

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Gláucio Assad Pitanga

O Conjunto dos Números Irracionais em uma abordagem investigativa e colaborativa para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II

Rio de Janeiro
2025

Gláucio Assad Pitanga

O Conjunto dos Números Irracionais em uma abordagem investigativa e colaborativa para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II

Dissertação apresentada à Escola de Matemática da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRADO em Ensino da Matemática.

Orientador: Gladson Octaviano Antunes

Rio de Janeiro

2025

Catálogo informatizada pelo(a) autor(a)

P681 Pitanga, Gláucio Assad
O Conjunto dos Números Irracionais em uma abordagem investigativa e colaborativa para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II / Gláucio Assad Pitanga. -- Rio de Janeiro : UNIRIO, 2025.
80

Orientador: Gladson Octaviano Antunes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2025.

1. Conjunto dos Números Irracionais. 2. Ensino da Matemática. 3. Ensino Fundamental II. I. Octaviano Antunes, Gladson, orient. II. Título.

Gláucio Assad Pitanga

O Conjunto dos Números Irracionais em uma abordagem investigativa e colaborativa para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II

Dissertação apresentada à Escola de Matemática da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRADO em Ensino da Matemática.

Aprovado em 09 de abril de 2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Gladson Octaviano Antunes, D.Sc.
Orientador
UNIRIO

Prof. Ronaldo da Silva Busse, D.Sc.
UNIRIO

Prof. Augusto César de Castro Barbosa, D.Sc.
UERJ

Rio de Janeiro
2025

Dedico esse trabalho ao meu pai, Carlos Alberto
Braga Pitanga dos Santos, que não irá receber a
dissertação "em mãos", mas está, ao lado do
Senhor, orgulhoso do feito do seu filho.

Resumo

Esta dissertação tem como foco o ensino do conjunto dos números irracionais em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental II, utilizando uma abordagem investigativa e colaborativa. O estudo propõe uma metodologia que estimula a participação ativa dos alunos e favorece a construção coletiva do conhecimento, superando as limitações da abordagem expositiva tradicional. Além disso, são discutidas as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a forma como os números irracionais são apresentados em livros didáticos nacionais. Para avaliar a efetividade dessas metodologias, foram conduzidos experimentos práticos em sala de aula, cujos resultados demonstraram um aumento no engajamento dos alunos e uma assimilação mais profunda dos conceitos matemáticos. Como desdobramento deste estudo, foi elaborado um Produto Educacional, intitulado "Jogo das Régua: uma Abordagem Investigativa e Colaborativa para a Apresentação dos Números Irracionais". Esse material fornece recursos práticos para a aplicação da metodologia proposta, incluindo atividades didáticas e um relato da experiência de sua implementação em sala de aula.

Palavras-Chave: Números Irracionais, Metodologia Investigativa, Aprendizagem Colaborativa, Ensino Fundamental II, BNCC, Educação Matemática.

Abstract

This dissertation focuses on teaching the set of irrational numbers in final-year classes of lower secondary education, using an investigative and collaborative approach. The study proposes a methodology that encourages active student participation and fosters collective knowledge construction, overcoming the limitations of the traditional expository approach. Additionally, it discusses the guidelines of the Base Nacional Comum Curricular (BNCC) and how irrational numbers are presented in national textbooks. To assess the effectiveness of these methodologies, practical classroom experiments were conducted, and the results showed increased student engagement and a deeper understanding of mathematical concepts. As a development of this study, an Educational Product was created, titled "Ruler Game: An Investigative and Collaborative Approach to Introducing Irrational Numbers." This material provides practical resources for implementing the proposed methodology, including instructional activities and a report on the experience of its application in the classroom.

Keywords: Irrational Numbers, Investigative Methodology, Collaborative Learning, Middle School, BNCC, Mathematics Education.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus e a Nossa Senhora do Monte Serrat por ter dado saúde, perseverança e resiliência a todas as dificuldades e desafios por mim perpassados.

Agradeço aos meus pais, Carlos Alberto Braga Pitanga dos Santos e Áurea Castellar Assad por ter dado as condições necessárias para que alcançasse os objetivos acadêmicos. A eles minha absoluta gratidão.

Agradeço a minha esposa, Lorraine de Souza Marinho, que esteve comigo nesta árdua caminhada acadêmica e que, desde o início acreditou em mim.

Aos professores que tive ao longo de minha vida estudantil e que, indubitavelmente, foram inesgotáveis fontes de inspiração.

Ao meu professor orientador, Professor Gladson Octaviano Antunes minha, eterna gratidão por toda a paciência e disponibilidade.

A todos que colaboraram na elaboração deste trabalho.

“Aprendemos quando compartilhamos experiências.”

John Dewey

Sumário

1 Introdução	9
2 O Ensino Fundamental no Brasil: aspectos históricos	13
2.1 Introdução	13
2.2 Antecedentes Históricos.	14
2.3 Criação do Ensino Fundamental	15
2.4 Primeiras diretrizes educacionais	16
2.5 Expansão e reformas do Ensino Fundamental	17
2.6 O Ensino Fundamental na Constituição de 1988	18
2.7 Programas e políticas educacionais para aprimorar a qualidade de ensino	18
2.8 Desafios e problemas atuais	19
2.9 Avaliação e qualidade do Ensino Fundamental	20
2.10 Formação de professores	21
2.11 Inclusão e diversidade no Ensino Fundamental	22
2.12 Participação da comunidade escolar	23
2.13 Recursos e infraestrutura escolar	24
2.14 Tecnologia na educação básica	24
2.15 Perspectivas futuras	25
3 A Metodologia Investigativa	27
3.1 Quebrando Paradigmas	27
3.2 A Metodologia Investigativa em Sala de Aula	28

3.3	O Papel Crucial da Experimentação no processo de Ensino-Aprendizagem de matemática	29
3.4	A Experimentação no Processo de Ensino-Aprendizagem de matemática	31
4	A Metodologia Colaborativa	34
4.1	Quebrando Paradigmas	34
4.2	Aspectos Históricos da aprendizagem colaborativa	35
4.3	aprendizagem colaborativa e Cooperativa: Diferências e Convergências.	38
4.4	aprendizagem colaborativa: Aspectos Metodológicos	39
5	A BNCC e o Ensino de Números.	43
5.1	Diretrizes e Práticas	43
5.2	A BNCC e a Metodologia Investigativa: Conexões e Perspectivas	45
5.3	A BNCC e a Aprendizagem Colaborativa: Integração e Possibilidades	46
6	Abordagem do Conjunto dos Números Irracionais nos Livros Didáticos Nacionais	48
6.1	Concepções de Números Irracionais na Perspectiva da Aprendizagem Significativa	50
6.2	O ensino de matemática em uma perspectiva investigativa: a construção de alguns irracionais	51
6.3	Ensino Colaborativo em Ciências Exatas	51
7	O conjunto dos números irracionais	53
7.1	Medida de um Segmento	53
7.2	Definição de Números Racionais e Irracionais	55
7.2.1	Algumas Propriedades Operatórias	56
7.3	Classificação dos Números Irracionais	58
7.4	A raiz quadrada de um número primo	58
7.5	O Número π	59
7.5.1	Passos seguidos por Arquimedes	60

7.5.2	Demonstração da irracionalidade de π .	63
	Cálculo de I_n como número inteiro	64
	Estimativa de I_n	65
	Conclusão	66
8	Relato de Experiência	67
	Etapas da atividade e distribuição dos tempos de aula	67
8.1	Resultados	77
8.2	Considerações Finais	77
	Referências Bibliográficas	79

Lista de Figuras

7.1	Representação Gráfica da $\sqrt{2}$	54
7.2	Exemplos de Polígonos Inscritos	60
7.3	Exemplos de Polígonos Inscritos	61
7.4	Circunferência com raio de 4 cm	62
8.1	Jogo das Réguas - Versão Impressa	68
8.2	Jogo das Réguas	70
8.3	Representação Gráfica da $\sqrt{2}$	73
8.4	Tabela Fonte:johnson 2003	73
8.5	Gráfico de rendimento percentual dos alunos	77

Lista de Tabelas

3.1	Etapas da Experimentação Investigativa - Fonte: Adaptado de Carvalho et al. (2009)	33
4.1	Características observadas entre grupos de aprendizagem colaborativa e tradicional - Fonte: Adaptado de Carvalho et al. (2009)	39
7.1	Avanços históricos no cálculo do número π	63

Lista de Siglas

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

EF – Ensino Fundamental

1 Introdução

A metodologia expositiva, amplamente utilizada ao longo de séculos e ainda presente em diversas salas de aula, tem sido alvo de críticas e questionamentos no campo educacional. Um dos principais pontos de contestação é a ausência de estratégias que promovam o protagonismo do discente em seu processo de aprendizagem. Essa abordagem tradicional, muitas vezes, desconsidera aspectos importantes, como as experiências pessoais e a realidade social dos alunos, elementos essenciais para estabelecer conexões significativas entre os estudantes e os objetos matemáticos a serem estudados.

Nesse sentido, Perrenoud (2000) destaca a necessidade de práticas pedagógicas que favoreçam a construção ativa do conhecimento, considerando não apenas o contexto escolar, mas também as interações entre as vivências dos alunos e os conteúdos trabalhados em sala de aula. Essa perspectiva evidencia que metodologias mais dinâmicas e centradas no aluno são indispensáveis para superar as limitações do ensino tradicional.

