Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional
Dissertação de Mestrado

Estratégias Numéricas Para a Localização de Raízes de Polinômios

Danilo de Jesus Ramos

Cruz das Almas - Bahia
Julho de 2025

Estratégias Numéricas Para a Localização de Raízes de Polinômios

Danilo de Jesus Ramos

Orientador : Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Cruz das Almas - Bahia

Julho de 2025

FICHA CATALOGRÁFICA

R175e

Ramos, Danilo de Jesus.

Estratégias numéricas para a localização de raízes de polinômios / Danilo de Jesus Ramos._ Cruz das Almas, BA, 2025.

46f.

(Dissertação) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT.

Orientador: Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira.

1.Matemática – Estudo e ensino. 2.Matemática – Polinômios. 3.Problemas, exercícios, etc – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 510.7

Ficha elaborada pela Biblioteca Central de Cruz das Almas - UFRB. Responsável pela Elaboração Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).

Estratégias Numéricas Para a Localização de Raízes de Polinômios

Danilo de Jesus Ramos

Orientador : Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira (Orientador)
UFRB

Prof. Dra. Nayane Carvalho Freitas
UFRB

Prof. Dr. Osmar do Nascimento Souza
UFMS

Cruz das Almas - Bahia

Julho de 2025

A Deus, fonte de toda sabedoria, por me sustentar nos momentos de dúvida, renovar minhas forças diante dos desafios e me guiar com graça e propósito ao longo desta jornada.

À minha mãe, meu maior exemplo de amor, coragem e perseverança. Seu apoio incondicional, suas orações silenciosas e sua presença contínua foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. Esta conquista também é sua.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter sido minha força em todos os momentos dessa caminhada. Sua presença foi essencial nos dias de dificuldade e nos momentos de conquista.

Expresso minha sincera gratidão a todos os professores do PROFMAT, que contribuíram imensamente para minha formação acadêmica e profissional. Cada aula, orientação e incentivo deixaram marcas importantes em minha trajetória.

De maneira especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira, pela dedicação, paciência e valiosas contribuições ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Sua orientação foi fundamental para que este projeto se concretizasse com qualidade e profundidade.

Aos meus colegas do PROFMAT, deixo meu carinho e reconhecimento. Compartilhar essa jornada com vocês tornou o caminho mais leve, enriquecedor e inesquecível. A troca de experiências e o apoio mútuo foram parte essencial desta conquista.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo explorar algumas estratégias numéricas para a localização de raízes de polinômios, fornecendo uma análise detalhada de métodos clássicos e modernos. A pesquisa apresenta uma abordagem teórica aprofundada dos polinômios, revisitando resultados fundamentais como o Teorema Fundamental da Álgebra, as Relações de Girard e o Teorema de Abel-Ruffini. Além disso, são investigados alguns métodos numéricos, incluindo o Teorema dos Sinais de Descartes e o Teorema de Budan-Fourier.

Palavras-chave: Polinômios; Métodos Numéricos; Teorema Fundamental da Álgebra; Localização de Raízes.

Abstract

This work aims to explore some numerical strategies for localization the roots of polynomials, providing a detailed analysis of classical and modern methods. The research presents an in-depth theoretical approach to polynomials, revisiting fundamental results such as the Fundamental Theorem of Algebra, Girard's Relations and the Abel-Ruffini Theorem. In addition, some numerical methods are investigated, including Descartes' Sign Theorem and the Budan-Fourier Theorem.

Keywords: Polynomials; Numerical Methods; Fundamental Theorem of Algebra; Root Localization.

Sumário

Introdução

A matemática, ao longo da história, consolidou-se como uma das áreas do conhecimento humano de maior importância para o desenvolvimento científico e tecnológico. Desde as civilizações antigas até os avanços contemporâneos, a matemática tem desempenhado um papel fundamental na modelagem de fenômenos naturais, na resolução de problemas complexos e na criação de teorias que sustentam diversas ciências. Dentre os temas matemáticos que receberam grande atenção ao longo dos séculos, o estudo dos polinômios e suas raízes destaca-se como um campo de pesquisa de interesse tanto teórico quanto aplicado.

Nesse cenário, os polinômios configuram-se como expressões algébricas fundamentais que surgem em diversas áreas da matemática e de outras ciências, como Engenharia, Física, Computação e Estatística. Sua presença é notável na formulação de modelos matemáticos, na análise de sistemas dinâmicos e na resolução de equações diferenciais. Desde os tempos de Cardano e Ferro, passando pelas contribuições de Lagrange e Galois, os polinômios foram objeto de profundas investigações matemáticas. A busca por soluções algébricas para equações polinomiais conduziu ao desenvolvimento de importantes teorias, como o Teorema Fundamental da Álgebra, que estabelece que toda equação polinomial de grau n possui exatamente n raízes complexas.

Além do aspecto teórico, a necessidade de calcular com precisão as raízes dos polinômios impulsionou o surgimento de métodos numéricos, como o método de Newton, a Regra de Sinais de Descartes, entre outros voltados à aproximação de raízes. Tais métodos têm papel central na matemática computacional, sendo amplamente empregados em simulações científicas e na análise de sistemas físicos e estatísticos. Nesse contexto, este estudo se insere no campo da matemática pura e aplicada, ao analisar as propriedades dos polinômios e suas raízes, investigando métodos numéricos voltados à resolução de equações polinomiais e explorando suas aplicações no problema da localização das raízes reais.

Do exposto, o presente trabalho tem como objetivo principal apresentar e aplicar métodos matemáticos para a localização de raízes de equações polinomiais. Para tal, será desenvolvida uma revisão aprofundada sobre a estrutura algébrica dos polinômios e suas propriedades fundamentais, analisando também as relações entre coeficientes e raízes por meio das Relações de Girard e de outros teoremas relevantes. Pretende-se ainda expor e demonstrar fórmulas já conhecidas para determinação de raízes de polinômios, bem como apresentar técnicas de localização de raízes reais em polinômios de grau superior a quatro, com ênfase em ferramentas como a Regra de Sinais de Descartes e o Teorema de Budan-Fourier. Ao final, almeja-se aplicar esses métodos no contexto do ensino, por meio de uma sequência didática, contribuindo para a construção de abordagens didáticas mais eficazes e contextualizadas.

A escolha desse tema se justifica tanto pela relevância teórica dos polinômios no campo da Álgebra e da Análise Matemática, quanto por sua ampla aplicabilidade prática. Do ponto de vista teórico, o estudo dos polinômios tem papel essencial na Matemática pura, servindo de base para avanços em Teoria dos Números, Álgebra Abstrata e Geometria Algébrica. A busca por soluções para equações polinomiais também impulsionou o desenvolvimento de áreas como Análise Complexa e Topologia Algébrica. Já na perspectiva prática, os polinômios estão presentes em múltiplas aplicações científicas e tecnológicas. Em Engenharia Elétrica, por exemplo, são utilizados no projeto de circuitos e sistemas de controle; na Física, descrevem movimentos oscilatórios e interações quânticas; na Ciência da Computação, sustentam algoritmos de aprendizado de máquina e criptografia.

Dessa maneira, a necessidade de resolver equações polinomiais com eficiência motiva a contínua investigação de métodos numéricos cada vez mais avançados, especialmente diante do progresso das tecnologias computacionais. Assim, este estudo contribui tanto para o aprofundamento da compreensão matemática sobre os polinômios quanto para a implementação eficiente de algoritmos que permitam sua aplicação prática nos mais diversos contextos.

Para alcançar os objetivos propostos, a pesquisa adotará uma abordagem que articula a investigação teórica com uma aplicação voltada ao ensino médio. Inicialmente, foi realizado uma revisão bibliográfica com análise de obras clássicas e contemporâneas sobre polinômios, equações algébricas e métodos numéricos, utilizando referências renomadas como Elon Lages Lima, Demidovich, Carl Boyer e Abramo Hefez. Em seguida, desenvolvemos um esquema teórico, apresentando as principais propriedades dos polinômios, suas relações fundamentais e demonstrações matemáticas relevantes. Paralelamente, foram métodos numéricos com detalhamento dos algoritmos utilizados para encontrar raízes de polinômios, acompanhados de exemplos que ilustrem seu funcionamento.

Como parte integrante deste trabalho também propomos uma sequência didática direcionada ao Ensino Médio, com o objetivo de investigar o potencial de aprendizagem dos alunos em relação aos conteúdos abordados. A proposta será fundamentada nos métodos numéricos discutidos e terá como foco a formação de competências matemáticas associadas à resolução de equações polinomiais e à compreensão das estratégias para localização de raízes. Essa sequência busca, na prática, avaliar a efetividade dos conceitos estudados e sua aplicabilidade em sala de aula, promovendo uma conexão entre teoria e prática pedagógica no ensino da Matemática.

Capítulo 1

Polinômios e Equações Algébricas

Neste capítulo apresentaremos os fundamentos teóricos essenciais para a compreensão dos polinômios estabelecendo a base conceitual sobre a qual serão desenvolvidas as estratégias numéricas discutidas nos capítulos seguintes. Abordaremos também a resolução de equações algébricas, destacando os métodos clássicos para polinômios de segundo, terceiro e quarto graus e uma breve discussão do Teorema de Abel-Ruffini, que estabelece a impossibilidade da existência de uma fórmula geral por radicais para equações polinomiais superior a quatro.

1.1 Polinômios

Formalmente, um polinômio é uma expressão algébrica finita composta por variáveis, coeficientes e operações de soma, subtração e multiplicação, sem a presença de divisões por variáveis. Essa definição permite uma ampla flexibilidade na análise de propriedades e aplicações dos polinômios em diferentes áreas do conhecimento.

Definição 1.1. Uma função $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função polinomial complexa quando existem números complexos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ para todo $x \in \mathbb{C}$. Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são chamados coeficientes da função polinomial. Se $a_n \neq 0$ dizemos que o polinômio p tem grau n. Se um número $r \in \mathbb{C}$ é tal que $p(r) = 0$, então dizemos que r é raiz de p.

Definição 1.2. O polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é dito nulo ou identicamente nulo quando $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$, e indicamos:

$$p(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{C} \text{ ou } p(x) \equiv 0$$

Definição 1.3. Dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são ditos iguais ou idênticos quando $p(x) = q(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

O conceito de polinômio envolve basicamente a lista de seus coeficientes e a forma como realizamos operações de soma e multiplicação entres eles. Quando falamos de função polinomial, passamos a considerar a relação entre números complexos estabelecida pelo valor que a função assume para cada ponto do domínio. Todo polinômio corresponde a uma única função polinomial e por outro lado, vimos que duas funções polinomiais serão idênticas somente se tiverem a mesma lista de coeficientes em outras palavras quando os polinômios que lhes dão origem forem iguais. Assim, cada função polinomoial está associada a um único polinômio, e vice-versa. Essa relação é biunívuca, o que nos permite, sem medo de confusão, mencionarmos indiferentemente ao polinomio p ou à função polinomial p.

A importância dos polinômios reside no fato de que eles generalizam funções algébricas elementares, permitindo a construção de modelos matemáticos aplicáveis à resolução de problemas práticos. Além disso, os polinômios são fundamentais na definição de equações algébricas, na interpolação de dados e no estudo das séries de Taylor, que aproximam funções analíticas por polinômios.

