Sumário

1. Artigo

Problemas com Dígitos e Divisibilidade

Weverton de Barros Vieira & Eben Alves Silva

UFAL - Departamento de Matemática
Campus Arapiraca
Arapiraca-AL - Brasil

Introdução

Este artigo tem o intuito de apresentar alguns problemas olímpicos interessantes que envolvem a noção e a habilidade de se manipular dígitos. Os problemas foram retirados da Olimpíada Alagoana de Matemática e despertam interesse e curiosidade por sua criatividade e que, apesar de possuírem enunciados simples, se mostram bastante desafiadores quanto as suas soluções.

Inicialmente, precisamos definir alguns conceitos matemáticos que serão úteis para as soluções propostas.

Conceitos Básicos

Os conceitos matemáticos enunciados a seguir foram retirados de [1].

Definição 1.1. Uma *progressão aritmética (PA)* é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de *razão* da progressão e é representada pela letra r.

Proposição 1.1. ***Termo geral de uma Progressão Aritmética***
Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3 \ldots)$ *de razão* r*, podemos calcular o n-ésimo termo desta sequência por* $a_n = a_1 + (n-1)r$.

As ideias para as demonstrações dos critérios de divisibilidade a seguir foram retiradas de [2].

Observação: Nas proposições a seguir usaremos $a = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ como a representação decimal do número natural a, ou seja,

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

O resultado a seguir será utilizado para formalizar o critério de divisibilidade por 9 e consequentemente, por 3. Para sua demonstração, iremos utilizar o princípio da indução finita. Recomendamos que o leitor veja o artigo "O Princípio da Indução Finita" [4] na edição 28 da revista.

Proposição 1.2. $10^n - 1$ *é divisível por 9, para todo* $n \geq 1$.

Demonstração: Por indução, tem-se que para $n = 1$ temos $10^1 - 1 = 9$ que é divisível por 9. Suponha que $10^n - 1 = 9k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Multiplicando esta expressão por 10 em ambos os lados temos

$$\begin{aligned}
10(10^n-1) = 10\cdot 9k & \implies \\
10^{n+1}-10 = 10\cdot 9k & \implies \\
10^{n+1} = 10\cdot 9k+10 & \implies \\
10^{n+1} = 10\cdot 9k+9+1 & \implies \\
10^{n+1}-1 = 9(10k+1). &
\end{aligned}$$

Como $k\in\mathbb{Z}$, então $(10k+1)\in\mathbb{Z}$ e assim o resultado está provado.

Proposição 1.3. *Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 3 (resp. 9) é que $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$ seja divisível por 3 (resp. 9).*

Demonstração: Veja que $a-(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)$ pode ser desenvolvido como

$$\begin{aligned}
a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10^1+a_0 - \\
(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0) = \\
a_n\cdot(10^n-1)+a_{n-1}\cdot(10^{n-1}-1) + \\
\cdots+a_1\cdot(10^1-1).
\end{aligned}$$

Usando o fato que 10^k-1 é múltiplo de 9, para todo $k\in\mathbb{N}$, temos que

$$a=(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)+9q.$$

Dessa igualdade, seguem os critérios de divisibilidade por 3 e por 9.

Os resultados a seguir serão utilizados para formalizar critérios de divisibilidade por 7, 11 e 13.

Proposição 1.4. $1000^{2n}-1$ *é divisível por 1001, para todo $n\geq 1$.*

Demonstração: Por indução, para $n=1$ temos $1000^{2\cdot 1}-1=999999=1001\cdot 999$. Logo, o passo base está verificado. Agora suponha que $1000^{2n}-1=1001k$, $k\in\mathbb{Z}$. Multiplicando esta última relação por 1000^2:

$$\begin{aligned}
&(1000^{2n}-1)\cdot 1000^2 = 1001k\cdot 1000^2\\
&1000^{2n+2}-1000^2 = 1001k\cdot 1000^2\\
&1000^{2(n+1)} = 1001k\cdot 1000^2+1000^2\\
&1000^{2(n+1)} = 1001k\cdot 1000^2+1000^2-1+1\\
&1000^{2(n+1)}-1 = 1001k\cdot 1000^2+1001\cdot 999\\
&1000^{2(n+1)}-1 = 1001(1000^2k+999).
\end{aligned}$$

Como $k\in\mathbb{Z}$, segue que $(1000^2k+999)\in\mathbb{Z}$ e assim o resultado está provado.