Nesse contexto, a metodologia investigativa em um Ambiente Colaborativo surge como uma proposta inovadora e transformadora. Fundamentada em um viés pedagógico que valoriza a empatia e a proatividade, essa abordagem prioriza a construção compartilhada de conhecimento, permitindo que os alunos atribuam significados (ou ressignifiquem) aos conceitos matemáticos de maneira mais engajada e contextualizada. Por meio de investigações e interações colaborativas, os discentes são estimulados a explorar, questionar e compreender os conteúdos matemáticos em consonância com suas vivências e desafios cotidianos.

Atualmente, diversas correntes pedagógicas defendem que o conhecimento pode ser construído ou ressignificado de forma coletiva, com base na interação entre os sujeitos do processo educativo. Conforme discutido por Dillenbourg (1999), a construção do conhecimento ocorre de forma colaborativa, enfatizando a interação entre os participantes do processo educativo. Nesse modelo, cada discente assume o papel de elemento agente da construção do conhecimento, enquanto o docente atua como mediador ou observador reflexivo desse processo de ensino-aprendizagem. Essa perspectiva encontra suporte em autores como Vygotsky (1978), que enfatiza a importância das interações sociais e da mediação no desenvolvimento cognitivo, e Freire (1996), que destaca o papel do diálogo e da troca de saberes na construção coletiva do conhecimento.

Esse processo de aprendizagem coletiva, no qual os membros de um grupo compartilham experiências, conhecimentos e ideias para alcançar um objetivo comum e definido, é conhecido como Ensino Colaborativo (EC). Nesse contexto, o grupo funciona como uma comunidade de aprendizado, promovendo a corresponsabilidade e o engajamento mútuo, conforme também discutido por Dillenbourg (1999), que explora as dinâmicas e potencialidades da colaboração no ambiente educacional.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam como objetivos do Ensino Fundamental que os alunos sejam capazes de:

Posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas.

Portanto, com base nas perspectivas apresentadas, este trabalho buscará enfatizar a aplicação da metodologia investigativa em um ambiente colaborativo. Além disso, será examinado o desenvolvimento da aprendizagem dos discentes diante de um tema fundamental e de grande relevância: o conceito de números irracionais. Essa proposta foi explorada a partir de uma atividade que abordou o conceito de número irracional, aplicada em uma turma do oitavo ano de uma escola privada tradicional da cidade do Rio de Janeiro. A experiência resultante dessa aplicação deu origem a um produto educacional que acompanha esta dissertação.

Acredita-se que essa metodologia, quando aplicada em um ambiente ativo e colaborativo, contribui para a democratização da sala de aula, permitindo que o aluno assuma um papel proativo e responsável em seu próprio processo de aprendizagem. Suas vivências e conhecimentos prévios tornam-se elementos mediadores na ressignificação dos conceitos abordados, enquanto o docente atua como um observador crítico e reflexivo, intervindo estrategicamente para potencializar a construção do conhecimento e garantir um aprendizado mais significativo.

Por fim, este trabalho tem como principal objetivo apresentar à comunidade escolar uma nova perspectiva pedagógica, baseada em princípios construtivistas, que possibilite uma abordagem inovadora em sala de aula. Além de favorecer o desenvolvimento acadêmico, essa metodologia incentiva o aluno a se reconhecer como cidadão ativo, inserido em um processo no qual cada participante desempenha um papel essencial. Ao interagir com diferentes opiniões, vivências e interpretações, o discente aprimora sua capacidade de socialização, argumentação e pensamento crítico, aspectos fundamentais para sua formação integral.

O trabalho está organizado da forma que segue. No capítulo 2, é traçado um panorama histórico do Ensino Fundamental no Brasil, abordando desde suas primeiras iniciativas no período colonial até os dias atuais. A evolução das políticas públicas educacionais, como a Lei de Dire-

trizes e Bases de 1996, são destacadas, evidenciando os avanços na inclusão e democratização do ensino. Além disso, são discutidos os principais desafios enfrentados pelo sistema educacional brasileiro, como a desigualdade de acesso e a necessidade de melhoria na infraestrutura e formação dos professores.

No capítulo 3, é explorado o conceito de metodologia investigativa no ensino de matemática, destacando seu papel no desenvolvimento cognitivo dos alunos. A abordagem é apresentada como uma alternativa às metodologias tradicionais, incentivando a experimentação e a participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem. São descritas as etapas dessa metodologia e sua aplicação em sala de aula, enfatizando a importância do professor como mediador do conhecimento.

No capítulo 4, é abordada a metodologia colaborativa, que propõe a substituição da competitividade pela cooperação no ambiente escolar. Essa abordagem incentiva o trabalho em equipe e a troca de experiências entre os alunos, promovendo uma aprendizagem mais democrática e inclusiva. São comparados os métodos tradicionais de ensino com a aprendizagem colaborativa, mostrando os benefícios deste último para o desenvolvimento das habilidades sociais e cognitivas dos alunos.

No capítulo 5, é examinada a forma como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) trata o ensino de números irracionais e a metodologia investigativa. A análise mostra que a BNCC incentiva a utilização de metodologias ativas e colaborativas para a resolução de problemas matemáticos, alinhando-se às propostas deste trabalho. São discutidas as competências que os alunos devem desenvolver no Ensino Fundamental e como essas metodologias podem contribuir para alcançar esses objetivos.

No capítulo 6, é analisada a abordagem dos números irracionais em algumas coleções de livros didáticos amplamente utilizadas no Brasil. A análise foca na construção conceitual desses números e na forma como os livros incentivam a aprendizagem significativa e investigativa. São identificadas limitações nos materiais analisados, e sugerem-se melhorias para uma abordagem mais alinhada com as metodologias colaborativa e investigativa propostas neste trabalho.

No capítulo 7, é realizada uma revisão teórica sobre o conjunto dos números irracionais, abordando suas definições, propriedades e principais características. São discutidos exemplos clássicos, como a raiz quadrada de números primos e o número π e como esses números podem ser utilizados para aprofundar o entendimento dos alunos sobre a matemática. O capítulo também explora a classificação dos números irracionais e a importância de trabalhar esses conceitos de forma prática em sala de aula.

No capítulo 8, é apresentado um relato sobre a aplicação das atividades didáticas propostas em uma escola privada tradicional da cidade do Rio de Janeiro. A experiência mostrou que a metodologia investigativa e colaborativa teve um impacto positivo no aprendizado dos alunos, com melhora significativa no entendimento dos números irracionais e maior engajamento dos discentes nas atividades. As considerações finais destacam o sucesso da abordagem e sugerem sua aplicação em outros contextos educacionais.

2 O Ensino Fundamental no Brasil: aspectos históricos

2.1 Introdução

O Ensino Fundamental no Brasil é uma etapa essencial da educação básica, que compreende nove anos de estudo, do 1º ao 9º ano. Sua importância está relacionada à formação dos estudantes nos aspectos cognitivos, emocionais, sociais e culturais, proporcionando-lhes as bases necessárias para o prosseguimento de seus estudos e seu desenvolvimento como cidadãos. Nesta seção, faremos uma abordagem geral sobre os aspectos históricos do Ensino Fundamental no país, destacando sua evolução ao longo do tempo e o contexto em que se consolidou.

A trajetória do Ensino Fundamental no Brasil remonta às primeiras iniciativas educacionais, que surgiram no período colonial. Durante longos anos, o sistema educacional brasileiro foi marcado pela desigualdade de acesso à educação básica, principalmente entre as classes sociais mais vulneráveis. No entanto, ao longo do tempo, foram implementadas diversas políticas públicas com o objetivo de ampliar o acesso e melhorar a qualidade do Ensino Fundamental.

Um marco importante na história do Ensino Fundamental no Brasil ocorreu com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), em 1996. Essa lei estabeleceu as diretrizes e bases da educação nacional, orientando a organização e o funcionamento de todos os níveis de ensino, incluindo o Ensino Fundamental. A LDB trouxe avanços significativos, como a universalização do Ensino Fundamental obrigatório, a garantia de acesso e permanência na escola, bem como a valorização dos profissionais da educação.

Desde então, o Ensino Fundamental passou por diversas mudanças e adaptações, sempre buscando acompanhar as demandas educacionais e as transformações sociais. A valorização da diversidade, a inclusão de alunos com necessidades educacionais especiais e a implementação de metodologias inovadoras são algumas das características que têm pautado as discussões e práticas pedagógicas atuais.

No contexto atual, o Ensino Fundamental no Brasil enfrenta desafios significativos, como a melhoria da infraestrutura escolar, a formação continuada dos professores e a superação das desigualdades regionais. Estudos destacam que essas desigualdades, especialmente as regionais e raciais, são fatores determinantes na qualidade e no acesso à educação básica, reforçando a necessidade de políticas públicas que promovam maior equidade no sistema educacional (Silva,

2010). No entanto, é indiscutível o papel fundamental que essa etapa da educação desempenha na formação dos estudantes, preparando-os para os desafios da vida acadêmica e contribuindo para a formação de cidadãos críticos e participativos.

Em suma, o Ensino Fundamental no Brasil tem uma importância indiscutível na educação básica, sendo responsável por proporcionar aos estudantes as bases necessárias para o seu desenvolvimento integral. Ao longo de sua história, essa etapa de ensino tem passado por transformações significativas, sempre buscando atender às necessidades e demandas da sociedade. O desafio atual é garantir que todos os estudantes tenham acesso a uma educação de qualidade, que os prepare para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo e contribua para a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Além disso, é necessário investir na formação adequada dos professores, para que eles possam oferecer um ensino que estimule o interesse e a participação dos alunos. É fundamental que a escola esteja preparada para acolher e atender às necessidades de cada aluno, respeitando suas diferenças e promovendo a inclusão.

