano letivo das escolas brasileiras. Existem diversas olimpíadas de matemática, desde internacionais, nacionais e regionais. Em Alagoas, a mais importante é a Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM). Este trabalho apresenta um breve histórico do surgimento das olimpíadas de matemática no mundo e no Brasil e relata as origens da OAM. É apresentado como as olimpíadas de matemática são uma ferramenta para a utilização da metodologia de Resolução de Problemas, e é feita uma reflexão sobre possíveis fatores que impedem o uso de olimpíadas de matemática por parte de escolas e professores. Um estudo de caso da Olimpíada Cearense de Matemática relata o impacto positivo no ensino de matemática no estado do Ceará. Além disso, são discutidos alguns números estatísticos sobre as últimas edições da OAM e os desafios que eles evidenciam para suas futuras edições. Em seguida, são embasados alguns conceitos matemáticos básicos que são usados na solução de 25 problemas olímpicos nos campos da álgebra e aritmética de que já fizeram parte da OAM. Por fim, conclui-se a importância que uma competição como a OAM possui para a melhoria do ensino e aprendizagem de matemática no estado de Alagoas.

Palavras-chave: álgebra; aritmética; olimpíadas de matemática; olimpíada alagoana de matemática; resolução de problemas.

ABSTRACT

Mathematics Olympiads play a significant role in the school year of Brazilian schools. There are several mathematics olympiads, from international, national and regional. In Alagoas, the most important is the Olympics Alagoana of Mathematics (OAM). This work presents a brief history of the emergence of mathematics olympiads in the world and in Brazil and reports the the origins of OAM. It is presented how mathematics olympiads are a tool for using the Problem Solving methodology, and is a reflection was made on possible factors that prevent the use of Olympics mathematics by schools and teachers. A case study of the Olympics Cearense de Matemática reports the positive impact on mathematics teaching in state of Ceará. Furthermore, some statistical figures about the latest editions of OAM and the challenges they highlight for its future editions. Next, some basic mathematical concepts are based on are used to solve 25 Olympic problems in the fields of algebra and arithmetic idea that they have already passed through the OAM. Finally, the importance of a competition like the OAM has to improve teaching and learning mathematics gem in the state of Alagoas.

Keywords: algebra; arithmetic; mathematics olympiads; Alagoas mathematics olympiad; problem solving.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9

2 AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NO BRASIL 11

2.1 O Surgimento das Olimpíadas de Matemática 11

2.2 Olimpíada Alagoana de Matemática - OAM 11

3 AS OLIMPÍADAS COMO PLATAFORMA PARA A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 13

3.1 A Resolução de Problemas 13

3.2 Fatores Impeditivos do Uso de Problemas Olímpicos em Sala de Aula 14

3.3 Um Caso de Sucesso: Olimpíadas Cearenses de Matemática - OCM 15

3.4 Os Desafios da Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM) 17

4 CONCEITOS BÁSICOS 19

4.1 Princípio da Indução Finita 19

4.2 Critérios de Divisibilidade 20

4.3 Progressões Aritméticas 24

4.4 Propriedades dos Logaritmos 25

4.5 Teoria dos Números 26

4.6 Números Binomiais 28

4.7 Congruências Modulares 29

4.8 Produtos Notáveis 30

4.9 Médias e Desigualdades 33

4.10 Polinômios 34

5 PROBLEMAS DA SEGUNDA FASE DA OAM 37

5.1 OAM 2004 37

5.2 OAM 2006 40

5.3 OAM 2007 41

5.4 OAM 2008 43

5.5 OAM 2009 45

5.6 OAM 2010 47

5.7 OAM 2015 49

5.8 OAM 2019 50

5.9 OAM 2021 54

5.10 OAM 2022 56

5.11 OAM 2023 58

5.12 OAM 2024 60

6 CONSIDERAÇÕE FINAIS 64

REFERÊNCIAS 65

1 INTRODUÇÃO

Como professor atuante na rede básica de ensino com alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, observo que apesar de que os atuais livros didáticos sejam contextualizados em situações práticas, como norteia a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as aulas propostas ainda são um amontoado de sequências didáticas e exercícios engessados que em geral não despertam a curiosidade dos estudantes. Da mesma forma, desenvolver um trabalho baseado em definições objetivas e aplicações em problemas simples e diretos pouco me engaja a desenvolver um trabalho envolvente em sala de aula.

Poucos são os momentos em que os materiais didáticos com que já trabalhei apresentaram uma passagem mais desafiadora, que fugisse da simples aplicação de fórmula num exercício tradicional mas que exigisse um pouco mais, tanto para mim quanto para os meus estudantes, despertando curiosidade e interesse e assim promovendo um maior desenvolvimento de raciocínio, gerando um debate significativo na sala de aula em busca de uma solução.

Entretanto, percebi nas semanas que antecedem a aplicação da OBMEP, quando era dado uma pausa no material didático para focar em resoluções de problemas de provas anteriores, o planejamento de aula se mostrava mais animador pois exigia um maior grau de atenção e o andamento da aula em si era mais acalorado pois os enunciados e situações problemas propostas era formatadas de uma forma criativa que despertava a curiosidade dos estudantes. Sem dúvida, nesses períodos as aulas são mais motivadoras e interessantes ao ensino da matemática.

Com a finalidade de aumentar esses momentos durante todo o ano letivo, busquei outras Olimpíadas de Matemática além da OBMEP e me surpreendi com a quantidade e diversidade de Olimpíadas da área: Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), Concurso Canguru de Matemática, Olimpíada Mandacaru de Matemática, olimpíadas Internacionais, dentre outras.

Mas, a minha maior surpresa foi ver que a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) apoia diretamente olimpíadas regionais de Matemática e no meu contexto, a Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM). Essa diversidade de possibilidades e saber que existe uma competição de nível regional do qual eu tinha pouco conhecimento me levou a mergulhar mais a fundo neste universo das olimpíadas.

Porém, ao iniciar o trabalho voltado para as olimpíadas de forma mais incisiva nas escolas onde trabalho, me deparei com vários desafios como a resistência de alunos, que não viam sentido em participar das provas e com a resistência de colegas professores em aderir ao calendário olímpico.

Este trabalho tem como principal objetivo então apresentar as razões pelas quais o ensino em sala de aula com problemas olímpicos é importante, além de evidenciar a matemática produzida no estado de Alagoas na figura da OAM.

Assim, no primeiro capítulo é feito um breve relato sobre o surgimento das olimpíadas de matemática, pontuando as competições atuais mais importantes e também é contextualizado como surgiu e qual a abrangência da OAM em toda a sua existência.

No segundo capítulo é feita uma fundamentação teórica sobre a metodologia pedagógica por trás das Olimpíadas de Matemática: A Resolução de Problemas. Além disso, é feita uma reflexão sobre as dificuldades da implementação dos problemas olímpicos em sala de aula. Em seguida, é exposto como modelo a ser seguido os impactos positivos que a Olimpíada Cearense de Matemática proporcionou no ensino de matemática do Estado do Ceará e também pontuamos barreiras a serem derrubadas pela OAM no estado de Alagoas.

No terceiro capítulo é exposta uma série de conceitos matemáticos fundamentais que serão abordados nos problemas olímpicos propostos pela OAM e aqui debatidos.

No quarto capítulo, são apresentados em ordem cronológica os enunciados e soluções de diversos problemas da OAM que podem ser introduzidos nas aulas do ensino básico para todos os alunos e em especial aqueles que têm afinidade pela matemática.

Por fim, nas considerações finais, enfatizamos os impactos positivos de se adotar a resolução de problemas olímpicos em sala de aula, além de evidenciar a qualidade e as oportunidades que a OAM proporciona aos alunos que têm interesse pela matemática no estado de Alagoas.

2 AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NO BRASIL

2.1 O Surgimento das Olimpíadas de Matemática

As olimpíadas do conhecimento são uma ferramenta pedagógica que vem crescendo bastante nos últimos anos. Com problemas contextualizados e elaborados de maneira criativa e desafiadora, as olimpíadas despertam o interesse e estimulam estudantes a se aprofundarem nos conhecimentos adquiridos em sala de aula. As olimpíadas de matemática certamente são os maiores expoentes difusores desta metodologia.

Segundo Rodrigues (2023), há registros datados de 1894 de competições matemáticas ocorridas na Hungria, mas o primeiro registro de olimpíada de matemática formatada nos moldes atuais datam de 1959, com a I Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), sediada na Romênia. Desde então elas vêm promovendo debates engajados na comunidade de estudantes da rede básica, professores de matemática e na área acadêmica em geral.

No Brasil, a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) surgiu em 1979, idealizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e de acordo com o site da competição OBM (2024), com os objetivos de estimular o estudo de matemática dos alunos, desenvolver e aperfeiçoar a capacitação de professores, influenciar na melhoria do ensino e descobrir novos talentos. As provas são destinadas a alunos da educação básica dos níveis fundamental e médio como também de alunos da graduação.

Neste milênio, houve uma profusão de olimpíadas de matemática do Brasil com a criação da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP), uma das mais conceituadas na América Latina, como também outras competições internacionais como o Concurso Canguru de Matemática, a Olimpíadas Mandacaru de Matemática, a Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU), esta última com o diferencial de ser realizada em equipes, e as diversas olimpíadas regionais que são diretamente apoiadas pela OBM.

2.2 Olimpíada Alagoana de Matemática - OAM

Em Alagoas, a Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM) surgiu em 2003, idealizada pelo professor Krerley Oliveira, professor titular do Instituto de Matemática da UFAL - Campus A. C. Simões. Segundo o site oficial da OAM (2022), a competição vem estimulando estudantes de todo o estado que seguiram por diversos ramos do conhecimento, do Direito à Matemática, passando pelas diversas engenharias, além de diversos empreendedores.

A motivação para sua criação se deu pela inexistência de uma competição de matemática regional na educação básica do estado. A inspiração veio do professor Edmilson Pontes, que desenvolvia com seus alunos trabalhos voltados para a OBM na década de 90. Com o intuito de promover a aderência das escolas à participação nas olimpíadas de matemática e também de evidenciar uma forma diferente e até mesma divertida de se estudar matemática, o professor Krerley, juntamente a outros professores do Instituto de Matemática da UFAL, fundou e coor-

denou as primeiras edições da OAM, voltada para estudantes do Ensino Fundamental e Médio das escolas de Alagoas.

Segundo o site do Instituto de Matemática da UFAL, IM (2005), o principal objetivo da realização de olimpíadas de matemática em Alagoas é servir como instrumento de estímulo ao estudo da matemática aos alunos do nível médio e fundamental, bem como descobrir talentos latentes nesta área do conhecimento em âmbito estadual. Além disso, trabalhar com olimpíadas em sala de aula é um instrumento de aperfeiçoamento de professores através da participação direta deles no processo de preparação de seus alunos.

Desde então, foram vinte e uma edições realizadas em todos os anos (exceto 2020, por conta da pandemia) com participação de instituições da rede pública e privada de ensino de mais da metade dos municípios do estado e com impactos bastante positivos na educação básica alagoana. A prova é dividida em quatro níveis:

- Nível 1: Para alunos matriculados no 6º e 7º ano do Ensino Fundamental
- Nível 2: Para alunos matriculados no 8º e 9º ano do Ensino Fundamental
- Nível 3: Para alunos matriculados no Ensino Médio
- Nível U: Para alunos de cursos de graduação em Matemática.

A configuração da prova variou ao longo dos anos de aplicação. Durante muitos anos, a fase classificatória para a prova dissertativa era o desempenho dos alunos na primeira fase da OBM, que era composta de questões objetivas. Em outros anos, a olimpíada tinha uma fase única dissertativa.

Segundo o atual coordenador da OAM, Davi Lima, entre 2015 e 2019, haviam poucas pessoas para ajudar na logística de elaboração, aplicação e correção de provas e como solução para isso, a OAM premiou os alunos alagoanos que se destacaram na segunda fase da OBMEP do ano corrente. Mas a partir de 2021, a coordenação da OAM criou comissões que elaboram questões e as reúnem em um banco de questões. Perto da data de aplicação das provas, os coordenadores se dividem e selecionam as questões que estarão presentes na prova.

No ano de 2023, a prova foi aplicada pela primeira vez em duas fases com provas totalmente elaboradas pela comissão da OAM: a primeira fase foi aplicada de forma online, composta de 20 questões objetivas com cinco alternativas cada; a segunda fase é composta por uma prova com seis questões onde as quatro delas os alunos devem fornecer uma resposta numérica inteira entre 1 e 9999, e outras duas questões discursivas.

Somente em 2023, mais de 9000 alunos da rede de ensino básica de Alagoas foram inscritos e fizeram as provas de primeira e segunda fase que renderam uma distribuição de 15 medalhas de ouro, 40 medalhas de prata, 45 medalhas de bronze e 170 menções honrosas. A cerimônia de premiação para entrega de medalhas foi realizada durante o MatFest 2023, em Maceió.

Além do reconhecimento a nível regional, a OAM é uma das poucas portas de acessos atual para que estudantes alagoanos participem da OBM.

3 AS OLIMPÍADAS COMO PLATAFORMA PARA A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

3.1 A Resolução de Problemas

As olimpíadas de matemática estão formatadas em uma série de problemas propostos para os estudantes resolverem. Portanto, como afirmam Oliveira Junior, Pinheiro e Barreto (2022), a metodologia por trás das questões de olimpíadas de matemática é a Resolução de Problemas, que estimula os alunos a pensarem de forma organizada para tentar encontrar uma resposta para os problemas.

De forma geral, Lima (2021) define que um problema é tudo aquilo que se configura como uma situação que apresenta dificuldade para as quais não há solução imediata. Na área da matemática, podemos definir que a resolução de um problema consiste num sequenciamento de raciocínios lógicos que levam a uma solução.

Lima (2021) aponta que o principal autor precursor do uso da resolução de problemas foi George Polya, que em sua obra "How to Solve it: A new aspect of a mathematical method" (no Brasil, traduzido como "A Arte de Resolver Problemas") apresenta quatro etapas essenciais no processo de solucionar um problema: compreender o problema, elaborar um plano de resolução, executar o plano e examinar e validar a solução.

Para Landgraf e Justulin (2023) essas quatro etapas consistem em: ler e compreender bem o problema, com bastante atenção a todas as informações do enunciado; estabelecer um plano a partir do que o resolvedor conhece (problemas correlatos, problemas auxiliares, reformulação do problema); executar o plano estabelecido, verificando se ele está correto; verificar a solução obtida, avaliando o resultado e refletindo se é possível alcançá-lo por um caminho diferente.

Muitos professores de matemática partem deste conjunto de fases para resolução de problemas estabelecidos por Polya e o aplicam por meio de três vertentes, segundo Landgraf e Justulin (2023): (1) ensinar sobre a resolução de problemas, teorizando-a; (2) ensinar para a resolução de problemas, onde se foca no uso de conhecimentos já concebidos anteriormente para resolver problemas e; (3) ensinar através da resolução de problemas, onde o problema é o ponto de partida gerador da aprendizagem de objetos matemáticos.

Lima (2021) distingue ensinar sobre resolução de problemas e ensinar para resolução de problemas. Segundo o autor, ensinar sobre resolução de problemas significa trabalhar esse assunto como um novo conteúdo matemático, ou seja, como uma teoria. Por outro lado, ensinar para a resolução de problemas, se utilizam os problemas para apresentar aplicações dos conteúdos matemáticos, isto é, se apresenta a teoria e depois se propõem problemas com uma certa contextualização e, em seguida, uma lista de problemas semelhantes.

Para Lima (2021) tais usos da resolução de problemas evidenciam e perpetuam o tradicional ato de ensino da matemática onde o ciclo que o professor inicia o conteúdo, expõe alguns exercícios, em seguida propõe que os alunos pratiquem exercícios semelhantes por um

tempo. Deste modo, é mais provável que a maioria dos estudantes sejam meros reprodutores de técnicas sem concluir de fato a aprendizagem matemática.

Entretanto, Landgraf e Justulin (2023) enfatizam que ensinar através da resolução de problemas pode ser estendida como uma metodologia de ensino de matemática pois nesta perspectiva, os problemas são pontos de partidas onde o aluno gera sua própria aprendizagem matemática a partir de elaborações e execuções de planos e verificações de seus resultados. Deste modo, o aluno é protagonista do processo de aprendizagem e o professor atua como mediador.

Lima (2021) afirma que o ensino da matemática através da resolução de problemas é um caminho adequado, pois traça-se um roteiro que permite ao aluno pensar não só em encontrar uma resposta, mas sim, em construir, significativamente, conceitos e processos de resolução.

Desta forma, Oliveira Junior, Pinheiro e Barreto (2022) afirmam que as questões de olimpíadas, em grande parte dos casos, necessitam de uma sequência lógica para serem resolvidas e desta forma, trazer questões provindas de olimpíadas dentro de um plano de aula calcado na resolução de problemas certamente possibilitará que os alunos aprendam de forma mais significativa, não somente decorando e replicando fórmulas e conceitos.

Rodrigues (2023) afirma que uma aula específica para olimpíadas apresenta diversas vantagens em relação a uma aula usual: para o professor, proporciona mais liberdade pois não é necessário seguir um programa predefinido e para o aluno, permite que desenvolva autonomia no processo de fazer matemática, levando-o a descobrir resultados por si próprio e a enxergar o fascínio da matemática.

3.2 Fatores Impeditivos do Uso de Problemas Olímpicos em Sala de Aula

Em muitas realidades de sala de aula do nosso país, encontram-se diversos fatos que brecam o uso de problemas olímpicos nas aulas de matemática. De acordo com Viana e Caldas (2013), a falta de tempo que muitos educadores alegam, os levam a certos impedimentos, os quais não permitem que modifiquem sua prática pedagógica, tendo como referencial um plano que sane as dificuldades diárias. Essas dificuldades geralmente são vinculadas a defasagem conteudista relacionada a anos anteriores fazendo assim que os professores foquem na recomposição de aprendizagem se utilizando de aulas de revisão e exercícios de fixação de ordem repetitiva.