Proposição 1.5. $1000^{2n-1}+1$ *é divisível por 1001, para todo $n\geq 1$.*

Demonstração: Por indução, para $n=1$ tem-se $1000^{2\cdot 1-1}+1=1001$, que é divisível por 1001. Agora suponha que $1000^{2n-1}+1=1001k$, $k\in\mathbb{Z}$. Multiplicando ambos os membros por 1000^2:

$$\begin{aligned}
&1000^2(1000^{2n-1}+1) = 1000^2\cdot 1001k\\
&1000^{2n+1}+1000^2 = 1000^2\cdot 1001k\\
&1000^{2n+1+1-1} = 1000^2\cdot 1001k-1000^2\\
&1000^{2(n+1)-1} = 1000^2\cdot 1001k-1000^2+1-1\\
&1000^{2(n+1)-1}+1 = 1000^2\cdot 1001k-(1000^2-1)\\
&1000^{2(n+1)-1}+1 = 1000^2\cdot 1001k-1001\cdot 999\\
&1000^{2(n+1)-1}+1 = 1001(1000^2k-999).
\end{aligned}$$

Como $k\in\mathbb{Z}$, segue que $(1000^2k-999)\in\mathbb{Z}$ e assim o resultado está provado.

Proposição 1.6. *Uma condição necessária e suficiente para que um número a seja divisível por 7 (resp. 11, 13) é que*

$$a_2a_1a_0-a_5a_4a_3+a_8a_7a_6-a_{11}a_{10}a_9+\cdots$$

seja divisível por 7 (resp. 11, 13).

Demonstração: Pelas proposições anteriores temos que se k é ímpar, então 10^k+1 é divisível por $1001=7\cdot 11\cdot 13$; por outro lado, se k é par, então 10^k-1 é divisível por $1001=7\cdot 11\cdot 13$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
& a - [a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - a_{11}a_{10}a_9 + \cdots] \\
& = (a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \cdots) \\
& - [a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - a_{11}a_{10}a_9 + \cdots] \\
& = (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 - a_2a_1a_0)+ \\
& + (a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_5a_4a_3)+ \\
& + (a_8 \cdot 10^8 + a_7 \cdot 10^7 + a_6 \cdot 10^6 - a_8a_7a_6)+ \\
& + (a_{11} \cdot 10^{11} + a_{10} \cdot 10^{10} + a_9 \cdot 10^9 + a_{11}a_{10}a_9) \\
& + \cdots \\
& = 0 + a_5a_4a_3(10^3+1) + a_8a_7a_6(10^6-1)+ \\
& a_{11}a_{10}a_9(10^9+1) + \cdots \\
& = 1001q.
\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever a como

$$a = [a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - a_{11}a_{10}a_9 + \cdots] \\ +1001q, q \in \mathbb{Z}.$$

O que demonstra a proposição.

Problemas Olímpicos

Os problemas apresentados a seguir foram retirados do acervo de provas anteriores da Olimpíada Alagoana de Matemática, que podem ser consultadas em [3].

(OAM - 2006) Problema 1. Quantos números de três dígitos, divisíveis por 3, podem ser formados com os algarismos 1, 3, 5, 7 ou 9?

Solução: Vamos dividir nossa análise nos seguintes casos:

- números com algarismos iguais: a soma dos algarismos dos números 111, 333, 555, 777 e 999 resultam em números múltiplos de 3 e portanto todos são divisíveis por 3. Portanto, há 5 números deste tipo.

- números com algarismos diferentes: Os ternos de algarismos (1,3,5), (3,5,7), (5,7,9) e (1,5,9) quando somados resultam em números múltiplos de 3. Para cada terno de algarismos é possível formar $3! = 6$ números diferentes. Como há quatro ternos de algarismos, há $4 \times 3! = 24$ números deste tipo.

- números com dois algarismos iguais: os ternos de algarismos (1,1,7), (3,3,9), (7,7,1) e (9,9,3) quando somados resultam em números múltiplos de 3. Tomando como exemplo o terno $(1, 1, 7)$, é possível obter os números $117, 171$ e 711, ou seja, três números. De modo análogo, com raciocínio similar para os outros ternos de algarismos, é possível formar 3 números distintos para cada trio. Como há quatro ternos de algarismos, há $4 \times 3 = 12$ números deste tipo.