Os polinômios podem ser classificados segundo diferentes critérios, sendo os mais relevantes:

Pelo grau:

* Polinômio linear: $(n = 1)$: $p(x) = a_1x + a_0$, com $a_1 \neq 0$
* Polinômio Quadrático: $(n = 2)$: $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_2 \neq 0$
* Polinômio Cúbico: $(n = 3)$: $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_3 \neq 0$
* Polinômios de grau maior: para $n \geq 4$ o polinômio recebe apenas a denominação de acordo com seu grau.

Pelo número de termos:

* Monômio: polinômio com um único termo (exemplo: $5x^3$)
* Binômio: polinômio com dois termos (exemplo: $x^2 - 4$)
* Trinômio: polinômio com três termos (exemplo: $x^3 - 2x + 1$)

Além dessas classificações, os polinômios podem ser homogêneos, quando todos os seus termos possuem o mesmo grau, e heterogêneos, quando apresentam termos de diferentes graus.

Os polinômios formam um anel algébrico, pois admitem operações bem definidas de soma, subtração e multiplicação. As operações básicas entre polinômios serão descritas na próxima seção.

1.2 Operações Fundamentais com Polinômios

As operações com polinômios são fundamentais na álgebra e no cálculo, sendo amplamente aplicadas em diversas áreas da matemática e suas aplicações. As operações básicas incluem adição, subtração, multiplicação e divisão, além de técnicas avançadas como fatoração e aplicação de produtos notáveis. A compreensão e a correta aplicação dessas operações são essenciais para a resolução de equações algébricas e problemas matemáticos em diferentes contextos.

Definição 1.4. Considere os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ dados por

$$p(x) = a_nx^n + x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_n \neq 0.$$

Definimos a soma de p com q como sendo a soma de seus coeficientes correspondentes aos mesmos graus. Logo,

$$(p+q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Definição 1.5. Considere os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ dados por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_n \neq 0.$$

Definimos o produto de p com q como a multiplicação de cada termo de p por cada termo de q e somando os resultados, ou seja,

$$(p \cdot q)(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \cdots + a_n b_m x^{n+m}$$

O coeficiente de x^i no produto $p(x) \cdot q(x)$ é o número

$$a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0 = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$$

Definição 1.6. A divisão de polinômios consiste em determinar dois polinômios, o quociente e o resto, quando um polinômio $p(x)$ (o dividendo) é divido por outro polinômio $q(x)$ (o divisor), com $q(x) \neq 0$. Essa divisão segue o princípio análogo ao da divisão de números inteiros e pode ser expressa como

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + R(x)$$

onde $d(x)$ é quociente e $R(x)$ o resto, sendo o grau de r menor que o grau de q.

A divisão de polinômios pode ser realizada por dois métodos principais: a divisão direta e a divisão sintética. A divisão algébrica tradicional segue um processo similar à divisão longa, onde dividimos o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor e multiplicamos esse quociente pelo divisor.

Exemplo 1.1. Consideremos a divisão de $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 4$ por $d(x) = x - 1$.

* Dividimos o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor: $\frac{2x^3}{x} = 2x^2$.
* Multiplicação pelo divisor: $2x^2(x-1) = 2x^3 - 2x^2$.
* O resultado da Multiplicação subtraímos do dividendo obtendo o resto da divisão: $(2x^3 + 3x^2 - x + 4) - (2x^3 - 2x^2) = 5x^2 - x + 4$.

O processo será repetido dividindo o resto pelo divisor até que o grau do resto seja menor que o grau do divisor, obtendo neste caso um resto igual a 8. Logo concluimos que

$$2x^3 + 3x^2 - x + 4 = (x-1).(2x^2 + 5x + 4) + 8.$$

A divisão sintética é uma técnica alternativa que simplifica o processo quando o divisor é um binômio na forma $x - r$. Essa abordagem é frequentemente utilizada em álgebra computacional para cálculos eficientes (Demidovich e Maron, 2023).

Umas das técnicas de divisão sintética é o método de Briot-Ruffini que é uma técnica prática para a divisão de um polinômio por um binômio da forma $x - r$, reduzindo os cálculos de multiplicação e subtração para um formato mais organizado. Ele é especialmente útil para encontrar raízes racionais de polinômios.

Exemplo 1.2. Vamos dividir o polinômio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ por $g(x) = x - 2$, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini.

Para isso, escrevemos no lado direito do bloco ilustrado abaixo os coeficientes do polinômio $p(x)$, que são: $1, -5, 2, 4, 3$. Do lado esquerdo, colocamos o número que zera o divisor $x - 2$, ou seja, o número 2. Em seguida, aplicamos o procedimento do método de Ruffini, conforme mostrado abaixo:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & -5 & 2 & 4 & 3 \\ & & 2 & -6 & -8 & -8 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & -4 & -5 \end{array}$$

Começamos baixando o primeiro número da linha de cima (que é 1) e o colocamos na linha de baixo. Depois, multiplicamos esse número por 2 e colocamos o resultado (2) abaixo do segundo número da linha de cima (que é -5). Fazemos a soma $-5 + 2 = -3$ e escrevemos o resultado na linha de baixo. Repetimos esse processo: multiplicamos o novo número da linha de baixo (-3) por 2 e colocamos o resultado (-6) abaixo do número seguinte (2). A soma $2 + (-6) = -4$ é escrita na linha de baixo, e assim continuamos até o fim.

A última linha mostra os coeficientes do polinômio quociente e o resto da divisão. Como o polinômio original era de grau 4, o quociente será de grau 3. Portanto, temos:

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 4x - 4 \quad \text{e} \quad R = -5$$

Isso significa que

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = (x^3 - 3x^2 - 4x - 4).(x - 2) + (-5)$$

A divisão de polinômios é uma ferramenta fundamental no estudo das raízes de equações algébricas. Esse processo permite fatorar um polinômio de grau superior como o produto polinômios de grau menor facilitando assim a análise e a localização das raízes como veremos no capítulo 2.

1.3 Equações Algébricas

1.3.1 Contexto Histórico das Equações Algébricas

A história das equações algébricas remonta às primeiras civilizações que desenvolveram a matemática para solucionar problemas práticos. Desde a Antiguidade, matemáticos de diversas culturas criaram métodos para resolver equações, expandindo gradualmente o conhecimento sobre a Álgebra.

Os primeiros registros matemáticos datam do Egito Antigo e da Babilônia, onde equações simples eram resolvidas por métodos aritméticos e geométricos. Os babilônios utilizavam tabelas numéricas e a técnica da "completação do quadrado" para resolver equações quadráticas, antecipando métodos formais desenvolvidos posteriormente. Segundo Boyer (1974), os babilônios trabalhavam com equações quadráticas sem o uso de um formalismo algébrico, manipulando quantidades concretas para encontrar soluções, evidenciando uma forma primitiva, mas eficaz, de pensamento algébrico. Essa abordagem prática e empírica, centrada na resolução de problemas cotidianos, como a divisão de terras ou transações comerciais, estabeleceu as bases para o desenvolvimento posterior da álgebra simbólica.

No Egito, os escribas registraram técnicas de resolução em papiros como o de Rhind, datado de cerca de 1650 a.C., que contém problemas resolvidos por regras práticas, incluindo métodos rudimentares para resolver equações lineares e quadráticas.

Na Grécia Antiga, matemáticos como Euclides e Diofanto desenvolveram abordagens mais formais para a resolução de equações. Diofanto, muitas vezes chamado de "pai da álgebra", introduziu notações simbólicas para incógnitas e coeficientes em seu livro Aritmética, embora suas equações ainda fossem apresentadas em forma retórica.

Segundo Eves (2004), Al-Khwarizmi categorizou as equações quadráticas em seis formas diferentes e apresentou métodos geométricos para sua resolução. Seu trabalho foi traduzido para o latim no século XII e teve um impacto duradouro no pensamento matemático europeu. Durante o Renascimento, matemáticos italianos fizeram descobertas importantes sobre a resolução de equações cúbicas e quárticas. Scipione del Ferro (1465–1526) encontrou um método para resolver equações cúbicas sem termos quadráticos, que posteriormente foi aperfeiçoado por Niccolò Tartaglia e publicado por Girolamo Cardano no Ars Magna (1545).

Ludovico Ferrari, discípulo de Cardano, desenvolveu um método para resolver equações de quarto grau, demonstrando que tais equações podiam ser reduzidas a cúbicas já solucionadas. Ao longo dos séculos XVI e XVII, René Descartes e Albert Girard fizeram contribuições significativas para a teoria das equações. Descartes estabeleceu a Geometria Analítica, permitindo a interpretação gráfica das equações algébricas, enquanto Girard formulou relações entre coeficientes e raízes de polinômios.

No século XIX, matemáticos como Niels Abel e Évariste Galois revolucionaram o estudo das equações algébricas. Abel demonstrou que equações polinomiais de grau cinco ou superior não podem, em geral, ser resolvidas por radicais, quebrando uma busca que durava séculos. Galois, por sua vez, desenvolveu a Teoria dos Grupos para analisar a estrutura das equações algébricas e determinar quais equações poderiam ser resolvidas por radicais.

1.3.2 Resolução de Equações Algébricas

Definição 1.7. Uma equação algébrica é uma igualdade matemática na forma $p(x) = 0$ onde $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais ou complexos. O grau da equação é igual ao grau do polinômio $p(x)$.

A solução de equações algébricas tem sido um desafio matemático ao longo da história, levando ao desenvolvimento de métodos que permitem encontrar suas raízes exatas ou aproximadas. Para equações do primeiro e segundo grau, as soluções são bem conhecidas:

Teorema 1.1. *Seja $p(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, um polinômio do primeiro grau. A raiz de $p(x)$, ou seja, o valor de x para o qual $p(x) = 0$, é dado por $x = -\frac{b}{a}$.*

Demonstração. Considerando o polinômio $p(x) = ax + b$, para encontrar a raiz devemos fazer $p(x) = 0$ e daí obtemos a equação algébrica $ax + b = 0$, agora adicionando o simétrico de b em ambos os lados e multiplicando ambos os lados pelo inverso de a obtemos que $x = -\frac{b}{a}$ como queríamos demonstrar. □

Teorema 1.2 (Fórmula de Bháskara)**.** *Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, um polinômio do segundo grau. As raízes da equação polinomial $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas por*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demonstração. Considerando a equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.1}$$

como $a \neq 0$ podemos dividir todos os termos da equação (1.1) por a e obtemos

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Leftrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0. \tag{1.2}$$

Agora vamos completar o quadrado para transformar o lado esquerdo da equação (1.2) em uma expressão que possa ser resolvida facilmente.

Somando e subtraindo $(\frac{b}{2a})^2$ dentro da equação (1.2) obtemos as seguintes equações equivalentes

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Portanto $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ são as raízes da equação como queríamos demonstrar. □

Equações de graus superior a dois exigem técnicas mais sofisticadas, como as fórmulas de Cardano para equações cúbicas e o método de Ferrari para equações quárticas apresentadas nas seções seguintes. No século XIX, Abel e Galois demonstraram que não existe uma solução geral por radicais para equações de grau cinco ou superior, marcando um divisor de águas no estudo das equações algébricas.

1.3.3 A Fórmula de Cardano

As equações cúbicas da forma $ax^3+bx^2+cx+d=0$, com $a \neq 0$, foram um desafio para matemáticos do século XVI. A solução foi encontrada por Scipione del Ferro, mas foi divulgada por Gerolamo Cardano em sua obra *Ars Magna* (1545). O método baseia-se em uma substituição que elimina o termo quadrático.

