

Usando Médias e suas Desigualdades para a Resolução de Problemas Olímpicos

Weverton de Barros Vieira¹ Eben Alves da Silva²

PROFMAT UFAL, Arapiraca, AL

Resumo. Com a proliferação de olimpíadas de matemática no ano letivo escolar brasileiro, com problemas desafiadores, é necessário que os professores de matemática aprimorem e aprofundem seus conhecimentos para além do que é comumente visto em sala de aula. Um dos temas clássicos de problemas olímpicos são as médias e suas desigualdades. Este trabalho consiste numa revisão das provas anteriores da Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM) e na delimitação no estudo dos problemas que envolvem médias e suas desigualdades. Desta forma, este trabalho faz uma profunda revisão bibliográfica sobre os conceitos matemáticos sobre o tema. Em seguida, são apresentados alguns problemas da OAM assim como suas soluções. Ao fim, é destacado a importância do estudo aprofundado das diferentes médias no ensino básico.

Palavras-chave. Médias, Desigualdade das Médias, Desigualdade de Cauchy-Schwarz, Olimpíada Alagoana de Matemática.

1 Introdução

As olimpíadas de matemática ocupam um grande enfoque do ensino em alto nível de matemática na educação básica. Com problemas criativos e desafiadores, essas competições exigem que os alunos tenham conhecimento profundo e diversificado e que em muitos casos deve ultrapassar a matemática limitada dos atuais materiais didáticos dos sistemas de ensino do país.

Um dos conteúdos mais prolíficos nas olimpíadas de matemática são problemas que envolvem cálculo de médias ou as relações de desigualdades entre diferentes médias. Tal conteúdo na educação básica é quase sempre restrito a simples média aritmética e ponderada, e dessa forma não são abordados outros tipos de média, como a geométrica, harmônica e quadrática, e muito menos as relações de desigualdades entre elas.

Assim, um dos objetivos deste trabalho é apresentar uma revisão bibliográfica dos conceitos de cada uma das médias e algumas desigualdades entre as mesmas. Além disso, são apresentados alguns problemas da Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM) em que nas soluções foram usados os conceitos previamente expostos. Por fim, concluímos a importância de se apresentar os conceitos de médias que extrapolem a simples apresentação da média aritmética simples e ponderada que comumente é a única apresentada no ensino básico.

2 Metodologia

O trabalho foi fundamentado em uma revisão de todas as provas de nível 3 da Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM) em que se identificou os conteúdos mais recorrentes que são temas

¹wev2709@gmail.com

²ebenmath@gmail.com

de problemas da prova. Posteriormente, delimitou-se que o foco do trabalho seria os problemas que envolvem médias.

Assim, foi necessária uma revisão bibliográfica dos conceitos básicos sobre médias e suas desigualdades para a resolução e discussão dos problemas.

2.1 Conceitos Básicos

As definições abaixo foram retiradas de Morgado e Carvalho [1].

Definição 2.1. A média aritmética dos n números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é definida por

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Definição 2.2. A média geométrica dos n números positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ é definida por

$$MG = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Definição 2.3. A média harmônica dos n números positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ é definida por

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Definição 2.4. A média quadrática dos n números positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ é definida por

$$MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

isto é, a medida quadrática é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos números.

Os Teoremas abaixo foram retirados de Oliveira e Fernández [3]. As demonstrações destas desigualdades são mais técnicas e trabalhosas e não serão expostas aqui, mas podem ser encontradas na referência.

Teorema 2.1 (A Desigualdade das Médias). Para toda coleção de números reais positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ se verificam as seguintes desigualdades:

$$MH \leq MG \leq MA \leq MQ$$

E a igualdade em cada caso só ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Teorema 2.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Se n é inteiro, $n \geq 2$, e $a_1, a_2, \dots, a_n$, e $b_1, b_2, \dots, b_n$ são números reais, então

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

Consideraremos $n = 3$ nos problemas em que usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, ou seja,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

3 Resultados e Discussão

Todos os problemas discutidos a seguir foram retirados de OAM [2]. Antes da apresentação de cada solução, são expostos os fatos matemáticos que serão utilizados em cada resolução.

