

DECOMPONDO FATORIAIS: APLICANDO O TEOREMA DE LEGENDRE EM PROBLEMAS OLÍMPICOS

Weverton de Barros Vieira¹ Eben Alves da Silva²

Resumo

O ensino de fatoriais na educação básica geralmente se restringe a área de análise combinatória e probabilidade. Porém, em problemas olímpicos vê-se que os fatoriais podem ser usados em outras áreas como Aritmética e Teoria dos Números. Sendo assim, é fundamental ter conhecimento de técnicas para se trabalhar com fatoriais em problemas mais complexos. Uma destas ferramentas é o Teorema de Legendre, também conhecido como Fórmula de Polignac, que permite a decomposição do fatorial em fatores primos. O presente trabalho fundamenta o Teorema de Legendre, além de mostrar aplicações do mesmo em problemas da Olimpíada Alagoana de Matemática. Além disso, um dos problemas permite uma abordagem computacional onde se é aplicada a fórmula de Stirling, que estima valores de fatoriais grandes. Conclui-se então a grande importância de mostrar técnicas e problemas que saem do habitual conceito limitado de números fatoriais trabalhados na educação básica.

Palavras-chave: Fatorial; Teorema de Legendre; Fórmula de Stirling; Teoria dos Números.

1 Introdução

Na educação básica, o uso de fatoriais de números inteiros é burocrático, se restringindo a problemas de análise combinatória e probabilidade. Dessa forma, os estudantes da Educação Básica não possuem acesso ao uso de fatoriais em áreas como teoria dos números e aritmética. Dentro destes campos da matemática o uso de fatoriais e suas propriedades são recorrentes e essenciais para a resolução de problemas.

Tendo em vista a forte tendência das olimpíadas de matemática fazerem cada vez mais parte do calendário letivo das escolas do Brasil, é de fundamental importância que professores possam obter estratégias e metodologias de resolução de problemas olímpicos afim de preparar de forma adequada os alunos para as provas olímpicas. Assim, é recomendado que as técnicas e o uso de fatoriais sejam apresentados aos alunos nas diversas áreas da matemática.

Ao fazermos uma minuciosa verificação dos problemas de nível 3 da Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM), verificamos que um tópico recorrente abordado nas questões de Aritmética e Teoria dos Números envolve a divisibilidade, potenciação ou extração de raízes de fatoriais. Desta forma, é necessário expandir o leque de ferramentas e técnicas que permitam que os estudantes consigam resolver problemas olímpicos que envolvam fatoriais sem grandes dificuldades. Uma destas ferramentas que podem munir os alunos é o Teorema de Legendre, que permite achar a decomposição em fatores primos de qualquer fatorial.

Desta forma, na segunda seção apresentaremos a fundamentação do Teorema de Legendre e da Fórmula de Stirling, que permite estimar o valor do fatorial de um número grande. Nos resultados, mostraremos a resolução de três problemas olímpicos da OAM onde utilizamos o Teorema de Legendre para resolver problemas de Teoria dos Números e Aritmética como divisibilidade e extração de raízes de números fatoriais. Além disto, no último problema mostraremos o uso da Fórmula de Stirling para uma abordagem computacional do cálculo de números fatoriais grandes. Por fim, concluímos a relevância do uso de técnicas que extrapolam o conceito geral de fatorial trabalhado na educação básica.

¹UFAL - Campus Arapiraca: wev2709@gmail.com

²UFAL - Campus Arapiraca: ebenmath@gmail.com

2 Conceitos Básicos

Fizemos uma profunda revisão bibliográfica em [3] para fundamentar o Teorema de Legendre apresentado a seguir.

Teorema 1 Teorema de Legendre *Seja p um número primo. Então a maior potência de p que divide $n!$ é p^α onde*

$$\alpha = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

Observação: Note que a soma é finita, pois os termos $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ são eventualmente zero.

Prova: No produto $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, apenas os múltiplos p contribuem com um fator de p . Há $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ tais múltiplos entre 1 e n . Desses, os que são múltiplos de p^2 contribuem com um fator p extra e há $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ tais fatores. Dentre esses últimos, os que são múltiplos de p^3 contribuem com mais um fator p e há $\left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$ destes fatores e assim por diante, resultando na fórmula acima.

A seguir enunciaremos a proposição referente à Fórmula de Stirling cuja demonstração pode ser verificada nas referências [1] e [2].

Proposição 1 Fórmula de Stirling *A aproximação assintótica do fatorial de um número n é dada por*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Um dos problemas selecionados envolve a extração de várias raízes quadradas de um número fatorial. Para o problema que será realizado no próximo capítulo, o valor de n é grande. Então generalizamos o resultado da proposição acima para n suficientemente grande.