Outro ponto importante é a valorização da educação como um todo. É fundamental que a sociedade reconheça a importância do Ensino Fundamental na formação dos cidadãos e que sejam destinados recursos adequados para a área. Conforme discutido por Saviani (2008), o fortalecimento da educação básica é uma etapa essencial para o desenvolvimento do país, sendo o investimento nesse setor crucial para a construção de um futuro melhor.

Portanto, é necessário que governantes, educadores, pais e toda a sociedade estejam engajados na busca por uma educação de qualidade para todos. Somente através de uma atuação conjunta e comprometida será possível superar os desafios e garantir que o Ensino Fundamental no Brasil cumpra sua função de formar cidadãos conscientes, críticos e participativos. A educação é o caminho para um futuro mais promissor e cabe a todos nós fazer a diferença.

2.2 Antecedentes Históricos.

O Ensino Fundamental no Brasil possui raízes históricas que remontam ao período colonial. Durante o Brasil Colônia, a educação era restrita à elite, sendo organizada principalmente pelos jesuítas, que criaram escolas voltadas para a formação religiosa e cultural dos filhos da nobreza. No entanto, com a chegada da família real portuguesa ao Brasil, em 1808, começaram a ser tomadas as primeiras medidas para ampliar o acesso à educação, como a criação das escolas régias, que passaram a atender também a população não pertencente à nobreza (Romanelli, 1986). Essas mudanças foram o início de um longo processo de democratização da educação,

que, ao longo do tempo, buscou oferecer oportunidades educacionais a um número maior de pessoas, embora de forma lenta e gradual (Saviani, 2008).

Essa democratização foi fundamental para promover o desenvolvimento do país, pois somente através da educação é possível construir uma sociedade mais justa e igualitária. No entanto, apesar dos avanços conquistados ao longo dos anos, ainda há muitos desafios a serem enfrentados. A desigualdade social e econômica permanece como um obstáculo à plena democratização do Ensino Fundamental, que ainda precisa garantir que todas as crianças e adolescentes tenham acesso a uma educação de qualidade, independentemente de sua origem social ou econômica.

2.3 Criação do Ensino Fundamental

A partir da implementação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1961, o Ensino Fundamental no Brasil passou a ser uma realidade. Essa legislação revolucionária estabeleceu a obrigatoriedade da educação básica, assegurando o direito de todas as crianças brasileiras ao acesso à etapa fundamental da formação acadêmica.

Antes da aprovação da LDB de 1961, o sistema educacional brasileiro se dividia entre ensino primário e ensino secundário, não existindo uma etapa específica voltada ao Ensino Fundamental. Com a implementação dessa importante lei, buscou-se uma maior organização e estruturação do sistema educacional no país, tornando o Ensino Fundamental uma etapa obrigatória e universal para todas as crianças.

Essa medida representou um avanço significativo no cenário educacional brasileiro, proporcionando a construção de uma base sólida para o desenvolvimento intelectual, social e pessoal dos estudantes. Além de garantir o acesso à educação, o Ensino Fundamental tem como objetivo principal promover a formação integral dos indivíduos, preparando-os para os desafios do mundo contemporâneo.

Ao tornar o Ensino Fundamental obrigatório, a LDB de 1961 possibilitou que mais crianças tivessem a oportunidade de frequentar a escola e adquirir conhecimentos essenciais para a vida em sociedade. Isso contribuiu para a redução das desigualdades sociais, já que a formação básica é um fator primordial para o desenvolvimento humano e o exercício da cidadania.

Com a consolidação do Ensino Fundamental como etapa fundamental do percurso educacional, o Brasil deu um passo importante rumo à democratização do acesso à educação. Através dessa medida, o país buscou promover a igualdade de oportunidades e a melhoria da qualidade do ensino, visando a formação de cidadãos críticos, reflexivos e participativos na sociedade.

Portanto, o Ensino Fundamental no Brasil, instituído pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1961, abriu portas para uma educação mais inclusiva, equitativa e de qualidade. Trata-se de um marco histórico na educação brasileira, que reconhece a importância do desenvolvimento integral dos indivíduos desde a infância, contribuindo para a construção de uma sociedade mais justa e democrática.

2.4 Primeiras diretrizes educacionais

O estabelecimento das primeiras diretrizes educacionais no Brasil ocorreu no início do século XX, com a influência do movimento da Escola Nova, que surge como uma resposta aos desafios do ensino tradicional e busca uma educação mais voltada para a realidade social e prática. Essas diretrizes visavam proporcionar uma formação de qualidade, estimulando formas de ensino mais dinâmicas e participativas, capazes de despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes.

Nesse sentido, a criação de escolas primárias passou a ser estimulada, com o objetivo de promover o aprendizado básico de leitura, escrita e cálculo, fundamentais para o desenvolvimento educacional das crianças. Priorizou-se também a necessidade de formar professores qualificados e comprometidos com a educação, reconhecendo a importância do papel do educador na formação dos jovens brasileiros.

Dessa forma, as primeiras diretrizes educacionais do Ensino Fundamental no Brasil buscaram estabelecer uma base sólida para o sistema educacional, valorizando não apenas o desenvolvimento cognitivo, mas também o desenvolvimento social dos alunos. Foi reconhecido o papel da escola como espaço de socialização, onde os estudantes podem aprender a conviver em sociedade, respeitando as diferenças e contribuindo para a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Além disso, percebeu-se a importância de integrar os conhecimentos teóricos à prática, buscando uma educação mais contextualizada e significativa para os alunos. Assim, foram implementadas metodologias de ensino que valorizavam a interdisciplinaridade, estimulando a participação ativa dos estudantes, o diálogo e o trabalho colaborativo. A ideia era que os alunos pudessem aplicar na prática os conhecimentos adquiridos em sala de aula, contribuindo para o seu desenvolvimento integral.

Portanto, as primeiras diretrizes educacionais do Ensino Fundamental no Brasil representaram um marco importante na história da educação, buscando transformar o sistema educacional e garantir a formação de cidadãos críticos, reflexivos e protagonistas de sua própria aprendiza-

gem. A partir dessas diretrizes, foram estabelecidos os fundamentos que orientam até hoje a educação no país, destacando a importância da educação como instrumento de transformação social e de construção de um futuro melhor para todos.

2.5 Expansão e reformas do Ensino Fundamental

A expansão e reforma do Ensino Fundamental no Brasil engloba diversos momentos importantes, que contribuíram para o desenvolvimento e aprimoramento da educação no país. Durante a década de 1930, ocorreu uma significativa expansão da oferta do que conhecemos hoje como Ensino Fundamental, que proporcionou a criação de um maior número de escolas e a expansão do acesso à educação básica. Esse período foi marcado pela implementação de políticas educacionais que buscavam democratizar o ensino, tornando-o mais acessível a todos os brasileiros.

Na década de 1960, destaca-se a reforma educacional proposta pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) de 1961, que trouxe mudanças significativas para o Ensino Fundamental. Uma das principais alterações promovidas por essa legislação foi a unificação do Ensino Primário e do Ensino Médio em uma única etapa de nove anos, tornando o processo educacional mais integrado e coerente. Essa medida permitiu uma melhor articulação entre os conteúdos e uma formação mais completa para os estudantes.

Posteriormente, na década de 1990, foram implementadas diversas reformas no Ensino Fundamental, visando sempre a melhoria da qualidade do ensino e da formação dos alunos. Uma das principais mudanças foi a ampliação da carga horária, permitindo aos estudantes um maior tempo de estudo e um aprofundamento maior nos conteúdos. Além disso, novos conteúdos curriculares foram introduzidos, de maneira a acompanhar as transformações sociais e tecnológicas da época.

Todas essas transformações foram pensadas e implementadas com o objetivo de garantir uma educação mais inclusiva e de qualidade para todos os estudantes brasileiros. A busca por uma educação que atenda às necessidades e demandas da sociedade é uma constante, e o Ensino Fundamental desempenha um papel fundamental nessa construção. Portanto, é essencial que as políticas educacionais continuem avançando, promovendo mudanças e aprimoramentos constantes, de forma a garantir uma educação de excelência para as futuras gerações.

2.6 O Ensino Fundamental na Constituição de 1988

O Ensino Fundamental na Constituição de 1988 foi um marco significativo e transformador para a área da educação no magnífico país do Brasil. Graças a essa legislação, o Ensino Fundamental passou a ser compulsório e inteiramente gratuito para todas as crianças com idades compreendidas entre os 7 e 14 anos. Além desse importante avanço, a Constituição também estipulou que o Estado, por sua vez, deveria garantir o acesso incondicional e a permanência efetiva dos estudantes nas instituições de ensino, assegurando, sem qualquer margem de dúvida, a equidade de oportunidades tanto para os alunos residentes em áreas urbanas quanto para aqueles que habitam o âmbito rural.

Outro ponto crucial que essa legislação inovadora estabeleceu foi a progressividade no processo de ministração do Ensino Fundamental, que passou a ser executado ao longo de um período mínimo de 9 anos. Além disso, a Constituição enfatizou que o ensino deveria ser pautado em princípios absolutamente essenciais, tais como a igualdade de oportunidades em relação ao ingresso e permanência na escola, a plena liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e disseminar a cultura, o pensamento, a arte e o saber. Foi ainda destacado o imprescindível pluralismo de ideias e concepções pedagógicas, a gestão democrática no âmbito do ensino público, assim como elementos igualmente relevantes.