Souza (2018) diz que no geral que o planejamento de aulas focados em resolução de problemas de olimpíadas ainda é realizado de forma reduzida visto que esses professores não encontram maior disponibilidade para se aprofundar nesse processo de preparação de seus alunos.

Por outro lado, muitos alunos não veem importância em participar de olimpíadas do conhecimento, o que evidencia a falta de interesse e ciência por parte dos alunos nos benefícios de aprendizagem e possibilidades acadêmicas proporcionadas por bons resultados em olimpíadas do conhecimento, como vagas em grupos de estudo avançados e bolsas de iniciação científica, por exemplo. Uma das principais razões para tal comportamento por parte do aluno é a falta de incentivo e instrução por parte dos professores.

Apesar da abrangência da OBMEP, que vem conseguindo ser aplicada em mais de 99% dos municípios brasileiros em suas últimas edições, muitos alunos fazem a prova por mera formalidade, sem ter uma preparação adequada para a participação na prova. Souza (2018) relata que a grande parte dos professores de matemática da educação básica veem pouca ou nenhuma contribuição da OBMEP na aprendizagem efetiva de seus alunos, deixando assim de incluir a olimpíada dentro de seu planejamento de aula corrente.

Ribeiro (2023) coloca que muitas gestões escolares propõe que os professores incorporem as olimpíadas do conhecimento em todas as áreas no calendário escolar estimuladas pela perspectiva de reconhecimento e elogios provindos de vindouras premiações. Desta forma, é visível que a iniciativa pela participação dos estudantes nas olimpíadas é mais uma questão de obedecer a uma hierarquia escolar do que por iniciativa própria. Contudo, em contextos escolares que as olimpíadas são realizadas por motivos similares a este, geralmente sem preparação alguma proporcionada aos estudantes, as provas não tem poder de aprendizagem algum.

Infelizmente, a grande parte dos professores de matemática nem mesmo conhecem os programas de formação continuada que a própria OBMEP proporciona como o projeto OBMEP na Escola e materiais mais aprofundados voltados para estudos olímpicos como as apostilas do PIC e POTI que estão disponibilizados gratuitamente no site da OBMEP. Souza (2018) relata que é inquietante que ainda há professores que não conheçam ou reconheçam a importância que programas como este têm para a sua preparação e formação. Programas como este, complementa o autor, são ferramentas de incentivo à qualificação, devendo ser bem aproveitado pelos que buscam ampliar seu nível de conhecimento na área.

Competições como a OBMEP, segundoViana e Caldas (2013), vai de encontro com as velhas técnicas tradicionais, onde o professor deixa de ser o detentor do saber e passa a ser o coordenador deste conhecimento, adaptando sua prática pedagógica aos novos tempos.

Souza (2018) coloca que a dedicação e responsabilidade do professor de matemática precisam contribuir para uma aprendizagem melhor e mais significativa dos alunos enquanto agentes do saber e da transformação social, e ter essa função como tarefa na prática em sala de aula é de suma importância.

3.3 Um Caso de Sucesso: Olimpíadas Cearenses de Matemática - OCM

Na apresentação do livro Olimpíadas Cearenses de Matemática, o professor João Lucas Marques Barbosa relata que um grupo de professores em 1980 transformaram entusiasmo com a aplicação da OBM em grande frustração com o desempenho dos alunos, muito abaixo do esperado gerando desmotivação por parte dos gestores escolares em continuar participando da OBM em anos posteriores.

Com tal resultado, um grupo de professores se reuniu e se propuseram em criar uma Olimpíada de Matemática local com o objetivo de que os alunos tivessem maior contato com problemas olímpicos. Foi criada então em 1981 a Olimpíada Cearense de Matemática (OCM) com edições anuais ininterruptas e desde então, de acordo com Gomes (2019), revelando alunos, professores e escolas que têm bom desempenho na absorção e transmissão do conhecimento

matemático.

Entretanto, como relata Gomes (2019), o início da elaboração e da aplicação das provas era difícil pois o grande problema das olimpíadas em geral era que o que é cobrado nas provas não era o assunto comum visto pelos estudantes na escola. Pelo mesmo motivo, os professores não tinham formação adequada para preparar os estudantes para as realizações das olimpíadas de matemática.

Contudo, a partir deste ponto, ex-alunos olímpicos se interessaram em treinar os alunos com bom nível de conhecimento. Por sua vez, as escolas começaram a colocar aulas diferenciadas com um curso preparatório no contra turno pagando o professor com uma aula diferenciada, e com isso o professor começou ir em busca de material diferenciado. Começa, então, uma reação em cadeia benéfica para todo o processo de ensino-aprendizagem matemática no Ceará.

Uma das possibilidades de formação continuada fomentada no Ceará a partir da implementação da OCM, segundo Viana e Caldas (2013) são os projetos de cursos ofertados pelo Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará (CEFET/CE) aos educadores para aperfeiçoar a capacitação dos mesmos e melhorar a qualidade do ensino.

Outro movimento curioso desencadeado pela OCM foi A Coluna Olímpica de Matemática publicada semanalmente a partir de 1987 até 1996 no Jornal O Povo. De acordo com Nogueira Filho (2016), a coluna que inicialmente apenas vincularia notícias sobre as diversas Olimpíadas de Matemática passou a ser um grande divulgador da matemática passando a fazer parte de sua composição semanal recreações matemáticas, matérias pedagógicas dirigidas a leitores alunos e professores, notas históricas sobre o surgimento de conceitos, teoremas e conjecturas relevantes, notícias sobre avanços científicos recentes, em Matemática e em outros campos do saber humano que teriam se utilizado de conhecimentos matemáticos para tal fim, e uma seção interativa de problemas propostos desde os mais simples, intitulados "probleminhas", até problemas de olimpíadas de matemática.

Nogueira Filho (2016) coloca que apresentar, discutir e resolver questões de olimpíadas através da coluna era uma forma de garimpar talentos, de realizar salvamentos de dons, de contribuir para a formação de uma geração futura de matemáticos brilhantes que propiciassem a inclusão do Brasil no clube de países com tradição em matemática.

É notório, então, como esse conjunto de iniciativas que floresceram a partir da criação da OCM contribuiu com o bom desempenho do Ceará nas olimpíadas de matemática e em outras avaliações em geral. Como exemplificação, podemos observar o aumento significativo de medalhas do estado do Ceará na OBMEP, de acordo com o IMPA (2023): Na primeira edição, em 2005, o estado obteve 44 medalhas ao total e na edição mais recente, em 2023, obteve 579 medalhas. De acordo com Macêdo e Cardoso (2024), o estado do Ceará possui um crescente destaque em âmbito nacional na OBMEP, ao alcançar cerca de 6,5% das medalhas, 4º em posição geral e 1º lugar na região Nordeste.

Gomes (2019) pontua que a iniciativa desses professores pioneiros que criaram a OCM e a manutenção deste trabalho pelas gerações seguintes fez com que o Estado do Ceará seja tradicionalmente conhecido pelos excelentes resultados nas olimpíadas de matemática nacionais

e em diversas olimpíadas internacionais.

3.4 Os Desafios da Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM)

Apesar da longa trajetória de vinte e uma edições, a OAM ainda não atinge todas as cidades do estado de Alagoas. De acordo com o site da competição OAM (2023), na edição de 2023, de um universo de 102 municípios alagoanos, houveram alunos inscritos de 42 municípios para o Nível 1, 34 municípios para o Nível 2 e 64 municípios para o Nível 3. O nível de participação, portanto, é de cerca de 60% dos municípios alagoanos, que é bem razoável, levando em conta as mais de duas décadas de existência do projeto.

O professor Davi Lima, atual coordenador da OAM, pontua que diferente da OBMEP - que conta com recursos do Estado para financiar a elaboração, divulgação e aplicação da prova e assim essencialmente intima as escolas a participarem da primeira fase - a OAM tem um perfil de colaboradores e participantes voluntários. A OBMEP tem grande difusão pelos canais de comunicação internos de gestores escolares e diversas propagandas veiculadas nas redes sociais e até mesmo na televisão, o que certamente mobiliza mais as escolas e os pais dos alunos a colaborarem nesse processo e incentivarem seus filhos a participarem dessas competições.

Por outro lado, em uma competição regional como a OAM os recursos financeiros são limitados e assim o alcance da divulgação é naturalmente menor. Mesmo assim, os coordenadores notificam por e-mail todas as escolas do estado, por meio da Secretaria de Educação do Estado de Alagoas (SEDUC-AL) e fazem divulgação na programação televisiva local.

Ainda assim, o esforço dos últimos anos resultou em 9 mil alunos inscritos na edição de 2023, um número quatro vezes maior que na edição de 2022, segundo o coordenador da Olimpíada, Davi Lima.

Como afirmam Bezerra, Sousa e Medeiros (2020) é necessário ver as olimpíadas de conhecimento não como meras provas externas, mas como parte de uma política pública educacional que contribui para mudanças nas estratégias de ensino de matemática nas escolas brasileiras. Dessa forma, é importante oportunizar a realização das olimpíadas de forma igualitária para todo o alunado.

Outro fato que chama atenção ao analisar a lista de inscritos da edição de 2023 da OAM é ver que alguns municípios possuem apenas um ou dois alunos inscritos. Isso mostra que os gestores escolares e os professores de matemática não fazem um trabalho de motivação uniforme de forma que todos os alunos da escola tenham a oportunidade de participar de uma prova tão importante. Dessa forma, alunos de escolas onde isso ocorre que se interessem em participar precisam se inscrever e participar por conta própria sem contar com nenhum apoio de seu professor ou da escola onde estuda.

Infelizmente, observa-se que a maior parte dos inscritos são oriundos da rede privada ou quando são da rede pública de ensino, a maior parte dos alunos são do Colégio Militar Estadual ou dos Institutos Federais, ou seja, escolas públicas seletivas, o que demonstra a pouca adesão da maioria das escolas públicas estaduais e municipais. Além disso, as premiações somente são realizadas em Maceió. Tais características são fatores impeditivos de estreitamento de relações

de professores e escolas de cidades mais periféricas em relação ao berço da OAM, em Maceió.

Em 2021, a organização da OAM publicou a Revista da Olimpíada Alagoana de Matemática (ROAM) que surgiu como uma forma de ajudar os estudantes interessados em participar de olimpíadas de matemática a se prepararem para estas competições. Nela, a proposta era de publicações de problemas e soluções de OAM de anos anteriores, visto que os gabaritos das provas não são disponibilizados, e artigos direcionados para treinamento olímpico em geral. Infelizmente, a ROAM teve apenas a edição inaugural.

A falta de continuidade de projetos como este em conjunto como a inexistência de estudos acadêmicos sobre a OAM até o presente momento evidenciam a falta de empenho entre os professores e instituições de ensino em contribuir com uma cultura benéfica que eleve a matemática alagoana a melhores níveis.

Um dos objetivos desta monografia é disponibilizar as soluções de alguns problemas de álgebra e aritmética da prova de nível 3 na esperança de que o próprio trabalho se torne uma fonte de estudos e treinamentos para as vindouras edições da OAM.

4 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentaremos os fatos matemáticos que serão utilizados para a resolução dos problemas dos próximos capítulos. Quando um resultado enunciado não for demonstrado, a verificação de sua demonstração poderá ser encontrada na referência indicada.

4.1 Princípio da Indução Finita

A formulação do axioma da indução abaixo foi retirada de Lima (2023).

Proposição 4.1. ***Princípio da Indução Finita***
Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que
i) $P(1)$ é válida;
ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Uma aplicação do princípio da indução finita é para estabelecer o termo geral de uma sequência numérica, como no exemplo abaixo.

Exemplo 4.1. *A sequência $(0,1,3,6,10,\ldots)$ tem termo geral $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.*

Demonstração: Usaremos o princípio da indução finita, verifique que para $n = 1$ temos que

$$a_1 = \frac{1(1-1)}{2} = \frac{1 \cdot 0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

e assim o passo (i) está provado.

Agora, suponha que para $n \in \mathbb{N}$ é válido que $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Definindo a sequência por recorrência vemos que $a_k = a_{k-1} + (k-1)$. Para $k = n+1$:

$$a_{n+1} = a_{n+1-1} + (n+1-1) \Longrightarrow a_{n+1} = a_n + n$$

Utilizando a hipótese de indução $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ temos:

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} &= \frac{n^2-n+2n}{2} \\ &= \frac{n^2+n}{2} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2} \end{aligned}$$

Assim, a_{n+1} é válida e portanto o passo (ii) está provado. Logo, pelo princípio da indução finita, $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Critérios de Divisibilidade

As ideias para as demonstrações desta seção foram retiradas de Steffenon e Guarniere (2024). Nas proposições a seguir $a = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ é a representação decimal do número natural a, ou seja,

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

Proposição 4.2. *Para o número a ser divisível por 2, é necessário e suficiente que a seja par, ou seja, que o seu último dígito seja 0,2,4,6 ou 8.*

Demonstração: Note que a pode ser reescrito como:

$$a = 10 \cdot (a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + a_0$$

Como 10 é divisível por 2, basta que a_0 seja par.

Proposição 4.3. *Para o número a ser divisível por 4, é necessário e suficiente que os dois últimos dígitos de a formem um número divisível por 4.*

Demonstração: Note que a pode ser reescrito como:

$$a = 10^2 \cdot (a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \cdots + a_2) + 10a_1 + a_0$$

Como $10^2 = 100$ é divisível por 4, basta que $10a_1 + a_0$ seja divisível por 4, ou seja, o número $a_1 a_0$ seja divisível por 4.

Proposição 4.4. *Para o número a ser divisível por 5, é necessário e suficiente que o último algarismo do número a seja 0 ou 5.*

Demonstração: Podemos reescrever a como:

$$a = 10 \cdot (a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10^1 + a_1) + a_0$$

Como 10 é divisível por 5, basta que a_0 seja divisível por 5. Como a_0 é dígito, basta que a_0 seja 0 ou 5.

Proposição 4.5. *Para o número a ser divisível por 8, é necessário e suficiente que os três últimos dígitos de a formem um número divisível por 8.*

Demonstração: Note que a pode ser reescrito como:

$$a = 10^3 \cdot (a_n 10^{n-3} + a_{n-1} 10^{n-4} + \cdots + a_4 10 + a_3) + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

Agora, como $10^3 = 1000$ é divisível por 8, basta que $100a_2 + 10a_1 + a_0$ seja divisível por 8, ou seja, o número $a_2 a_1 a_0$ seja divisível por 8.

O resultado a seguir será utilizado para formalizar o critério de divisibilidade por 9 e consequentemente, por 3.

Lema 4.1. $10^n - 1$ *é divisível por 9, para todo* $n \geq 1$.

Demonstração: Usando o princípio da indução finita, tem-se que para $n = 1$ temos $10^1 - 1 = 9$ que é divisível por 9. Então o passo (i) é verdadeiro. Suponha que $10^n - 1 = 9k$, com $k \in \mathbb{N}$. Multiplicando esta expressão por 10:

$$\begin{aligned} 10(10^n - 1) = 10 \cdot 9k &\Longrightarrow 10^{n+1} - 10 = 10 \cdot 9k \\ &\Longrightarrow 10^{n+1} = 10 \cdot 9k + 10 \\ &\Longrightarrow 10^{n+1} = 10 \cdot 9k + 9 + 1 \\ &\Longrightarrow 10^{n+1} - 1 = 9(10k + 1) \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}$, então $(10k + 1) \in \mathbb{N}$ e assim o resultado está provado pelo princípio da indução finita.

Proposição 4.6. *Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 3 (resp. 9) é que* $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ *seja divisível por 3 (resp. 9)*

Demonstração: Podemos reescrever $a - (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$ como:

$$\begin{aligned} a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 - (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) = \\ a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1 \cdot (10^1 - 1). \end{aligned}$$

Usando o fato que $10^k - 1$ é múltiplo de 9, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$a = (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) + 9q.$$

Dessa igualdade, seguem os critérios de divisibilidade por 3 e por 9.

Os resultados a seguir serão usados para formalizar um critério de divisibilidade por 11.

Lema 4.2. $10^{2n} - 1$ *é divisível por 11, para todo* $n \geq 1$

Demonstração: Usando o princípio da indução finita, note que para $n = 1$ temos que $10^{2 \cdot 1} - 1 = 99 = 11 \cdot 9$. Supondo que $10^{2n} - 1 = 11k, k \in \mathbb{Z}$, e multiplicando ambos os lados por 10^2:

$$\begin{aligned} 10^2 \cdot (10^{2n} - 1) = 10^2 \cdot 11k &\Longrightarrow 10^{2n+2} - 10^2 = 10^2 \cdot 11k \\ &\Longrightarrow 10^{2(n+1)} = 10^2 \cdot 11k + 10^2 \\ &\Longrightarrow 10^{2(n+1)} = 10^2 \cdot 11k + 100 - 1 + 1 \\ &\Longrightarrow 10^{2(n+1)} - 1 = 10^2 \cdot 11k + 99 \\ &\Longrightarrow 10^{2(n+1)} - 1 = 11 \cdot (10^2 \cdot k + 9) \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{Z}$, seque que $(10^2 \cdot k + 9) \in \mathbb{Z}$ e assim o resultado está provado.