Problemas Olímpicos

(OAM - 2007) **Problema 1.** Sejam a, b, c, x, y e z números reais tais que $a^4 + b^4 + c^4 = 1 = x^4 + y^4 + z^4$. Prove que

$$ax + by + cz \leq \sqrt{3}$$

Solução:

Fato (1):

Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

Dados $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Fato (2):

Desigualdade das Médias Quadrática e Aritmética:

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

Utilizando o fato (1) para as seqüências de números reais positivos (a^2, b^2, c^2) e (x^2, y^2, z^2) temos que:

$$\begin{aligned} ((ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2)^2 &\leq ((a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2)((x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2) \implies \\ ((ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2)^2 &\leq (a^4 + b^4 + c^4)(x^4 + y^4 + z^4) \implies \\ ((ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2)^2 &\leq 1 \cdot 1 \implies \\ ((ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2)^2 &\leq 1 \implies \\ (ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2 &\leq 1 \implies \\ \frac{(ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2}{3} &\leq \frac{1}{3} (*) \end{aligned}$$

Agora, aplicando o fato (2) para os números reais positivos ax, by e cz , obtemos:

$$\sqrt{\frac{(ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2}{3}} \geq \frac{ax + by + cz}{3} \implies \frac{(ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2}{3} \geq \frac{(ax + by + cz)^2}{9}$$

Pelo resultado obtido em (*), por transitividade, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &\geq \frac{(ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2}{3} \geq \frac{(ax + by + cz)^2}{9} \implies \\ \frac{1}{3} &\geq \frac{(ax + by + cz)^2}{9} \implies \\ 3 &\geq (ax + by + cz)^2 \implies \\ \sqrt{3} &\geq ax + by + cz \end{aligned}$$

O que prova a relação pedida.

(OAM - 2015) Problema 2. Sabendo que x e y são números reais que satisfazem $x^2 + 4y^2 = 102$, calcule o maior natural mais próximo do maior valor possível de xy^2 .

Solução:

Fato: (1):

Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica:

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

Utilizando o fato (1) para os números reais positivos x^2 , $2y^2$ e $2y^2$, temos:

$$\frac{x^2 + 2y^2 + 2y^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot 2y^2 \cdot 2y^2} \implies \frac{x^2 + 4y^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot 4y^4}$$

Utilizando a relação dada no enunciado e elevando ambos os membros ao cubo temos:

$$\left(\frac{102}{3}\right)^3 \geq x^2 \cdot 4y^4 \implies 34^3 \geq x^2 \cdot 4y^4 \implies 17^3 \cdot 2^3 \geq x^2 \cdot 4y^4$$

Extraindo-se a raiz quadrada em ambos os lados:

$$34\sqrt{34} \geq 2x \cdot y^2 \implies 17\sqrt{34} \geq x \cdot y^2$$

Como $\sqrt{34} \approx 5,83$ segue que:

$$17 \cdot 5,83 \geq x \cdot y^2 \implies 99,12 \geq x \cdot y^2$$

Portanto, o maior natural mais próximo do maior valor possível de xy^2 é 99.

(OAM - 2019) Problema 3. Ache o menor valor de

$$E(x) = x^3(x^3 + 1)(x^3 + 2)(x^3 + 3) + 2020$$

em que x varia no conjuntos dos números reais.

Solução:

Fato (1):

A média aritmética entre quatro números reais a, b, c, d é dada por

$$\frac{a + b + c + d}{4}$$

Fato (2):

$$\text{Dados } x, y \in \mathbb{Z}_+ \text{ então } x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Seja A a média aritmética entre os números x^3 , $(x + 1)^3$, $(x + 2)^3$ e $(x + 3)^3$, ou seja,

$$A = \frac{x^3 + (x^3 + 1) + (x^3 + 2) + (x^3 + 3)}{4} \implies A = \frac{4x^3 + 6}{4} \implies A = x^3 + \frac{3}{2}$$

