



Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



O Estudo da Divisibilidade Aplicada em Problemas Olímpicos por meio da Resolução de Problemas

Daniel Lucas da Silva

Juazeiro do Norte - CE

2025

O Estudo da Divisibilidade Aplicada em Problemas Olímpicos por meio da Resolução de Problemas

Daniel Lucas da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

Juazeiro do Norte - CE

2025

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Da Silva, Daniel Lucas

D111e O Estudo da Divisibilidade Aplicada em Problemas Olímpicos por meio da Resolução de Problemas / Daniel Lucas Da Silva. Juazeiro do Norte - Ce, 2025.
98p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

1.Divisibilidade, 2.Olimpiadas de Matemática, 3.Problemas Olímpicos, 4.Resolução de Problemas, 5.Sequência Didática; I.Título.

CDD: 510

O Estudo da Divisibilidade Aplicada em Problemas Olímpicos por meio da Resolução de Problemas

Daniel Lucas da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título mestre em matemática.

Aprovada em 29/09/2025


Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira(Orientador)

Universidade Regional do Cariri(URCA)


Prof.ª. Ma. Bárbara Paula Bezerra Leite Lima

Universidade Regional do Cariri(URCA)


Prof.ª. Dra. Francisca Leidmar Josué Vieira

Universidade Regional do Cariri(URCA)


Prof.ª. Dra. Francisca Damiana Vieira

Universidade Federal do Cariri(UFCA)

Dedico este trabalho a todos que me ajudaram.

Agradecimentos

Agradeço a amigos e professores que dedicaram tempo e atenção na construção deste trabalho.

“Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar.”(François Viète)

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem sobre o estudo da divisibilidade e suas aplicações por meio da resolução de problemas. O trabalho destaca a presença e importância destes conceitos nas olimpíadas de matemática, tratando das peculiaridades que estes problemas possuem. O texto desenvolvido ao decorrer dos seus quatro capítulos tem por objetivo tornar-se material de apoio para a preparação para olimpíadas. Inicialmente é feita uma abordagem histórica das olimpíadas, apresentando seu desenvolvimento ao longo dos anos. Logo em seguida, são tratados os conceitos de divisibilidade desenvolvidos através da Teoria dos Números, expondo os principais resultados, juntos a alguns exemplos. No terceiro capítulo é apresentada uma metodologia útil na resolução de problemas olímpicos. No quarto capítulo, são tratados problemas olímpicos das mais diversas olimpíadas e de níveis variados, utilizando o passo a passo idealizado por Polya. Por fim, é apresentado o planejamento e execução de um curso com objetivo de preparar os alunos para olimpíadas através da aplicação de uma sequência didática.

Palavras-chave: Divisibilidade; Olimpíadas de Matemática; Problemas Olímpicos; Resolução de Problemas; Sequência Didática.

Abstract

This work presents an approach to the study of divisibility and its applications through problem-solving. It highlights the presence and importance of these concepts in mathematical olympiads, addressing the peculiarities inherent in such problems. Developed over four chapters, the text is intended to serve as supporting material for olympiad preparation. The first chapter offers a historical overview of the olympiads, outlining their development over the years. The second chapter discusses the concepts of divisibility developed within Number Theory, presenting key results along with illustrative examples. The third chapter introduces a methodology useful for solving olympiad problems, while the fourth chapter addresses problems from a variety of competitions and at different levels of difficulty, applying the step-by-step framework proposed by Pólya. Finally, the work presents the planning and implementation of a course designed to prepare students for olympiads through the application of a didactic sequence.

Keywords: Divisibility; Mathematics Olympiads; Olympiad Problems; Problem Solving; Didactic Sequence.

Lista de Figuras

6.2.1 Problema OBMEP - 2019	82
---------------------------------------	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
IMO	Olimpíada Internacional de Matemática
OCM	Olimpíada Cearense de Matemática
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
MDC	Máximo Divisor Comum
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
PIC	Programa de Iniciação Científica
PICME	Programa de Iniciação Científica e Mestrado

Índice

1	INTRODUÇÃO	13
2	História das Olimpíadas	16
2.1	Olimpíada de Matemática no Brasil	17
2.2	Olimpíada Cearense de Matemática	19
2.3	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas	20
3	Fundamentação Teórica	24
3.1	Definições, Teoremas, Corolários e Exemplos	25
4	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	52
5	PROBLEMAS OLÍMPICOS	61
6	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	76
6.1	Estrutura da Sequência Didática	76
6.2	Problemas Aplicados	79
6.3	Considerações Sobre o Curso Aplicado	93
7	CONSIDERAÇÃO FINAIS	95

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A matemática é uma das ciências mais antigas da história da humanidade, sendo uma das bases do desenvolvimento humano, na verdade, podemos dizer que a humanidade e a matemática evoluíram juntas. O conhecimento matemático básico é indispensável no desenvolvimento de atividades do dia a dia. Para além disso, a matemática aliada a outras ciências gerou contribuições inestimáveis para o desenvolvimento social e tecnológico da humanidade. A matemática foi, e ainda é, um dos pilares do desenvolvimento humano, estando presente na construção das maiores tecnologias, como por exemplo, o computador, e no estudo e compreensão do universo, auxiliando a física, a astronomia e as mais diversas ciências.

A matemática é uma ciência vasta, dividida em inúmeras vertentes que se relacionam. Dentre estas área, há uma bastante conhecida principalmente por seus problemas de enunciados simples, contudo, de soluções muitas vezes complexas: a divisibilidade. Esta área ocupa um lugar muito importante na construção do conhecimento matemático dos alunos, sendo estudada no ensino fundamental, médio, superior, e até mesmo em cursos de mestrado e doutorado.

Tendo suas raízes junto ao desenvolvimento da própria humanidade, presente nas atividades de compartilhar, distribuir ou dividir objetos, a divisão tornou-se uma

atividade considerada essencial ao ser humano. Tãmanha foi a importãncia da divisibilidade que a mesma ocupou alguns capítulos do livro Os elementos de Euclides, que reuniu varias definições e teoremas sobre geometria e divisibilidade.

Por outro lado, as olimpíadas de matemática rapidamente se popularizaram, trazendo consigo problemas distintos daqueles geralmente trabalhados em sala de aula, que em geral possuíam enunciados curtos e de simples compreensãõ, contudo traziam soluções desafiadoras, inovadoras e que necessitavam de uma boa dose de imaginaçãõ. Essa novidade acabou por atrair a curiosidade dos alunos e matemáticos, estimulando o raciocínio e o desenvolvimento matemático. As olimpíadas ao mesmo tempo que se tornaram uma competiçãõ desafiadora para alunos de todos os países, também possibilitaram por meio do trabalho de problemas em sala de aula, uma grande contribuiçãõ para o desenvolvimento da educaçãõ.

Nos dias atuais, devido sua grande importãncia, a divisibilidade ocupa lugar importante na base nacional comum curricular, sendo umas das habilidades esperadas que os alunos do ensino fundamental, em especial, os dos 6º ano dominem. Tal importãncia reflete na grande quantidade de problemas olímpicos envolvendo divisibilidade, sendo um dos conhecimentos mais cobrados nas edições das várias olimpíadas existentes, citando como exemplo, na OBMEP, desde sua primeira ediçãõ é possível encontrar problemas em que sua soluçãõ necessita de conhecimentos sobre divisibilidade.

Embora os problemas olímpicos abordem conceitos geralmente trabalhados em sala de aula, o simples domínio dos conceitos básicos não é suficiente para solucionar os problemas que são apresentados nestes eventos. Muitas vezes é necessário uma melhor compreensãõ dos conceitos estudados e a constante resoluçãõ de problemas desafiadores, haja visto que estes guardam peculiaridades próprias e diferentes dos problemas cotidianos trabalhados em sala de aula. Assim, uma preparaçãõ focada para olimpíadas utilizando como uma de suas metodologias a resoluçãõ de problemas poderá dar condições e propiciar aos alunos mais ferramentas e estratégias na hora de solucionar tais problemas, além de contribuir para sua educaçãõ de forma geral, pois

viabiliza o alcance de um maior domínio e expansão dos conhecimentos já aprendidos na escola.

Diante da importância de um projeto de estudos para olimpíadas, é que foi idealizado este trabalho, o qual vem com o objetivo de apresentar definições, ideias e teoremas sobre divisibilidade, além da apresentação e aplicação da resolução de problemas como uma metodologia eficaz no estudos de tais problemas, permitindo que este trabalho possa ser utilizada como base de um projeto de aulas especiais do ensino fundamental ou médio, por meio de uma adaptação, como forma de preparar os alunos para os desafiantes problemas presentes em várias olimpíadas.

O trabalho está dividido em quatro partes, no primeiro capítulo será dado um breve contexto histórico sobre as olimpíadas no Brasil e no Ceará. No segundo capítulo, serão apresentados as definições e resultados importantes no estudo da divisibilidade sobre o enfoque da Teoria dos Números, indo desde o próprio conceito de divisibilidade até o estudo básico de congruência e seus principais resultados. No terceiro capítulo será discutido a resolução de problemas como uma metodologia eficaz no estudo para as olimpíadas. No quarto capítulo serão apresentados ideias de aplicação dos conceitos estudados no capítulo anterior utilizando como metodologia principal a resolução de problemas. No quinto e último capítulo, será apresentado uma sequência didática aplicada com uma turma de 6° ano, onde o conteúdo de divisibilidade para olimpíadas já está sendo trabalhado como conteúdo normal de sala de aula.

Capítulo 2

História das Olimpíadas

Dentre todas as ciências, a matemática foi uma das que desempenhou papel fundamental no desenvolvimento humano, tendo seus resultados aplicados a várias outras áreas do conhecimento, desde a tecnologia até mesmo à medicina. Todas as pessoas usam matemática em seu cotidiano, desde de atividades corriqueiras até atividades mais complexas, contudo, para além do uso cotidiano, a matemática está presente na elaboração e solução dos mais diversos problemas do nosso universo. Diante da tamanha importância desta ciência como área do conhecimento e ferramenta de compreensão do universo, faz-se necessário que o domínio desta ciência seja perseguido por um país, logo, devem ser construídos meios eficazes para que possam ser identificados estudantes que possuam alto domínio da matemática, para que recebam condições de desenvolver ainda mais suas habilidades e aumentar seu interesse por esta ciência.

Com o objetivo de encontrar e estimular grandes talentos da matemática e de desafiar as mais brilhantes mentes da época, foram criadas as olimpíadas de matemática, as quais, um pouco diferente de hoje, tinham em sua origem o objetivo de ser uma forma de se criar desafios entre os matemáticos e estudantes de matemática, sendo problemas de alto nível e cuja solução era vista como motivo de prestígio social e de sucesso acadêmico. O que começou como um conjunto de desafios matemáticos, que

desafiava e exercitava o raciocínio e a imaginação dos participantes, transformou - se, ao longo dos séculos, também numa porta de entrada a várias grandes oportunidades, desde bolsas de estudos, vagas especiais em universidades e até mesmo conquista de vagas nas universidades mais prestigiadas do mundo, isso tudo sem contar o reconhecimento pelo brilhantismo no resultado obtido pelas soluções apresentadas. Para além dos desafios propostos e das respostas criativas, as olimpíadas, nos dias atuais, também desempenham papel de grande importância no desenvolvimento da educação de todos esses países, pois estimulam a criatividade, priorizando a imaginação, sem deixar o rigor matemático necessário.

A primeira olimpíada de matemática foi realizada na Hungria, em 1894 sendo uma das primeiras competições de alcance nacional a desafiar os estudantes do ensino médio com problemas matemáticos desafiadores. Desde então vários países foram criando suas próprias olimpíadas. Tal ato culminou em 1959 com a primeira edição da Olimpíada Internacional de Matemática.

As olimpíadas de matemática rapidamente ganharam popularidade em todo o mundo e várias outras nações começaram a elaborar suas próprias olimpíadas de matemática com suas particularidades. Como foi o caso do Brasil, que há mais de quatro décadas atrás criou a OBM, a Olimpíada Brasileira de Matemática.

2.1 Olimpíada de Matemática no Brasil

A notoriedade e importância das olimpíadas de matemática logo foi reconhecida por inúmeros países, e no Brasil não foi diferente, as olimpíadas de matemática ganharam bastante fama e visibilidade, sendo a premiação em uma olimpíada um grande diferencial na vida acadêmica e profissional de muitos jovens. No Brasil as olimpíadas surgiram primeiramente no estado de São Paulo com a Olimpíada Paulista de Matemática que ocorreu em 1977.

A primeira edição de uma olimpíada de matemática no Brasil de alcance nacional

foi organizada em 1979 pela Sociedade Brasileira de Matemática, cujos objetivos dentre vários eram estimular o ensino de matemática, melhorar a qualidade do ensino de matemática, encontrar e formar novos talentos na matemática, objetivos estes que estão presentes até hoje nas edições atuais. Desde então o modelo da olimpíada brasileira de matemática mudou e ganhou vários formatos. Em 1991 a competição passou a ter dois níveis, o Júnior, para alunos com até 15 anos de idades e o Sênior, destinado a alunos do ensino médio.

No ano de 1998, o modelo da prova passou a ser dividido em três níveis. O nível 1 era composto por alunos da 5ª e 6ª série, nível 2, por alunos da 7ª e 8ª série, e o nível 3, por alunos do ensino médio. Neste período as provas aconteciam em três fases. Na primeira fase as provas do nível 1 e 2 possuíam 20 questões, enquanto a do nível 3 possuía 25 questões. Na segunda fase, as provas de todos os três níveis possuíam 6 questões discursivas. Por fim, na terceira fase, as provas do nível 1 e 2 possuíam 4 questões também discursivas, já a do nível 3 possuía 6 questões também discursivas.

No ano de 2001, a OBM trouxe uma grande novidade, um novo nível, o nível universitário, destinado especialmente aos alunos da graduação, permitindo que o alcance da olimpíada fosse ainda maior. No ano de 2017 houve uma novidade, já com o surgimento da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, os alunos medalhistas nesta olimpíadas estariam convidados para participar da OBM, que neste mesmo ano tornou a competição dos níveis 1, 2 e 3, em fase única. Neste novo modelo, a prova do nível 1 era composta por 5 questões discursivas, enquanto as provas dos níveis 2 e 3 eram formadas por 6 questões discursivas. No nível universitário passou a ser aceito a inscrição individual de alunos da graduação. Este último modelo adotado pela OBM se mantém até os dias atuais.

Todos os anos desde sua criação a OBM premia os alunos com os melhores desempenhos. Os prêmios originalmente são medalhas de bronze, prata e ouro, além de certificados de menção honrosa, contudo, os ganhos advindos dos esforços e dos brilhantes resultados se propagam por toda a vida acadêmica e profissional dos premi-

ados. Além de contribuir para encontrar talentos, a OBM fez com que muitos alunos descobrissem uma paixão e um talento por esta ciência, mudou vidas ao permitir que muitos dos premiados pudessem concluir estudos em nível superior, muitas vezes em universidades de grande prestígio fora do país, como também tornou a matemática ferramenta principal da vida profissional dessas pessoas. E em um nível ainda maior, contribui para a melhoria do ensino de matemática, ao engajar professor e alunos a montar grupos de estudos com objetivo de se realizar um estudo mais aprofundado de conteúdos que vão além daqueles da sala de aula. Contribui também na formação de docentes da área da matemática, ao se fazer necessário uma formação especial voltadas para poder contribuir com as ambições acadêmicas destes alunos.

Além dos prêmios já mencionados, a OBM oferece a cada ano a participação dos alunos medalhistas em um evento conhecido como Semana Olímpica, onde os alunos durante uma semana participam de treinamento para outras olimpíadas, além de participarem de palestras com objetivo de orientação acadêmica. É também durante a Semana Olímpica que ocorre a premiação dos alunos da OBM. Além das várias premiações a OBM também serve como porta para participação de outras olimpíadas internacionais como a Olimpíada Ibero Americana e a Olimpíada Internacional de Matemática.

2.2 Olimpíada Cearense de Matemática

Além da OBM de alcance nacional, outras olimpíadas foram criadas por regiões, estados e até por municípios. Um desses grandes exemplos de promoção do ensino e da criatividade da matemática foi a OCM, Olimpíada Cearense de Matemática, criada em 1981 e organizada pela Universidade Federal do Ceará. A prova, assim como a da OBM é dividida em níveis, destinando - se a alunos do ensino fundamental e médio, considerada umas das melhores olimpíadas do Brasil, é também a porta de entrada para outras olimpíadas.

A primeira edição da olimpíada cearense de matemática aconteceu em 1981 pela iniciativa do departamento de matemática da universidade federal do Ceará, desde então, a olimpíada acontece todos os anos, desafiando alunos do ensino fundamental e médio. Considerada uma das olimpíadas de matemática mais difíceis do Brasil, aliado ao ótimo desempenho dos alunos cearenses, a participação de alunos cearenses tornou-se tradicional na OBM e em várias olimpíadas internacionais.[?]

A OCM, assim como a OBM, tem como objetivos, estimular o estudo de matemática pelos alunos, melhorar o ensino de matemática e a formação de professores de matemática, além de descobrir novos talentos. Atualmente a OCM é dividida em três níveis, nível 1 composta por alunos da 6° e 7° do ensino fundamental, nível 2, composto por alunos da 8° e 9° do ensino fundamental, e nível 3, composto por alunos do ensino médio. Para todos os níveis, a prova é composta de 5 problemas de natureza discursiva, cada um valendo um total de 10 pontos. Os alunos com os melhores desempenho são premiados pelo departamento de matemática da universidade federal do Ceará com medalhas de bronze, prata e ouro, além de poderem participar de olimpíadas de nível internacional.

2.3 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Dentre todas as olimpíadas de matemática realizadas no Brasil, a OBMEP é provavelmente a de maior destaque e conhecimento. Sendo realizada desde o ano de 2005, com o objetivo de estimular o estudo de matemática e de identificar novos talentos, a OBMEP rapidamente se tornou conhecida e sua aprovação, sinônimo de excelência no estudo da matemática. A OBMEP foi idealizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, em parceria com o Ministério da Educação e do Ministério de Ciência, Tecnologia e Inovação. Sua primeira edição em 2005 contou com a participação de alunos de todo o país, só nesta edição que foi o ponta pé inicial, foram inscritos 10,5

milhões de alunos. Desde de sua primeira edição, até os dias atuais a OBMEP ganhou grande destaque e importância nas escolas brasileiras, fazendo com que a quantidade de alunos inscritos e participantes tivesse um enorme crescimento ao decorrer dos anos, saltando de 10,5 milhões de alunos inscritos em 2005, para 18,5 milhões de alunos inscritos na edição de 2024, mostrando assim como o projeto conseguiu ter um alcance de dimensões nacionais, desafiando jovens brasileiros de todas as regiões do país, e além disso, encontrando jovens talentosos escondidos até nas regiões mais afastadas do país. A prova da OBMEP desde de sua primeira edição é realizada nas próprias escolas, permitindo que jovens que moram em regiões mais isoladas tenham a oportunidade de ter seus conhecimentos desafiados e suas habilidades reconhecidas, além de serem expostos a novas possibilidades.

A OBMEP é dividida em níveis e fases. A prova é dividida em três níveis e em duas fases, de forma a alcançar todos os alunos do fundamental até o ensino médio. A prova do nível 1 é destinada aos alunos do 6° e 7° ano do fundamental, a do nível 2 é destinada aos alunos do 8° e 9° ano, e por fim, a prova do nível 3 que é destinada aos alunos do ensino médio. Cada prova da primeira fase é composta de 20 questões objetivas com 5 cada alternativas cada, com algumas questões comuns a provas de outros níveis. A prova da segunda fase, realizada para os alunos classificados, é composta por 6 questões discursivas. O diferencial da OBMEP para outras olimpíadas é desafiar a imaginação, a criatividade e o domínio dos conceitos matemáticos em problemas de enunciados de fácil entendimento e não muitos longos ou cheio de símbolos matemáticos. Evidenciando que muitas vezes um pensamento criativo é mais importante na resolução dos problemas desafiadores.