Assim, o total números divisíveis por 3 que podem ser formados pelos algarismos $1, 3, 5, 7$ e 9 são $5 + 24 + 12 = 41$ números.

(OAM 2019) Problema 2. Um numero é dito **rafoso** se ele é múltiplo de 3 e formado por dois números consecutivos em ordem decrescente. Por exemplo: 2019 é rafoso pois $2019 = 3 \times 673$ e é formado pelos números consecutivos 20 e 19. Determine a quantidade de números rafosos de 4 dígitos.

Solução: Note que os números de 4 dígitos formados por dois números consecutivos em ordem decrescente são os números

$$(1009, 1110, 1211, 1312, 1413, \ldots, 9897, 9998).$$

Note que 1110, 1413 e 1716 são números rafosos, pois são os primeiros números da sequência acima que são múltiplos de 3, de modo que

$$1413 - 1110 = 1716 - 1413 = 303,$$

portanto, formam uma P.A. de razão 303. Veja que o termo geral dessa P.A. é dado por

$$a_n = 1110 + (n-1)303.$$

Uma forma de analisar este problema é que estamos estudando uma sequência de números de quatro algarismos formado por dois números consecutivos em ordem decrescente. Considere o número $abcd$ rafoso, ou seja, ab é o sucessor de cd e $a+b+c+d = 3k, k \in \mathbb{Z}$. Para obter o próximo número da sequência devemos acrescentar uma unidade nos números ab e cd e assim ter o número $a(b+1)c(d+1)$. Note que a soma dos algarismos deste número é $a+b+c+d+2 = 3k+2$, ou seja, não é um múltiplo de 3. O próximo número da sequência é $a(b+2)c(d+2)$ que tem a soma dos algarismos $a+b+c+d+4 = 3k+4$, novamente, não múltiplo de 3.

Analogamente, o próximo número da sequência é $a(b+3)c(d+3)$ que possui a soma dos algarismos $a+b+c+d+6 = 3k+6$, este sim, múltiplo de 3. Então dado um número rafoso, para obter o próximo número rafoso basta acrescentar 3 no algarismo das centenas e 3 no algarismo das unidades, ou seja, acrescentar 303. Ou seja, como 1110 é rafoso, para se obter o próximo número rafoso basta somar 3 aos números 11 e 10 e temos 1413, valendo para todos a seguir.

Assim, para determinar a quantidade de números rafosos de 4 dígitos basta calcular o número de termos desta progressão aritmética. Utilizando a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, temos:

$$\begin{aligned}
a_n = a_1 + (n-1)r &\implies \\
9897 = 1110 + (n-1)\cdot 303 &\implies \\
(n-1)\cdot 303 = 9897 - 1110 &\implies \\
(n-1)\cdot 303 = 8787 &\implies \\
n - 1 = \frac{8787}{303} &\implies \\
n - 1 = 29 &\implies \\
n = 30. &
\end{aligned}$$

Portanto, existem 30 números rafosos de 4 dígitos.

(OAM - 2015) Problema 3. Quantos números existem de 2015 algarismos cuja soma dos algarismos é igual a 3 e não existem três algarismos uns?

Solução: Excetuando os casos onde não existem três algarismos uns, para a soma dos algarismos ser igual a 3 só restam dois casos (1) : Um algarismo é 3 e todos os outros são zeros ou (2): Um algarismo é 1, outro é 2 e todos os restantes são zeros. Assim, considerando que o algarismo inicial do número não pode ser o zero:

- O único número de 2015 algarismos possíveis com um único algarismo 3 é o número $3\underbrace{000\ldots000}_{2014-\text{zeros}}$, com 2014 algarismos zeros.
- Se o número iniciar com o algarismo 1, restam 2014 maneiras distintas de se posicionar o algarismo 2. Logo existem 2014 números distintos.
- Se o número iniciar com o algarismo 2, restam 2014 maneiras distintas de se posicionar o algarismo 1. Logo existem 2014 números distintos.