Proposição 2 *Para n suficientemente grande, o logaritmo natural do fatorial de n é dado por*

$$\ln n! = n \cdot \ln n - n$$

Prova: Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros da Fórmula de Stirling, temos

$$\begin{aligned} \ln n! &\approx \ln \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &= \ln (2\pi n)^{\frac{1}{2}} + \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln 2\pi + \ln n) + n \cdot (\ln n - \ln e) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln 2\pi + \frac{1}{2} \cdot \ln n + n \cdot \ln n - n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln 2\pi + \left(\frac{1}{2} + n\right) \cdot \ln n - n \end{aligned}$$

De modo que para n suficientemente grande, sem percas significativas, podemos definir que

$$\ln n! = n \cdot \ln n - n$$

3 Problemas Olímpicos

O problema a seguir apresenta uma simples aplicação do Teorema de Legendre na sua solução:

(OAM 2006) Problema 1. Encontre a maior potência de 3 que divide o número

$$N = \frac{(3 \cdot 2006)!}{2006!}$$

Lembre-se de que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Solução: Utilizando o Teorema de Legendre para encontrar o expoente da potência de 3 que aparece na decomposição de $(3 \cdot 2006)! = 6018!$ e $2006!$ temos:

$$E_3(6018!) = 2006 + 668 + 222 + 74 + 24 + 8 + 2 = 3004$$

$$E_3(2006!) = 668 + 222 + 74 + 24 + 8 + 2 = 998$$

Portanto, N tem como fator $\frac{3^{3004}}{3^{998}} = 3^{2006}$ e, portanto, esta é a maior potência de 3 que o divide.

No problema a seguir, usamos o Teorema de Legendre como ponto de partida para resolver um problema de critério de divisibilidade. Além disto, é apresentada uma solução alternativa usando os critérios de divisibilidade de 7, 11 e 13, não tão usuais na educação básica.

(OAM 2019) Problema 2. Denotamos por $n!$ o produto dos inteiros positivos de 1 a n . Por exemplo $1! = 1$, e $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. Sabendo que

$$20! = 2432902008176ab0000,$$

determine $a \times b$.

Solução: Vamos decompor $20!$ em fatores primos. Note que para p primo, tal que $p \geq 23$ tem-se $E_p(20!) = 0$. Desta forma, só precisamos verificar a decomposição de $20!$ em fatores primos, com $p \leq 19$. Aplicando o Teorema de Legendre, veja que $E_2(20!) = 10 + 5 + 2 + 1 = 18$, $E_3(20!) = 6 + 2 = 8$, $E_5(20!) = 4$, $E_7(20!) = 2$ e $E_{11}(20!) = E_{13}(20!) = E_{17}(20!) = E_{19}(20!) = 1$. Assim,

$$20! = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$$

Como $2^4 \times 5^4 = 10000$ é um fator de $20!$, temos que

$$\frac{20!}{10000} = \frac{20!}{2^4 \times 5^4} = 2^{14} \times 3^8 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 = 2432902008176ab$$

Este número tem $2^3 = 8$ e $3^2 = 9$ como fatores e assim, são divisíveis por 8 e por 9. Utilizando o critério de divisibilidade por 9, nota-se que a soma dos algarismos do número é $a + b + 44$, que deve ser divisível por 9. Desta forma, para $a + b + 44$ ser múltiplo de 9, devemos ter $a + b = 1$ (e como a e b são dígitos, as únicas possibilidades para ab são 01 ou 10) ou $a + b = 10$. Por outro lado, utilizando o critério de divisibilidade por 8, devemos ter o número $6ab$ divisível por 8. Como números terminados em 01 ou 10 não são divisíveis por 8, resta analisar o caso $a + b = 10$. De todos os pares possíveis, o único número que se adequa as duas condições é 64. Conclui-se então que $a = 6$ e $b = 4$ e assim $a \times b = 24$.

Solução Alternativa: Consideremos o número 2432902008176ab encontrado na solução anterior. Nota-se que este número tem como fatores 7, 11 e 13. Portanto, ele é divisível por $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Utilizando o critério de divisibilidade dos três números, devemos ter para algum $k \in \mathbb{Z}$

$$6ab - 817 + 200 - 290 + 243 = 1001k \implies 6ab - 664 = 1001k$$

Como a e b são dígitos a única possibilidade é que $6ab = 664$ e desta forma, $a = 6$ e $b = 4$. Portanto, $a \times b = 6 \times 4 = 24$.

Por fim, o problema a seguir envolve a extração de raízes de um número fatorial grande. A primeira solução é obtida utilizando o Teorema de Legendre. Porém, este problema abre possibilidades para trabalhar noções intuitivas de infinito na educação básica. Além disso, é dada uma solução alternativa utilizando a Fórmula de Stirling.