Lema 4.3. $10^{2n-1}+1$ *é divisível por 11, para todo* $n \geq 1$

Demonstração: Usando o princípio da indução finita, note que para $n = 1$ temos que $10^{2\cdot 1-1}+1 = 10+1 = 11$. Supondo que $10^{2n-1}+1 = 11k, k \in \mathbb{Z}$, e multiplicando ambos os lados por 10^2 :

$$\begin{aligned} 10^2 \cdot (10^{2n-1}+1) = 10^2 \cdot 11k &\Longrightarrow 10^{2n-1+2} + 10^2 = 10^2 \cdot 11k \\ &\Longrightarrow 10^{2(n+1)-1} = 10^2 \cdot 11k - 10^2 \\ &\Longrightarrow 10^{2(n+1)-1} = 10^2 \cdot 11k - 100 + 1 - 1 \\ &\Longrightarrow 10^{2(n+1)-1} + 1 = 10^2 \cdot 11k - 99 \\ &\Longrightarrow 10^{2(n+1)-1} + 1 = 11 \cdot (10^2 \cdot k - 9) \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{Z}$, seque que $(10^2 \cdot k - 9) \in \mathbb{Z}$ e assim o resultado está provado.

Os dois últimos resultados nos mostram que dado $C \in \mathbb{Z}$, o número 10^k por ser reescrito como:

$$10^k = \begin{cases} 11C+1, & \text{se } k \text{ é par} \\ 11C-1, & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Proposição 4.7. *O resto da divisão de um número natural por 11 é o mesmo resto da divisão, por 11, da diferença entre as somas dos algarismos das ordens ímpares e das ordens pares desse número. Em particular, um número natural é divisível por 11 se, e somente se, a diferença entre as somas dos algarismos das ordens ímpares e das ordens pares desse número for divisível por 11.*

Demonstração: Podemos escrever a como

$$a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^4 \ldots a_n \cdot 10^n.$$

Assim, temos que analisar dois casos: n par ou n ímpar. Assuma que $n = 2m$ par, $m \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^4 \ldots + a_{2m} \cdot 10^{2m} \\ &= a_0 + a_1 \cdot (11k_1 - 1) + a_2 \cdot (11k_2 + 1) + a_3 \cdot (11k_3 - 1) + \ldots + a_{2m} \cdot (11k_{2m} + 1) \\ &= (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2m}) - (a_1 + a_3 + a_5 \ldots + a_{2m-1}) + 11(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{2m}) \end{aligned}$$

Desta forma, para a ser divisível por 11, basta que

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2m}) - (a_1 + a_3 + a_5 \ldots + a_{2m-1})$$

seja divisível por 11, o que demonstra a proposição no caso $n = 2m$ par. De modo análogo, prova-se no caso n ímpar. Deixamos este caso a cargo do leitor.

Os resultados a seguir serão utilizados para formalizar critérios de divisibilidade por 7, 11 e 13.

Lema 4.4. $1000^{2n}-1$ *é divisível por 1001, para todo* $n \geq 1$.

Demonstração: Usando o princípio da indução finita, para $n = 1$ temos $1000^{2\cdot 1}-1 = 999999 = 1001 \cdot 999$. Logo, o passo (i) é válido. Supondo que $1000^{2n}-1 = 1001k$, $k \in \mathbb{Z}$. Multiplicando esta equação por 1000^2:

$$\begin{aligned}
(1000^{2n}-1)\cdot 1000^2 &= 1001k \cdot 1000^2 && \Longrightarrow \\
1000^{2n+2}-1000^2 &= 1001k \cdot 1000^2 && \Longrightarrow \\
1000^{2(n+1)} &= 1001k \cdot 1000^2 + 1000^2 && \Longrightarrow \\
1000^{2(n+1)} &= 1001k \cdot 1000^2 + 1000^2 - 1 + 1 && \Longrightarrow \\
1000^{2(n+1)}-1 &= 1001k \cdot 1000^2 + 1001 \cdot 999 && \Longrightarrow \\
1000^{2(n+1)}-1 &= 1001(1000^2 k + 999)
\end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{Z}$, segue que $(1000^2 k + 999) \in \mathbb{Z}$ e assim o resultado está provado pelo princípio da indução finita.

Lema 4.5. $1000^{2n-1}+1$ *é divisível por 1001, para todo* $n \geq 1$.

Demonstração: Usando o princípio da indução finita, para $n = 1$ tem-se $1000^{2\cdot 1-1}+1 = 1001$, que é divisível por 1001. Assim, o passo (i) é válido. Suponha que $1000^{2n-1}+1 = 1001k$, $k \in \mathbb{Z}$. Multiplicando a equação por 1000^2:

$$\begin{aligned}
1000^2(1000^{2n-1}+1) &= 1000^2 \cdot 1001k && \Longrightarrow \\
1000^{2n+1}+1000^2 &= 1000^2 \cdot 1001k && \Longrightarrow \\
1000^{2n+1+1-1} &= 1000^2 \cdot 1001k - 1000^2 && \Longrightarrow \\
1000^{2(n+1)-1} &= 1000^2 \cdot 1001k - 1000^2 + 1 - 1 && \Longrightarrow \\
1000^{2(n+1)-1}+1 &= 1000^2 \cdot 1001k - (1000^2 - 1) && \Longrightarrow \\
1000^{2(n+1)-1}+1 &= 1000^2 \cdot 1001k - 1001 \cdot 999 && \Longrightarrow \\
1000^{2(n+1)-1}+1 &= 1001(1000^2 k - 999)
\end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{Z}$, segue que $(1000^2 k - 999) \in \mathbb{Z}$ e assim o resultado está provado pelo princípio da indução finita.

Proposição 4.8. *Uma condição necessária e suficiente para que um número a seja divisível por 7 (resp. 11, 13) é que*

$$a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - a_{11}a_{10}a_9 + \cdots$$

seja divisível por 7 (resp. 11, 13).

Demonstração: Pelas proposições anteriores, temos que se k é ímpar, então 10^k+1 é divisível por $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$; por outro lado, se k é par, então 10^k-1 é divisível por $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
&a-[a_2a_1a_0-a_5a_4a_3+a_8a_7a_6-a_{11}a_{10}a_9+\cdots]\\
&=(a_0+a_1\cdot 10^1+a_2\cdot 10^2+a_3\cdot 10^3+\cdots)\\
&-[a_2a_1a_0-a_5a_4a_3+a_8a_7a_6-a_{11}a_{10}a_9+\cdots]\\
&=(a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0-a_2a_1a_0)+\\
&+(a_5\cdot 10^5+a_4\cdot 10^4+a_3\cdot 10^3+a_5a_4a_3)+\\
&+(a_8\cdot 10^8+a_7\cdot 10^7+a_6\cdot 10^6-a_8a_7a_6)+\\
&+(a_{11}\cdot 10^{11}+a_{10}\cdot 10^{10}+a_9\cdot 10^9+a_{11}a_{10}a_9)+\cdots\\
&=0+a_5a_4a_3(10^3+1)+a_8a_7a_6(10^6-1)+a_{11}a_{10}a_9(10^9+1)+\cdots\\
&=1001q
\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever a como

$$a=[a_2a_1a_0-a_5a_4a_3+a_8a_7a_6-a_{11}a_{10}a_9+\cdots]+1001q, q\in\mathbb{Z},$$

o que demonstra a proposição.

4.3 Progressões Aritméticas

Os fatos matemáticos enunciados a seguir foram retirados de Morgado e Carvalho (2023).

Definição 4.1. *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e é representada pela letra r.*

Proposição 4.9. ***Termo geral de uma Progressão Aritmética***
Em uma progressão aritmética $(a_1,a_2,a_3\ldots)$ de razão r, podemos calcular o n-ésimo termo desta sequência por $a_n=a_1+(n-1)\cdot r$.

Demonstração: Usando o princípio da indução finita, veja que para $n=2$ temos que $a_2=a_1+(2-1)\cdot r=a_1+r$, portanto o passo (i) é verdadeiro. Agora, suponha que $n=k$, $a_k=a_1+(k-1)\cdot r$ é válido para $k\in\mathbb{N}$. Então para $n=k+1$:

$$a_{k+1}=a_k+r=a_1+(k-1)\cdot r+r=a_1+kr-r+r=a_1+kr=a_1+((k+1)-1)\cdot r$$

Assim, o passo (ii) está provado e, portanto, $a_n=a_1+(n-1)\cdot r$ pelo princípio da indução finita.

Teorema 4.1. ***Soma dos termos de uma progressão aritmética***
A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$ é

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

Demonstração: Temos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma de trás para frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$. Daí,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Observe que cada parêntese da expressão acima é da forma $a_j + a_{n-(j-1)}$. Utilizando a fórmula do termo geral nesta forma, temos

$$\begin{aligned} a_1 + (j-1)\cdot r + a_1 + (n-(j-1)-1)\cdot r &= a_1 + jr - r + a_1 + nr - jr \\ &= a_1 + a_1 + (n-1)\cdot r \\ &= a_1 + a_n \end{aligned}$$

Portanto, todos os parênteses são iguais a $a_1 + a_n$. Como são n parênteses, temos

$$2S_n = (a_1 + a_n)\cdot n \Longrightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

4.4 Propriedades dos Logaritmos

As definições e propriedades aqui enunciadas foram retiradas de Silva (2013). Neste trabalho, os logaritmos foram usados apenas para a demonstração de um resultado e por este motivo não terá as demonstrações das proposições desenvolvidas mas elas podem ser verificadas na referência citada.

Definição 4.2. *Para $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, o logaritmo de b na base a é o expoente y que devemos colocar na potência de base a para que o resultado seja b, ou seja, é a solução da equação exponencial*

$$a^y = b$$

Usaremos a notação $y = \log_a b$.

Proposição 4.10. *Propriedades dos Logaritmos*
a) $\log_a 1 = 0$
b) $\log_a a = 1$
c) $a^{\log_a b} = b$
d) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a b$
e) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a b$
f) $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$ *onde* $k \in \mathbb{R}$

Observação 1: Para a função exponencial, utilizamos a base $e = 2,7182818\ldots$, onde e é o número de Euler, do qual muitas vezes é conveniente seu uso para resolver problemas matemáticos. Podemos denotar o logaritmo de base e como $log_e x = \ln x$, sendo este denominado como logaritmo natural.
Observação 2: Verifica-se todas as propriedades dos logaritmos para lnx.
Exemplo: Se $lnx = 5$, qual o valor de x?

Solução: Pela definição

$$lnx = 5 \Longleftrightarrow x = e^5$$

.

4.5 Teoria dos Números

As proposições sobre paridade foram extraídas de Parente e Caminha (2022).

Definição 4.3. *A paridade de $n \in \mathbb{N}$ é par se n deixa resto 0 na divisão por 2. Se n deixa resto 1 na divisão por 2, a paridade de n é ímpar.*

Proposição 4.11. ***Paridade da Soma e do Produto***
(i) A soma de dois números naturais é par se, e somente se, os números tiverem a mesma paridade.
(ii) A soma de uma quantidade qualquer de números pares é par.
(iii) A soma de uma certa quantidade de números ímpares é ímpar se, e somente se, essa quantidade for ímpar.
(iv) O produto de uma quantidade qualquer de números naturais é par se, e somente se, um dos números for par.
(v) O produto de uma quantidade qualquer de números naturais ímpares é ímpar.

Demonstração:
(i) Sejam $m,n \in \mathbb{N}$. Se m e n são ambos pares, então existem $p,q \in \mathbb{N}$ tais que $m = 2p$ e $n = 2q$. Daí,

$$m+n = 2p+2q = 2(p+q) \text{ é par.}$$

Se m e n são ambos ímpares, então $m = 2p+1$ e $n = 2q+1$. Logo,

$$m+n = 2p+1+2q+1 = 2p+2q+2 = 2(p+q+1) \text{ é par.}$$

Reciprocamente, se m e n têm paridades distintas, então $m = 2p$ e $n = 2q+1$ ou $m = 2p+1$ e $n = 2q$. Em qualquer caso, temos que

$$m+n = 2p+2q+1 = 2(p+q)+1 \text{ é ímpar.}$$

(ii) Sejam $n_1, n_2, \ldots, n_k$ números pares. Então, existem $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{N}$ tais que $n_1 = 2q_1, n_2 = 2q_2, \ldots, n_k = 2q_k$. Logo,

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = 2q_1 + 2q_2 + \cdots + 2q_k = 2(q_1 + q_2 + \cdots + q_k)$$

o que mostra que a soma de uma quantidade qualquer de números pares é par.
(iii) Já sabemos que a soma de dois números ímpares é par e que a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

Se a quantidade de números ímpares que desejamos somar for par, podemos agrupar esses números em pares e somar os números de cada par. Fazendo isso, obteremos uma soma de números pares, cujo resultado será par.

Se a quantidade de números ímpares que desejamos somar for ímpar, retiramos um desses números e somamos os demais. Como estamos somando uma quantidade par de números ímpares, o argumento do parágrafo anterior garante que a soma será par. Adicionando novamente o número (ímpar) retirado, obtemos uma soma ímpar.
(iv) e (v) De fato, se $m = 2p+1$ e $n = 2q+1$, então

$$m \cdot n = (2p+1)(2q+1) = 2pq+2p+2q+1 = 2(pq+p+q)+1 \text{ é ímpar.}$$

Se um dos números é par, digamos $m = 2p$ e $n = 2q+1$, então

$$m \cdot n = 2p(2q+1) = 2[p(2q+1)] \text{ é par.}$$

Desse modo, concluímos que o produto de uma quantidade qualquer de números ímpares é ímpar e o produto de uma quantidade qualquer de números naturais é par se um desses números for par.
Exemplo: Prove que a equação

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

não admite soluções se a e b são números ímpares.

Solução: Note que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \Longrightarrow \frac{a+b}{ab}=1 \Longrightarrow a+b=ab$$

Como visto em *(iv)* e *(v)* da proposição 3.16, a soma de dois números ímpares é par enquanto o produto de dois números ímpares é ímpar. Logo, a, b não podem ser ambos ímpares.

A definição abaixo foi retirada de Oliveira e Fernández (2012).

Definição 4.4. ***Números Primos e Compostos***

Um inteiro positivo $n \geq 2$ é dito primo se os únicos divisores positivos que ele possui são 1 e ele próprio; caso contrário, é dito composto.

O teorema a seguir foi retirado de Hefez (2022). A demonstração pode ser encontrada na referência.

Teorema 4.2. ***Teorema Fundamental da Aritmética***

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

O teorema a seguir foi retirado de Moreira, Martínez e Saldanha (2021). Lembremos que se $x \in \mathbb{R}$ então $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro positivo menor que x.

Teorema 4.3. ***Teorema de Legendre*** *Seja p um número primo. Então a maior potência de p que divide $n!$ é $p^{E_p(n!)}$ onde*

$$E_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

Observação: Observe que a soma é finita, pois os termos $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ são eventualmente zero quando $p^i > n$ a partir de alguma potência de p^i.

Demonstração: No produto $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, apenas os múltiplos p contribuem com um fator de p. Há $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ tais múltiplos entre 1 e n. Desses, os que são múltiplos de p^2 contribuem com um fator p extra e há $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ tais fatores. Dentre esses últimos, os que são múltiplos de p^3 contribuem com mais um fator p e há $\left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$ destes fatores e assim por diante, resultando na fórmula acima.

A proposição a seguir foi retirada de Figueira (2017). A demonstração da proposição pode ser encontrada na referência.

Proposição 4.12. ***Fórmula de Stirling*** *A aproximação assintótica do fatorial de um número n é dada por*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Proposição 4.13. *Para n suficientemente grande, o logaritmo natural do fatorial de n é dado por*

$$\ln n! = n \cdot \ln n - n.$$

Demonstração: Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros da Fórmula de Stirling, temos

$$\begin{aligned}
\ln n! &\approx \ln \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \\
&= \ln (2\pi n)^{\frac{1}{2}} + \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\ln 2\pi + \ln n) + n \cdot (\ln n - \ln e) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \ln 2\pi + \frac{1}{2} \cdot \ln n + n \cdot \ln n - n \\
&= \frac{1}{2} \cdot \ln 2\pi + \left(\frac{1}{2} + n\right) \cdot \ln n - n.
\end{aligned}$$

De modo que para n suficientemente grande, sem percas significativas, podemos definir que

$$\ln n! = \ln n - n.$$

4.6 Números Binomiais

Os fatos a seguir foram inspirados em Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (2020).

Definição 4.5. *O número de combinações simples de classe k de n objetos é representado por*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Teorema 4.4. *Se x e a são números reais e n é um inteiro positivo, então*

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= \binom{n}{0}a^0x^n + \binom{n}{1}a^1x^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}a^nx^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{n-k}.\end{aligned}$$

Demonstração: Temos que

$$(x+a)^n = (x+a)(x+a)\cdots(x+a).$$

Cada termo do produto é obtido escolhendo-se em cada parêntese um x ou um a e multiplicando-se os escolhidos. Para cada valor de k, $0 \leq k \leq n$, se escolhermos a em k dos parênteses, x será escolhido em $n-k$ dos parênteses e o produto será igual a a^kx^{n-k}. Isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ modos. Então $(x+a)^n$ é uma soma onde há, para cada $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\binom{n}{k}$ parcelas iguais a a^kx^{n-k}, isto é,

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{n-k}.$$

Lema 4.6. *Para $n \in \mathbb{N}$, vale que:*

$$2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

Demonstração: Fazendo $x = a = 1$ na expressão do teorema 3.4:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} \Longrightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

Lema 4.7. *Para $n,k \in \mathbb{N}$ vale que:*

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

Demonstração: Desenvolvendo a partir da definição e multiplicando a expressão por $\frac{n+1}{n+1}$:

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

Fazendo $(n-k)! = (n+1-(k+1))!$, temos:

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

Assim, o lema está provado.

4.7 Congruências Modulares

As definições de Divisibilidade e Congruência Modular juntamente com as suas propriedades e demonstrações foram retiradas de Moreira, Martínez e Saldanha (2021).

