

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

O LADRILHAMENTO COMO RECURSO PARA A APRENDIZAGEM DE
ÂNGULOS: EXPERIMENTAÇÃO E PRÁTICA EM SALA DE AULA.

Ilhéus-Ba
2025

MARLON SILVA DO NASCIMENTO

O LADRILHAMENTO COMO RECURSO PARA A APRENDIZAGEM DE
ÂNGULOS: EXPERIMENTAÇÃO E PRÁTICA EM SALA DE AULA.

*Dissertação submetida ao Colegiado do PROFMAT da
Universidade Estadual de Santa Cruz, com objetivo de
obter título de mestre.*

Orientadora: Fernanda Gonçalves de Paula

Coorientador: Cícero Alfredo da Silva Filho

*Ilhéus-Bahia
2025*

N244

Nascimento, Marlon Silva do.

O ladrilhamento como recurso para a aprendizagem de ângulos: experimentação e prática em sala de aula / Marlon Silva do Nascimento. – Ilhéus, BA: UESC, 2025. 87 f. : il.

Orientadora: Fernanda Gonçalves de Paula.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Inclui referências bibliográficas e apêndice.

1. Geometria. 2. Ensino e aprendizagem. 3. Prática de ensino. 4. Ângulos. I. Título.

CDD 516

Ficha catalográfica elaborada por: Maria José Serrão Nunes – CRB 5/1643

MARLON SILVA DO NASCIMENTO

O LADRILHAMENTO COMO RECURSO PARA A APRENDIZAGEM DE
ÂNGULOS: EXPERIMENTAÇÃO E PRÁTICA EM SALA DE AULA.

Dissertação apresentada ao Departamento de
Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade
Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de
Título de Mestre em Matemática, através do
PROFMAT - Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional.

Trabalho Aprovado. Ilhéus, 29 de agosto de 2025:

Profa. Dra. Fernanda Gonçalves de Paula - Orientadora - UESC

Prof. Dr. Cícero Alfredo da Silva Filho - Coorientador - UESC

Profa. Me. Leila Maria Salomão de Souza

Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva

No ato de ladrilhar, arte e matemática se encontram - e a educação ganha forma.

Agradecimentos

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro e incentivo à pesquisa.

À Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), pela estrutura e pelo suporte técnico indispensáveis à realização deste trabalho.

Aos meus orientadores, Fernanda Gonçalves e Cícero Alfredo, pela dedicação, paciência e valiosas contribuições em todas as etapas do projeto.

Agradeço, com carinho, à meus pais, Irineu e Edelvira, pelo amor e apoio incondicional, e aos meus filhos, Fernandinho e Vitória, pela inspiração diária.

Aos meus irmãos, em especial a Amauri, pelo incentivo e ajuda.

À minha esposa, Fernanda Cabral, pela paciência e pelo companheirismo ao longo desta jornada.

À coordenadora Mirela, minha sincera gratidão pelo carinho, apoio e incentivo constante, que fizeram toda a diferença nesta caminhada.

Sou igualmente grato aos colegas pela parceria, bem como a todos os professores do PROFMAT/UESC, cuja dedicação e compromisso foram fundamentais para a minha formação.

Por fim, agradeço a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, para o desenvolvimento desta pesquisa.

Resumo

O objetivo desta pesquisa é investigar como estudantes entendem e aprendem os conceitos de ângulos por meio da experimentação com ladrilhos. O alicerce teórico baseia-se nos estudos de Skovsmose (2001), que fundamenta a Educação Matemática Crítica e defende uma aprendizagem contextualizada e conectada a situações reais, promovendo o desenvolvimento de habilidades críticas e cognitivas; na teoria dos níveis de pensamento geométrico de Van Hiele (1986), que descreve como os estudantes evoluem em sua compreensão da geometria por meio de diferentes estágios de raciocínio e na teoria da aprendizagem experiencial de Kolb (1984), que sugere que o aprendizado é um processo cíclico envolvendo experiência concreta, observação, conceituação e experimentação. A metodologia empregada envolveu uma abordagem qualitativa e foi desenvolvida numa turma regular do 8º ano do Ensino Fundamental e uma turma do 1º ano do Ensino Médio, ambas da rede pública de ensino pertencente ao Território Médio Rio de Contas. No caso da turma do Ensino Médio, as atividades integraram ações voltadas à recomposição da aprendizagem, com o objetivo de superar defasagens e fortalecer conhecimentos fundamentais. A coleta de dados aconteceu por meio da observação e dos relatos dos discentes durante as oficinas. A análise foi realizada com base nas respostas de estudantes, na interação e nas estratégias montadas para resolver as atividades propostas. Os principais resultados destacam a importância de atividades práticas e interativas para o entendimento de conceitos abstratos como ângulos, mostrando que a experimentação com ladrilhos contribui para o entendimento dos conceitos geométricos por estudantes. Este estudo contribui para o desenvolvimento de metodologias de ensino que integrem a geometria com atividades práticas, promovendo um aprendizado mais relevante e contextualizado para estudantes.

Palavras-chave: Geometria; Ladrilhos; Ângulos.

Abstract

The objective of this research is to investigate how students understand and learn the concepts of angles through experimentation with tiles. The theoretical framework is based on the studies of Skovsmose (2001), which ground Critical Mathematics Education (CME) and advocate for a contextualized learning connected to real-life situations, promoting the development of critical and cognitive skills; on the Van Hiele theory of levels of geometric thinking (1986), which describes how students progress in their understanding of geometry through different stages of reasoning and on Kolb's experiential learning theory (1984), which suggests that learning is a cyclical process involving concrete experience, observation, conceptualization, and experimentation.

The methodology employed involved a qualitative approach and was developed with a regular 8th-grade class from middle school and a 1st-year high school class, both from the public school system within the Médio Rio de Contas Territory. In the case of the high school group, the activities integrated actions aimed at learning recovery, with the purpose of overcoming gaps and strengthening fundamental knowledge.

Data collection took place through observation and students' reports during the workshops. The analysis was conducted based on students' responses, interactions, and strategies developed to solve the proposed activities. The main results highlight the importance of practical and interactive activities for understanding abstract concepts such as angles, showing that experimentation with tiles contributes to students' comprehension of geometric concepts. This study contributes to the development of teaching methodologies that integrate geometry with hands-on activities, promoting more meaningful and contextualized learning for students.

Keywords: Geometry; Tiles; Angles.

Sumário

Introdução	10
1 Referencial Teórico	13
1.1 O ladrilhamento como prática pedagógica nas aulas de matemática	14
2 Definições Básicas	18
2.1 Ângulos	18
2.2 Polígonos	20
2.3 Ladrilhamento: O encaixe das formas no plano	24
3 Ladrilhamento no Plano: Aplicações e Recurso Didático	30
3.1 Um pouco da história e da vida real	31
3.2 Relação do ladrilhamento com o aprendizado de ângulos	32
3.3 O ladrilhamento como recurso didático	33
4 Práticas Pedagógicas com Ladrilhamento	37
4.1 Relato de experiência submetido e apresentado no 2º encontro do PROF-MAT/UESC	38
4.2 Projeto submetido ao FECIBA	39
4.3 Roteiro para as oficinas de aprendizagem	40
4.4 Artigo científico: Uma produção que ampliou os olhares da pesquisa.	41
5 Procedimentos Metodológicos	43
5.1 Participantes da Pesquisa	43
5.2 Instrumentos de produção de dados	44
5.2.1 Observação participante	44
5.2.2 Sequência didática	45
6 Resultados e Discussões	46
6.1 Turma do 8º Ano do Ensino Fundamental	46
6.1.1 Primeira etapa: Apresentação do tema	46
6.1.2 Segunda etapa: Construção dos moldes e investigação geométrica utilizando apenas um tipo de polígono	48
6.1.3 Terceira etapa: Investigação geométrica com mais de um polígono	54
6.1.4 Quarta etapa: Matemática e Arte	57

6.1.5	Quinta etapa: Aplicando o ladrilhamento na resolução de atividades sobre ângulos	58
6.2	Turma do 1º Ano do Ensino Médio	66
	Considerações Finais	71
	Referências Bibliográficas	73
	Apêndice A Relato de Experiência Submetido	75
	Apêndice B Projeto Submetido ao FECIBA	76
	Apêndice C Produto Educacional	77

Introdução

A aprendizagem de geometria tem um grande potencial em auxiliar no desenvolvimento do raciocínio lógico e na compreensão do mundo em que vivemos. No entanto estudantes ainda enfrentam dificuldades nessa área devido à falta de conexão entre a teoria matemática e suas aplicações prática, segundo Freire (1970), argumenta que a educação deve ser um processo de conscientização no qual os alunos são encorajados a relacionar o conhecimento teórico com suas experiências práticas, promovendo assim uma compreensão crítica e transformadora da realidade.

Em seus estudos, Inhelder (1963) destaca a importância de experiências concretas e contextualizadas para facilitar a compreensão de conceitos geométricos. Práticas como estas incentivam docentes e gestão escolar em pensar como proporcionar experiências práticas mais acessíveis e significativas de modo que estudantes consigam entender e dominar esses conceitos geométricos.

Uma prática pedagógica possível é a criação de mosaicos e ladrilhos. Atividades como esta possibilitam manipular formas e ângulos, estimulam o pensamento crítico e permitem fazer uma interdisciplinaridade entre a matemática e a arte em sala de aula, fazendo com que o aprendizado de geometria possa ser mais acessível e envolvente.

Eisner (2002) destaca que a integração das artes no currículo escolar não só enriquece o aprendizado, mas também desenvolve o pensamento crítico e criativo, tornando atividades como a criação de mosaicos e ladrilhamentos uma ferramenta eficaz para o ensino de geometria. Assim, estudantes podem explorar conceitos geométricos de forma visual e criativa enquanto desenvolvem habilidades artísticas, conforme apontado por Van Hiele (1986).

Uma abordagem prática e interdisciplinar é um caminho possível para o desenvolvimento de competências geométricas e habilidades artísticas, e para tornar o aprendizado da geometria mais acessível e envolvente. O uso de ladrilhamentos em sala de aula possibilita a exploração prática de conceitos geométricos alinhando-se às orientações de Brasil (2018) para o desenvolvimento de competências matemáticas. Essa técnica incentiva o reconhecimento de padrões e simetrias, favorecendo uma aprendizagem integrada e contextualizada, que aproxima a matemática de suas aplicações no mundo real segundo Julio et al. (2018).

Neste contexto, esta pesquisa tem por objetivo investigar como estudantes entendem e

aprendem os conceitos de ângulos por meio da experimentação com ladrilhos. Sendo assim, este estudo busca responder o seguinte questionamento: *Como as experimentações com ladrilhos poderão auxiliar na aprendizagem sobre ângulos, a partir de reflexões produzidas em sala de aula?* A utilização desses moldes como ferramenta didática permite uma abordagem prática que pode ajudar estudantes a visualizar e entender melhor conceitos abstratos, como ângulos e suas propriedades.

Ao manipular os moldes de polígonos regulares fisicamente ou por meio de software como o GeoGebra, estudantes têm a oportunidade de explorar de maneira concreta e lúdica a geometria, facilitando a construção do conhecimento. Essa prática também relaciona a matemática com o cotidiano, pois o reconhecimento de padrões geométricos em ladrilhamentos está presente em diversos elementos do dia a dia, como na arquitetura, na natureza, nas indústrias dentre outros, o que reforça a compreensão contextualizada defendida por Inhelder (1963), também por Brasil (2018), que destaca a importância de experiências práticas e significativas para a aprendizagem de conceitos abstratos.

A pesquisa foi desenvolvida com duas turmas da rede pública de ensino localizadas no território Médio Rio de Contas: uma turma regular do 8º ano do Ensino Fundamental, em uma escola municipal e uma turma do 1º ano do Ensino Médio, em uma escola estadual, inserida em ações de recomposição da aprendizagem. No caso da turma do 8º ano, foi possível perceber uma forte presença de métodos de ensino baseados quase exclusivamente em exercícios abstratos, muitas vezes distantes da realidade vivida pelos estudantes.

Diante desse cenário, o estudo foi estruturado em cinco etapas, contemplando a elaboração e aplicação de uma sequência didática concebida como produto educacional. Mais do que favorecer a compreensão de conceitos geométricos, a proposta buscou aproximar o processo de aprendizagem do cotidiano dos alunos, valorizando suas experiências e incentivando o protagonismo em sala de aula.

A presente dissertação está organizada da seguinte maneira: o **Capítulo 1** apresenta o referencial teórico; o **Capítulo 2** trata das definições básicas de ângulos, polígonos e ladrilhamento; o **Capítulo 3** aborda o ladrilhamento no plano: aplicações e recursos didáticos; o **Capítulo 4** descreve a metodologia da pesquisa; e o **Capítulo 5** reúne os resultados e discussões, seguidos das considerações finais e apêndices. Essa estrutura busca oferecer ao leitor uma compreensão clara e progressiva do tema, destacando a relevância do produto educacional elaborado.

Capítulo 1

Referencial Teórico

O ladrilhamento, ou pavimentação, é uma técnica matemática e artística bastante antiga, que surgiu desde que as pessoas começaram a usar pedras para cobrir o chão e as paredes de suas casas.

Segundo Sallum (2016), esta técnica consiste em cobrir uma superfície plana utilizando formas geométricas que se encaixam perfeitamente, sem deixar espaços vazios ou sobreposições.

As primeiras peças de ladrilhos foram encontradas no Egito há cerca de 4000 anos antes de Cristo e com o passar do tempo continuou com a aplicação de cores, desenhos ou figuras para deixar os ladrilhos mais harmônicos, como destacado por Grube (1989), que examina a evolução desta prática artística em seu estudo sobre cerâmica islâmica.

Curiosamente, o ladrilhamento não se restringe apenas às criações humanas; podemos encontrá-los facilmente na natureza por exemplo no favo de mel, nas escamas de peixes, em frutas como o abacaxi, nas células de tecidos biológicos, nos cristais, na bolha de sabão, na pele de cobras, dentre outras coisas segundo Kepler (2007) que explorou padrões na natureza, relacionando-os a geometria e simetria.

Na atualidade, o ladrilhamento ainda é bastante utilizado pelas indústrias de cerâmicas, pisos, azulejos, papéis de parede; também em estamparias de tecidos, crochês, decoração, dentre outros objetos.

O estudo das propriedades matemáticas das pavimentações do plano por polígonos é recente e ainda tem muito o que ser explorado. O astrônomo Kepler (2007) foi um dos pioneiros no estudo da geometria das pavimentações. A partir da observação dos trabalhos de Platão e Arquimedes, apresentou uma classificação das pavimentações com polígonos regulares, na qual demonstrou a existência de onze tipos distintos.

No entanto, nenhum deles permite o uso de pentágonos regulares. Além dos ladrilhamentos com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos, também existem ladrilhamentos

com pentágonos irregulares.

Julio et al. (2018) acrescenta que os ladrilhos formam a pavimentação do plano, através do revestimento de uma região plana sem que haja espaço ou sobreposição entre os polígonos.

Já Oliveira (2015, p. 28), “fala que a divisão do plano em uma quantidade enumerável de polígonos de modo que a união de todos esses polígonos constitui todo o plano, e a interseção de dois desses polígonos ou é vazia ou é um vértice ou está contida em uma linha poligonal”.

Estas formas podem ser polígonos regulares (como triângulos, quadrados e hexágonos) ou polígonos irregulares, desde que seus lados se compatibilizem para cobrir a superfície sem lacunas.

Existem três tipos principais de ladrilhamentos: os **regulares**, que usam um único tipo de polígono repetidamente; os **semirregulares**, que combinam vários polígonos regulares de forma regular; e os **irregulares**, que utilizam polígonos irregulares ajustados para preencher a superfície sem espaços vazios.

Penrose (2006), Escher (2004) e Coxeter (1999) são três nomes que foram fundamentais para o avanço teórico e prático no estudo dos ladrilhamentos, explorando as propriedades matemáticas e geométricas das formas que podem preencher o plano de maneira organizada e esteticamente agradável.

Penrose (2006) foi um matemático britânico conhecido por desenvolver os “azulejos de Penrose”, que são formas geométricas capazes de preencher o plano de maneira não periódica e sem repetições regulares.

Já Escher (2004), um artista gráfico holandês famoso por suas obras que exploram conceitos de ladrilhamento de forma artística, frequentemente criando ilusões de ótica e padrões complexos usando formas geométricas.

Por último temos Coxeter (1999), um matemático canadense reconhecido por seu trabalho em geometria, incluindo o estudo aprofundado de ladrilhamentos regulares e irregulares, que contribuiu significativamente para a compreensão matemática e geométrica desses padrões.

1.1 O ladrilhamento como prática pedagógica nas aulas de matemática

O ladrilhamento tem potencial para ser explorado em sala de aula, principalmente nas aulas de Geometria.

Nesse contexto, Piaget (1971) e Vygotsky (1978) contribuem para compreender como os alunos constroem o pensamento geométrico. Para Piaget, o conhecimento se desenvolve pela ação e experimentação sobre o meio, enquanto Vygotsky enfatiza o papel da mediação pedagógica e das interações sociais na formação dos conceitos. Assim, o aprendizado geométrico

se fortalece por meio de experiências concretas e significativas, mediadas pelo diálogo e pela prática compartilhada.

Esta prática pedagógica é lúdica e pode motivar estudantes a participarem mais ativamente dessas aulas e também tem a capacidade de auxiliar no desenvolvimento de habilidades importantes, como a aptidão para a resolução de problemas, no pensamento lógico, no trabalho em equipe e até mesmo em habilidades artísticas, como Escher (2004).

É possível promover um ensino de geometria que supere as práticas pedagógicas que utilizam somente exercícios e abstrações, conforme Skovsmose (2001), defende que a educação matemática crítica deve integrar contextos significativos ao ensino, permitindo que os alunos compreendam a relevância dos conceitos geométricos em sua vida cotidiana e em diversas áreas do conhecimento. Essa referência reforça a importância de um ensino de geometria que vá além das práticas tradicionais, dando ênfase a necessidade de contextualizar o aprendizado para alcançar uma compreensão mais profunda e que desperte o interesse dos alunos.

Nessa perspectiva, a teoria apresenta estreita relação com esta pesquisa, ao propor uma abordagem integrada e reflexiva para o ensino de geometria, que valoriza a experimentação e o envolvimento ativo dos estudantes na construção do conhecimento. A elaboração de ladrilhos pelos próprios alunos exemplifica essa proposta, ao articular prática e reflexão no processo de aprendizagem. Conforme Lorenzatto (1995), o uso de materiais concretos e de experiências reais constitui um recurso fundamental para favorecer a compreensão dos conceitos matemáticos, aproximando a aprendizagem da realidade dos estudantes e promovendo sua autonomia e protagonismo intelectual.