Assim, o total de números de 2015 algarismos cuja soma dos algarismos é igual a 3 é $1+2014+2014 = 4029$.

(OAM - 2009) Problema 4. Sejam a e b dígitos. Quantos números da forma $30a0b03$ são divisíveis por 13?

Solução: Para o número ser divisível por 13, basta que $b03 - a0 + 3$ seja divisível por 13. Note que

$$\begin{aligned}
b03 - a0 + 3 &= 100b + 3 - 10a + 3 \\
&= 100b - 10a + 6 \\
&= 91b - 13a + 9b + 3a + 6 \\
&= 13(7b - a) + 3(3b + a + 2).
\end{aligned}$$

Para isso, como a e b são dígitos, o maior valor que a, b pode assumir é 9. Assim, o maior valor que $3b + a + 2$ pode assumir é 38. Portanto, precisamos encontrar os valores de a e b para termos $3b + a + 2$ igual a 13 ou 26. Isso ocorre

- quando $b = 1$ e $a = 8$
- quando $b = 2$ e $a = 5$

- quando $b = 3$ e $a = 2$
- quando $b = 5$ e $a = 9$
- quando $b = 6$ e $a = 6$
- quando $b = 7$ e $a = 3$
- quando $b = 8$ e $a = 0$.

Portanto, há 7 números na forma $30a0b03$ que são divisíveis por 13.

(OAM - 2006 - Adaptado) Problema 5. Um número natural positivo n é dito *dobrado* se ao escrevermos seus dígitos na ordem inversa, obtemos exatamente o dobro de n. Por exemplo, 2004 não é dobrado pois $4002 \neq 2(2004)$. Mostre que não existe números dobrados menores que 1000.

Solução: Para fazermos a prova pedida, basta verificarmos que não existe número dobrado para números de 1, 2 ou 3 algarismos.
Números de 1 algarismo: Considerando que a escrita dos dígitos na ordem inversa de um número de 1 algarismo é o próprio número temos:
- 1 não é dobrado, pois $1 \neq 2(1)$
- 2 não é dobrado, pois $2 \neq 2(2)$
- 3 não é dobrado, pois $3 \neq 2(3)$
- 4 não é dobrado, pois $4 \neq 2(4)$
- 5 não é dobrado, pois $5 \neq 2(5)$
- 6 não é dobrado, pois $6 \neq 2(6)$
- 7 não é dobrado, pois $7 \neq 2(7)$
- 8 não é dobrado, pois $8 \neq 2(8)$
- 9 não é dobrado, pois $9 \neq 2(9)$.

Números de 2 algarismos: Seja ab um número de dois algarismos. Ao escrevermos seus dígitos em ordem inversa teremos o número ba. Para ab ser dobrado devemos ter

$$\begin{aligned} ba &= 2ab && \Longrightarrow \\ 10b + a &= 2(10a + b) && \Longrightarrow \\ 10b + a &= 20a + 2b && \Longrightarrow \\ 8b &= 19a. \end{aligned}$$

Como $a, b \neq 0$ e $mdc(8, 19) = 1$, não existem algarismos a, b que satisfaçam a relação acima.
Números de 3 algarismos: Seja abc um número de três algarismos. Ao escrevermos seus dígitos em ordem inversa teremos o número cba. Para abc ser dobrado devemos ter

$$\begin{aligned} cba &= 2abc && \Longrightarrow \\ 100c + 10b + a &= 2(100a + 10b + c) && \Longrightarrow \\ 100c + 10b + a &= 200a + 20b + 2c. \end{aligned}$$

Note que devemos necessariamente ter $a < 5$, pois se não, $cba \geq 1000$, ou seja, será um número de 4 algarismos. Agora, vamos verificar os seguintes casos:
(1) $a = 1$: Não é possível pois assim cba é ímpar e não pode ser escrito como $2(abc)$.
(2) $a = 2$: Devemos ter $c = 1$ ou $c = 6$. Assim, se $c = 1$:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 1 + 10b + 2 &= 200 \cdot 2 + 20b + 2 && \Longrightarrow \\ 100 + 10b + 2 &= 400 + 20b + 2 && \Longrightarrow \\ 10b &= -300 && \Longrightarrow \\ b &= -30. \end{aligned}$$

