

Universidade Federal de São Paulo
Instituto de Ciência e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

RECURSO EDUCACIONAL

Sequências didáticas com o jogo do 15 e os sólidos platônicos

Recurso educacional vinculado à dissertação

Teoria de grupos e permutações: fundamentos e aplicações didáticas no jogo do Quinze e nos sólidos platônicos

Luis Felipe Fernandes de Pádua Leite

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Fernanda de Andrade Pereira

São José dos Campos - SP
2026

Sumário

1	Apresentação	1
2	Público, objetivos e princípios de trabalho	1
3	Sequência didática: o jogo do 15	3
3.1	Panorama conceitual para o professor	3
3.2	Habilidades e objetivos de aprendizagem	3
3.3	Antes de começar	4
3.4	Roteiro da Aula 1	4
3.5	Roteiro da Aula 2	5
3.6	Avaliação formativa e acompanhamento	6
3.7	Anexo A: folha de atividade do estudante	6
3.8	Para o professor: leitura conceitual do jogo	7
3.9	Anexo B: ficha ampliada de registro do estudante	7
3.10	Anexo C: ficha de observação do professor	8
4	Sequência didática: os sólidos platônicos	10
4.1	Panorama conceitual para o professor	10
4.2	Habilidades e objetivos de aprendizagem	10
4.3	Escolha dos materiais	11
4.4	Roteiro da Aula 1	11
4.5	Roteiro da Aula 2	12
4.6	Avaliação formativa e acompanhamento	12
4.7	Anexo D: folha de atividade do estudante	13
4.8	Um panorama rápido dos cinco sólidos	13
4.9	Anexo E: ficha de registro do estudante	14
4.10	Anexo F: ficha de observação do professor	15
5	Possibilidades de continuidade	16
6	Sugestões de adaptação	17
7	Considerações finais	18

8	Referências	19
9	Materiais complementares finais	20
9.1	Anexo G: roteiro breve de revisão pós-aula	20
9.2	Anexo H: diário breve do professor	20

Leitura sugerida

Quem pretende aplicar o material diretamente em sala pode começar pelas seções de roteiro e pelos anexos. Já quem deseja compreender melhor a lógica das propostas pode ler, antes disso, os panoramas conceituais destinados ao professor.

1 Apresentação

Este recurso educacional foi pensado para funcionar como um material de apoio ao professor que deseja aproximar ideias de álgebra e geometria de situações concretas, investigativas e acessíveis. Em vez de começar por definições formais, o percurso parte de duas experiências muito ricas para a sala de aula: o jogo do 15 e a exploração das simetrias dos sólidos platônicos.

A proposta reúne, em linguagem mais direta e com foco pedagógico, as sequências didáticas desenvolvidas na dissertação que deu origem a este produto. Aqui, o objetivo não é reproduzir o texto acadêmico, mas reorganizá-lo em um formato de uso mais prático, com orientações de aplicação, sugestões de mediação, folhas de atividade e indicações de acompanhamento da aprendizagem.

O material foi organizado para os anos finais do Ensino Fundamental, mas pode ser ajustado para outros contextos. Em qualquer etapa, a intenção central é a mesma: criar situações em que os estudantes observem regularidades, registrem procedimentos, comparem estratégias, expliquem escolhas e percebam que a matemática também se constrói quando se investiga, testa, discute e revisa o próprio raciocínio.

Como este material está organizado

A primeira parte apresenta uma sequência didática centrada no jogo do 15. Nela, o foco recai sobre movimentos, transformações, composição de ações e a percepção de que nem toda configuração pode ser resolvida.

A segunda parte apresenta uma sequência didática voltada aos sólidos platônicos. Nesse bloco, a ênfase está na observação de rotações, na descrição de simetrias e na passagem do movimento concreto para registros organizados.

Em ambas as sequências, o professor encontrará objetivos, habilidades mobilizadas, sugestões de organização, roteiros de aula, estratégias de mediação, propostas de avaliação formativa e anexos prontos para adaptação ou impressão.