Van Hiele (1986), propõe um modelo de níveis de compreensão em Geometria, enfatizando a progressão através de experiências concretas para alcançar entendimentos abstratos mais elevados conforme a Tabela 1.1

Tabela 1.1: Níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico segundo Van Hiele (1986)

Nível	Nome	Descrição
1	Visualização	O estudante reconhece e classifica figuras geométricas com base na aparência global, sem considerar propriedades formais.
2	Análise	O estudante identifica e descreve propriedades das figuras (como lados, ângulos e simetrias), mas ainda não compreende as relações entre elas.
3	Dedução informal	O estudante estabelece relações entre propriedades, organiza definições e constrói argumentos lógicos sem formalismo completo.
4	Dedução formal	O estudante compreende e aplica o raciocínio dedutivo formal, utilizando teoremas, axiomas e provas estruturadas.
5	Rigor	O estudante alcança um nível abstrato e formal de compreensão, comparando diferentes sistemas axiomáticos e compreendendo suas implicações.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A teoria dos níveis de pensamento geométrico proposta por Van Hiele (1986), mostra que aprender Geometria pode ser comparado a uma jornada de descobertas, na qual cada nível de compreensão representa uma conquista que prepara o terreno para o próximo. Nessa perspectiva, o conhecimento é construído gradualmente, com paciência, prática e curiosidade.

De forma complementar, Davis e Hersh (1981) argumentam que a Matemática deve ser contextualizada em seus aspectos históricos e culturais para favorecer uma compreensão mais relevante. Nessa mesma direção Bishop (1988), defende que o ensino da Geometria deve considerar práticas e conhecimentos de diferentes culturas, ampliando o repertório dos estudantes.

Pesquisas recentes reforçam essa ideia ao analisar o uso de ladrilhamentos como recurso didático. Mello (2015), por exemplo, explorou possibilidades de ladrilhamento no plano com polígonos regulares, relacionando-os ao Teorema de Kepler ¹, com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. Já Gumieri (2018), trabalhou com ângulos internos e externos de

¹As Leis de Kepler, ainda que relacionadas à astronomia, destacam a presença de regularidades geométricas no movimento planetário. De modo análogo, o estudo dos ladrilhamentos evidencia a orga-

polígonos regulares utilizando ladrilhamentos com alunos do Ensino Fundamental, estimulando o interesse pelo campo geométrico. Julio et al. (2018), acrescenta que sugestões de uso do ladrilhamento em educação matemática foram inspiradas por documentos oficiais, como o Ministério da Educação e do Desporto (1997), no tratamento de conteúdos de Matemática.

O Brasil (2018), por sua vez, não menciona explicitamente o “ladrilhamento do plano”, mas sugere o desenvolvimento de competências matemáticas e geométricas essenciais para entender e aplicar esses conceitos.

Além de propor o ensino de padrões geométricos e o uso de representações gráficas para modelar situações reais ou abstratas na Matemática. Embora não explicitamente citado, o ladrilhamento do plano, que envolve preencher uma superfície plana sem espaços vazios ou sobreposições, pode ser explorado através de atividades práticas e contextualizadas.

Sendo assim, o ladrilhamento tem potencial para ser explorado em sala de aula principalmente nas aulas de matemática, pois este tipo de experimento pode motivar estudantes a participarem mais ativamente das aulas de matemática, auxiliando seu desenvolvimento em habilidades importantes, como aptidão para resolução de problemas, pensamento lógico, trabalho em equipe e até mesmo em habilidades artísticas.

Nesse sentido, Frankenstein (1983) argumenta que a educação matemática deve ir além da simples aplicação de fórmulas e algoritmos, visando a promoção de uma consciência crítica nos alunos sobre as implicações e usos da matemática em diferentes aspectos da sociedade.

Na elaboração desse projeto de pesquisa, além dos teóricos destacados, tomamos como base o livro *Desafio Geométrico* de Dias e Sampaio (2010), pois o livro aborda conceitos fundamentais da geometria de forma prática e desafiadora, apresentando problemas e atividades que estimulam a aplicação e expansão do conhecimento geométrico.

O livro busca promover o desenvolvimento do pensamento crítico e a resolução criativa de problemas, tornando o aprendizado da geometria mais dinâmico e acessível. Encerradas as discussões teóricas que fundamentam este estudo, o próximo capítulo apresentará as definições fundamentais de ângulos, polígonos e ladrilhamento, com o objetivo de facilitar a compreensão dos conceitos abordados.

nização do plano por meio de simetrias, ambos expressando a ordem matemática presente nos fenômenos naturais.

Capítulo 2

Definições Básicas

2.1 Ângulos

Na Geometria Euclidiana, segundo “*Os Elementos*”, produzido por Euclides (2005), um ângulo plano é definido como a inclinação de duas linhas que se encontram num plano e que não estão em linha reta . O ponto onde essas duas semirretas se encontram é chamado de vértice do ângulo, e os lados do ângulo são formados pelas semirretas.

Na abordagem moderna, um ângulo é a região geométrica delimitada por duas semirretas com a mesma origem. A abertura entre essas semirretas determina a amplitude do ângulo, geralmente medida em graus ou radianos, podendo também ser representada por uma letra do alfabeto grego.

De uma forma mais atual e voltada ao ensino, como propõem Dias e Sampaio (2010), os ângulos podem ser classificados conforme sua medida, como ilustrado na Figura 2.1, o que contribui para uma melhor compreensão e aplicação desses conceitos no contexto escolar.

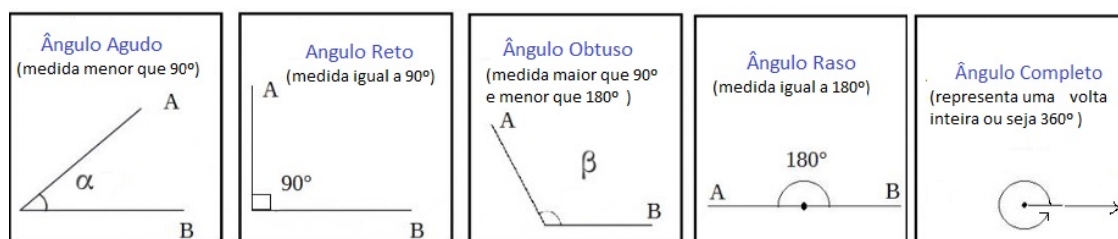


Figura 2.1: Classificação dos ângulos quanto sua medida.

Fonte: Adaptado de Dias e Sampaio (2010).

Além disso, há classificações baseadas em suas relações como veremos a seguir:

- **Ângulos adjacentes:** têm o mesmo vértice e um lado em comum. Essa configuração facilita a decomposição e a soma de medidas angulares conforme Figura 2.2.

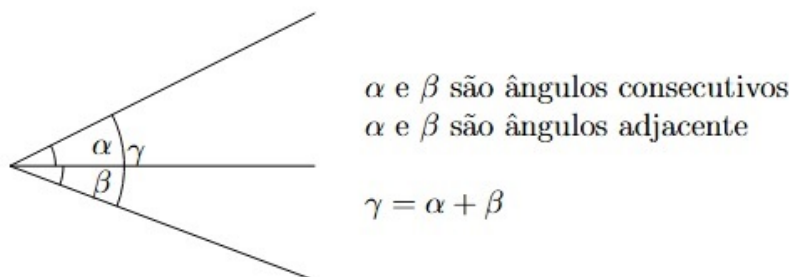


Figura 2.2: Ângulos adjacentes.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- **Ângulos suplementares:** São dois ângulos cuja soma das medidas é igual a 180° . Podem ser adjacentes, formando um ângulo raso, ou não, desde que a relação de soma seja mantida conforme Figura 2.3.

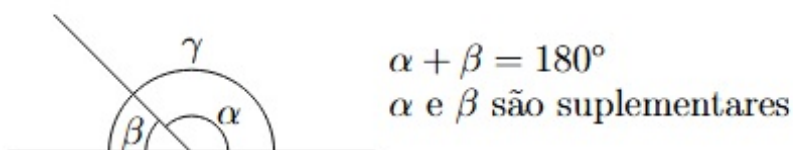


Figura 2.3: Ângulos suplementares.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- **Ângulos complementares:** Dois ângulos cuja soma das medidas é exatamente 90° . Eles podem estar juntos, formando um ângulo reto, ou separados, desde que a soma se mantenha conforme Figura 2.4.

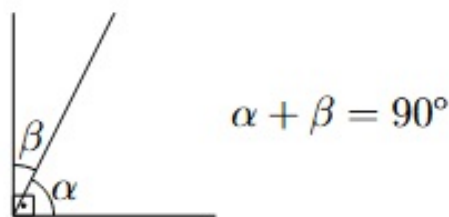


Figura 2.4: Ângulos adjacentes complementares.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- **Ângulos opostos pelo vértice:** Formam-se quando duas retas se cruzam. Esses ângulos não compartilham lados, mas possuem o mesmo vértice e medidas iguais, sendo um exemplo de congruência angular. Veja Figura 2.5.

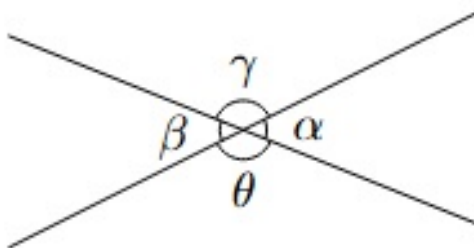


Figura 2.5: Ângulos opostos pelo vértice.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

2.2 Polígonos

Quando se fala em formas geométricas presentes no cotidiano, como ladrilhos, placas ou até colmeias, na maioria das vezes, refere-se a polígonos. Essas figuras planas são formadas por segmentos de reta, chamados de lados, que se conectam em pares, formando um caminho fechado.

Os pontos onde os lados se encontram são chamados de vértices, e o espaço interno delimitado por esse contorno é o que caracteriza o polígono.

A obra clássica “Os Elementos”, de Euclides (2005), já introduzia a noção de figura plana, ao defini-la como aquilo que está delimitado por fronteiras. Quando essas fronteiras são linhas retas, temos o que ele chama de “figura retilínea”, ou seja, um polígono.

Em uma abordagem mais atual e didática, Dias e Sampaio (2010) definem polígono como sendo uma região do plano limitada por segmentos de reta consecutivos que formam um contorno fechado e simples. Essa definição é mais próxima da realidade escolar e favorece o entendimento dos estudantes.

Os polígonos são classificados de acordo com o número de lados, conforme ilustrado na Figura 2.6, que apresenta exemplos de alguns tipos de polígonos para facilitar a visualização e o entendimento dessa classificação.

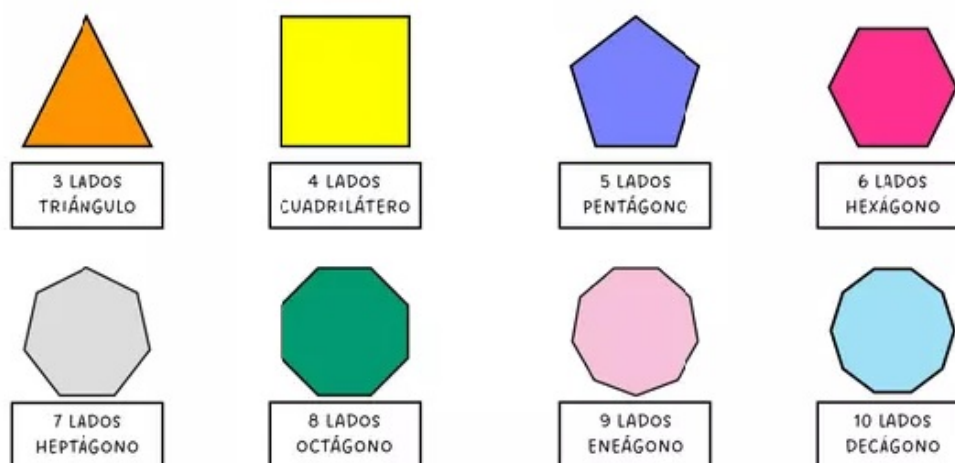


Figura 2.6: Classificação dos polígonos quanto ao número de lados.
Fonte: Adaptado de Dias e Sampaio (2010).

Ainda segundo Dias e Sampaio (2010), os polígonos podem ser:

- **Regulares:** quando todos os lados e ângulos são iguais;
- **Irregulares:** quando apresentam lados ou ângulos diferentes;
- **Convexos:** quando todos os seus ângulos internos são menores que 180° . Se unires dois quaisquer dos seus pontos, o segmento de reta obtido está sempre contido no polígono.
- **Côncavos:** se pelo menos um ângulo interno for maior que 180° . Existem sempre pelo menos, dois dos seus pontos que unidos, formam um segmento de reta que não está contido no polígono conforme Figura 2.7.



Figura 2.7: Tipos de polígonos

Fonte: Instituto Federal de Ciências e Tecnologia - IFBA (2025).

Essa classificação é importante para analisar a possibilidade de composição de ladrilhamentos, além de fornecer base para estudos sobre simetria, congruência e proporcionalidade.

Uma propriedade bem importante no estudo dos polígonos é a soma dos seus **ângulos internos**, que pode ser calculada por meio da fórmula:

$$S_n = 180^\circ(n - 2)$$

. Onde n representa o número de lados do polígono.

A partir dessa soma, é possível determinar a medida de cada ângulo interno em um **polígono regular** da seguinte forma:

$$\alpha_n = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$$

A seguir, será calculada a soma dos ângulos internos e a medida de cada ângulo interno de alguns polígonos regulares:

- **Triângulo equilátero** ($n = 3$): Figura 2.8

Soma dos ângulos interno:

$$180^\circ \cdot (3 - 2) = 180^\circ$$

Ângulo interno:

$$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

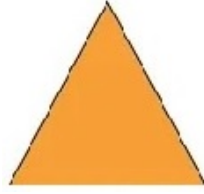


Figura 2.8: Imagem de um triângulo equilátero.
Fonte: Participantes da pesquisa (2025).

- **Quadrado** ($n = 4$): Figura 2.9

Soma dos ângulos internos:

$$180^\circ \cdot (4 - 2) = 360^\circ$$

Ângulo interno:

$$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

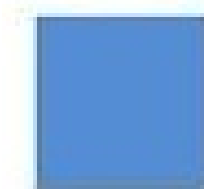


Figura 2.9: Imagem de um quadrilátero regular.
Fonte: Participantes da pesquisa (2025).

- **Hexágono regular** ($n = 6$): Figura 2.10

Soma dos ângulos internos:

$$180^\circ \cdot (6 - 2) = 720^\circ$$

Ângulo interno:

$$\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$$

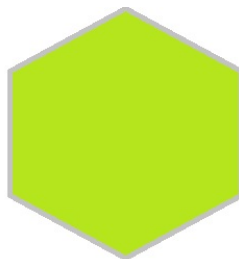


Figura 2.10: Imagem de um hexágono regular.
Fonte: Participantes da pesquisa (2025).

2.3 Ladrilhamento: O encaixe das formas no plano

A geometria não se limita ao estudo de figuras isoladas, mas também abrange as formas como elas podem se organizar no espaço. Um exemplo dessa organização é o ladrilhamento do plano, também conhecido como tesselação. Esse conceito consiste na cobertura completa de uma superfície plana por figuras geométricas, chamadas de ladrilhos, sem sobreposição e sem deixar espaços vazios.

De acordo com Dias e Sampaio (2010), um ladrilhamento é uma cobertura do plano com figuras geométricas congruentes ou não, que se repetem de forma sistemática, sem sobreposição e sem deixar espaços vazios. Essa definição mostra que tanto figuras iguais quanto diferentes podem ser utilizadas, desde que obedecem às regras de encaixe. Os ladrilhamentos podem ser organizados em diferentes categorias, conforme as propriedades dos ladrilhos e a forma como são dispostos:

- **Ladrilhamento regular:** Utiliza apenas um tipo de polígonos regular (com lados e ângulos iguais), repetido por todo o plano de forma simétrica conforme ilustra a Figura 2.11.



Figura 2.11: Ladrilhamento regular feito com triângulos equilátero.

Fonte: Participantes da pesquisa (2025).

- **Ladrilhamento semirregular:** Combina dois ou mais tipos de polígonos regulares, formando padrões que se repetem e que mantêm a mesma configuração ao redor de cada vértice. Veja Figura 2.12.

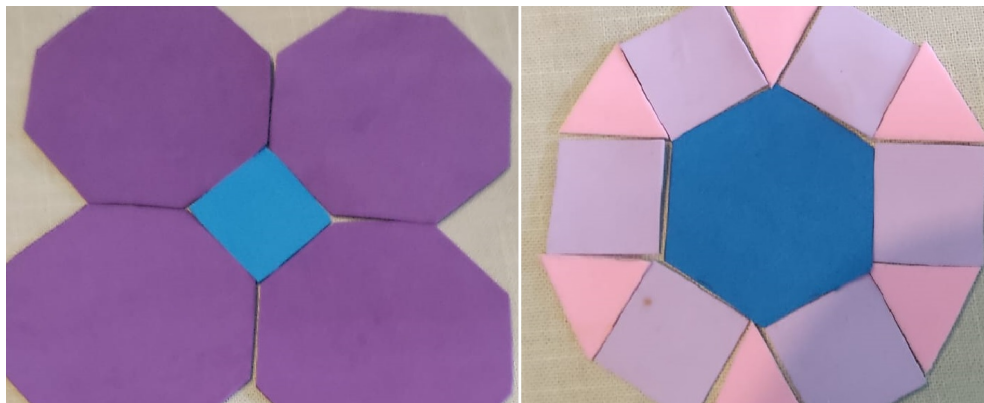


Figura 2.12: Ladrilhamento semirregular.

Fonte: Participantes da pesquisa (2025).

- **Ladrilhamento irregular:** Utiliza polígonos não regulares ou figuras geométricas variadas, com padrões que não seguem necessariamente uma repetição exata como é o caso do Tangram¹. Conforme ilustra a Figura 2.13



Figura 2.13: Tangram (formação de um ladrilhamento irregular).

Fonte: Participantes da pesquisa (2025).

Neste estudo, será enfatizado os ladrilhamentos definidos como “bem comportados” por Dias e Sampaio (2010), cuja construção obedece a três parâmetros:

- Os ladrilhamentos usados são polígonos regulares, podendo ter todos a mesma quantidade de lados ou não.
- O encontro de dois ladrilhos adjacentes sempre será entre seus vértices ou seus lados (o lado de um polígono nunca se encontra com o vértice de outro).