Em síntese, a Constituição de 1988 marcou um profundo e indelével momento de mudança no panorama educacional do Brasil, ao estabelecer uma série de princípios e diretrizes que visam assegurar uma educação de qualidade, inclusiva e equitativa para todas as crianças brasileiras. Essa legislação, repleta de avanços e conquistas, tem o poder de transformar não apenas a vida das crianças e jovens, mas também a sociedade como um todo, ao proporcionar uma base sólida e abrangente para o desenvolvimento de futuras gerações preparadas para os desafios do mundo contemporâneo.

2.7 Programas e políticas educacionais para aprimorar a qualidade de ensino

O Ensino Fundamental no Brasil é regulamentado por diversos programas e políticas educacionais. Entre eles, destaca-se o Programa Nacional de Fortalecimento da Educação (ProFNE), criado em 1996, que busca melhorar significativamente a qualidade do ensino por meio de investimentos em infraestrutura, formação de professores qualificados e desenvolvimento de materiais didáticos inovadores e diversificados.

Além disso, o Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE), lançado em 2007, visa ga-

rantir o acesso universal, a permanência e aprendizagem progressiva de todos os alunos no Ensino Fundamental, estabelecendo metas ambiciosas e implementando estratégias eficazes para o cumprimento desses objetivos.

Já o Programa Dinheiro Direto na Escola (PDDE) tem como nobre objetivo repassar recursos financeiros de forma direta e transparente às escolas, possibilitando assim uma gestão mais autônoma e eficiente, e favorecendo consideravelmente a melhoria contínua das condições de funcionamento, infraestrutura e qualidade pedagógica das instituições de ensino envolvidas.

Essas iniciativas fundamentais refletem o compromisso do Brasil em promover uma educação pública de excelência, inclusiva e acessível a todos os estudantes, com o intuito de desenvolver plenamente suas potencialidades e prepará-los para os desafios do século XXI.

2.8 Desafios e problemas atuais

Atualmente, o Ensino Fundamental no Brasil enfrenta diversos desafios e problemas que impactam significativamente a qualidade da educação. Um dos principais desafios que precisa ser encarado de frente é a falta de infraestrutura adequada nas escolas, o que afeta diretamente o ambiente de aprendizagem dos estudantes, comprometendo a sua capacidade de absorver conhecimento de forma efetiva. Essa situação, frequentemente mencionada em relatórios como os do UNICEF (2018) e do Todos Pela Educação (2021), gera um ciclo vicioso, em que alunos desmotivados têm dificuldades em acompanhar o desenvolvimento escolar.

Além disso, a formação deficiente de professores também é uma questão premente. Muitos profissionais ainda enfrentam dificuldades em lidar com a diversidade dos alunos, incluindo aqueles que possuem necessidades especiais, e em aplicar práticas pedagógicas atualizadas. Isso ocorre, em grande parte, devido à ausência de investimentos consistentes em programas de capacitação docente. Estudos como os de Gatti (2010) e Libâneo (2013) que ressaltam que a falta de formação continuada limita a capacidade dos educadores de atender às necessidades individuais de seus alunos. É essencial implementar políticas que promovam a atualização constante dos professores, alinhando a prática pedagógica às demandas do século XXI.

A falta de investimento financeiro é outro ponto crucial que precisa ser abordado. A presença de recursos didáticos e tecnológicos nas escolas é indispensável para oferecer um ambiente favorável ao aprendizado e estimular o interesse dos alunos. Contudo, como destacado pelo INEP (2023) e pela UNESCO (2015), muitas escolas ainda enfrentam carências significativas nesse aspecto, prejudicando a qualidade da educação. É urgente que haja um aumento substancial nos investimentos destinados à educação, garantindo acesso a recursos modernos e

eficientes para todas as escolas.

Outro fator relevante é a baixa qualidade das políticas públicas de educação. A ausência de planejamento e a falta de estratégias eficazes dificultam a implementação de ações que promovam melhorias significativas na aprendizagem dos alunos. Saviani (2008) e Barreto (2013) destacam que as políticas públicas educacionais no Brasil frequentemente carecem de coerência e abrangência, o que compromete os avanços desejados. Uma reformulação completa das políticas educacionais, com a participação ativa de professores, pais, estudantes e especialistas, é essencial para criar um plano que atenda verdadeiramente às necessidades da comunidade escolar.

Por fim, não se pode ignorar a persistência da desigualdade social e da falta de inclusão como fatores que afetam negativamente o Ensino Fundamental. A ausência de acesso e oportunidades para crianças em situação de vulnerabilidade gera uma segregação educacional preocupante. Conforme argumentado por Soares e Alves (2017) e Freire (1996), é fundamental implementar políticas que reduzam as desigualdades e promovam a inclusão, garantindo que todas as crianças, independentemente de sua origem social, tenham acesso igualitário a uma educação de qualidade.

Dessa forma, é inquestionável que esforços consideráveis são necessários para superar esses desafios e garantir uma educação de qualidade para todos os estudantes brasileiros. O envolvimento de governantes, gestores escolares, professores, alunos, pais e da sociedade em geral é indispensável. Apenas por meio de um esforço coletivo será possível construir um futuro mais igualitário e desenvolver plenamente o potencial de cada estudante que passa pelo Ensino Fundamental. A educação é a base da transformação de uma nação, e é nosso papel coletivo assegurar que essa transformação seja para melhor.

2.9 Avaliação e qualidade do Ensino Fundamental

A avaliação e a qualidade do Ensino Fundamental são aspectos fundamentais para o desenvolvimento educacional do Brasil. A avaliação no Ensino Fundamental é realizada por meio de processos contínuos e sistemáticos, que permitem verificar o desempenho dos alunos e identificar possíveis dificuldades de aprendizagem.

Além disso, é importante ressaltar a importância da qualidade do ensino oferecido. Para garantir uma educação de qualidade, é necessário investir em professores bem capacitados, infraestrutura adequada, recursos pedagógicos atualizados e programas educacionais eficientes. A melhoria na avaliação e na qualidade do Ensino Fundamental é essencial para garantir o pleno

desenvolvimento dos estudantes e prepará-los para os desafios futuros.

É de suma importância que haja uma avaliação constante e abrangente, visando não apenas o desempenho individual dos alunos, mas também o progresso do sistema educacional como um todo. Tendo isso em mente, é crucial que as escolas adotem métodos de avaliação inovadores, que vão além das tradicionais provas e testes escritos. É necessário criar ambientes de aprendizagem que estimulem a participação ativa dos estudantes, promovendo atividades práticas, debates e projetos colaborativos.

Além disso, é fundamental que os professores recebam um suporte adequado, por meio de programas de formação continuada e acesso a recursos educacionais de qualidade. Dessa forma, será possível aprimorar a qualidade do ensino, proporcionando uma educação mais inclusiva e de excelência.

Para tanto, é imprescindível que haja um investimento significativo em políticas públicas voltadas para a educação, garantindo recursos financeiros suficientes para suprir as necessidades das escolas e promover a valorização dos profissionais da educação. Somente assim poderemos construir uma sociedade mais justa e igualitária, onde todos os estudantes tenham acesso a uma educação de qualidade e o pleno desenvolvimento de suas potencialidades.

2.10 Formação de professores

A formação de professores no contexto do Ensino Fundamental no Brasil é fundamental para garantir a qualidade da educação oferecida. A formação inicial dos docentes compreende a graduação em cursos de licenciatura, onde são abordados conteúdos pedagógicos e disciplinares, além de estágios supervisionados em escolas. No entanto, é importante destacar que a formação continuada também desempenha um papel relevante, pois possibilita atualizações constantes para os professores, permitindo que eles acompanhem as mudanças no campo da educação e inovem em suas práticas.

Dessa forma, programas e políticas de formação tanto inicial como em serviço são essenciais para desenvolver competências e habilidades necessárias para o docente atuar de forma qualificada e inovadora, promovendo o aprendizado dos alunos de maneira significativa e engajadora. Além disso, a formação continuada proporciona espaço para a troca de experiências entre os professores, possibilitando um ambiente colaborativo e de aprendizado mútuo.

A formação de professores deve estar alinhada com as demandas da sociedade e com as necessidades dos estudantes, considerando seu contexto social e cultural. Para isso, é importante que os profissionais da educação tenham acesso a recursos e técnicas pedagógicas atualizadas,

bem como a oportunidade de participar de programas de desenvolvimento profissional, como cursos, oficinas e eventos de capacitação.

A formação de professores também deve incluir a reflexão sobre a prática pedagógica, estimulando os docentes a analisarem criticamente suas ações e a buscar constantemente a melhoria de sua atuação. Além disso, a formação continuada pode auxiliar os professores a lidarem com desafios específicos, como a diversidade na sala de aula, o uso de tecnologias educacionais e a promoção da inclusão.

O investimento na formação de professores é fundamental para o fortalecimento da educação brasileira. Por meio de programas e políticas adequadas, é possível formar docentes capacitados, preparados para enfrentar os desafios da sala de aula e capazes de promover um ensino de qualidade. A formação de professores deve ser vista como um processo contínuo, ao longo de toda a carreira, garantindo que os profissionais estejam sempre atualizados e em constante evolução, para melhor atender às necessidades dos alunos e contribuir para a construção de uma educação mais igualitária e transformadora.

2.11 Inclusão e diversidade no Ensino Fundamental

O tema da inclusão e diversidade no Ensino Fundamental ganhou destaque nas últimas décadas no Brasil devido à necessidade de garantir a igualdade de oportunidades para todos os estudantes. A inclusão, que se refere à garantia do acesso e permanência de todos os estudantes na escola, independente de suas diferenças e necessidades educacionais, é uma pauta fundamental na construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

No contexto do Ensino Fundamental, promover a inclusão significa promover ações que atendam às especificidades de cada aluno, considerando suas habilidades, limitações e diversidades étnicas, culturais, sociais e de gênero. Dessa forma, é necessário criar um ambiente educacional inclusivo, que valorize e respeite a diversidade presente em sala de aula.