Definição 4.6. *Dados dois inteiros d e a, dizemos que d divide a ou que d é um divisor de a ou ainda que a é múltiplo de d e escrevemos $d \mid a$ se existir $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = qd$. Caso contrário, escrevemos $d \nmid a$*

Definição 4.7. *Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a é congruente a b módulo n, e escrevemos*

$$a \equiv b \mod n$$

se $n \mid a - b$, ou seja, se a e b deixam o mesmo resto na divisão por n.

Abaixo, enunciaremos algumas propriedades de congruências modulares.

Proposição 4.14. *Para quaisquer $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$ temos:*

a) $a \equiv a \mod n$;
b) Se $a \equiv b \mod n$, *então* $b \equiv a \mod n$;
c) Se $a \equiv b \mod n$ *e* $b \equiv c \mod n$, *então* $a \equiv c \mod n$;
d) Podemos somar e subtrair "membro a membro": Se $a \equiv b \mod n$ *e* $c \equiv d \mod n$, *então valem* $a + c \equiv b + d \mod n$ *e* $a - c \equiv b - d \mod n$.

Em particular, se $a \equiv b \mod n$, *então* $ka \equiv kb \mod n$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$;
e) Podemos multiplicar "membro a membro": Se $a \equiv b \mod n$ *e* $c \equiv d \mod n$, *então vale* $ac \equiv bd \mod n$.

Em particular, se $a \equiv b \mod n$, *então* $a^k \equiv b^k \mod n$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$;
f) Se $mdc(c, n) = 1$, *então* $ac \equiv bc \mod n \iff a \equiv b \mod n$.

Demonstração:
a) Basta observar que $n \mid a - a = 0$.
b) Se $n \mid a - b$ então $n \mid -(a - b)$. Assim, $n \mid b - a$.
c) Se $n \mid a - b$ e $n \mid b - c$, então $n \mid (a - b) + (b - c)$. Assim, $n \mid a - c$.
d) Se $n \mid a - b$ e $n \mid c - d$, então $n \mid (a - b) + (c - d)$. Assim, $n \mid (a + c) - (b + d)$. Da mesma forma, se $n \mid a - b$ e $n \mid c - d$, então $n \mid (a - b) - (c - d)$. Logo, $n \mid (a - c) - (b - d)$.
e) Se $n \mid a - b$ e $n \mid c - d$, então $n \mid (a - b)c + (c - d)b$. Assim, $n \mid ac - bd$.
f) Como $\text{mdc}(c, n) = 1$ temos que $n \mid ac - bc \iff n \mid (a - b)c$. Logo, $n \mid a - b$.

4.8 Produtos Notáveis

As ideias para os resultados dos produtos notáveis a seguir foram inspirados em Parente e Caminha (2015).

Proposição 4.15. *O quadrado da soma de dois números reais x e y é*

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Demonstração: Utilizando as propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação de números reais, além da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, obte-

mos:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x(x+y)+y(x+y) = x^2+xy+yx+y^2 = x^2+2xy+y^2$$

o que demonstra o resultado.

Proposição 4.16. *O quadrado da diferença de números reais x e y é*

$$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$$

Demonstração: Utilizando as propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação de números reais, além da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, obtemos:

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x(x-y)-y(x-y) = x^2-xy-yx+y^2 = x^2-2xy+y^2$$

o que demonstra o resultado.

Proposição 4.17. *O produto da soma pela diferença de números reais x e y é*

$$(x+y)(x-y) = x^2-y^2$$

Demonstração: Utilizando as propriedades aritméticas usadas anteriormente de números reais, obtemos:

$$(x+y)(x-y) = x(x-y)+y(x-y) = x^2-xy+yx-y^2 = x^2-y^2$$

o que demonstra o resultado.

Proposição 4.18. *O quadrado da soma de três números reais x, y e z é*

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$$

Demonstração: Reescrevendo a expressão $(x+y+z)^2 = ((x+y)+z)^2$ e utilizando duas vezes o quadrado da soma de dois termos, temos:

$$\begin{aligned} ((x+y)+z)^2 &= (x+y)^2+2(x+y)z+z^2 \\ &= x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2 \\ &= x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) \end{aligned}$$

o que prova o resultado.

Proposição 4.19. *O cubo da soma de dois números reais x e y é*

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

Demonstração: Utilizando as propriedades da adição e multiplicação de números reais, além

da fórmula para o quadrado da soma de dois termos, temos

$$\begin{aligned}(x+y)^3=(x+y)(x+y)^2 &= (x+y)(x^2+2xy+y^2)\\ &= x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)\\ &= x^3+2x^2y+xy^2+yx^2+2xy^2+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

O que prova o resultado.

Observação: Também podemos representar o cubo da soma de dois termos por

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

Proposição 4.20. *O cubo da diferença de dois números reais x e y é*

$$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

Demonstração: De forma semelhante a prova da proposição anterior:

$$\begin{aligned}(x-y)^3=(x-y)(x-y)^2 &= (x-y)(x^2-2xy+y^2)\\ &= x(x^2-2xy+y^2)-y(x^2-2xy+y^2)\\ &= x^3-2x^2y+xy^2-x^2y+2xy^2-y^3\\ &= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3\end{aligned}$$

o que prova o resultado.

Observação: Visto que $(x-y)^3=(x+(-y))^3$, segue da proposição 3.24 que

$$(x+(-y))^3=x^2+3x^2(-y)+3x(-y)^2+(-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3.$$

Proposição 4.21. *O cubo da soma de três números reais x, y e z é*

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z)$$

Demonstração: Aplicando a fórmula para o cubo da soma de dois termos duas vezes e utilizando as propriedades usuais das operações aritméticas, obtemos:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= ((x+y)+z)^3\\ &= (x+y)^3+z^3+3(x+y)z((x+y)+z)\\ &= x^3+y^3+3xy(x+y)+z^3+3(x+y)((x+y)z+z^2)\\ &= x^3+y^3+z^3+3(x+y)(xy+xz+yz+z^2)\\ &= x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x(y+z)+z(y+z))\\ &= x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z)\end{aligned}$$

o que prova o resultado.

Proposição 4.22. *A soma de dois cubos de números reais x e y é*

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

Demonstração: Fazendo uso das propriedades que as operações aritméticas com números reais satisfazem, obtemos

$$\begin{aligned}(x+y)(x^2-xy+y^2) &= x(x^2-xy+y^2)+y(x^2-xy+y^2)\\ &= x^3-x^2y+xy^2+yx^2-xy^2+y^3\\ &= x^3+y^3\end{aligned}$$

o que prova o resultado.

Proposição 4.23. *A diferença de dois cubos de números reais x e y é*

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

Demonstração: Fazendo uso das propriedades que as operações aritméticas com números reais satisfazem, obtemos

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x(x^2+xy+y^2)-y(x^2+xy+y^2)\\ &= x^3+x^2y+xy^2-yx^2-xy^2-y^3\\ &= x^3-y^3\end{aligned}$$

o que prova o resultado.
Observação: Como $x^3-y^3=x^3+(-y)^3$, segue da proposição 4.22 que

$$x^3+(-y)^3=(x+(-y))(x^2-x(-y)+(-y)^2=(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

4.9 Médias e Desigualdades

As definições abaixo foram retiradas de Morgado e Carvalho (2023).

Definição 4.8. *A média aritmética da lista de n números reais $x_1,x_2,\ldots,x_n$ é*

$$MA=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Definição 4.9. *A média geométrica dos n números reais positivos $x_1,x_2,\ldots,x_n$ é*

$$MG=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

Definição 4.10. *A média harmônica dos n números reais positivos $x_1,x_2,\ldots,x_n$ é*

$$MH=\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}.$$

Definição 4.11. *A média quadrática dos números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é*

$$MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Os Teoremas abaixo foram retirados de Oliveira e Fernández (2012). As demonstrações destas desigualdades são mais técnicas e trabalhosas e não serão expostas aqui mas podem ser encontradas na referência.

Teorema 4.5 (**A Desigualdade das Médias**). *Para toda coleção de números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se verificam as seguintes desigualdades:*

$$MH \leq MG \leq MA \leq MQ.$$

E a igualdade em cada caso só ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Teorema 4.6 (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**). *Se n é inteiro, $n \geq 2$, e $a_1, a_2, \ldots, a_n$, e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ são números reais, então*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Nos problemas em que usaremos esta desigualdade no próximos capítulo tomaremos $n = 3$, e daí a desigualdade de Cauchy-Schwarz é dada por:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

4.10 Polinômios

Lima (2023) dá a seguinte definição sobre polinômios:

Definição 4.12. *Um polinômio é uma expressão formal do tipo*

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

onde $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é uma lista ordenada de número reais e X é um símbolo (chamado uma indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \ldots \cdot X$ (i fatores, se $i > 0$) e $x^0 = 1$.

Benevides e Caminha (2021) define equação polinomial e raiz de uma equação polinomial como:

Definição 4.13. *Uma equação polinomial ou algébrica no universo dos números reais é toda equação que pode ser reduzida (ou seja, que é equivalente) a uma equação da forma $p(x) = 0$, em que $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais.*

Um número real r é solução desta equação quando satisfaz $p(r) = 0$. Uma solução também é chamada de raiz da equação (ou do polinômio $p(x)$).

De acordo com Hefez e Villela (2022):

Definição 4.14. *Uma equação do segundo grau é do tipo* $ax^2+bx+c=0$ *com coeficiente em* $\mathbb{C}$ *e* $a\neq 0$.

Proposição 4.24. *As raízes* α *de uma equação do segundo grau são dadas por*

$$\alpha=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Demonstração: Iremos deduzir a relação completando quadrados.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Portanto, α é raiz da equação se, e somente se,

$$a\left(\alpha+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=0.$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} a\left(\alpha+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c &\implies \left(\alpha+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \\ &\implies \left(\alpha+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ &\implies \alpha+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\ &\implies \alpha=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &\implies \alpha=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Observação: $\sqrt{b^2-4ac}$ é uma das raízes quadradas do número $\Delta=b^2-4ac$, chamado usualmente de discriminante da equação de segundo grau.

Saber manipular equações de segundo grau é muito útil para se trabalhar com funções quadráticas, que segundo Lima (2023) tem a seguinte definição:

Definição 4.15. *Uma função* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *chama-se quadrática quando existem* $a,b,c\in\mathbb{R}$, *com* $a\neq 0$, *tais que* $f(x)=ax^2+bx+c$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$.

Proposição 4.25. *O valor máximo (mínimo) de uma função de segundo grau se dá no ponto* $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, *quando* $a<0$ $(a>0)$. *Além disso, o valor máximo (mínimo) é dado por* $f(x_0)=-\dfrac{\Delta}{4a}$

Demonstração: Considere o trinômio:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Note que esta última relação exibe a soma de duas parcelas no interior dos parênteses onde apenas a primeira depende de x com a segunda parcela sendo sempre constante. Quando $a>0$, essa soma atinge o menor valor possível para $x_0=-\frac{b}{2a}$. Analogamente, quando $a<0$, esta soma atinge maior valor para $x_0=-\frac{b}{2a}$. Além disso, como $\Delta=b^2-4ac$, segue que:

$$f(x_0)=ax_0^2+bx_0+c=a\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=-\frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto, o valor de máximo ou mínimo da função de segundo grau se dá por $f(x_0)=-\frac{\Delta}{4a}$.

Hefez e Villela (2022) apresenta relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica dada. Essas igualdades são conhecidas como Relações de Girard. A demonstração desta proposição pode ser encontrada na referência citada.

Proposição 4.26. *Se $x_1,x_2,\ldots,x_n$ são raízes do polinômio*

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

então

$$s_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(-1)^j\frac{a_{n-j}}{a_n},\ j=1,\ldots,n$$

onde os polinômios $s_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ seguem os seguintes padrões:

$$\begin{aligned} s_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \sum_j x_j = x_1+\cdots+x_n, \\ s_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \sum_{j_1<j_2} x_{j_1}x_{j_2} = x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n, \\ s_3(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \sum_{j_1<j_2<j_3} x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3} = x_1x_2x_3+x_1x_2x_4\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\ &\vdots \\ s_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \sum_{j_1<\cdots<j_{n-1}} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_{n-1}} = x_1x_2\cdots x_{n-1}+\cdots+x_2x_3\cdots x_n, \\ s_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1x_2\cdots x_n. \end{aligned}$$

5 PROBLEMAS DA SEGUNDA FASE DA OAM

Apresentaremos aqui uma diversidade de problemas da segunda fase da OAM que podem ser comentados com alunos da educação básica interessados em matemática e que desejem melhorar suas habilidades em resolver tais problemas, seja por considerá-los atraentes, pela criatividade dos enunciados ou das ideias auxiliares que são necessárias para a resolução. Os problemas serão expostos em ordem cronológica.

5.1 OAM 2004

Problema 1. Para n positivo inteiro encontrar qual dos dois números $a(n) = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ e $b(n) = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ é divisível por 5.

Solução: Começaremos por lembrar do seguinte fato:

Fato: Um número $m \in \mathbb{Z}$ é divisível por 5 se o seu último algarismo for 0 ou 5.

Por verificação, para $n \geq 1 \in \mathbb{Z}$ temos:

n	$a(n)$	$b(n)$
1	$2^3 - 2^2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$	$2^3 + 2^2 + 1 = 8 + 4 + 1 = 13$
2	$2^5 - 2^3 + 1 = 32 - 8 + 1 = 25$	$2^5 + 2^3 + 1 = 32 + 8 + 1 = 41$
3	$2^7 - 2^4 + 1 = 128 - 16 + 1 = 113$	$2^7 + 2^4 + 1 = 128 + 16 + 1 = 145$
4	$2^9 - 2^5 + 1 = 512 - 32 + 1 = 481$	$2^9 + 2^5 + 1 = 512 + 32 + 1 = 545$
5	$2^{11} - 2^6 + 1 = 2048 - 64 + 1 = 1985$	$2^{11} + 2^6 + 1 = 2048 + 64 + 1 = 2113$
6	$2^{13} - 2^7 + 1 = 8192 - 128 + 1 = 8065$	$2^{13} + 2^7 + 1 = 8192 + 128 + 1 = 8321$
7	$2^{15} - 2^8 + 1 = 32768 - 256 + 1 = 32513$	$2^{15} + 2^8 + 1 = 32768 + 256 + 1 = 33025$
8	$2^{17} - 2^9 + 1 = 524288 - 512 + 1 = 523777$	$2^{17} + 2^9 + 1 = 524288 + 512 + 1 = 524805$

Observe que as entradas em vermelho na tabela não são números cujo último algarismo é 0 ou 5 e portanto não são divisíveis por 5. Mas note há um curioso padrão de divisibilidade por 5 para $a(n)$ e $b(n)$.

Note que para $n = 4q + r$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $r = \{0, 1, 2, 3\}$, os números $a(n), b(n)$ podem ser escritos como:

$$2^{2(4q+r)+1} \pm 2^{4q+r+1} + 1 = 2^{8q+2r+1} \pm 2^{4q+r+1} + 1 = 2^{8q} \cdot 2^{2r+1} \pm 2^{4q} \cdot 2^{r+1} + 1$$

Usaremos os seguintes fatos:

Fato (1): Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}_+$. Então $a \equiv b \mod n$ se $n \mid a - b$.

Fato (2): Se $a \equiv b \mod n$, então $a^k \equiv b^k \mod n$, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$.

Veja que como $2^4 \equiv 1 \mod 5$, então

$$2^4 \equiv 1 \mod 5 \Longrightarrow (2^4)^2 \equiv 2^8 \equiv 1^2 \equiv 1 \mod 5;$$
$$2^4 \equiv 1 \mod 5 \Longrightarrow (2^4)^q \equiv 2^{4q} \equiv 1^q \equiv 1 \mod 5;$$
$$2^8 \equiv 1 \mod 5 \Longrightarrow (2^8)^q \equiv 1^q \equiv 1 \mod 5$$

Desta forma,

$$2^{8q} \cdot 2^{2r+1} \pm 2^{4q} \cdot 2^{r+1} + 1 \equiv 2^{2r+1} \pm 2^{r+1} + 1 \mod 5$$

Agora, vamos analisar os casos com os possíveis valores de r:

Se $r = 0$:

$$2^{2\cdot 0+1} \pm 2^{0+1} + 1 \equiv 2^1 \pm 2^1 + 1 \equiv 2 \pm 2 + 1 \mod 5$$

Então $b(n) \equiv 5 \equiv 0 \mod 5$, ou seja, $b(n)$ é divisível por 5 mas, por outro lado, $a(n) \equiv 1 \mod 5$, logo, $a(n)$ não é divisível por 5.

Se $r = 1$:

$$2^{2\cdot 1+1} \pm 2^{1+1} + 1 \equiv 2^3 \pm 2^2 + 1 \equiv 8 \pm 4 + 1 \mod 5$$

Então $b(n) \equiv 13 \equiv 3 \mod 5$, ou seja, $b(n)$ não é divisível por 5 mas, por outro lado, $a(n) \equiv 5 \equiv 0 \mod 5$, logo, $a(n)$ é divisível por 5.

Se $r = 2$:

$$2^{2\cdot 2+1} \pm 2^{2+1} + 1 \equiv 2^5 \pm 2^3 + 1 \equiv 32 \pm 8 + 1 \mod 5$$

Então $b(n) \equiv 41 \equiv 1 \mod 5$, ou seja, $b(n)$ não é divisível por 5 mas, por outro lado, $a(n) \equiv 25 \equiv 0 \mod 5$, logo, $a(n)$ é divisível por 5.

Se $r = 3$:

$$2^{2\cdot 3+1} \pm 2^{3+1} + 1 \equiv 2^7 \pm 2^4 + 1 \equiv 128 \pm 16 + 1 \mod 5$$

Então $b(n) \equiv 145 \equiv 0 \mod 5$, ou seja, $b(n)$ é divisível por 5 mas, por outro lado, $a(n) \equiv 113 \equiv 3 \mod 5$, logo, $a(n)$ não é divisível por 5.