As premiações concedidas são medalhas de ouro, prata e bronze, e também certificados de honra ao mérito. OS medalhistas de ouro são convidados a receber suas medalhas em uma cerimônia realizada na cidade do Rio de Janeiro, contando com a participação de autoridades do governo e grandes nomes da matemática. Além das premiações em forma de medalhas, a OBMEP possibilita a participação dos alunos

medalhistas na OBM, permitindo também a participação destes em olimpíadas internacionais. Também foram criados projetos e bolsas de estudos para alunos medalhistas, como por exemplo o PIC e PICME.

O PIC, Programa de Iniciação Científica é um programa criado para alunos medalhistas da OBMEP que permite que estes entre em contato com novos assuntos, aprofundem os já conhecidos e tenham contato com novos e desafiantes problemas matemáticos. O programa acontece tanto de maneira presencial como virtual, tem direito a uma bolsa de estudos. A bolsa de estudo é paga pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPQ, com intuito de estimular ainda mais a participação dos alunos medalhistas, contudo para a concessão da bolsa, exige-se que o aluno esteja regularmente matriculado em uma escola pública de ensino básico.

O PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado é também um programa criada para alunos medalhistas da OBMEP, contudo seu objetivo é permitir a alunos de cursos de graduação que obtiveram bons resultados em edições anteriores da olimpíada, a participação em programas de mestrado. O programa permite que o aluno medalhista e classificado possa participar de um curso de mestrado em praticamente qualquer universidade com programa de pós graduação desde que tenha cumprido todas as condições, uma vez que o programa é aceito por todos os programas de Pós-Graduação do país recomendados pelas CAPES,

O papel da OBMEP no cenário brasileiro vai além do que desafiar estudantes e conceder premiações. Ao instigar alunos, escolas e professores a buscar maneiras inteligentes e criativas de solucionar seus problemas, acaba permitindo, o aperfeiçoamento do professor, ao buscar novas técnicas, aprofundar conteúdos e buscar materiais de qualidade. Permite ao aluno aprofundar e dominar os conteúdos estudados, e a desenvolver o raciocínio lógico e a criatividade, além de contribuir em seu sucesso acadêmico. E a escola pode contribuir na construção de um ensino de excelência no ensino de matemática, além de aprimorar seus modelos de ensino e a aquisição de materiais de qualidade para o ensino de matemática, contribuindo assim, para o desenvolvimento

social e educacional da comunidade onde a mesma está inserida.

No cenário brasileiro, as olimpíadas de matemática abriram as portas a oportunidades antes distantes de jovens brasileiros, como a participação em olimpíadas internacionais, bolsas de iniciação científica e até mesmo bolsas de estudo no exterior. A contribuição que a dedicação, o esforço e a participação em olimpíadas de matemática trouxe a vários estudantes é digna de ser contada e mostrada como exemplo. A mudança que tais conquistas trouxeram seriam impensáveis a muitos jovens, muitas vezes de famílias pobres ou de periferias. Inúmeros estudantes por meio das olimpíadas conseguiram bolsas de estudos no exterior e hoje trabalham como grandes profissionais, muitos como grandes professores e pesquisadores de grandes e renomadas universidades do Brasil e do exterior. Isso e as inúmeras histórias de sucessos que as olimpíadas de conhecimento permitiram evidenciar a magnitude das transformações ocorridas na sociedade e na vida de cada cidadão quando há esforços são reunidos em prol da melhoria da qualidade da educação, especialmente no ensino básico.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

Já no ensino fundamental temos o primeiro contato com as quatro operações básicas, dentre elas, a divisão. Através da divisão, entendemos quantas vezes um número "cabe" dentro do outro. Por exemplo, quantas vezes o número 7 cabe dentro do número 24. Vejamos esse problema ilustrado através da seguinte resolução: Queremos distribuir 24 doces para 7 crianças, para isso começamos distribuindo um doce para cada criança, logo foram dados 7 doces e sobraram 17, repetindo o processo, agora cada criança tem 2 doces e sobraram 10 doces, repetindo mais uma vez, cada criança possui agora 3 doces e sobram 3 doces. Agora, não podemos mais distribuir doces, haja visto que a quantidade de criança é maior que a de doces, aqui dizemos que ao dividir 24 por 7 obtemos 3 e com um resto igual a 3.

Alguns exercícios realizados na escola, sempre conseguimos realizar a divisão de um número por outro de maneira perfeita, isto é, sem sobrar nada no final da conta, contudo, isso nem sempre é válido nas divisões, principalmente nos casos que ocorrem no dia a dia. Embora o resto pareça simplesmente um mero valor que sobra no final da divisão, veremos que o mesmo guarda propriedades incríveis, tais propriedades que são por muitas vezes decisivas na resolução de problemas de olimpíadas.

Para começar tomemos o exemplo abaixo da divisão de 65 por 5, o quociente

obtido é igual a 13, aprendemos que quando o resto de uma divisão é zero, a mesma é dita exata, aqui usaremos outro nome. Como ao dividir 65 por 5 obtemos um resto igual a 0, diremos que o número 65 é divisível por 5, ou ainda, que o número 5 divide 65, que é o mesmo que dizer que podemos escrever o número 65 como $65 = 13 \cdot 5$.

3.1 Definições, Teoremas, Corolários e Exemplos

O desenvolvimento da teoria realizado aqui segue essencialmente (SANTOS, 1998). No decorrer deste capítulo, serão apresentados e solucionados alguns problemas olímpicos.

Definição *Se a e b são inteiros, dizemos que a divide b , denotando por $a|b$, se existir um inteiro c tal que $b = ac$.*

Por exemplo, $5|60$, uma vez que $60 = 5 \cdot 12$

Utilizando apenas a definição de divisibilidade, já podemos solucionar um problema da olimpíada cearense de matemática.

(OCM - 2021, Nível 1) Sobre o número $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$, podemos afirmar que ele:

- (a) é divisível por 1000.
- (b) é divisível por 49.
- (c) é divisível por 1400.
- (d) tem algarismo das unidades igual a 5.
- (e) não é divisível por 81.

Solução: Analisemos cada uma das afirmações:

Letra a: Podemos escrever 1000 como $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Logo para que o número em questão seja divisível por 1000, ele deveria ser igual ao produto de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

por algum número natural, contudo, analisamos o número vemos que ele possui apenas dois fatores igual a 5, onde um vem do número 10, logo não podendo ser nossa resposta.

Letra b: Para ser divisível por 49, ele deve ser equivalentemente divisível por $7 \cdot 7$, ou seja, igual ao produto de $7 \cdot 7$ por um número natural, contudo analisando o número, vemos que ele possui apenas um fator igual a 7.

Letra c: Podemos escrever 1400 como $14 \cdot 100 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. Sabemos ter dois fatores iguais a 5 que vem de 5 e 10, um fator igual a 7, e podemos pegar 3 fatores 2 dos números 2 e 4. Assim, temos $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5 = 1400 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 2$. Logo o número do problema é divisível por 1400.

Problema: Qual é o resto, após a divisão por 12, da soma $\sum_{k=1}^{100} k!$.

Solução A primeira vista, este problema pode parecer ser um problema bastante complicado por conta do somatório de fatoriais até 100, contudo, vamos examinar os fatoriais e o somatório. Sabemos que $3! = 6$, $4! = 24$, e que 24 é divisível por 12, e em todos os $k!$ com $k \geq 4$, vai haver a parcela $4!$ em sua expansão, logo, todos esse números serão multiplicados por 24, e conseqüentemente, divisíveis por 12. Assim basta voltarmos nossa atenção para aqueles que não são divisíveis por 12, que são $1!$, $2!$ e $3!$ temos $1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9$. Como todos os outros termos do somatório são divisíveis por 12, e a única parte que sobra é aquela cuja soma resulta em 9, e como $9 < 12$, o resto da divisão do somatório por 12 é 9.

Da definição acima podemos tirar algumas conclusões sobre divisibilidade, que estão enumeradas abaixo.

Teorema 2. *Se n um número natural, a divisão tem as seguintes propriedades*

(1) $n|n$

(2) $d|n$ e $a|n$ então $ad|an$

(3) $ad|an$ e $a \neq 0$ então $d|n$

$$(4) 1|n$$

$$(5) (1) n|0$$

$$(6) (1) d|n \text{ e } n \neq 0 \text{ então } |d| \leq |n|$$

$$(7) d|n \text{ e } n|d \text{ então } |d| = |n|$$

$$(8) d|n \text{ e } d \neq 0 \text{ então } (n/d)|n$$

Demonstração

(1): Sabemos que $n = n \cdot 1$, que mostra que $n|n$

(2) Se $d|n$ existe c , tal que $n = c \cdot d$, multiplicando ambos os lados por a , obtemos $an = acd = (ad)c$, donde concluímos que $ad|an$

(3): Se $ad|an$, então existe c tal que $an = adc$, como $a \neq 0$, podemos dividir ambos os lados por a , obtendo $n = dc$, que mostra que $d|n$

(4): Como $n = n \cdot 1$, obtemos que $1|n$

(5): Como $0 = n \cdot 0$, temos que $n|0$.

(6): Como $d|n$, existe c tal que $n = c \cdot d$, como $n \neq 0$, devemos ter c e $d \neq 0$, temos também $|n| = |c||d| \geq 1 \cdot |d|$, pois se $c \neq 0$, então $|c| \geq 1$.

(7): Como $d|n$ então existe c tal que $n = cd$, como $n|d$, então existe b , tal que $d = nb$, se $n = 0$ ou $d = 0$, obtemos respectivamente $d = 0$ ou $n = 0$. Supondo $n \neq 0$, obtemos $|n| = |c||d|$ e $|d| = |n||b|$, substituindo a primeira equação na segunda, obtemos $|n| = |c| \cdot |n| \cdot |d|$, como $n \neq 0$, podemos dividir ambos os lados por $|n|$, obtendo $1 = |c||d|$, como c e d são inteiros, devemos ter $|c| = 1$ e $|d| = 1$, o que nos dá $|n| = |c||d| = 1 \cdot |d| = |d|$.

(8): Como $d|n$ e $d \neq 0$, então $\frac{n}{d}$ é um número inteiro, e como $n = \frac{n}{d} \cdot d$, implica que $\frac{n}{d}|n$.

Teorema 3. *Se a, b e c são inteiros, $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.*

Demonstração: Se $a|b$ então existe k_1 tal que $b = ak_1$, se $b|c$, então existe k_2 , tal que $c = bk_2$, substituindo a primeira igualdade na segunda, obtemos $c = ak_1k_2$, que mostra que $a|c$.

Problema: Determine o resto de $2^{20} - 1$ na divisão por 41.

Solução: O termo $2^{20} - 1$ parece nos sugerir escrevê-lo como produto entre dois termos. Temos que $2^{20} - 1 = (2^{10} - 1)(2^{10} + 1)$. Olhando para cada termo, sabemos que $2^{10} = 1024$, e assim, $2^{10} - 1 = 1023$ que não é divisível por 41, contudo $2^{10} + 1 = 1025 = 41 \cdot 25$, logo $2^{10} + 1$ é divisível por 41, e conseqüentemente $2^{20} - 1$ também é divisível por 41, deixando assim, resto 0 na divisão por 41.

Teorema 4. Se a, b, c, m e n são inteiros, $c|a$ e $c|b$ então $c|(ma + nb)$.

Demonstração: Se $c|a$ e $c|b$, então existem k_1 e k_2 , tais que $a = ck_1$ e $b = ck_2$, multiplicando as equações respectivamente por m e n , obtemos $ma = mck_1$ e $b = nck_2$, somando, obtemos $ma + nb = mck_1 + nck_2 = c(mk_1 + nk_2)$, que mostra que $c|(ma + nb)$.

Problema: Prove que se a e b são números inteiros ímpares, então $16|a^4 + b^4 - 2$.

Solução: Sabendo que sendo a e b ímpares, assim a^4 e b^4 também o são, sendo $a^4 + b^4 - 2$ um número par, contudo isso não é suficiente para poder concluir que tal expressão seja divisível por 16. Vamos olhar mais atentamente para a expressão para tentarmos encontrar algo mais.

Sabemos que $a^4 + b^4 - 2 = a^4 - 1 + b^4 - 1$. Avaliemos cada uma das duas parcelas nessa expressão. $a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$. Como a é ímpar, cada um desses três fatores é um número par, inclusive $a^2 + 1$. Olhando agora para $a - 1$ e $a + 1$, sabemos que sendo a ímpar ele deve deixar resto ímpar na divisão por 4, logo $a = 4k + 1$ ou $4k + 3$, para algum k inteiro. Na primeira possibilidade, temos $a - 1 = 4k$, múltiplo de 4, na segunda $a + 1 = 4k + 4 = 4(k + 1)$, também múltiplo de 4, isso nos diz que uma das parcelas $a - 1$ ou $a + 1$, é múltiplo de 4, logo um dos fatores contribui com um fator 4, e outros dois com um fator 2 cada, logo $a^4 - 1$ deve

ser divisível por $4 \cdot 22 = 16$. Obtemos a mesma coisa com $b^4 - 1$, haja visto que é praticamente a mesma expressão que $a^4 - 1$. Como $a^4 - 1$ e $b^4 - 1$ são ambos divisíveis por 16, logo sua soma, ou seja, $a^4 + b^4 - 2$ é também divisível por 16.

Corolário 1. Se $a|(b + c)$ e $a|b$ então $a|c$.

Demonstração: Se $a|(b + c)$ então existe k_1 tal que $b + c = ak_1$, e se $a|b$, existe k_2 tal que $b = ak_2$. Substituindo essa segunda igualdade na primeira obtemos $ak_2 + c = ak_1$ de onde obtemos $c = ak_1 - ak_2 = a(k_1 - k_2)$, que mostra que $a|c$

Problema: Encontre todos os n , tais que $n + 3|n^2 - 3$.

Solução: Aparentemente a informação que $n + 3|n^2 - 3$ não parece nos dizer muito, contudo, olhando para $n^2 - 3$, vemos que $n^2 - 3 = n^2 - 9 + 6 = (n - 3)(n + 3) + 6$. Sabemos que $n + 3|(n - 3)(n + 3)$, e como queremos que $n + 3|n^2 - 3$, devemos ter que $n + 3|n^2 - 3 - (n - 3)(n + 3) = 6$. Como os divisores de 6 são 1, 2, 3 e 6, temos que $n + 3 = 1, 2, 3$ ou 6, que nos dá $n = -2, -1, 0$ ou 3, como queremos apenas os n positivos, temos então $n = 0$ ou $n = 3$. Testando, vemos que de fato esses números são soluções.

Problema: Encontre todos os n positivos, tais que $n + 3|-n^3 + n + 24$.

Solução: A única informação que possuímos é que $n + 3|-n^3 + n + 24$, poderíamos tentar fazer como o problema anterior, porém o que dificulta aqui é o fato de aparecer um termo de grau 3 e outro de grau 1 na mesma expressão, ficando inviável tentar construir uma relação como a do problema anterior, então o que faremos aqui é reduzir o grau de $-n^3 + n + 24$. Faremos isso usando a informação do enunciado que $n + 3|-n^3 + n + 24$, e o fato óbvio que $n + 3|n + 3$, usaremos uma das propriedades de divisibilidade estudadas, sabendo que $n + 3$ divide essas duas expressões sabemos que $n + 3|-n^3 + n + 24 + n^2(n + 3) = 3n^2 + n - 16$. Assim reduzimos o grau para 2, podemos repetir o processo, obtendo $n + 3|3n^2 + n + 24 - 3n(n + 3) = 24 - 8n$. Chegamos em $n + 3|24 - 8n$, aqui temos duas possibilidades $24 - 8n = 0$, que obtemos $n = 3$, ou $24 - 8n$ diferente de 0. Nesse último caso utilizando uma outra propriedade da divisão

sabemos que $n + 3 < 24 - 8n$, donde, $9n < 21$, assim, $n = 1$ ou $n = 2$, desses dois, apenas o número 1 é solução da equação. Logo o enunciado está satisfeito apenas para $n = 1$ e $n = 3$

No estudo de divisibilidade nos é apresentado o conceito de máximo divisor comum que deriva do conceito de divisão, tal ferramenta é de extrema importância no estudo da matemática, que quando aliado as propriedades de divisibilidade nos permite a resolução de problemas bem mais complexos.

Definiremos, então, o que vem a ser o máximo divisor comum de dois números.

Definição O máximo divisor comum de dois inteiros a e b (a ou b diferente de 0), denotado por (a, b) , é o maior inteiro que divide a e b .

Uma das proposições mais importantes da Teoria dos Números é o algoritmo da divisão euclidiana, enunciada e demonstrada logo abaixo.

Teorema 5. (*Algoritmo de Euclides*) *Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que:*

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

Demonstração: Suponhamos $b > 0$, a demonstração é análoga para $b < 0$. Existe q inteiro satisfazendo:

$$qb \leq a < (q + 1)b$$

de onde temos $0 \leq a - qb$ e $a - qb < b$. Definimos $r = a - qb$, teremos então a existência de q e r cumprindo as exigências do enunciado. Para mostrar a unicidade suponhamos a existência de outro par q_1 e r_1 de inteiros satisfazendo as mesmas condições, ou seja:

$$a = bq_1 + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < |b|.$$

Assim, teríamos $(bq + r) - (bq_1 + r_1) = 0$, que implica $b(q - q_1) = r - r_1$, de onde podemos concluir que $b|(r - r_1)$, contudo, como $r, r_1 < b$ temos que $|r - r_1| < b$, assim a única possibilidade é que seja $r - r_1 = 0$, ou seja, $r = r_1$. Por fim teríamos então

$bq = bq_1$ que implica $q = q_1$, já que $b \neq 0$.

$$|b||q - q'| = |r' - r| < b,$$

o que só é possível se $q = q'$ e conseqüentemente, $r = r'$.

Problema: Determinar os números inteiros positivos que, divididos por 17, dão o resto igual ao quadrado do quociente.

Solução De acordo com o enunciado o único número que o problema apresenta é o divisor, contudo, ele também apresenta uma relação entre o quociente e o resto. Recorrendo ao algoritmo da divisão de Euclides, obtemos que um número quando dividido por 17 nos dará quociente q e resto r . Sabemos que $0 \leq r < 17$, e de acordo com o problema, $r = q^2$. Usando essas duas informações encontramos o seguinte $0 \leq q^2 < 17$, que implica, $0 < q \leq 4$, pois o enunciado solicita apenas os inteiros positivos. Assim, o quociente só pode assumir quatro valores, 1, 2, 3 e 4, para cada um desses, temos respectivamente $r = 1, 4, 9$ e 16. Substituindo no algoritmo de Euclides obtemos os seguintes números inteiros positivos: 18, 38, 60 e 84.

(OBM - 2003, Nível 1): Considere a sequência oscilante: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, ...

O 2003º termo desta sequência é:

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

Solução: Notamos que na sequência há um bloco de número que se repete sempre, que é 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2. o qual possui 8 números, podemos então contar quantos desses blocos de números cabem em 2003 termos. Para isso realizemos a divisão euclidiana de 2003 por 8, onde obtemos quociente igual a 250 e resto 3, significando que cabem 8

desses blocos e a sequência prossegue com mais 3 termos. Ora, o último termo dentro do bloco é 2, continuando temos que o 2003° é 3.

Problema: Prove que $n^2 + 1$ não é divisível por 3 para nenhum n inteiro.