Para isso, é fundamental o desenvolvimento de práticas pedagógicas inclusivas, que contemplem diferentes metodologias de ensino e estratégias de aprendizagem adaptadas às necessidades de cada aluno. Além disso, é importante investir na formação de professores, proporcionando a eles as ferramentas e recursos necessários para lidar de forma efetiva com a diversidade presente na escola.

Além do aspecto pedagógico, a inclusão também envolve aspectos estruturais e políticas públicas que garantam o acesso e a permanência desses alunos na escola regular. É necessário investir em infraestrutura adequada, garantindo que todas as escolas estejam adaptadas para

receber e atender as necessidades de alunos com deficiência, por exemplo.

No entanto, mesmo com os avanços conquistados, ainda há desafios a serem enfrentados. A falta de infraestrutura adequada e de formação de professores são alguns dos obstáculos que dificultam a efetiva implementação da inclusão no Ensino Fundamental. É necessário buscar soluções para essas questões, promovendo investimentos na área educacional e garantindo que todos os profissionais estejam preparados para lidar com a diversidade presente em sala de aula.

Em suma, a inclusão e diversidade no Ensino Fundamental são temas de suma importância e necessitam de ações efetivas para garantir a igualdade de oportunidades a todos os estudantes. É papel do estado, das instituições educacionais e de toda a sociedade trabalhar em conjunto para construir um ambiente escolar inclusivo, onde cada aluno seja valorizado e tenha seus direitos assegurados. Somente assim poderemos formar cidadãos conscientes e preparados para viver em uma sociedade verdadeiramente diversa.

2.12 Participação da comunidade escolar

A participação ativa e engajada da comunidade escolar no Ensino Fundamental é de extrema importância para o pleno desenvolvimento do processo educacional. É por meio dessa participação que se possibilita a criação de um ambiente escolar ainda mais acolhedor, estimulante e propício ao aprendizado dos alunos. Os pais, responsáveis, alunos e membros da comunidade desempenham papéis fundamentais nesse contexto, sendo essenciais para o fortalecimento e aprimoramento da educação.

A comunidade escolar pode colaborar de diversas maneiras para o aperfeiçoamento do ensino. Além de participar ativamente das reuniões, é válido envolver-se nos conselhos de escola e nas associações de pais e mestres. Essas instâncias asseguram que a voz de todos seja ouvida, permitindo a construção coletiva de soluções para desafios e demandas específicas da comunidade.

Esse engajamento também pode se estender para além do âmbito escolar, abrindo espaços para enriquecimento curricular e parcerias com instituições e profissionais da comunidade. Palestras, projetos educativos e outras atividades podem contribuir significativamente para a formação integral dos estudantes, ampliando seus horizontes e proporcionando experiências enriquecedoras.

Dessa forma, a participação efetiva da comunidade escolar promove um ciclo virtuoso de engajamento e fortalecimento no processo educativo. A união de esforços entre todos os envolvidos - professores, alunos, pais, responsáveis e membros da comunidade - não apenas fortalece

os laços entre a escola e a comunidade, como também potencializa o desenvolvimento dos alunos, contribuindo para a excelência do Ensino Fundamental.

2.13 Recursos e infraestrutura escolar

A disponibilidade de recursos e de infraestrutura adequada é uma condição necessária para o funcionamento eficiente das escolas de Ensino Fundamental no Brasil. Isso envolve tanto os materiais didáticos, como livros, cadernos, lápis, borrachas e apontadores, quanto os recursos tecnológicos, como computadores e acesso à internet para a realização de atividades pedagógicas online.

Além disso, é essencial que as escolas contem com espaços físicos apropriados, como salas de aula com boa iluminação e ventilação, carteiras em boas condições, quadros interativos, quadras esportivas com estrutura básica para a prática regular de atividades físicas, laboratórios de ciências equipados com os instrumentos necessários e bibliotecas organizadas e com acervo atualizado. A gestão educacional, nesse sentido, deve considerar a infraestrutura como parte estratégica da garantia do processo de ensino e aprendizagem, conforme destaca Luck (2001), ao afirmar que a organização do espaço escolar influencia diretamente as práticas pedagógicas e a formação dos estudantes.

Entretanto, observa-se que muitas instituições, especialmente aquelas localizadas em regiões socialmente vulneráveis, ainda enfrentam deficiências significativas nessas áreas. É comum a ausência de materiais básicos, equipamentos tecnológicos desatualizados, salas de aula superlotadas e instalações com problemas estruturais, como infiltrações, pintura descascada e banheiros em condições precárias.

Esse cenário compromete a qualidade do ensino e dificulta o desenvolvimento pleno dos estudantes, que não dispõem de um ambiente adequado para aprender. Diante disso, torna-se necessário investir na melhoria dos recursos materiais e da infraestrutura escolar, com o objetivo de promover condições equitativas de aprendizagem para todos. Cabe ao poder público, às instituições de ensino e à sociedade civil atuarem conjuntamente para garantir que as escolas ofereçam condições mínimas de funcionamento, contribuindo para a justiça social no campo educacional.

2.14 Tecnologia na educação básica

A presença da tecnologia na educação básica tem se intensificado nas escolas brasileiras. O uso de recursos tecnológicos visa ampliar as possibilidades pedagógicas, tornando as aulas

mais interativas e favorecendo o acesso dos alunos a diferentes fontes de informação, por meio de dispositivos como computadores, tablets e conexão à internet.

Além disso, os recursos digitais podem contribuir para o desenvolvimento de competências relacionadas ao uso consciente da tecnologia e favorecer a inclusão de estudantes com deficiência, ao oferecer instrumentos adaptados às suas necessidades específicas.

Contudo, para que a inserção tecnológica tenha impactos positivos no processo de ensino e aprendizagem, é necessário que seja conduzida com planejamento e intencionalidade pedagógica. A formação e a capacitação docente são aspectos fundamentais nesse processo, pois possibilitam que os professores utilizem as ferramentas de forma alinhada às propostas curriculares. Nesse sentido, conforme argumenta Luck (2001), a gestão educacional deve compreender a incorporação da tecnologia como parte integrante da organização pedagógica da escola, considerando-a dentro de uma perspectiva estratégica de transformação educacional.

A adoção de tecnologias digitais deve estar associada a um projeto educativo coerente, de modo a contribuir efetivamente para a aprendizagem dos estudantes e para a preparação destes diante das exigências do mundo contemporâneo.

2.15 Perspectivas futuras

O Ensino Fundamental no Brasil apresenta diversas perspectivas para o futuro. Entre elas, destaca-se a ampliação do acesso à educação de qualidade para crianças e adolescentes, em consonância com o direito à educação garantido pela Constituição Federal. Para isso, é necessário o desenvolvimento de políticas públicas que assegurem não apenas o acesso, mas também a permanência dos estudantes no sistema escolar.

Outro ponto relevante refere-se à formação e à valorização dos professores, com ações voltadas à qualificação inicial e continuada, bem como à melhoria das condições de trabalho. A oferta de programas de capacitação e a implementação de planos de carreira podem contribuir para a atração e retenção de profissionais qualificados, fundamentais para o fortalecimento das práticas pedagógicas.

A promoção da inclusão e o reconhecimento da diversidade no ambiente escolar demandam políticas que enfrentem situações de discriminação e preconceito. Além disso, requerem práticas pedagógicas sensíveis às diferenças culturais, sociais e individuais dos estudantes, favorecendo o diálogo e o respeito mútuo.

A melhoria das condições físicas das unidades escolares é outra dimensão essencial, pois

influencia diretamente o processo de ensino e aprendizagem. Isso envolve ações estruturais, como reformas, ampliações e manutenção de espaços escolares, bem como a disponibilização de recursos pedagógicos, bibliotecas, laboratórios, equipamentos digitais e conectividade. De acordo com Luck (2001), a gestão educacional deve considerar a organização física da escola como elemento estratégico para a promoção da aprendizagem, pois o ambiente escolar interfere nas práticas docentes e no desenvolvimento dos estudantes.

A integração de tecnologias digitais ao cotidiano escolar também se configura como uma tendência relevante. O uso de dispositivos eletrônicos, plataformas virtuais e ferramentas interativas pode ampliar o repertório pedagógico dos professores, apoiar diferentes estilos de aprendizagem e aproximar a escola das novas demandas da sociedade. No entanto, o uso da tecnologia deve ser orientado por intencionalidade pedagógica, de modo a complementar — e não substituir — o papel do professor. Práticas inovadoras, como a aprendizagem baseada em projetos, o ensino híbrido e a gamificação, ganham destaque nesse contexto, exigindo formação específica e espaços institucionais que favoreçam a reflexão e a troca de experiências.

A construção de uma educação de qualidade no Ensino Fundamental exige o envolvimento de todos os agentes do sistema educacional: gestores, professores, estudantes, famílias e comunidade. Para que as transformações desejadas se concretizem, é fundamental que haja investimento articulado em políticas públicas, formação docente, recursos materiais e ações que coloquem a educação como um dos pilares do desenvolvimento social e econômico do país.