Desta forma, conclui-se que quando n é da forma $4q$ ou $4q+3$, $b(n)$ é divisível por 5 enquanto $a(n)$ não é; Por outro lado, quando n é da forma $4q+1$ ou $4q+2$, $a(n)$ é divisível por 5 e $b(n)$ não é.

Problema 2. Um número n é *dobrado* se ao escrever seus dígitos ao contrário, obtemos exatamente o dobro de n. Por exemplo, 2004 não é dobrado pois $4002 \neq 2(2004)$. Mostre que não existe números dobrados menores que 1000.

Solução: Claramente $n = 0$ é um número que é menor que 1000, em que é um número dobrado, pois $0 = 2 \cdot 0$. Logo, existe pelo menos um número dobrado menor que 1000.Vamos assumir então que $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$.

Usaremos o seguinte fato para mostrar que não existe número dobrado para números de 1, 2 ou 3 algarismos.

Fato:

A representação decimal do número natural a, escrito como $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, onde cada a_i é um algarismo é $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Números de 1 algarismo: Considerando que a escrita dos dígitos na ordem inversa de um número de 1 algarismo é o próprio número, tais números não são dobrados pois nenhum número positivo é igual ao seu dobro.

Números de 2 algarismos: Seja ab um número de dois algarismos. Logo, $a \neq 0$. Ao o escrever ao contrário temos ba. Para ab ser dobrado devemos ter

$$ba = 2ab \Longrightarrow 10b + a = 2(10a + b) \Longrightarrow 10b + a = 20a + 2b \Longrightarrow 8b = 19a$$

Como $a, b \neq 0$, não existem algarismos a, b que satisfaçam a relação acima visto que 19 é primo e $8b = 19a$ implica que 19 divide b.

Números de 3 algarismos: Seja abc um número de três algarismos. Ao o escrever ao contrário teremos o número cba. Para abc ser dobrado devemos ter $cba = 2abc$. Assim:

$$\begin{aligned} 100c + 10b + a = 2(100a + 10b + c) &\Longrightarrow 100c + 10b + a = 200a + 20b + 2c \\ &\Longrightarrow 98c = 199a + 10b \end{aligned}$$

Note que o valor máximo de $98c$ é quando $c = 9$, ou seja, $98 \cdot 9 = 882$. Portanto, $a < 5$, pois $199 \cdot 5 = 995 > 882$. Além disso,

$$98c = 199a + 10b \Longrightarrow 199a = 98c - 10b.$$

Note que no segundo membro da implicação acima temos uma subtração de números pares que resulta em um número par. Logo, $199a$ deve ser par, ou seja, a é par. Logo, resta analisar os casos onde $a = 2$ ou $a = 4$:

(i) $a = 2$: Devemos ter $c = 1$ ou $c = 6$. Assim, se $c = 1$:

$$199 \cdot 2 = 98 \cdot 1 - 10b \Longrightarrow 398 = 98 - 10b \quad \Longrightarrow 10b = -300 \Longrightarrow b = -30$$

O que não é possível, pois $b > 0$. Mas se $c = 6$:

$$199 \cdot 2 = 98 \cdot 6 - 10b \Longrightarrow 398 = 588 - 10b \quad \Longrightarrow 10b = 190 \Longrightarrow b = 19$$

O que não é possível, pois $b < 10$.

(ii) $a = 4$: Devemos ter $c = 2$ ou $c = 7$. Assim, se $c = 2$:

$$199 \cdot 4 = 98 \cdot 2 - 10b \Longrightarrow 796 = 196 - 10b \Longrightarrow 10b = -600 \Longrightarrow b = -60$$

O que não é possível, pois $b > 0$. Agora, se $c = 7$:

$$199 \cdot 4 = 98 \cdot 7 - 10b \Longrightarrow 796 = 686 - 10b \quad \Longrightarrow 10b = -110 \Longrightarrow b = -11$$

O que não é possível. Logo, não existe $n \geq 1$ número dobrado menor que 1000.

5.2 OAM 2006

Problema 3. Sejam a, b e c números reais positivos tais que:

$$\begin{cases} ab+ac+bc=\dfrac{3}{2} \\ ab(a+b)=c \\ ac(a+c)=b \\ bc(b+c)=a \end{cases}$$

Ache o valor de $\dfrac{a+b+c}{abc}$.

Solução: Utilizaremos as seguintes identidades:

Fato (1): $\boxed{\text{Dados } m,n,p \in \mathbb{R}, \text{ então } (m+n)=(m+n+p-p)}$

Fato (2): $\boxed{\text{Dados } m,n,p \in \mathbb{R}, \text{ então } p(m-n)=pm-pn}$

Podemos manipular as três últimas equações do sistema usando os fatos acima:

$$\begin{cases} ab(a+b)=c \\ ac(a+c)=b \\ bc(b+c)=a \end{cases} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \begin{cases} ab(a+b+c-c)=c \\ ac(a+b+c-b)=b \\ bc(a+b+c-a)=a \end{cases} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \begin{cases} ab(a+b+c)-abc=c, \\ ac(a+b+c)-abc=b, \\ bc(a+b+c)-abc=a. \end{cases}$$

Somando as três equações:

$$\begin{aligned} (ab+ac+bc)(a+b+c)-3abc=a+b+c &\implies \\ (ab+ac+bc)(a+b+c)-(a+b+c)=3abc &\implies \\ (ab+ac+bc-1)(a+b+c)=3abc & \end{aligned}$$

Como $ab+ac+bc=\dfrac{3}{2}$, temos:

$$\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot(a+b+c)=3abc \Longrightarrow \frac{1}{2}\cdot(a+b+c)=3abc \Longrightarrow \frac{a+b+c}{abc}=6.$$

Problema 4. Encontre a maior potência de 3 que divide o número

$$N=\frac{(3\cdot 2006)!}{2006!}$$

Lembre-se de que $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$.

Solução: Esta questão é uma ótima oportunidade de se abordar no ensino básico o Teorema de Legendre, que permite encontrar a fatoração de um fatorial.

Fato (1): **Teorema de Legendre:** Denotamos de E_p a quantidade de fatores primos p que dividem $n!$, $n \in \mathbb{Z}$, onde E_p é dado por

$$E_p = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

Utilizando o Teorema de Legendre para encontrar o expoente da potência de 3 que aparece na decomposição de $(3 \cdot 2006)! = 6018!$ e $2006!$:

$$\begin{aligned} E_3(6018!) &= \left\lfloor \frac{6018}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{3^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{3^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{3^6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{3^7} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{6018}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{243} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{729} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6018}{2187} \right\rfloor \\ &= 2006 + 668 + 222 + 74 + 24 + 8 + 2 \\ &= 3004 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} E_3(2006!) &= \left\lfloor \frac{2006}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{3^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{3^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{3^6} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{2006}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{243} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{729} \right\rfloor \\ &= 668 + 222 + 74 + 24 + 8 + 2 \\ &= 998 \end{aligned}$$

Assim, N tem como fator $\dfrac{3^{3004}}{3^{998}} = 3^{2006}$ e, portanto, esta é a maior potência de 3 que o divide.

5.3 OAM 2007

Problema 5. Ache a soma de todos os valores de n (inteiro positivo), tais que $N = 2^8 + 2^{11} + 2^n$ é um quadrado perfeito.

Solução: Usaremos os seguintes fatos:

Fato (1): Dados, $a, m \in \mathbb{Z}$ tais que $a = m^2$. Dizemos que a é um quadrado perfeito.

Fato (2): Dados $x, y \in \mathbb{R}$ então $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Podemos reescrever a expressão como $N = (2^4)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + 2^n$. Logo, para N ser um quadrado perfeito, por (2), basta fazermos $2^n = (2^6)^2$, ou seja, $2^n = 2^{12}$. Logo, $n = 12$ é um valor inteiro positivo que satisfaz a relação. Porém, precisamos verificar se existe outros valores de n que também satisfazem a relação.

Para isso, note que podemos reescrever N como

$$N = 2^8 \cdot (1 + 2^3) + 2^n = 2^8 \cdot 9 + 2^n = 2^8 \cdot 3^2 + 2^n = (2^4 \cdot 3)^2 + 2^n$$

Seja N um quadrado perfeito, então por (1), $N = m^2, m \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$(2^4 \cdot 3)^2 + 2^n = m^2 \Longrightarrow 2^n = m^2 - (2^4 \cdot 3)^2 \Longrightarrow 2^n = (m + 2^4 \cdot 3)(m - 2^4 \cdot 3)$$

Note que o produto $(m+2^4 \cdot 3)(m-2^4 \cdot 3)$ deve resultar em uma potência de 2. Façamos então, $2^a = m + 2^4 \cdot 3$ e $2^b = m - 2^4 \cdot 3$. Subtraindo estas igualdades,

$$2^a - 2^b = (m + 2^4 \cdot 3) - (m - 2^4 \cdot 3) = 2 \cdot 2^4 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3$$

Colocando 2^b em evidência no membro da esquerda, temos

$$2^b(2^{a-b} - 1) = 2^5 \cdot 3$$

Comparando os membros da igualdade, verifica-se que $b = 5$ e desta forma

$$2^{a-5} - 1 = 3 \Longrightarrow 2^{a-5} = 4 \Longrightarrow 2^{a-5} = 2^2 \Longrightarrow a = 7$$

Como $2^n = 2^a \cdot 2^b$ substituindo os resultados encontrados para a, b temos $2^n = 2^7 \cdot 2^5 = 2^{12}$. Logo, $n = 12$. Portanto, o único valor de n para que N seja um quadrado perfeito é 12.

Problema 6. Sejam a, b, c, x, y e z números reais tais que

$$a^4 + b^4 + c^4 = x^4 + y^4 + z^4 = 1$$

Prove que $ax + by + cz \leq \sqrt{3}$.

Solução:

Fato (1):

Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

Dados $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Fato (2):

Desigualdade das Médias Quadrática e Aritmética:

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, tem-se: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \dfrac{a+b+c}{3}$

Utilizando **Fato** (1) para os de números reais positivos $a^2, b^2, c^2, x^2, y^2, z^2$ temos que:

$$\begin{aligned}
((ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2)^2 &\leq ((a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2)((x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2) &\Longrightarrow \\
((ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2)^2 &\leq (a^4 + b^4 + c^4)(x^4 + y^4 + z^4) &\Longrightarrow \\
((ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2)^2 &\leq 1 \cdot 1 &\Longrightarrow \\
((ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2)^2 &\leq 1 &\Longrightarrow \\
(ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2 &\leq 1 &\Longrightarrow \\
\frac{(ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2}{3} &\leq \frac{1}{3} \text{ (I)}
\end{aligned}$$

Agora, aplicando **Fato** (2) para os números reais positivos ax, by e cz, obtemos:

$$\sqrt{\frac{(ax)^2+(by)^2+(cz)^2}{3}} \geq \frac{ax+by+cz}{3} \qquad \Longrightarrow$$
$$\frac{(ax)^2+(by)^2+(cz)^2}{3} \geq \frac{(ax+by+cz)^2}{9} \text{ (II)}$$

Pelo resultado obtido em (I) e (II), por transitividade, temos que:

$$\frac{1}{3} \geq \frac{(ax)^2+(by)^2+(cz)^2}{3} \geq \frac{(ax+by+cz)^2}{9} \Longrightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{(ax+by+cz)^2}{9}$$
$$\Longrightarrow 3 \geq (ax+by+cz)^2$$
$$\Longrightarrow \sqrt{3} \geq (ax+by+cz).$$

O que prova a relação pedida.

5.4 OAM 2008

Problema 7. Um aluno digita o número "1000!"numa calculadora e aperta a tecla raiz quadrada, 30 vezes. Qual a parte inteira do número encontrado?

Solução:

Fato (1): Dados $a \in \mathbb{Q}$ e $m,n,p \in \mathbb{N}$ com $n \cdot p \geq 2$. Então $\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

A expressão que representa o que queremos calcular é

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{1000!}}}} = \sqrt[2^{30}]{1000!}$$

Note que $1000! = 1000\cdot 999\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1 < \underbrace{1000\cdot 1000\cdot \ldots \cdot 1000}_{1000 \text{ vezes}} = 1000^{1000}$. Então segue as desigualdades obtidas através do **Fato** (1):

$$\sqrt[2^{30}]{1000!} < \sqrt[2^{30}]{1000^{1000}} < \sqrt[2^{30}]{1000^{1024}} = \sqrt[2^{20}\cdot 2^{10}]{1000^{2^{10}}} = \sqrt[2^{20}]{1000}.$$

Da mesma forma,

$$\sqrt[2^{20}]{1000} < \sqrt[2^{20}]{1024} = \sqrt[2^{19}\cdot 2]{32^2} = \sqrt[2^{19}]{32} < \sqrt[2^{19}]{36} = \sqrt[2^{18}\cdot 2]{6^2} = \sqrt[2^{18}]{6}.$$

Por fim,

$$\sqrt[2^{18}]{6} < \sqrt[2^{18}]{9} = \sqrt[2^{17}\cdot 2]{3^2} = \sqrt[2^{17}]{3} < \sqrt[2^{17}]{4} < \sqrt{4} = 2.$$

Por outro lado, $\sqrt[2^{30}]{1000!} > \sqrt[2^{30}]{1} = 1$. Logo, $1 < \sqrt[2^{30}]{1000!} < 2$. Portanto, a parte inteira de $\sqrt[2^{30}]{1000!}$ é igual a 1.

Solução Alternativa:

Fato (1):

Teorema de Legendre: Denotamos de E_p a quantidade de fatores primos p que dividem $n!$, $n \in \mathbb{Z}$, onde E_p é dado por

$$E_p = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

A expressão que representa o que queremos calcular é $\sqrt[2^{30}]{1000!}$. Para isso, vamos determinar o expoente do fator 2 em 1000! através do **Fato** (1). Veja que $E_2(1000!)$ é dado por

$$\left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2^6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2^7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2^8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2^9} \right\rfloor$$

desenvolvendo as potências,

$$\left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{64} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{128} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{256} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{512} \right\rfloor$$

ou seja, $E_2(1000!) = 500+250+125+62+31+15+7+3+1 = 994$. Portanto, 2^{994} é um dos fatores de 1000! e é o fator de maior expoente. Porém, $994 < 1024 = 2^{10} < 2^{30}$, e assim, nenhum fator 2 será extraído da raiz. Logo, não haverá nenhuma extração da raiz. Note também que $\sqrt[2^{30}]{1000!} > \sqrt[2^{30}]{1} = 1$ e portanto, a parte inteira do número encontrado será 1.

Comentário: Nesta questão, pode-se trabalhar noções de infinito intuitivamente com os alunos da educação básica. O resultado que a questão busca é um número que multiplicado por ele mesmo 2^{30} vezes resulta em 1000!. Generalizando o problema, definindo-se a função $f(x) = \sqrt{x}$, note que o que a questão pede é que seja realizado a composição da função f com ela mesma uma quantidade n de vezes, ou seja,

$$\underbrace{(f \circ f \circ f \cdots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{x}}}} = \sqrt[2^n]{x}.$$

Usaremos o seguinte fato: Dado a sequência $x_{2^n} = \sqrt[2^n]{a} = a^{\frac{1}{2^n}}$, se $a > 1$, temos que a sequência x_{2^n} é decrescente e limitada. Logo, se fizermos 2^n se tornar muito grande a sequência x_{2^n} ficará muito próximo de 1.

Solução Alternativa: Computacionalmente, podemos utilizar a fórmula de Stirling da seguinte maneira: Calcular a raiz de índice k de um número N é a mesma coisa de verificar quantas k vezes devemos multiplicar um número x por ele mesmo até resultar em N. Equacionando, temos $x^k = N$. Seja então $N = n!$. Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros:

$$\ln x^k = \ln n!.$$

Dado n grande, a fórmula de Stirling nos dá uma aproximação para $\ln n!$ como

$$\ln n! = n \cdot \ln n - n.$$

Assim, podemos reescrever a equação anterior como

$$\ln x^k = n \cdot \ln n - n.$$

Desenvolvendo a equação anterior aplicando as devidas propriedades de logaritmos, obtemos

$$k \cdot \ln x = n \cdot \ln n - n \Longrightarrow \ln x = \frac{n \cdot \ln n - n}{k} \Longrightarrow e^{\ln x} = e^{\frac{n \cdot \ln n - n}{k}} \Longrightarrow x = e^{\frac{n \cdot \ln n - n}{k}}.$$

Aplicando para ao problema aqui trabalhado, temos $n = 1000$ e $k = 2^{30}$

$$x = e^{\frac{1000 \cdot \ln 1000 - 1000}{2^{30}}}.$$

Utilizando uma calculadora, facilmente obtemos

$$x = 1.000005502040992791851742921315584069061 44\ldots$$

que é a aproximação decimal para a raiz pedida. Desta forma, a parte inteira é igual a 1.

5.5 OAM 2009

Problema 8. Sejam a e b dígitos. Quantos números da forma $30a0b03$ são divisíveis por 13?

Solução:

Fato (1):

Uma condição necessária e suficiente para que o número $a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ seja divisível por 13 é que

$$a_2 a_1 a_0 - a_5 a_4 a_3 + a_8 a_7 a_6 - a_{11} a_{10} a_9 + \cdots$$

seja divisível por 13, onde a_i representam os dígitos do número a.

Para o número ser divisível por 13, basta que $b03 - a0 + 3$ seja divisível por 13. Note que

$$\begin{aligned} b03 - a0 + 3 &= 100b + 3 - 10a + 3 \\ &= 100b - 10a + 6 \\ &= 91b - 13a + 9b + 3a + 6 \\ &= 13(7b + a) + 3(3b + a + 2) \end{aligned}$$

Sabendo que a e b são dígitos, o maior valor que a, b podem assumir é 9. Assim, o maior valor que $3b + a + 2$ pode assumir é 38. Portanto, precisamos encontrar os valores de a e b para termos $3b + a + 2$ igual a 13 ou 26. Isso ocorre nos casos:

$b = 1$ e $a = 8$	$b = 2$ e $a = 5$	$b = 3$ e $a = 2$
$b = 5$ e $a = 9$	$b = 6$ e $a = 6$	$b = 7$ e $a = 3$
	$b = 8$ e $a = 0$	

Portanto, há 7 números na forma $30a0b03$ que são divisíveis por 13.