¹O tangram é um quebra-cabeça chinês composto por sete peças geométricas — chamadas tans — que podem ser organizadas para formar diversas figuras. É amplamente utilizado como recurso pedagógico para desenvolver o raciocínio lógico, a percepção espacial e a criatividade.

- A configuração de polígonos em torno de um vértice é sempre a mesma (os polígonos usados em torno de todos os vértices são os mesmos, sendo relevante a ordem em que se dispõem).

A seguir, será abordado sobre cada um dos tipos de ladrilhamentos:

Ladrilhamentos Regulares

Nem todos os polígonos regulares conseguem ladrilhar o plano. Para isso ocorrer, é necessário que os ângulos internos das figuras somem exatamente 360° ao redor de cada ponto de encontro (vértice comum).

Essa condição é satisfeita apenas por três polígonos regulares:

- **Triângulo equilátero:** Seis triângulos ao redor de um vértice completam $6 \times 60^\circ = 360^\circ$, tal como a Figura 2.14.



Figura 2.14: Ladrilhamento com triângulo equilátero.

Fonte: Participantes da pesquisa (2025).

- **Quadrado:** Quatro quadrados em torno de um vértice somam $4 \times 90^\circ = 360^\circ$, como na Figura 2.15.



Figura 2.15: Ladrilhamento com quadrado.

Fonte: Participantes da pesquisa (2025).

- **Hexágono regular:** Três hexágonos juntos somam $3 \times 120^\circ = 360^\circ$, conforme Figura 2.16.

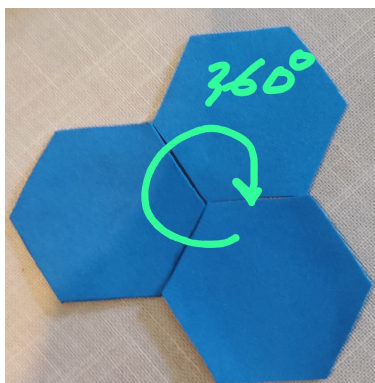


Figura 2.16: Ladrilhamento com hexágono.

Fonte: Participantes da pesquisa (2025).

Esses três casos originam os únicos ladrilhamentos regulares possíveis com polígonos regulares congruentes. Na Figura 2.17 temos um exemplo de um ladrilhamento irregular pois não segue a regra de bom comportamento defendida por Dias e Sampaio (2010).



Figura 2.17: Ladrilhamento irregular (não obedece a regra do bom comportamento).

Fonte: Participantes da pesquisa (2025).

Ladrilhamentos semirregulares

Ao combinar dois ou mais tipos de polígonos regulares em torno de um mesmo vértice, é possível formar ladrilhamentos semirregulares, desde que a soma dos ângulos internos dos polígonos que se encontram em cada vértice seja exatamente 360° .

Essas combinações respeitam uma ordem e uma repetição padronizada, existindo apenas oito padrões semirregulares distintos, em que diferentes polígonos regulares se encaixam perfeitamente. Abaixo, destacamos alguns exemplos:

- **Triângulo + quadrado + hexágono + quadrado:** $60^\circ + 90^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ$.
- **Octógono + quadrado + octógono:** $135^\circ + 90^\circ + 135^\circ = 360^\circ$.
- **Triângulo + triângulo + hexágono + hexágono:** $60^\circ + 60^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$.

Esses padrões são muito utilizados na arte, na arquitetura e na educação matemática, permitindo que os alunos desenvolvam habilidades como a percepção visual, a lógica espacial e o raciocínio dedutivo.

Ladrilhamentos irregulares e artísticos

Os ladrilhamentos irregulares, embora não obedeçam a uma simetria rigorosa, também podem preencher o plano sem falhas. Muitos dos ladrilhamentos artísticos, como os do artista holandês Escher (2004), usam figuras criativas, transformadas a partir de polígonos simples, para formar padrões únicos. Essas construções exigem observação e criatividade, e podem ser um excelente recurso didático para mostrar que a geometria está presente em diversas manifestações culturais e artísticas.

A obra da Figura 2.18 propõe um olhar instigante sobre a transformação das formas no plano.

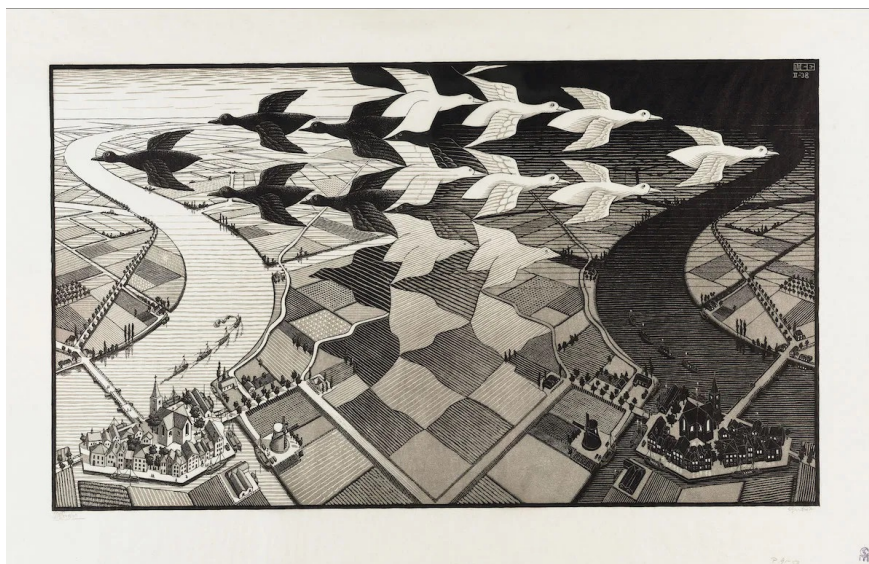


Figura 2.18: Transformação geométrica na obra Day and Night

Fonte: ESCHER, M. C. Day and Night. 1938. Disponível em:

<https://mcescher.com/gallery/recognition-success/day-and-night/>. Acesso em: 03 ago. 2025.

A imagem mostra um campo dividido entre o claro e o escuro, onde padrões de terra vão, aos poucos, se convertendo em pássaros que ganham o céu. O lado esquerdo representa o dia, com aves brancas voando para a direita; o lado direito mostra a noite, com aves negras voando para a esquerda. Com precisão e criatividade, o artista utiliza elementos como simetria, repetição e contraste para construir uma cena que une arte, matemática e percepção visual.

A composição chama atenção pela forma como explora a transição entre figura e fundo, movimento e equilíbrio, sugerindo reflexões tanto estéticas quanto geométricas. A seguir serão apresentadas algumas aplicações e recursos sobre o ladrilhamento no plano para uma melhor compreensão do tema.

Capítulo 3

Ladrilhamento no Plano: Aplicações e Recurso Didático

O estudo do ladrilhamento permite articular conceitos matemáticos com manifestações artísticas e naturais — tudo isso ao mesmo tempo. À primeira vista, pode parecer algo distante, mas basta observar o chão de uma escola, uma calçada bem desenhada, uma fachada de um prédio, os azulejos de uma parede ou até as colmeias das abelhas conforme Figura 3.1 para notar como certos padrões se repetem e se encaixam com precisão, sem deixar espaços vazios.



Figura 3.1: Colmeias de abelhas.

Fonte: Geirllys Silva/SAF.

Estudar o ladrilhamento vai muito além de juntar moldes de polígonos no plano. Por trás dessa ideia aparentemente simples, há conceitos profundos da geometria, envolvendo

ângulos, polígonos, simetrias e propriedades matemáticas mais avançadas. É justamente essa riqueza de possibilidades que torna o ladrilhamento um recurso didático valioso para ser aplicado em salas regulares ou em situações de recomposição da aprendizagem, quando buscamos recuperar conteúdos que os alunos ainda não assimilaram completamente, pois o uso de estratégias visuais, concretas e próximas do cotidiano torna o ensino mais acessível e envolvente.

3.1 Um pouco da história e da vida real

O uso de padrões geométricos para cobrir superfícies vem de longe. Povos antigos, como os gregos e os islâmicos, já utilizavam ladrilhamentos com uma beleza impressionante em suas construções e templos. A arte Islâmica, por exemplo, chegou a criar combinações complexas usando formas simples, tudo baseado em repetições e simetrias.

No século XX, o artista holandês Escher (2004) encantou o mundo ao transformar figuras geométricas em animais e seres fantásticos, tudo sem perder a lógica matemática que sustenta os ladrilhamentos. Como pode ser observado na obra da Figura 3.2, a repetição de formas com simetria rotacional e reflexiva.



Figura 3.2: Ladrilhamento com peixes interligados.

Fonte: Escher - Disponível em: <https://mcescher.com/gallery/symmetry/>. Acesso em: 29 jul. 2025.

Esses padrões não estão apenas na história da arte. Eles estão ao nosso redor - e não só nas construções humanas. A natureza também sabe ladrilhar, como vimos anteriormente colmeias formadas por hexágonos, casca do abacaxi como na Figura 3.3, cascos de tartaruga

com desenhos quase perfeitos, peles de animais, formações rochosas que parecem ter sido planejadas com régua e compasso.



Figura 3.3: Detalhe da casca do abacaxi.

Fonte: O próprio autor (2025).

Na indústria, o conceito de ladrilhamento é utilizado em pisos, embalagens, tecidos, cerâmicas e até em tecnologias de design digital.

3.2 Relação do ladrilhamento com o aprendizado de ângulos

O estudo dos ladrilhamentos oferece recursos visuais para compreender os ângulos. Ele permite trabalhar de forma concreta com conceitos que, muitas vezes, os alunos acham abstratos - como a medida de ângulos internos de polígonos regulares, os tipos de transformações (translação, rotação, simetria) e a classificação de figuras planas. Por exemplo: ao tentar construir um ladrilhamento regular com triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos, o estudante precisa entender que, para as formas se encaixarem perfeitamente ao redor de um vértice, a soma dos ângulos naquele vértice deve ser 360° .

Esse tipo de atividade não deixa de ser uma forma prática de aplicar o que se aprendeu sobre os ângulos internos dos polígonos - sem precisar decorar fórmulas. Além de ser mais envolvente, facilita a recomposição da aprendizagem porque parte da experiência concreta do aluno. Muitos estudantes têm dificuldade em entender ângulos porque nunca viram isso aplicado a algo real. O ladrilhamento pode ajudar a resolver esse problema ao mostrar que a matemática está nas coisas que eles veem e pisam todos os dias como na calçada da Figura 3.4.



Figura 3.4: Piso de uma praça formado por hexágono.
Fonte: O próprio autor (2025).

Trabalhar com ladrilhamento em sala de aula permite que o aprendizado seja mais dinâmico. Os alunos se envolvem com a tarefa e criam seus próprios padrões e nesse processo exercitam o raciocínio lógico, a observação, a criatividade e o espírito de colaboração.

Atividades assim são ideais para oficinas, projetos e momentos em que a escola busca recuperar aprendizagens essenciais, como nas estratégias de recomposição que tantas redes de ensino têm adotado. E o mais importante é que o conteúdo se torna mais relevante e os estudantes visualizam a utilidade da matemática e começam a desenvolver uma relação mais positiva com a disciplina.

3.3 O ladrilhamento como recurso didático

No ambiente escolar, o ladrilhamento pode ser transformado em um recurso didático, capaz de integrar arte e matemática.

Atividades práticas como recorte, colagem, pinturas, criação de padrões, manuseio de softwares como o GeoGebra, permitem que os alunos experimentem conceitos matemáticos de

maneira concreta e lúdica, podendo assumir diferentes formatos: desde oficinas de produção de mosaicos com ou sem uso de tecnologias digitais, como ilustra a Figura 3.5.



Figura 3.5: Embelezamento do pátio da escola com ladrilhos.

Fonte: Participantes da pesquisa (2025).

Essa abordagem prática e visual permite que os alunos muitas vezes desmotivados ou com dificuldades anteriores, se reconectem com o conteúdo matemático de forma mais lúdica e participativa e explore diversos conteúdos matemáticos como ângulos e transformações (translação, rotação e reflexão) dentre outros.

Ao perceber que os ladrilhamentos estão presentes nos pisos das escolas, nas calçadas, nas paredes de casas, nas roupas usadas nas festas juninas, nos utensílios, nas escamas

de peixes, nas cascas de frutas como abacaxi e até mesmo na organização das células em um favo de mel, os estudantes acabam enxergando a matemática como uma ciência viva e aplicada no nosso cotidiano. Além disso, essas atividades promovem o desenvolvimento de outras competências importantes para o processo de aprendizagem, como o raciocínio lógico, a atenção aos detalhes, a capacidade de resolução de problemas e o trabalho em equipe.

Nesse contexto, os alunos podem trabalhar em grupo para criar painéis geométricos, discutir soluções e apresentar seus trabalhos para a turma, fortalecendo a comunicação matemática e ampliando a interação entre os colegas,

Essa experiência evidencia que falar de ladrilhamento é, no fundo, falar de conexões entre a arte e a matemática, entre a natureza e a cultura, entre o conhecimento formal e o mundo real.

Além disso, o contato com os mosaicos é também uma forma de aproximar o aluno daquilo que ele já conhece, utilizando referências do seu cotidiano como ponto de partida para a construção de novos aprendizados.

Um exemplo concreto dessa integração pôde ser observado durante uma caminhada pela Beira Rio, na cidade de Aurelino Leal–Ba, onde painéis de mosaicos coloridos estavam aplicados ao longo do muro da via. As imagens, feitas com pedaços de azulejos de diferentes formas e tamanhos, retratam flores, animais e elementos da natureza conforme Figura 3.6.



Figura 3.6: Registro de mosaicos artísticos na Beira Rio em Aurelino Leal - Ba.

Fonte:Acervo pessoal do autor (2025).

Suas cores vivas e formas geométricas parecem conversar com a paisagem e com as pes-

soas, trazendo para o espaço público um pedaço da cultura e do cotidiano local. Mais do que decorar, ele transforma o lugar em um ponto de encontro visual, despertando curiosidade, orgulho e um sentimento de pertencimento em quem passa por ali.

Esses mosaicos transmitem a mesma energia vibrante das obras de Borba (1984), artista visual soteropolitano, conhecido por transformar espaços urbanos em verdadeiras galerias a céu aberto. Além de embelezar o espaço urbano, essas obras despertam um olhar sensível para as formas geométricas presentes no cotidiano.

A observação desses mosaicos reforça como a arte e a matemática podem dialogar de forma criativa, tornando-se uma rica fonte de inspiração para o ensino de geometria de maneira mais significativa, visual e próxima da realidade dos alunos.

Quando o aprendizado é realizado de forma que faça sentido, os alunos aprendem mais e melhor, pois segundo Freire (1970), o conhecimento só é verdadeiramente construído quando está relacionado à realidade do educando e às situações concretas de sua vida cotidiana. E o ladrilhamento, com sua beleza e lógica ao mesmo tempo, constitui um convite perfeito para que se repense a forma como a Geometria é ensinada, assim como as possibilidades de transformar dificuldades em oportunidades de descoberta.

No próximo capítulo serão apresentadas as práticas pedagógicas com ladrilhamento desenvolvidas no decorrer da pesquisa.

Capítulo 4

Práticas Pedagógicas com Ladrilhamento

Neste capítulo são apresentadas as principais práticas pedagógicas desenvolvidas ao longo desta pesquisa, as quais não apenas complementam o trabalho aqui registrado, mas também evidenciam a aplicação prática do ladrilhamento em sala de aula e a relevância social do estudo realizado.

Foram elaboradas quatro produções de caráter acadêmico e pedagógico, que dialogam diretamente com os objetivos desta pesquisa:

- O Relato de Experiência, apresentado no 2º encontro do PROFMAT/UESC;
- O Projeto Submetido, aprovado e apresentado pelos alunos participantes da pesquisa na 13ª Feira de Ciências da Bahia (FECIBA);
- Um Roteiro de Oficinas, elaborado como proposta de atividades para aprendizagem de matemática;
- O Artigo Científico, produzido como parte dos requisitos para obtenção do título de especialista no curso de Especialização em Ensino de Matemática: “Matemática na Prática”, ofertado pelo Instituto Federal da Bahia (IFBA).

Algumas ilustrações das produções desenvolvidas encontram-se no Apêndice deste trabalho, a fim de complementar o registro da trajetória de pesquisa, ensino e aprendizagem aqui apresentada. O roteiro elaborado será disponibilizado em sua íntegra como Produto Educacional, atendendo às diretrizes do Mestrado Profissional e configurando-se como um material de apoio pedagógico passível de utilização em diferentes práticas de ensino de Matemática.

4.1 Relato de experiência submetido e apresentado no 2º encontro do PROFMAT/UESC

A partir das oficinas realizadas durante a pesquisa, foi possível elaborar um relato de experiências, no qual são descritos os principais momentos vivenciados, os desafios encontrados e os resultados alcançados.

Toda pesquisa, por mais que se concentre em dados e análises, carrega consigo histórias e vivências que não podem ser expressas apenas em gráficos ou tabelas.

Este capítulo é dedicado justamente a esse lado mais humano e transformador da investigação: o relato de experiência, nascido da prática pedagógica desenvolvida no contexto escolar.

O relato foi apresentado no 2º encontro do PROFMAT/UESC, mais do que relatar uma atividade tratou-se de mostrar como uma proposta pedagógica pode mobilizar não apenas conteúdos matemáticos mas também curiosidades e mudanças de postura em sala de aula. A Figura 4.1 ilustra esse momento registrando a socialização da experiência durante o evento.

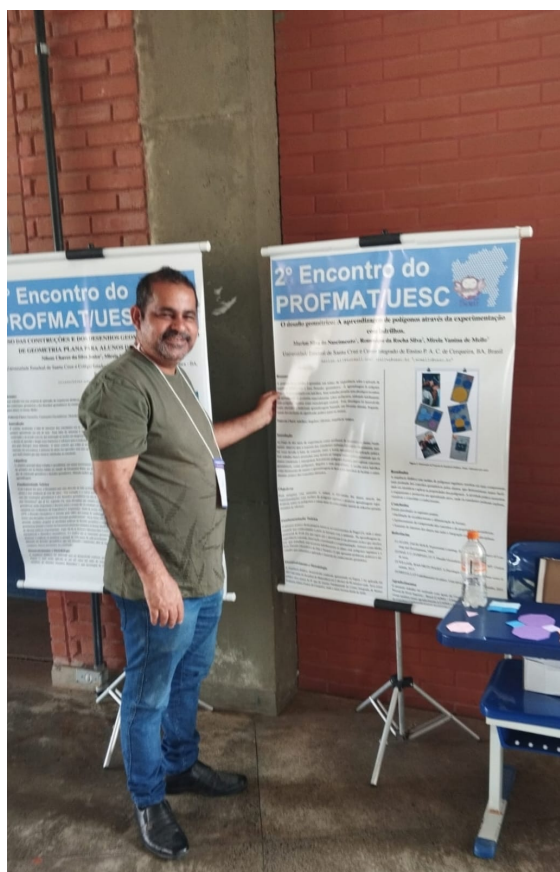


Figura 4.1: Apresentação no 2º encontro do PROFMAT/UESC.