3 A Metodologia Investigativa

3.1 Quebrando Paradigmas

No passado, as aulas de matemática eram pautadas na transmissão unidirecional de conhecimentos, em que o docente proferia suas explicações e os discentes praticavam incessantemente definições, técnicas e demonstrações. Tal modelo gerava uma atividade tediosa e automática. Contudo, essa abordagem educacional demonstrou-se ineficaz, "pois a mera reprodução exata apenas evidenciava que o aluno havia aprendido a imitar, mas não compreendido o conteúdo em si"(Brasil, 1998, p. 30).

Nesse processo educativo engessado, enfatiza-se apenas a ciência a ser ensinada, desconsiderando o discente como aprendiz, como aquele que se envolve e participa da construção de seus conhecimentos.

A Metodologia Investigativa, atribui ao educador o dever de promover momentos de problematização em sala de aula, propondo atividades, desafios e solução de problemas do mundo real, que favoreçam a interação, a descoberta de novos saberes e a manipulação de materiais. Isso implica em um ensino ativo no qual o docente se percebe como sujeito que organiza situações didáticas envolvendo seus alunos para gerar novas aprendizagens (Malheiro e Fernandes, 2015; Malheiro, 2016).

Consequentemente, é importante ressaltar que as metodologias ativas de aprendizagem, como a experimentação investigativa, desempenham um papel essencial no processo de ensino. Essas metodologias despertam o interesse dos alunos e favorecem uma forma de aprendizado diferenciada, onde as opiniões, concepções e ideias dos estudantes são valorizadas. Esse processo contribui não apenas para a construção do conhecimento matemático, mas também para a promoção do pensamento crítico-reflexivo. Diversos estudos, como os de Carvalho et al. (2009), Carvalho (2013) e Almeida (2017), evidenciam a importância dessas metodologias no contexto educacional. Com isso, podemos concluir que a experimentação investigativa é uma abordagem eficaz e relevante para a aprendizagem dos alunos, proporcionando uma educação de qualidade.

3.2 A Metodologia Investigativa em Sala de Aula

A experimentação desempenha um papel fundamental no ensino de matemática, pois proporciona aos alunos a oportunidade de vivenciar e compreender conceitos matemáticos de maneira concreta e prática, promovendo um envolvimento mais significativo com o conteúdo. Segundo estudos sobre práticas pedagógicas no ensino básico (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2015), a experimentação permite que os alunos explorem, investiguem e testem hipóteses, desenvolvendo não apenas competências matemáticas, mas também habilidades de pensamento crítico e analítico. Essa abordagem também facilita a construção de conexões entre a teoria estudada em sala de aula e sua aplicação prática, tornando o aprendizado mais interessante e motivador.

Ao implementar a experimentação, os alunos são incentivados a participar ativamente do processo de aprendizagem, vivenciando, observando e analisando fenômenos matemáticos. Isso fortalece a compreensão dos conceitos e fomenta uma visão mais ampla e profunda da matemática. Ainda de acordo com os autores, a experimentação torna os conceitos mais acessíveis, especialmente para aqueles que enfrentam dificuldades em internalizar ideias abstratas.

A prática experimental também promove maior autonomia e responsabilidade no aprendizado dos alunos, que são desafiados a formular questões, propor soluções e refletir sobre os resultados obtidos. Essa abordagem, conforme apontado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2015), contribui para o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e para a construção de uma maior autoconfiança ao enfrentar desafios e situações complexas.

Por fim, a experimentação no ensino de matemática tem um impacto positivo no desenvolvimento de habilidades sociais e emocionais dos estudantes. Durante as atividades em grupo, eles aprendem a trabalhar em equipe, comunicar-se de forma eficaz e colaborar na resolução de problemas. Como enfatizado pelos autores, essas competências são essenciais no mundo contemporâneo, onde a capacidade de colaboração é indispensável.

Em resumo, a experimentação no ensino de matemática desempenha um papel fundamental na educação dos alunos, proporcionando uma abordagem prática e concreta para a aprendizagem dos conceitos matemáticos. Ao permitir que os alunos explorem, investiguem e testem hipóteses, a experimentação promove o desenvolvimento do pensamento crítico, analítico e criativo. Além disso, ao estabelecer relações entre teoria e prática, a experimentação torna a matemática mais relevante e interessante para os alunos. Por fim, ao desenvolver habilidades de resolução de problemas, tomada de decisão e trabalho em equipe, a experimentação prepara os alunos para os desafios do mundo atual. (Barbosa et al., 2021).

3.3 O Papel Crucial da Experimentação no processo de Ensino-Aprendizagem de matemática

“A experimentação é intrínseca à natureza humana”. Por esse motivo, crianças pequenas se expõem ao perigo ao tentar conhecer tudo que as rodeia, os jovens testam seus limites e os adultos experimentam para aperfeiçoar seus conhecimentos na culinária, no trânsito, no jogo, etc. De acordo com Lorenzato (2010), essa ação assume o sentido de pôr à prova, ensaiar, verificar um determinado fenômeno, investigar. Na escola, a experimentação é um processo que permite ao aluno se envolver com o conteúdo em estudo, levantar hipóteses, procurar alternativas, avaliar resultados, assim como participar das descobertas e socializações com seus colegas. Portanto, as atividades experimentais possuem um caráter motivador, promovendo o raciocínio, a reflexão, a construção do conhecimento e uma melhor compreensão das etapas de ação das ciências (Rosito, 2000; Laburú, 2006; Lorenzato, 2010; Malheiro, 2016).

De acordo com Lorenzato (2010), experimentar é valorizar também a construção do conhecimento em vez do resultado. Mais importante do que conhecer a solução é saber como encontrá-la. Esse aspecto desperta o interesse do aluno e favorece a aprendizagem com significado, pois "só é possível explicar um fenômeno a partir do momento em que este seja pessoalmente significativo, a partir do momento em que a curiosidade seja despertada nos estudantes"(Francisco Junior; Ferreira e Hartwig, 2008, p. 36).

A utilização da experimentação em sala de aula requer que o professor tenha um bom conhecimento do assunto a ser aprendido pelos alunos, que os objetivos estejam bem definidos, que as estratégias de ensino e abordagem estejam adequadas, e que os materiais didáticos estejam disponíveis (Laburú, 2006; Lorenzato, 2010). Segundo Carvalho et al. (2009, p. 12), o educador deve saber de antemão quais dificuldades seus alunos podem ter e que perguntas eles podem fazer, além das que ele mesmo deverá fazer para que os alunos tenham a possibilidade de expressar o que estão pensando.

Sobre os materiais, muitos professores acreditam que o ensino experimental exige equipamentos avançados e sofisticados. No entanto, conforme afirmam Rosito (2000) e Carvalho et al. (2009), é possível realizar experimentos na sala de aula, ou mesmo fora dela, utilizando materiais de baixo custo.

A experimentação pode ser organizada de muitas maneiras, desde estratégias que buscam simplesmente ilustrar ou verificar leis, até aquelas que estimulam a criatividade dos alunos e proporcionam condições para refletirem e reverem suas ideias sobre os mais variados fenômenos. Araújo e Abib (2003) acrescentam ainda que as práticas experimentais podem ser classifi-

cadadas em três tipos de abordagens ou modalidades: atividades de demonstração, de verificação e de investigação.

Os experimentos de demonstração caracterizam-se pela simples ilustração de alguns aspectos dos conteúdos abordados. É um exercício centrado no professor, pois somente ele executa o ensaio experimental enquanto os alunos observam os fenômenos ocorridos. Geralmente são integradas nas aulas expositivas, sendo realizadas no início, com o intuito de despertar o interesse do aluno para o tema a ser estudado, ou no término da lição ou módulo temático, como forma de relembrar os conceitos apresentados (Araújo e Abib, 2003; Oliveira, 2010).

Já as práticas de verificação são empregadas com a finalidade de verificar a validade de uma lei ou teoria. Pelo fato de necessitar da abordagem prévia do conteúdo, essa modalidade deve ser aplicada após a aula expositiva. Ao educador cabe a função de propor o experimento e fiscalizar as ações dos alunos (Araújo e Abib, 2003). Conforme Oliveira (2010), a desvantagem desse tipo de atividade consiste na pouca contribuição na aprendizagem de conceitos e nos resultados relativamente previsíveis, o que não estimula a curiosidade e a participação proativa dos estudantes.

As atividades experimentais investigativas representam uma estratégia em que experimentos qualitativos são propostos como forma de investigar as relações e conceitos em foco. Os alunos ocupam uma posição mais ativa no processo de construção do conhecimento, assumindo uma maior participação nas etapas a serem desenvolvidas (Araújo e Abib, 2003; Oliveira, 2010; Malheiro, 2016; Almeida, 2017).

Para Sasseron (2013), a investigação está relacionada à pesquisa, podendo acontecer tanto em meios científicos e acadêmicos quanto em sala de aula. O mais importante não é o seu fim, mas o caminho trilhado. Segundo a autora, o essencial é que esses momentos de ensino apresentem uma problemática instigante, assim como condições para resolvê-la. Malheiro e Fernandes (2015) acrescentam que o uso do trabalho experimental investigativo tem o objetivo de resolver um problema real, constituindo uma estratégia pedagógica com potencial inovador, por permitir o trabalho em grupo, a pesquisa e a construção de novos conhecimentos e, portanto, potenciadora de aprendizagens mais amplas e significativas para os alunos (Malheiro e Fernandes, 2015, p. 80).