Solução: Se $n^2 + 1$ não é divisível por 3, isso quer dizer que esse número deixa sempre um resto diferente de 0, quando dividido por 3. Olhando para o número n , sabemos que ele pode assumir infinitos valores, gerando infinitos números, contudo sabemos pelo algoritmo de Euclides que só há três possibilidades para o resto desse número quando dividido por 3, sendo 0, 1 ou 2, podemos então analisar o que acontece com $n^2 + 1$ para cada resto que n deixa. Se n deixa resto 0, então $n = 3k$ para algum k inteiro, e assim $n^2 + 1 = (3k)^2 + 1 = 9k^2 + 1 = 3(3k) + 1$, deixando resto 1 na divisão por 3. Se n deixa resto 1 na divisão por 3, então $n = 3k + 1$, para algum k inteiro, logo, $n^2 + 1 = (3k + 1)^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 1 + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 2$, deixando resto 2 na divisão por 3. Por fim, se n deixa resto 2 na divisão por 3, então $n = 3k + 2$, para algum k inteiro, logo, $n^2 + 1 = (3k + 2)^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 4 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 2$, deixando resto 2 na divisão por 3. Assim, não importa qual número seja n , como ele deve deixar resto 0, 1 ou 2, o número $n^2 + 1$, nunca será divisível por 3, haja visto que em nenhum dos casos $n^2 + 1$ deixou resto na divisão por 3.

Teorema 6. *Seja d o máximo divisor comum de a e b , então existem inteiros x e y tais que $d = ax + by$* Demonstração: Seja B o conjunto de todas as combinações lineares $\{ax + by\}$ onde x e y são inteiros. Este conjunto contém claramente, números negativos, positivos e também o zero. Vamos escolher x_0 e y_0 tais que $c = ax_0 + by_0$ seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto B . Vamos provar que $c|a$ e $c|b$. Suponhamos que $c \nmid a$. Neste caso, existem q e r tais que $a = qc + r$ com $0 < r < c$. Portanto $r = a - qc = a - q(ax_0 + by_0) = (1 - qx_0)a + (-qy_0)b$. Isto mostra que $r \in B$, pois $(1 - qx_0)$ e $(-qy_0)$ são inteiros, o que é uma contradição, uma vez que $0 < r < c$ e c é o menor elemento positivo de B . Logo $c|a$, e de forma análoga se prova que $c|b$.

Teorema 7. *Para todo inteiro positivo t , $(ta, tb) = t(a, b)$.*

Demonstração: Pelo teorema anterior (ta, tb) é o menor valor positivo de $mta + ntb$, com m e n inteiros, que é igual t vezes o menor valor positivo de $ma + nb$, que por sua vez é igual a $t(a, b)$

Teorema 8. Se $c > 0$ e a e b são divisíveis por c , então $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = \frac{1}{c}(a, b)$.

Demonstração : Como a e b são divisíveis por c , temos $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$ são inteiros. Basta então, substituir na proposição anterior a por $\frac{a}{c}$ e b por $\frac{b}{c}$, tomando $t = c$. Temos então $c(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = (a, b)$, logo $c|(a, b)$, ou seja, $\frac{1}{c}(a, b)$ é inteiro, logo temos $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = \frac{1}{c}(a, b)$

Teorema 9 Se $(a, b) = d$, temos que $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

Demonstração : Temos que $d|(a, b)$, onde $\frac{1}{d}(a, b)$ é inteiro, e ainda mais que $d|a$ e $d|b$. Dividindo ambos os lados por d , obtemos $\frac{1}{d}(a, b) = (\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

Definição: Os inteiros a e b são relativamente primos quando $(a, b) = 1$.

Teorema 10. Para a, b e x inteiros temos $(a, b) = (a, b + ax)$.

Demonstração: Sejam $d = (a, b)$ e $f = (a, b + ax)$. Pelo Teorema 2.1.8 existem inteiros n_0 e m_0 tais que $d = n_0a + m_0b$ e como esta expressão pode ser escrita como $d = a(n_0 - xm_0) + (b + ax)m_0$, concluímos que o máximo divisor f de a e $b + ax$ é um divisor de d . Tendo mostrado que $f|d$ mostramos, a seguir, que $d|f$. Pelo Teorema 2.1.4, $d|(b + ax)$ e sabemos que todo divisor comum de a e $b + ax$ é um divisor de f . Tendo, assim, provado que $d|f$ concluímos que $d = f$, uma vez que ambos são positivos.

Teorema 11. Se $a|bc$ e $(a, b) = 1$, então $a|c$.

Demonstração: Como $(a, b) = 1$ pelo Teorema 3.1.8 existem inteiros n e m tais que $na + mb = 1$. Multiplicando-se os dois lados desta igualdade por c temos: $n(ac) + m(bc) = c$. Como $a|ac$ e, por hipótese, $a|bc$ então, pela Proposição 1.2, $a|c$.

Teorema 12. Se a e b são inteiros e $a = qb + r$ onde q e r são inteiros, então $(a, b) = (b, r)$.

Demonstração: Da relação $a = qb + r$ podemos concluir utilizando o Teorema 3.1.4

que todo divisor de b e r é um divisor de a . Esta mesma relação, escrita na forma $r = a - qb$, nos diz que todo divisor de a e b é um divisor de r . Logo o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e r , o que nos garante o resultado $(a, b) = (b, r)$.

Definição: Um número inteiro $n > 1$ que possui somente dois divisores positivos 1 e n é chamado primo.

Os números primos de 1 até 100 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.

Teorema 13 Se $p|ab$, p primo, então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração: Se $p \nmid a$, então $(a, p) = 1$ logo pelo Teorema 3.1.8, existem m e n tais que $am + pn = 1$, multiplicando a equação por b , obtemos $(ab)m + p(bn) = b$. Como p divide pbn e por hipótese $p|ab$, temos que $p|b$.

Teorema 14 (Teorema Fundamental da Aritmética) Todo inteiro maior do que 1 pode ser representado de maneira única (a menos de ordenação) como um produto de fatores primo.

Demonstração: Seja n um número natural, se n for primo a tese é válida. Suponhamos que $n > 1$ não seja primo, ou seja, que n seja composto. Seja p_1 o menor divisor positivo de n , podemos afirmar que p_1 é primo, pois se não fosse, ele deveria ter um divisor maior que um, que obviamente seria menor que ele, e este sendo um divisor de p_1 , também deveria ser um divisor de n , que é uma contradição, uma vez que p_1 é o menor divisor positivo de n . Assim, temos que $n = n_1 p_1$. Caso n_1 seja primo, a demonstração se encerra, caso contrário podemos tomar p_2 , o menor divisor positivo de n_1 , que pelo mesmo argumento apresentado anteriormente, deve ser primo, logo temos $n = p_1 p_2 n_2$. Podemos repetir este processo, obtendo inteiros n_1, n_2, \dots, n_r , como todos estes são inteiros maiores que 1, este processo deve terminar. Como nem todos os números primos que aparecem no produto são necessariamente primos, n terá a seguinte forma:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$$

Para mostrar a unicidade recorreremos a indução sobre n . Para $n = 2$ a afirmação é verdadeira, visto que 2 é primo. Assumiremos que a afirmação é verdadeira para todos os naturais menores que n , e a partir disso provaremos a veracidade da afirmação para n . Seja n composto, já que se fosse primo a afirmação seria clara, e possuindo duas fatorações distintas como segue:

$$n = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$$

Como $p_1 | q_1 q_2 \dots q_s$, então ele divide pelos menos um dos fatores dessa fatoração. Suponhamos sem perda de generalidade que seja $p_1 | q_1$. Como ambos são números primos, temos $p_1 = q_1$. Assim $\frac{n}{p_1} = p_2 \dots p_r = q_2 \dots q_s$. Como $0 < \frac{n}{p_1} < n$, a hipótese nos afirma que as duas fatorações são idênticas, isto é, $r = s$, e a menos de ordenação, as fatorações $p_1 p_2 \dots p_r$ e $q_1 q_2 \dots q_s$ são iguais.

Teorema 15. *Se $n = \prod_{i=1}^r p_i^{a_i}$, o conjunto dos divisores positivos de n é o conjunto de todos os números da forma*

$$\prod_{i=1}^r p_i^{c_i}, \quad 0 \leq c_i \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Demonstração: Caso c_i não esteja no intervalo mencionado no enunciado, o produto acima não poderá ser um divisor de n .

Teorema 16. *Se dois inteiros positivos a e b possuem as fatorações $a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$ e $b = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{b_i}$. Onde apenas uma finidade de expoentes são diferentes de 0, então o máximo divisor comum de a e b é igual a:*

$$(a, b) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{c_i}$$

onde $c_i = \min\{a_i, b_i\}$.

Demonstração: Para que um produto de fatores primos comuns seja um divisor comum nenhum expoente c_i de p_i poderá superar nem a_i e nem b_i . Como estamos interessados no maior dos divisores positivos, basta tomarmos, para c_i , o menor desses dois.

Teorema 17. *A sequência dos números primos é infinita.*

Demonstração: Vamos supor que a sequência dos primos seja finita. Seja pois, p_1, p_2, \dots, p_n a lista de todos os primos. Consideramos o número $R = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. É claro que R não é divisível por nenhum dos p_i de nossa lista e que R é maior do que qualquer p_i . Mas, pelo Teorema 14, ou R é primo ou possui algum fator primo e isto implica na existência de um primo que não pertence à nossa lista. Portanto a sequência dos números primos não pode ser finita.

Teorema 18. *Se n não é primo, então n possui, necessariamente, um fator primo menor do que ou igual a \sqrt{n} .*

Demonstração: Sendo n composto então $n = n_1 n_2$ onde $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Sem perda de generalidade vamos supor $n_1 \leq n_2$. Logo n_1 tem que ser $< \sqrt{n}$ pois, caso contrário, teríamos $n = n_1 \cdot n_2 > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$ o que é absurdo. Logo n_1 possui algum fator primo p , este deve ser $< \sqrt{n}$. Como p , sendo um fator primo de n_1 é também um fator de n , a demonstração está completa.

Definição: *O mínimo múltiplo comum de dois divisores inteiros positivos a e b é o menor inteiro positivo que é divisível por a e b . Vamos denotá-lo por $[a, b]$.*

Teorema 19. *Se $a = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i}$ e $b = \prod_{i=1}^n p_i^{b_i}$ onde os p_i são os primos que ocorrem nas fatorações de a e b , então:*

$$[a, b] = \prod_{i=1}^r p_i^{\max\{a_i, b_i\}}$$

Demonstração: Pela definição de mínimo múltiplo nenhum fator primo p_i deste mínimo poderá ter um expoente que seja inferior nem a a_i e nem a b_i , pois assim, este poderia ser divisível por apenas um ou por nenhum dos dois números. Se tomarmos o maior destes dois para expoente de p_i teremos o menor múltiplo comum possível, concluindo a demonstração.

Teorema 20. *Se x e y são números reais então $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$.*

Demonstração: Se $x = y$ então o $\max\{x, y\} = \min\{x, y\} = x = y$, de onde o resul-

tado é obtido facilmente. Sem perda de generalidade podemos supor $x < y$. Então $\max\{x, y\} = y$ e $\min\{x, y\} = x$, de onde também pode se concluir facilmente a afirmação.

Teorema 21. *Para a e b inteiros positivos temos, $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$.*

Demonstração: Seja $a = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i}$ e $b = \prod_{i=1}^n p_i^{b_i}$. Do Teorema 2.1.20, temos:

$$(a, b) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\min\{a_i, b_i\}}$$

e

$$[a, b] = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\max\{a_i, b_i\}}$$

Assim:

$$\begin{aligned} (a, b)[a, b] &= \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\min\{a_i, b_i\}} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\max\{a_i, b_i\}} = \\ \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\min\{a_i, b_i\} + \max\{a_i, b_i\}} &= \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i + b_i} = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{b_i} = a \cdot b \end{aligned}$$

Teorema 22. *Um numero é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos seus dígitos é divisível por 3.*

Demonstração: Seja $k = a_n \dots a_2 a_1 a_0$ um número natural qualquer, podemos escrever $k = a_n \cdot 10^n + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$. Podemos escrever $10^n = 999 \dots 999 + 1$, $999 \dots 999$ com n algarismos iguais a 9. Assim $k = a_n \cdot 10^n + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 = a_n(999 \dots 999 + 1) + \dots + a_2(99 + 1) + a_1(9 + 1) + a_0 = (999 \dots 999 a_n + \dots + 99 a_2 + 9 a_1) + (a_n + \dots + a_2 + a_1 + a_0)$. A soma dos termos no primeiro parenteses é obviamente divisível por 3, assim o este número só poderá ser divisível por 3 se e somente se $(a_n + \dots + a_2 + a_1 + a_0)$ for também divisível por 3, ou seja, se e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 3.

Teorema 23. *Um numero é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos seus dígitos é divisível por 9 .*

Demonstração: Utilizando os termos utilizados na demonstração da proposição anterior, vemos que de fato um número $k = a_n \dots a_2 a_1 a_0$, sé poderá ser divisível por 9 se e

só se $(a_n + \dots + a_2 + a_1 + a_0)$ for divisível por 9, ou seja, se e só se a soma dos seus algarismos for divisível por 9.

Teorema 24. *Um número é divisível por 2 se, e somente se, ele for par.*

Demonstração: Podemos escrever um número $k = a_n \dots a_2 a_1 a_0$ como $k = a_n \dots a_2 a_1 \cdot 10 + a_0$. O primeiro termo desta soma $a_n \dots a_2 a_1 \cdot 10$ é divisível por 2, haja visto que 10 é visto por 2. Logo um número k só pode ser divisível por 2, se e só se a_0 for divisível por 2, logo, se e só se este número for par.

Teorema 25. *Um número é divisível por 4 se, e somente se, os seus dois últimos algarismos forem divisíveis por 4.*

Demonstração: Um número $k = a_n \dots a_2 a_1 a_0$ pode ser escrito como $k = a_n \dots a_2 \cdot 100 + a_1 a_0$. A primeira parcela desta soma é claramente divisível por 4, uma vez que 100 é divisível por 4. Logo um número k é divisível por 4 se e só se $a_1 a_0$ for divisível por 4, ou seja, se e só se o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

Teorema 26. *Um número é divisível por 8 se e somente se, seus três últimos dígitos forem divisíveis por 8.*

Demonstração: Um número $k = a_n \dots a_3 a_2 a_1 a_0$ pode ser escrito como $k = a_n \dots a_3 \cdot 1000 + a_2 a_1 a_0$. A primeira parcela desta soma é claramente divisível por 8, haja visto que 1000 seja divisível por 8. Logo um número k é divisível por 8 se e só se $a_2 a_1 a_0$ for divisível por 8, ou seja, se e só se o número formado por seus três últimos algarismos.

Teorema 27. *Um número é divisível por 6 se, e somente se, ele for divisível por 2 e 3.*

Demonstração: É claro que se um número é divisível por 6 então ele também é divisível por 2 e 3. E como sendo 2 e 3 primos entre si, um número divisível por ambos números, deve ser também divisível por $2 \cdot 3 = 6$.

Teorema 28. *Um número é divisível por 5 se, e somente se, termina em 0 ou 5.*

Demonstração: Um número $k = a_n \dots a_2 a_1 a_0$ pode ser escrito como $k = a_n \dots a_2 a_1 \cdot 10 + a_0$. A primeira parcela desta soma é claramente divisível por 5, haja visto que 10 é divisível por 5. Logo um número é divisível por 5 se e só se, a_0 for divisível por 5. Como os únicos algarismos divisíveis por 5 são 0 ou 5. Podemos concluir que um número é divisível por 5 se ele termina em 0 ou 5.

Teorema 29. *Um número é divisível por 10 se, e somente se, termina em 0.*

Demonstração: Um número $k = a_n \dots a_2 a_1 a_0$, pode ser escrito como $k = a_n \dots a_2 a_1 \cdot 10 + a_0$. A primeira parcela é claramente divisível por 10. Como o único algarismo divisível por 10 é 0, concluímos que um número é divisível por 10, se e só se ele termina em 0.

Teorema 30. *Um número $k = a_n \dots a_2 a_1 \cdot 10 + a_0$ é divisível por 11 se, e somente se, $a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n$ for divisível por 11.*

Demonstração: Temos $k = a_n \dots a_2 a_1 a_0 = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \dots + 10^n a_n = a_0 + 11a_1 + -a_1 + 99a_2 + a_2 + \dots + 111\dots 111a_n - a_n$ ou $k = a_0 + 11a_1 + -a_1 + 99a_2 + a_2 + \dots + 999\dots 999a_n + a_n$, depende de ser n impar ou par. Em qualquer caso, notamos que podemos juntar os termos em dois grupos, um deles claramente divisível por 11, no outro ficam os seguintes termos restantes: $(a_0 - a_1 + a_2 \dots + (-1)^n a_n)$. Logo um número k só pode ser divisível por 11 se e só se esta última parcela for divisível por 11.

Problema: O número de oito algarismos $a2b3416a$ é divisível por 3, 5 e 11, calcule $a + b$.

Solução: Seria bem mais complicado aplicar o algoritmo de Euclides a esses números para tentar descobri - los, podemos então, pensar numa maneira mais simples de avaliar as divisibilidades desse números pelos números 3, 5 e 11, sem ter que aplicar o algoritmos, então isso nos mostra que uma saída é aplicar os critérios de divisibilidade vistos anteriormente.

Começemos pelo critério mais simples, que é pelo 5, para ser divisível por 5, o número deve terminar em 0 ou 5, contudo, este número não pode terminar em 0, haja

visto que o primeiro e o ultimo algarismos são iguais, logo se colocássemos 0, teríamos na verdade um número de 7 algarismos, contrariando o enunciado do problema, logo $a = 5$, e o número até agora é $52b34165$.

Prosseguindo, iremos aplicar o critério por 3, sabemos que um número é divisível por 3, se a soma de seus algarismos também o for, logo devemos ter $5 + 2 + b + 3 + 4 + 1 + 6 + 5 = 26 + b =$ múltiplo de 3. Como b pode ser no máximo 9 temos que os possíveis valores para $26 + b$, 27, 30 e 33, ou equivalentemente, se $b = 1, 4$ ou 7 . Como não temos informações suficientes para descobrir b , iremos testar o próximo critério.

Para que um número seja divisível por 11, a soma alternada dos seus algarismos deve ser divisível por 11, assim, $5 - 2 + b - 3 + 4 - 1 + 6 - 5 = b + 4 =$ múltiplo de 11, dos valores que encontramos para b no caso anterior, o único que $b + 4$ é múltiplo de 11, é $b = 7$. Logo o número procurado é 52734165 .

No estudo da divisibilidade, o conceito de congruência ganha destaque, constituindo-se em uma ferramenta poderosíssima na resolução de problemas e na demonstração de inúmeros teoremas dentro da teoria dos número. Seu estudo é vasto, possuindo inúmeras implicações, aqui nos atentaremos a estudos dos conceitos básicos, que diga-se de passagem, já são extremamente úteis.

Definição: *Se a e b são inteiros dizemos que a é congruente a b modulo $n > 0$, se $n|(a - b)$. Denotamos isso por $a \equiv b \pmod{n}$. Se $n \nmid (a - b)$ dizemos que a não é congruente a b modulo n .*

Teorema 31. *Se a e b são dois inteiros, temos que $a \equiv b \pmod{n}$ se, e somente se, existir um inteiro k tal que $a = b + kn$.*

Demonstração: De fato, sendo $a \equiv b \pmod{n}$, então $n|(a - b)$, logo existe k inteiro tal que $a - b = kn$, ou seja, $a = b + kn$.

Teorema 32. *Propriedades:*

$$(1) a \equiv a \pmod{n}$$

(2) Se $a \equiv b \pmod{n}$, então $b \equiv a \pmod{n}$

(3) Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$, então $a \equiv c \pmod{n}$

Demonstração:

(1) Como $m|0$, então $m|(a - a)$, o que implica $a \equiv a \pmod{n}$.