Fonte: Acervo pessoal do autor (2025).

Durante o desenvolvimento da pesquisa foram realizadas oficinas com foco no aprendizado de ângulos e no estudo do ladrilhamento do plano. Essas práticas possibilitaram a construção de uma metodologia mais ativa, que buscou aproximar os estudantes da Matemática de forma lúdica, concreta e envolvente. Ao vivenciar essas experiências, surgiu a necessidade de registrar não apenas os resultados formais da pesquisa, mas também os desafios enfrentados, as adaptações realizadas e os pequenos avanços que marcaram o cotidiano escolar.

O relato de experiência, além de ser um requisito acadêmico, tem um papel crucial na formação docente, pois permite ao professor refletir sobre sua própria prática, reconhecer seus acertos e desafios e, sobretudo, entender como a teoria se concretiza no dia a dia da sala de aula. Ao elaborar esse relato, foi possível revisitar cada etapa do trabalho, refletir sobre as decisões pedagógicas tomadas e perceber o impacto que as oficinas tiveram nos alunos.

Mais do que ensinar conceitos geométricos, a proposta permitiu criar um ambiente de cooperação, no qual os estudantes se sentiram motivados a participar ativamente, expressar suas dúvidas e construir o conhecimento em conjunto.

Esse exercício de reflexão se mostrou fundamental para o amadurecimento profissional, pois evidenciou que o ensino de Matemática pode e deve ir além dos cálculos e fórmulas, conectando-se com a realidade dos alunos e promovendo um aprendizado mais relevante. O pôster apresentado no evento com o relato completo encontra-se disponível no apêndice deste trabalho, como forma de preservar e compartilhar essa experiência. A expectativa é que, ao acessar esse material, outros professores possam se sentir inspirados a aplicar ou adaptar a proposta em seus próprios contextos, contribuindo para a construção de práticas pedagógicas mais humanizadas e eficazes.

4.2 Projeto submetido ao FECIBA

Este Projeto nasceu das vivências e dos aprendizados que emergiram ao longo da aplicação das oficinas de recomposição da aprendizagem matemática, desenvolvidas no contexto desta pesquisa. Mais do que simplesmente aplicar uma sequência de atividades, a proposta trouxe à tona desafios, superações e, sobretudo, descobertas que marcaram tanto o percurso dos alunos quanto o meu próprio caminho como professor e pesquisador.

A experiência foi realizada com alunos do ensino médio, em uma escola pública da rede estadual, onde foi possível perceber de perto as dificuldades dos alunos no que se refere ao estudo dos ângulos e à compreensão do ladrilhamento do plano.

Diante desse cenário, surgiu a necessidade de propor uma abordagem diferente, que aproximasse os estudantes da Matemática de maneira mais envolvente, respeitando seus ritmos e valorizando seus saberes prévios.

As oficinas foram organizadas de forma a promover a participação ativa dos alunos, utilizando materiais concretos, atividades práticas e discussões em grupo. Desde os primeiros encontros, ficou evidente o quanto muitos estudantes carregavam traumas em relação à disciplina, fruto de experiências anteriores marcadas pela rigidez e pela pouca conexão com a realidade. No entanto, à medida que as oficinas avançavam, um novo cenário foi se desenhando, alunos antes desmotivados começaram a se envolver, a perguntar, a criar hipóteses e a compartilhar suas ideias com os colegas.

Um dos momentos mais marcantes dessa jornada foi quando os alunos, ao explorarem o conceito de ladrilhamento, passaram a observar o mundo ao seu redor com outros olhos, percebendo o quanto a geometria estava presente nos pisos da escola, nas calçadas e até em objetos do cotidiano. Essa mudança de olhar, por si só, já era um forte indicativo do impacto positivo que as oficinas vinham promovendo. Ao longo do processo, também foi possível identificar e valorizar o protagonismo dos estudantes, que não apenas participaram das atividades, mas também se sentiram motivados a transformar suas descobertas em um projeto científico.

Esse projeto, elaborado pelos alunos participantes da pesquisa durante as oficinas, sob a orientação do professor pesquisador, foi submetido à Feira de Ciências da Bahia (FECIBA) e para nossa alegria, foi aprovado. A notícia da aprovação gerou grande euforia entre os estudantes, que se sentiram valorizados e motivados ao saber que teriam a oportunidade de apresentar o trabalho ao Núcleo Territorial de Educação na cidade de Vitória da Conquista. Com a aprovação, o projeto segue agora para a etapa estadual da FECIBA, ampliando ainda mais seu alcance e consolidando a importância das práticas pedagógicas desenvolvidas no ambiente escolar.

Essa conquista mostra que a pesquisa ultrapassou os limites da sala de aula, alcançando novos espaços de aprendizagem, visibilidade e reconhecimento. Afinal, é no cotidiano da sala de aula, entre acertos e desafios, que se constroem as práticas que realmente fazem sentido e transformam o modo como os alunos enxergam a Matemática e o mundo ao seu redor.

4.3 Roteiro para as oficinas de aprendizagem

O roteiro apresentado neste trabalho foi cuidadosamente elaborado com um propósito bem definido: servir de referência para as oficinas realizadas ao longo da pesquisa, tanto com os alunos da turma regular quanto com aqueles envolvidos em ações de recomposição da aprendizagem em Matemática.

A ideia foi construir um caminho didático que pudesse atender às diferentes realidades dos estudantes, promovendo uma experiência de ensino mais acessível e conectada às suas

necessidades. O roteiro nasceu da observação atenta às dificuldades dos alunos e foi pensado como um caminho para aproximá-los dos conteúdos matemáticos, de forma prática e envolvente.

Com foco no estudo dos ângulos por meio do ladrilhamento, o roteiro propõe atividades que estimulam a participação ativa dos estudantes e utilizam elementos do cotidiano como ponto de partida para a aprendizagem. Nele, o conteúdo é apresentado de forma concreta e contextualizada, estabelecendo conexões com situações reais que despertam o interesse dos alunos e fortalecem a compreensão dos conceitos geométricos.

Sua estrutura inclui objetivos claros, estratégias metodológicas diversificadas, recursos acessíveis e formas de avaliação que valorizam o processo de aprendizagem, e não apenas o resultado final.

Durante as oficinas, o roteiro serviu como guia que conduziu as atividades, promovendo a interação entre os alunos e incentivando o pensamento crítico e a criatividade.

Essa proposta didática encontra-se disponível no apêndice deste trabalho como material de apoio para outros professores que desejem desenvolver práticas semelhantes.

4.4 Artigo científico: Uma produção que ampliou os olhares da pesquisa.

Durante o processo de construção deste projeto de pesquisa, surgiu a oportunidade de transformar parte dos estudos e reflexões desenvolvidos aqui em um artigo científico, elaborado como requisito para a obtenção do título de especialista no curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática: Matemática na Prática, ofertado pelo Instituto Federal da Bahia (IFBA).

Esse artigo foi produzido enquanto esta pesquisa ainda estava em andamento, e seu desenvolvimento possibilitou aprofundar a análise de uma etapa importante da trajetória: as práticas realizadas em turmas regulares do Ensino Fundamental, que vivenciavam o ensino da Matemática de forma tradicional.

Nessa primeira experiência, o foco foi compreender como a abordagem dos ângulos e do ladrilhamento do plano poderia despertar maior interesse dos estudantes e facilitar a aprendizagem de conceitos geométricos que, muitas vezes, são vistos como difíceis ou distantes da realidade dos alunos.

Os resultados foram bastantes positivos e evidenciaram que, quando a Matemática é apresentada de forma concreta e contextualizada, ela pode transformar a percepção dos estudantes e tornar-se mais acessível.

Foi a partir dessa análise que surgiu uma reflexão essencial: se a metodologia já havia se mostrado eficaz em turmas regulares, por que não adaptá-la para estudantes que enfrentam ainda mais dificuldades no processo de aprendizagem? Essa pergunta orientou o direcionamento do presente projeto de pesquisa, que ampliou o escopo inicial e passou a contemplar um novo cenário - o contexto da recomposição da aprendizagem no Ensino Médio.

O artigo científico, portanto representa mais do que um produto acadêmico: ele foi o ponto de partida de uma trajetória que se expandiu ao longo do mestrado. Funcionou como um ensaio inicial, que abriu caminhos, levantou reflexões e apontou possibilidades que seriam aprofundadas com o tempo e com a prática em sala de aula.

Por sua relevância na construção deste trabalho de pesquisa, é que ele está sendo citado como forma de compartilhar integralmente essa experiência.

A intenção é permitir que outros professores e pesquisadores conheçam a proposta original que inspirou e deu base à ampliação do estudo, especialmente no que diz respeito às ações de recomposição da aprendizagem.

Essa nova etapa da pesquisa não apenas adaptou os princípios do artigo a um outro público com diferentes contextos e realidades.

Assim, mais do que um texto acadêmico, o artigo simboliza o início de um processo de ressignificação do ensino da Matemática. Ele mostrou que, independentemente do contexto - seja em turmas regulares do Ensino Fundamental ou em oficinas voltadas à recomposição no Ensino Médio - é possível construir experiências de aprendizagem mais significativas quando se parte da vivência dos alunos e se propõe a enxergar a Matemática presente em seu entorno.

No próximo capítulo será apresentado os procedimentos metodológicos adotados, detalhando o contexto da pesquisa e as estratégias utilizadas para a coleta e análise dos dados.

Capítulo 5

Procedimentos Metodológicos

A metodologia apresentada nesta pesquisa é de cunho qualitativo e busca entender como as experimentações com ladrilhos poderão auxiliar na aprendizagem sobre ângulos, a partir de reflexões produzidas em sala de aula.

Nesse contexto, a pesquisa qualitativa não utiliza quantificações nem técnicas estatísticas, segundo Gil (2002), seu objetivo é compreender a realidade de determinados fenômenos com base em dados descritivos.

Acredita-se que a geometria pode ser enriquecida por abordagens que combinam teoria e prática, como o uso de ladrilhamento no plano. Essa metodologia permite aos discentes explorar ângulos e suas propriedades de maneira interativa, facilitando a compreensão dos conceitos geométricos e promovendo a criatividade e a colaboração.

Em resumo, a pesquisa qualitativa realizada neste estudo envolveu a coleta de dados a partir das observações e produções de estudantes em resposta às oficinas propostas durante a fase de experimentação.

5.1 Participantes da Pesquisa

A presente pesquisa foi desenvolvida em duas instituições de ensino distintos, ambas localizadas no Território Médio Rio de Contas.

A primeira intervenção ocorreu na escola Ladrilho do Saber, nome fictício atribuído a uma escola da rede municipal de ensino. Essa instituição conta com 394 estudantes matriculados em 2025 e 16 professores. Possui uma área ampla, mas dispõe apenas de 6 salas de aula, além de sala da direção, secretaria, sala de docentes, biblioteca com a acervo reduzido e quadra descoberta.

Situada em um bairro periférico, a escola adota uma lei municipal que proíbe o uso de celulares em sala de aula, restringindo o uso desses dispositivos durante o período escolar.

Nesse contexto, a pesquisa foi aplicada em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental e para fins deste trabalho, foram analisados os resultados individuais produzidos por dois participantes dessa turma: um estudante que se identifica como menino - identificado aqui com o nome fictício de Luiz - e um estudante que se identifica como menina - Identificada como Kéren.

A seleção dos alunos foi realizada em comum acordo com a coordenação da escola, tendo como principais critérios o baixo rendimento em anos anteriores e a baixa motivação na disciplina. Antes do início da pesquisa, os responsáveis por Luiz e Kéren assinaram um termo de consentimento, que detalhava os objetivos e procedimentos da pesquisa, bem como os direitos dos participantes, assegurando transparência, respeito e proteção ao longo do estudo.

Além dessa experiência, a proposta investigativa foi também desenvolvida em uma segunda escola da rede estadual de ensino, que conta com 16 professores e 171 alunos matriculados. Nessa instituição, a aplicação ocorreu em uma turma do Ensino Médio, inserida em ações voltadas à recomposição da aprendizagem. Essa ampliação possibilitou observar os efeitos da abordagem em outro nível de escolaridade e com um público que enfrenta defasagens significativas, contribuindo para validação da proposta em diferentes realidades educacionais.

5.2 Instrumentos de produção de dados

Para uma investigação qualitativa sobre o uso de ladrilhos no estudo de ângulos, foi essencial selecionar instrumentos de produção de dados que permitisse uma compreensão profunda e detalhada das percepções, experiências e aprendizados de estudantes.

A produção de dados foi realizada por meio dos seguintes instrumentos:

5.2.1 Observação participante

Este instrumento foi escolhido porque permitiu que o pesquisador se inserisse no ambiente do estudo, observando e registrando as atividades de cada estudante em tempo real.

Esse método permitiu captar os comportamentos, interações e métodos de aprendizagem da turma enquanto manipulavam e estudavam os ladrilhos.

O pesquisador participou das aulas, observando como estudantes utilizavam os ladrilhos para explorar os ângulos e anotava os detalhes, focando nas estratégias de resolução de problemas, colaboração entre os pares e dificuldades encontradas.

Ao final da pesquisa, esperou-se que as observações permitissem capturar a complexidade e a riqueza das experiências de estudantes com o experimento, fornecendo informações

valiosas para aprimorar as práticas pedagógicas na educação geométrica.

5.2.2 Sequência didática

A sequência didática ajudou o pesquisador a registrar informações de forma organizada, tanto em ordem cronológica ou lógica, facilitando a análise e a interpretação dos dados, permitindo o acompanhamento das mudanças ao longo do tempo, identificando padrões de comportamento e aprendizado dos estudantes durante as oficinas.

Este instrumento, contribuiu para realização dos ajustes na metodologia durante as fases de experimentação, permitindo avaliar a reflexão crítica de estudantes sobre seu aprendizado e ainda fornecendo feedback para a coleta dos dados qualitativos tanto dos estudantes regulares quanto dos estudantes em defasagem de aprendizagem.

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos e suas discussões, mostrando os desdobramentos da pesquisa. O roteiro completo das oficinas, que fundamentou essas atividades, encontra-se disponível no Apêndice deste trabalho.

Capítulo 6

Resultados e Discussões

Neste capítulo, será apresentado os resultados obtidos com a aplicação das oficinas nas turmas do 8º ano do ensino fundamental e do 1º ano do ensino médio.

Cada turma teve um percurso próprio, com diferentes formas de participação, compreensão e desafios.

A seguir, os resultados serão discutidos separadamente por turma, a fim de respeitar as especificidades de cada contexto escolar e o nível de aprendizagem esperado para cada etapa de ensino.

6.1 Turma do 8º Ano do Ensino Fundamental

Esta atividade foi estruturada em cinco etapas: (1) Apresentação do tema e avaliação diagnóstica; (2) Construção dos moldes dos polígonos; (3) Investigação geométrica com mais de um polígono; (4) Matemática e Arte; (5) Aplicação do ladrilhamento na resolução de atividades sobre ângulos.

Nesta seção serão abordadas as observações e discussões provenientes das oficinas experimentais, os argumentos de Luiz e Kéren na resolução e discussão das atividades propostas e dos questionários aplicados.

6.1.1 Primeira etapa: Apresentação do tema

A pesquisa teve início com algumas perguntas feitas à turma de estudantes. Estas questões tiveram como objetivo verificar o nível de conhecimento acerca dos ladrilhamentos - e que neste trabalho serão apresentadas as visões de Luiz e Kéren. As perguntas feitas foram as seguintes:

1. Vocês já viram um ladrilhamento? E feito apenas de polígonos regulares? Onde?

2. Em que situações do cotidiano a pavimentação com polígonos regulares é usada? Quais tipos de polígonos foram utilizados?
3. Onde encontramos essa estrutura na natureza?
4. Existe algum ladrilhamento na arquitetura da sua escola? Onde?

Inicialmente, Luiz e Kéren foram questionados se conheciam algum ladrilhamento e se eram capazes de identificá-los na arquitetura da escola, na natureza ou na indústria e não mostraram ter muito conhecimento sobre ladrilhamento no plano.

Luiz respondeu que já tinha ouvido a palavra ladrilhamento, mas não sabia explicar o significado.

Já Kéren perguntou “Tem alguma coisa a ver com aqueles pisos antigos de tacos de madeira? Pois o piso da minha casa é de taco”. Sendo assim, o docente-pesquisador apresentou as definições de Julio et al. (2018) e Oliveira (2015, p. 28).

Logo após a apresentação das definições, Luiz e Kéren foram convidados a caminhar pela escola para observar a arquitetura, os objetos, o jardim e as roupas das pessoas que trabalham na instituição, na expectativa de identificarem algum ladrilhamento.

Nesta observação puderam perceber que o piso da escola, as paredes da sala e dos banheiros era formado por figuras geométricas de quatro lados e o caminho que dá acesso à quadra era formado por figuras de seis lados, embora não soubessem a nomenclatura. Também não conseguiram identificar ladrilhamento na natureza, nos objetos da escola ou nas roupas de estudantes, docentes e do pessoal de apoio.

Ao analisar individualmente as respostas de Luiz e Kéren, verificou-se que, em pelo menos um dos ambientes mencionados (banheiro), o revestimento não era composto por polígonos regulares.

Isso evidenciou o conhecimento limitado de cada um dos discentes sobre o tema, uma vez que, conforme Dias e Sampaio (2010), um ladrilhamento bem comportado deve obedecer às seguintes condições: (1) Os ladrilamentos devem ser polígonos regulares, de um ou vários tipos; (2) A interseção de dois ladrilhos é sempre um lado ou um vértice e (3) Os ladrilhos ao redor de cada vértices do ladrilhamento é sempre o mesmo.

Dando seguimento a atividade, foi apresentado um vídeo à turma que abordava sobre a natureza como fonte de inspiração para construção dos mosaicos e ladrilhamento e sua aplicação na indústria com o objetivo de aprofundar um pouco mais os conhecimentos de estudantes sobre o tema proposto.

Após a exibição do vídeo ¹, Kéren comentou que achou fascinante como essas formas apa-

¹O seguinte vídeo foi elaborado pela equipe do Telecurso 2000 e pode ser encontrado em (<https://www.youtube.com/watch?v=NCeL6wFFHXk>).

recem frequentemente na natureza, enquanto Luiz destacou o quão interessante é a aplicação dessas formas na indústria de cerâmicas e azulejos.