Assim, a atividade experimental deve surgir a partir da problematização de um conteúdo, pois se uma aula for organizada de forma a colocar o aluno diante de um problema, "poderá contribuir para o aluno raciocinar logicamente sobre a situação e apresentar argumentos na tentativa de analisar os dados e apresentar uma conclusão plausível" (Suart e Marcondes, 2008, p. 3). Outro aspecto importante na modalidade experimental investigativa é o papel do pro-

fessor, pois o experimento, sua interpretação e expressão em linguagem científica deixam de ser sua única responsabilidade, passando a assumir a função de problematizador e estimulador de perguntas e reflexões dos estudantes. Desta maneira, existe uma troca de saberes entre os sujeitos envolvidos no ato educativo, necessariamente comunicativo, pelo qual se constrói um conhecimento novo (Francisco Junior; Ferreira e Hartwig, 2008).

Dentro deste contexto teórico, Carvalho et al. (2009) e Carvalho (2013) propõem Sequências de Ensino Investigativo (SEI) focadas em práticas experimentais de investigação voltadas para o ensino fundamental. Estas sequências consistem em propostas de aulas abrangendo um tópico do programa escolar em que cada atividade é planejada levando em consideração o material e as interações didáticas

Diante desses pressupostos, optamos pela utilização da experimentação investigativa como ferramenta didática para o ensino de matemática, pois compreendemos que essa abordagem facilita um ensino ativo, por meio da promoção de atividades e tarefas que incentivam os estudantes a exporem seus conhecimentos e pensamentos sobre os conteúdos em destaque.

3.4 A Experimentação no Processo de Ensino-Aprendizagem de matemática

A exploração é uma estratégia de aprendizagem avançada que permite aos estudantes ampliarem seus conhecimentos matemáticos por meio da investigação e descoberta. Ao envolver os alunos em atividades exploratórias, eles são incentivados a explorar e experimentar diferentes conceitos matemáticos de forma ativa e autônoma (Ramos 2024).

Essa abordagem tem como objetivo promover a compreensão profunda dos conteúdos ao explorar de forma aprofundada os conceitos matemáticos, desenvolver habilidades de pensamento crítico por meio de desafios intelectuais e, assim, estimular a curiosidade e o interesse dos alunos pela matemática de maneira ainda mais intensa.

Durante essa etapa de aprendizado, os estudantes são desafiados a formular perguntas instigantes, propor hipóteses inovadoras que explorem novas perspectivas matemáticas, realizar experimentos meticulosos e minuciosos que investigam diferentes cenários e situações matemáticas complexas, e analisar, de maneira criteriosa e metódica, tanto os resultados obtidos como os processos que conduziram a esses resultados, de maneira a aprimorar ainda mais suas habilidades de análise e interpretação (Silva Filho, 2023).

Essa abordagem facilita e possibilita a construção do conhecimento de forma muito mais significativa para os alunos, uma vez que eles se tornam os protagonistas de seu próprio pro-

cesso de aprendizagem e têm a grande oportunidade de vivenciar a matemática de maneira concreta, real e totalmente contextualizada com situações do dia a dia, o que contribui para um entendimento mais profundo e uma assimilação mais sólida dos conceitos matemáticos. Isso cria um ambiente de aprendizagem muito mais participativo, estimulante e desafiador, onde os alunos são incentivados a explorar, investigar, experimentar e resolver problemas matemáticos de forma ativa e autônoma.

Essa abordagem também permite que os alunos desenvolvam habilidades como o pensamento crítico, a colaboração, a comunicação e a resolução de problemas de forma independente, tornando-os preparados para enfrentar os desafios do mundo atual e futuro, onde é cada vez mais importante ter uma sólida base matemática. Portanto, é fundamental valorizar e aplicar essa abordagem no ensino da matemática, pois ela realmente faz a diferença na formação dos estudantes, proporcionando uma educação mais completa e significativa (Bernardino e dos Santos, 2023).

O quadro a seguir sintetiza as etapas que compõem a exploração investigativa, conforme descrito por Carvalho et al. (2009). Essas etapas destacam o papel ativo do professor na proposição de problemas e na orientação dos estudantes ao longo do processo experimental, promovendo o envolvimento prático e reflexivo dos alunos. A tabela 3.1 apresentada ilustra como a experimentação pode ser conduzida de forma sistemática, integrando ações investigativas, análise de resultados e conexão com o cotidiano.

Etapas	Descrição
O professor propõe o problema	O professor divide a turma em grupos pequenos. Em seguida, propõe o problema aos estudantes e distribui o material experimental.
Agindo sobre os objetos para ver como eles reagem	Os alunos se familiarizam com o material experimental e verificam suas reações, com assistência do professor quando necessário, mas sem respostas prontas..
Agindo sobre os objetos para obter o efeito desejado	Os estudantes devem agir para obter o efeito desejado enquanto o educador supervisiona e pede relatórios das ações
Tomando consciência de como foi produzido o efeito desejado	Depois do professor resolver o problema, ele recolhe o material e organiza os alunos, que relatam como resolveram para conscientizá-los. O professor presta atenção.
Dando explicações causais	O professor deve pedir que os alunos expliquem os motivos da solução encontrada, buscando uma justificativa científica.
Escrevendo e desenhando	Etapas de sistematização individual do conhecimento em que os estudantes escrevem/desenham sobre a experiência, relatando o que fizeram, explicando o porquê do fenômeno e o que aprenderam.
Relacionando atividade e cotidiano	O momento em que se ultrapassa a manipulação dos objetos e se propõem atividades que contextualizam o conhecimento e aprofundam o conteúdo abordado pela experimentação. Estratégias e materiais didáticos variados podem ser utilizados, como vídeos, imagens, textos, apresentações, jogos e simulações.

Tabela 3.1: Etapas da Experimentação Investigativa - Fonte: Adaptado de Carvalho et al. (2009)

4 A Metodologia Colaborativa

4.1 Quebrando Paradigmas

A Escola Tradicional surge no final do século XVIII e início do século XIX, na Prússia, sendo fortemente influenciada pela educação espartana, que priorizava a disciplina, a obediência e a competição. De acordo com Veiga (2007), tal modelo educacional estruturou-se de forma a reproduzir verdadeiras dinâmicas político-ditatoriais, formando cidadãos conformados com o status quo. Além disso, as escolas prussianas apresentavam características físicas semelhantes às fábricas e aos presídios, com grades, muros, portões e horários rigorosamente definidos. Esses ambientes eram marcados pelo tédio e pela transmissão de conteúdos de maneira estática, sustentando um currículo linear e rígido.

Curiosamente esta lógica de educação foi exportada para os continentes europeus e latino-americanos, tendo reproduzidas, até a contemporaneidade, falhas em concepções básicas de ensino e aprendizagem, de uma maior importância ao desenvolvimento individual e coletivo dos jovens e em práticas que desenvolvam valores humanos como liberdade, cooperação, solidariedade, empatia e proatividade.

Especialmente, em matemática, o resultado é ainda mais alarmante com indicadores oficiais que identificam o insucesso do sistema educacional e da forma como se ensina matemática, totalmente desalinhada, por exemplo, aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs.

De acordo com o Ministério da Educação (1998):

a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas, entre ela e os Temas Transversais, entre ela e o cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.

Portanto, faz-se necessário pensar em um novo paradigma de educação, que contemple valores como democracia, autonomia e cooperação, e que respeite e valorize os conhecimentos prévios, vivências e experiências humanas.

Segundo Vygotsky (1896-1924), o desenvolvimento de um indivíduo é constituído por dois níveis: o real, na qual a criança consegue realizar as atividades individualmente e o potencial, que envolve um conjunto de atividades em que esta demandará assistência de outras pessoas (seja ela um adulto ou uma criança mais experiente) para realizar tais atividades. (*apud* Craidy e Kaercher, 2001)

Nesta perspectiva entende-se a importância de um ensino que potencialize a capacidade e o desenvolvimento individual através da interação e interpessoalidade em um ambiente que favoreça a troca de experiências e diversidades de pensamentos. O ensino colaborativo corrobora com tais ideias uma vez que é concebida como uma prática construtivista que potencializa a troca de experiências e a heterogeneidade de pensamentos.

De acordo com Finkel e Monk (1983):

A aprendizagem colaborativa representa um abandono significativo da típica abordagem centrada no professor, ou centrada em aulas expositivas em sala de aula. Nas salas colaborativas, a aula expositiva não pode desaparecer totalmente, mas deve continuar ao lado de outros processos que são baseados em discussão de estudantes e trabalho ativo com o material do curso. Em geral, professores que adotam abordagens de aprendizagem colaborativa passam a se ver, não tanto como especialistas transmissores de conhecimentos para os estudantes, e mais como projetistas de experiências intelectuais para estudantes, como orientadores ou facilitadores de um processo de aprendizagem mais avançado.

4.2 Aspectos Históricos da aprendizagem colaborativa

O registro de experiências com práticas educativas em ambientes colaborativos inicia-se no século XVII. Entre os anos de 1774 e 1826, George Jardine, professor de lógica e filosofia da Universidade de Glasgow solicitou aos seus alunos a elaboração de textos coletivos. Jardine avaliava seus discentes em duplas e redirecionava, quando necessário, suas práxis às necessidades dos alunos durante o processo de ensino-aprendizagem (Gaillet, 1994).

As primeiras experiências com esquemas colaborativos, em escolas tradicionais como a Lancaster School ocorreram início do século XIX. Já, no final deste século, o Coronel Francis Parker, superintendente das escolas públicas norte-americanas, introduz aprendizagens em grupo (Johnson; Johnson 1992, 1998, *apud* Gilliam, 2002).