2 Público, objetivos e princípios de trabalho

Aspecto	Descrição
Público sugerido	Estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, com adaptações possíveis para turmas de Ensino Médio ou grupos de aprofundamento.
Tempo de aplicação	Cada sequência foi planejada para duas aulas, mas o professor pode expandir o trabalho em função do ritmo da turma e da complexidade dos registros.
Foco conceitual	Transformações, composição de movimentos, invariantes, simetria, organização de procedimentos, argumentação e uso de linguagem matemática em contexto.
Princípio metodológico	Aprender investigando. O estudante manipula, observa, registra, compara e explica. O professor media, seleciona tarefas e transforma a exploração em sistematização conceitual.

Ao longo de todo o recurso, optou-se por um vocabulário progressivo. A linguagem formal pode aparecer, mas não precisa ser o ponto de partida. Primeiro, interessa que o aluno compreenda o que está acontecendo, consiga descrever um movimento, perceba padrões e construa justificativas. Só depois disso a notação passa a fazer sentido como síntese e não como obstáculo.

3 Sequência didática: o jogo do 15

3.1 Panorama conceitual para o professor

O jogo do 15 é um quebra-cabeça composto por quinze peças numeradas e uma casa vazia. Em cada jogada, uma peça adjacente desliza para o espaço livre. À primeira vista, trata-se apenas de um passatempo. No entanto, quando o professor organiza a atividade como investigação, o jogo passa a oferecer um campo muito fértil para discutir transformação de posições, planejamento de ações, comparação de estratégias e impossibilidades matemáticas.

Do ponto de vista conceitual, cada jogada modifica a configuração do tabuleiro e pode ser pensada como uma transformação. Mais adiante, essa transformação pode ser aproximada da ideia de permutação. Para a sala de aula, contudo, não é preciso começar por esse nome. O mais importante é levar o estudante a perceber que uma jogada altera algumas posições, preserva outras e produz um efeito que pode ser descrito, acompanhado e comparado.

Uma contribuição especialmente interessante do jogo do 15 é a noção de invariante. Ao tentar trocar apenas duas peças, por exemplo, os estudantes logo se deparam com um limite do próprio jogo. Nem toda posição é alcançável. Essa constatação tem enorme valor didático porque desloca a pergunta do “como faço?” para o “por que isso não acontece?”. É nesse ponto que o jogo deixa de ser só tentativa e erro e passa a se tornar reflexão matemática.

Ideia central desta sequência

O jogo será usado como contexto para que os estudantes observem transformações, descrevam movimentos, componham ações e argumentem sobre o que muda e o que permanece durante as jogadas. A ênfase não está em terminar o quebra-cabeça o mais rápido possível, mas em construir significado matemático a partir dele.

3.2 Habilidades e objetivos de aprendizagem

Habilidades e metas	Descrição
BNCC em diálogo	EF06MA23, EF08MA10, EF08MA11 e EF08MA18, com ênfase na organização de procedimentos, no reconhecimento de regularidades e na análise de transformações.
Meta 1	Resolver configurações selecionadas do jogo do 15, explicando caminhos escolhidos e decisões tomadas.
Meta 2	Descrever, em linguagem acessível, o que cada movimento faz com a posição das peças.

Habilidades e metas	Descrição
Meta 3	Registrar uma mesma transformação de mais de um modo, percebendo que diferentes registros ajudam a compreender o mesmo fenômeno.
Meta 4	Compor sequências de movimentos e discutir o efeito resultante.
Meta 5	Perceber que há características da posição que não mudam livremente e usar essa observação para argumentar sobre impossibilidades.

3.3 Antes de começar

- Prepare pelo menos duas configurações iniciais: uma simples, para treino de registro, e outra moderada, para discussão de estratégias e impossibilidades.
- Defina se a turma trabalhará com tabuleiros físicos, tabuleiros impressos ou projeção coletiva. O ideal é que cada dupla ou trio possa manipular sua própria versão.
- Combine, desde o início, o que será considerado um bom registro: clareza, coerência e justificativa.
- Distribua papéis dentro do grupo. Uma organização simples costuma funcionar bem: quem movimenta, quem observa e quem registra.

3.4 Roteiro da Aula 1

Entrada no problema

Apresente uma configuração inicial e faça uma pergunta que convide à investigação. Algo como: “Essa posição parece resolvível? Como poderíamos descobrir isso sem depender só da sorte?”. Recolha hipóteses rápidas e registre no quadro ideias espontâneas dos estudantes. É importante que a turma perceba, logo no começo, que o objetivo não será apenas jogar, mas pensar sobre o jogo.