Entre os teóricos que abordam esses conceitos está Kepler (2007), que investigou padrões naturais como os favos de mel e cristais de gelo, relacionando-os aos princípios de geometria e simetria.

Em seguida a turma foi orientada a trazer papel emborrachado, tesoura, lápis, compasso, transferidor e régua para próxima etapa da pesquisa.

6.1.2 Segunda etapa: Construção dos moldes e investigação geométrica utilizando apenas um tipo de polígono

Na segunda etapa, a turma de estudantes foi convidada a confeccionar os 6 tipos de moldes de polígonos regulares que seriam utilizados no experimento.

Para a confecção dos moldes foram utilizados materiais como régua, compasso, transferidor, tesoura, lápis e folhas de papel emborrachado.

Após desenharem e recortarem os moldes, sem misturá-los, a turma explorou os polígonos, tentando cobrir a superfície da mesa da sala de aula com as peças (polígonos regulares) sem deixar espaço vazios ou sobrepô-las.

A Figura 6.1 representa os moldes construídos pelos alunos.

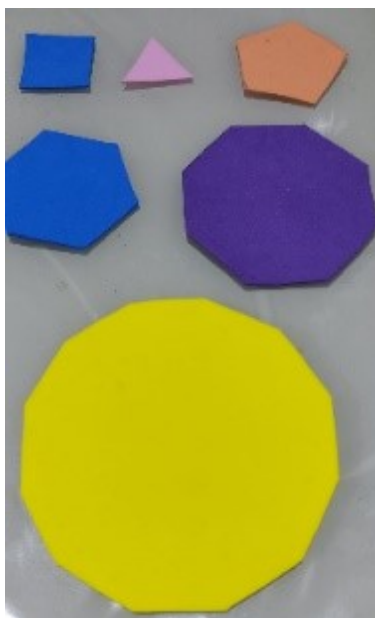


Figura 6.1: Moldes de polígonos regulares .
Fonte: Elaborada pelos participantes da pesquisa.

O objetivo da confecção destes moldes era fazer com que estudantes pudessem verificar

experimentalmente quais polígonos regulares preenchiam perfeitamente o plano da mesa de sala de aula e identificassem qual a propriedade matemática de um polígono regular que permite ou impede essa pavimentação.

Foi solicitado que os participantes registrassem detalhadamente todas as tentativas realizadas, indicando o que obteve sucesso e o que não funcionou, justificando cada etapa do processo. É importante ressaltar que, para pavimentar a superfície, não podem deixar espaços vazios entre as figuras nem as sobrepor Julio et al. (2018) e também foi fundamental lembrar aos estudantes que existem várias possibilidades de ladrilhamento.

No início, os polígonos não estavam sendo construídos uniformemente, pois os moldes tinham tamanhos variados. A turma então foi orientada a construir todos os moldes com lados medindo 4 cm de comprimento.

Os polígonos já recortados em tamanhos diferentes foram separados para que, na fase de experimentação, fosse possível observar na prática a diferença entre um ladrilhamento feito com polígonos regulares de tamanhos iguais e outro com polígonos de tamanhos distintos, reforçando assim a definição de um ladrilhamento bem comportado segundo Dias e Sampaio (2010). Nesta etapa de construção dos moldes, observou-se que Luiz e Kéren não possuíam experiência prévia na construção de polígonos regulares utilizando os instrumentos fornecidos.

A fim de compensar a falta de atividades práticas na disciplina de matemática e promover o desenvolvimento de habilidades essenciais no uso de ferramentas como régua, transferidor e compasso, optou-se por não fornecer os moldes prontos. Essa abordagem visou incentivar o aprendizado ativo e o domínio gradual desses instrumentos.

Dessa forma, Luiz e Kéren tiveram a oportunidade de manusear os instrumentos geométricos e construir seus próprios moldes, verificando na prática a importância dos conhecimentos sobre ângulos tanto na construção quanto na pavimentação do plano com esses polígonos.

Luiz e Kéren, que demonstravam pouca familiaridade com os instrumentos utilizados na atividade, enfrentaram dificuldades para identificar os ângulos internos e externos dos polígonos, bem como para calcular a soma desses ângulos.

Para facilitar o aprendizado desses conceitos, essenciais para a construção dos polígonos e para uma melhor análise de suas propriedades durante a fase de experimentação, foi sugerido que toda a turma preenchesse a Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Propriedades de polígonos regulares.

Polígono	Medida do ângulo interno	Soma dos ângulos internos	Medida do ângulo externo	Soma dos ângulos externos
Triângulo				
Quadrado				
Pentágono				
Hexágono				
Octógono				
Dodecágono				

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Alguns discentes da turma relataram que não tinham estudado ângulos nas séries anteriores e que carregavam dificuldades em matemática devido à falta de aulas no período de pandemia da Covid-19², por este motivo estavam com dificuldade para concluir a atividade solicitada.

Neste momento, foi feita uma breve revisão sobre ângulos, seguindo as recomendações Brasil (2018) que não menciona diretamente o “ladrilhamento do plano”, mas sugere o desenvolvimento de competências matemáticas e geométricas essenciais para entender e aplicar esse conceito. Notou-se que o preenchimento da tabela foi importante pois a turma passou a ter conhecimento sobre o valor do ângulo interno de cada polígono.

Após os moldes prontos, foi solicitado aos estudantes que verificassem na prática quais polígonos eram capazes de ladrilhar ou não plano da mesa da sala de aula. Luiz e Kéren chegaram à conclusão por meio do experimento, que apenas o triângulo, o quadrado e o hexágono eram capazes de ladrilhar perfeitamente o plano sem deixar espaços vazios e sem sobrepor o polígono, atendendo a definição proposta por Julio et al. (2018) que foi apresentada na etapa 1.

Na Figura 6.2 apresentada a seguir é possível ver um exemplo das experimentações realizadas por estudantes nesta etapa da pesquisa.

²Saiba mais sobre a Covid-19 no site do Ministério da Saúde do Brasil: <https://www.gov.br/saude>.

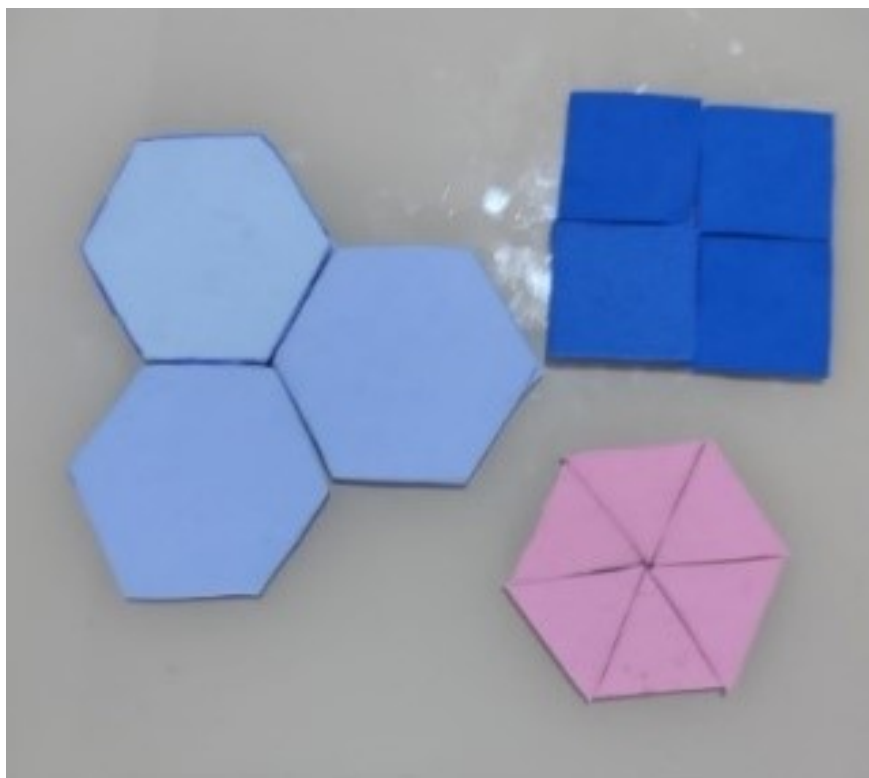


Figura 6.2: Polígonos que ladrilha o plano: triângulo, quadrado e hexágono.
 Fonte: Elaborada pelos participantes da pesquisa (2025).

Segundo Gumieri (2018), a explicação matemática para que o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono ladrilhem no plano sem deixar espaços vazios ou sobreposição está relacionada aos valores de seu ângulo interno, que são iguais, e também tem relação com a soma dos ângulos em torno de um vértice – que deve ser exatamente 360° .

Para calcular o valor da soma dos ângulos internos de qualquer polígono, basta traçar diagonais e observar que cada polígono forma $n - 2$ triângulos (onde n é o número de lados do polígono). Como a soma dos ângulos interno de cada triângulo é igual a 180° , a fórmula para a soma dos ângulos internos é dada por:

$$\text{Soma dos ângulos internos} = 180^\circ(n - 2)$$

Agora para calcular o ângulo interno de um polígono regular basta dividir a soma total dos ângulos internos pelo número de lados do polígono n ou seja:

$$\hat{\text{Ângulo interno}} = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$$

Após a dedução da fórmula do ângulo, convidou-se Luiz e Kéren para aplicarem a fórmula e calcularem o ângulo interno de polígonos como triângulo equilátero, quadrado, pentágono,

hexágono, octógono e dodecágono; em seguida, cada estudante conferiu os resultados utilizando os moldes das figuras geométricas e com o transferidor.

A seguir podem ser vistos os resultados dos cálculos de alguns dos polígonos encontrados por cada participante:

Triângulo equilátero ($n = 3$): valor do ângulo interno é igual a 60° .

Quadrado ($n = 4$): valor do ângulo interno é igual a 90° .

Pentágono ($n = 5$): valor do ângulo interno é igual a 108° .

Hexágono ($n = 6$): Valor do ângulo interno é igual a 120° .

Após os cálculos do valor do ângulo interno do triângulo equilátero, quadrado, pentágono e hexágono, Luiz e Kéren constataram por meio da soma dos ângulos internos ao redor de cada vértice que os únicos polígonos que resultavam em 360° eram o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono, conforme Gumieri (2018) mostra em seus estudos.

Seguem os argumentos matemáticos de alguns dos experimentos realizados pelos discentes.

Luiz: ladrilhamento feito com seis triângulos equilátero: $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 360^\circ$.

Kéren: ladrilhamento feito com 4 quadrados: $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90 = 360..$

Luiz: ladrilhamento feito com 3 hexágono: $120^\circ + 120^\circ + 120 = 360^\circ$.

Por outro lado, no experimento ilustrado na Figura 6.3 os estudantes concluíram que o pentágono, o octógono e o dodecágono não ladrilham o plano, deixam espaços vazios ou sobrepõem a figura, pois a soma dos ângulos internos não resulta em 360° , contrariando a definição de Julio et al. (2018).



Figura 6.3: Alguns polígonos que não ladrilha o plano: pentágono, octógono e dodecágono.

Fonte: Elaborada pelos participantes da pesquisa (2025).

Após finalização dessa etapa do experimento, os participantes da pesquisa foram desafiados a responder a seguinte pergunta: Porque é tão comum usar polígonos regulares iguais em pisos e azulejos e qual a propriedade do ângulo interno está relacionada com este fato?

Em resposta à pergunta feita pelo docente-pesquisador, Luiz disse: “deve ser para economizar material, porque encaixa perfeitamente e também para que o ambiente fique bonito”. Kéren reforçou: “Concordo com Luiz, também para diminuir o tempo da obra pois o pedreiro vai precisar fazer menos recorte e conseqüentemente reduzirá o desperdício, acredito que este deve ser o motivo que a maioria dos pisos das construções tem formatos de triângulo, quadrado e hexágono”.

Foi surpreendente as respostas de cada participante, pois tinham acabado de fazer o cálculo e constatado que a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice tinha que resultar em 360° , para que o polígono pudesse ladrilhar o plano perfeitamente segundo Gumieri (2018).

Com relação a segunda parte da pergunta, nem Luiz e nem Kéren forneceram argumentos convincentes, porém Luiz questionou qual era a relação.

Sendo assim, foi feito um segundo questionamento aos participantes da pesquisa: Ao dividir 360° pelo valor do ângulo interno do triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono, octógono e dodecágono quais deles deixa resto zero? Os polígonos que deixam resto zero ladrilham ou não o plano?

As questões tinham o intuito de fazer com que Luiz e Kéren construíssem suas respostas por meio da experimentação. Sendo assim, Luiz respondeu: “Quando dividimos 360° pelo ângulo interno do triângulo equilátero, quadrado e hexágono a divisão é exata o que não ocorre com os demais polígonos, portanto deve ser essa a propriedade solicitada pelo professor para que os polígonos pudessem ladrilhar o plano sem deixar espaço e sem sobreposição”.

Logo em seguida Kéren também comentou: “Olha nunca havia passado pela minha cabeça que todos esses pisos e azulejos bonitos tinha alguma coisa haver com a matemática além da sua forma e do seu custo”.

Luiz completou: “verdade, antes dessa atividade também nunca tinha imaginado que o fato de o ângulo interno do polígono ser divisível de 360° era o grande motivo das indústrias usarem com tanta frequência estas formas geométricas para fabricação de seus azulejos e cerâmicas.

As respostas de Luiz e Kéren indicam que os mesmos estão evoluindo e começando a compreender a técnica de ladrilhamento e sua relação com o estudo dos ângulos, como mostra Gumieri (2018) em seu trabalho.

Além disso, autores como Skovsmose (2001), criticam o “paradigma do exercício” no ensino de matemática, onde os alunos resolvem problemas repetitivos de forma mecânica, sem

compreender o contexto ou as implicações dos conceitos.

Ele defende uma abordagem que conecte a matemática ao cotidiano dos estudantes, promovendo uma compreensão mais profunda e crítica dos conceitos matemáticos, permitindo aos alunos questionar e refletir sobre a aplicação desses conhecimentos na sociedade.

6.1.3 Terceira etapa: Investigação geométrica com mais de um polígono

Como aprofundamento, no terceiro momento foi proposta uma sessão de três desafios, onde estudantes teriam que combinar dois ou mais tipos de polígonos para pavimentar o plano sem deixar espaço vazio ou sobreposição. Os três desafios foram exibidos na sala de aula com o auxílio de um projetor digital, e é importante destacar que cada discente poderia ou não encontrar dificuldades para apresentar soluções.

Nesse sentido, a intervenção pedagógica do professor, ao guiar e apoiar estudantes, ajudará a superar barreiras e alcançar novos níveis de entendimento, convergindo com os estudos de Vygotsky (1978) e favorecendo o desenvolvimento cognitivo.

O primeiro desafio proposto foi o seguinte: *É possível ladrilhar a sala de aula utilizando dois tipos de polígonos? Se sim, mostre um exemplo e utilize argumentos matemáticos para confirmar a sua resposta.*

Na Figura 6.4 ilustrada abaixo, segue imagens de algumas das combinações realizadas por Kéren e Luiz para solucionar a atividade proposta.

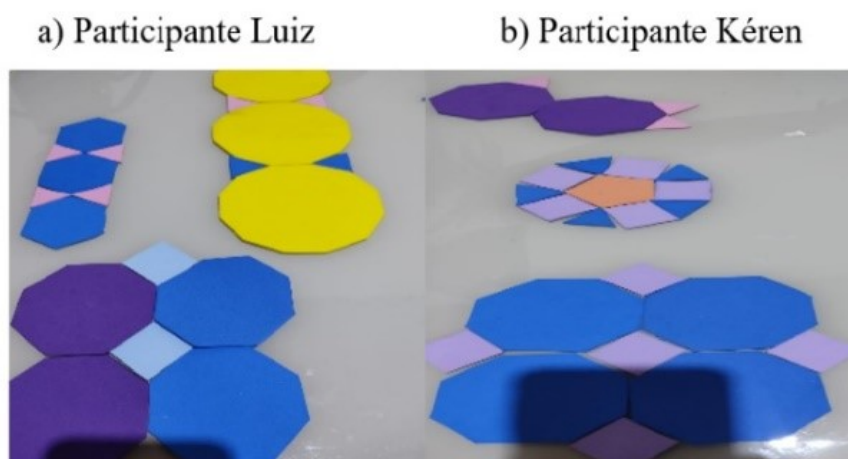


Figura 6.4: Possíveis soluções encontradas pelos discentes.

Fonte: Elaborada pelos participantes da pesquisa (2025).

Observando as imagens das soluções apresentadas por cada participante da pesquisa, nota-se que Luiz conseguiu achar três soluções para o problema proposto e Kéren também

fez três soluções, todavia duas delas não atende ao enunciado.

Em uma das soluções feita por Kéren foi usado mais de dois polígonos (pentágono, quadrado e triângulo) contrariando o enunciado da questão, na outra solução os polígonos escolhidos por ela (octógono e triângulo equilátero) não cobre o plano sem deixar espaços vazios ou sobreposição, contrariando a definição dada por Gumieri (2018), isso ocorre porque a soma dos seus ângulos internos ao redor de cada vértice é diferente de 360° .

Ao questionar cada participante da pesquisa sobre as estratégias que eles utilizaram para resolver o desafio proposto, Luiz respondeu: “Fiz várias combinações e com isso consegui fazer duas soluções, a terceira solução usei a tabela que construímos na etapa 1 e com o valor dos ângulos internos de cada polígono, fui combinando até que a sua soma completasse 360° , como na combinação da Figura 6.4 de dois hexágonos e dois triângulos equiláteros ($120^\circ + 120^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 360^\circ$).

Kéren também respondeu: “Fiz por tentativa, só que teve um que usei octógono e triângulo equilátero e ficou espaço entre os polígonos, aí fiz um desenho parecido com um gatinho” conforme Figura 6.4.

Ao concluir esta etapa do experimento, notou-se que Luiz e Kéren tiveram uma evolução tanto nos conceitos sobre ladrilhamento como no aprendizado sobre ângulos e suas propriedades, convergindo com os estudos de Skovsmose (2001), que propõe que o ensino de matemática seja mais conectado ao cotidiano e à realidade social dos alunos, favorecendo a compreensão profunda dos conceitos e a capacidade de questionar e analisar a matemática de maneira crítica. Também foi observado que experimentos como este podem despertar o interesse de estudantes pela arte, ao mesmo tempo que exploram os conceitos matemáticos, a exemplo do comentário de Kéren quando afirma que o seu desenho que combina octógono e triângulo parecia com o desenho de um gatinho.

Esta situação faz lembrar os azulejos de Penrose (2006), e também as obras de Escher (2004), que exploram conceitos de ladrilhamento de forma artística.