(2) Se $a \equiv b \pmod{n}$, então $a = b + k_1m$ para algum inteiro k_1 . Logo $b = a - k_1m$, o que implica, pela Proposição 2.1, $b \equiv a \pmod{n}$.

(3) Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv d \pmod{n}$, então existem inteiros k_1 e k_2 tais que $a - b = k_1m$ e $b - d = k_2m$. Somando-se, membro a membro, estas últimas equações, obtemos $a - d = (k_1 + k_2)m$, o que implica $a \equiv d \pmod{n}$.

Esta proposição nos diz que a relação de congruência, definida no conjunto dos inteiros, é uma relação de equivalência, pois acabamos de provar que ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Teorema 33. *Se a, b, c e n são inteiros tais que $a \equiv b \pmod{n}$, então*

(1) $a + c \equiv b + c \pmod{n}$

(2) $a - c \equiv b - c \pmod{n}$

(3) $ac \equiv bc \pmod{n}$

Demonstração:

(1) Como $a \equiv b \pmod{m}$, temos que $a - b = km$. Como $a - b = (a + c) - (b + c)$ temos $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.

(2) Como $(a - c) - (b - c) = a - b$ e, por hipótese, $a - b = km$ temos que $a - c \equiv b - c \pmod{m}$.

(3) Como $a - b = km$ então multiplicando a igualdade por c , obtemos $ac - bc = ckm$ o que implica $m|(ac - bc)$ e, portanto, $ac \equiv bc \pmod{m}$.

Teorema 34. Se a, b, c, d e n são inteiros tais que $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$, então:

$$(1) a + c \equiv b + d \pmod{n}$$

$$(2) a - c \equiv b - d \pmod{n}$$

$$(3) ac \equiv bd \pmod{n}$$

Demonstração:

$$(1) \text{ De } a \equiv b \pmod{m} \text{ e } c \equiv d \pmod{m} \text{ temos } a - b = km \text{ e } c - d = k_1m.$$

Somando-se membro a membro obtemos

$$(a + c) - (b + d) = (k + k_1)m$$

e isto implica $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

(2) Basta subtrair membro a membro $a - b = km$ e $c - d = k_1m$ obtendo $(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d) = (k - k_1)m$ o que implica $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

(3) Multiplicamos ambos os lados de $a - b = km$ por c e ambos os lados de $c - d = k_1m$ por b , obtendo $ac - bc = ck_m$ e $bc - bd = bk_1m$. Basta, agora, somarmos membro a membro estas ultimas igualdades obtendo $ac - bc + bc - bd = ac - bd = (ck + bk_1)m$ o que implica $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Problema: Qual o resto na divisão de $2^{70} + 3^{70}$ por 13?

Solução: Sabemos que $13|65 = 2^6 + 1$, ou seja, $2^6 \equiv -1 \pmod{13}$, elevando ambos lado a potência 10, obtemos $2^{60} \equiv 1 \pmod{13}$. Sabemos também que $2^4 \equiv 3 \pmod{13}$, elevando ao quadrado, obtemos, $2^8 \equiv 9 \pmod{13}$, por fim, $4 = 2^2 \equiv 4 \pmod{13}$, multiplicando essas duas ultimas congruências, obtemos $2^{10} \equiv 36 \equiv 10 \pmod{13}$, assim $2^{70} \equiv 10 \pmod{13}$.

Agora com o número $3^{70} \cdot 27 = 3^3 \equiv 1 \pmod{13}$, elevando a potência 23, obtemos $3^{69} \equiv 1 \pmod{13}$, com $3^1 \equiv 3 \pmod{13}$, obtemos que $3^{70} \equiv 3 \pmod{13}$.

Somando as duas congruências encontradas, temos que $2^{70} + 3^{70} \equiv 10 + 3 = 13 \equiv 0 \pmod{13}$. Então o número $2^{70} + 3^{70}$, deixa resto 0 na divisão por 13, em outras palavras, aquele número é divisível por 13.

Teorema 35. *Se a, b, c e n são inteiros e $ac \equiv bc \pmod{n}$, então $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$ onde $d = (c, m)$.*

Demonstração: De $ac \equiv bc \pmod{m}$ temos $ac - bc = c(a - b) = km$. Se dividirmos os dois membros por d , teremos $(\frac{c}{d})(a - b) = k(\frac{m}{d})$. Logo $(\frac{m}{d}) | (\frac{c}{d})(a - b)$, como $(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}) = 1$, $(\frac{m}{d}) | (a - b)$ o que implica $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$.

Teorema 36. *Se a, b, k e m são inteiros com $k > 0$ e $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.*

Demonstração: Da identidade abaixo:

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$
 Como $m | (a - b)$, implica que $m | (a - b) | a^k - b^k$, logo $a^k \equiv b^k \pmod{m}$

Problema Qual o ultimo algarismo do número 7^{2004} .

Solução: De certo que não faz sentido querer realizar o cálculo dessa potência, haja visto que seria necessário pelos menos 2003 multiplicações, além de dá um resultado extremamente alto, contudo, podemos raciocinar da seguinte maneira. Consideremos o último algarismo desse número, se subtrairmos ele do número 7^{2004} , teremos que o novo número terá todos os mesmos algarismos do número original, exceto o último, que agora será 0. Por terminar em 0, sabemos dos critérios de divisibilidade que este número é divisível por 10. Assim, $10 | \text{numero} - \text{ultimo algarismo}$, ou seja, $\text{numero} \equiv \text{ultimo algarismo} \pmod{10}$. Logo, basta encontrar aquele que é congruente a $7^{2004} \pmod{10}$.

Sabemos que $49 = 7^2 \equiv -1 \pmod{10}$, pelas propriedades de congruência, podemos elevar ambos os lados a potência 1002, obtendo $(7^2)^{1002} = 7^{2004} \equiv (-1)^{1002} = 1 \pmod{10}$. Logo o ultimo algarismo do número 7^{2004} é 1.

O mesmo raciocínio poderia ser empregado se quiséssemos saber os dois, três ou quatro últimos algarismos de um número.

Problema: Ache o resto de 3^{2000} dividido por 13.

Novamente não faz sentido calcular tal potência e após isso calcular a divisão, haja visto o enorme esforço que seria, até por conta do enorme número que obteríamos. Contudo, raciocinemos um pouco, sabemos pelo algoritmo de Euclides que ao dividir 3^{2000} por 13, obtemos um quociente q e um resto r , e podemos escrever $3^{2000} = 13q + r$, subtraindo r de ambos os lados, obtemos $13q = 3^{2000} - r$, isso significa que $13|3^{2000} - r$, ou seja, $3^{2000} \equiv r \pmod{13}$. Assim, basta que encontremos aquele que seja congruente a 3^{2000} modulo 13, e além disso $r < 13$.

Sabemos que $27 = 3^3 \equiv 1 \pmod{13}$, elevando ambos os lados a potencia 153, obtemos $(3^3)^{153} = 3^{1989} \equiv 1^{1989} = 1 \pmod{13}$. Assim, basta agora adicionar 11 ao expoente para encontrar o que queremos, elevando a primeira relação que encontramos a terceira potência, obtemos $(3^3)^3 = 3^9 \equiv 1^3 = 1 \pmod{13}$. Multiplicando lado a lado as ultimas duas congruências encontradas, obtemos $3^{1989} \cdot 3^9 = 3^{1998} \equiv 1 \pmod{13}$. Por fim, multiplicamos por $3^2 = 9$, e obtemos $3^{2000} \equiv 9 \pmod{13}$. Assim, o resto da divisão de 3^{2000} por 13 é 9.

Teorema 37. *Sejam a e b inteiros positivos e $d = (a, b)$. Se $d \nmid c$ então a equação $ax + by = c$ não possui nenhuma solução inteira. Se $d|c$ ela possui infinitas soluções e se $x = x_0$ e $y = y_0$ é uma solução particular, então todas as soluções são dadas por $x = x_0 + \frac{b}{d}k$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}k$ onde k é um inteiro.*

Demonstração: Começando com a primeira parte, temos que se d não dividisse c , então a equação $ax + by = c$, não poderia possui solução alguma, uma vez que $d|a$ e $d|b$, d , logo deve dividir qualquer combinação linear deste números, como c é um tal caso de combinação linear de a e b , deveria dividir c . Suponhamos, então, que $d|c$. Sendo $d = (a, b)$ existem inteiros n_0 e m_0 , tais que $an_0 + bm_0 = d$. Como $d|c$, existe k inteiro tal que $c = kd$. Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por k , teremos

$a(n_0k) + b(m_0k) = kd = c$. Assim, o par ordenado (x_0, y_0) com $x_0 = n_0k$ e $y_0 = m_0k$ é uma solução da equação $ax + by = c$. Pode se verificar sem problemas que todos os pares ordenados da forma $(x = x_0 + \frac{b}{d}k, y = y_0 - \frac{a}{d}k)$ são soluções, uma vez que $ax + by = a(x_0 + \frac{b}{d}k) + b(y_0 - \frac{a}{d}k) = ax_0 + \frac{ab}{d}k + by_0 - \frac{ab}{d}k = ax_0 + by_0 = c$. Assim está demonstrado também que conhecida uma solução particular (x_0, y_0) podemos, por meio dela, construir novas soluções em número infinito.

Precisamos, agora, mostrar que toda solução da equação $ax + by = c$ é da forma $x = x_0 + \frac{b}{d}k, y = y_0 - \frac{a}{d}k$. Vamos supor que (x, y) seja uma solução, ou seja, $ax + by = c$. Mas, como $ax_0 + by_0 = c$, obtemos, subtraindo membro a membro, que $ax + by - ax_0 - by_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, o que implica $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$. Como $d = (a, b)$ temos $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$. Portanto, dividindo-se os dois membros da última igualdade por d , teremos $\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y)$. Logo $\frac{b}{d} | (x - x_0)$ e portanto existe um inteiro k satisfazendo $x - x_0 = k\frac{b}{d}$, ou seja $x = x_0 + \frac{b}{d}k$. Substituindo-se este valor de x na equação temos $y = y_0 - \frac{a}{d}k$, concluindo a demonstração.

Definição: Se h e k são dois inteiros com $h \equiv k \pmod{m}$, dizemos que k é um resíduo de h módulo m .

Definição: O conjunto dos inteiros (r_1, r_2, \dots, r_s) é um sistema completo de resíduos módulo m se:

- (1) $r_i \equiv r_j \pmod{m}$ para $i \neq j$
- (2) para todo inteiro n existe um r_i tal que $n \equiv r_i \pmod{m}$

Para n um número natural qualquer, o conjunto $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ é um conjunto completo de resíduos módulo n .

Teorema 38. Se k inteiros r_1, r_2, \dots, r_k formam um sistema completo de resíduos módulo m , então $k = m$.

Demonstração: Mostraremos inicialmente que os inteiros t_0, t_1, \dots, t_{m-1} , com $t_i = i$ formam um sistema completo de resíduos módulo m . Sabemos que para cada n , existe

um único par de inteiros q e s , tal que $n = mq + s$, $0 \leq s < m$. Logo $n \equiv s \pmod{m}$, sendo s um dos t_i . Como $|t_i - t_j| \leq m - 1$, temos que $t_i \equiv t_j \pmod{m}$ para $i \neq j$. Portanto, o conjunto $\{t_0, t_1, \dots, t_{m-1}\}$ é um sistema completo de resíduos módulo m . Disto concluímos que cada r_i é congruente a exatamente um t_i , o que nos garante que $k \leq m$. Como o resíduo $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ forma, por hipótese, um sistema completo de resíduos módulo m , cada t_i é congruente a exatamente um dos r_i e portanto $m \leq k$. Desta forma concluímos que $k = m$.

Teorema 39. *Se r_1, r_2, \dots, r_m é um sistema completo de resíduos módulo m e a e b são inteiros com $(a, m) = 1$, então*

$$ar_1 + b, ar_2 + b, \dots, ar_m + b$$

também é um sistema completo de resíduos módulo m .

Demonstração: Utilizando o resultado do teorema anterior, basta que mostremos que quaisquer dois inteiros do conjunto $ar_1 + b, ar_2 + b, \dots, ar_m + b$, são incongruentes módulo m . Vamos supor que $ar_i + b \equiv ar_j + b \pmod{m}$, de onde temos que $ar_i \equiv ar_j \pmod{m}$. Como $(a, m) = 1$, temos $r_i \equiv r_j \pmod{m}$ que implica $i = j$, uma vez que r_1, r_2, \dots, r_m formam um sistema completo de resíduos módulo m , o que demonstra o teorema.

Teorema 40. *Sejam a, b em inteiros tais que $m > 0$ e $(a, m) = d$. No caso em que $d \nmid b$ a congruência $ax \equiv b \pmod{m}$ não possui nenhuma solução e quando $d \mid b$, possui exatamente d soluções incongruentes módulo m .*

Demonstração: Sabemos que o inteiro x é solução de $ax \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, existe um inteiro y tal que $ax = b + my$, ou de maneira equivalente, $ax - my = b$. Do teorema anterior sabemos que esta equação não possui nenhuma solução caso $d \nmid b$, e que se $d \mid b$ ela possui infinitas soluções dadas por $x = x_0 - \frac{m}{d}k$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}k$, onde (x_0, y_0) é uma solução particular de $ax - my = b$. Logo a congruência $ax \equiv b \pmod{m}$ possui infinitas soluções dadas por $x = x_0 - \frac{m}{d}k$. Como estamos interessados em saber o número de soluções incongruentes, vamos tentar descobrir sob que condições $x_1 = x_0 - \frac{m}{d}k_1$ e $x_2 = x_0 - \frac{m}{d}k_2$ são congruentes módulo m . Se x_1 e x_2 são congruentes

então $x_0 - \frac{m}{d}k_1 \equiv x_0 - \frac{m}{d}k_2 \pmod{m}$. Isto implica $\frac{m}{d}k_1 \equiv \frac{m}{d}k_2$, e como $\frac{m}{d}|m$, temos $(\frac{m}{d}, m) = \frac{m}{d}$, o que nos permite o cancelamento de $\frac{m}{d}$, resultando em $k_1 \equiv k_2 \pmod{d}$. Onde m foi substituído por $d = m/\frac{m}{d}$. Isto nos mostra que soluções incongruentes serão obtidas ao tomarmos $x = x_0 - \frac{m}{d}k$, onde k percorre um sistema completo de resíduos módulo d , concluindo a demonstração.

Definição: Dizemos que uma solução x_0 de $ax \equiv b \pmod{m}$ é única módulo m quando qualquer outra solução x_1 for congruente a x_0 módulo m .

Definição: Uma solução \bar{a} de $ax \equiv 1 \pmod{m}$ é chamada de um inverso de a módulo m .

Teorema 41. Seja p um número primo. O inteiro positivo a é o seu próprio inverso módulo p se, e somente se, $a \equiv 1 \pmod{p}$ ou $a \equiv -1 \pmod{p}$.

Demonstração: Se a é seu próprio inverso, então $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$, o que significa que $p|(a^2 - 1)$. Mas se $p|(a - 1)(a + 1)$, sendo p primo, $p|(a - 1)$ ou $p|(a + 1)$, o que implica que $a \equiv 1 \pmod{p}$ ou $a \equiv -1 \pmod{p}$. A recíproca é imediata pois, se $a \equiv 1 \pmod{p}$ ou $a \equiv -1 \pmod{p}$, então $p|(a - 1)$ ou $p|(a + 1)$. Portanto $p|(a - 1)(a + 1)$ o que significa $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$, o que encerra a demonstração.

Teorema 42. (Teorema de Wilson) Se p é primo, então $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Demonstração: Como $(2 - 1)! = 1 \equiv -1 \pmod{2}$, o resultado é válido para $p = 2$. A congruência $ax \equiv 1 \pmod{p}$ tem uma única solução para todo o conjunto $\{1, 2, \dots, p-1\}$ e como, destes elementos, somente 1 e $p - 1$ são seus próprios inversos módulo p , podemos agrupar os números $2, 3, 4, \dots, p-1$ em $\frac{p-3}{2}$ pares cujo produto seja congruente a 1 módulo p . Se multiplicarmos estas congruências membro a membro, teremos, $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (p - 2) \equiv 1 \pmod{p}$. Multiplicando - se ambos os lados desta congruência por $p - 1$ teremos

$$2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p - 2) \cdot (p - 1) \equiv (p - 1) \pmod{p}$$

isto é $(p - 1)! \equiv (p - 1) \pmod{p}$, como $(p - 1) \equiv -1 \pmod{p}$, temos $(p - 1)! \equiv -1$

mod p .

Teorema 43. *Se n é um inteiro tal que $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$, então n é primo.*

Demonstração: Vamos supor que $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$, isto é $n | ((n - 1)! + 1)$ e que n não seja primo, ou seja, $n = rs$, $1 < r < n$ e $1 < s < n$. Nestas condições $r | (n - 1)!$ e, sendo r um divisor de n , $r | ((n - 1)! + 1)$ e, portanto, r deve dividir a diferença $(n - 1)! + 1 - (n - 1)! = 1$, o que é um absurdo, uma vez que $r > 1$. Logo, um n satisfazendo $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$ deve ser primo.

Teorema 44. *(Pequeno Teorema de Fermat) Seja p primo. Se $p \nmid a$, então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Demonstração: Sabemos que o conjunto formado pelos p números $0, 1, 2, \dots, p - 1$ constitui um sistema completo de resíduos módulo p . Isto significa que qualquer conjunto formado por no máximo p elementos incongruentes módulo p pode ser colocado em correspondência biunívoca com um subconjunto de $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$. Consideremos os números $a, 2a, 3a, \dots, (p - 1)a$. Como $(a, p) = 1$, nenhum destes números i , $1 \leq i \leq p - 1$ é divisível por p , ou seja, nenhum é congruente a zero módulo p . Quaisquer dois deles são incongruentes módulo p , pois $aj \equiv ak \pmod{p}$ implica $j \equiv k \pmod{p}$ e isto é possível se $j = k$, uma vez que ambos j e k são positivos e menores que p . Temos, portanto, um conjunto de $p - 1$ elementos incongruentes módulo p e não divisíveis por p . Logo, cada um deles é congruente a exatamente um dentre os elementos $1, 2, 3, \dots, p - 1$. Se multiplicarmos estas congruências membro a membro, teremos:

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p - 1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot (p - 1) \pmod{p}$$

ou seja $a^{p-1}(p - 1)! \equiv (p - 1)! \pmod{p}$. Como $((p - 1)!, p) = 1$, podemos cancelar o fator $(p - 1)!$ em ambos os lados, obtendo

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

o que encerra a demonstração.

Corolário 2. *Se p é um primo e a é um inteiro positivo, então $a^p \equiv a \pmod{p}$.*

Demonstração: Analisemos os seguintes casos, se $p \nmid a$ e $p|a$. Se $p|a$ então $p|a(a^{p-1} - 1)$ e, portanto $a^p \equiv a \pmod{p}$. Se $p \nmid a$, sabemos que $p|(a^{p-1} - 1)$ e, portanto, $p|(a^p - a)$. Logo, em ambos os casos, $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Definição: Se n é um inteiro positivo, a função ϕ de Euler, denotada por $\phi(n)$, é definida como sendo o número de inteiros positivos menores do que ou iguais a n que são relativamente primo com n .

Por exemplo $\phi(10)$ é a quantidade de números menores que 10 que são relativamente primos com 10. São os números 1, 3, 7 e 9, logo, $\phi(10) = 4$.

Definição: Um sistema reduzido de resíduos módulo m é um conjunto de $\phi(m)$ inteiros $r_1, r_2, \dots, r_{\phi(m)}$, tais que cada elemento do conjunto é relativamente primo com m , e se $i \neq j$, então $r_i \not\equiv r_j \pmod{m}$.