Exploração em grupos

1. Cada grupo recebe um tabuleiro e uma folha de registro.
2. Os estudantes tentam resolver a posição proposta e vão anotando o que fizeram.
3. O professor circula e faz perguntas de sondagem: O que mudou nesta jogada? O que ficou igual? Há um caminho mais curto? Em que momento vocês perceberam um padrão?

4. Quando a posição for muito longa, o professor autoriza registros por marcos: início, momentos intermediários relevantes e estado final.

Primeira sistematização

Ao final da exploração, conduza uma conversa breve para transformar observações dispersas em linguagem compartilhada. Nomeie termos como posição, movimento, transformação e composição. Não é necessário formalizar demais. O importante é consolidar a ideia de que cada jogada altera a configuração e que uma sequência de jogadas pode ser lida como uma transformação maior.

Sugestão de fala do professor

“Nem sempre precisamos anotar todas as jogadas para aprender com o problema. Em alguns casos, vale mais registrar os momentos em que algo importante aconteceu: quando um bloco entrou na ordem correta, quando uma escolha atrapalhou o que já estava pronto ou quando percebemos que uma tentativa não levaria ao resultado esperado.”

3.5 Roteiro da Aula 2

Retomada e consolidação

Retome rapidamente os termos construídos na aula anterior e escolha uma pequena sequência já conhecida pela turma. Peça que os estudantes descrevam essa sequência de duas formas: em uma lista organizada do que aconteceu e em uma descrição mais global do percurso das peças. Essa passagem entre dois modos de registro ajuda a preparar, de modo natural, a ideia de representação de transformações.

Composição de transformações

Selecione duas sequências curtas e proponha a pergunta: “O que acontece quando fazemos a segunda depois da primeira?”. A turma precisa perceber que o efeito combinado nem sempre é evidente sem acompanhamento cuidadoso. Esse é o momento de insistir na importância da ordem e de mostrar que o resultado final depende do encadeamento das ações.

Discussão sobre impossibilidades

Volte à tentativa de trocar apenas duas peças. Peça que os grupos relatem o que observaram. Evite entregar a resposta pronta de imediato. Conduza a discussão para que os alunos formulem, com suas palavras, a ideia de que existe algo na estrutura do jogo que não muda livremente. Essa é a porta de entrada para a noção de invariante.

- Pergunte o que a turma já conseguiu e o que continua não aparecendo nas tentativas.
- Valorize justificativas em linguagem comum antes de qualquer termo técnico.

- Mostre que argumentar sobre impossibilidade também é fazer matemática.

3.6 Avaliação formativa e acompanhamento

O que observar	Indícios de aprendizagem	Intervenções possíveis
Descrição do movimento	O estudante consegue explicar o que uma jogada faz com a posição.	Pedir que ele narre a jogada em voz alta antes de registrá-la.
Planejamento	O grupo começa a antecipar consequências antes de mover a peça.	Questionar: o que vocês esperam que aconteça depois desta escolha?
Composição	A turma percebe o efeito de duas transformações em sequência.	Comparar duas ordens diferentes de execução.
Argumentação	O estudante usa observações do próprio jogo para justificar por que algo funciona ou não funciona.	Solicitar explicações completas e não apenas respostas curtas.

3.7 Anexo A: folha de atividade do estudante

Orientação de uso

Esta folha pode ser impressa tal como está ou adaptada. Em turmas com menor fluência de registro, recomenda-se preencher o primeiro item coletivamente antes do trabalho em grupos.

Parte A. Exploração inicial

1. Descreva, em palavras, a posição inicial do seu tabuleiro.
2. Escreva qual peça o grupo pretende mover primeiro e por quê.
3. Registre duas ou três jogadas e explique o que mudou a cada uma delas.
4. Anote um momento em que o grupo percebeu que estava mais perto da solução.

Parte B. Composição de movimentos

1. Escolham duas pequenas sequências já realizadas pelo grupo.
2. Descrevam separadamente o que cada sequência faz.
3. Agora expliquem o que acontece quando a segunda é feita depois da primeira.
4. Digam, em palavras, por que o resultado combinado não é apenas uma repetição simples do que aconteceu antes.

Parte C. O que não muda tão facilmente

1. Tentem realizar uma troca de apenas duas peças e registrem o que ocorreu.
2. Escrevam uma hipótese para explicar por que essa tentativa não apareceu do jeito esperado.
3. Comparando diferentes grupos, que regularidade vocês observaram?