O segundo desafio proposto foi: *É possível ladrilhar a sala de aula utilizando 3 tipos de polígonos? Se sim, mostre um exemplo e utilize argumentos matemáticos para confirmar a sua resposta.*

A Figura 6.5 a seguir mostra algumas das soluções apresentadas por Luiz e Kéren.



Figura 6.5: Possíveis soluções encontradas por Luiz e Kéren.

Fonte: Elaborada pelos participantes da pesquisa (2025).

Apesar de este desafio ser mais difícil do que as atividades propostas anteriormente, Luiz e Kéren concluíram com mais facilidade, pois, ao serem questionados de forma individual sobre as estratégias utilizadas para solucionar o problema, cada participante da pesquisa apresentou respostas muito semelhantes que culminou numa combinação de polígonos até que a soma dos ângulos interno das três figuras geométricas ao redor de cada vértice somasse 360° como na atividade do desafio 1.

Portanto, é possível concluir que nesta fase do experimento Luiz e Kéren já estavam dominando a técnica do ladrilhamento por meio da observação dos ângulos internos de cada polígono em torno de um vértice, que é condição necessária para que estas figuras geométricas se encontrem de maneira justa, sem deixar espaço vazio e sem sobreposição conforme definição de Julio et al. (2018) relatada na Etapa 1.

No terceiro desafio foram feitas as seguintes questões: *É possível ladrilhar a sala de aula utilizando quatro tipos de polígonos regulares? Se sim, qual o ladrilho que você montou? Utilize argumentos matemáticos para confirmar a sua resposta.*

Após 20 minutos nenhum participante da pesquisa conseguiu fornecer um exemplo de ladrilhamento usando mais de três polígonos diferentes, o que vai de acordo com os estudos de Julio et al. (2018), que mostra que os ladrilhos formam a pavimentação do plano, através do revestimento de uma região plana sem que haja espaço ou sobreposição entre os polígonos.

Questionados sobre as estratégias usadas, Luiz e Kéren alegaram que fizeram várias tentativas usando os moldes dos polígonos sem obter sucesso, também tentaram combinar a soma dos ângulos internos de cada polígono ao redor de um vértice mais a soma sempre era diferente de 360° .

Luiz afirmou: “Ao combinar um quadrado, um hexágono, um triângulo equilátero e um octógono ($90^\circ + 120^\circ + 60^\circ + 135^\circ = 405$), a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice ultrapassa 360° e, portanto, impossibilita que esses polígonos se encaixem perfeitamente sem

sobreposição”.

Kéren também argumentou: “Mesmo usando os polígonos que possuem os menores ângulos internos, como o triângulo, o quadrado, o pentágono e o hexágono ($60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ = 378^\circ$) os valores ultrapassam 360° então acho que não tem solução”.

Esperava-se que cada participante da pesquisa elaborasse possíveis combinações com os moldes recortados para resolver o problema proposto ou que utilizasse de argumentos matemáticos convincentes para mostrar que a soma dos ângulos internos de quatro polígonos regulares diferentes não resulta em 360° e foi o que ocorreu.

Portanto, ao final desta etapa é possível concluir que a sequência didática proposta por esta pesquisa pode sim ser uma ferramenta metodológica eficaz para o aprendizado de ângulos e outras áreas do conhecimento, com potencial para superar as práticas que utilizam somente exercícios e abstrações.

6.1.4 Quarta etapa: Matemática e Arte

No quarto momento, toda a turma do 8º ano foi convidada a criar um mosaico artístico utilizando polígonos, inspirando-se ou não em obras de artistas que utilizam técnicas de ladrilhamento, a exemplo de Escher (2004), que explorou padrões de ladrilhamento e simetria, unindo arte e matemática de maneira inovadora.

A turma foi orientada a realizar releituras de obras de artistas baianos conforme a escolha deles, podendo ser Borba (1984), Carybé (1980) ou do cearense de nascimento e baiano de criação Nobre (2024) que pinta, desenha, faz esculturas e azulejaria e seus mosaicos se destacam por um trabalho minucioso de unir peças por peças.

A oficina buscou estabelecer uma conexão com a disciplina de Arte, assim, estudantes puderam explorar conceitos de geometria enquanto desenvolviam habilidades matemáticas e artísticas, incentivando a criatividade e a colaboração através de uma abordagem prática e interdisciplinar.

Ao integrar conceitos matemáticos com a expressão artística, o objetivo foi aprofundar a compreensão de discentes sobre polígonos, ângulos, padrões e simetrias de maneira lúdica. Além de desenvolver a sensibilidade artística, essa etapa também ajudou os alunos a perceberem como a geometria está presente em suas próprias criações.

Na Figura 6.6 é possível notar que as releituras feitas por Luiz e Kéren, trazem diferentes formas geométricas, como triângulos, quadrados e até polígonos mais elaborados, que se juntam para formar composições equilibradas e cheias de expressão.



Figura 6.6: Releitura feita por Luiz e Kéren.
Fonte: Elaborada pelos participantes da pesquisa (2025).

Alguns trabalhos exploram a simetria, enquanto outros brincam com a repetição de padrões, lembrando os estudos de ladrilhamento. Assim, cada produção mostra não só a criatividade dos estudantes e a valorização da cultura local, mas também como a matemática pode ganhar vida dentro da arte.

Durante a oficina de arte, discentes se envolveram profundamente, demonstrando entusiasmo e curiosidade e afirmando que essa experiência ampliou sua compreensão da arte baiana e da cultura local, ressaltando a conexão com a identidade e o cotidiano da Bahia. Essa atividade não só despertou a sensibilidade, mas também proporcionou um aprendizado sobre as raízes culturais da região, destacando a arte como uma ferramenta valiosa para a educação e o autoconhecimento.

Kéren ressaltou a capacidade de identificar ângulos em objetos ao seu redor como portas, janelas, paredes e obras de arte; já Luiz afirmou que a experiência facilitou o seu entendimento sobre ângulos agudos, rasos e obtusos e como eles estão presente em toda parte.

Assim, a oficina não apenas promoveu a compreensão dos conceitos de ângulos, mas também estimulou o interesse de estudantes pela matemática de forma prática e contextualizada. A utilização do ladrilhamento como ferramenta pedagógica vai além da exploração artística e cultural, ela se estende de forma relevante para a resolução de problemas matemáticos, especialmente na geometria.

6.1.5 Quinta etapa: Aplicando o ladrilhamento na resolução de atividades sobre ângulos

Na quinta etapa, a turma foi convidada a resolver um questionário com problemas relacionados a ângulos e suas propriedades, utilizando-se dos conhecimentos adquiridos ao longo

das etapas anteriores, com foco no uso do ladrilhamento como ferramenta central.

Na primeira questão, estudantes exploraram as definições e propriedades de ângulos por meio da experimentação com ladrilhos, evidenciando uma crescente compreensão dos conceitos geométricos:

1. **Observe a Figura 6.7 e responda:**



Figura 6.7: Imagem do exercício 1.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025.)

- (a) *Quanto mede o ângulo ao redor de cada vértice?*
- (b) *Qual o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo?*
- (c) *Quanto mede o ângulo interno de um hexágono regular?*
- (d) *Quanto mede a soma dos ângulos interno de um hexágono regular?*
- (e) *Quanto mede o ângulo a da figura?*
- (f) *Qual a área e o perímetro do hexágono regular da figura, sabendo que seu lado mede 4 cm?*

Nos itens (a) e (b), Kéren e Luiz foram, de maneira geral, bem-sucedidos em suas respostas, destacando a importância das atividades práticas de investigação.

É possível observar que ambos identificaram que a soma dos ângulos em torno de um vértice é dada pela soma dos ângulos internos de 6 triângulos equiláteros ($6 \times 60^\circ = 360^\circ$), e que a soma dos ângulos internos de um triângulo equilátero é 3 vezes o ângulo de 60° , ou seja, 180° .

As respostas de Kéren e Luiz refletem a solidificação do aprendizado de ambos em conceitos fundamentais da geometria, conforme defende Frankenstein (1983), a educação matemática não deve se limitar à aplicação mecânica de fórmulas e algoritmos, mas sim buscar o desenvolvimento de uma consciência crítica nos alunos.

Nas questões (c) e (d) Kéren aplicou a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono abordada na etapa 2. A estudante identificou que o hexágono, com 6 lados, possui uma soma de ângulos internos de 720° , o que foi um ponto positivo na resolução do item (d). Para o item (c), bastou dividir o valor da soma dos ângulos internos pelo número de lados do Polígono ($720^\circ/6 = 120^\circ$), aplicação da fórmula discutida na etapa 2 para ângulos internos.

Luiz resolveu o item (c) observando que o ângulo interno de um hexágono regular é formado pela soma dos ângulos internos de dois triângulos equiláteros, medindo, portanto, 120° . Para o item (d) multiplicou o valor do ângulo interno (120°) pelo número de ângulos internos do hexágono (6), resultando em 720° .

As respostas de Kéren e Luiz confirmam o que propõe Van Hiele (1986), a compreensão geométrica avança do reconhecimento visual (nível 1) ao raciocínio lógico-dedutivo (nível 3). Veja a Tabela 6.2.

Tabela 6.2: Classificação das respostas segundo os níveis de Van Hiele (1986)

Aluno(a)	Descrição da resolução	Nível de Van Hiele
Kéren	Aplicou a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono (720° para o hexágono) e dividiu pelo número de lados para encontrar o ângulo interno (120°).	Nível 2 – Análise
Luiz	Identificou que o ângulo interno do hexágono regular equivale à soma de dois ângulos internos de triângulos equiláteros ($2 \times 60^\circ = 120^\circ$), utilizando relações entre diferentes figuras.	Nível 3 – Dedução informal

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A questão (e) foi resolvida com facilidade por Kéren, que observou que o valor do ângulo â poderia ser obtido subtraindo a soma dos ângulos de 4 triângulos equiláteros do total do ângulo de uma volta em torno do vértice ($360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$).

Isso indica que Luiz e Kéren conseguiram identificar ângulos em configurações geométricas complexas, o que é importante para o desenvolvimento de habilidades espaciais, conforme Skovsmose (2001), enfatiza a necessidade de desenvolver habilidades cognitivas e espaciais nos estudantes, além de promover uma visão crítica sobre os impactos sociais e culturais da matemática.

Na questão (f), Luiz acertou o valor do perímetro somando os 6 lados do hexágono, mas teve dificuldade em calcular a área do hexágono apenas com a informação do lado. Já Kéren deixou a questão em branco. Esses registros mostram que os conceitos de áreas e perímetros precisam ser mais trabalhados, sugerindo melhorias na sequência didática para abordar essas questões de áreas e perímetro de figuras planas.

No geral, os resultados das respostas de Kéren e Luiz indicam que a metodologia empregada, com ênfase na manipulação de ladrilhos e na visualização prática, não apenas facilitou a compreensão dos ângulos, mas também motivou ambos participantes da pesquisa a explorar e aplicar os conceitos matemáticos em situações concretas.

Dando continuidade a essa exploração, a próxima questão desafia estudantes a aprofundar ainda mais suas habilidades de observação e aplicação prática dos conceitos geométricos.

Assim, na questão 2 temos:

2) Observe a Figura 6.8 e responda:

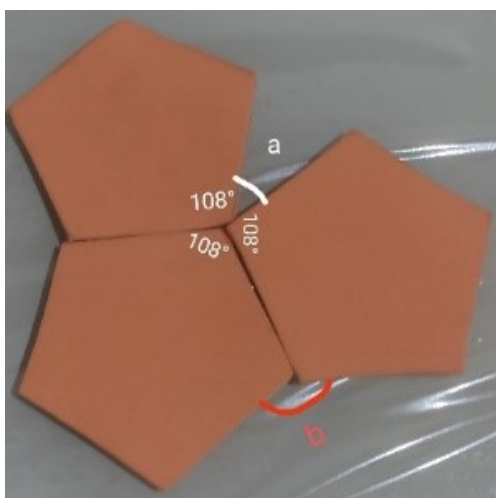


Figura 6.8: Imagem do exercício 2.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

- (a) *Qual o valor do ângulo interno do pentágono?*
- (b) *Quanto mede a soma dos ângulos internos do pentágono?*
- (c) *Quanto mede o ângulo a?*
- (d) *Quanto mede o ângulo b?*
- (e) *Qual a área do pentágono da figura sabendo que seu lado mede 4 cm?*

Nas questões apresentadas, Kéren e Luiz aplicaram os conhecimentos adquiridos nas fases de experimentação com ladrilhos e propriedades geométricas dos polígonos. No item (a), observou-se que a maioria da turma, incluindo Luiz e Kéren, resolveu o problema proposto sem a necessidade de aplicar a fórmula matemática.

Foi possível identificar o ângulo interno da figura diretamente pela observação, o que reforça o aprendizado visual e prático. No entanto, caso o ângulo interno não estivesse fornecido, seria viável aplicar a fórmula abordada na Etapa 2 para os ângulos internos de um pentágono. Assim, temos:

$$\hat{\text{Ângulo interno}} = \frac{180^\circ \cdot (5 - 2)}{5} = 108^\circ$$

Portanto, o ângulo interno de um pentágono é 108° .

No item (b), a soma dos ângulos internos do pentágono foi calculada com facilidade pela maioria da turma, que apenas multiplicaram o valor do ângulo interno dado (108°) pelo número de ângulos internos do pentágono (5), obtendo:

$$108^\circ \cdot 5 = 540^\circ$$

Esse resultado poderia também ter sido obtido pela fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono, discutida na Etapa 2 desta pesquisa. Neste caso:

$$\text{Soma dos ângulos internos} = 180^\circ \cdot (5 - 2) = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

A observação feita pela turma de que muitos exercícios podem ser resolvidos sem uso direto de fórmulas, demonstra uma habilidade importante de percepção visual e reconhecimento de padrões.

Esse desenvolvimento está em conformidade com a teoria de Van Hiele (1986), que descreve a compreensão geométrica como um processo que ocorre em níveis progressivos. O reconhecimento de formas e suas propriedades constitui uma etapa essencial nesse percurso, como sintetizado na Tabela 1.1, apresentada no Capítulo 1.

Esses resultados reforçam a importância de oferecer atividades que permitam aos estudantes relacionar conceitos abstratos com situações concretas, promovendo um entendimento mais profundo da geometria.

Os itens (c) e (d) exploraram a identificação de ângulos específicos no desenho. Kéren e Luiz não apresentaram dificuldades, ambos tiveram raciocínio semelhan-

tes: subtraíram 360° , que é o ângulo de uma volta da soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor do vértice, obtendo como resposta o valor de 36° ; já no item (d) o valor de 144° foi registrado, conforme esperado.

As estratégias utilizadas por Kéren e Luiz nos itens (c) e (d) mostram como esse tipo de atividade pode favorecer o desenvolvimento do raciocínio geométrico, de acordo com a teoria de Van Hiele (1986), como apresentado na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Respostas de Kéren e Luiz nos itens (c) e (d) e respectivos níveis de Van Hiele

Aluno(a)	Descrição da resolução	Item	Nível de Van Hiele
Kéren	Aplicou a fórmula da soma dos ângulos internos (720°) e dividiu pelo número de lados do hexágono, obtendo 120° .	(c)	Nível 2 – Análise
Kéren	Multiplicou o valor do ângulo interno (120°) pelo número de lados (6), obtendo 720° .	(d)	Nível 2 – Análise
Luiz	Relacionou o ângulo interno do hexágono à soma de dois ângulos de triângulos equiláteros ($2 \times 60^\circ = 120^\circ$).	(c)	Nível 3 – Dedução informal
Luiz	Multiplicou o valor do ângulo interno (120°) pelo número de lados (6), obtendo 720° .	(d)	Nível 3 – Dedução informal

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

No item (f), que envolveu o cálculo da área de um pentágono regular, novamente observou-se que nenhum estudante acertou a questão. Isso indica a necessidade de melhorar essa sequência didática para que esses conceitos de áreas de figuras planas sejam melhor compreendidos por discentes, possivelmente, incluir mais atividades práticas que envolvam a medição de áreas com base na decomposição em triângulos, como defende Skovsmose (2001), a aprendizagem deve ser contextualizada e conectada a situações reais, incentivando os alunos a refletirem sobre as implicações e usos da matemática na sociedade.

Seguindo a sequência de atividades práticas, a terceira questão foi elaborada para aprofundar o entendimento da turma sobre a aplicação de conceitos geométricos,

especialmente relacionados aos ângulos e aos ladrilhamentos, para que estudantes pudessem aplicar seus conhecimentos de forma mais abrangente e crítica.

A seguir, temos a questão 3:

3) Observe a Figura 6.9 e responda:



Figura 6.9: Imagem do exercício 3.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

- (a) Qual o valor do ângulo a ?
- (b) Qual o nome dos polígonos da figura?
- (c) Qual o valor do ângulo externo do hexágono?
- (d) Qual o nome dos polígonos da figura acima, que apresenta respectivamente ângulo agudo, reto e obtuso.?

No item (a) desta questão, Kéren aplicou a fórmula do ângulo interno de um hexágono:

$$\hat{\text{Ângulo interno}} = \frac{180^\circ(6 - 2)}{6} = 120^\circ$$

e Luiz subtraiu o ângulo central (360°) com a soma dos ângulos de dois quadrados e um triângulo equilátero (240°) resultando em 120° que era o resultado esperado.

Observou-se que o exercício de pavimentação com triângulos, quadrados e hexágonos apresentado anteriormente permitiu que estudantes vissem como os ângulos se complementam para preencher espaços conforme Gumieri (2018) já demonstrou em seus estudos. Esta é uma possível ferramenta para o estudo de simetrias, como reflexão, rotação e translação, e para o desenvolvimento de habilidades espaciais e de visualização.

Atividade de pavimentação de superfície desafia estudantes a aplicarem os conceitos de ângulos, divisão, multiplicação e proporção, explorando a otimização do espaço e o uso criativo de ladrilhos regulares. Essa prática estimula o pensamento crítico e criativo, desenvolvendo estratégias para lidar com formas complexas.

Os benefícios dessa abordagem incluem a visualização concreta dos conceitos, desenvolvimento de habilidades espaciais, maior engajamento de estudantes e uma conexão com o cotidiano, aproximando a matemática de contextos reais, segundo Skovsmose (2001), argumenta que a matemática não deve ser ensinada apenas como um conjunto de técnicas e fórmulas, mas também como uma ferramenta para compreender e questionar o mundo ao redor.

No item (b), Kéren e Luiz não apresentaram dificuldades em identificar corretamente a resposta (triângulo equilátero, quadrado e hexágono) conforme já era esperado. Essa identificação foi direta, visto que a turma já tinha explorado essas formas em etapas anteriores, utilizando ladrilhos.