Problema 9. O Polinômio $p(x) = x^{2009} + a_{2007}x^{2007} + a_{2006}x^{2006} + \ldots + a_1x$ tem 2009 raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2009}$, as quais estão em progressão aritmética de razão 1. Calcule o valor de

$$m = \frac{|\ \alpha_1\ | + |\ \alpha_2\ | + ... + |\ \alpha_{2009}\ |}{1004}$$

Solução:

Fato (1): Seja $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio de grau n. A soma S de todas as raízes deste polinômio é dada por

$$S = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

onde a_n e a_{n-1} são os coeficientes dos termos de grau n e $n-1$, respectivamente.

Fato (2): A soma S dos termos de uma progressão aritmética é dada por

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Podemos reescrever o polinômio como

$$p(x) = 1 \cdot x^{2009} + 0 \cdot x^{2008} + a_{2007}x^{2007} + a_{2006}x^{2006} + ... + a_1x$$

Pelo **Fato** (1), a soma S de todas as raízes deste polinômio é

$$S = \frac{-a_{n-1}}{a_n} = \frac{-0}{1} = 0 \Longrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{2009} = 0$$

Seja α_1 a menor das raízes e α_{2009} a maior das raízes. Como as raízes α_1, α_2, ..., α_{2009}, estão em progressão aritmética de razão 1, então segue que $\alpha_{2009} = \alpha_1 + 2008$. Como a soma destas raízes é 0, então:

$$\frac{(\alpha_1 + \alpha_1 + 2008) \cdot 2009}{2} = 0 \Longrightarrow 2\alpha_1 + 2008 = 0 \Longrightarrow 2\alpha_1 = -2008 \Longrightarrow \alpha_1 = -1004.$$

Desta forma, as raízes do polinômio são $-1004, -1003, \ldots, 0, \ldots, 1003, 1004$.
Portanto,

$$\begin{aligned} m &= \frac{|\ -1004\ | + |\ -1003\ | + \ldots + |\ 1003\ | + |\ 1004\ |}{1004} \\ &= \frac{2(1004 + 1003 + 1002 + \ldots + 1)}{1004} \\ &= \frac{2 \cdot \dfrac{1005 \cdot 1004}{2}}{1004} \\ &= \frac{1005 \cdot 1004}{1004} \\ &= 1005 \end{aligned}$$

Logo, o valor de m é 1005.

5.6 OAM 2010

Problema 10. Considere o polinômio $p(x) = x(1+x)^n = a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n+1}x^{n+1}$. Sendo

$$S_n = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + ... + \frac{a_{n+1}}{n+1},$$

Qual o valor de $n \in \mathbb{N}$ que satisfaz $S_n = \dfrac{1023}{n+1}$?

Solução: Vamos separar em casos para tentar verificar algum padrão na sequência S_n. Para $n = 0$, temos que $p(x)$ é

$$x(1+x)^0 = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1} \Longrightarrow x = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1}.$$

Comparando os coeficientes, temos que $a_1 = 1$ e $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1} = 0$. Portanto,

$$S_0 = \frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \ldots + \frac{0}{n+1} = 1.$$

Para $n = 1$, temos

$$x(1+x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1} \Longrightarrow x + x^2 = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1}.$$

Comparando os coeficientes, $a_1 = a_2 = 1$ e $a_3 = a_4 = \ldots = a_{n+1} = 0$. Portanto,

$$S_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0}{3} + \ldots + \frac{0}{n+1} = \frac{3}{2}.$$

Para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} x(1+x)^2 = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1} &\Longrightarrow \\ x(1+2x+x^2) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1} &\Longrightarrow \\ x + 2x^2 + x^3 = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1}. & \end{aligned}$$

Assim, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1$ e $a_4 = \ldots = a_{n+1} = 0$. Portanto,

$$S_2 = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0}{4} + \ldots + \frac{0}{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Para $n = 3$, temos

$$\begin{aligned} x(1+x)^3 = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1} &\Longrightarrow \\ x(1+3x+3x^2+x^3) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1} &\Longrightarrow \\ x + 3x^2 + 3x^3 + x^4 = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1}. & \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes, temos que $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 3, a_4 = 1$ e $a_5 = \ldots = a_{n+1} = 0$. Portanto,

$$S_3 = \frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0}{5} + \ldots + \frac{0}{n+1} = 1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{0}{5} = \frac{15}{4}.$$

Para $n = 4$, temos

$$\begin{aligned} x(1+x)^4 = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1} &\implies \\ x(1+4x+6x^2+4^3+x^4) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1} &\implies \\ x+4x^2+6x^3+4x^4+x^5 = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1}. & \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes, $a_1 = a_5 = 1$, $a_2 = a_4 = 4$, $a_3 = 6$ e $a_6 = \ldots = a_{n+1} = 0$. Portanto,

$$S_4 = \frac{1}{1} + \frac{4}{2} + \frac{6}{3} + \frac{4}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0}{6} + \ldots + \frac{0}{n+1} = 1+2+2+1+\frac{1}{5} = \frac{31}{5}.$$

Note que na sequência das somas obtidas $\left(\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \frac{15}{4}, \frac{31}{5}, \cdots\right)$, os numeradores são as potências de 2 subtraídas de 1 unidade enquanto os denominadores formam a sequência dos números naturais. Então estas somas são dadas por

$$S_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1},\ n \geq 0.$$

Desta forma,

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \frac{1023}{n+1} \Longrightarrow 2^{n+1}-1 = 1023 \implies 2^{n+1} = 1024 \Longrightarrow 2^{n+1} = 2^{10}.$$

Portanto, $n+1 = 10 \Longrightarrow n = 9$.

Comentário: A expressão fechada de S_n foi obtida por observação mas não foi de fato provada. Vamos fazer isso. Desenvolvendo $p(x)$ através do binômio de Newton, temos que

$$\begin{aligned} x(1+x)^n &= x\left[\binom{n}{0}1^n x^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}x^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}1^0 x^n\right] \\ &= \binom{n}{0}x^1 + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Note que $a_n = \binom{n}{n-1}$. Dessa forma, a soma S_n é:

$$S_n = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{n+1} = \binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Utilizando o Lema 3.7:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1}\binom{n+1}{k}.$$

Este último somatório é equivalente a:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k}\right) - \binom{n+1}{0}\right].$$

Por fim, utilizando o lema 3.6 e o fato de que $\binom{n+1}{0} = 1$, concluí-se que

$$S_n = \frac{1}{n+1}[2^{n+1} - 1] = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

5.7 OAM 2015

Problema 11. Sabendo que x e y são números reais tal que $x^2 + 4y^2 = 102$, calcule o maior natural mais próximo do maior valor possível de xy^2.

Solução:

Fato (1): **Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica:**
Dados $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$

Utilizando (1) para os números reais positivos x^2, $2y^2$ e $2y^2$, temos:

$$\frac{x^2 + 2y^2 + 2y^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot 2y^2 \cdot 2y^2} \Longrightarrow \frac{x^2 + 4y^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot 4y^4}$$

Utilizando a relação dada no enunciado e elevando ambos os membros ao cubo:

$$\left(\frac{102}{3}\right)^3 \geq x^2 \cdot 4y^4 \Longrightarrow 34^3 \geq x^2 \cdot 4y^4 \Longrightarrow 34^2 \cdot 34 \geq x^2 \cdot 4y^4$$

Extraindo-se a raiz quadrada em ambos os lados:

$$34\sqrt{34} \geq 2x \cdot y^2 \Longrightarrow 17\sqrt{34} \geq x \cdot y^2$$

Como $\sqrt{34} \approx 5,83$ segue que $99,12 \geq x \cdot y^2$.
Portanto, o maior natural mais próximo do maior valor possível de xy^2 é 99.

Problema 12. Sabe-se que p, q são dois dos menores números primos tais que $pq + y^2 = x^6$ tem solução natural. Qual é o valor de y^x?

Solução:

Fato (1) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ então $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

Fato (2) Dados $p, q \in \mathbb{Z}$ números de mesma paridade então $p+q$ é par.

A equação é equivalente a

$$pq = x^6 - y^2 = (x^3)^2 - y^2 = (x^3 + y)(x^3 - y)$$

Fazendo $p = x^3 + y$ e $q = x^3 - y$, podemos formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^3 + y = p \\ x^3 - y = q \end{cases}$$

Somando as equações obtemos $2x^3 = p + q$ $(*)$. Portanto, como p, q são números primos distintos, para que $p+q$ ser par, p, q devem ser ímpares. Testando os menores pares de primos (p,q)

distintos ((5,3), (7,3), (7,5), (11,5),...) vemos que os primeiros pares que são solução natural de $(*)$ são (13, 3) e (11,5).

Separando os dois casos, começando pelo par (13, 3), temos $p = 13$ e $q = 3$. Assim,

$$2x^3 = 13+3 \Longrightarrow x = 2 \text{ e daí, } 2^3 + y = 13 \Longrightarrow y = 5$$

Desta forma, $y^x = 5^2 = 25$.

Analisando o segundo par (11, 5) temos, $p = 11$ e $q = 5$ e assim:

$$2x^3 = 11+5 \Longrightarrow x = 2 \text{ e daí, } 2^3 + y = 11 \Longrightarrow y = 3$$

Desta forma, $y^x = 3^2 = 9$.

Problema: Como identificar qual é o menor par de primos entre elas? É o par que possui o menor número? Se sim, este par tem também um número que é maior que os números do outro par. Se o critério para determinar o menor par é a soma dos números, ambos os pares possui soma 16. Assim, não há como saber quais entre (13,3) e (11,5) são os dois menores números primos que satisfazem o enunciado e portanto o problema possui duas soluções diferentes para y^x.

5.8 OAM 2019

Problema 13. Denotamos por $n!$ o produto dos inteiros positivos de 1 a n. Por exemplo $1! = 1$, e $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. Sabendo que $20! = 2432902008176ab0000$, determine $a \times b$.

Solução: Nesta solução, usaremos o seguinte:

Fato (1): **Teorema de Legendre:** Denotamos de $E_p(n!)$ a quantidade de fatores primos p que dividem $n!$, $n \in \mathbb{Z}$, onde $E_p(n!)$ é dado por

$$E_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

Fato (2): Dados dois inteiros d e a, dizemos que d divide a se existir um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = qd$.

Fato (3): Para um número ser divisível por 9 basta que a soma de seus algarismos seja um número múltiplo de 9.

Fato (4): Para um número ser divisível por 8 basta que os três últimos dígitos deste número formem um número múltiplo de 8.

Vamos decompor 20! em fatores primos. Utilizando o **Fato** (1), temos

$$E_2(20!) = \left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^4} \right\rfloor = 10+5+2+1 = 18;$$

$$E_3(20!) = \left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{3^2} \right\rfloor = 6+2 = 8;$$

$$E_5(20!) = \left\lfloor \frac{20}{5} \right\rfloor = 4;\ E_7(20!) = \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor = 2;\ E_{11}(20!) = \left\lfloor \frac{20}{11} \right\rfloor = 1;$$
$$E_{13}(20!) = \left\lfloor \frac{20}{13} \right\rfloor = 1;\ E_{17}(20!) = \left\lfloor \frac{20}{17} \right\rfloor = 1;\ E_{19}(20!) = \left\lfloor \frac{20}{19} \right\rfloor = 1.$$

Assim,

$$20! = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$$

Como $2^4 \times 5^4 = 10000$ são fatores de 20!, por (2) temos que

$$\frac{20!}{10000} = \frac{20!}{2^4 \times 5^4} = 2^{14} \times 3^8 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 = 2432902008176ab$$

Este número tem $2^3 = 8$ e $3^2 = 9$ como fatores e assim, são divisíveis por 8 e por 9. Por (3), nota-se que a soma dos algarismos do número $a+b+44$ deve ser divisível por 9. Desta forma, para $a+b+44$ ser múltiplo de 9, devemos ter $a+b=1$ (e como a e b são dígitos, as únicas possibilidades para ab são 01 ou 10) ou $a+b=10$. Por outro lado, por (4), devemos ter o número $6ab$ divisível por 8. Como números terminados em 01 ou 10 não são divisíveis por 8, resta analisar o caso $a+b=10$. De todos os pares possíveis, o único número que se adequa as duas condições é 64. Conclui-se então que $a=6$ e $b=4$ e assim $a \times b = 24$.

Solução Alternativa:

Fato:

Uma condição necessária e suficiente para que o número $a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ seja divisível por 7 (resp. 11, 13) é que

$$a_2 a_1 a_0 - a_5 a_4 a_3 + a_8 a_7 a_6 - a_{11} a_{10} a_9 + \cdots$$

seja divisível por 7 (resp. 11. 13), onde a_i representam os dígitos do número a.

Consideremos o número $2432902008176ab$ encontrado na solução anterior. Nota-se que este número tem como fatores 7, 11 e 13. Portanto, ele é divisível por $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Utilizando o critério de divisibilidade dos três números, devemos ter para algum $k \in \mathbb{Z}$

$$6ab - 817 + 200 - 290 + 243 = 1001k \Longrightarrow 6ab - 664 = 1001k$$

Como a e b são dígitos a única possibilidade é que $6ab = 664$ e desta forma, $a=6$ e $b=4$. Portanto, $a \times b = 6 \times 4 = 24$.

Problema 14. Ache o menor valor de $E(x) = x^3(x^3+1)(x^3+2)(x^3+3)+2020$, onde x varia no conjunto dos números reais.

Solução: Usaremos os seguintes fatos:

Fato (1) Dados $m,n,p \in \mathbb{R}$, então $(m+n) = (m+n+p-p)$

Fato (2) Dados $x,y \in \mathbb{R}$ então $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

Fato (3) Dados $x,y \in \mathbb{R}$ então $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Fato (4) Dados $x,y \in \mathbb{R}$ então $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Seja $P(x) = x^3(x^3+1)(x^3+2)(x^3+3)$. Fazendo a substituição $y = x^3$ e somando e subtraindo 1 de cada termo do produto temos então que:

$$\begin{aligned} Q(y) = y(y+1)(y+2)(y+3) &= (y+1-1)(y+2-1)(y+1+1)(y+2+1) \\ &= ((y+1)^2-1)((y+2)^2-1). \end{aligned}$$

Note que $1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$ e $2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$. Substituindo essas igualdades no produto acima, temos

$$Q(y) = \left(\left(y+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right)\left(\left(y+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right).$$

Fazendo uma nova substituição $z = y + \frac{3}{2}$ e desenvolvendo os produtos internos, obtemos

$$\begin{aligned} S(z) = \left(\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right)\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) &= \left(z^2 - z + \frac{1}{4} - 1\right)\left(z^2 + z + \frac{1}{4} - 1\right) \\ &= \left(z^2 - \frac{3}{4} - z\right)\left(z^2 - \frac{3}{4} + z\right) \\ &= \left(z^2 - \frac{3}{4}\right)^2 - z^2 \\ &= z^4 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{9}{16} - z^2 \\ &= z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Reescrevendo $\frac{9}{16} = \frac{25}{16} - \frac{16}{16}$, temos

$$z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{25}{16} - \frac{16}{16} = \left(z^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1$$

Veja que como $\left(z^2 - \frac{5}{4}\right)^2 \geq 0$, o menor valor que $P(x)$ pode assumir é -1. Portanto, o menor valor que $E(x) = P(x) + 2020$ pode assumir é $-1 + 2020 = 2019$.

Solução Alternativa:

Fato (1) : A média aritmética entre quatro números reais a, b, c, d é dada por $\frac{a+b+c+d}{4}$

Fato (2): Dados $x, y \in \mathbb{R}$ então $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

Seja A a média aritmética entre os números x^3, $(x+1)^3$, $(x+2)^3$ e $(x+3)^3$, ou seja,

$$A = \frac{x^3 + (x^3+1) + (x^3+2) + (x^3+3)}{4} = \frac{4x^3+6}{4} = x^3 + \frac{3}{2}$$

Podemos reescrever a relação acima como

$$x^3 = A - \frac{3}{2}$$

Substituindo esta relação em $P(x) = x^3(x^3+1)(x^3+2)(x^3+3)$ obtemos o polinômio $R(A)$ tal que

$$\begin{aligned} R(A) &= \left(A-\frac{3}{2}\right)\left(A-\frac{3}{2}+1\right)\left(A-\frac{3}{2}+2\right)\left(A-\frac{3}{2}+3\right) \\ &= \left(A-\frac{3}{2}\right)\left(A-\frac{1}{2}\right)\left(A+\frac{1}{2}\right)\left(A+\frac{3}{2}\right) \\ &= \left(A^2-\frac{1}{4}\right)\left(A^2-\frac{9}{4}\right) \end{aligned}$$

Seja então B a média aritmética entre $\left(A^2-\frac{1}{4}\right)$ e $\left(A^2-\frac{9}{4}\right)$, ou seja,

$$B = \frac{\left(A^2-\frac{1}{4}\right)+\left(A^2-\frac{9}{4}\right)}{2} = \frac{2A^2-\frac{10}{4}}{2} = A^2-\frac{5}{4}$$

Podemos reescrever a equação acima como $A^2 = B+\frac{5}{4}$. Usando a igualdade a acima em $R(A)$ temos o polinômio $Q(B)$ tal que

$$Q(B) = \left(B+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(B+\frac{5}{4}-\frac{9}{4}\right) = (B+1)(B-1) = B^2-1$$

Note que como $B^2 \geq 0$, o menor valor que $Q(B)$ pode assumir é -1. Portanto, o menor valor possível para $E(x) = Q(B)+2020$ é 2019.