Podemos reescrever a relação acima como

$$x^3 = A - \frac{3}{2}$$

Substituindo esta relação em $P(x) = x^3(x^3 + 1)(x^3 + 2)(x^3 + 3)$ obtemos o polinômio $R(A)$ tal que

$$\begin{aligned} R(A) &= \left(A - \frac{3}{2}\right) \left(A - \frac{3}{2} + 1\right) \left(A - \frac{3}{2} + 2\right) \left(A - \frac{3}{2} + 3\right) \implies \\ R(A) &= \left(A - \frac{3}{2}\right) \left(A - \frac{1}{2}\right) \left(A + \frac{1}{2}\right) \left(A + \frac{3}{2}\right) \implies \\ R(A) &= \left(A^2 - \frac{1}{4}\right) \left(A^2 - \frac{9}{4}\right) \end{aligned}$$

Seja B a média aritmética entre $\left(A^2 - \frac{1}{4}\right)$ e $\left(A^2 - \frac{9}{4}\right)$, ou seja,

$$B = \frac{\left(A^2 - \frac{1}{4}\right) + \left(A^2 - \frac{9}{4}\right)}{2} \implies B = \frac{2A^2 - \frac{10}{4}}{2} \implies B = A^2 - \frac{5}{4}$$

Podemos reescrever a equação acima como

$$A^2 = B + \frac{5}{4}$$

Usando a igualdade acima em $R(A)$ temos o polinômio $Q(B)$ tal que

$$Q(B) = \left(B + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) \left(B + \frac{5}{4} - \frac{9}{4}\right) \implies Q(B) = (B + 1)(B - 1) \implies Q(B) = B^2 - 1$$

Note que como $B^2 \geq 0$, o menor valor que $Q(B)$ pode assumir é -1 . Portanto, o menor valor possível para $E(x) = P(x) + 2020 = Q(B) + 2020 \geq -1 + 2020 = 2019$.

(OAM - 2024) Problema 4. Sabendo que x e y são número reais positivos tais que $xy = 1$, determine qual é o menor valor para a expressão

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2 + 2}$$

Solução:

Fato: (1):	Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica: Dados $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se: $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$
-------------------	---

Note que

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{x^4}{x^2 + y^2 + 2} + \frac{y^4}{x^2 + y^2 + 2}$$

Aplicando o fato (1) para os números reais positivos $\frac{x^4}{x^2 + y^2 + 2}$ e $\frac{y^4}{x^2 + y^2 + 2}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x^4}{x^2 + y^2 + 2} + \frac{y^4}{x^2 + y^2 + 2}}{2} &\geq \sqrt{\frac{x^4}{x^2 + y^2 + 2} \cdot \frac{y^4}{x^2 + y^2 + 2}} \implies \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2 + 2} \geq \sqrt{\frac{(xy)^4}{(x^2 + y^2 + 2)^2}} \\ &\implies \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2 + 2} \geq \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2 + 2} \\ &\implies \frac{x^4 + y^4}{2} \geq (xy)^2 \end{aligned}$$

Como $xy = 1$,

$$\frac{x^4 + y^4}{2} \geq 1^2 \implies x^4 + y^4 \geq 2$$

Note que o valor mínimo só ocorre no caso da igualdade $x = y$. Logo,

$$x^4 + x^4 = 2 \implies 2x^4 = 2 \implies x^4 = 1 \implies x = 1$$

Portanto, a expressão $\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2 + 2}$ terá o valor mínimo quando $x = y = 1$, ou seja,

$$\frac{1^4 + 1^4}{1^2 + 1^2 + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

4 Considerações Finais

Na solução dos problemas apresentados, é notável como o conhecimento aprofundado sobre as diferentes médias e as desigualdades entre elas são fundamentais para a resolução de problemas mais elaborados. Assim, é de grande importância que os professores de matemática da educação básica trabalhem as mais variadas médias e suas relações e não só a média aritmética e média ponderada que a grande parte dos materiais didáticos brasileiros se limitam.

Com a grande difusão de olimpíadas de matemática, é interessante que os professores de matemática as usem como ferramenta para apresentar uma matemática mais atrativa e desafiadora aos alunos.

Referências

- [1] Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho. **Matemática Discreta**. 4ª edição. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2023.
- [2] OAM. **OAM - Provas Anteriores**. Disponível em: <https://sites.google.com/view/oamufal/provas-antiores?authuser=0>. Acesso em: 27 de Abril de 2024. Maceió, 2023.
- [3] Krerley Irraciel Martins Oliveira e Adán José Corcho Fernández. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. 2ª edição. Coleção Olimpíadas de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.