Os dados evidenciam que a abordagem com ladrilhos pode enriquecer o aprendizado, facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos e despertar o interesse pela matemática, conforme os estudos de Kolb (1984).

Observa-se, portanto, que as respostas de Kéren e Luiz refletem diferentes níveis de raciocínio geométrico. Kéren aplicou diretamente a fórmula da soma dos ângulos internos e a divisão pelo número de lados, caracterizando uma compreensão no nível 2 da teoria de Van Hiele (1986), voltada para a análise de propriedades. Já Luiz, ao relacionar o ângulo interno do hexágono com a soma de ângulos de triângulos equiláteros, demonstrou um raciocínio mais elaborado, típico do nível 3, em que há a construção de deduções informais.

Teoricamente, essas diferenças refletem como atividades práticas, como o uso de ladrilhos, apoiam a progressão nos níveis de desenvolvimento geométrico. Enquanto Kéren já consegue aplicar fórmulas com facilidade, Luiz depende mais da manipulação concreta e da observação visual para construir seu conhecimento, o que reforça a importância de abordagens pedagógicas que utilizem materiais concretos e visualização,

como defendido por Piaget (1971).

Por fim, no item (d), o desempenho de Kéren e Luiz revelou aspectos distintos de seus níveis de desenvolvimento geométrico. Luiz, utilizando uma abordagem essencialmente visual, identificou os ângulos por meio da observação direta das formas. Sua experiência prática com os ladrilhos permitiu reconhecer o triângulo como polígono com ângulo agudo, o quadrado como polígono com ângulo reto e o hexágono como polígono com ângulo obtuso.

Essa estratégia de Luiz está associada ao nível 1 da teoria de Van Hiele (1986), conforme a Tabela 1.1, em que os estudantes ainda dependem da visualização global e de propriedades perceptíveis.

Por sua vez, Kéren aplicou uma abordagem mais abstrata e teórica, utilizando raciocínio dedutivo para identificar corretamente os ângulos internos dos polígonos. Esse tipo de procedimento mostra que ela se encontra no nível 3, em que os estudantes utilizam definições e fórmulas de maneira independente para resolver problemas geométricos.

As respostas de ambos reforçam os princípios da Educação Matemática Crítica, conforme Skovsmose (2001), ao mostrar que a aprendizagem deve promover reflexão e autonomia, integrando a Matemática a contextos reais que favorecem a compreensão e a participação ativa dos estudantes no processo educativo.

Observou-se que o uso de ladrilhos como ferramenta pedagógica ajudou cada participante da pesquisa a progredirem em suas habilidades geométricas, com Luiz ainda dependente da visualização prática e Kéren demonstrando uma compreensão mais abstrata. As abordagens diferenciadas de Kéren e Luiz evidenciam a importância de estratégias pedagógicas variadas para atender ao desenvolvimento geométrico de cada estudante.

Ao final desta etapa, conclui-se que integrar o ladrilhamento à resolução de exercícios matemáticos pode enriquecer o aprendizado e despertar nos estudantes uma nova forma de compreender a Matemática, em que a experimentação e a criatividade se tornam aliadas na resolução de problemas.

6.2 Turma do 1º Ano do Ensino Médio

Após os resultados positivos obtidos com a turma do 8º ano do Ensino Fundamental, a proposta pedagógica foi expandida para uma turma do Ensino Médio, inserida em ações de recomposição da aprendizagem. Essa ampliação teve como objetivo investigar a eficácia

das mesmas estratégias em um novo contexto educacional, marcado por maiores exigências cognitivas e vivências escolares diversificadas.

A recomposição da aprendizagem, nesse caso, mostrou-se um campo fértil para práticas pedagógicas inovadoras, que utilizam a experimentação e a criação em vez de apenas aulas teóricas com exercícios e demonstrações. As oficinas aplicadas seguiram a mesma estrutura da etapa anterior, com adaptações pontuais à faixa etária dos participantes conforme Figura 6.10.



Figura 6.10: Oficinas construção dos moldes de polígonos.

Fonte: Participantes da pesquisa. (2025)

Atividades envolvendo conceitos de ângulos, polígonos e ladrilhamentos foram retomadas com maior aprofundamento, promovendo a revisão e a reconstrução de conhecimentos fundamentais de geometria.

Dentre as ações desenvolvidas, destacou-se a oficina de arte, que propôs aos alunos a criação de mosaicos geométricos com ladrilhos. Como resultado, os estudantes idealizaram

e executaram um projeto coletivo de intervenção no espaço escolar, embelezando o pátio da escola com mosaicos produzidos por eles mesmos. Veja Figura 6.11.



Figura 6.11: Embelezamento do pátio da escola.

Fonte: Elaborada pelos discentes (2025.)

O envolvimento dos alunos ultrapassou as expectativas iniciais, e motivados pela possibilidade de transformar o espaço em que convivem diariamente, os jovens se apropriaram do projeto como algo pessoal e significativo.

A pintura do pátio da escola foi um momento marcante e especial para os alunos, que se envolveram com entusiasmo em todas as etapas da ação. Ao participarem ativamente da criação do mural, os estudantes internalizaram os conceitos geométricos de forma concreta e lúdica, não apenas compreenderam os ângulos, mas os vivenciaram na prática.

A partir do que aprenderam durante o projeto, eles próprios escolheram os desenhos, organizaram os materiais e colocaram a mão na massa para transformar o ambiente escolar com formas geométricas coloridas. Mais do que uma simples atividade artística, essa vivência despertou o senso de pertencimento, a cooperação entre os colegas e o prazer em aprender de forma prática.

Ver a matemática ganhando vida no pátio, foi para muitos alunos, uma experiência diferente e motivadora, que mostrou como o conhecimento pode, de fato, sair dos livros e ocupar o mundo ao nosso redor.

Esse protagonismo, culminou na elaboração de um projeto autoral com a orientação do professor pesquisador, que foi inscrito e aprovado na 13ª Feira de Ciências da Bahia (FECIBA), representando não apenas um avanço na aprendizagem matemática, mas também uma conquista coletiva no campo da educação estética, cidadã e colaborativa como ilustrado na Figura 6.12.



Figura 6.12: Participação dos discentes no FECIBA.
Fonte: Acervo pessoal do autor (2025)

Durante o evento, os estudantes compartilharam suas experiências, dialogaram com outros jovens e professores, e se viram como verdadeiros protagonistas da própria aprendizagem. Esse tipo de vivência fortalece não apenas os conhecimentos matemáticos, mas também competências socioemocionais, como a autoconfiança, a comunicação e o senso de pertencimento, como propõe Brasil (2018).

Como defende Skovsmose (2001), a aprendizagem matemática torna-se mais atraente quando se ancora no contexto social e cultural do aluno. A proposta também dialoga com as ideias de Lorenzatto (1995), ao defender o uso de materiais concretos e experiências reais para a construção do conhecimento.

Todas as oficinas foram importantes e bem recebidas pelos alunos, mas a pintura do muro e o projeto apresentado na FECIBA marcaram de forma especial o percurso dessa turma. Foram momentos em que os estudantes puderam perceber o quanto eram capazes de transformar espaços e se expressar por meio da matemática, compreendendo que ela vai além do papel e da sala de aula.

Além das oficinas e do projeto artístico, os estudantes também tiveram a oportunidade de aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) relacionadas à geometria plana.

A resolução dessas questões foi realizada de forma satisfatória, demonstrando que os conteúdos não apenas foram compreendidos, mas também passaram a fazer sentido dentro de uma lógica de uso prático e cotidiano da matemática.

Essa experiência evidenciou a força de práticas pedagógicas que se afastam de métodos rígidos e repetitivos, promovendo a integração entre diferentes áreas do conhecimento e dando espaço para que os estudantes participem ativamente do processo de aprendizagem.

A geometria, nesse cenário, deixou de ser um conteúdo distante e abstrato, tornando-se algo concreto, criativo e com significado para os alunos.

Considerações Finais

Pode-se aqui explicitar de forma qualitativa os resultados desta pesquisa em relação às contribuições das atividades matemáticas no Ensino Fundamental e Médio, em particular para o ensino de Geometria. Em geral, as turmas de estudantes mostraram uma maior percepção dos conceitos de ângulos e suas propriedades enquanto construía e faziam os experimentos com moldes de polígonos regulares para pavimentar a superfície da mesa de sala de aula.

Foi possível perceber que a contextualização dos conteúdos com situações do cotidiano dos estudantes contribuiu de maneira efetiva para que eles se sentissem parte do processo, tornando-se mais engajados nas atividades propostas.

Contudo, alguns entraves surgiram no decorrer das etapas da pesquisa. Estudantes inicialmente enfrentaram desafios no uso dos instrumentos geométricos, como régua, compasso e transferidor, devido à falta de prática. Essas dificuldades foram gradualmente sendo superadas no decorrer das etapas da pesquisa, destacando a importância de mais aulas práticas no ensino da matemática.

O tempo destinado ao desenvolvimento das atividades também foi limitado, o que restringiu o aprofundamento de determinadas questões que poderiam ter sido mais exploradas. Soma-se a isso o fato de que a participação irregular de alguns alunos e a falta de determinados recursos didáticos acabaram interferindo no andamento de algumas etapas da pesquisa.

Diante desses resultados e limitações, algumas recomendações podem ser feitas para futuras investigações. Sugere-se que novos estudos sejam aplicados em diferentes contextos escolares, com turmas maiores e mais tempo de execução, a fim de ampliar e consolidar os achados aqui apresentados.

Recomenda-se ainda que as propostas possam contemplar a utilização de recursos tecnológicos como o GeoGebra e a integração com outras áreas do conhecimento, tornando o processo mais dinâmico e interdisciplinar.

Outra possibilidade está na diversificação das formas de avaliação, permitindo analisar não apenas os efeitos imediatos, mas também os impactos a longo prazo na aprendizagem e no desenvolvimento crítico dos estudantes.

Os resultados dessa pesquisa refletem a realidade específica de cada estudante envolvido na pesquisa, podendo não ser generalizáveis para outros contextos escolares. Entretanto, o estudo contribui para o debate sobre a necessidade de inovar e aplicar novas metodologias no ensino da matemática em especial ao ensino de ângulos de forma mais lúdica e contextualizada.

Referências Bibliográficas

BISHOP, A. J. *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.

BORBA, A. J. C. Painéis e murais de mosaico em diversos locais de salvador. Trabalho não publicado. 1984.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Educação infantil e ensino fundamental*. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 18 ago. 2025.

CARYBÉ. *Iconografia dos deuses africanos no candomblé da Bahia*. Salvador: Editora Raízes Artes Gráficas; Fundação Cultural do Estado da Bahia; Instituto Nacional do Livro; Universidade Federal da Bahia, 1980.

COXETER, H. S. M. *Poliedros Regulares*. 2. ed. São Paulo: Editora Unesp, 1999. Tradução.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhäuser, 1981.

DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. V. *Desafio geométrico : módulo I*. São Paulo: Câmara Brasileira do Livro, 2010.

EISNER, E. W. *The Arts and the Creation of Mind*. New Haven: Yale University Press, 2002.

ESCHER, M. C. M. C. *Escher - Gravura e Desenhos*. São Paulo: Distribuidora Paisagem, 2004.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2005.

FRANKENSTEIN, M. Critical mathematics education: An introduction. Trabalho não publicado. 1983.

FREIRE, P. *Pedagogia do Oprimido*. Rio de Janeiro, RJ: Paz e Terra, 1970.

GIL, C. A. d. O. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GRUBE, E. J. *Islamic Pottery*. London: Philip Wilson Publishers, 1989.

GUMIERI, A. C. *Aplicação da técnica de ladrilhamento com polígonos regulares nos anos finais do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018.

- INHELDER, B. *Le diagnostic du raisonnement chez les débiles mentaux*. 1963. Obra sem editora identificada.
- JULIO, R. S. et al. Ladrilhamentos e educação matemática. *Boletim Online de Educação Matemática*, 2018.
- KEPLER, J. *A Harmonia do Mundo*. 1. ed. São Paulo: Edipro, 2007. Tradução.
- KOLB, D. A. *Experiential Learning: Experience as the Source of Learning and Development*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1984.
- LORENZATTO, S. A. Porque não ensinar geometria? *A Educação Matemática em Revista*, n. 4, p. 13, 1995.
- MELLO, L. I. P. Ladrilhamentos no plano: Uma atividade para o ensino médio. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/1275>. Acesso em: 25 jun. 2025.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. *Parâmetros Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC/SEF, 1997. v. 10.
- NOBRE, E. *A Bahia Renovada: O Mosaico de Eliezer Nobre*. 2024. <https://mosaicodobrasil.tripod.com/id176.html>. Revista Eletrônica. Acesso em: 28 out. 2024.
- OLIVEIRA, J. F. M. *Ladrilhamento*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — UNICAMP, Campinas, 2015, p. 28.
- PENROSE, R. *O Caminho para a Realidade: Um Guia Completo para as Leis do Universo*. São Paulo: Companhia das Letras, 2006.
- PIAGET, J. *A Formação do Símbolo na Criança: Imitação, Jogo e Sonho, Imagem e Representação*. 3. ed. São Paulo: Editora Zahar, 1971.
- SALLUM, E. M. *Ladrilhamento*. 15 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) — USP, SAO PAULO, 2016.
- SKOVSMOSE, O. *Educação Matemática Crítica: A Questão da Democracia*. 1. ed. Campinas: Papirus, 2001.
- Van Hiele, P. M. *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press, 1986.
- VYGOTSKY, L. S. *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge: Harvard University Press, 1978.

Apêndice A

Relato de Experiência Submetido



O desafio geométrico: A aprendizagem de polígonos através da experimentação com ladrilhos.

Marlon Silva do Nascimento¹, Romenique da Rocha Silva², Mirela Vanina de Mello³

Universidade Estadual de Santa Cruz e Centro Integrado de Ensino P. A. C. de Cerqueira, BA, Brasil

marlon.sil@hotmail.com¹, rrsilva@uesc.br², mvmello@uesc.br³

Resumo

A proposta deste trabalho é apresentar um relato de experiência sobre a aplicação da sequência didática com o tema Desenho geométrico. A aprendizagem de polígonos através da experimentação com ladrilhos. Este trabalho propõe uma abordagem inovadora na aprendizagem de geometria especialmente sobre polígonos, utilizando ladrilhamento com polígonos regulares como metodologia central. Esta abordagem foi desenvolvida como alternativa a tradicional aprendizagem baseada em fórmulas abstratas, frequentemente desvinculadas do significado prático para os alunos.

Palavras-Chave: ladrilhos; ângulos; oficinas; sequência didática.

Introdução

Ao longo de dez anos de experiência como professor de matemática no ensino fundamental, observei que a maioria dos estudantes enfrenta dificuldades em geometria, muitas vezes devido à falta de conexão entre a teoria matemática e sua aplicação prática. Este trabalho busca preencher essa lacuna ao integrar teoria e prática, permitindo que os alunos construam e manipulem fisicamente polígonos regulares para explorar conceitos geométricos, como polígonos, ângulos e suas propriedades. A escolha pelos ladrilhos como ferramenta de ensino e aprendizagem se deve à sua capacidade de facilitar o entendimento prático dos conceitos abstratos.

Objetivos

Esta pesquisa visa entender e reduzir as dificuldades dos alunos através das experimentações com moldes de polígonos regulares e promover aprendizagens significativas sobre os polígonos e outras áreas do conhecimento, através de reflexões geradas durante as oficinas.

Fundamentação Teórica

O alicerce teórico desta pesquisa baseia-se no construtivismo de Piaget [3], onde o aluno constrói seu conhecimento a partir da interação com o ambiente. Na aprendizagem experiencial de Kolb [1], que sugere que o aprendizado é um processo cíclico que envolve experiência concreta, observação, conceitualização e a experimentação. Autores como Mello [4], que trabalhou com possíveis ladrilhamentos no plano com polígonos regulares e o livro Desafio Geométrico de Dias e Sampaio [2] que apresenta problemas práticos e atividades que estimulam a aplicação e expansão do conhecimento geométrico.

Desenvolvimento e Metodologia

A sequência didática, desenvolvida conforme apresentado na Figura 1 foi aplicada em 2023 nas aulas da disciplina de Matemática em 5 oficinas de 90 minutos cada. Teve como público alvo alunos do 8º ano do Ensino Fundamental do Centro Integrado de Ensino Professor Altino Cosme de Cerqueira, onde o autor leciona desde de 2020.



Figura 1: Ilustração de Proposta de Sequência Didática. Fonte: elaborada pelo autor.

Resultados

A sequência didática com moldes de polígonos regulares resultou em uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos pelos alunos, que demonstraram maior facilidade em identificar e aplicar as propriedades dos polígonos. A atividade prática aumentou o engajamento e promoveu um aprendizado ativo, onde os estudantes puderam explorar, visualizar e consolidar o conhecimento.

Conclusões

Foram percebidos os seguintes pontos:

- Facilitação do reconhecimento e diferenciação de formas;
- Aprimoramento da compreensão dos conceitos e de propriedades geométricas;
- Aumento do interesse dos alunos nas aulas e integração com outras disciplinas.

Referências

- [1] ALLEN, DAVID KOLB. *Experiential Learning: Experience as the Source of Learning and Development*, 1984.
- [2] DIAS, C.C.; SAMPAIO, J.C.V. *Desafio Geométrico-Módulo I* Curitiba, MT: Central de texto.
- [3] WILLIAM, JEAN FRITZ PIAGET. *A Psicologia da inteligência*. Editora vozes limitada, 2013.
- [4] MELLO, L.L.P. *Ladrilhamento no plano: Uma atividade para o ensino médio*, 2021.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Vale mencionar também nosso agradecimento à CAPES e à UESC, pelo auxílio financeiro através do Convênio CAPES/PROFMAT 851927/2017.

Figura A.1: Pôster do 2º encontro do PROFMAT/UESC.
Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Apêndice B

Projeto Submetido ao FECIBA

ENCONTRO ESTUDANTIL DA REDE ESTADUAL DA EDUCAÇÃO 2025

13ª FECIBA
TEMA DE CÂMBIO: IMPRESSIONISMO SOCIAL E INOVAÇÃO NA BAHIA

DOPISO À LOUSA: ESTRATÉGIAS COM LADRILHAMENTO PARA RECOMPOSIÇÃO DA APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Gongogi-BA
Colégio Estadual José De Araújo Pereira

Pablo Afonso S. da Silva, Janaína dos S. Souza
Marlon Silva do Nascimento

NTE-22

INTRODUÇÃO

O projeto propõe o uso do ladrilhamento como estratégia pedagógica para recomposição da aprendizagem em matemática, inspirado no "INFLUENTEDDIA" que destaca a experimentação com ladrilhos como forma de investigar teoria e prática.