Teorema 45. Seja a um inteiro positivo tal que $(a, m) = 1$. Se $r_1, r_2, \dots, r_{\phi(m)}$ é um sistema reduzido de resíduos módulo m , então $ar_1, ar_2, \dots, ar_{\phi(m)}$ é também, um sistema reduzido de resíduos módulo m .

Demonstração: Na sequência $ar_1, ar_2, \dots, ar_{\phi(m)}$, temos $\phi(m)$ elementos, devemos mostrar que todos eles são relativamente primos com m e, dois a dois, incongruentes módulo m . Como $(a, m) = 1$ e $(r_i, m) = 1$, temos $(ar_i, m) = 1$. Logo, nos resta mostrar que $ar_i \not\equiv ar_j \pmod{m}$ se $i \neq j$. Mas como $(a, m) = 1$, de $ar_i \equiv ar_j \pmod{m}$, temos $r_i \equiv r_j \pmod{m}$, o que implica $i = j$, uma vez que $r_1, r_2, \dots, r_{\phi(m)}$, é um sistema reduzido de resíduos módulo m , o que finaliza a demonstração.

Teorema 46. (Euler) Se m é um inteiro positivo e a um inteiro com $(a, m) = 1$, então

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Demonstração: Já foi mostrado que os elementos $ar_1, ar_2, \dots, ar_{\phi(m)}$ constituem um sistema reduzido de resíduos módulo m se $(a, m) = 1$ e $r_1, r_2, \dots, r_{\phi(m)}$ for um sistema reduzido de resíduos módulo m . Isto significa que ar_i é congruente a exatamente um dos r_j , $1 \leq j \leq \phi(m)$, e portanto o produto dos ar_i deve ser congruente ao produto

dos r_j módulo m , isto é,

$$ar_1 \cdot ar_2 \cdot \dots \cdot ar_{\phi(m)} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{\phi(m)} \pmod{m}$$

ou seja

$$a^{\phi(m)} \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{\phi(m)} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{\phi(m)} \pmod{m}$$

Como

$$\left(\prod_{i=1}^{\phi(m)} r_i, m\right) = 1$$

podemos cancelar

$$\prod_{i=1}^{\phi(m)} r_i$$

em ambos os lados para obter $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Teorema 47. (*Teorema Chinês do Resto*) Se $(a_i, m_i) = 1$, $(m_1, m_j) = 1$ para $i \neq j$ e c_i inteiro, então o sistema

$$a_1x \equiv c_1 \pmod{m_1}$$

$$a_2x \equiv c_2 \pmod{m_2}$$

$$a_3x \equiv c_3 \pmod{m_3}$$

.

.

$$a_rx \equiv c_r \pmod{m_r}$$

possui solução e a solução é única módulo m , onde $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_r$.

Demonstração: Do fato de $(a_i, m_i) = 1$ sabemos que $a_i x \equiv c_i \pmod{m_i}$ possui uma única solução que denotamos por b_i . Definindo $y_i = \frac{m}{m_i}$, onde $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_r$, teremos $(y_i, m_i) = 1$, uma vez que $(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$. Cada uma das congruências $y_i x \equiv c_i \pmod{m_i}$ possui uma única solução que denotamos por \bar{y}_i . Logo, $y_i \bar{y}_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, 3, \dots, r$. Afirmamos que o número x dado por

$$x = b_1 y_1 \bar{y}_1 + b_2 y_2 \bar{y}_2 + \dots + b_r y_r \bar{y}_r$$

é uma solução simultânea para o nosso sistema de congruências. De fato

$$a_i x = a_1 b_1 y_1 \bar{y}_1 + a_2 b_2 y_2 \bar{y}_2 + \dots + a_r b_r y_r \bar{y}_r \equiv a_i b_i y_i \bar{y}_i \equiv a_i b_i \equiv c_i \pmod{m_i}.$$

uma vez que y_i é divisível por m_i para $i \neq j$, $y_i \bar{y}_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ e b_i é solução de $a_i x \equiv c_i \pmod{m_i}$. Agora provaremos que esta solução é única módulo m . Se \bar{x} é uma outra solução para o nosso sistema, então $a_i \bar{x} \equiv c_i \equiv a_i x \pmod{m_i}$ e, sendo $(a_i, m_i) = 1$ obtemos $\bar{x} \equiv x \pmod{m_i}$. Logo $m_i | (\bar{x} - x)$, $i = 1, 2, \dots, r$. Mas como $(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$ temos que

$$[m_1, m_2, \dots, m_r] = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_r$$

Assim, $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_r | (\bar{x} - x)$, ou seja $\bar{x} \equiv x \pmod{m}$, o que encerra a demonstração.

Capítulo 4

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os problemas olímpicos requerem, muitas vezes, mais que o domínio dos conteúdos, necessitando de ideias e uma boa dose de criatividade. Tais estratégias que não estão presentes em livros didáticos só são adquiridos por meio da resolução de problemas. Quantos mais problemas são tratados como desafios cuja busca de sua solução torna-se o verdadeiro objetivo do processo de ensino, permite o desenvolvimento de estratégias e a consolidação dos conteúdos já estudados. Assim, no estudo individual ou na criação de turmas especiais para a preparação para olimpíadas, a metodologia de resolução de problemas ganha destaque. Logo ao desenvolver técnicas ou a planejar aulas com objetivo de permitir que os alunos detenham condições de solucionar problemas deste nível, deve estar presente, dentre outras metodologias, aquela que busque auxiliar e proporcionar metodologias que permitam aos alunos construir um caminho que permita chegar o mais próximo da resposta solicitada.

A resolução de problemas se insere como uma metodologia presente na educação matemática, a qual busca por meio da resolução de problemas estimular o interesse do aluno e apropriação dos conceitos estudados por meio de sua direta aplicação. Ao utilizar essa metodologia se deixa de lado o ensino tradicional, focada na transmissão do conhecimento do professor para o aluno, sendo este último apenas um receptor valendo

de absorver tudo o que for exposto pelo professor. Na resolução de problemas o foco volta-se ao aluno tornando este ator principal no processo de ensino aprendizagem. O aluno por meio de problemas desafiadores põe em jogo todo o conhecimento adquirido, movimentando esforços e praticando a criatividade na resolução do problema em questão.

Diante de um problema desafiador o aluno com objetivo de solucioná-lo irá utilizar de todos os meios que possui, permitindo que o mesmo individualmente realize uma revisão do conteúdo já estudado, e ainda mais, possa pesquisar sobre conceitos ainda não aprendidos. O aluno entre suas idas e vindas nos mais diversos problemas irá perceber que não adianta tentar solucionar os problemas de qualquer maneira, que ele deve possuir um método que permita obter informações sobre o problema, como os conceitos que o problema aborda, o que o problema solicita e quais informações ele apresenta que podem ajudar na sua resolução. Assim, o mesmo verá que deve haver um caminho que deve ser percorrido, um passo a passo que o permita obter informações, relacionar estas informações com os conteúdos que já aprendeu, comparar com problemas já solucionados, e tentar reutilizar a mesma estratégia ou a partir da estratégia já utilizada, reformular e tentar aplicar ao problema em questão.

Para podermos compreender como a resolução de problemas é aplicada, precisamos entender o que vem a ser um problema. Para podermos ter uma ideia mais clara do que pode ser entendido como problema, trazemos o ponto de vista de alguns autores.

Para Van de Walle (2009 apud ROMANATTO, 2012, p. 301) “um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta.”

“Ter um problema significa buscar conscientemente por alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingí-

vel.”(POLYA,1978).

De acordo com Saviani (2000 apud ROMANATTO, 2012, p. 301) “[...]problema é uma questão cuja resposta desconhecemos e necessitamos conhecer.

Do exposto notamos que para ser caracterizado como um problema, o mesmo deve ser algo que seja reconhecido como problema de fato por aquele que o pretende solucionar, além disso não pode ser uma mera questão cuja resposta seja automática, ou seja, um problema para ser um problema necessita que utilizemos e articulemos nossos conhecimentos e da experiência adquiridos para que possamos compreender o problema e seja em uma solução para o mesmo, em outras palavras, para ser considerado um problema deve haver uma articulação de saberes e na busca de uma resposta. Há ainda mais um ponto a se considerar, para ser um problema o caminho para a solução não deve ser algo totalmente previsível, uma única receita simples que se executada rigorosamente passo a passo conduzirá a resposta certa, pelo contrário, para podermos dizer que estamos diante de um problema, o mesmo deve exigir que seja empregada em muitos casos, uma dose de criatividade ou a formulação de uma nova estratégia, pois do contrário estaríamos apenas de mais um exercício repetitivo.

Reconhecido um problema podemos tratar de técnicas que permitam compreender e solucionar o problema, e de entender como essa metodologia contribui para o processo de aprendizagem dos alunos. A resolução de problemas como metodologia de ensino de matemática ganha força com os trabalhos do matemático húngaro - americano George Polya, que tinha como proposta permitir um maior protagonismo do estudante na construção do seu próprio conhecimento matemático, ao permitir por meio da resolução de problemas que o aluno utilizasse dos seus saberes na construção de seu próprio conhecimento, tornando o estudante um ser ativo no processo de ensino aprendizagem. Contudo, a aplicação da metodologia de resolução de problemas não se resume somente a entregar uma lista de problemas para o aluno e exigir que ele o solucione, na verdade, o autor defende que deve haver um caminho a ser percorrido, caminho este que pode ser sistematizado. Diferente do que já foi dito, este caminho

tratado pelo autor não é como uma receita que seguida conduzirá sempre a resposta correta, mas sim como um processo de perguntas e respostas que permitem reconhecer o problema e articular seus conhecimentos com a finalidade de solucionar o problema proposto.

Os quatro passos defendido por Polya, que devem ser seguidos na resolução de um problema são compreender o problema, traçar um plano, executar um plano, e realizar uma retrospectiva do problema.

Compreender o problema significa que diante do mesmo, o aluno precisa realizar uma leitura completa e atenta, percebendo os conceitos nele envolvidos, as informações constantes e como elas se relacionam. Deve tentar ao decorrer da leitura relacionar os conceitos presentes com os que ele já possui conhecimento, e destacar aqueles os quais ele não tem conhecimento ou que ainda não possui domínio. O aluno deve estar atento a todos esses e outros fatores, para que o problema se torne claro para ele, pois um problema que apresenta dúvidas ou que parece se situar distante do aluno, é visto como algo impossível por ele.

Diante disso o professor também deve tomar cuidado na escolha dos problemas, um problema muito fácil não será atrativo ao aluno, além do esforço e do conjunto de conhecimentos e habilidades empregados na solução não serem o que foi planejado, não contribuindo assim para o desenvolvimento do aluno, tornando-se mais uma questão qualquer. Da mesma forma, deve-se tomar cuidado para que o problema não seja muito difícil a ponto de sua solução se tornar tão distante ao aluno, que este acabe se desinteressando, e acabe por crer que o tempo que dedicou à aquisição dos conteúdos presentes no problema foi um tempo perdido, e assim, o que deveria ser algo que desafiasse o aluno e o tornasse mais ativo dentro de sala de aula, torna-se algo que o faz acreditar não ser capaz de acompanhar e dominar. Assim, os problemas devem ser colocados em níveis crescente de dificuldade, permitindo que o aluno solucione-os e possa progredir e desenvolvendo novas habilidades e estratégias.

Traçar um plano como a própria frase nos indica é que não se deve atacar um problema de qualquer maneira, que só realizando cálculos e mais cálculos encontraremos a solução final. Muito distante disso, várias problemas necessitam que se trace um caminho que começa com sua leitura e interpretação e finalize em sua solução. Assim é necessário que o aluno compreendam tudo que está fazendo e a importância de cada um de seus passos, que possa compreender e relacionar todos os seus atos com a resolução do problema. Assim, ao traçar um plano o aluno evita realizar cálculos não necessários e de buscar resultados ou habilidades que não serão úteis. Logo, ao se deparar com um problema o aluno deve ter noção do que fará desde o começo, começando com sua leitura, destacando informações importantes, revisando os conceitos presentes e buscando habilidades e estratégias que já tenha utilizado, ou por meio destas, ou não, tentando criar novas estratégias para o problema em questão. Assim, pode-se notar que um problema necessita da realização de vários passos, que se realizado isoladamente sem nenhuma conexão não passarão de dados encontrados, muitos deles nem ao menos necessários para a resolução do problema, logo além de encontrar todas as informações já apresentadas, elas devem ser estruturadas de forma que as informações e resultados encontrados possam ser relacionados para apontarem o caminho da resposta desejada.

Executar o plano é uma das principais etapas na resolução de problemas, pois é aqui que o aluno de posse da leitura feita, da compreensão obtida sobre o problema, da revisão dos conteúdos e da escolha dos resultados, habilidades e estratégias, tentará dar forma a solução do problema. É aqui onde ele articulará todas as informações e resultados obtidos a fim de encontrar novos resultados ou até a mesma a solução do problema. Nesta etapa, o aluno por meio da tentativa, conseguirá perceber se todo o arcabouço por ele criado será ou não suficiente para a resolução do problema, ou se ainda falta algum dado ou resultado que o ajude na resolução, logo, a execução do plano não se configura apenas como uma sequência rígida de passos, pois como dito, pode ser necessário voltar atrás e tentar buscar novas informações.

Logo a execução do plano, por exigir a relação entre vários dados ao mesmo

tempo que se apresenta como uma forma mais complexa de raciocínio, mostra-se como uma forma bem elaborada de desenvolvimento de planos estratégicos, por necessitar a sua revisão ao mesmo tempo que está sendo posto em prática. Contudo, deve-se comentar ainda que os alunos muitas vezes por vários motivos podem acabar parados em alguma etapa da execução do plano, como por exemplo, não interpretar corretamente uma informação, não ter domínio sobre determinado conceito, sua estratégia ser falha em algum ponto, ou a maneira com que articula os dados não propiciar o encontro de novos resultados ou não permitir interpretar o que já foi visto. A medida em que o aluno realiza várias tentativas e não consegue progredir na solução do problema, ele começa a se distanciar e a se desestimular, perdendo por fim o interesse no problema, para que isto não ocorra, o professor deve de maneira sutil intervir, propondo questionamentos e ajudando na compreensão do problema por meio de dicas, as quais permitam que o aluno prossiga sem ser lhe dado a resposta do problema.

Retrospectiva do problema é a última etapa, é nela onde o aluno irá rever sua solução, tentar encontrar possíveis erros, encontrar resultados e estratégias que embora úteis em diversos problemas e tendo sido aplicado neste, poderiam ser suprimidos, tornando uma solução mais direta e enxuta. Nesta etapa ele tem a chance de rever seu caminho, rever cada passo feito e cada decisão tomada. Pode ao entender e compreender mais uma vez o desencadeamento lógico realizado, se apropriar das estratégias utilizadas, tornando-se mais apto a solucionar problemas que possuam ideias parecidas, e mais ainda, constrói uma metodologia que irá auxiliar na resolução de vários outros problemas.

É fácil perceber que durante todas as etapas empregadas na resolução de problemas, o aluno é o centro do processo educativo, é este, por meio da pesquisa, do raciocínio lógico e da concepção e criação de estratégias que promove, articula e coloca em prática tudo o que for aprendido. Assim ressalta-se a importância da resolução de problema para além de um simples meio de encontrar soluções de problemas, mas sim como uma metodologia ativa muito eficaz na construção do conhecimento matemático

por parte dos alunos.

É importante ressaltar que todas as etapas devem ser trabalhadas em conjunto, tendo todas a sua devida importância, contudo é de se esperar que antes mesmo de se concluir uma etapa, o aluno já consiga solucionar o problema, ou também, mesmo realizando todos os passos, o aluno pode não encontrar a solução ou chegar em um resultado diferente do esperado. Logo, mesmo sendo um conjunto de passos bem estruturados, não pode se dizer que conduzirá sempre ao destino. Tal pensamento vai de encontro com o que afirma Polya em sua obra.

Cada uma dessas fases tem a sua importância. Pode acontecer que a um estudante ocorra uma excepcional ideia brilhante e, saltando por sobre todas as preparações, ele chegue impulsivamente à solução [...] acontecerá o pior se o estudante atirar-se a fazer cálculos e a traçar figuras sem ter compreendido o problema. É geralmente inútil executar detalhes sem perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de plano. Muitos enganos podem ser evitados se, na execução do seu plano, o estudante verificar cada passo. Muitos dos melhores efeitos podem ficar perdidos se ele deixar de examinar e de reconsiderar a solução completa. (POLYA, 1995, p. 4)

Os problemas olímpicos requerem mais do que simples cálculos ou o emprego de fórmulas e teoremas, requer que o aluno além de relacionar tudo isso, utilize da imaginação e criatividade para a elaboração de estratégias mais criativas. Cita-se como exemplo os problemas da OBMEP, em tal competição os enunciados são em geral simples e de fácil compreensão, os conteúdos são aqueles trabalhados em sala de aula, contudo o que em geral conduz a solução do problema é uma ideia bem mais elaborada. Tais ideias, estratégias ou habilidades não estão, em geral, presentes em livros didáticos, elas são na verdade construídas e absorvidas por meio da constante resolução de problemas e da discussão das soluções entre os alunos.

Nesta perspectiva, parece muito plausível utilizar como ferramenta no estudo de olimpíadas a metodologia de resolução de problemas, pois a cada problema solucio-

nado é encontrado ou aperfeiçoado uma nova estratégia que será útil em vários outros problemas. E é também por meio da resolução de problemas que o aluno consegue se adaptar ao estilo de prova comum nas olimpíadas, o tornando mais familiarizado com o modelo de pensamento e raciocínio que deve utilizar.

Façamos uma espécie de paralelo, tentando entender como as etapas discutidas por Polya podem ser abordadas em problemas olímpicos.

A primeira etapa de interpretação e compreensão do problema é uma etapa claramente importante em todos os problemas que se pretende solucionar, contudo em problemas olímpicos, em sua grande maioria, todos os dados e informações disponibilizados são de suma importância, assim, se tratando de um problema desse nível, o aluno deve estar certo que compreendeu o problema por completo, pois uma única informação que não tenha sido bem compreendida pode prejudicar a sua solução.

A segunda etapa que consiste em executar o plano é uma das principais para este tipo de problema. O aluno deve ter certeza que possui uma boa base sobre os conteúdos abordados, que reconhece e compreende os termos e conceitos presentes no enunciado, devendo toma-lo como parte inicial na construção de seu plano. De posse das informações básicas, o aluno precisa revisar problemas já solucionados que possuam alguma similaridade com o abordado para que possa reutilizar ou aperfeiçoar alguma ideia já utilizada. Se diante de um problema novo, o aluno deve utilizar as informações já obtidas e tentar relacionar com o que foi solicitado pelo problema, para que ele possa construir uma espécie de roteiro que lhe diga o que ele precisa descobrir para chegar a seu destino. Sabendo o que precisa descobrir o aluno pode empregar resultados que conheça para alcançar essas metas durante o problema. Assim, esta segunda etapa é o que provavelmente determinará o êxito na resolução do problema em questão.

A terceira etapa, que como já sabemos, consiste em colocar o plano em prática, ou seja, é aqui que tudo o que foi pensado será de fato executado, assim como em outros problemas é uma etapa que se opera de maneira similar, tomando sempre o cuidado

para não tomar decisões equivocadas ou tirar conclusões erradas.

A quarta e última etapa é a retrospectiva do problema que também é de suma importância, é nela que o aluno reforçará o raciocínio que teve, onde poderá compreender melhor como este tipo de problema é desenvolvido, e é também onde o aluno poderá consolidar as estratégias utilizadas, aumentando o arcabouço de ferramentas que contribuirá para a solução de vários outros problemas.