Sem perda generalidade vamos considerar a equação cúbica

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{1.3}$$

com $a = 1$ (se for $a \neq 0$, basta dividir a expressão por a).

Agora substituindo x por $y + h$ na equação (1.3) obtemos

$$\begin{aligned}(y+h)^3 + b(y+h)^2 + c(y+h) + d = 0 &\Leftrightarrow y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3 + b(y^2 + 2yh + h^2)cy + ch + d = 0\\ &\Leftrightarrow y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3 + by^2 + 2byh + bh^2 + cy + ch + d = 0\\ &\Leftrightarrow y^3 + (3h+b)y^2 + (3h^2 + 2bh + c)y + (h^3 + h^2b + hc + d) = 0.\end{aligned}$$

Pondo $h = -\frac{b}{3}$, na expressão acima, temos que

$$x^3 + bx^2 + cx + d = y^3 + py + q = 0 \tag{1.4}$$

onde $x = y - \dfrac{b}{3}$, $p = c - \dfrac{b^2}{3}$ e $q = \dfrac{2b^3}{27} - \dfrac{cb}{3} + d$.

Portanto para achar as raízes de (1.3) basta achar as raízes da equação

$$y^3 + py + q = 0, \tag{1.5}$$

e delas subtrair $\dfrac{b}{3}$.

Considerando u e v duas novas variáveis, e fazendo em (1.5) $y = u + v$ obtemos

$$\begin{aligned}0 &= (u+v)^3 + p(u+v) + q\\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^3 + v^3 + pu + pv + q\\ &= (u^3 + v^3 + q) + u(3uv + p) + v(3uv + p)\\ &= (u^3 + v^3 + q) + (u+v)(3uv + p).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Segue então que cada solução (u, v) do sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q\\ u \cdot v = -\dfrac{p}{3}\end{cases}$$

também é uma solução da equação (1.6) e daí uma solução da forma $y = u+v$ de (1.5). Note que elevando a segunda equação do sistema anterior ao cubo, (u, v) continua sendo solução, logo obtemos

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q\\ u^3 \cdot v^3 = -\dfrac{p^3}{27}\end{cases}$$

Por outro lado, perceba que u^3 e v^3 são soluções da equação quadrática

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{1.7}$$

Resolvendo a equação (1.7) obtemos que as soluções são

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Podemos supor que $u^3 = z_1$ e $v^3 = z_2$, denotando a raiz cúbica de z_1 e z_2 respectivamente por $\sqrt[3]{z_1}$ e $\sqrt[3]{z_2}$ as soluções de $u^3 = z_1$ são

$$\sqrt[3]{z_1}, \;\; w\sqrt[3]{z_1} \;\text{ e }\; w^2\sqrt[3]{z_1},$$

onde $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ é umas das raízes cúbica da unidade.

Analogamente as soluções para $v^3 = z_2$ são

$$\sqrt[3]{z_2}, \;\; w\sqrt[3]{z_2} \;\text{ e }\; w^2\sqrt[3]{z_2},$$

logo o sistema admite as seguintes soluções

$$u_1 = \sqrt[3]{z_1}, \;\; v_1 = \sqrt[3]{z_2}$$

$$u_2 = w\sqrt[3]{z_1}, \;\; v_2 = w\sqrt[3]{z_2}$$

$$u_3 = w^2\sqrt[3]{z_1}, \;\; v_3 = w^2\sqrt[3]{z_2}.$$

Temos, então que a equação $y^3 + py + q = 0$ tem solução

$$y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \tag{1.8}$$

$$y_2 = u_2 + v_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{1.9}$$

e

$$y_3 = u_3 + v_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{1.10}$$

Essas são as fórmulas de Cardano. Podemos então enunciar o seguinte

Teorema 1.3. *As raízes do polinômio cúbico $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, são dadas por* (1.8), (1.9) *e* (1.10) *sendo* $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Exemplo 1.3. Resolvamos a equação cúbica $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Vamos eliminar o termo do segundo grau do polinômio fazendo $x = y + 2$.

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 11(y+2) = 0 \Leftrightarrow y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 11y + 22 - 6 = 0 \Leftrightarrow y^3 - y = 0$$

onde $p = -1$ e $q = 0$. Logo usando as fórmulas de Cardano temos

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{0}{2} + \sqrt{\frac{0^2}{4} + \left(\frac{-1}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{0}{2} - \sqrt{\frac{0^2}{4} + \left(\frac{-1}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^3}} = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)} - \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)} = 0$$

Daí $y_1 = 0$.

Sabendo que $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $w^2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ obtemos

$$y_2 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{-1}{3}} + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\sqrt{\frac{-1}{3}}\right)$$

e como $\sqrt{\dfrac{-1}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} i$ temos:

$$y_2 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{i\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{i\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-i\sqrt{3} + 3i^2}{6} + \frac{i\sqrt{3} + 3i^2}{6} = \frac{6i^2}{6} = i^2 = -1$$

Portanto $y_2 = -1$

Analogamente,

$$y_3 = \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{i\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{i\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-i\sqrt{3} - 3i^2}{6} + \frac{i\sqrt{3} - 3i^2}{6} = \frac{-6i^2}{6} = -i^2 = 1$$

Logo $y_3 = 1$.

Fazendo a substituição $x = y + 2$ temos

$$x_1 = y_1 + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$x_2 = y_2 + 2 = -1 + 2 = 1$$

$$x_3 = y_3 + 2 = 1 + 2 = 3$$

Portanto as raízes são 1, 2 e 3.

1.3.4 Equações do 4º Grau

Para equações de quarto grau da forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, Lodovico Ferrari, aluno de Cardano, desenvolveu um método baseado na redução a uma equação cúbica auxiliar.

Novamente sem perda de generalidade vamos supor que a equação algébrica esteja na forma

$$p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e. \tag{1.11}$$

Para encontrar as raízes fazemos $p(x) = 0$, isto é,

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \Leftrightarrow x^4 + bx^3 = -\left(cx^2 + dx + e\right)$$

somando e subtraíndo $\frac{b^2x^2}{4}$ no lado esquerdo da última equação temos que

$$x^4 + bx^3 + \frac{b^2x^2}{4} - \frac{b^2x^2}{4} = -\left(cx^2 + dx + e\right) \Leftrightarrow \left(x^4 + \frac{bx}{2}\right)^2 = -\left(cx^2 + dx + e\right) + \frac{b^2x^2}{4} \tag{1.12}$$

Agora somando $y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right)$ em ambos os lados da equação (1.12) temos

$$\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right)^2 + y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) = \left(\frac{b^2}{4} - c\right)x^2 - dx - e + y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right)$$

que equivale a

$$\left[\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) + y\right]^2 = \left(2y + \frac{b^2}{4} - c\right)x^2 + \left(yb - d\right)x + \left(y^2 - e\right). \tag{1.13}$$

Para que o lado direito da equação (1.13) seja um quadrado perfeito devemos determinar os valores de y que farão essa transformação.

Para isso ocorrer o discriminante do segundo membro da equação (1.13) deve ser nulo, ou seja, $\left(yb - d\right)^2 - 4 \cdot \left(2y + \frac{b^2}{4} - c\right) \cdot \left(y^2 - e\right) = 0$. Assim,

$$y^2b^2 - 2ybd + d^2 - \left(8y + b^2 - 4c\right) \cdot \left(y^2 - e\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^2b^2 - 2ybd + d^2 - 8y^3 + 8ye - y^2b^2 + b^2e + 4y^2c - 4ce = 0 \Leftrightarrow$$

$$-8y^3 + 4cy^2 - (2bd - 8e)\,y - \left(4ec - eb^2 - d^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)\,y + \left(4ec - eb^2 - d^2\right) = 0. \tag{1.14}$$

Escolhendo y como sendo uma das raízes de (1.14), a equação (1.13) nos fornece, tomando α e β convenientes, a seguinte igualdade

$$\left[\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) + y\right]^2 = \left(\alpha x + \beta\right)^2, \tag{1.15}$$

e resolvendo essa equação, obtemos

$$\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) + y = \left(\alpha x + \beta\right) \;\; ou \;\; \left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) + y = -\left(\alpha x + \beta\right).$$

Segue que a equação (1.11) é equivalente a equação (1.15) e portanto reduzimos à resolução de uma equação de grau 4 na resolução de equações de graus dois e três. A partir deste ponto, basta proceder como feito nas seções anteriores.

Exemplo 1.4. Resolvamos a equação $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

Determinaremos y satisfazendo a equação (1.14) anterior. Temos que $b = -10$, $c = 35$, $d = -50$, $e = 24$, logo a equação (1.14) tem a forma

$$8y^3 - 4 \cdot (35)\,y^2 + (2 \cdot (-10) \cdot (-50) - 8 \cdot 24)\,y + \left(4 \cdot 24 \cdot 35 - 24 \cdot (-10)^2 - (-50)^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$8y^3 - 140y^2 + 808y - 1540 = 0 \Leftrightarrow 2y^3 - 35y^2 + 202y - 385 = 0.$$

Utilizando as fórmulas de Cardano vistas anteriormente, verificamos facilmente que $y = 7$ é solução desta equação. Para este valor de y a equação (1.15) tem o seguinte formato

$$\left[\left(x^2 - 5x\right) + 7\right]^2 = 4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2.$$

Obtemos assim as seguintes equações quadráticas

$$x^2 - 5x + 7 = 2x - 5 \;\; e \;\; x^2 - 5x + 7 = -(-2x - 5)$$

cujas raízes nos fornece as raízes da equação proposta. Assim usando a Fórmula de Bháskara encontramos as raízes, 1, 2, 3 e 4, da equação inicial.

1.4 Teorema de Abel-Ruffini e a Impossibilidade de Soluções Gerais para Polinômios de Grau ≥ 5

O estudo das equações algébricas foi um dos desafios centrais da matemática desde a antiguidade, levando ao desenvolvimento de métodos para encontrar soluções exatas para equações polinomiais. Durante séculos, matemáticos buscaram generalizar as fórmulas de resolução para equações de graus superiores a quatro, o que culminou na demonstração de que, de modo geral, não existe uma solução algébrica para equações de grau maior ou igual a cinco. Esse resultado é conhecido como o **Teorema de Abel-Ruffini**, estabelecido por Niels Henrik Abel no início do século XIX, após tentativas parciais de demonstração feitas por Paolo Ruffini no final do século XVIII (Biglia, 2019). Esse teorema afirma que não há uma fórmula geral que expresse as raízes de um polinômio de grau cinco ou superior, em termos de radicais, diferentemente do que ocorre com polinômios de grau menor, para os quais existem fórmulas fechadas , já demonstrados no nosso texto.

Desde a antiguidade, matemáticos babilônios e gregos já resolviam equações quadráticas utilizando métodos geométricos. No século XVI, o avanço mais significativo ocorreu com Girolamo Cardano, que publicou no Ars Magna, um método para resolver equações cúbicas e quárticas, a partir de trabalhos anteriores de Scipione del Ferro e Niccolò Tartaglia. Seu discípulo, Ludovico Ferrari, expandiu essas ideias para equações de quarto grau, dando um grande salto na teoria das equações algébricas (Costa, 2020). No entanto, apesar dessas conquistas, a busca por uma fórmula geral para equações de quinto grau ou superior se mostrou infrutífera, levando à conjectura de que tais equações não seriam resolvíveis por radicais. Esse problema motivou diversos matemáticos a investigar as propriedades estruturais dos polinômios e suas raízes, preparando o terreno para o trabalho de Abel e Galois (Xavier, 2022).