3.8 Para o professor: leitura conceitual do jogo

Em uma leitura mais próxima da matemática envolvida, o jogo do 15 pode ser entendido como um sistema de transformações de posições. Cada estado do tabuleiro pode ser descrito por um arranjo das quinze peças e do vazio. Quando uma peça desliza para a casa livre, esse arranjo é alterado. O ponto importante é que tais alterações não acontecem de qualquer maneira. Há uma estrutura por trás das jogadas.

Uma maneira acessível de explicar isso ao professor é pensar que cada movimento troca a posição do vazio com a de uma peça vizinha. A repetição desses movimentos gera uma sequência de transformações. Algumas posições são alcançáveis a partir da configuração inicial e outras não. Essa distinção não depende da habilidade do jogador, mas da estrutura do próprio problema.

A dissertação que deu origem a este recurso mostra que a análise da paridade e da posição do vazio permite distinguir configurações equivalentes de configurações impossíveis de serem conectadas por movimentos válidos. Para a sala de aula, não é necessário apresentar toda a prova. Basta compreender a ideia central: o jogo possui uma lógica interna que limita o que pode ou não pode ser feito. Essa consciência fortalece a mediação do professor e dá consistência à discussão sobre impossibilidades.

Em linguagem bem simples

Metade das configurações possíveis do jogo do 15 é resolúvel e metade não é. Quando os estudantes percebem isso por meio de tentativas controladas e boas perguntas, eles entram em contato com uma ideia matemática poderosa: nem tudo o que parece possível à primeira vista realmente pode acontecer dentro das regras de um sistema.

3.9 Anexo B: ficha ampliada de registro do estudante

Momento	O que fizemos	O que observamos
Início		
Passo 1		
Passo 2		
Passo 3		
Momento importante		
Situação final		

Use esta ficha quando a turma precisar de mais apoio para organizar as próprias tentativas. Ela funciona especialmente bem com grupos que se perdem ao registrar jogadas longas.

3.10 Anexo C: ficha de observação do professor

Indicador	Sim	Ainda não	Observações
Explica o efeito de uma jogada			
Compara caminhos diferentes			
Registra com clareza			
Percebe um padrão nas tentativas			
Argumenta sobre impossibilidades			

Uso sugerido

Esta ficha não precisa ser preenchida integralmente em uma única aula. Ela pode funcionar como um registro breve do professor ao longo da aplicação da sequência, servindo inclusive para replanejamento.

4 Sequência didática: os sólidos platônicos

4.1 Panorama conceitual para o professor

Os sólidos platônicos são cinco poliedros convexos altamente simétricos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Todos eles têm faces formadas por polígonos regulares congruentes e apresentam a mesma quantidade de faces encontrando-se em cada vértice. Esse alto grau de regularidade faz deles um excelente ponto de partida para discutir simetria, rotação, preservação de forma e organização de movimentos.

Para a educação básica, não é necessário apresentar formalmente a teoria de grupos. Ainda assim, quando o professor domina a ideia de grupo de simetrias, ele ganha um olhar mais preciso sobre o que está propondo aos estudantes. Em vez de tratar rotações como gestos soltos, passa a vê-las como parte de um conjunto estruturado de movimentos que podem ser combinados, desfeitos e comparados.

Nesta sequência, a proposta é partir do manuseio concreto do sólido. Ao numerar faces ou vértices e acompanhar para onde cada um vai depois de uma rotação, os estudantes começam a registrar movimentos de forma organizada. Aos poucos, percebem que a aparência global do sólido é preservada, embora seus elementos troquem de lugar. É justamente essa tensão entre permanência e mudança que torna a atividade matematicamente potente.

Ideia central desta sequência

Explorar rotações de sólidos platônicos para que os estudantes observem simetrias, registrem deslocamentos, comparem composições de movimentos e construam um vocabulário inicial sobre transformação, identidade, inverso e ordem de execução.

4.2 Habilidades e objetivos de aprendizagem

Habilidades e metas	Descrição
BNCC em diálogo	EF06MA17, EF06MA18, EF06MA23, EF07MA21 e EF08MA18, com ênfase na descrição de propriedades, na observação de transformações e na organização de procedimentos.
Meta 1	Identificar faces, arestas e vértices e manter uma numeração consistente para registrar movimentos.
Meta 2	Reconhecer rotações como movimentos que preservam o sólido, mas reorganizam seus elementos.
Meta 3	Registrar o efeito de uma rotação em linguagem comum e em uma representação mais organizada.