(OAM 2008) Problema 3. Um aluno digita o número $1000!$ numa calculadora e aperta a tecla raiz quadrada, 30 vezes. Qual a parte inteira do número encontrado?

Solução: A expressão que representa o que queremos calcular é

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{1000!}}}} = {}^{2^{30}}\sqrt{1000!}$$

Para isso, vamos determinar o expoente do fator 2 através do Teorema de Legendre em $1000!$. Veja que

$$E_2(1000!) = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994$$

Portanto, 2^{994} é um dos fatores de $1000!$ e o fator de maior expoente. Porém, $994 < 1024 = 2^{10} < 2^{30}$, e assim, nenhum fator 2 será extraído da raiz. Logo, não haverá nenhuma extração da raiz. Note também que $\sqrt[2^{30}]{1000!} > \sqrt[2^{30}]{1} = 1$ e portanto, a parte inteira do número encontrado será 1.

Comentário: Nesta questão, pode-se trabalhar noções de infinito intuitivamente com os alunos da educação básica. O resultado que a questão busca é um número que multiplicado por ele mesmo 2^{30} vezes resulta em $1000!$. Generalizando o problema, definindo-se a função $f(x) = \sqrt{x}$, note que o que a questão pede é que seja realizado a composição da função f com ela mesma uma quantidade n de vezes, ou seja,

$$\underbrace{(f \circ f \circ f \cdots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{x}}}} = \sqrt[n]{x}$$

Usaremos o seguinte fato: Dado a sequência $x_{2^n} = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{2^n}}$, se $a > 1$, temos que a sequência x_{2^n} é decrescente e limitada. Logo, se fizermos 2^n se tornar muito grande a sequência x_{2^n} ficará muito próximo de 1.

Solução Alternativa: Computacionalmente, podemos utilizar a fórmula de Stirling da seguinte maneira: Calcular a raiz de índice k de um número N é a mesma coisa de verificar quantas k vezes devemos multiplicar um número x por ele mesmo até resultar em N . Equacionando, temos $x^k = N$. Seja então $N = n!$. Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros:

$$\ln x^k = \ln n!$$

Dado n grande, a fórmula de Stirling nos dá uma aproximação para $\ln n!$ como

$$\ln n! = n \cdot \ln n - n$$

Assim, podemos reescrever a equação anterior como

$$\ln x^k = n \cdot \ln n - n$$

Desenvolvendo a equação anterior aplicando as devidas propriedades de logaritmos, obtemos

$$\begin{aligned} k \cdot \ln x &= n \cdot \ln n - n \\ \ln x &= \frac{n \cdot \ln n - n}{k} \\ e^{\ln x} &= e^{\frac{n \cdot \ln n - n}{k}} \\ x &= e^{\frac{n \cdot \ln n - n}{k}} \end{aligned}$$

Aplicando para ao problema aqui trabalhado, temos $n = 1000$ e $k = 2^{30}$

$$x = e^{\frac{1000 \cdot \ln 1000 - 1000}{2^{30}}}$$

Utilizando uma calculadora, facilmente obtemos

$$x = 1.00000550204099279185174292131558406906144 \dots$$

que é a aproximação decimal para a raiz pedida. Desta forma, a parte inteira é igual a 1.

4 Conclusão

Como apresentado nos problemas, nota-se que a decomposição em fatores primos de fatoriais permite que diversos problemas olímpicos sejam desenvolvidos de maneira mais objetiva. Desta forma, o Teorema de Legendre é uma técnica que pode ser trabalhada na educação básica e de grande valia para resoluções de problemas aritméticos.

Além disso, o uso apropriado de ferramentas computacionais pode introduzir já na educação básica conceitos que muitos alunos veem somente no ensino superior, como noções de infinito.

A integração de resolução de problemas olímpicos aliada a aplicabilidades computacionais pode tornar a matemática mais acessível e atrativa, incentivando a curiosidade e o aprofundamento dos estudantes no assunto.

Bibliografia

- [1] CONRAD, Keith. Stirling's formula. Disponível em: <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/stirling.pdf>. 2016
- [2] FIGUEIRA, Ramon Formiga et al. O Número de Euler. 2017.
- [3] MOREIRA, Carlos G. T. de A.; MOREIRA, Fábio E. Brochero, SALDANHA, Nicolau C., Tópicos em Teoria dos Números. Rio de Janeiro, SBM, 2021.
- [4] OAM. Provas Anteriores, 2023. Disponível em: <https://sites.google.com/view/oamufal/provas-antteriores>. Acesso em: 17 de Junho 2024.