A primeira tentativa formal de demonstrar a impossibilidade de resolução por radicais foi feita por Paolo Ruffini em 1799. Em seu trabalho, ele apresentou uma argumentação baseada na teoria das permutações das raízes dos polinômios, mostrando que para equações de grau cinco ou superior não é possível encontrar uma solução fechada expressa por radicais. No entanto, sua demonstração continha lacunas, sendo considerada incompleta pela comunidade matemática da época (Biglia, 2019). Apenas em 1824, Abel forneceu uma demonstração rigorosa, no que ficou conhecido como o **Teorema de Abel-Ruffini**. Ele mostrou que qualquer tentativa de expressar as raízes de um polinômio de grau cinco ou superior em termos de operações algébricas e radicais, falha devido à estrutura das permutações das raízes dessas equações (Zambrano, 2017).

A teoria desenvolvida por Abel abriu caminho para uma abordagem mais profunda, posteriormente refinada pelo jovem matemático francês Évariste Galois. Em 1830, Galois revolucionou o estudo das equações algébricas ao introduzir a Teoria dos Grupos, fornecendo um critério rigoroso para determinar se uma equação polinomial pode ser resolvida por radicais. Ele mostrou que as propriedades algébricas das equações polinomiais podem ser analisadas por meio das simetrias das suas raízes, organizadas em estruturas conhecidas como grupos de Galois (Xavier, 2022). Se o grupo associado a um polinômio for solúvel, então suas raízes podem ser expressas por radicais; caso contrário, não há solução algébrica geral para o polinômio. Essa descoberta marcou o início da álgebra abstrata moderna e consolidou a compreensão estrutural das equações polinomiais (Costa, 2020).

Uma consequência direta do Teorema de Abel-Ruffini é que, embora existam equações de quinto grau que possam ser resolvidas por radicais, não há um método universal que funcione para todas as equações desse grau. Algumas equações específicas podem ser solucionadas por meio de técnicas alternativas, como a decomposição em fatores menores ou substituições algébricas específicas. Um exemplo é o método da transformação de Martinelli, que permite reescrever certas equações de quinto grau em formas que podem ser resolvidas por meio de radicais, desde que apresentem uma estrutura favorável para tal abordagem (Biglia, 2019). Contudo, a inexistência de uma fórmula geral implica que, na maioria dos casos, as raízes dessas equações precisam ser encontradas por métodos numéricos ou funções especiais, como funções elípticas (Zambrano, 2017).

A impossibilidade de resolver equações polinomiais de grau superior a quatro por radicais teve um impacto profundo na matemática. Primeiramente, levou ao desenvolvimento da Teoria Algébrica dos Números, que investiga propriedades estruturais das soluções de equações polinomiais dentro de extensões algébricas. Além disso, teve implicações fundamentais na física e na engenharia, onde a necessidade de encontrar soluções aproximadas para equações diferenciais complexas motivou o desenvolvimento de métodos numéricos sofisticados, como o método de Newton e técnicas de interpolação e aproximação polinomial (Costa, 2020).

No contexto matemático contemporâneo, os estudos sobre equações polinomiais continuam sendo fundamentais para a criptografia, onde a segurança de sistemas baseia-se na dificuldade de resolver certos tipos de equações polinomiais em corpos finitos. Além disso, na mecânica quântica, a resolução de equações diferenciais que modelam o comportamento de partículas subatômicas frequentemente envolve a análise de polinômios de alto grau, reforçando a relevância dos resultados obtidos por Abel, Ruffini e Galois (Xavier, 2022).

Diante do exposto, o Teorema de Abel-Ruffini representa um marco no desenvolvimento da matemática, pois estabeleceu limites precisos para a resolução de equações polinomiais e abriu caminho para novas áreas de pesquisa, como a Teoria de Galois, a Álgebra Moderna e a Teoria Algébrica dos Números. Seu impacto transcende a matemática pura, influenciando a computação, a física e a engenharia. Assim, a busca por soluções algébricas de equações polinomiais não apenas impulsionou o desenvolvimento da teoria dos grupos, mas também levou a uma compreensão mais profunda da estrutura matemática subjacente a diversos fenômenos naturais e tecnológicos (Biglia, 2019; Zambrano, 2017; Costa, 2020; Xavier, 2022).

Capítulo 2

Teorema Fundamental da Álgebra e suas Principais Consequências

Neste capítulo, será apresentado o Teorema Fundamental da Álgebra, resultado central no estudo das equações polinomiais, cuja importância principal está no fato de garantir a existência de raízes complexas para todo polinômio não constante. A partir desse teorema, serão exploradas algumas de suas principais consequências, como as propriedades das raízes dos polinômios e as Relações de Girard. Tais conceitos fornecerão as bases teóricas necessárias para o desenvolvimento dos métodos numéricos abordados no próximo capítulo.

2.1 O Teorema Fundamental da Álgebra

Começaremos esta seção enunciando o famoso Teorema Fundamental da Álgebra, apresentado pela primeira vez por Gauss em sua tese de doutorado.

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio não constante com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada na referência [14]. Uma consequência imediata deste Teorema é o Teorema 2.2.

Teorema 2.2 (Teorema do Resto)**.** *Dado um polinômio $p(x)$ e um número $a \in \mathbb{C}$, o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - r)$ é igual a $p(r)$.*

Demonstração. De fato, dividindo o polinômio $p(x)$ por $(x - r)$ obtemos

$$p(x) = (x - r) \cdot q(x) + R(x) \tag{2.1}$$

onde $q(x)$ é o quociente e $R(x)$ é resto. Como o grau de $R(x)$ deve ser menor que o grau de $(x - r)$, que tem grau 1, temos que $R(x)$ deve ser uma constante, ou seja, $R(x) = R$.

Agora, substituindo $x = r$ na equação (2.1) obtemos:

$$p(r) = (r - r)q(r) + R = 0 + R = R$$

Portanto, o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - r)$ é $p(r)$, o que conclui a demonstração. □

Uma consequência direta do Teorema do Resto é que um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - r$ se, e somente se, r for uma raiz de $p(x)$, ou seja, se $p(r) = 0$. Este resultado permite fatorar polinômios ao encontrar suas raízes, um processo fundamental para a resolução de equações algébricas.

Corolário 2.1. *Um número $r \in \mathbb{C}$ é raiz de um polinômio $p(x)$ se, e somente se, $(x - r)$ é um fator de $p(x)$, ou seja, $p(x)$ pode ser escrito como $p(x) = (x - r)q(x)$.*

Demonstração. Se a é uma raiz de $p(x)$, então $p(r) = 0$. Pelo Teorema do Resto, sabemos que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - r)$ é $p(r)$. Logo, se $p(r) = 0$ concluímos que $R(x) = 0$, o que implica que $p(x)$ é divisível por $(x - r)$, isto é, existe um polinômio $q(x)$ tal que

$$p(x) = (x - r)q(x).$$

Assim, $(x - a)$ é um fator de $p(x)$.

Reciprocamente, se $(x - r)$ é um fator de $p(x)$, então existe um polinômio $q(x)$ tal que $p(x) = (x - r)q(x)$, substituindo $x = r$ na equação, temos

$$p(r) = (r - r)q(r) = 0.$$

Logo r é uma raiz de $p(x)$, o que conclui a demonstração. □

Teorema 2.3. *Todo polinômio $p(x)$ de grau n pode ser fatorado na forma $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$, sendo a o coeficiente do termo de maior grau de $p(x)$ com $a \in \mathbb{C}$ e $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ raízes complexas de $p(x)$. Além disso, esta fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração. De fato, pelo Teorema Fundamental da Álgebra o polinômio $p(x)$ possui pelo menos uma raiz $x_1 \in \mathbb{C}$; por outro lado se x_1 é raiz de $p(x)$ pelo Corolário 2.1 podemos escrever $p(x) = (x - x_1)q(x)$, onde $q(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$. Aplicando novamente o Teorema Fundamental da Álgebra para o polinômio $q(x)$ ele nos garante que $q(x)$ possui pelo menos uma raiz $x_2 \in \mathbb{C}$ e pelo Corolário 2.1 podemos escrever $q(x) = (x - x_2)s(x)$ onde $s(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$. Repetindo este processo recursivamente, chegaremos a um polinômio de grau zero, ou seja, a um polinômio constante. Tal polinômio na realidade é o coeficinente líder do polinômio $p(x)$. Assim, fazendo todas as substituições, vemos que o polinômio $p(x)$ pode ser expresso na forma

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n).$$

Para demonstrar a unicidade dessa decomposição, suponhamos que $p(x)$ possui duas decomposições distintas

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$$
$$p(x) = a'(x - x_1')(x - x_2')(x - x_3') \cdots (x - x_n').$$

Comparando em ambas as expressões os termos de maior grau concluímos que $a = a'$. Logo, temos:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) = (x - x'_1)(x - x'_2)(x - x'_3) \cdots (x - x'_n). \tag{2.2}$$

Fazendo $x = x_1$ dos dois lados da igualdade acima obtemos

$$0 = (x_1 - x'_1)(x_1 - x'_2)(x_1 - x'_3)\cdots(x_1 - x'_n).$$

Assim, pelo menos um dos $x'_1, x'_2, x'_3, \cdots, x'_n$ deve ser igual a x_1, podemos supor sem perda de generalidade que $x'_1 = x_1$. Segue então de (2.2) que

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n) = (x - x_1)(x - x'_2)(x - x'_3)\cdots(x - x'_n)$$

Como o fator $(x - x_1)$ é comum aos dois lados, a igualdade é verificada se, somente se, os polinômios obtidos cancelando $(x - x_1)$ em ambos os lados são iguais. Logo, teremos

$$(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n) = (x - x'_2)(x - x'_3)\cdots(x - x'_n).$$

Aplicando repetidamente o mesmo argumento, podemos eliminar, em cada passo, um par de termos iguais em cada lado da igualdade. Desta forma fica estabelecida uma correspondência entre os termos das duas fatorações e daí concluímos que ela é única a menos da ordem dos termos. □

Uma consequência imediata desse teorema é que um polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas, porém nada nos garante que elas sejam todas distintas. Por exemplo, o polinômio $p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ possui o 1 como sua única raiz, neste caso chamada de raiz dupla. Isto nos leva à seguinte definição.

Definição 2.1. Sejam p um polinômio não consante e r uma raiz de p. Dizemos que r é uma raiz de multiplicidade k se p puder ser escrito da forma

$$p(x) = (x - r)^k q(x)$$

com $q(a) \neq 0$.

Assim, se p for um polinômio de grau n e $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m \leq n)$ forem todas as raízes distintas de p, então ele poderá ser fatorado como

$$p(x) = a(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\cdots(x - x_m)^{k_m}$$

sendo a o coeficiente líder de p e $1 \leq k_i \leq n$ a multiplicidade da raiz x_i.

Em geral, a multiplicidade de uma raiz afeta o comportamento do gráfico do polinômio. Se uma raiz possui multiplicidade ímpar, o gráfico da função cruza o eixo x nesse ponto. Se a multiplicidade for par, o gráfico toca o eixo x e retorna sem atravessá-lo. Essa característica é crucial na análise do comportamento de funções polinomiais e na determinação da natureza de suas soluções.