O que não é possível, pois $b > 0$.
Mas se $c = 6$:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 6 + 10b + 2 &= 200 \cdot 2 + 20b + 2 \cdot 6 && \Longrightarrow \\ 600 + 10b + 2 &= 400 + 20b + 12 && \Longrightarrow \\ 10b &= 190 && \Longrightarrow \\ b &= 19. \end{aligned}$$

O que não é possível, pois $b < 10$.
(3) $a = 3$: Não é possível pois $2(abc)$ resulta em um número par, logo, não há como resultar em um número terminado no algarismo 3.
(4) $a = 4$: Devemos ter $c = 2$ ou $c = 7$. Assim, se $c = 2$:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 2 + 10b + 4 &= 200 \cdot 4 + 20b + 2 \cdot 2 && \Longrightarrow \\ 10b &= -600 && \Longrightarrow \\ b &= -60. \end{aligned}$$

O que não é possível, pois $b > 0$.

Mas se $c = 7$:

$$\begin{aligned}100 \cdot 7 + 10b + 4 = 200 \cdot 4 + 20b + 2 \cdot 7 &\implies\\ 700 + 10b + 4 = 800 + 20b + 14 &\implies\\ 10b = -110 &\implies\\ b = -11.&\end{aligned}$$

O que não é possível. Logo, não existe número dobrado menor que 1000.

(OAM - 2022) Problema 6. Encontre um número de 4 dígitos $abcd$ tal que se multiplicarmos 4 o número obtido tem os mesmos dígitos em ordem contrária, isto é, $4 \cdot abcd = dcba$.

Solução: Note que se $a \geq 3$, $dbca$ terá mais que 4 dígitos. Portanto, $a = 1$ ou $a = 2$. Porém como todos os múltiplos de 4 são pares, $a \neq 1$ e assim, $a = 2$. Por consequência, $d = 8$. Analogamente, se $b \geq 3$, $dcba$ terá mais que 4 dígitos. Assim, $b < 3$. Aplicando o algoritmo usual da multiplicação, obtemos que $4c + 3$ deve ser igual a um número cujo o algarismo das unidades seja b. Isso só é possível se $c = 2$ ou $c = 7$. Daí se $c = 2$, devemos ter $b = 1$ e assim $4b = 4$ o que não é coerente pois $4b + 1$ deve resultar em um número cujo algarismo das unidades seja c. Agora, se $c = 7$, devemos ter $b = 1$ e $4b + 3 = 7$, o que é válido. Portanto o número $abcd$ é igual a 2178.

(OAM - 2022) Problema 7. Quantos números ab de dois algarismos são tais que ao multiplicar ab por qualquer número entre 1 e 9 resulta em um número cuja soma dos seus algarismos é $a + b$?

Solução: Seja cde um número de três algarismos tal que $n \cdot (ab) = (cde)$, com $n \in \mathbb{Z}$ tal que $1 \leq n \leq 9$. Representando $ab = 10a+b$ e $cde = 100c+10d+e$ temos,

$$\begin{aligned}n \cdot (10a + b) = 100c + 10d + e &\implies\\ n \cdot (9a + a + b) = 99c + c + 9d + d + e &\implies\\ n \cdot (9a + (a + b)) = 9(11c + d) + c + d + e &\implies\\ 9a \cdot n + n \cdot (a + b) = 9(11c + d) + c + d + e &\implies\\ 9a \cdot n - 9(11c + d) = c + d + e - n \cdot (a + b).&\end{aligned}$$

Como queremos que $a + b = c + d + e$, chamemos essas somas de k. Assim,

$$\begin{aligned}9(a \cdot n - 11c - d) = k - n \cdot k &\implies\\ 9(a \cdot n - 11c - d) = k(1 - n) &\implies\\ 9(11c + d - a \cdot n) = k(n - 1).&\end{aligned}$$

Perceba que como $1 \leq n \leq 9$ então $0 \leq (n-1) \leq 8$. Desta forma, para a igualdade ser verdadeira, k deve ser múltiplo de 9. Como $k = a + b$, então $k = 9$ ou $k = 18$. Portanto, os números ab elegíveis são os múltiplos de 9, ou seja, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 e 99.