A proposta parte de atividades práticas com formas geométricas e ladrilhamentos para que os estudantes explorem conceitos geométricos, como ângulos, simetrias e áreas, de maneira lúdica e visual. A partir daí, as experiências são levadas à lousa, vinculando a prática ao conteúdo em sala de aula.

Assim como FREIRE (1970) defendem que a aprendizagem ocorre de forma mais eficaz quando os alunos conseguem relacionar as vivências extracurriculares às atividades curriculares.

A pesquisa propõe experiências inovadoras para o ensino da matemática, focadas na recomposição da aprendizagem, favorecendo a identificação entre a matemática e a arte, tornando a aprendizagem mais envolvente.

OBJETIVO

Este trabalho tem como principal objetivo investigar como atividades práticas com mosaicos e ladrilhamentos podem contribuir para a recomposição da aprendizagem de conceitos geométricos, em especial os ângulos, em turmas do 1º ano do Ensino Médio.

METODOLOGIA

A pesquisa, de natureza qualitativa, investiga como atividades com ladrilhos podem contribuir para a recomposição da aprendizagem em matemática. Realizada com alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Território Médio Rio das Contas, a produção de dados ocorre por meio de observação participante e sequência didática.

Além de andamento, a pesquisa busca compreender, por meio das oficinas, como práticas concretas favorecem a aprendizagem de forma mais significativa.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

1. Maior engajamento dos estudantes.
2. Compreensão mais significativa de conceitos geométricos.
3. Socialização e interação entre os alunos.

CONCLUSÃO / CONSIDERAÇÃO FINAL

Este projeto de pesquisa se mostrou extremamente acessível, eficiente e viável, pois atingiu poucos recursos, valoriza a socialização dos alunos e o ensino prático da matemática, transcendendo as 4 paredes da sala de aula.

REFERÊNCIAS

FREIRE, P. Pedagogia do oprimido. Rio de Janeiro, RJ: Paz e Terra, 1970.

NASCIMENTO, Marlon Silva do. A aprendizagem de ângulos através da implementação de jogos com ladrilhos: experimentando a prática de sala de aula. 2024. Artigo (Especialização em Matemática em Física) - Instituto Federal de Bahia, Salvador, 2024.

EDUCAÇÃO BAHIA

SEMINÁRIOS TERRITORIAIS

GOVERNO DO ESTADO BAHIA
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL
PÚBLICA

Figura B.1: Banner do 13º encontro estudantil - FECIBA.
Fonte: Elaborada pelos participantes da pesquisa (2025)

Apêndice C

Produto Educacional



Universidade Estadual de Santa Cruz

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



PROFMAT

Proposta Didática: Roteiro para oficinas

Componente Curricular: Matemática

Tema: O ladrilhamento como recurso para o ensino de ângulos: Experimentação e prática em sala de aula.

Professor: Marlon Silva do Nascimento

Professores orientadores: Fernanda Gonçalves de Paula e Cícero Alfredo da Silva Filho

Nível de ensino: Ensino Fundamental – 8º ano

Duração: 5 oficinas de 100 minutos cada.

Público-Alvo

Professores de Matemática do Ensino Fundamental II, especialmente aqueles que atuam no 8º ano, interessados em desenvolver práticas investigativas para o ensino de ângulos e polígonos por meio de atividades com ladrilhamentos.

A proposta pode ser adaptada para trabalhar com alunos do ensino médio em contexto de recomposição da aprendizagem, conforme a necessidade pedagógica.

Justificativa

Aprender Geometria não precisa ser algo abstrato ou limitado à memorização de fórmulas. Ao trabalhar com os ladrilhamentos, a Matemática ganha vida e se conecta ao cotidiano e à Arte, revelando-se como uma forma de expressão criativa e presente em diferentes aspectos do mundo que nos cerca.

Ao construir e analisar padrões geométricos, os alunos compreendem ângulos e polígonos de forma prática e envolvente, ao mesmo tempo em que exercitam a criatividade, o trabalho em grupo e a reflexão, tornando a aprendizagem mais envolvente e prazerosa.

Objetivos de aprendizagem

- Explorar o ladrilhamento como recurso didático para compreender os conceitos de ângulos e polígonos.
- Estimular a análise crítica e a reflexão por meio de atividades investigativas e colaborativas.
- Desenvolver a criatividade e a expressão artística em diálogo com a Matemática.
- Promover a interdisciplinaridade entre Matemática, Arte e Arquitetura.

Conteúdo programático

- Polígonos regulares e não regulares.
- Ângulos internos e externos de polígonos regulares;
- Condições para o ladrilhamento do plano.
- Cálculo de áreas e perímetros.

Orientações ao professor.

- **Tempo estimado:** 5 oficinas de 100 minutos (podendo ser ajustado).
- **Estratégia central:** atividades investigativas, com espaço para experimentação, discussão em grupo e sistematização coletiva.
- **Sugestão de organização:** dividir os alunos em grupos pequenos, garantindo que todos participem da construção dos moldes, da análise dos padrões e das produções artísticas.

- **Adaptação possível:** caso não seja possível trabalhar com materiais artísticos, as atividades podem ser realizadas apenas com papel, régua, compasso e lápis de cor.
- **Dica:** reserve momentos de retomada teórica para sistematizar os conceitos aprendidos a partir das práticas.

Etapas das oficinas

Primeira etapa: Introdução ao tema “Ladrilhamento”

Duração da oficina: 2 horas aula de 50 minuto.

Objetivo da aula:

- Compreender o conceito de ladrilhamento e reconhecer sua presença em diferentes contextos do cotidiano.
- Estimular a observação e a análise das formas geométricas presentes no ambiente escolar e urbano.
- Introduzir o estudo do ladrilhamento como recurso fundamental para a aprendizagem de ângulos.

Metodologia:

A aula será desenvolvida de forma dialogada, expositiva e prática com objetivo:

- **Levantamento de conhecimentos prévios:** o professor questionará os alunos se eles sabem o que é um ladrilhamento e se já identificaram esse tipo de padrão na natureza ou na arquitetura da escola.
- **Apresentação inicial do tema:** após o diagnóstico da turma sobre o tema o professor iniciará a aula com uma conversa orientada, utilizando imagens e exemplos práticos de ladrilhamentos observados em pisos, paredes e construções arquitetônicas e fará um breve relato histórico sobre o ladrilhamento.
- **Exploração audiovisual:** será apresentado um vídeo educativo do *Telecurso 2000*, que aborda o conceito de ladrilhamento e suas aplicações no cotidiano, disponível em: www.youtube.com/watch?v=NCeL6wFFHXkt..
- **Atividade de observação:** os estudantes explorarão o espaço escolar, registrando por meio de desenhos ou fotografias exemplos de ladrilhamentos encontrados no ambiente.

- **Socialização e discussão:** os grupos compartilharão suas observações e discutirão as formas geométricas e os padrões identificados, relacionando-os aos conceitos estudados durante a aula.

Recursos:

- Projetor multimídia e caixa de som;
- Computador com acesso à internet;
- Caderno de registro, lápis e borracha;
- Câmera fotográfica ou celular (caso disponível).

Segunda etapa: Construção dos moldes e investigação geométrica com um polígono

Duração da oficina: 2 horas aula de 50 minutos.

Objetivo da aula:

Explorar as propriedades dos polígonos regulares por meio da construção de moldes e da investigação dos ângulos e possibilidades de ladrilhamento do plano.

Metodologia:

A aula será desenvolvida de forma dialogada, expositiva e prática, priorizando a participação ativa dos estudantes na construção do conhecimento. O professor conduzirá as discussões e orientará as atividades, estimulando a observação, a análise e o registro dos resultados obtidos durante o processo investigativo.

As etapas a seguir descrevem as principais atividades que compõem o desenvolvimento da aula:

- Confecção dos moldes de polígonos regulares (triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octógono e dodecágono) utilizando papel cartão, régua, tesoura e compasso.
- Análise das propriedades dos polígonos construídos, destacando semelhanças e diferenças entre as figuras.
- Medição dos ângulos internos e externos com o auxílio do transferidor, registrando os valores obtidos.
- Investigação sobre quais polígonos regulares ladrilham o plano sem sobreposição ou lacunas, conforme Dias e Sampaio (2010).

- Cálculo dos ângulos internos e externos dos polígonos estudados, e preenchimento da Tabela C.1.

Tabela C.1: Propriedades de polígonos regulares.

Polígono	Medida do ângulo interno	Soma dos ângulos internos	Medida do ângulo externo	Soma dos ângulos externos
Triângulo				
Quadrado				
Pentágono				
Hexágono				
Octógono				
Dodecágono				

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Recursos utilizados:

- Papel emborrachado ou cartolina colorida para confecção e sobreposição dos polígonos;
- Tesoura, régua e compasso para o recorte e a construção das figuras com precisão;
- Transferidor para medição dos ângulos formados nas combinações dos polígonos;
- Lápis, borracha e cola para montagem das composições;
- Folhas de registro para anotações das observações e cálculos realizados;
- Quadro, projetor ou cartaz para exposição e discussão coletiva dos resultados.

Terceira etapa: Investigação com mais de um polígono

Duração da oficina: 2 horas aula de 50 minutos.

Objetivo da aula:

Compreender como diferentes polígonos regulares podem se combinar na formação de ladrilhamentos, explorando suas propriedades geométricas, áreas, perímetros e a importância dos ângulos para o encaixe perfeito das figuras.

Metodologia:

A aula será desenvolvida de forma dialogada, expositiva e investigativa, com momentos de análise coletiva e experimentação prática. O professor incentivará os estudantes a observar, comparar e testar diferentes combinações de polígonos, estimulando a construção de conclusões a partir da observação dos resultados.

A seguir, apresentam-se as etapas propostas para orientar o trabalho em sala de aula, de forma que os estudantes possam vivenciar o processo de investigação geométrica:

- Análise de combinações entre diferentes polígonos regulares que podem ladrilhar o plano, conforme Dias e Sampaio (2010).
- Cálculo das áreas e dos perímetros dos polígonos utilizados, favorecendo a compreensão das relações entre suas medidas.
- Discussão orientada sobre a importância dos ângulos formados em torno de um vértice para o ladrilhamento ser considerado bem comportado.

Recursos utilizados:

- Moldes de polígonos regulares (triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octógono e dodecágono) confeccionados na etapa anterior;
- Tesoura e fita adesiva para eventuais ajustes nos moldes durante a atividade;
- Transferidor para medição dos ângulos formados entre os polígonos;
- Papel kraft, cartolina ou cartaz para montagem das combinações de ladrilhamento;
- Lápis, régua e borracha para marcações e registros;
- Folhas de registro para anotações, cálculos e conclusões do grupo;
- Quadro ou projetor multimídia para socialização e discussão coletiva dos resultados.

Quarta etapa: Matemática e Arte

Duração da oficina: 2 horas aula de 50 minutos.

Objetivo da aula:

Compreender a relação entre matemática, arte e arquitetura por meio da observação de ladrilhamentos presentes em obras artísticas e construções, estimulando a criatividade dos estudantes na produção de composições visuais inspiradas em padrões geométricos.

Metodologia:

A aula será desenvolvida de forma dialogada, expositiva e prática, priorizando a observação e a expressão artística dos estudantes. O professor iniciará a atividade com a análise de exemplos de ladrilhamentos na arte e na arquitetura, promovendo um diálogo sobre a presença da geometria em diferentes manifestações culturais. Em seguida, os estudantes serão orientados a criar suas próprias produções artísticas baseadas em padrões de ladrilhamento, aplicando os conceitos geométricos explorados nas aulas anteriores.

Para tornar o processo mais significativo e envolvente, o professor pode seguir as etapas abaixo, que orientam o desenvolvimento da atividade de forma prática e colaborativa:

- Análise de exemplos de ladrilhamento presentes na arte e na arquitetura, identificando formas, simetrias e padrões geométricos.
- Produção de uma obra artística baseada em padrões de ladrilhamento, utilizando os moldes confeccionados nas etapas anteriores.
- Releitura de obras de artistas, como Bel Borba (1957), Eliezer Nobre (2017) e Escher (2004).
- Embelezamento de murais ou painéis da escola com mosaicos e composições inspiradas em ladrilhamentos.

Recursos utilizados:

Para a realização desta etapa, serão utilizados materiais que estimulem a criatividade e permitam a aplicação dos conceitos geométricos em produções artísticas como:

- Moldes de polígonos regulares confeccionados nas etapas anteriores;
- Papel cartão, cartolina, papel colorido ou papel kraft para criação das composições;
- Tesoura, régua, cola e fita adesiva para montagem das obras;
- Lápis de cor, canetinhas, tintas e pincéis para colorir e personalizar as produções;
- Imagens e reproduções de obras artísticas que utilizem padrões de ladrilhamento e elementos geométricos como fonte de inspiração para a atividade;
- Quadro, projetor ou cartaz para exposição das produções e socialização dos resultados.

Quinta etapa: Resolução de atividades sobre ângulos

Duração da oficina: 2 horas aula de 50 minutos cada.

Objetivo da oficina:

Compreender e aplicar conceitos relacionados aos ângulos por meio da observação, análise e resolução de problemas geométricos, utilizando figuras e situações concretas que estimulem o raciocínio e a investigação matemática.

Metodologia:

Desenvolver a oficina de forma prática e investigativa, promovendo a participação ativa dos estudantes na resolução de desafios geométricos. Iniciar com uma breve retomada dos conceitos de ângulo, vértice e medida angular, relacionando-os a elementos presentes nas figuras apresentadas. Em seguida, propor aos alunos a observação das imagens e o levantamento de hipóteses sobre as medidas e relações entre os ângulos, incentivando o trabalho em pequenos grupos e a troca de ideias. Durante o processo, o professor deve atuar como mediador, orientando as discussões e incentivando os estudantes a justificarem suas respostas e estratégias. Concluir com a socialização das soluções encontradas, valorizando diferentes formas de raciocínio e consolidando a compreensão dos conceitos explorados.

A seguir, são apresentadas algumas das atividades que compõem esta oficina, nas quais os alunos aplicarão os conhecimentos sobre ângulos em contextos variados, analisando figuras, identificando relações e construindo argumentos geométricos para resolver os problemas propostos.

Atividade 1

1) Observe a figura C.1 e responda:



Figura C.1: Imagem do exercício 1.

Fonte: O próprio autor (2025).

- Quanto mede o ângulo ao redor de cada vértice?
- Qual o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo?
- Quanto mede o ângulo interno de um hexágono regular?

- d) Quanto mede a soma dos ângulos internos de um hexágono regular?
- e) Quanto mede o ângulo a da figura?
- f) Qual a área e o perímetro do hexágono regular da figura, sabendo que seu lado mede 4 cm?

Atividade 2

2) Observe a figura C.2 e responda:

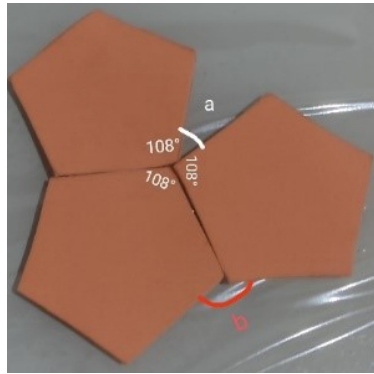


Figura C.2: Imagem do exercício 2.
Fonte: O próprio autor (2025).

- a) Qual o valor do ângulo interno do pentágono?
- b) Quanto mede a soma dos ângulos internos do pentágono?
- c) Quanto mede o ângulo a ?
- d) Quanto mede o ângulo b ?
- e) Qual a área do pentágono da figura sabendo que seu lado mede 4 cm?

Atividade 3

3) Observe a figura C.3 e responda:



Figura C.3: Imagem do exercício 3.

Fonte: O próprio autor (2025).

- Qual o valor do ângulo a ?
- Qual o nome dos polígonos da figura?
- Qual o valor do ângulo externo do hexágono?
- Qual o nome dos polígonos da figura acima, que apresenta respectivamente ângulo agudo, reto e obtuso.?
- Qual a área de cada um dos polígonos regulares da figura sabendo que seus lados medem 4 cm?

Resultados esperados

- Favorecer uma aprendizagem significativa dos conceitos de ângulos e polígonos.
- Estimular a capacidade de observação, análise e resolução de problemas.
- Valorizar a Matemática em diálogo com a Arte e a Cultura.
- Desenvolver a criatividade, a cooperação e a autonomia dos estudantes.

Estratégias de Avaliação

A avaliação será processual, acompanhando todas as etapas do trabalho. Serão considerados:

- Participação e engajamento dos estudantes nas atividades.

- Clareza e consistência na aplicação dos conceitos matemáticos.
- Capacidade de análise, reflexão crítica e argumentação.
- Criatividade e organização nas produções dos mosaicos e ladrilhamentos artísticas.

Sugestões de adaptações.

- Para turmas mais avançadas, o ladrilhamento pode ser explorado em ligação com transformações geométricas (simetrias, translações e rotações).
- Para séries iniciais a proposta pode ser trabalhada de forma lúdica, usando recortes coloridos e colagens de formas simples. Assim, os alunos exploram os padrões de maneira criativa e divertida, dando os primeiros passos no contato com a Geometria.
- Para alunos do Ensino Médio, a proposta pode ser ampliada com atividades que dialoguem com questões do ENEM, relacionando ladrilhamentos ao cálculo de ângulos, áreas, simetrias dentre outros.
- Alunos com deficiência a proposta pode ser adaptada com jogos e quebra-cabeças geométricos em EVA ou madeira, que facilitará a manipulação das formas e tornará o aprendizado mais lúdico e inclusivo, permitindo que todos participem de maneira ativa e colaborativa.
- Caso a escola disponha de laboratório de informática, a proposta pode ser desenvolvida também com o uso do software GeoGebra, possibilitando aos estudantes explorar dinamicamente as propriedades dos ângulos, realizar medições precisas e visualizar de forma interativa as relações entre as figuras geométricas.

Referências

- BORBA, Alberto José Costa. *Painéis e Murais de Mosaico em Diversos Locais de Salvador*. 1984.
- DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. V. *Desafio geométrico: módulo I*. São Paulo: Câmara Brasileira do Livro, 2010.
- ESCHER, Maurits Cornelius. *M. C. Escher – Gravura e Desenhos*. São Paulo: Distribuidora Paisagem, 2004.
- NOBRE, Eliezer. *A Bahia Renovada: O Mosaico de Eliezer Nobre*. Revista Eletrônica. Disponível em: <https://mosaicodobrasil.tripod.com/id176.html>. Acesso em: 28 out. 2024.