Finalizaremos esta seção com alguns resultados interessantes sobre as raízes de um polinômio. O primeiro deles nos dirá que as raízes complexas de um polinômio com coeficientes reais aparecem aos pares.

Exemplo 2.1. O polinômio $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ pode ser fatorado como $(x - 1)(x - 2)^2$.

Primeiramente note que $x = 1$ é raiz do polinômio pois $p(1) = 0$ daí o polinômio é divisível por $x - 1$. Fazendo essa divisão encontramos como quociente o polinômio $x^2 - 4x + 4$ que é um quadrado perfeito da forma $(x - 2)^2$, logo $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x - 2)^2$.

Teorema 2.4. *Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais e $r \in \mathbb{C}$ é uma raiz de $p(x)$, então o conjugado complexo de r, denotado por $\overline{r}$, também é uma raiz de $p(x)$.*

Demonstração. Seja $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ um polinômio de grau n com coeficientes reais, ou seja, $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0,\ 1,\ \ldots, n$ e suponha que $r \in \mathbb{C}$ seja uma raiz de $p(x)$, ou seja, $p(r) = 0$. Observando que o conjugado de uma soma ou produto é a soma ou produto dos conjugados segue-se que

$$\begin{aligned}\overline{p(r)} &= \overline{a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0}\\ &= \overline{a_nr^n} + \overline{a_{n-1}r^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1r} + \overline{a_0}\\ &= \overline{a_n}\ \overline{r}^n + \overline{a_{n-1}}\ \overline{r}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\ \overline{r} + \overline{a_0}.\end{aligned}$$

Sabemos por hipótese que os coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são reais logo $\overline{a_i} = a_i$ para cada $i = 0, 1, \cdots, n$. Portanto, resulta da expressão acima que

$$\overline{p(r)} = p(\overline{r}).$$

Mas como r é raiz de $p(x)$, temos que $p(r) = 0$ e consequentemente $p(\overline{r}) = 0$. Isto mostra que o conjugado $\overline{r}$ é também raiz do polinômio $p(x)$. □

Uma consequência imediata deste resultado é dada pelo corolário a seguir.

Corolário 2.2. *Todo polinômio de grau ímpar, com coeficientes reais, possui pelo menos uma raiz real.*

Quando um polinômio tem coeficientes inteiros, suas raízes racionais obedecem a uma propriedade chamada Teorema da Raiz Racional, que afirma que se um número racional $\frac{\alpha}{\beta}$ for uma raiz do polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, então p deve ser um divisor do termo independente a_0 e q deve ser um divisor do coeficiente líder a_n (Cardoso, 2022).

Teorema 2.5 (Teorema das Raízes Racionais)**.** *Considere um polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, onde os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são inteiros ($a_i \in \mathbb{Z}$) e $a_n \neq 0$. Se $r = \frac{\alpha}{\beta}$ é uma raiz racional de $p(x)$, com α e β inteiros primos entre si $\left(mdc\left(\alpha, \beta\right) = 1\right)$ e $\beta \neq 0$, então o numerador α da raiz r é divisor de a_0, e o denominador β é divisor de a_n.*

Demonstração. De fato, fazendo $x = r$ obtemos

$$p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = a_n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por β^n para eliminarmos os denominadores obtemos

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta + \ldots + a_1\alpha\beta^{n-1} + a_0\beta^n = 0. \tag{2.3}$$

Note que todos os termos da equação (2.3) são inteiros pois $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Agora rearranjando, temos

$$\alpha \cdot \left(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2}\beta + \cdots + a_1\beta^{n-1}\right) = -a_0\beta^n$$

Denote $S = a_{n-1}\alpha^{n-2}\beta + \cdots + a_1\beta^{n-1}$. Assim a equação acima se torna

$$\alpha \cdot S = -a_0\beta^n.$$

Como α divide o lado esquerdo da equação $(\alpha \cdot S)$, ele também deve dividir o lado direito $\left(-a_0\beta^n\right)$. Como α e β são primos entre si segue que α divide a_0 o que conclui uma parte da demonstração. De maneira análoga, reescrevendo a equação (2.3) como

$$\beta \cdot \left(a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2}\beta + \cdots + a_0\beta^{n-1}\right) = -a_n\alpha^n$$

Denote por $T = a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2}q + \ldots + a_0\beta^{n-1}$, assim a equação se torna

$$\beta \cdot T = -a_n\alpha^n.$$

Logo β divide $-a_n\alpha^n$ e novamente pelo fato de α e β serem primos entre si segue que β divide a_n concluindo assim a demonstração. □

O estudo das propriedades das raízes de um polinômio possui aplicações em diversas áreas . No contexto da Álgebra Linear, as raízes de um polinômio característico determinam os autovalores de uma matriz. Em Análise Complexa, a distribuição das raízes de polinômios é um tema central para o estudo da teoria dos Sistemas Dinâmicos (Camargo, 2024).

2.2 Relações de Girard

As relações de Girard constituem um conjunto bastante interessante de equações que relacionam as raízes de um polinômio com seus coeficientes. Introduzidas pelo matemático francês Albert Girard no século XVII, essas relações são amplamente utilizadas em teoria algébrica, servindo como ferramenta essencial na determinação de propriedades dos polinômios sem a necessidade de resolver suas equações explicitamente (Rosenthal, 1990).

Proposição 2.1. *(Relações de Girard) Considere o polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, com coeficientes $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ e $n > 1$. Se $x_1, \ldots, x_n$ são as raízes de $p(x)$, então valem as seguintes relações:*

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n},\\
x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n},\\
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n},\\
\vdots \qquad &\qquad \vdots\\
x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.3, podemos escrever o polinômio $p(x)$ na forma fatorada como

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Aplicando a propriedade distributiva, reduzindo os termos semelhantes e reordenando os termos do polinômio, temos que

$$p(x) = a_n(x^n - x^{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i + x^{n-2}\sum_{i<j} x_i x_j - x^{n-3}\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i). \tag{2.4}$$

Agora dividindo ambos os lados da equação (2.4) por a_n obtemos

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} = x^n - x^{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i + x^{n-2}\sum_{i<j} x_i x_j - x^{n-3}\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Por fim comparando os termos semelhantes do polinômio, obtemos as igualdades desejadas, que constituem as Relações de Girard. □

As relações da proposição acima estabelecem uma conexão entre as raízes e os coeficientes de uma equação algébrica mesmo não conhecendo essas raízes; estas relações nos permitem também determinar uma equação conhecendo apenas suas raízes.

Exemplo 2.2. Considere a equação $3x^3 - 5x^2 + 2x - 8 = 0$. As raízes x_1, x_2 e x_3 satisfazem

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{2}{3}$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{a_0}{a_n} = -\frac{-8}{3} = \frac{8}{3}.$$

Exemplo 2.3. Vamos determinar um polinômio cujas raízes são $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$.

O polinômio procurado é do 3º grau e pode ser escrito da forma

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

Pelas Relações de Girard, os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a_2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= a_1 \\ x_1x_2x_3 &= -a_0. \end{aligned}$$

Substituindo os valores

$$\begin{aligned} 2 + 3 + 4 = 9 &\Rightarrow a_2 = -9 \\ 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 = 6 + 8 + 12 = 26 &\Rightarrow a_1 = 26 \\ 2\cdot 3\cdot 4 = 24 &\Rightarrow a_0 = -24. \end{aligned}$$

Portanto, o polinômio procurado é

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$$

As Relações de Girard possuem grande importância na resolução de equações algébricas , em especial quando o grau é maior ou igual a cinco, pois não existem fórmulas gerais que forneçam todas as raízes por radicais nesse caso. Essas relações permitem associar os coeficientes de um polinômio com somas e produtos das raízes, o que podem ser usadas em combinação com outras técnicas para facilitar a localização dessas raízes.

Capítulo 3

Métodos Numéricos para a Localização de Raízes de Polinômios

Neste capítulo, abordaremos alguns métodos numéricos utilizados para a localização de raízes reais de polinômios. Além de apresentar os fundamentos teóricos e exemplos práticos, este capítulo também servirá de base para a proposição de uma sequência didática que será discutida posteriormente, com o intuito de testar a aplicabilidade dos conceitos no contexto educacional do Ensino Médio. Essa iniciativa visa proporcionar uma ponte entre a matemática teórica e a prática pedagógica.

3.1 Cotas Superiores e Inferiores para Raízes Reais

Cotas superiores e inferiores para as raízes de um polinômio desempenham um papel essencial tanto na teoria quanto na aplicação prática da álgebra. Essas cotas fornecem regiões nas quais as raízes reais de um polinômio estão localizadas, permitindo que matemáticos e cientistas abordem problemas que envolvem a solução de equações polinomiais com mais eficiência.

Teorema 3.1. *Seja $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, onde a_k são coeficientes do polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Então, os módulos de todas as raízes x_k, com $k = 1, 2, \cdots, n$, de $p(x) = 0$ satisfazem a desigualdade*

$$|x_k| < 1 + \frac{A}{|a_n|},$$

ou seja, no plano complexo, todas as raízes estão localizadas no interior do círculo centrado na origem, de raio $R = 1 + \dfrac{A}{|a_n|}$.

Demonstração. Suponha $|x| > 1$. A partir da definição do polinômio $p(x)$, temos

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Aplicando o módulo em ambos os lados e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\left|p(x)\right| \geq |a_n|\,|x|^n - \left(|a_{n-1}|\,|x|^{n-1} + |a_{n-2}|\,|x|^{n-2} + \cdots + |a_0|\right).$$

Note que o termo entre parênteses pode ser majorado por $A \cdot \left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \cdots + 1\right)$, onde $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$. Assim, temos

$$\left|p(x)\right| \geq |a_n|\,|x|^n - A\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \cdots + 1\right).$$

Agora observando que

$$|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}, \quad \forall\, |x| > 1$$

.

Segue que

$$\left|p(x)\right| \geq |a_n|\,|x|^n - A \cdot \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} > |x|^n \left(|a_n| - \frac{A}{|x| - 1}\right)$$

logo,

$$\left|p(x)\right| \geq |x|^n \left(|a_n| - \frac{A}{|x| - 1}\right).$$

Para garantir que $\left|p(x)\right| \geq 0$ na desigualdade acima, é necessário que

$$|a_n| > \frac{A}{|x| - 1},$$

reorganizando, obtemos a condição

$$|x| - 1 > \frac{A}{|a_n|} \quad \Leftrightarrow \quad |x| > 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

Portanto, os valores de x que satisfazem $|x| > 1 + \dfrac{A}{|a_n|}$ não podem ser raízes do polinômio p. Concluímos, então, que todas as raízes x_k de p satisfazem a relação

$$|x_k| < 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

□

Este resultado é útil na análise e localização de raízes de polinômios, pois fornece uma cota superior para o módulo de todas as raízes no plano complexo.