Fazendo algumas checagens, vemos que os seguintes produtos de números cuja soma dos algarismos é 9 tem resultados cuja soma dos algarismos é 18:

- $27 \times 7 = 189$
- $36 \times 8 = 288$
- $54 \times 7 = 378$
- $63 \times 6 = 378$
- $72 \times 8 = 576$
- $81 \times 9 = 729$.

Portanto, os únicos múltiplos de 9 cujos produtos por qualquer número entre 1 e 9 resultam em números cuja soma dos algarismos é igual ao número original são 18, 45, 90 e 99.

(OAM - 2019) Problema 8. Chamamos de **resenheiro** todo número que possui um múltiplo cujas 4 primeiras casas decimais são 2019. Por exemplo, 3 é resenheiro, pois $20193 = 6731 \times 3$. Mostre que todo inteiro positivo é resenheiro.

Solução: Um número resenheiro é da forma $2019a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0$. Podemos reescreve-lo na forma

$$\begin{aligned}2019\underbrace{00\cdots0}_{k \text{ zeros}} + a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0 &=\\ 2019 \cdot 10^k + a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0.&\end{aligned}$$

Fazendo $t = a_{k-1}a_{k-2}\dots a_2a_1a_0$, tomando $N = 2019 \cdot 10^k + t$, com $10^k \geq n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Seja r o resto da divisão de $2019 \cdot 10^k$ por n. Desta forma temos que $0 \leq r \leq n-1$ e portanto, somando $-n$ à desigualdade temos $-n \leq r-n \leq -1$. Invertendo a desigualdade, temos $1 \leq n-r \leq n$. Como $n \leq 10^k$, então vale que $1 \leq n-r \leq n \leq 10^k$. Assim, o número $2019 \cdot 10^k + (n-r)$ tem sua representação decimal iniciada por 2019.

Como $2019 \cdot 10^k = n \cdot c + r$ para $c \in \mathbb{Z}$, então adicionando $n-r$ em ambos os membros, segue que

$$2019 \cdot 10^k + (n-r) = n \cdot c + r + (n-r) = n \cdot (c+1)$$

é múltiplo de n, e assim, n é resenheiro.

Problema Propostos

(OAM-2024) Problema 1. Considere o número $N = 2024202420242024$ que tem 16 dígitos. João brinca de apagar 5 dígitos desse número para formar outro número. Por exemplo, certa vez ele apagou todos os zeros e o último quatro, obtendo o número 22422422422. Com essa brincadeira, qual o maior número que João pode obter?

(OAM-2024) Problema 2. O ano 2024 é especial, pois 2024 é igual ao produto de dois números pares consecutivos, ou seja, $2024 = 44 \cdot 46$. Qual o último ano do milênio em que estamos (ou seja, menor que 3000), que tem essa propriedade?

(OAM-2022) Problema 3. Quantos números ab de dois algarismos são tais que ao multiplicar ab por qualquer número entre 1 e 9 resulta em um número cuja soma dos seus algarismos é $a+b$?

(OAM-2021) Problema 4. Dizemos que um número com $2n$ algarismos é elaino quando a soma dos seus primeiros n algarismos, da esquerda para a direita, é maior que ou igual a soma dos n últimos algarismos. Por exemplo, o número 9721 é elaino, pois $9+7 = 16$; $2+1=3$ e $16 > 3$. Encontre a quantidade de números elainos de quatro algarismos.

Referências

[1] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. 4ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2023. (Coleção PROFMAT).

[2] STEFFENON, Rogério Ricardo; GUARNIERE, Felipe Milan. **Belos Problemas de Matemática Discreta.** 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2024. (Coleção Olimpíadas de Matemática)

[3] OAM. Provas Anteriores, 2023. Disponível em: OAM - PROVAS ANTERIORES. Acesso em: 17 de Junho 2024.

[4] SILVA, Isis Gabriella de Arruda Quinteiro. O Princípio da Indução Finita. **É matemática, oxente!.** 28ª edição. Pernambuco, 2023.

2. Curiosidades

A bola quadrada do Quico

Heloisa Cardoso Barbosa Gomes[1]

Figura 2.1: Quico

Fonte: Ego - Globo.

A "bola quadrada do Quico" é uma expressão humorística da série mexicana "Chaves", criada por

[1]Egressa da Licenciatura em Matemática da UFRPE