Capítulo 5

PROBLEMAS OLÍMPICOS

Neste capítulo, são apresentados inúmeros problemas olímpicos. desde os fáceis até aqueles bem mais complexos. Serão utilizados neles as etapas descritas na metodologia de resolução de problemas.

(OBM – 1998, Nível 2) - Qual é o dígito das unidades do número 3^{1998} ?

Solução:

Primeira etapa: Estamos diante da potência 3^{1998} , ao calcular obteremos um número. Queremos saber qual é seu último dígito, ou seja, o algarismo das unidades.

Segunda etapa: Com toda certeza, o caminho mais lógico não será calcular esta potência, haja visto a quantidade de multiplicações que iríamos fazer. Sabemos que ao calcular a potência obteremos um número, se subtrairmos o algarismo das unidades deste número, o seu último dígito será agora igual a 0, e terminando em 0, ele deve ser divisível por 10. Isso nos diz então que $10|(3^{1998} - \text{último algarismo})$. Em termos de congruência, isto significa que $3^{1998} \equiv \text{último algarismo} \pmod{10}$, logo se encontrarmos o número que é congruente a 3^{1998} módulo 10, saberemos qual é o último dígito deste número.

Terceira etapa: Sabemos que $3^2 = 9 \equiv -1 \pmod{10}$, donde temos que $3^4 \equiv$

$(-1)^2 = 1 \pmod{10}$, segue que $3^{1996} \equiv 1^{499} = 1 \pmod{10}$. Temos também multiplicando por $3^2 \equiv 1 \pmod{10}$, obtemos $3^{1998} \equiv 9 \pmod{10}$. Logo o algarismo das unidades do número 3^{1998} é 9.

Quarta etapa: Notamos que para solucionar o problemas precisamos utilizar congruência, o que acabou sendo bem simples, contudo, isto só ocorreu porque notamos que um número ele deve ser congruente a seu algarismo das unidades módulo 10. Raciocinando um pouco, notamos que esta estratégia pode ser utilizada também para sabermos quais os dois, três e por vai, últimos algarismos de um número, basta encontrar o menor número que seja congruente a ele módulo 100 ou 1000, respectivamente.

(OBM – 1998, Nível 2) O número $1234a6$ é divisível por 7. O algarismo a vale:

Solução:

Primeira etapa: Estamos diante de um número de 6 algarismo onde um deles não é, a priori, conhecido, porém sabemos que ele é divisível por 7. Diante dessas informações devemos encontrar o valor de a .

Segunda etapa: Se o número é divisível por 7, então ao dividir aquele por este o resto da divisão deve ser igual a 0. Assim basta realizarmos a divisão procurando um número que quando substituído por a resulte em um múltiplo de 7.

Terceira etapa: Podemos desmembrar o número em questão da seguinte maneira $1234a6 = 123400 + a6$. Ao dividirmos o número 123400 por 7 obtemos quociente igual a 17628 e resto 4. Logo $123400 = 17628 \cdot 7 + 4$. O número $1234a6 = 123400 + a6$ é divisível por 7, logo ao somarmos 4 a $a6$, obteremos um número múltiplo de 7, observamos que $a6 + 4 = a0 + 6 + 4 = a0 + 10 = (a + 1)0$. um número terminado em 0, ou seja, 10, 20, 30, desses, o único que é divisível por 10 é 70. Logo $a + 1 = 7$, e $a = 6$.

Quarta etapa: O problema em si é de simples compreensão, e se mostrava de fácil resolução. Uma das ideia que permitiu solucionar o problema foi a de desmembrar números. Ao desmembrar o primeiro número, obtemos que a primeira parcela ao

dividir por 7, deixava um resto igual a 4, pegamos esse número, desmembramos a segunda parcela e somamos o resto 4 que havíamos encontrado. Vimos então que este novo número deveria terminar em 0, o que acabou por nos dar a resposta correta do problema.

(OBM – 1999, Nível 2) Quantos são os possíveis valores inteiros de x para que $\frac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro?

Solução:

Primeira etapa: Queremos encontrar valores inteiros de x que façam da fração um número inteiro. Sabemos que podemos interpretar uma fração como uma divisão do numerador pelo denominador. Assim, de outra maneira, o problema nos solicita, os valores positivos de x para os quais $x + 19$ divide $x + 99$

Segunda etapa: Ao olhar mais atentamente para a fração percebemos que o numerador consiste em um número maior que o denominador, assim, parece plausível quebrar esta fração na soma de duas outras, e então analisar o que podemos encontrar. O que tudo indica é que encontraremos a divisão de um número por uma expressão, que facilitará em muito a nossa solução, pois bastará que encontremos os divisores do novo número em questão.

Terceira etapa: Primeiramente escrevemos $\frac{x+99}{x+19} = \frac{x+19}{x+19} + \frac{80}{x+19} = 1 + \frac{80}{x+19}$. Para que este seja um número inteiro, $x + 19$ deve dividir 80. Os únicos divisores de 80 são 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 e 80. Para cada valor encontramos respectivamente $x = -18, -17, -15, -14, -11, -9, -3, 1, 21$ e 61, que dá um total de 10 possibilidades para o valor de x .

Quarta etapa: As estratégias que nos concederam a resposta foi de desmembrar uma expressão algébrica em duas partes, de maneira que a primeira delas fosse divisível pelo denominador, e a de encontrar os divisores do número que consistia na segunda parcela. Aliado a isso, foi necessário interpretar a fração como a divisão entre o numerador e o denominador, conhecimento sem o qual não nos permitiria avançar

na solução.

(Albânia - 2018, Nível) Ache todos os primos p tais que $p + 2$ e $p^2 + 2p - 8$ também sejam primos.

Solução:

Primeira etapa: Este problema em uma primeira lida parece bem complicado. Ele nos dá duas expressões em função de um número primo p , e solicita todos os primos p para que ambas as expressões sejam também números primos.

Segunda etapa: Sabemos que um número é primo quando ele possui apenas dois divisores positivos, que são 1 e ele mesmo, assim, uma ideia que nos parece intuitiva é tentar escrever alguma das expressões como produto de duas outras expressões. Ao olharmos para a $p^2 + 2p - 8$, que possui grau 2, somos levados a pensar que poderíamos escrevê-la como produto de duas expressões e grau 1. Como esta expressão deve resultar em um número primo, se conseguirmos fatorá-la, basta então igualar cada expressão a 1, que deve ser obrigatoriamente, um dos seus divisores.

Terceira etapa: Podemos escrever $p^2 + 2p - 8 = p^2 + 2p + 1 - 9 = (p + 1)^2 - 3^2 = (p + 1 - 3)(p + 1 + 3) = (p - 2)(p + 4)$. Logo escrevemos $p^2 + 2p - 8$ como produto de dois fatores $(p - 2)$ e $(p + 4)$, porém como aquele é primo, devemos ter $p - 2 = 1$ ou $p + 4 = 1$, donde encontramos $p = 3$ ou -3 . A única possibilidade é $p = 3$.

Quarta etapa: Neste problema era necessário o domínio sobre o que é um número primo, sendo saber disso, o problema seria inatacável. Após isso, tendo conhecimento de que é um número primo, foi fundamental tentar escrever uma das expressões como produto de duas outras. Como cada expressão deveria resultar em número, e estávamos diante de um número, a estratégia de igualar cada uma das parcelas igual a 1 foi o que culminou na solução do problema.

(OCM - 2000, Nível 2) Encontre as soluções inteiras da equação $y^2 - 3 = x(3y - 6)$.

Solução:

Primeira etapa: Nos é apresentado uma equação algébrica com duas variáveis, x e y , e nos é solicitado descobrir os valores para tais que resulte na igualdade posta.

Segunda etapa: Manipulando um pouco encontramos que $y^2 - 3 = x(3y - 6) = 3x(y - 2)$. De ambos os lados possuímos duas expressões na variável y , e da maneira que está posta, nos indica que podemos utilizar o fato de $(y - 2)|(y^2 - 3)$ para tentar encontrar os valores possíveis para y . De posse dos valores possíveis para y poderemos facilmente encontrar os valores possíveis para x , e por fim solucionar o problema.

Terceira etapa: Temos $y^2 - 3 = x(3y - 6) = 3x(y - 2)$. Logo, temos que $y - 2|y^2 - 3$, contudo, temos que $y^2 - 3 = y^2 - 4 + 1 = (y - 2)(y + 2) + 1$. Como $y - 2|y^2 - 3$ e $y - 2|(y - 2)(y + 2)$, devemos ter que $y - 2|1$, que só é possível se $y - 2 = 1$ ou $y - 2 = -1$, temos então que $y = 3$ ou $y = 1$. Para $y = 3$, obtemos $x = 2$, para $y = 1$, não obtemos solução inteira. Logo a solução do problema é o par ordenado $(2, 3)$.

Quarta etapa: Neste problema foi necessário o conhecimento sobre expressões algébricas e do conceito de divisibilidade aplicado a expressões algébricas. A estratégia que nos permitiu progredir no problema foi a de manipular a expressão algébrica de forma a encontrar uma relação de divisibilidade entre duas expressões com a mesma variável, utilizando de uma técnica poderosíssima que consiste em completar quadrados, foi possível descobrir os possíveis valores de y , que resultaram nos de x , e por fim, na solução do problema.

(IMO – 1959) - Provar que a fração $\frac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível para qualquer número natural n .

Solução:

Primeira etapa: O problema nos apresenta uma fração em que o numerador e o denominador são expressões algébricas em função do número natural n , e nos solicita que provemos que tal fração é irredutível qualquer que seja o valor do natural n . Diferente de um dos problemas anteriores, não é tão simples quando desmembrar

o numerador em parcelas que seja divisíveis pelo denominador, haja visto, que ainda sobrarão parcelas com a presença da variável n . Assim, devemos buscar uma outra estratégia.

Segunda etapa: Relembrando o conceito de irredutibilidade, para que tal fração assim seja, o único que deve dividir ambas as expressões deve ser o número 1. Logo podemos supor que haja um número que divida ambas as expressões, e mostrar que este número deve ser igual ao número 1, independente de qual seja o número n .

Terceira etapa: Devemos mostrar que se existe um número que divida $21n + 4$ e $14n + 3$, esse número deve ser igual a 1. Seja d então um divisor comum de ambos os fatores, ou seja, $d|21n + 4$ e $d|14n + 3$. Aqui podemos tentar utilizar uma propriedades que nos diz que se um número divide dois números, então deve dividir qualquer combinação linear destes. Podemos utilizar esta estratégia para fazer sumir o termo n , sobrando apenas números. Olhando para as expressões, notamos que devemos tomar coeficientes estratégicos para que isso aconteça. Do exposto concluímos que $d|3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 9 - 8 = 1$, ou seja, $d|1$, como d deve ser positivo, temos que ter $d = 1$, e a fração é de fato irredutível.

Quarta etapa: Para este problema foi crucial ter domínio do que é uma fração irredutível, além de ter bom conhecimento de resultados de divisibilidade. O ponto chave da resolução do problema foi articular todos os conceitos e resultados que colocamos em prática com a ideia de tomarmos o divisor comum dessas duas expressões de forma genérica, concluindo que independente do valor de n , esse divisor comum deveria ser sempre igual a 1.

(OBM - 2016, Nível 2) O número de seis dígitos $ab2016$ na base 10 é múltiplo de 99. Determine o valor do dígito a .

Solução:

Primeira parte: Já solucionamos um problema parecido a este, contudo neste caso, temos dois números desconhecidos, e o problema exige que seja divisível por

99, um número bem maior que 7. Assim dividir não parece uma boa ideia. Temos conhecimentos sobre os critérios de divisibilidade, que poderão ser úteis na resolução.

Segunda etapa: Embora não haja um critério de divisibilidade para 99, sabemos que este é igual ao produto de 9 por 11, e ainda mais, que estes dois números são primos. Assim para que este número seja divisível por 99, ele deve ser divisível simultaneamente por 9 e 11. A partir desta estratégia podemos encontrar relações que permitam encontrar o valor de a e b .

Terceira etapa: Como $99 = 9 \cdot 11$, e 9 e 11 são primos entre si, temos que para que $ab2016$ seja divisível por 99, deve ser por 9 e por 11. Utilizando os critérios de divisibilidade, para que seja divisível por 9, devemos ter $a+b+2+0+1+6 = a+b+9$ deve ser divisível por 9. Para que seja divisível por 11 devemos ter $a-b+2-0+1-6 = a-b-3$ divisível por 11. Como a e b são algarismos devemos $a + b = 9$ ou $a + b = 18$, que nos dá $b = 9 - a$ e $b = 18 - a$. Assim devemos ter no primeiro caso $11|a - (9 - a) - 3 = 2a - 12 = 2(a - 6)$, o único algarismo que satisfaz é $a = 6$, donde obtemos $b = 3$. No segundo caso, temos $11|a - (18 - a) - 3 = (2a - 21)$, donde encontramos $a = 5$, contudo, da relação anterior, encontramos $b = 13$, que não é possível, pois b é um algarismo.

Quarta etapa: O passo mais importante foi tratar o problema de divisibilidade por 99 pelo, de maneira equivalente, de divisibilidade por 9 e 11, o que simplificou o problema, pois temos critérios de divisibilidade para estes números. Outro passo importante foi reconhecer a limitação que os valores de a e b possuem, por exemplo na expressão $11|(a - 6)$, significa que $a - 6$ é um múltiplo de 11, logo poderia ser 0, 11, 22 e outras infinitas possibilidades, contudo apenas a de ser igual a 0 seria a correta, haja visto que para que $a - 6$ seja igual a 11, deveríamos ter $a = 17$, contudo a é algarismo, podendo assumir no máximo o valor 9. Articulando estes conhecimentos a solução rapidamente foi encontrada.

(OBMEP - 2017, Nível 3) A maior potência de 2 que divide o produto $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2023 \cdot 2024$ é 2^{2017} . Qual a maior potência de 2 que divide o produto $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 4047 \cdot 4048$?

Solução:

Primeira etapa: O problema nos oferece uma multiplicação e nos informa sobre a maior potência de 2 que a divide, depois nos indaga sobre qual a maior potência de 2 que divide o novo número, o qual percebemos ser uma extensão da multiplicação do primeiro. É obvio que não é viável realizar a multiplicação para após isso fatorar ou contar os fatores 2 deste novo número. Ao apresentar o novo número como uma extensão do primeiro, o problema nos indica que por meio de uma análise do primeiro número podemos solucionar o problema. A primeira grande ideia, embora simples, é que os números que podem contribuir para a potência de 2 são os números pares.

Segunda etapa: Ao analisar os dois números vemos que o último da primeira multiplica é 2024, enquanto o ultimo da segunda multiplicação é 4048, ou seja, o dobro. Raciocinando um pouco mais, percebemos que se multiplicar toda os fatores da primeira multiplicação, obteremos todos os termos pares da segunda multiplicação, que como dito anteriormente são os únicos a contribuir para a potência de 2. Logo basta contar quantos novos fatores iguais a 2 estamos adicionando, e incluir isto na potência anteriormente apresentada.

Terceira etapa: Como sabemos os únicos números que são divisíveis por 2, e por isso contribuem para a potência de 2, são os números pares. Se pegarmos o número $1 \cdot 2 \dots 2023 \cdot 2024$, e multiplicarmos cada um dos números do produto por 2, obtemos justamente os números pares que aparecem no produto $1 \cdot 2 \dots 4047 \cdot 4048$, que mais uma vez são os únicos a contribuem para as potencia de 2, já sabemos que 2^{2017} é a maior potencia que divide $1 \cdot 2 \dots 2023 \cdot 2024$, como os termos pares de $1 \cdot 2 \dots 4047 \cdot 4048$ foram obtidos multiplicando cada termo por 2, basta contarmos quantos termos 2 utilizamos, ora, se há 2024 números, multiplicamos por 2024 parcelas iguais a 2, contribuindo com 2^{2024} , logo a maior potencia de 2 que divide o produto é $2^{2024} \cdot 2^{2017} = 2^{4041}$.

Quarta etapa: O principal fato utilizado na resolução de problema, e que se mostrou de extrema importância, embora sua simplicidade, foi de perceber que apenas

os números pares podem contribuir para a potência de 2 que divide o número. Outra grande ideia, foi perceber que ao multiplicar cada fator da primeira multiplicação por 2, obteríamos todos os números pares da segunda multiplicação. A articulação destas duas ideias permitiu saber quantas novos fatores 2 deveríamos incluir na potência já conhecida, permitindo a solução do problema.

(OBMEP - 2017, Nível 3) Somando 1 a um certo número natural, obtemos um múltiplo de 11. Subtraindo 1 desse mesmo número, obtemos um múltiplo de 8. Qual é o resto da divisão do quadrado desse número por 88?

Solução:

Primeira etapa: O problema nos conta informações sobre um número desconhecido, assim, o primeiro passo é denotar este número por uma letra para que possamos trabalhar algebricamente com ele. As informações sobre o número são bem claras e diretas, e utilizando elas, o problema solicita que encontremos o resto da divisão do quadrado deste número por 88. Podemos tentar encontrar o número ou alguma expressão que nos leve a resposta.

Segunda etapa: Iremos denotar o número por x depois iremos utilizar informações que permitam criar expressões algébricas envolvendo esta variável. Dificilmente encontraremos o número de fato, mas poderemos utilizando algum truque algébrico encontrar o que problema pede.

Terceira etapa: Denotemos tal número por x . Do enunciado temos: $x - 1 = 11m$ com m inteiro, e $x + 1 = 8n$ com n inteiro. Notamos que temos duas expressões que se multiplicadas resulta numa expressão simples conhecida como diferença dos quadrados, Multiplicando lado a lado, obtemos: $(x - 1)(x + 1) = (x^2 - 1) = 11 \cdot 8mn$, obtemos: $x^2 - 1 = 11 \cdot 8 \cdot mn$ que implica $x^2 = 88mn + 1$ Logo o quadrado desse número deixa resto 1 na divisão por 88.

Quarta etapa: O primeiro passo foi recorrer a álgebra para poder atacar o problema. Depois disso utilizando as informações fornecidas, o grande passo foi perceber

que o produto das duas expressões obtidas resultava numa expressão simples onde aparecia o termo que queríamos, após isso o problema tornou-se fácil.

(OBM - 2016, Nível 2) Determine o menor inteiro positivo n tal que $n!$ é múltiplo de 2016.

Solução:

Primeira etapa: O problema é objetivo ao solicitar o menor valor de um inteiro positivo n tal que $n!$ seja divisível por 2016. Podemos pensar em um primeiro momento em fazer por tentativa, contudo, como conhecido o fatorial, isto provavelmente envolveria muitos cálculos, e de nada nos ajudaria a desenvolver o raciocínio lógico - dedutivo.

Segunda etapa: Pensando logicamente, sabemos que o fatorial de um número é composto por fatores menor e iguais a este número, assim, para saber qual fatorial será divisível por 2016, basta procurarmos o menor entre aqueles que contenha todos os fatores de 2016. Logo antes de tudo devemos fatorar o número 2016.

Terceira etapa: Fatorando o número 2016 em fatores primos, obtemos $2016 = 2^5 3^2 7$. Como 7 é primo, então $n \geq 7$, o 3 e o 6, cada um tem um fator 3, que juntos nos dão um fator 3^2 , o 2, 4 e 6, juntos nos dão um fator 2^4 , para que consigamos mais um fator 2, devemos ter mais um número par, que seria, no caso, o número 8. Logo devemos ter $n = 8$, menor inteiro positivo solicitado.

Quarta parte: O conhecimento sobre números fatoriais e fatoração foi o que nos proporcionou as ferramentas necessárias para solucionar o problema. Ao entender que o fatorial é composto de fatores, assim como a fatoração de um número, conseguimos interpretar o problema como buscar o menor inteiro positivo cujo fatorial tivesse todos os fatores do número 2016.