Problema 15. Um numero é dito **rafoso** se ele é múltiplo de 3 e é formado por dois números consecutivos em ordem decrescente. Por exemplo: 2019 é rafoso pois $2019 = 3 \times 673$ e é formado pelos números consecutivos 20 e 19. Determine a quantidade de números rafosos de 4 dígitos.

Solução:

Fato (1): Para um número n inteiro positivo ser múltiplo de 3 basta que a soma de seus algarismos seja um número múltiplo de 3.

Fato (2): O termo geral de uma progressão aritmética é dado por $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$

Note que o menor número de 4 dígitos formado por dois números consecutivos em ordem decrescente é 1110 e o maior é 9998. Assim, os números rafosos são $(1110, 1413, 1716, \ldots, 9897)$. Veja que essa sequência forma uma P.A. de razão 303. Assim, para determinar a quantidade de números rafosos de 4 dígitos basta calcular o número de termos desta P.A.. Portanto, por (2):

$$9897 = 1110 + (n-1)\cdot 303 \Longrightarrow (n-1)\cdot 303 = 9897 - 1110 \Longrightarrow (n-1)\cdot 303 = 8787.$$

Assim,

$$n-1 = \frac{8787}{303} \Longrightarrow n-1 = 29 \Longrightarrow n = 30$$

Portanto, existem 30 números rafosos de 4 dígitos.

Problema 16. Chamamos de **resenheiro** todo número que possui um múltiplo cuja as 4 primeiras casas decimais são 2019. Por exemplo, 3 é resenheiro, pois $20193 = 6731 \times 3$. Mostre que todo inteiro positivo é resenheiro.

Solução: Um número resenheiro é da forma $2019a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0$. Podemos reescreve-lo na forma

$$2019\underbrace{00\cdots0}_{k \text{ zeros}}+a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0 = 2019\cdot 10^k + a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0$$

Fazendo $t = a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0$, tomando $N = 2019\cdot 10^k + t$, com $10^k \geq n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Seja r o resto da divisão de $2019\cdot 10^k$ por n. Desta forma temos que $0 \leq r \leq n-1$ e portanto, somando $-n$ a desigualdade temos $-n \leq r-n \leq -1$. Invertendo a desigualdade, temos $1 \leq n-r \leq n$. Como $n \leq 10^k$, então vale que $1 \leq n-r \leq n \leq 10^k$. Assim, o número $2019\cdot 10^k + (n-r)$ tem sua representação decimal iniciada por 2019.

Como $2019\cdot 10^k = n\cdot c + r$ para $c \in \mathbb{Z}$, então adicionando $n-r$ em ambos os membros, segue que

$$2019\cdot 10^k + (n-r) = n\cdot c + r + (n-r) = n\cdot(c+1)$$

é múltiplo de n, e assim, n é resenheiro.

5.9 OAM 2021

Problema 17. Para quantos valores inteiros de $1 \leq a \leq 10$ temos que a equação $x^2+ax+1 = a$ tem pelo menos uma solução inteira?

Solução: Usaremos os seguintes fatos:

Fato (1): O discriminante da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é $\Delta = b^2 - 4ac$.

Fato (2): As soluções de equação de segundo grau $ax^2+bx+c=0$ são dados por $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Veja que a equação que queremos resolver é equivalente a $x^2+ax+1-a=0$ que pelo **Fato** (1) possui discriminante

$$\Delta = a^2 - 4\cdot 1\cdot(1-a) = a^2+4a-4 = a(a+4)-4$$

Assim, por (2):

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a(a+4)-4}}{2} \quad (*)$$

Analisando $\sqrt{a(a+4)-4}$ para os valores $1 \leq a \leq 10$ um a um, verificamos que só teremos raiz inteira para $a = 1$ e assim, as raízes serão $x = 0$ e $x = -1$. Portanto, a equação só terá solução inteira para $a = 1$.

Comentário: Como o problema restringe os valores de a entre 1 e 10, a verificação um a um é razoável. Mas, e se não houvesse restrição para os valores de a? Nesse caso, podemos resolver o problema usando os seguintes fatos:

Fato (1) $\boxed{\text{Dados } m,n,p \in \mathbb{Z}_+, \text{ então } (m+n) = (m+n+p-p)}$

Fato (2) $\boxed{\text{Dados } m,n \in \mathbb{Z}_+, \text{ então } m^2-n^2 = (m+n)(m-n)}$

Primeiramente, note que o discriminante Δ de $(*)$ pode ser reescrito como

$$\Delta = a^2+4a-4 \overset{(1)}{=} a^2+4a+4-4-4 \overset{(2)}{=} (a+2)^2-8$$

e assim, para que a equação tenha solução inteira, ele deve ser um quadrado perfeito, isto é, $(a+2)^2-8 = b^2$ para algum $b \in \mathbb{Z}_+$. Assim, obtemos:

$$(a+2)^2-8 = b^2 \Longrightarrow (a+2)^2-b^2 = 8 \Longrightarrow (a+2+b)(a+2-b) = 8$$

Para se obter 8 como o produto de dois números inteiros é necessário que os números envolvidos sejam 1 e 8 ou 2 e 4. Desta forma, da última implicação, podemos construir os sistemas

$$i)\begin{cases} a+2+b=4 \\ a+2-b=2 \end{cases}, ii)\begin{cases} a+2+b=2 \\ a+2-b=4 \end{cases}, iii)\begin{cases} a+2+b=8 \\ a+2-b=1 \end{cases} \text{ ou } iv)\begin{cases} a+2+b=1 \\ a+2-b=8 \end{cases}$$

Porém os sistemas *iii*) e *iv*) não admitem solução inteira para a. Somando as equações de qualquer caso *i*) ou *ii*) obtemos $2a+4 = 6 \Longrightarrow 2a = 2 \Longrightarrow a = 1$. Portanto, este é o único valor inteiro de a para que a equação tenha pelo menos uma solução inteira.

Problema 18. Seja $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sabendo que $x+\dfrac{1}{x} = \phi$ e $x^{16}+\dfrac{1}{x^{16}} = A+B\phi$, com $A,B \in \mathbb{Z}$, encontre $A-B$.

Solução: Usaremos o seguinte fato:

$\boxed{\text{Dados } x,y \in \mathbb{Z}_+ \text{ então } (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2}$

Aplicando o fato acima em $x+\dfrac{1}{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, temos:

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 &\Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} \\ &\Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}-2 \\ &\Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Novamente, aplicando o fato matemático na relação obtida acima:

$$\begin{aligned} \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 &\Longrightarrow x^4+\frac{1}{x^4}+2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} \\ &\Longrightarrow x^4+\frac{1}{x^4} = \frac{6-\sqrt{5}}{4}-2 \\ &\Longrightarrow x^4+\frac{1}{x^4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Aplicando mais uma vez o fato na última relação obtida:

$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2=\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Longrightarrow x^8+\frac{1}{x^8}+2=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}$$
$$\Longrightarrow x^8+\frac{1}{x^8}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-2$$
$$\Longrightarrow x^8+\frac{1}{x^8}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Finalmente, usando o fato uma última vez na relação acima:

$$\left(x^8+\frac{1}{x^8}\right)^2=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Longrightarrow x^{16}+\frac{1}{x^{16}}+2=\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}$$
$$\Longrightarrow x^{16}+\frac{1}{x^{16}}=\frac{6-\sqrt{5}}{4}-2$$
$$\Longrightarrow x^{16}+\frac{1}{x^{16}}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Como $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, temos que

$$x^{16}+\frac{1}{x^{16}}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=-\phi$$

.

Do enunciado, devemos ter $-\phi=A+B\phi$. Comparando as relações vemos que $A=0$ e $B=-1$. Portanto $A-B=0-(-1)=1$.

5.10 OAM 2022

Problema 19. Encontre um número de 4 dígitos *abcd* tal que se o multiplicarmos por 4 o número obtido tem os mesmos dígitos em ordem contrária, isto é, $4\cdot abcd=dcba$.

Solução: Note que se $a>3$, *dbca* terá mais que 4 dígitos. Portanto, $a=1$ ou $a=2$. Porém como todos os múltiplos de 4 são pares, $a\neq 1$ e assim, $a=2$. Por consequência, $d=8$. Analogamente, se $b\geq 3$, *dcba* terá mais que 4 dígitos. Assim, $b<3$. Aplicando o algoritmo usual da multiplicação, obtemos que $4c+3$ deve ser igual a um número cujo o algarismo das unidades seja b. Isso só é possível se $c=2$ ou $c=7$. Daí se $c=2$, devemos ter $b=1$ e assim $4b=4$ o que não é coerente pois $4b+c$ deve resultar em um número cujo o algarismos das unidades seja c. Agora, se $c=7$, devemos ter $b=1$ e $4b+3=7$, o que é válido. Portanto, o número *abcd* é igual a 2178.

Problema 20. Encontre o menor valor de x^2+y^2 sabendo que x e y são inteiros que são soluções da equação $x^2-2y^2=1$, onde $x>3$.

Solução: Vamos considerar os seguintes fatos:

Fato (1)	Dados $p,q\in\mathbb{Z}$ números pares (ímpares), o produto pq também é um número par (ímpar).

Fato (2) Se $p \in \mathbb{Z}$ é par então existe um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2m$.

Fato (3) Dados, $a, m \in \mathbb{Z}_+$ tais que $a = m^2$. Dizemos que a é um quadrado perfeito.

Fato (4) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ então $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

Veja que $x^2 - 2y^2 = 1$ implica em $2y^2 = x^2 - 1$. Como $x, y \in \mathbb{Z}$, então $y^2 \in \mathbb{Z}$ e assim, $2y^2$ é um número par. Portanto, $x^2 - 1$ é par.

Como $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, segue que os números $x+1$ e $x-1$ são pares e portanto, x é ímpar. Além disso, $y^2 = \dfrac{x^2-1}{2}$ é um quadrado perfeito. Como pelo enunciado $x > 3$ vamos verificar os valores de y^2 para os demais valores ímpares de x maiores que 3:

x	$y^2 = \dfrac{x^2-1}{2}$	y
5	$y^2 = \dfrac{5^2-1}{2} = \dfrac{25-1}{2} = 12$	$\sqrt{12} \notin \mathbb{Z}$
7	$y^2 = \dfrac{7^2-1}{2} = \dfrac{49-1}{2} = 24$	$\sqrt{24} \notin \mathbb{Z}$
9	$y^2 = \dfrac{9^2-1}{2} = \dfrac{81-1}{2} = 40$	$\sqrt{40} \notin \mathbb{Z}$
11	$y^2 = \dfrac{11^2-1}{2} = \dfrac{121-1}{2} = 60$	$\sqrt{60} \notin \mathbb{Z}$
13	$y^2 = \dfrac{13^2-1}{2} = \dfrac{169-1}{2} = 84$	$\sqrt{84} \notin \mathbb{Z}$
15	$y^2 = \dfrac{15^2-1}{2} = \dfrac{225-1}{2} = 112$	$\sqrt{112} \notin \mathbb{Z}$
17	$y^2 = \dfrac{17^2-1}{2} = \dfrac{289-1}{2} = 144$	$\sqrt{144} = 12$

Verifica-se então que o menor valor de x de modo que y é inteiro é $x = 17$, e daí, $y = 12$. Portanto, o menor valor de $x^2 + y^2 = 17^2 + 12^2 = 289 + 144 = 433$.

Problema 21. Quantos números ab de dois algarismos são tais que ao multiplicar ab por qualquer número entre 1 e 9 resulta em um número cuja soma dos seus algarismos é $a+b$?

Solução: Seja cde um número de três algarismos tal que $n \cdot (ab) = cde$, com $n \in \mathbb{Z}$ tal que $1 \leq n \leq 9$. Fazendo $ab = 10a + b$ e $cde = 100c + 10d + e$, temos,

$$\begin{aligned} n \cdot (10a+b) = 100c + 10d + e &\Longrightarrow n \cdot (9a + a + b) = 99c + c + 9d + d + e \\ &\Longrightarrow n \cdot (9a + (a+b)) = 9(11c+d) + c + d + e \\ &\Longrightarrow 9a \cdot n + n \cdot (a+b) = 9(11c+d) + c + d + e \\ &\Longrightarrow 9a \cdot n - 9(11c+d) = c + d + e - n \cdot (a+b) \\ &\Longrightarrow 9 \cdot (a \cdot n - 11c - d) = c + d + e - n \cdot (a+b). \end{aligned}$$

Como queremos que $a + b = c + d + e$, chamemos essas somas de k. Assim,

$$9(a \cdot n - 11c - d) = k - n \cdot k = k(1-n) \Longrightarrow 9(11c + d - a \cdot n) = k(n-1).$$

Como $1 \leq n \leq 9$ então $0 \leq (n-1) \leq 8$. Assim, k é múltiplo de 9. Como $k = a + b$, então

$k = 9$ ou $k = 18$. Logo, os números ab elegíveis são múltiplos de 9. A tabela a seguir mostra os produtos $9 \cdot n$:

$\times$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162
27	27	54	81	108	135	162	189	216	243
36	36	72	108	144	180	216	252	288	324
45	45	90	135	180	225	270	315	360	405
54	54	108	162	216	270	324	378	432	486
63	63	126	189	252	315	378	441	504	567
72	72	144	216	288	360	432	504	576	648
81	81	162	243	324	405	486	567	648	729
90	90	180	270	360	450	540	630	720	810
99	99	198	297	396	495	594	693	792	891

Os produtos em vermelho possuem a soma dos algarismos diferente da soma dos algarismos do número multiplicado. Assim, os números cujo os produtos por qualquer número entre 1 e 9 resultam em números cujo a soma dos algarismos é igual a soma do número original são 18, 45, 90 e 99.

5.11 OAM 2023

Problema 22. Sejam x, y e a números reais tais que $x + \frac{1}{y} = a$ e $\frac{1}{x} + y = \frac{4}{a}$. Determine o valor do produto $x \cdot y$.

Solução: Multiplicando ambas as equações dadas membro a membro obtemos:

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} + y\right) = a \cdot \frac{4}{a} \Longrightarrow 1 + xy + \frac{1}{xy} + 1 = 4 \Longrightarrow xy + \frac{1}{xy} = 2.$$

Multiplicando toda a expressão por xy:

$$\begin{aligned}(xy)^2 + 1 = 2xy &\Longrightarrow (xy)^2 - 2xy + 1 = 0 \\ &\Longrightarrow (xy - 1)^2 = 0 \\ &\Longrightarrow xy - 1 = 0 \\ &\Longrightarrow xy = 1.\end{aligned}$$

Portanto, o produto $x \cdot y$ é igual 1.

Problema 23. Quantos são os pares de números primos p e q tal que $p^2 + q^2$ é um primo menor que 2023? Lembre-se: um número natural é primo se ele é maior que 1 e tem exatamente dois divisores positivos.

Solução:

Fato (1): Dado $p \in \mathbb{Z}, p \geq 3$ um número primo, então p^2 é um número ímpar.

Fato (2): Dados $r, s \in \mathbb{Z}$ números ímpares, a soma $r + s$ é um número par.

Fato (3): Todo número primo $p \geq 5$ é da forma $6k+1$ ou $6k+5$, $k \in \mathbb{Z}$.

Note então que para qualquer número primo $p, q \neq 2$, p^2, q^2 será ímpar e que a soma p^2+q^2 será um número par maior que 2 e portanto, não primo. Assim, a soma do quadrado de dois números primos só será ímpar se algum desses números for 2. Seja então $p = 2$ e assim $p^2 = 4$. Então $q^2 < 2023 - 4 = 2019$. Além disso, q^2 deve ser um número primo cujo último algarismo não seja 1 ou 9, pois caso contrário q^2 também terá como último algarismo 1 ou 9 e dessa forma p^2+q^2 terá como último algarismo 5 e dessa forma não será primo.

Note agora que $q < 47$ pois $47^2 = 2209 > 2019$. Portanto o maior valor que q pode assumir é 43 já que $43^2 = 1849 < 2019$. Os primos k tais que $2 \leq k \leq 43$ e não tem como último algarismo 1 ou 9 são $3, 7, 13, 17, 23, 37$ e 43. Analisando cada caso:

q	3	5	7	13	17	23	37	43
p^2+q^2	13	29	53	173	293	533	1373	1853

Logo, só há 8 possibilidades para q. Considerando as permutações possíveis entre p e q, há 16 pares de soluções possíveis.

Solução Alternativa:

Como visto na solução anterior, um dos números p, q, digamos que p, deve ser 2. Note que se $q = 3$, então $p^2+q^2 = 2^2+3^2 = 13$ é primo. Portanto o par $(2,3)$ é solução. Da mesma forma, se $q = 5$, então $p^2+q^2 = 2^2+5^2 = 29$ é primo. Logo, o par $(2,5)$ é solução.

Agora suponha que $q > 5$ é primo. Então ele será da forma $q = 6k+1$ ou $q = 6k+5$. Desta forma teremos dois casos:

Caso 1: Se $q = 6k+1$ então

$$\begin{aligned} p^2+q^2 < 2023 \Longrightarrow 2^2+(6k+1)^2 < 2023 &\implies 4+36k^2+12k+1-2023 < 0 \\ &\implies 36k^2+12k-2018 < 0 \\ &\implies 18k^2+6k-1009 < 0. \end{aligned}$$

O lado esquerdo da inequação acima tem discriminante

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 18 \cdot (-1009) = 72684.$$

E as soluções são dadas por

$$\frac{-6 \pm \sqrt{72684}}{2 \cdot 18} \approx \frac{-6 \pm 269,6}{36}.$$

Como $k > 0$, vamos considerar apenas

$$k < \frac{-6+269,6}{36} = \frac{263,6}{36} \approx 7,32.$$

Como $k \in \mathbb{Z}$, então $k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Substituindo estes valores de k em $q = 6k+1$, obtemos que $q = \{7, 13, 19, 25, 31, 37, 43\}$. Como 25 não é primo e como visto na solução anterior, q não pode terminar em 1 ou 9, temos 4 soluções possíveis.