Habilidades e metas	Descrição
Meta 4	Compor rotações e discutir por que a ordem influencia o efeito final.
Meta 5	Relacionar movimento concreto e linguagem matemática de forma progressiva e compreensível.

4.3 Escolha dos materiais

- Comece, sempre que possível, pelo cubo ou pelo tetraedro. Esses sólidos oferecem registros mais controláveis e facilitam a percepção das rotações.
- Use modelos físicos resistentes e, se possível, com faces destacáveis ou passíveis de marcação temporária.
- Etiquetas removíveis, canetas de quadro branco e adesivos coloridos ajudam a manter os registros claros.
- Em turmas com necessidades específicas, prefira sólidos em alto contraste e com marcas táteis.

4.4 Roteiro da Aula 1

Lançamento do problema

Mostre um cubo ou um tetraedro à turma e pergunte: “Quais movimentos deixam o sólido com a mesma aparência?”. A pergunta parece simples, mas ela já desloca o foco da observação passiva para a análise de transformações. Recolha as primeiras respostas e, em seguida, proponha um segundo desafio: “Como podemos registrar esse movimento para que outra pessoa consiga repeti-lo?”.

Exploração orientada

1. Cada grupo escolhe um sólido, fixa uma numeração nas faces ou nos vértices e registra essa convenção.
2. Os estudantes realizam rotações curtas e descrevem, em palavras, o que aconteceu com os rótulos.
3. O professor orienta os grupos a evitar mudanças de convenção no meio da tarefa.
4. Ao final de cada experimento, os estudantes anotam o que permaneceu no lugar e o que trocou de posição.

Primeira sistematização

Reúna a turma para comparar registros. Mostre que a mesma rotação pode ser descrita de forma mais extensa, em linguagem cotidiana, ou de forma mais enxuta, por meio de um esquema organizado. Não se trata de impor uma escrita, mas de levar a turma a perceber que registrar bem um movimento ajuda a pensar melhor sobre ele.

Perguntas que ajudam nesta etapa

O que permaneceu no lugar nesta rotação? O que mudou? Como você descreveria este movimento para alguém que não está vendo o sólido? Há um gesto que desfaz exatamente o que acabou de ser feito?

4.5 Roteiro da Aula 2

Retomada e aprofundamento

Retome a numeração escolhida e reconstrua, coletivamente, uma rotação observada na aula anterior. Em seguida, peça que os grupos identifiquem o movimento que desfaz essa rotação. A ideia de inverso pode aparecer de maneira bastante natural quando o estudante percebe que alguns movimentos levam de volta ao estado inicial.

Composição de rotações

Depois, escolha duas rotações curtas e investigue o que acontece quando uma é feita depois da outra. Aqui, o professor precisa insistir na ordem. Uma boa forma de encaminhar a discussão é pedir que a turma acompanhe, rótulo por rótulo, o efeito combinado. Aos poucos, os estudantes entendem que compor movimentos não significa apenas somar ações, mas acompanhar um encadeamento.

Socialização e síntese

Na socialização final, cada grupo apresenta um exemplo de rotação simples, um exemplo de composição e um exemplo de movimento inverso. O quadro pode ser organizado em três colunas: descrição em palavras, registro organizado dos rótulos e observações sobre o efeito final. Essa síntese ajuda a turma a ver, de forma comparada, aquilo que cada registro destaca melhor.

- Quando a complexidade for alta, reduza a exigência e peça apenas o registro das faces ou vértices afetados.
- Se a turma ainda estiver insegura, volte ao cubo antes de migrar para outros sólidos.
- Valorize mais a consistência do raciocínio do que a sofisticação da notação.

4.6 Avaliação formativa e acompanhamento

O que observar	Indícios de aprendizagem	Intervenções possíveis
Numeração e registro	O estudante mantém a convenção escolhida e consegue acompanhar o deslocamento dos rótulos.	Reforçar a necessidade de estabilidade na numeração.
Descrição da rotação	A turma explica o movimento sem depender apenas do gesto.	Pedir descrição oral antes do registro escrito.
Composição	Os alunos conseguem prever ou reconstruir o efeito final de duas rotações em sequência.	Trabalhar com exemplos mais curtos e bem controlados.
Inverso	O estudante identifica um movimento que desfaz outro e verifica o retorno ao estado inicial.	Solicitar experimentação concreta seguida de justificativa.