Corolário 3.1. *Considere a equação algébrica de grau n: $p(x) = 0$, onde $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$. Seja $B = \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{n-1}|\}$. Então, todas as raízes x_k, com $k = 1, 2, \cdots, n$ de $p(x) = 0$ satisfazem a relação:*

$$\frac{1}{1 + \dfrac{B}{|a_n|}} \leq |x_k| \leq 1 + \frac{B}{|a_n|}.$$

Isto significa que as raízes de $p(x)$ estão localizadas no anel definido por $r < |x| < R$, sendo

$$r = \frac{1}{1 + \frac{B}{|a_n|}} \quad e \quad R = 1 + \frac{B}{|a_n|}.$$

Demonstração. Para simplificar a análise, realizamos a substituição $x = \dfrac{1}{y}$, o que transforma o polinômio $p(x)$ num outro polinômio que denotaremos por $q(y)$

$$p\left(\frac{1}{y}\right) = a_n\left(\frac{1}{y}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + \cdots + a_0$$

Multiplicando a igualdade anterior por y^n, obtemos o polinômio $q(y)$

$$q(y) = \ a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0.$$

Pelo Teorema 3.1, as raízes y_k de $q(y)$ satisfazem a desigualdade:

$$\left|y_k\right| \leq 1 + \frac{B}{|a_n|}.$$

e como $x_k = \dfrac{1}{y_k}$, temos

$$|x_k| = \frac{1}{\left|y_k\right|},$$

assim, invertendo a igualdade anterior obtemos os valores para $|x_k|$

$$\frac{1}{1 + \dfrac{B}{|a_n|}} \leq |x_k| \leq 1 + \frac{B}{|a_n|}.$$

Portanto, todas as raízes de $p(x) = 0$ estão contidas no anel definido pelos reais r e R. □

As cotas das raízes reais de um polinômio são fundamentais para restringir a região de busca de soluções numéricas. A Regra de Lagrange é uma das principais ferramentas utilizadas para estabelecer esses limites.

Teorema 3.2 (Teorema de Lagrange)**.** *Seja $p\,(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, um polinômio de grau n e suponha $a_0 > 0$. Suponha também que a_k $(k \geq 1)$ seja o primeiro dos coeficientes negativos de p. Então, o número*

$$R = 1 + \left(\frac{B}{a_0}\right)^{\frac{1}{k}}$$

é uma cota superior das raízes positivas da equação

$$p(x) = 0,$$

sendo B o maior valor absoluto dos coeficientes negativos de p.

Demonstração. De fato, como a_k é o primeiro coeficiente negativo de p segue que $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \geq 0$ (note que já sabemos que $a_0 > 0$). Assim, para os demais $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ teremos

$$a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n \geq -B$$

Já que B é o maior valor absoluto dos coeficientes negativos de p (note que se tivermos $a_i < 0$ então $a_i \geq -B$ e se for $a_i \geq 0$ é obvio que haverá $a_i \geq -B$). Portanto, para todo $x > 1$ teremos

$$
\begin{aligned}
p\left(x\right) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{k-1}x^{n-(k-1)} + a_kx^{n-k} + \cdots + a_n \\
&\geq a_0x^n + a_kx^{n-k} + \cdots + a_n \\
&\geq a_0x^n - B\left(x^{n-k} + \cdots + 1\right) \\
&= a_0x^n - B\left(\frac{1-x^{n-k+1}}{1-x}\right) \\
&= a_0x^n - B\left(\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1}\right) \\
&= a_0x^n - \frac{B}{x-1}x^{n-k+1} + \frac{B}{x-1} \\
&> a_0x^n - \frac{B}{x-1}x^{n-k+1} \\
&= \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0x^{k-1}\left(x-1\right) - B\right] \\
&> \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0\left(x-1\right)^{k-1}\left(x-1\right) - B\right] \\
&= \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0\left(x-1\right)^{k} - B\right]
\end{aligned}
$$

Assim, se $a_0\left(x-1\right)^k - B \geq 0$, isto é, se $x = 1 + \left(\frac{B}{a_0}\right)^{\frac{1}{k}} = R$ teremos $p(x) = 0$. Equivalentemente, temos que

$$
p(x) \leq 0 \Rightarrow \; x < 1 + \left(\frac{B}{a_0}\right)^{\frac{1}{k}}
$$

E em particular, todas as raízes de $p(x) = 0$ irá satisfazer

$$
x < 1 + \left(\frac{B}{a_0}\right)^{\frac{1}{k}}
$$

estabelecendo o resultado. □

Exemplo 3.1. Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Vamos encontrar uma cota superior utilizando o Teorema de Lagrange.

O polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ tem os seguintes coeficientes:

$$
a_0 = 1,\; a_1 = -6, a_2 = 11,\; a_3 = -6.
$$

Vamos calcular o valor de B (B é o máximo dos valores absolutos dos coeficientes negativos, excluindo o coeficiente líder a_0). Portanto:

$$
B = \max\left(\left|a_1\right|, \left|a_3\right|\right) = \max\left(\left|-6\right|,\; \left|-6\right|\right) = \max\left(6,\; 6\right) = 6.
$$

O primeiro coeficiente negativo ocorre no termo $a_k = a_1 = -6$, logo $k = 1$.

Aplicando o Teorema de Lagrange obtemos

$$
x < 1 + \left(\frac{B}{a_0}\right)^{\frac{1}{k}} = 1 + \left(\frac{6}{1}\right)^{1} = 1 + 6 = 7.
$$

Portanto a cota superior para as raízes positivas de p é 7.

3.2 O Teorema dos Sinais de Descartes

Este teorema é um importante instrumento para estabelecer cotas para o número de raízes positivas e negativas de uma equação com coeficientes reais.

Teorema 3.3 (Teorema dos Sinais de Descartes)**.** *Considere um polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$*, onde* $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ *são números reais e* $a_n \neq 0$*. Denote por* $V_+\left(p\right)$ *o número de mudança de sinal consecutivas na sequência* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ *e por* $V_-\left(p\right)$ *o número de mudança de sinal da sequência* $p(-x)$*. Então:*

- *O número de raízes reais positivas de* $p(x) = 0$*, contadas com suas multiplicidades, é no máximo* $V_+\left(p\right)$*, e a diferença entre* $V_+(P)$ *e o número real de raízes positivas é sempre um número par não negativo.*

- *O número de raízes reais negativas de* $p(x) = 0$*, contadas com suas multiplicidades, é no máximo* $V_-\left(p\right)$*, e a diferença entre* $V_-\left(p\right)$ *e o número real de raízes positivas é sempre um número par não negativo.*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada na referência [9].

Exemplo 3.2. Dado o polinômio $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 5$, vamos estimar o número de raízes reais positivas e negativas.

Os coeficientes são: $(2, -3, 1, 4, -5)$.

Analisamos as mudanças de sinal

2 → -3 (mudança)
-3 → 1 (mudança)
1 → 4 (não há mudança)
4 → -5 (mudança).

Tivemos então três mudanças de sinal, logo, o número de raízes reais positivas é 3, 1 ou 0 (reduzido por múltiplos de 2).

Agora, analisamos $p(-x)$:

$$p(-x) = 2(-x)^4 - 3(-x)^3 + (-x)^2 + 4(-x) - 5 = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 5$$

Os coeficientes agora são: $(2, 3, 1, -4, -5)$.

Analisamos as mudanças de sinal:

$2 \to 3$ (não há mudança)
$3 \to 1$ (não há mudança)
$1 \to -4$ (mudança)
$-4 \to -5$ (não há mudança).

Tivemos então uma mudança de sinal, logo, o número de raízes reais negativas é 1.

O Teorema dos Sinais de Descartes fornece uma maneira eficiente de estimar o número de raízes reais positivas e negativas de um polinômio. Sua dedução baseia-se na contagem de variações de sinal nos coeficientes e na substituição de x por $-x$.

Um outro resultado utilizado para a contagem de raízes é o Teorema de Sturm.

Teorema 3.4 (Teorema de Sturm). *Dado o polinômio $p(x)$ e um número real α, seja $V(\alpha)$ o número de variações de sinal na sequência $g_0(\alpha)$, $g_1(\alpha), \cdots, g_n(\alpha)$, ignorando-se os zeros, em que $g_0(x) = p(x)$ e $g_1(x) = p'(x)$ e que para $k \geq 2$, $g_k(x)$ é o resto da divisão de $g_{k-2}(x)$ por $g_{k-1}(x)$, com sinal trocado. Se os números α e β não são raízes do polinômio $p(x)$, então o número de raízes distintas de $p(x) = 0$ no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ é exatamente $V(\alpha) - V(\beta)$.*

A demostração desse resultado pode ser encontrada na referência [9].

Exemplo 3.3. Vamos determinar o número de raízes reais distintas do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ no intervalo $[0, 3]$, garantindo que os extremos não são raízes do polinômio.

A sequência de Sturm é construída assim:

1. O primeiro termo é o próprio polinômio:

$$g_0(x) = p(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

2. O segundo termo é a derivada do polinômio:

$$g_1(x) = p'(x) = 3x^2 - 6x + 1.$$

3. O terceiro termo é o resto da divisão de $g_0(x)$ por $g_1(x)$:

$$g_2(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}.$$

4. O quarto termo é o resto da divisão de $g_1(x)$ por $g_2(x)$:

$$g_3(x) = \frac{27}{2}.$$

Agora, vamos calcular o número de variações de sinal na sequência nos pontos $x = 0$ e $x = 3$.

Para $x = 0$:

$$g_0(0) = -1, \quad g_1(0) = 1, \quad g_2(0) = -\frac{2}{3}, \quad g_3(0) = \frac{27}{2}.$$

O número de variação de sinal é 3, ou seja, $V(0) = 3$.

Para $x = 3$:

$$g_0(3) = 2, \quad g_1(3) = 8, \quad g_2(3) = -\frac{14}{3}, \quad g_3(3) = \frac{27}{2}.$$

O número de variações de sinal para $x = 3$ é 2, ou seja, $V(3) = 2$.

Portanto pelo Teorema de Sturm o número de raízes de $p(x) = 0$ no intervalo $[0, 3]$ é dado por:

$$V(0) - V(3) = 3 - 2 = 1.$$

Logo o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ possui exatamente uma raiz real no intervalo $[0, 3]$.

3.3 O Teorema de Budan-Fourier

Devido à complexidade computacional geralmente envolvida na construção de uma sequência de Sturm, para fins práticos, frequentemente se utilizam técnicas mais simples e particulares para contar o número de raízes reais de equações algébricas.

Podemos aprimorar o processo de contagem do número de variações de sinal em uma sequência de números, introduzindo as seguintes definições:

Definição 3.1. Considere uma sequência ordenada e finita de números reais $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, onde $c_1 \neq 0$ e $c_n \neq 0$.

1. Número Inferior de variações de sinal (N_-):

   É definido como o número de mudanças de sinal em uma subsequência apropriada da sequência dada, onde os elementos iguais a zero são ignorados.

2. Número Superior de Variações de Sinal (N_+):

   Para determinar N_+, considere a sequência transformada onde os elementos nulos consecutivos $c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+l-1} = 0$, com $c_{k-1} \neq 0$ e $c_{k+l} \neq 0$ são substituídos por elementos artificiais c_{k+i} $(i = 0,\ 1,\ 2, \cdots, l-1)$, tais que

$$sgn\,(c_{k+i}) = (-1)^{l-i}\, sgn\,(c_{k+l})\,,$$

   onde $sgn(x)$ denota o sinal de x.