Caso 2: Se $q = 6k+5$ então

$$\begin{aligned} p^2+q^2 < 2023 \Longrightarrow 2^2+(6k+5)^2 < 2023 &\implies 4+36k^2+60k+25-2023<0 \\ &\implies 36k^2+60k-1994<0 \\ &\implies 18k^2+30k-997<0. \end{aligned}$$

O lado esquerdo da inequação acima tem discriminante

$$\Delta = 30^2 - 4\cdot 18\cdot(997) = 72684.$$

E as soluções são dadas por

$$\frac{-30\pm\sqrt{72684}}{2\cdot 18} \approx \frac{-30\pm 269,6}{36}.$$

Como $k>0$, vamos considerar apenas

$$k < \frac{-30+269,6}{36} = \frac{239,6}{36} \approx 6,65.$$

Como $k\in\mathbb{Z}$, então $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Substituindo estes valores de k em $q=6k+5$, obtemos que $q=\{11,17,23,29,35,41\}$. Como 35 não é primo, e como visto na solução anterior, q não pode terminar em 1 ou 9, temos 2 soluções possíveis.

Portanto, além dos pares $(2,3)$ e $(2,5)$ há mais 4 soluções do caso 1 e outras 2 soluções do caso 2 totalizando 8 soluções ao total. Considerando as permutações dos pares ordenados, existem 16 soluções ao total.

5.12 OAM 2024

Problema 24. Seja m a quantidade de pares de inteiros positivos (k,n) tal que n^{5+4k} e n **não** tenham o mesmo algarismo das unidades. Qual o valor de 5^m?

Solução:

Fato (1): Sejam $a,b,n\in\mathbb{Z}_+$. Então $a\equiv b \mod n$ se $n \mid a-b$.

Fato (2): Se $a\equiv b \mod n$, então $a^k \equiv b^k \mod n$, para todo $k\in\mathbb{Z}_+$.

Fato (3): Se $a\equiv b \mod n$ e $c\equiv d \mod n$, então $ac\equiv bd \mod n$.

Note que $n^{5+4k} = n^5\cdot(n^4)^k$. Para verificar o algarismo da unidades de um número qualquer basta analisar os restos na divisão por 10. Desta forma:

Se $n\equiv 0 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \equiv 0^5 \equiv 0 \mod 10$

Se $n\equiv 1 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \equiv 1^5 \equiv 1 \mod 10$

Se $n\equiv 2 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \equiv 2^5 \equiv 32 \equiv 2 \mod 10$

Se $n\equiv 3 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \equiv 3^5 \equiv 243 \equiv 3 \mod 10$

Se $n\equiv 4 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \equiv 4^5 \equiv 1024 \equiv 4 \mod 10$

Se $n\equiv 5 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \equiv 5^5 \equiv 3125 \equiv 5 \mod 10$

Se $n\equiv 6 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \equiv 6^5 \equiv 7776 \equiv 6 \mod 10$

Se $n \equiv 7 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \equiv 7^5 \equiv 16087 \equiv 7 \mod 10$
Se $n \equiv 8 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \equiv 8^5 \equiv 32768 \equiv 8 \mod 10$
Se $n \equiv 9 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \equiv 9^5 \equiv 59049 \equiv 9 \mod 10$
Além disso,
Se $n \equiv 0 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \equiv 0^4 \equiv 0 \mod 10$
Se $n \equiv 1 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \mod 10$
Se $n \equiv 2 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \equiv 2^4 \equiv 16 \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 3 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \equiv 3^4 \equiv 81 \equiv 1 \mod 10$
Se $n \equiv 4 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \equiv 4^4 \equiv 256 \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 5 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \equiv 5^4 \equiv 625 \equiv 5 \mod 10$
Se $n \equiv 6 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \equiv 6^4 \equiv 1296 \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 7 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \equiv 7^4 \equiv 2401 \equiv 1 \mod 10$
Se $n \equiv 8 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \equiv 8^4 \equiv 4096 \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 9 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \equiv 9^4 \equiv 6561 \equiv 1 \mod 10$
Agora, vamos verificar os restos de $(n^4)^k = n^{4k}$ por indução. Para isso, note que para $k = 1$ os resultados acima se mantém. Suponha então que para $k = q \in \mathbb{N}$ seja válido que:
Se $n \equiv 0 \mod 10 \Longrightarrow n^{4q} \equiv 0 \mod 10$
Se $n \equiv 1 \mod 10 \Longrightarrow n^{4q} \equiv 1 \mod 10$
Se $n \equiv 2 \mod 10 \Longrightarrow n^{4q} \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 3 \mod 10 \Longrightarrow n^{4q} \equiv 1 \mod 10$
Se $n \equiv 4 \mod 10 \Longrightarrow n^{4q} \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 5 \mod 10 \Longrightarrow n^{4q} \equiv 5 \mod 10$
Se $n \equiv 6 \mod 10 \Longrightarrow n^{4q} \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 7 \mod 10 \Longrightarrow n^{4q} \equiv 1 \mod 10$
Se $n \equiv 8 \mod 10 \Longrightarrow n^{4q} \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 9 \mod 10 \Longrightarrow n^{4q} \equiv 1 \mod 10$
Daí, segue que:
Se $n \equiv 0 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \cdot n^{4q} \equiv n^{4(q+1)} \equiv 0 \cdot 0 \equiv 0 \mod 10$
Se $n \equiv 1 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \cdot n^{4q} \equiv n^{4(q+1)} \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \mod 10$
Se $n \equiv 2 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \cdot n^{4q} \equiv n^{4(q+1)} \equiv 6 \cdot 6 \equiv 36 \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 3 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \cdot n^{4q} \equiv n^{4(q+1)} \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \mod 10$
Se $n \equiv 4 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \cdot n^{4q} \equiv n^{4(q+1)} \equiv 4 \cdot 4 \equiv 16 \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 5 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \cdot n^{4q} \equiv n^{4(q+1)} \equiv 5 \cdot 5 \equiv 25 \equiv 5 \mod 10$
Se $n \equiv 6 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \cdot n^{4q} \equiv n^{4(q+1)} \equiv 6 \cdot 6 \equiv 36 \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 7 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \cdot n^{4q} \equiv n^{4(q+1)} \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \mod 10$
Se $n \equiv 8 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \cdot n^{4q} \equiv n^{4(q+1)} \equiv 6 \cdot 6 \equiv 36 \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 9 \mod 10 \Longrightarrow n^4 \cdot n^{4q} \equiv n^{4(q+1)} \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \mod 10$
Desta forma, por indução, está verificado os restos da divisão de n^{4k} por 10. Por fim, verifica-se que
Se $n \equiv 0 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \cdot n^{4k} \equiv 0 \cdot 0 \equiv 0 \mod 10$

Se $n \equiv 1 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \cdot n^{4k} \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \mod 10$
Se $n \equiv 2 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \cdot n^{4k} \equiv 2 \cdot 6 \equiv 12 \equiv 2 \mod 10$
Se $n \equiv 3 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \cdot n^{4k} \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \mod 10$
Se $n \equiv 4 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \cdot n^{4k} \equiv 4 \cdot 6 \equiv 24 \equiv 4 \mod 10$
Se $n \equiv 5 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \cdot n^{4k} \equiv 5 \cdot 5 \equiv 25 \equiv 5 \mod 10$
Se $n \equiv 6 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \cdot n^{4k} \equiv 6 \cdot 6 \equiv 36 \equiv 6 \mod 10$
Se $n \equiv 7 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \cdot n^{4k} \equiv 7 \cdot 1 \equiv 7 \mod 10$
Se $n \equiv 8 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \cdot n^{4k} \equiv 8 \cdot 6 \equiv 48 \equiv 8 \mod 10$
Se $n \equiv 9 \mod 10 \Longrightarrow n^5 \cdot n^{4k} \equiv 9 \cdot 1 \equiv 9 \mod 10$

Logo, os números n^{5+4k} e n sempre possuem o mesmo algarismo das unidades. Desta forma, não há pares de inteiros positivos (k,n) que satisfazem a relação pedida e assim $m = 0$. Portanto, $5^m = 5^0 = 1$.

Problema 25. Sabendo que x e y são número reais positivos tais que $xy = 1$, determine qual é o menor valor para a expressão

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2 + 2}$$

Solução:

Fato (1): **Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica:**
Dados $a, b \in \mathbb{R}_+$, tem-se: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$

Note que

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{x^4}{x^2 + y^2 + 2} + \frac{y^4}{x^2 + y^2 + 2}.$$

Aplicando o fato (1) para os números reais positivos $\dfrac{x^4}{x^2 + y^2 + 2}$ e $\dfrac{y^4}{x^2 + y^2 + 2}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{x^4}{x^2 + y^2 + 2} + \frac{y^4}{x^2 + y^2 + 2}}{2} \geq \sqrt{\frac{x^4}{x^2 + y^2 + 2} \cdot \frac{y^4}{x^2 + y^2 + 2}} &\Longrightarrow \\
\frac{1}{2} \cdot \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2 + 2} \geq \sqrt{\frac{(xy)^4}{(x^2 + y^2 + 2)^2}} &\Longrightarrow \\
\frac{1}{2} \cdot \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2 + 2} \geq \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2 + 2} &\Longrightarrow \\
\frac{x^4 + y^4}{2} \geq (xy)^2.
\end{aligned}$$

Como $xy = 1$,

$$\frac{x^4 + y^4}{2} \geq 1^2 \Longrightarrow x^4 + y^4 \geq 2.$$

Note que o valor mínimo só ocorre no caso da igualdade $x = y$. Logo,

$$x^4 + x^4 = 2 \Longrightarrow 2x^4 = 2 \Longrightarrow x^4 = 1 \Longrightarrow x = 1.$$

Portanto, a expressão $\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2+2}$ terá o valor mínimo quando $x=y=1$, ou seja,

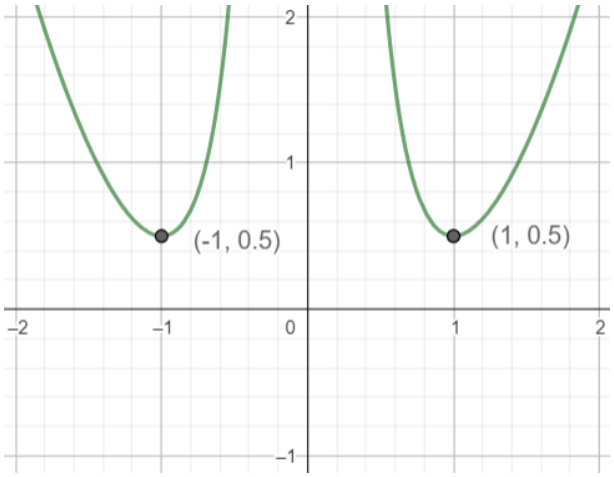
$$\frac{1^4+1^4}{1^2+1^2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Comentário: Isolando y na equação dada $xy=1$ obtemos $y=\dfrac{1}{x}$. Substituindo y na expressão estudada, temos:

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2+2}=\frac{x^4+\left(\frac{1}{x}\right)^4}{x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{\frac{x^8+1}{x^4}}{\frac{(x^2+1)^2}{x^2}}=\frac{x^8+1}{x^2(x^2+1)^2}.$$

Plotando o gráfico desta última expressão no geogebra, verifica-se que o resultado está correto.

Figura 1: Gráfico da expressão em função de x.



Fonte: Próprio autor (2024).

6 CONSIDERAÇÕE FINAIS

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), na área de Matemática do Ensino Médio determina que os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. As Olimpíadas de Matemática, então, são ferramentas fundamentais para o desenvolvimento destes processos.

Assim como recomenda a BNCC (BRASIL, 2018), a inventividade dos problemas olímpicos estimula os estudantes a mobilizarem seu modo de raciocinar, representar, comunicar e argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos, desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

Portanto, as olimpíadas de matemática são uma ferramenta pedagógica importante para o desenvolvimento destas habilidades. Além disso, as premiações que as Olimpíadas proporcionam aos estudantes são fontes de estímulo que despertam interesse e curiosidade dos estudantes para o aprofundamento no estudo da matemática. Assim, é nítido que as Olimpíadas de Matemática são plataformas para evidenciar e potencializar estudantes talentosos.

É evidente então que a OAM deve ganhar maior importância no cenário educacional do Estado de Alagoas. Com sua formatação de alta qualidade inspirada na OBM, o bom desempenho dos alunos na OAM naturalmente estimulará o aprimoramento pedagógico dos professores que a adotarem em seus planos de aula, assim como dos alunos que deverão se dedicar mais nos estudos.

Assim, com planejamento e execução adequada, a OAM em âmbito regional poderá impactar o crescimento de indicadores educacionais como o IDEB e o PISA, além de destacar nacionalmente os estudantes e o ensino de matemática no Estado de Alagoas. Para isso, é fundamental que a abrangência da OAM cresça: É necessária a maior adesão das escolas e professores de matemática em adotar a Olimpíada no calendário letivo e integrar os problemas olímpicos no planejamento de aula.

REFERÊNCIAS

BENEVIDES, Fabrício Siqueira; CAMINHA, A. Introdução às Equações Algébricas. **Portal da OBMEP**, 2021.

BEZERRA, Riane Leitão; SOUSA, Francisco Jucivânio Félix; MEDEIROS, Jarles Lopes. A OBMEP como ferramenta metodológica. **Revista Signos**, v. 41, n. 2, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**, Brasília: MEC, 2018.

FIGUEIRA, Ramon Formiga. **O Número de Euler.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.

GOMES, Keyson Gondim. **Olimpíada cearense de matemática (OCM):** laboratório de oportunidades, experiências e de desenvolvimento da matemática no estado do Ceará. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022. (Coleção PROFMAT).

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e Equações Algébricas.** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022. (Coleção PROFMAT).

IM. **Olimpíadas Alagoanas de Matemática.** Maceió: UFAL, 2005. Disponível em: http://legado.im.ufal.br/oam. Acesso em: 27 Abr. 2024.

IMPA. **A OBMEP em Números.** Rio de Janeiro: IMPA, 2023. Disponível em: https://www.obmep.org.br/em-numeros.htm. Acesso em: 01 Maio 2024.

LANDGRAF, Ariane da Silva; JUSTULIN, Andresa Maria. Pensamento algébrico e resolução de problemas: possibilidades na formação de professores. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 12, n. 27, p. 33–49, 2023.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2023. (Coleção PROFMAT).

MACÊDO, Maurício José Nascimento; CARDOSO, Mikaelle Barboza. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP):** enfoque no estado do Ceará. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 11, n. 31, 2024.

LIMA, Elielson Magalhães. **Precursores do desempenho escolar em resolução de problemas.** 2021. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A.; MARTÍNEZ, Fabio E. Brochero; SALDANHA, Nicolau C. **Tópicos de Teoria dos Números.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2021. (Coleção PROFMAT).

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco P. de; CARVALHO, Paulo Cezar P.; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020. (Coleção do Professor de Matemática).

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2023. (Coleção PROFMAT).

NOGUEIRA FILHO, Ciro. **A Coluna Olimpíada de Matemática do Jornal O Povo (1987-1996):** entre documentos e narrativas. 2016. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

OAM. **Listas de Inscritos na XX OAM.** Maceió: OAM, 2023. Disponível em: https://sites.google.com/view/oamufal/xxoam. Acesso em: 01 Maio 2024.

OAM. **Olimpíada Alagoana de Matemática 2022**. Maceió: OAM, 2022. Disponível em: https://sites.google.com/view/oiniciodeumnovotempo/asas/oam. Acesso em: 04 Maio 2024.

OBM. **A OBM.** Rio de Janeiro: Associação da OBM, 2024. Disponível em: https://www.obm.org.br/quem-somos/pagina-exemplo/. Acesso em: 09 Junho 2024.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção Olimpíadas de Matemática).

OLIVEIRA JUNIOR, Mauricio Pedro de; PINHEIRO, Henrique Maia; BARRETO, Wagner Davy Lucas. Um estudo de caso sobre a aplicação das técnicas de resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática para a melhoria do ensino da disciplina. **Research, Society and Development**, v. 11, n. 6, e53611629295–e53611629295, 2022.

PARENTE, Ulisses Lima; CAMINHA, A. Paridade - Parte I. **Portal da OBMEP**, 2022.

PARENTE, Ulisses Lima. Produtos Notáveis - Parte 1. **Portal da OBMEP,** 2015.

RIBEIRO, Wanderson de Oliveira. **A importância das olimpíadas de matemática:** uma revisão bibliográfica. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática a Distância) – Universidade Federal da Paraíba, Pombal, 2023.

RODRIGUES, Paulo José Bonfim Gomes. **Olimpíadas e Círculos de Matemática e a Pedagogia de Nikolay Konstantinov.** 2023. Dissertação (Mestrado Profissional e Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2023.

SILVA, Josiel Pereira da. **Logaritmos e aplicações.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, João Pessoa, 2013.

SOUZA, Janio Luiz de Aquino de. **Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas:** desafios enfrentados por professores e alunos da rede pública municipal no município de Assú-RN. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2018.

STEFFENON, Rogério Ricardo; GUARNIERE, Felipe Milan. **Belos Problemas de Matemática Discreta.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2024. (Coleção Olimpíadas de Matemática).

VIANA, Cléber Soares Viana; CALDAS, Carlas Ciane Silva. As olimpíadas brasileiras de matemática das escolas públicas na formação de professores e alunos. **Revista Margens Interdisciplinar**, Universidade Federal do Pará, 2013.