4.7 Anexo D: folha de atividade do estudante

Parte A. Conhecendo o sólido

1. Numere as faces ou os vértices do sólido escolhido e desenhe rapidamente essa convenção.
2. Realize uma rotação simples e descreva, em palavras, o que aconteceu.
3. Registre quais rótulos permaneceram no lugar e quais trocaram de posição.

Parte B. Registrando a transformação

1. Escreva uma lista organizada mostrando para onde cada rótulo foi.
2. Reescreva a mesma rotação de forma mais compacta, indicando o percurso dos rótulos que giraram entre si.
3. Compare as duas formas de registro: qual delas foi mais fácil de produzir? Qual delas ajuda mais a perceber o efeito total?

Parte C. Inverso e composição

1. Encontre um movimento que desfça a rotação escolhida.
2. Explique como vocês verificaram que o sólido voltou ao estado inicial.
3. Escolham duas rotações curtas e descrevam o efeito de fazê-las em sequência.

4.8 Um panorama rápido dos cinco sólidos

Sólido	Faces	Vértices	Observação didática
Tetraedro	4	4	Excelente para começar. As rotações são fáceis de visualizar e o registro tende a ser curto.
Cubo	6	8	Muito indicado para a primeira aplicação. As faces são familiares e favorecem a numeração.
Octaedro	8	6	Bom para continuidade, quando a turma já domina melhor a convenção de registro.
Dodecaedro	12	20	Mais complexo. Recomendado para ampliação ou aprofundamento.
Icosaedro	20	12	Visualmente rico, mas exige mais controle de observação.

Para o professor, esse quadro ajuda a planejar a progressão da sequência. Nem todo sólido precisa aparecer na primeira aplicação. Em geral, vale mais trabalhar bem com um ou dois modelos do que apresentar muitos exemplos sem tempo para investigar os registros.

Nota para o professor

Na dissertação de origem, os grupos de rotações do tetraedro, do cubo e do dodecaedro são discutidos de forma mais detalhada. No recurso educacional, esse conteúdo aparece apenas como apoio de bastidor para a mediação docente, não como exigência de formalização para os estudantes.

4.9 Anexo E: ficha de registro do estudante

Rotação	Descrição	Registro dos rótulos
Rotação 1		
Rotação 2		
Rotação 3		

Rotação	Descrição	Registro dos rótulos
Composição final		

Esta ficha pode ser usada quando a turma já consegue acompanhar melhor o deslocamento de faces ou vértices e precisa de um suporte visual mais estável para comparar diferentes rotações.

4.10 Anexo F: ficha de observação do professor

Indicador	Sim	Ainda não	Observações
Mantém a numeração combinada			
Descreve a rotação com clareza			
Identifica o que ficou fixo			
Reconhece um inverso			
Compara duas composições			

Uso sugerido

Esta ficha pode ser preenchida de maneira parcial, com foco em dois ou três indicadores por aula. O objetivo não é burocratizar a observação, mas ajudar o professor a enxergar com mais nitidez o avanço da turma.

5 Possibilidades de continuidade

Depois da aplicação inicial, o professor pode expandir o trabalho em diversas direções. No caso do jogo do 15, é possível propor novas posições, comparar estratégias de diferentes grupos, investigar caminhos mais curtos e introduzir gradualmente a ideia de registro mais formal das transformações. Outra possibilidade é relacionar o jogo com outros quebra-cabeças baseados em movimentos restritos.

No caso dos sólidos platônicos, a continuidade pode incluir comparações entre diferentes sólidos, discussão sobre eixos de rotação, produção de modelos físicos pelos próprios estudantes e aproximações com temas de arte, arquitetura e design. Em turmas com mais maturidade conceitual, o professor pode explorar a ideia de que os movimentos do sólido formam um conjunto organizado, no qual alguns movimentos desfazem outros e certas composições produzem resultados recorrentes.

Em ambos os casos, a continuidade mais importante é a da postura intelectual que o material pretende fortalecer: observar, registrar, explicar, justificar e revisar. Quando essa postura se consolida, o recurso educacional ultrapassa o tema específico e passa a produzir efeitos positivos sobre a cultura matemática da turma.