   É evidente que, caso a sequência original não contenha elementos nulos, o número de mudanças de sinal (N) coincidem com os valores de N_- e N_+. De forma geral, vale a desigualdade

$$N_- \leq N_+.$$

Teorema 3.5 (Teorema de Budan-Fourier). *Se os números a e b $(a < b)$ não são raízes de um polinômio $p(x)$ de grau n, então o número $N\,(a, b)$ de raízes reais da equação $p(x) = 0$ localizadas entre a e b é dado por:*

$$N\,(a,\ b) = \Delta N - 2k,$$

onde $\Delta N - 2k$ é natural, sendo $\Delta N = N(a) - N(b)$, onde $N(x)$ é igual o número de variações de sinais na sequência de sucessivas derivadas

$$p(x), p'(x),\ p''(x), \cdots, p^n(x),$$

$N(a)$ é o número de variações de sinal na sequência de derivadas quando $x = a$ e $N\,(b)$ é o número correspondente para $x = b$. Cada raiz de $p(x) = 0$ é contada com sua multiplicidade.

Corolário 3.2. *Se $\Delta N = 0$, então há raízes reais de $p\,(x) = 0$ no intervalo (a, b).*

Corolário 3.3. *Se $\Delta N = 1$, então existe exatamente uma raiz real de $p(x) = 0$ no intervalo (a, b).*

A demonstração do teorema de Budan-Fourier pode ser encontrada na referência [9].

Observação: Para determinar ΔN, utilizam-se duas expressões baseadas no seguinte, conhecido como esquema de Horner:

$$p(x) = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \cdots + c_n (x - a)^n ,$$

$$p(x) = d_0 + d_1 (x - b) + d_2 (x - b)^2 + \cdots + d_n (x - b)^n .$$

Aqui, $N(a)$ é o número de variações de sinal entre os coeficientes da primeira expansão, enquanto $N(b)$ é o número correspondente para a segunda expansão. Como os sinais dos coeficientes c_k e d_k estão associados aos sinais da sequência de derivadas no ponto correspondente ($x = a$ ou $x = b$), segue que

$$\Delta N = N(a) - N(b).$$

O Teorema de Budan-Fourier é uma ferramenta poderosa no estudo das raízes de polinômios, desempenhando um papel central na análise e localização de suas soluções reais. Sua importância reside na capacidade de reduzir o esforço computacional para localizar raízes, especialmente em contextos em que métodos mais diretos, como a fatoração, não são viáveis. Além disso, o teorema é frequentemente utilizado em conjunto com outras técnicas, como a Regra de Sinal de Descartes, ampliando a precisão e a confiabilidade na identificação de intervalos que contêm raízes reais. No cenário atual, onde métodos numéricos têm papel crucial na resolução de problemas complexos, o Teorema de Budan-Fourier demonstra como ferramentas teóricas desenvolvidas no passado continuam a fornecer uma base para algoritmos modernos, permitindo avanços inovadores na análise de sistemas algébricos e matemáticos, técnicos como um elo entre a matemática clássica e os desafios tecnológicos modernos. Sua aplicação transcende a teoria, impulsionando avanços em áreas práticas como engenharia, ciência da computação e modelagem econômica, onde a precisão na localização de raízes é essencial. Assim, o Teorema de Budan-Fourier exemplifica como conceitos fundamentais continuam a inspirar soluções criativas e eficientes para problemas.

Exemplo 3.4. Dado o polinômio $p(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 4x - 2$. Note que 0 e 2 não são raízes de $p(x)$, pois $p(0) = -2$ e $p(2) = 18$. Desta forma, é possível calcular o número de raízes reais localizadas em $[0, 2]$ com o Teorema de Budan-Fourier.

Calculando as derivadas do polinômio $p(x)$

$$\begin{aligned}
p(x) &= x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 4x - 2 \\
p'(x) &= 5x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 10x + 4 \\
p''(x) &= 20x^3 - 36x^2 + 36x - 10 \\
p'''(x) &= 60x^2 - 72x + 36 \\
p^{(4)}(x) &= 120x - 72 \\
p^{(5)}(x) &= 120.
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de $x = 0$ e $x = 2$ obtemos

Para $x = 0$

$$\begin{aligned}
p(0) &= 0^5 - 3\cdot 0^4 + 6\cdot 0^3 - 5\cdot 0^2 + 4\cdot 0 - 2 = 0 + 0 - 0 + 0 - 2 = -2\\
p'(0) &= 5\cdot 0^4 - 12\cdot 0^3 + 18\cdot 0^2 - 10\cdot 0 + 4 = 0 - 0 + 0 - 0 + 4 = 4\\
p''(0) &= 20\cdot 0^3 - 36\cdot 0^2 + 36\cdot 0 - 10 = 0 - 0 + 0 - 10 = -10\\
p'''(0) &= 60\cdot 0^2 - 72\cdot 0 + 36 = 0 - 0 + 36 = 36\\
p^{(4)}(0) &= 120\cdot 0 - 72 = 0 - 72 = -72\\
p^{(5)}(0) &= 120.
\end{aligned}$$

A sequência de sinais para $x = 0$ é: $(-, +, -, +, -, +)$. O número de variações de sinais é 5.

Para $x = 2$

$$\begin{aligned}
p(2) &= 2^5 - 3\cdot 2^4 + 6\cdot 2^3 - 5\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 2 = 32 - 48 + 48 - 20 + 8 - 2 = 18\\
p'(2) &= 5\cdot 2^4 - 12\cdot 2^3 + 18\cdot 2^2 - 10\cdot 2 + 4 = 80 - 96 + 72 - 20 + 4 = 40\\
p''(2) &= 20\cdot 2^3 - 36\cdot 2^2 + 36\cdot 2 - 10 = 160 - 144 + 72 - 10 = 78\\
p'''(2) &= 60\cdot 2^2 - 72\cdot 2 + 36 = 240 - 144 + 36 = 132\\
p^{(4)}(2) &= 120\cdot 2 - 72 = 240 - 72 = 168\\
p^{(5)}(2) &= 120.
\end{aligned}$$

A sequência de sinais para $x = 2$ é: $(+, +, +, +, +, +)$. O número de variações de sinais é 0.

Assim, temos

$$N(0) = 5 \textit{ e } N(2) = 0,$$

$$\Delta N = N(0) - N(2) = 5 - 0 = 5$$

$$\Delta N(0, 2) = 5 - 2k,\ 5 - 2k \in \mathbb{N}.$$

Portanto pelo Teorema de Budan-Fourier o polinômio dado possui uma, três ou cinco raízes reais no intervalo $(0,\ 2)$.

3.4 O Método de Newton

O método de Newton é um dos métodos iterativos mais eficientes para localizar raízes de polinômios.

Teorema 3.6 (Newton)**.** *Se para $x = c > 0$, o polinômio $p(x)$ e todas suas derivadas $p'(x),\ p''(x), \ldots, p^{(n)}(x)$ forem não negativas*

$$p^{(K)}(c) \geq 0 \ \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, n)\,,$$

e $p^{(n)}(c) = n!a_0 > 0$, então $R = c$ pode ser considerado uma cota superior para as raízes positivas da equação

$$p(x) = 0.$$

Demonstração. Para $x > c$, considerando a fórmula de Taylor e a desigualdade anterior, temos

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + \ldots + \frac{p^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n > 0.$$

Portanto todas as raízes positivas x_+ da equação $p(x) = 0$ satisfazem $x_+ \leq c$. □

Observação: Na prática, o método de tentativa e erro é usado para identificar uma sequência crescente de números positivos

$$0 < c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n,$$

de forma que satisfaçam as desigualdades

$$p^{(n-1)}(c_1) \geq 0,\ p^{(n-2)}(c_2) \geq 0,\ \ldots, p'(c_{n-1}) \geq 0,\ p(c_n) \geq 0.$$

Esses números existem, pois, para $a_0 > 0$, temos $p^{(m)}(x) \to +\infty$ à medida que $x \to +\infty$ para $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, n-1$. Assim podemos definir $c = c_n$.

Como $p^{(n)}(x) = n!a_0 > 0, p^{(n-1)}(x)$ é uma função crescente para $x > c_1$. De forma análoga, $p^{(n-2)}(x)$ é crescente para $x > c_2$, e esse raciocínio aplicado sucessivamente até concluir que $p(x)$ é crescente no intervalo $[c_{n-1}, +\infty[$. Logo, para $x > c_n$ temos $p(x) > p(c_n) \geq 0$, o que implica que $x_+ \leq c_n$.

Exemplo 3.5. Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Vamos aplicar o Teorema de Newton para determinar uma cota superior para as raízes positivas deste polinômio. As derivadas do polinômio $p(x)$ são:

$$p'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$
$$p''(x) = 6x - 12$$
$$p'''(x) = 6.$$

Segundo o Teorema de Newton, devemos verificar se $p(c) \geq 0,\ p'(c) \geq 0,\ p''(c) \geq 0, \ldots, p^{(n)}(c) \geq 0$ para um valor positivo de c. Além disso, a derivada de ordem n $p^{(n)}(c) = n!a_0$ deve ser positiva em c.

Aplicando o Teorema de Lagrange obtemos 7 como cota superior das raízes possitivas desse polinômio, agora vamos aplicar o teorema de Newton para um valor menor que 7. Podemos escolher $c = 4$ pois satisfaz as condições do teorema.

Agora avaliando o polinômio e suas derivadas no ponto $c = 4$ temos

$$p(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 11 \cdot 4 - 6 = 64 - 96 + 44 - 6 = 6 \geq 0$$
$$p'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 11 = 48 - 48 + 11 = 11 \geq 0$$
$$p''(4) = 6 \cdot 4 - 12 = 24 - 12 = 12 \geq 0$$
$$p'''(4) = 6 \geq 0.$$

Como todas as condições do teorema são satisfeitas para $c = 4$, podemos concluir que $c = 4$ é uma cota superior para as raízes positivas de $p(x) = 0$. Assim, o Teorema de Newton garante que qualquer raiz positiva de $p(x) = 0$ está no intervalo $[0,\ 4]$.

Os métodos numéricos desempenham um papel essencial na solução de problemas complexos, especialmente aqueles onde métodos analíticos se mostram impraticáveis.

..

Conclusão

Ao longo dos capítulos, analisamos a fundamentação teórica das equações polinomiais, revisitando teoremas clássicos como o Teorema Fundamental da Álgebra e as Relações de Girard, os quais estabelecem relações essenciais entre coeficientes e raízes dos polinômios. Também discutimos o impacto do Teorema de Abel-Ruffini, que comprova a impossibilidade de soluções algébricas para polinômios de grau superior a quatro, evidenciando a necessidade de métodos numéricos para obtenção de soluções aproximadas.

O estudo realizado nesta dissertação permitiu uma abordagem abrangente sobre as estratégias numéricas para a localização de raízes de polinômios, unindo aspectos teóricos e práticos das principais técnicas utilizadas na área. Desde a formulação dos polinômios e suas propriedades algébricas fundamentais até a aplicação dos métodos numéricos, foi possível estabelecer conexões entre os conceitos teóricos e suas aplicações no ensino, demonstrando a importância dessas estratégias na matemática aplicada e na sala de aula.

Além disso, apresentamos resultados que fornecem cotas limitantes e ferramentas que permitem a localização das raízes de polinômio.

A relevância deste estudo para o ensino e a pesquisa matemática é significativa, pois contribui diretamente para a compreensão de conceitos fundamentais da Álgebra, Cálculo Numérico e Análise Matemática, fornecendo um suporte teórico para pesquisadores, professores e estudantes da área.

No ensino da Matemática, a abordagem dos métodos numéricos pode ser enriquecida com o uso de softwares matemáticos como GeoGebra, MATLAB, Python (NumPy e SciPy) e Wolfram Alpha, permitindo a visualização interativa das soluções e o entendimento mais intuitivo dos algoritmos iterativos. O ensino de funções polinomiais e seus métodos de resolução pode ser reformulado para incluir atividades computacionais, aproximando a teoria da prática e promovendo um aprendizado mais dinâmico.