(OBM - 2015, Nível 2) Existem quantos números inteiros positivos n tais que ao dividir 2032 por n temos resto 17?

Solução:

Primeira etapa: O problema nos apresenta uma situação de divisão com resto por um dado número, que a um primeiro momento é desconhecido. Assim, nos parece que o conhecimento que deveremos utilizar é da divisão euclidiana.

Segunda etapa: Conhecemos o quociente e o resto, podemos montar uma equação algébrica com as informações disponibilizadas a partir disso encontrar novas informações.

Terceira etapa: Pelo algoritmos de Euclides, ao dividirmos 2032 por n , obtemos quociente q e resto 17, onde: $2032 = nq + 17$, assim, devemos ter $2032 - 17 = 2015 = nq$. Logo n deve ser um divisor de 2015. Fatorando 2015 em números primos, obtemos $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Assim os possíveis valores para n são 5, 13, 31, 65, 155, 403 e 2015, que totaliza 7 possíveis valores para n . Destas possibilidades, apenas 31, 65, 155, 403 e 2015 cumpre o que solicita o enunciado. Logo existem 5 números inteiros positivos n , que ao dividir 32 por n , deixará resto 17.

Quarta etapa: Ter domínio sobre o algoritmo da divisão euclidiana, nos permitiu construir uma expressão algébrica de onde tiramos as informações necessárias para a resolução do problema. Além disso, foi necessário, ao olhar para a última expressão algébrica obtida, poder interpretar ela como uma relação de divisibilidade, de onde tiramos todos os possíveis valores para n , e que portanto permitiu solucionar o problema.

(OBMEP - 2019, Nível 2) - Uma festa de casamento será realizada em um salão que comporta no máximo 200 pessoas. O organizador sabe que se distribuir 8 convidados por mesa, uma mesa ficará com apenas um convidado. O mesmo irá ocorrer se ele distribuir 6 ou 7 convidados por mesa. Se ele distribuir 9 convidados por mesa, uma mesa ficará com menos do que 9 pessoas. Quantas pessoas ficarão nessa mesa?

Solução:

Primeira etapa: O enunciado nos apresenta um problema de distribuição, onde em cada caso sobra uma determinada quantidade. O problema, de maneira equivalente, solicita um número que deixe os restos determinados pela divisão de cada um dos números apresentados.

Segunda etapa: O problema nos informa que a quantidade de convidados é um número que ao ser dividido por 6, 7 ou 8, deixa resto igual a 1, e pergunta quantos convidados sobraram se ele distribuir 9 pessoas por mesa. Se encontrarmos um número que seja múltiplo tanto de 6, 7 e 8, e adicionar 1, então este número possuirá todas as informações descritas no enunciado, bastando avaliar sua divisão por 9.

Terceira etapa: Se tirarmos um convidados, a quantidade de convidados será um múltiplo de 6, 7 e 8. Calculando o MMC desses três números encontramos 168, logo a quantidade de convidados é 169. Ao dividirmos 169 convidados em 9 convidados por mesa, encontramos que em uma das mesas ficará apenas 7 convidados.

Quarta etapa: A ideia central na resolução deste problema foi perceber que a quantidade de convidados deixa o mesmo resto na divisão por 6, 7 e 8, assim, ao encontrar um número que seja múltiplo de todos esses e somar um, obteríamos um número que seria provavelmente a quantidade de convidados. Por fim, de posse do possível número de candidatos, restou apenas realizar a divisão e encontrar a resposta correta.

(OBMEP - 2019, Nível 2) - Um número inteiro positivo é chamado de tetrapar quando é divisível quatro vezes consecutivas por 2 e o resultado da última divisão é um número ímpar. Por exemplo, o número 80 é tetrapar, pois $80 \div 2 = 40$, $40 \div 2 = 20$, $20 \div 2 = 10$ e $10 \div 2 = 5$. Quantos são os números tetrapares de três algarismos?

Solução:

Primeira etapa: O problema nos conta sobre uma propriedade que alguns números naturais possuem, e solicita que encontremos todos os números com a mesma propriedade. O enunciado nos conta que a propriedade é ser dividido por 2 quatro

vezes, contudo, podemos tentar olhar para este problema de uma maneira equivalente e mais simples.

Segunda etapa: Como após dividir o número quatro vezes consecutivas devemos obter um número ímpar, isso nos diz, de maneira equivalente, que devemos obter todos os números de três algarismos cuja maior potência de 2 que o divide é 2^4 .

Terceira etapa: Como já sabemos um número que é divisível quatro vezes por 2 é também divisível por 16. O problema solicita que ao ser dividido quatro vezes por 2, o resultado seja um número ímpar, ou seja, que o número não seja mais divisível por 2. Logo a maior potência de 2 que deve dividir este número é $2^4 = 16$. Os números que queremos encontrar são, então, iguais a $16 \cdot$ número ímpar. O menor número de 3 algarismos que cumpre o enunciado é $7 \cdot 16 = 112$ e o maior é $62 \cdot 16 = 992$. dando uma quantidade de $62 - 7 + 1 = 56$ números, contudo, devemos tirar os números pares e pegar apenas os ímpares, logo a quantidade de números que cumpre o enunciado é $56/2 = 28$.

Quarta etapa: O conceito de fatoração foi extremamente útil neste problema. AO notar que a maior potência de 2 que devia dividir estes números era $2^4 = 16$ encontramos um ponto de início para encontrar todas as possibilidades. Um estratégia simples que ajudou a solucionar o problema foi procurar o primeiro e o último que possuíam a propriedade que buscamos, assim, ao invés de contar um por um, podemos facilmente contar quantos tinham ao todo utilizando uma simples subtração.

(OBMEP - 2019, Nível 2) - Os números a e b são inteiros positivos tais que $\frac{a}{11} + \frac{b}{3} = \frac{31}{33}$. Qual é o valor de $a + b$?

Solução:

Primeira etapa: O problema nos apresenta uma soma de duas frações em que os denominadores são desconhecidos, e além disso, nos informa o resultado desta soma. Poderíamos tentar fazer por tentativa e erro, contudo, isso não contribuirá para pensamento lógico e para a construção de novas ideias. O que parece ser mais racional num

primeiro momento é realizar a soma e identificar novas informações.

Segunda etapa: Percebemos que ao realizar a soma, o denominador irá igualar com o resultado, enquanto que no denominador teremos uma expressão com duas variáveis, que pelo dito antes, podemos igualar ao numerador da fração resultado. Após isso devemos identificar alguma relação que esta expressão deva guardar e utilizar para solucionar o problema.

Terceira etapa: Somando as frações obtemos: $\frac{3a+11b}{33} = \frac{31}{33}$. Multiplicando ambos os lados por 33, obtemos $3a + 11b = 31$ ou equivalentemente, $3a = 31 - 11b$, somando 2 a ambos os lados da igualdade, temos $3a + 2 = 33 - 11b = 11(3 - b)$. Assim 11 divide $3a + 2$, logo $3a$ pode ser igual 9 e $a = 3$. Substituindo, obtemos $9 + 11b = 31$, que implica $11b = 31 - 9 = 22$, e $b = 2$. Assim $a + b = 3 + 2 = 5$.

Quarta etapa: O que nos ajudou a efetivamente solucionar o problema, foi utilizar e manipular a expressão algébrica obtida para obter relações de divisibilidade que permitiram encontrar os valores de a e b .

(OBM - 2014, Nível 2) O número de 5 dígitos $xy26z$ em que cada uma das letras representa um dígito, é divisível por 8, 9 e 11. Qual o valor de x ?

Solução:

Primeira etapa: O enunciado nos apresenta um problema de simples compreensão, e que também nos permite relacionar as estratégias e habilidades que serão úteis na sua resolução. Assim, articulando os critérios de divisibilidade conhecidos poderemos encontrar a solução.

Segunda etapa: Aplicando o critério de divisibilidade por 8, 9 e 11, provavelmente encontraremos expressões que nos permitirão descobrir os valores dos três algarismos que faltam.

Terceira etapa: Para que o número seja divisível por 8 os últimos três algarismos devem formar um número divisível por 8. Logo $26z$ deve ser um múltiplo de 8, isso

acontece se $z = 4$. Logo o novo número é $xy264$, para que este seja divisível por 9, devemos ter $x + y + 2 + 6 + 4 = x + y + 12$, divisível por 9, assim, como x e y são algarismos, $x + y + 12 = 18, 27$, ou seja, $x + y = 6$ ou $x + y = 15$. Para que seja divisível por 11, devemos ter $x - y + 2 - 6 + 4 = x - y =$ múltiplo de 11, logo $x - y = 0$, ou seja $x = y$. Logo $x + y = 2x = 6$, logo $x = 3$.

Quarta etapa: Já tendo solucionado alguns problemas sobre o mesmo assunto, já tomamos posse de algumas estratégias uteis que foram utilizadas neste problemas. Basicamente, aplicamos os critérios de divisibilidade e nos atentamos ao fato de cada letra representar um algarismo, podendo então assumir um valor no máximo igual a 9.

Capítulo 6

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A presente sequência didática foi aplicada numa turma de sexto ano do ensino fundamental na escola municipal Professor Álvaro Rodrigues Madeira, realizada por meio de encontros semanais em uma estrutura parecida com a de um curso, buscando aprofundar conhecimentos estudados em sala de aulas também objetos de estudos para olimpíadas, e de inserir novas ideias e problemas mais desafiadores. Devido ser uma turma de sexto ano onde ainda estavam aprendendo conceitos básicos como as quatro operações, divisibilidade e frações não seria viável trabalhar estes conceitos utilizando álgebra da maneira formal, como por exemplo, utilizar o conceito de incógnita e equações algébricas. Priorizou-se, portanto, uma maneira mais intuitiva e que pudesse ser entendida e utilizada pelos alunos. Abaixo será apresentado como a sequência didática foi esquematizada e aplicada.

6.1 Estrutura da Sequência Didática

Etapas de Ensino: Ensino Fundamental

Área: Matemática

Unidade Temática: Números

Objetos de Conhecimento: Sistema de numeração decimal: características. Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais. Divisão euclidiana. Fluxograma para determinar a paridade de um número natural. Múltiplos e divisores de um número natural. Números primos e compostos. Frações. Operações com números racionais

Habilidades (BNCC):

(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.

(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

Objetivos de Aprendizagem: Construir uma base sólida dos conceitos de divisão, divisibilidade e de fração já estudados. Apresentar novas problemas e contribuir para a construção de novas ideias e técnicas na resolução de problemas principalmente os olímpicos. Atrair a atenção e motivar os alunos a se preparem e a participarem das olimpíadas. Aprofundar os conceitos já estudados trazendo novas propriedades e um

nova interpretação dos conceitos já vistos.

Duração: 8 encontros, cada encontro possuindo duração de 1 hora e 40 minutos.

Recursos Educacionais: Quadro branco, pincel, materiais impressos e projetor.

Avaliação A avaliação será de caráter formativo buscando monitorar ao longo do curso o nível de compreensão do aluno, como um dos objetivos principais ajustar as metodologias utilizadas no ensino e melhorar o desempenho do aluno.

Estratégias de Ensino:

Consolidar os conteúdos básicos: - Antes de iniciar a resolução de problemas olímpicos ou ainda a abordar novos conteúdos ou aprofundar os já estudados, foi necessário consolidar os conteúdos já estudados, para que os conteúdos e as novas ideias apresentadas possam ser compreendidas pelos alunos.

Exposição dos conteúdos e de estratégias: Durante os encontros foram apresentados conteúdos estudados, e logo após um aprofundamento sobre os mesmos. Apresentando e solucionando alguns problemas foram apresentadas algumas ideias que poderiam ser úteis em diversos problemas, e que também poderiam ser reformuladas para ser utilizadas em problemas diferentes.

Discussão dos problemas: A cada problema apresentado era reservado um tempo para que os alunos lessem, pensassem e discutissem sobre o problema. Ao final, cada aluno apresentava sua solução ou seu raciocínio sobre o problema, ao término, era discutido qual ideia parecia ser a mais correta. Quando os alunos terminavam a discussão era realizada a resolução do problema utilizando sempre que possível as ideias que os próprios apresentavam.

Materiais de apoio: Notas de aula disponibilizada pelo professor, lista de problemas olímpicos e indicação de vídeos aulas sobre os conteúdos abordados.

Estrutura do curso

Cada encontro, com duração de 1 hora e 40 minutos foi dividido em etapas, como segue.

Etapa 1 - Exposição teórica do conteúdo e revisão de conteúdos abordados em encontro anteriores. Esta etapa dura 30 minutos.

Etapa 2 - Resolução de problemas olímpicos do conteúdo abordado no encontro. Esta etapa tem duração de 20 minutos

Etapa 3 - São apresentados 4 problemas olímpicos para que os alunos leiam, raciocinem e discutam em sala. Esta etapa dura 30 minutos.

Etapa 4 - Resolução dos problemas apresentados utilizando sempre que possível as ideias apresentadas pelos alunos. Esta etapa dura 20 minutos.

Abaixo está a relação dos encontros realizados.

Encontro 1 - Quatro operações básicas e a divisão.

Encontro 2 - Divisibilidade.

Encontro 3 - Algoritmo de Euclides I.

Encontro 4 - Algoritmo de Euclides II.

Encontro 5 - Critérios de divisibilidade I.

Encontro 6 - Frações I.

Encontro 7 - Frações II.

Encontro 8 - Avaliação final do curso.

6.2 Problemas Aplicados

Nesta seção se encontra os problemas e as respectivas soluções dos problemas apresentados durante os encontros.

(OBMEP - 2024, Nível 1) Um grupo de amigos se reuniu para comer quatro pizzas. Cada um deles comeu dois terços de uma pizza e não sobrou nada. Quantos eram os amigos?

(A) 8

(B) 16

(C) 4

(D) 12

(E) 6

Solução: $\frac{2}{3}$ representa uma parte da pizza que todos os alunos comeram, juntando todos as partes que os amigos comeram obteremos a quantidade de pizzas compradas. Denotemos por amigo a quantidade de amigos que havia. Como cada amigo comeu $\frac{2}{3}$ da pizza então a quantidade de amigos vez a quantidade que cada um comeu nos dará a quantidade de pizza compradas, assim:

$$\frac{2}{3} \cdot \text{amigos} = 4$$

ou seja:

$$\frac{2 \cdot \text{amigos}}{3} = 4$$

Neste momento é perguntado a eles qual número que dividido por 3 resulta em 4. A resposta dada e esperada é 12 qual a . Logo após é indagado, então, qual a resposta da seguinte equação:

$$2 \cdot \text{amigos} = 12$$

Em outras palavras, qual número multiplicado por 2 resulta em 12. A resposta dada é 6, logo a quantidade de amigos é 6.

(OBMEP - 2024, Nível 1) - João escolheu quatro números cuja soma é 42. De cada um desses quatro números ele subtraiu o mesmo valor, obtendo 1, 2, 6 e 9. Qual foi o

valor que João subtraiu?

(A) 8

(B) 6

(C) 9

(D) 5

(E) 7

Solução: Sabemos que são quatro números cuja a soma é 42, e que um valor foi subtraído de ambos, resultando nos números 1, 2, 6 e 9. Notamos que somando os novos números obtemos o valor 18. Raciocinando um pouco, descobrimos que se são quatro números e de cada um foi retirado o mesmo valor, então da soma dos quatro foi retirado quatro vezes esse valor, contudo a soma dos quatro dar justamente 42. Assim temos o seguinte:

$$42 - 4 \cdot \text{valor} = 18$$

O número que devemos retirar de 42 para obter 18 é 24, assim 4 vezes aquele valor tem que ser igual a 24, ou seja:

$$4 \cdot \text{valor} = 24$$

O número que multiplicado por 4 que resulta em 24 é 6, logo o valor subtraído de cada um dos números é 6.

(OBMEP - 2023, Nível 1 - Em uma cidade, $\frac{1}{4}$ da população tem pelo menos uma bicicleta. Dentre os que tem bicicleta, $\frac{1}{3}$ tem mais do que uma. Qual fração da população tem apenas uma bicicleta ?

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{7}$

(D) $1/8$

(E) $1/12$

Solução: O problema nos diz que há uma quantidade certa da população, logo podemos tanto usar uma variável, como tomar um número qualquer, claro esse número deve ser estratégico a ponto de ao calcular as frações desse valor não resultar em números decimais. Então digamos que há 12 pessoas nessa cidade. Como uma $\frac{1}{4}$ da população possui pelos menos uma bicicleta, então esse número é $\frac{1}{4}$ de 12 que resulta em 3 pessoas com pelos menos uma bicicleta, destas $\frac{1}{3}$ tem mais de uma, ou seja, $\frac{1}{3}$ de 3 que é 1. Assim apenas 2 pessoas possuem apenas uma bicicleta. Isso representa $\frac{2}{12}$ da população, ou seja, $\frac{1}{6}$ dos habitantes desta cidade possuem apenas uma bicicleta.

(OBMEP - 2019, Nível 1) Qual é o número que está escondido pelo borrão?

Figura 6.2.1: Problema OBMEP - 2019

$$17 - 3 = 20 - 16 + \text{borrão}$$

Fonte: OBMEP 2019

A) 10

B) 11

C) 12

D) 13

E) 14

Solução: Resolvendo com os números que conseguimos identificar, resolvendo o primeiro e o segundo da igualdade, obtemos:

$$14 = 4 + \text{borro}$$

O número que somamos a 4 para obter 14 é justamente o número 10

(OBMEP - 2019, Nível 1) - No Planeta Pemob as semanas têm 5 dias: Aba, Eba, Iba, Oba e Uba, nessa ordem. Os anos são divididos em 6 meses com 27 dias cada um. Se o primeiro dia de um certo ano foi Eba, qual foi o último dia desse ano?

- A) Aba
- B) Eba
- C) Iba
- D) Oba
- E) Uba

Solução: Se o primeiro dia foi Eba, então os próximos são Iba, Oba, Uba, Aba, Eba,..... Assim os dias se repetem de cinco em cinco dias. Como cada ano possui 6 meses com 27 dias cada um, um ano neste planeta possui 162 dias. A cada cinco dias voltamos ao mesmo dia, logo dividindo 162 por 5 obtemos 32 e resto 2, significando que se passaram 32 semanas, voltando assim para o mesmo dia, no caso Eba, e sobrando dois dias. Logo, continuando o calendário temos que o último dia deste ano seria Oba.

(OBMEP - 2019, Nível 2) Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche $\frac{3}{5}$ da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche $\frac{5}{8}$ da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande?

- A) Ela ficará preenchida em $\frac{7}{8}$ de sua capacidade.
- B) Ela ficará preenchida em $\frac{8}{13}$ de sua capacidade.
- C) Ela ficará preenchida em $\frac{5}{8}$ de sua capacidade.
- D) Ela ficará totalmente cheia, sem transbordar.
- E) Ela vai transbordar.

Solução: Neste problema percebemos que para encher a caneca grande ele utiliza a

caneca média, e para a média, ele utiliza a pequena. Ele também nos diz que a caneca pequena cabe uma certa quantidade de líquido, sem nos dizer qual essa quantidade, podemos, ao invés de utilizar uma incógnita, utilizar um número estratégico que ao ser calculado as frações não resultem em números decimais. Diremos então que na caneca pequena cabe 120. A caneca pequena cheia enche $\frac{3}{5}$ da caneca média, ou seja, ela preenche 3 parte das 5 partes que a caneca média pode ser dividida, se 3 partes correspondem a 120, uma parte corresponde a $120/3 = 40$. Como a caneca média cabe 5 partes, nela cabe 40 vezes $5 = 200$. Como a caneca média cheia, ou seja, com 200, ela enche $\frac{5}{8}$ da caneca grande, então das oito partes em que podemos dividir a caneca grande, 200 enchem 5 dessas partes, assim cada parte da caneca grande cabe $200/5 = 40$. Como são 8 partes, na caneca grande caberá 40 vezes $8 = 320$. Enchendo a pequena e a média teremos no total 320 que é justamente a quantidade que cabe na caneca grande, logo, a mesma ficará cheia sem transbordar.