6 Sugestões de adaptação

Nem toda turma responde do mesmo modo ao mesmo material. Por isso, este recurso foi concebido como uma base flexível. O professor pode ampliar ou reduzir o tempo de exploração, simplificar os registros, trabalhar mais oralmente antes da escrita ou concentrar a atenção em apenas um dos objetivos previstos para cada sequência.

Em classes com maior dificuldade de organização escrita, vale começar pela descrição oral e registrar coletivamente no quadro uma primeira resposta-modelo. Em turmas mais avançadas, o professor pode aproximar mais explicitamente os registros da linguagem de permutações, sempre garantindo que a forma não atropele a compreensão.

Também é possível trabalhar as duas sequências em momentos distintos do ano letivo. O jogo do 15 dialoga muito bem com situações em que a turma precisa fortalecer planejamento, comparação de procedimentos e percepção de regularidades. Já os sólidos platônicos podem ser explorados em períodos em que a geometria espacial e o estudo das simetrias estejam mais presentes no currículo.

Adaptações que costumam funcionar bem

No jogo do 15: usar registros por marcos em vez de sequência completa, reduzir a quantidade de peças fora do lugar e promover sínteses orais frequentes.

Nos sólidos platônicos: começar apenas pelo cubo, registrar só as faces afetadas e trabalhar com menos rotações por aula.

Em ambos os casos: usar duplas estáveis, rodízio de papéis, materiais em alto contraste e tempo específico para revisão dos registros antes da socialização.

7 Considerações finais

As duas sequências apresentadas neste recurso partem de uma mesma convicção: conceitos matemáticos mais abstratos podem ganhar vida quando o estudante encontra neles uma experiência concreta, inteligível e discutível. O jogo do 15 e os sólidos platônicos cumprem exatamente esse papel. Em um caso, a turma acompanha movimentos de peças em um tabuleiro; no outro, observa rotações que preservam um sólido. Em ambos, o que se constrói é uma forma de pensar matematicamente sobre transformação, ordem, regularidade e justificativa.

Ao organizar essas experiências em forma de produto educacional, procurou-se manter o rigor conceitual da dissertação de origem, mas em uma linguagem mais próxima da prática docente. O resultado é um material que pode ser usado, adaptado, recortado e retomado conforme a necessidade da escola e do professor. Mais do que oferecer respostas prontas, ele busca abrir espaço para boas perguntas, bons registros e boas conversas matemáticas.

8 Referências

- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.
- CRUZ, Guilherme da Costa. Girando sólidos platônicos ou como visualizar grupos finitos. Professor de Matemática Online, v. 11, n. 1, 2023.
- DUTENHEFNER, Francisco. O jogo dos 15. Professor de Matemática Online, v. 12, n. 3, 2024.
- LIBÂNEO, José Carlos. Didática. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

9 Materiais complementares finais

9.1 Anexo G: roteiro breve de revisão pós-aula

Depois de aplicar uma das sequências, o professor pode reservar um momento curto para revisar o processo com a turma. Esse fechamento ajuda a consolidar aprendizados e oferece pistas importantes para as aulas seguintes. As perguntas abaixo podem ser usadas oralmente, em roda, ou por escrito.

- O que foi mais fácil de perceber na atividade e o que exigiu mais atenção?
- Que tipo de registro ajudou mais o grupo a organizar o pensamento?
- Em que momento surgiu uma boa ideia que mudou o rumo da investigação?
- O que o grupo faria diferente se tivesse uma nova oportunidade de resolver o mesmo desafio?
- Que pergunta matemática ficou aberta ao final da aula?

Aspecto revisado	Síntese da turma
Compreensão do problema	
Qualidade dos registros	
Trabalho em grupo	
Principais dificuldades	
Próximo passo desejável	

9.2 Anexo H: diário breve do professor

Este quadro foi incluído para facilitar o registro reflexivo do professor após a aplicação do recurso. O preenchimento pode ser muito curto, mas costuma ser valioso quando o material será reaplicado com outra turma ou ajustado em um momento posterior.

Campo	Anotações
Turma / data	
Sequência aplicada	
O que funcionou bem	
Onde os estudantes tiveram mais dificuldade	
Intervenções que ajudaram	
Adaptações necessárias para uma próxima aplicação	
Ideias de continuidade	