Referências Bibliográficas

[1] ARENALES, S.; DAREZZO, A. *Cálculo numérico: Aprendizagem com apoio de software.* São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[2] BENITES, V. *Introdução à Álgebra Moderna*. Bolema, Rio Claro-SP, v. 8, n. 9, 1993.

[3] BOYER, C. B. *História da matemática*. Blücher, São Paulo, 3. ed, 2012.

[4] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Ministério da Educação (MEC), 1999.

[5] CAMARGO, V. S. S. *Polinômios: Uma coletânea de exercícios*. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 2024.

[6] CARDOSO, P. C. *Estudos Avançados em Polinômios e Funções Algébricas*. Universidade Federal de Minas Gerais, 2022.

[7] COSTA, P. C. *Teorema Fundamental da Álgebra e Aplicações na Análise de Polinômios*. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.

[8] DEMIDOVICH, B. P.; MARON, I. A. *Computational Mathematics*. Moscow: Mir Publishers, 2023.

[9] DEMIDOVICH, B. P; MARON, I.A. *Matemática Computacional*. 4.ed. Moscou: Mir Publishers, 1981.

[10] GARBI, G. *A História da Matemática: Uma Visão Crítica.* 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

[11] GELFAND, I. M. *Algebra*. Dover Publications, 2003.

[12] HEFEZ, A. H.; VILLELA, M. L. T. *Polinômios e equações algébricas.* [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2018.

[13] LANG, S. *Algebra*. Springer-Verlag, 2002.

[14] LIMA, E.L. *A Matemática do Ensino Médio*- vol.3. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[15] LIMA, E.L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[16] ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012..

[17] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Makron Books, 1997.

Apêndice A

Sequência Didática: Localizando Raízes de Polinômios

A proposta apresentada nesta seção visa trazer uma forma concreta de aplicação do conteúdo da dissertação no Ensino Médio, aproximando o estudo teórico das estratégias numéricas para localização de raízes de polinômios com uma prática pedagógica aplicável em sala de aula. A atividade foi pensada para turmas da 2ª ou 3ª série do Ensino Médio.

Tempo Estimado de Aplicação

Duração total de 4 aulas de 50 minutos cada.

Objetivo Geral

Levar os alunos a compreender como aplicar a Teorema de Sinais de Descartes, as cotas de Lagrange e o Teorema de Budan-Fourier para localizar e estimar raízes reais de polinômios.

Resultados Esperados

Ao final da sequência, espera-se que o aluno seja capaz de:

1. Determinar corretamente cotas superiores e inferiores para raízes reais de polinômios.
2. Analisar o número possível de raízes reais positivas e negativas com base na Regra de Sinais de Descartes.
3. Refinar a localização das raízes aplicando o Teorema de Budan-Fourier.

Conteúdos Abordados

Polinômios do 4º e 5º grau, Cotas superior e inferior das raízes, Teorema dos Sinais de Descartes e o Teorema de Budan-Fourier.

Etapas da Atividade

Etapa 1: Problema Motivador

A aula tem início com a escrita no quadro do polinômio: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$. O professor questiona os alunos: "Vocês conseguiriam dizer aproximadamente onde estão as raízes desse polinômio apenas olhando para ele?" A proposta é que, ao invés de resolver diretamente a equação , os alunos sejam instigados a descobrir métodos para localizar suas raízes. A partir dessa indagação inicial, desenvolve-se a aula.

Responda as perguntas a seguir a respeito do polinômio $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$.

1. Quantas raízes reais esse polinômio pode ter?
2. Você consegue prever se elas são positivas ou negativas apenas olhando os coeficientes?

Etapa 2: Aplicando o Teorema dos Sinais de Descartes

Teorema A.1 (Teorema dos Sinais de Descartes). *Considere um polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *onde* $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ *são números reais e* $a_n \neq 0$. *Denote por* $V_+\left(p\right)$ *o número de mudança de sinal consecutivas na sequência* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ *e por* $V_-\left(p\right)$ *o número de mudança de sinal da sequência* $p(-x)$. *Então:*

- *O número de raízes reais positivas de* $p(x) = 0$, *contadas com suas multiplicidades, é no máximo* $V_+\left(p\right)$, *e a diferença entre* $V_+(P)$ *e o número real de raízes positivas é sempre um número par.*
- *O número de raízes reais negativas de* $p(x) = 0$, *contadas com suas multiplicidades, é no máximo* $V_-\left(p\right)$, *e a diferença entre* $V_-\left(p\right)$ *e o número real de raízes positivas é sempre um número par.*

Agora utilizando o Teorema dos Sinais de Descartes responda as perguntas que segue:

1. Quantas raízes reais positivas esse polinômio pode ter?
2. E quantas raízes negativas?

Respostas esperadas:

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 \Rightarrow$ sinais: $+, -, +, +, - \Rightarrow$ 3 mudanças de sinal $\Rightarrow$ até 3 raízes positivas.

$f(-x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8 \Rightarrow$ sinais: $+, +, +, -, - \Rightarrow$ 1 mudanças de sinal $\Rightarrow$ 1 raiz negativa.

Etapa 3: Determinando Cotas Atráves do Teorema de Lagrange

Teorema A.2 (Teorema de Lagrange)**.** *Seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ um polinômio de grau n e suponha $a_0 > 0$. Suponha também que $a_k (k \geq 1)$ seja o primeiro dos coeficientes negativos de p. Então, o número*

$$R = 1 + \left(\frac{B}{a_0}\right)^{\frac{1}{k}}$$

é uma cota superior das raízes positivas da equação

$$p(x) = 0$$

sendo B o maior valor absoluto dos coeficientes negativos de p.

Aplique o método de Lagrange para obter uma cota superior positiva:

Passo 1: Liste os coeficientes do polinômio.

Passo 2: Identifique o primeiro coeficiente negativo.

Passo 3: Aplique a fórmula: R $= 1 + \left(\frac{B}{a_0}\right)^{\frac{1}{k}}$

Resultados Esperados:

Temos o polinômio $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$

- Coeficientes: $a_0 = 1,\ a_1 = -6,\ a_2 = 7\ a_3 = 6\ a_4 = -8$
- Primeiro negativo: $a_1 = -6$
- $B = \max(|a_1|, |a_4|) = \max(|-6|,\ |-8|) = \max(6,\ 8) = 8.$
- Cálculo da Cota Superior das raízes positivas: $R = 1 + \left(\frac{8}{1}\right)^1 = 9$

Etapa 4: Aplicando o Teorema de Budan-Fourier

Antes de aplicar o teorema, será explicado em sala como calcular as derivadas do polinômio, utilizando regras básicas de diferenciação. Essa explicação tem o objetivo de garantir que todos os alunos compreendam os procedimentos necessários para aplicar corretamente o Teorema de Budan-Fourier, mesmo que ainda não tenham estudado derivadas.

Teorema A.3 (Teorema de Budan-Fourier)**.** *Se os números a e b $(a < b)$ não são raízes de um polinômio $p(x) = 0$ de grau n, então o número $N(a, b)$ de raízes reais da equação $p(x) = 0$ localizadas entre a e b é dado por:*

$$N(a,\ b) = \Delta N - 2k,$$

onde $\Delta N - 2k$ é natural, sendo $\Delta N = N(a) - N(b)$, onde $N(x)$ é igual o número de variações de sinais na sequência de sucessivas derivadas:

$$p(x), p'(x),\ p''(x), \cdots, p^n(x),$$

$N(a)$ é o número de variações de sinal na sequência de derivadas quando $x = a$ e $N(b)$ é o número correspondente para $x = b$. Cada raiz de $p(x) = 0$ é contada com sua multiplicidade.

Verifique quantas raízes reais existem no intervalo $(0, 8)$:

Passo 1: Liste a função e suas derivadas $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), f^4(x)$.

Passo 2: Calcule os sinais de cada função em $x = 0$ e $x = 8$.

Passo 3: Conte as variações de sinal.

Solução Esperada:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 \\
f'(x) &= 4x^3 - 18x^2 + 14x + 6 \\
f''(x) &= 12x^2 - 36x + 14 \\
f'''(x) &= 24x - 36 \\
f^4(x) &= 24
\end{aligned}$$

Em x = 0 :

$$\begin{aligned}
f(0) &= -8\ (negativo) \\
f'(0) &= 6\ (positivo) \\
f''(0) &= 14\ (positivo) \\
f'''(0) &= -36\ (negativo) \\
f^4(0) &= 24\ (positivo)
\end{aligned}$$

Note que teve três variações logo $N(0) = 3$.

Em x = 8 :

$$\begin{aligned}
f(8) &= 1512\ (positivo) \\
f'(8) &= 1014\ (positivo) \\
f''(8) &= 494\ (positivo) \\
f'''(8) &= 156\ (positivo) \\
f^4(8) &= 24\ (positivo)
\end{aligned}$$

Não teve nenhuma mudança de sinal logo $N(8) = 0$

Resultado: $3 - 0 = 3 \Rightarrow$ Portanto o polinômio possui no máximo 3 raízes reais no intervalo $(0, 8)$.

Etapa 5: Verificação com um Recurso Computacional

Agora os alunos irão determinar as ráizes do polinômio usando algum progama computacional. Constatando que as raízes são -1, 1, 2 e 4. Como era esperado as raízes positivas estão entre 0 e 8, e há exatamente 3 raízes positivas e uma negativa.

Etapa 6: Testando o conhecimento

O professor apresenta aos alunos o seguinte polinômio: $p(x) = x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 36x^2 + x - 30$. Os alunos deverão, individualmente:

1. Aplicar as cotas de Lagrange para determinar um intervalo que contenha todas as raízes reais do polinômio.
2. Utilizar a Regra de Sinais de Descartes para estimar o número de raízes reais positivas e negativas.
3. Aplicar o Teorema de Budan-Fourier para refinar a localização das raízes em subintervalos reais.
4. Confirmar as raízes reais com auxílio de algum recurso computacional (como a calculadora gráfica GeoGebra, WolframAlpha ou Python).

Avaliação

A avaliação será processual e levará em conta:

- Participação nas discussões e envolvimento na resolução das atividades.
- Clareza e organização dos cálculos apresentados.
- Capacidade de justificar as conclusões com base nos métodos estudados.

Recursos Necessários

Quadro Branco, calculadora científica e computadores ou tabletes.

Conclusão

A atividade desenvolvida permitiu observar como diferentes métodos contribuem de maneira complementar para a localização das raízes reais de um polinômio. Ao aplicar o Teorema dos Sinais de Descartes, os alunos conseguiram antecipar a quantidade de raízes positivas e negativas com base apenas na análise dos sinais dos coeficientes. Com as cotas de Lagrange, foi possível estabelecer um limite superior que ajudou a restringir o intervalo de busca das raízes. Já com o Teorema de Budan-Fourier, os estudantes puderem melhorar essa estimativa, verificando a quantidade exata de raízes reais em um intervalo específico. Ao final utilizou-se um recurso computacional para determinar as raízes dos polinômios apenas para confirmar a veracidade de todos os resultados obtidos anteriormente, reforçando a precisão dos métodos estudados.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das Almas - BA
CEP: 44380 -000
Telefone: (75) 3621-2350
<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>