(OBMEP - 2018, Nível 1) Luísa pagou R\$ 4,50 por $\frac{3}{8}$ de um bolo, e João comprou o resto do bolo. Quanto João pagou?

- A) R\$ 6,00
- B) R\$ 6,50
- C) R\$ 7,00
- D) R\$ 7,50
- E) R\$ 8,00

Solução: Das oito partes em que o bolo foi dividido, Luísa comprou 3 delas, pagando no total 4,50 por 3 partes, assim cada parte custa $4,50/3 = 1,50$. Como João comprou o restante das partes, ele comprou 5 partes, como cada uma custa 1,50, ele gastou 5 vezes $1,50 = 7,50$

(OBMEP - 2018, Nível 1) Sílvia e Renato vão fazer 60 biscoitos cada um. Eles começam a fazer os biscoitos ao mesmo tempo. A cada minuto Sílvia faz 5 biscoitos,

enquanto Renato faz 3. Quantos biscoitos Renato ainda deverá fazer depois que Sílvia terminar sua tarefa?

- A) 12
- B) 16
- C) 18
- D) 20
- E) 24

Solução: Sílvia faz 5 biscoitos por minuto, como ele deve fazer 60 biscoitos, ele precisará de $60/5 = 12$ minutos. Em 12 minutos Renato terá feito 36 biscoitos, faltando ainda 24 biscoitos para terminar sua tarefa.

(OBMEP - 2017, Nível 1) Mônica e seu namorado foram assistir a uma peça de teatro. O auditório era organizado em fileiras paralelas ao palco, todas com o mesmo número de cadeiras dispostas lado a lado. Eles se sentaram um ao lado do outro nos dois últimos lugares vagos. Mônica percebeu que havia, no total, 14 pessoas nas fileiras à sua frente e 21 pessoas nas fileiras atrás da sua. Quantas cadeiras havia no auditório?

- A) 37
- B) 38
- C) 40
- D) 42
- E) 49

Solução: Sabemos que a quantidade de cadeiras deve ser igual a quantidade de fileiras vezes a quantidade de cadeiras em cada fileira. De acordo com o problema há 14 pessoas nas fileiras à frente de Mônica. Como o teatro estava lotado, a quantidade de fileiras à frente de Mônica vezes a quantidade de cadeira em cada fileira deve ser igual

a 14, como 14 é o produto de 2 vezes 7, podemos enter que haveria duas fileiras, cada uma com 7 cadeira. No mesmo caso, nas fileiras atrás de Mônica, como há 21 pessoas sentadas, podemos enter que havia 3 fileiras cada uma com 7 cadeiras, pois 3 vezes 7 é igual a 21. Assim temos 2 fileiras a frente de Mônica, 3 atrás e a dela, totalizando 6 fileiras, cada uma com 7 cadeiras. Logo, no total, há 6 vezes $7 = 42$ cadeiras no teatro.

(OBMEP - 2016, Nível 1) Isabel escreveu em seu caderno o maior número de três algarismos que é múltiplo de 13. Qual é a soma dos algarismos do número que ela escreveu?

- A) 23
- B) 24
- C) 25
- D) 26
- E) 27

Solução: O maior número de 3 algarismos é o número 999, Dividindo ele por 13 obtemos obtemos 76 e sobra 11, Isso nos diz que 11 unidades antes de 999 obtemos um número divisível por 13, que é o número 988, com toda certeza se adicionarmos 13 a ele, obteremos um número maior do que 999, logo 988 é o maior número de três algarismos que é divisível por 13. A soma de seus algarismos resulta em 25.

(OBMEP - 2016, Nível 1) - A metade e o dobro do número 26 são números naturais de dois algarismos. Quantos são os números naturais que possuem essas mesmas propriedades?

- A) 15
- B) 18
- C) 20
- D) 22

E) 25

Solução: O menor número de dois algarismos que pode ter a metade igual a um número de dois algarismos é o 20, cuja metade é 10. e o maior número que ter o dobro igual a um número de dois algarismos é o 49, cujo dobro é 98. Logo as possibilidades de números variam de 20 até 49, contudo, os únicos que possuem metade, ou seja, que são divisíveis por 2, são os números pares, assim os números que satisfazem o problema são os pares de 20 até 48, que totalizam um total de 15 números.

(OBMEP - 2015, Nível 1) Qual é o algarismo das unidades do número $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 - 2015$?

A) 0

B) 1

C) 5

D) 6

E) 8

Solução: Quando montamos uma conta de multiplicação podemos perceber que o algarismo das unidades ele provém unicamente da multiplicação dos dois algarismos das unidades dos dois números multiplicados, assim, para descobrir o algarismo das unidades da expressão acima, basta multiplicarmos os algarismos das unidades, 3 vezes 5 resulta em 15 cujo algarismo das unidades é 5, que vezes 7 resulta no algarismo das unidades novamente igual a 5, na realidade ao multiplicar um número terminado em 5 por um número ímpar teremos sempre um número terminado em 5. Assim, toda a parte relativa a multiplicação resultará em um número cujo algarismo da unidade é 5, que por sua vez está sendo subtraído de um número que também tem a unidade igual a 5, logo o algarismo das unidades deste número é $5 - 5 = 0$.

(OBM 1999, Nível 1) Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos pode ainda

ele carregar?

- A) 132
- B) 144
- C) 146
- D) 148
- E) 152

Solução. Dividindo a quantidade de tijolos pela quantidade de sacos de areia, obtemos $400/50 = 8$, que significa que 1 saco de areia ocupa o mesmo espaço que 8 tijolos. Como foram colocados 32 sacos de areia, isso significa que foi ocupado o espaço de 256 tijolos. Como o caminhão pode carregar 400 tijolos, então ainda caberiam 144 tijolos.

(OBM - 2000, Nível 1) - 1 litro de álcool custa R\$0,75. O carro de Henrique percorre 25 km com 3 litros de álcool. Quantos reais serão gastos em álcool para percorrer 600 km?

- A) 54
- B) 72
- C) 50
- D) 52
- E) 45

Solução: Como 600 é igual a 24 vezes 25km, então o carro precisará de 24 vezes o que ele precisa de álcool para fazer 25 km, ou seja, ele precisará de 24 vezes 3 = 72 litros de álcool. Como cada litro de álcool custa 0,75, ele deverá gastar 72 vezes 0,75 = 54 reais de álcool.

(OBMEP 2011, Nível 1) Em uma escola, $\frac{1}{6}$ das meninas usam um único brinco; das meninas restantes, metade usa dois brincos e a outra metade não usa brincos. O

número de brincos usados pelas meninas é:

- A) igual ao número de meninas.
- B) o dobro do número de meninas.
- C) a metade do número de meninas.
- D) dois terços do número de meninas.
- E) um terço do número de meninas.

Solução 1: A quantidade de alunas da escola é uma quantidade dada, podemos supor que seja 60 alunas, assim $\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$ usam um único brinco. Das meninas restantes, ou seja, 50, metade usa dois brincos, ou seja, 25. E a outra metade, também 25 não usa brincos. O número de brincos usados pelas meninas é $10 + 25 \cdot 2 = 60$, que é igual ao número de meninas.

Solução 2 $\frac{1}{6}$ das meninas usam um único brinco. Das meninas restante, ou seja, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$ usam dois brincos, e a outra metade não usa brincos. O número de brincos usados pelas meninas é $\frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$, ou seja, igual a quantidade de meninas.

(OBMEP - 2013, Nível 1) Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}L$ de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}L$ de água?

- A) $\frac{7}{12}$
- B) $\frac{2}{3}$
- C) $\frac{3}{4}$
- D) $\frac{5}{6}$
- E) $\frac{4}{3}$

Solução: As frações são utilizadas para representar parte de um todo. Neste caso nosso todo é a quantidade de água que cabe na caneca que sabemos ser $\frac{2}{3}L$, e queremos saber qual fração representa $\frac{1}{2}L$ dessa caneca. Na fração o numerador representa nossa

parte e o denominador representa nosso todo, assim $\frac{1}{2}L$ encherá $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

(OBMEP - 2009, Nível 1) Em qual das alternativas aparece um número que fica entre $\frac{19}{3}$ e $\frac{55}{7}$?

- A) 2
- B) 4
- C) 5
- D) 7
- E) 9

Solução: O número mais próximo de 19 que é divisível por 3 é 18, assim, podemos escrever $\frac{19}{3} = \frac{18}{3} + \frac{1}{3} = 6 + \frac{1}{3}$. O número mais próximo de 55 que é divisível por 7 é 49, assim, podemos escrever $\frac{55}{7} = \frac{49}{7} + \frac{6}{7} = 7 + \frac{6}{7}$. Um número estará entre esses dois outros números se for maior que 6 e menor que 7, o único das alternativas que cumpre o solicitado é o número 7.

(OBM - 2005, Nível 1) Sabendo-se que $9174532 \cdot 13 = 119268916$, pode-se concluir que é divisível por 13 o número:

- A) 119 268 903
- B) 119 268 907
- C) 119 268 911
- D) 119 268 913
- E) 119 268 923

Solução: Sabe-se que podemos encontrar um número divisível por 13 somando ou subtraindo 13 a um número que já saibamos ser múltiplo de 13. O problema nos dá que 119 268 916 é múltiplo de 13, se dele subtrairmos 13, obtemos 119 268 903, divisível também por 13.

(OBM - 2003, Nível 1) Considere um número inteiro x e faça com ele as seguintes operações sucessivas: multiplique por 2, some 1, multiplique por 3 e subtraia 5. Se o resultado for 220, o valor de x é:

- A) um número primo.
- B) um número par.
- C) um número entre 40 e 50.
- D) um número múltiplo de 3.
- E) um número cuja soma dos algarismos é 9.

Solução: Basta que realizemos as operações na ordem inversa. Sendo o resultado 220, e se a última operação foi subtrair 5, adicionaremos, então, 5, obtendo 225, agora dividimos o resultado por 3, obtendo 75, subtraímos 1, obtendo 74, e por fim, dividimos por 2, obtendo 37. Assim, o valor de x é um número primo.

(OBM - 2002, Nível 2) Quantos números inteiros positivos menores que 900 são múltiplos de 7 e terminam em 7?

- A) 10
- B) 11
- C) 12
- D) 13
- E) 14

Solução: Sabemos que 7 é o primeiro múltiplo positivo de 7 menor que 900 e que termina em 7. Para encontrar outros múltiplos de 7 basta adicionar a 7 um outro múltiplo de 7. Como o número deve terminar em 7, o múltiplo que devemos adicionar a 7 deve terminar em 0. Estes são 70, 140, 210, 280, 350, 420, 490, 560, 630, 700, 770 e 840. Formando um total de 12 múltiplos de 7 que terminam em 7.

(OBMEP - 2005, Nível 1) Qual das expressões abaixo tem como resultado um número ímpar?

(A) $7 \times 5 \times 11 \times 13 \times 2$

(B) $(2005 - 2003) \times (2004 + 2003)$

(C) $7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$

(D) $5^2 + 3^2$

(E) $3 \times 5 + 7 \times 9 + 11 \times 13$

Solução: Sabemos que a soma de uma quantidade par de parcelas de números ímpares resulta num número ímpar, e que para que um número seja par basta que haja um fator 2 multiplicando os outros fatores. Assim descartamos a letra a, a letra b, pois $(2005 - 2003) = 2$, a letra c e a letra d, restando portanto a letra e.

(OBMEP - 2005, Nível 2) Quantos números inteiros, múltiplos de 3, existem entre 1 e 2005?

(A) 664

(B) 665

(C) 667

(D) 668

(E) 669

Solução: Os múltiplos de 3 são todos aqueles que podem ser escritos como o produto do número 3 por outro número, por exemplo, $3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3$, e assim em diante. Ao dividir o número 2005 por 3 obtemos que $2005 = 668 \cdot 3 + 1$. Assim podemos escrever de $3 \cdot 1$ até $3 \cdot 668$ sem ultrapassar 2005. Logo existem 668 múltiplos de 3 menores que 2005.

(OBMEP - 2005, Nível 2) A soma de três números inteiros consecutivos é igual a

90. Qual é o maior destes três números?

(A) 21

(B) 28

(C) 29

(D) 31

(E) 32

Solução: Embora sejam três números distintos, eles são consecutivos, ou seja, são números próximos entre si, então podemos tentar dividir o resultado da soma por 3, obtendo como resultado 30. Isto nos diz que um dos números deve ser próximo ou igual a 30. Como são consecutivos, podemos supor que o menor deles é 30, sendo os outros, 31 e 32, contudo, ao somar obtemos como resultado o número 93, que ultrapassa o valor dado no enunciado. Isto nos diz que o menor valor deve ser menor que 30, suponhamos, então, 29, os outros dois serão 30 e 31, e somando, obtemos como resultado o número 30, como explicitado na questão, logo o maior desses números é 31.

6.3 Considerações Sobre o Curso Aplicado

Durante o curso aplicado por meio da metodologia de resolução de problemas, foi possível realizar várias constatações. A primeira delas e a mais importante refere-se a peculiaridade que os problemas de olimpíadas apresentam. Em geral os problemas olímpicos priorizam a criatividade em contraponto a fórmulas e uma grande quantidade de cálculos, onde, muitas vezes, conseguindo compreender e identificar a estratégia mais eficaz para o problema, este acaba por se tornar algo simples, entretanto esse caminho não é tão simples de ser encontrado.

Ao aplicar problemas olímpicos novos para os alunos, a grande dificuldade era de saber como começar, após reunir todas as informações, como articular e prosseguir adiante, muitas vezes algumas dicas ou questionamentos eram suficientes para

que eles pudessem avançar no problemas e muitas vezes encontrar a solução correta. Contudo, também foi possível perceber que ao apresentar um problema olímpico com alguma similaridade a outro que eles já tenham resolvido, eles conseguiam relacionar os enunciados e tentar aplicar a mesma ideia que possuíam, ao não conseguirem, questionamentos sobre o que além da estratégia, falta para prosseguir, ajudavam bastante para que muitos deles conseguissem reformular a estratégia aprendida anteriormente e aplicar de maneira mais eficaz conduzindo-os a resposta. Assim percebeu - se que tais dificuldades surgem da falta de habitualidade com problemas desse tipo e nível, porém por meio da resolução de problemas ficou claro que há uma melhoria na capacidade de raciocinar, relacionar conteúdos e construir estratégias que permitam compreender e solucionar os problemas propostos.

Capítulo 7

CONSIDERAÇÃO FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de apresentar um estudo sobre divisibilidade, sua cobrança em olimpíadas de matemática e o uso da metodologia de resolução de problemas como ferramenta eficaz na preparação para olimpíadas. A relevância deste tema se fundamenta, além dos inúmeros problemas olímpicos que exploram a divisibilidade, na importância que o uso de problemas desafiadores que instigam a imaginação e ao mesmo tempo, exigem dos alunos um certo domínio dos conteúdos básico, contribuindo assim para o desenvolvimento do ensino de matemática.

Sendo a divisibilidade uma das área que mais atraem a atenção de alunos, professores e matemáticos, e, também, devida sua grande importância nas olimpíadas, surgindo vários problemas sobre o tema durante o decorrer dos anos, é que se faz necessária uma preparação que permita adquirir mais domínio sobre o conceito e a aquisição de novas estratégias.

A resolução de problemas cujas soluções requerem do aluno bem mais do que habilidades com cálculos, exigindo-se o uso da criatividade e do raciocínio lógico, estimula os alunos e ajuda a despertar o interesse. Entretanto, muitas das ideias utilizadas na solução destes problemas não são encontradas em livros, e na realidade, não haveria possibilidade de se construir um livro que contivesse todas as estratégias possíveis, haja

visto que quase sempre aparece um novo problema exigindo uma nova ideia. Assim, tratar destes problemas com alunos permite que estes possam utilizar a criatividade, a imaginação e construir e melhorar estratégias, construindo assim, um conjunto ainda maior de ferramentas uteis para solucionar problemas.

Como já mencionado, a preparação para olimpíadas contribui para o rendimento escolar dos alunos, além de contribuir para descobrir novos talentos e despertar o interesse pela matemática, ajudando também a formar profissionais mais capacitados e oferecendo novas oportunidades. Contudo, o sucesso olímpico tem também possui implicações na vida de cada estudante, já que o sucesso olímpico é visto como motivo de orgulho, além de contribuir significativamente para o sucesso escolar e acadêmico. Reforçando ainda mais a ideia de que uma preparação para as olimpíadas é essencial para os alunos.

Referências

- [1] **BASTOS, A. S. A. M.** Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? Boletim Gepem, n. 60, p. 147–162, 2012.
- [2] **BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C.** História da matemática. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.
- [3] **BRASIL. Ministério da Educação.** Base Nacional Comum Curricular: Brasília, 2018.
- [4] **BURTON, D.; LOOMIS, T. P. P. A.** Teoria elementar dos números . [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2016.
- [5] **GOMES, K. G.** Olimpíada cearense de matemática (ocm): laboratório de oportunidades, experiências e de desenvolvimento da matemática no estado do ceará. 2019.
- [6] **HEFEZ, A.** Iniciação à aritmética. Sociedade Brasileira de Matemática, p. 53, 2009.
- [7] **MOREIRA, C. G.; MARTINEZ, F. B.; SALDANA, N.** Tópicos de teoria dos números, coleção profmat. Rio De Janeiro: SBM, 1° Edição, v. 6, 2012.
- [8] **OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.** Provas e Gabaritos. 2025. Acessado em 20 de abril de 2025. Disponível em: <[https:// www.obm.org.br/ como-se-preparar/ provas-e-gabaritos/](https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/)>.
- [9] **OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.** Quem Somos. 2025. Acessado em 20 de abril de 2025. Disponível em: <[https:// www.obm.org.br/ quem-somos/ historico/](https://www.obm.org.br/quem-somos/historico/)>.
- [10] **OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.** Provas e Soluções. 2025. Acessado em 20 de abril de 2025. Disponível em: <[http: // www.obmep.org.br/ provas.htm](http://www.obmep.org.br/provas.htm)>.

- [11] **OBMEP** - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Quem Somos. 2025. Acessado em 20 de abril de 2025. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>>.
- [12] **OCM** - Olimpíada Cearense de Matemática. Provas. 2025. Acessado em 20 de abril de 2025. Disponível em: <<https://ocm.mat.br/provas>>.
- [13] **POLYA, G.** A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, v. 2, p. 12, 1978.
- [14] **PROENÇA, M. C. de.** Resolução de problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Revista de Educação Matemática, v. 18, p. e021008–e021008, 2021.
- [15] **ROMANATTO, M. C.** Resolução de problemas nas aulas de matemática. Revista Eletrônica de Educação, v. 6, n. 1, p. 299–311, 2012.
- [16] **SANTOS, J. P. de O.** Introdução à teoria dos números. [S.l.]: IMPA, 1998. v. 128.
- [17] **SILVA, T. da.** Resolução de problemas: Uma proposta potencializadora para o ensino e aprendizagem da matemática. Encontro Baiano de Educação Matemática, p. 1–9, 2024.
- [18] **UGALDE, M. C. P.; ROWEDER, C.** Sequência didática: uma proposta metodológica de ensino-aprendizagem. Educitec-Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico, v. 6, p. e99220–e99220, 2020.
- [19] **VIANA, C. S. V.; CALDAS, C. C. S. et al.** As olimpíadas brasileiras de matemática das escolas públicas na formação de professores e alunos. Margens, Universidade Federal do Pará, 2013.