No início do século XX surge o movimento conhecido como Nova Escola embasado nas ideias de Jean Piaget, Maria Montessori e Jhon Dewey, e enfatizando, dentre outros aspectos,

a importância do papel do aluno no processo de ensino-aprendizagem. Os escolanovistas respeitavam uma educação que contemplasse a democracia e o respeito às diferenças, entendendo que, cada indivíduo em um processo educativo tem sua singularidade temporal de aprendizagem não podendo, portanto, admitir a mera transmissão sem o devido respeito a tais aspectos. Desta forma, o professor passa a ter um papel fundamental de facilitador do processo de ensino do aluno e fomentador da sua curiosidade e interesse.

John Dewey, um dos principais expoentes do movimento escolanovista, defendia o uso de ambientes colaborativos como parte fundamental do processo educativo. Para Dewey, a educação ocorre por meio da constante reflexão e reorganização das experiências vividas, um processo que só se torna plenamente possível em uma sociedade democrática. Nesse contexto, a liberdade de opinião e a participação ativa dos indivíduos são elementos essenciais para dinamizar a construção de teorias e práticas pedagógicas (Dewey, *apud* Teixeira, 1971). Ainda, de acordo com Dewey (2010) o principal objetivo de uma educação tradicional e conservadora é “preparar o jovem para as suas responsabilidades futura e para o sucesso na vida [...]”.

Quanto à nova educação, esta assume um papel de desenvolvimento individualizado, onde cada criança, propõe as atividades livremente e as experiências vividas serão grandes promotores das aprendizagens significativas.

Célestin Freinet, pedagogo, outro ícone escolanovista, desenvolvia sua forma de ensino centrada no aluno, com enfoque às atividades manuais, cujo objetivo era torná-las mais ativas e dinâmicas tornando-as futuras catalizadoras de uma transformação social. Para Freinet era através das experiências que as crianças chegariam ao verdadeiro conhecimento (Costa, 2006).

De acordo com Hohmann (1984):

A aprendizagem ativa pode ser definida como “aprendizagem que é iniciada pelo sujeito que aprende, no sentido de que é executada pela pessoa que aprende, em vez de lhe ser apenas «passada» ou «transmitida».”

De acordo com Behrens (1999):

A Escola Nova foi acolhida no Brasil, proposta por Anísio Teixeira, por volta de 1930, num momento histórico de efervescência de ideias, aspirações e antagonismos políticos, econômicos e sociais. Apresenta-se como um movimento de reação à pedagogia tradicional e busca alicerçar-se com fundamentos da biologia e da psicologia dando ênfase ao indivíduo e sua atividade criadora.

Na década de 1950 surge a teoria interacionista de Jean Piaget embasados em estudos da dinâmica da construção cognitiva e colocando o sujeito como um ser que interage constantemente e ativamente com o ambiente, incorrendo assim, o seu desenvolvimento (Piaget, *apud*

Munari, tradução Saheb, 2010). Tal concepção corroborava as ideias de Vygotsky que também destacava a importância da interação e socialização entre indivíduos no desenvolvimento e construção do conhecimento.

Na década de 1960, diversas pesquisas foram realizadas sobre os temas de cooperação e competição em crianças, destacando-se os trabalhos de Kagan, o Movimento de Aprendizagem por Investigação com Bruner, e os estudos de Suchman sobre Aprendizagem Programada e Modificação de Comportamento, com base na abordagem de Skinner. Ainda no final dessa década, David e Roger Johnson iniciaram, na Universidade de Minnesota, a formação de professores em estratégias de aprendizagem cooperativa (JOHNSON; JOHNSON, *apud* GILLIAM, 2002). No mesmo período, professores de escolas de ensino médio na Inglaterra também conduziram estudos relacionados a práticas colaborativas. Edwin Mason, Charity James e Leslie Smith, docentes da Faculdade Goldsmith, da Universidade de Londres, propuseram a inclusão de elementos democráticos na educação, em oposição a abordagens autoritárias, especialmente no contexto da guerra do Vietnã.

É relevante mencionar que a bióloga M. L. J. Abercrombie (1964) já utilizava as ideias desses educadores, aplicando práticas colaborativas entre residentes de medicina para o desenvolvimento de diagnósticos clínicos. Após uma década de observações, Abercrombie identificou que os estudantes da Universidade de Londres apresentavam melhor desempenho na formulação de diagnósticos quando trabalhavam em pequenos grupos, em comparação com o trabalho individual (BRUFFE, 1984).

No começo da década de 1970, alguns professores de universidades americanas perceberam a enorme dificuldade que os alunos recém-ingressos possuíam para adaptar-se a nova realidade universitária e sendo assim muitos iniciaram pesquisas e desenvolveram trabalhos acerca do ensino colaborativo. Na mesma década ocorreu em Tel Aviv, Israel, a primeira conferência que discutiria sobre o ensino cooperativo (Johnson; Johnson 1992, 1998, *apud* Gilliam, 2002).

Segundo Johnson (1992):

Esquemas cooperativos comparados aos tradicionais (competitivos) tendem a promover entre os estudantes maior motivação para trabalhar, na medida em que se mostram mais interessantes, divertidos e agradáveis, e também implicam em uma maior pressão para se obter sucesso nas metas estabelecidas.

Entretanto, somente na década de 1990 a aprendizagem colaborativa ganha popularidade entre educadores do ensino superior. David e Roger Johnson e Karl Smith adaptam a aprendizagem cooperativa para a sala de aula de faculdades e escrevem *Aprendizagem Ativa: Cooperação na Sala de Aula Universitária*.

4.3 aprendizagem colaborativa e Cooperativa: Diferências e Convergências.

É frequente, nas escolas tradicionais, os alunos organizados em grupo, todavia, trabalhando, individualmente para resolverem as tarefas propostas. Não há, entre si, discussão de ideias, compartilhamento de experiências, portanto, a aprendizagem colaborativa.

Neste ponto, Fiorentini (2004) afirma existir diferenças importantes entre, simplesmente, agrupar os estudantes e, factualmente, estruturar a colaboração entre eles. Colaborar não significa distribuir um trabalho ao grupo para que um membro o realize. Não é pedir tarefas individuais, em que os estudantes que terminam antes ajudam os outros, não é, unicamente, uma divisão de recursos.

Segundo Fiorentini (2004, p.40):

Na cooperação os envolvidos executam tarefas que não necessitam de negociação conjunta em relação relações desiguais e hierárquicas. Trabalham individualmente. Já na colaboração todos trabalham em conjunto, se apoiando, tendo um relacionamento não hierárquico.

Pioneiros na aprendizagem cooperativa, David W. Johnson e Roger T. Johnson na Universidade de Minnesota, Robert Slavin na Universidade Johns Hopkins e Elizabeth Cohen em Stanford dedicaram anos de pesquisa para elucidar o grau de afetação que ambientes cooperativos, competitivos e individuais impõem ao estudante, sejam nas habilidades cognitivas ou psico-sociais.

Segundo Johnson (1998), esquemas cooperativos comparados aos tradicionais (competitivos) tendem a promover entre os estudantes maior motivação para trabalhar, na medida em que se mostram mais interessantes, divertidos e agradáveis, e também implicam em um maior comprometimento com o sucesso das metas estabelecidas.

Torres e Irala (2007, p.19) diferenciam aprendizagem colaborativa e cooperativa da seguinte forma:

De acordo com a tabela 4.1 , a colaboração é uma filosofia de interação e um estilo de vida pessoal, enquanto que a cooperação é uma estrutura de interação projetada para facilitar a realização de um objetivo ou produto final. Assim, pode-se dizer que a aprendizagem colaborativa é muito mais que uma técnica de sala de aula, é uma maneira de lidar com as pessoas que respeita e destaca as habilidades e contribuições individuais de cada membro do grupo.

Grupos de aprendizagem colaborativa	Grupos de trabalho tradicional
Interdependência positiva	Não há interdependência
Responsabilidade individual	Não há responsabilidade individual
Heterogeneidade	Homogeneidade
Liderança partilhada	Há um líder designado
Responsabilidade mútua partilhada	Não há responsabilidade partilhada
Preocupação com a aprendizagem	Ausência de preocupação com as aprendizagens dos outros elementos do grupo
Ênfase na tarefa e também na sua continuidade	Ênfase na tarefa
Ensino direto das relações interpessoais	É assumida a existência das relações interpessoais
Professor: observa e intervém	O professor não intervém no funcionamento do grupo
O grupo acompanha a sua produtividade	O grupo não acompanha a sua produtividade

Tabela 4.1: Características observadas entre grupos de aprendizagem colaborativa e tradicional
- Fonte: Adaptado de Carvalho et al. (2009)

4.4 aprendizagem colaborativa: Aspectos Metodológicos

Para que a aprendizagem colaborativa seja efetiva faz-se necessário verificar a existência de algumas características específicas que não atuam isoladamente, mas são interdependentes.

A interdependência positiva caracteriza-se por uma relação de dependência mútua, sem qualquer viés hierárquico, que se cria entre entes de um grupo e que pode conseguir-se através da implementação de estratégias específicas de realização, onde se incluem a divisão de tarefas de diferenciação de papéis, atribuição de recompensas, estabelecimento de objetivos comuns para todo a célula e realização de um único produto (Marreiros, 2001, Johnson e Johnson 1999 a).

Portanto, a interdependência positiva estabelece um ambiente de empatia, pois o sucesso individual não é suficiente. Estabelece-se, portanto, um compromisso com o sucesso de outras pessoas. Para Pujolàs (2001) citando Putnam (1993) e Johnson e Johnson (1994) interdependência positiva só se verifica quando os estudantes tiverem a convicção de que navegam no mesmo barco e que se salvam juntos ou afundam juntos.

Deste modo, os entes de um grupo colaborativo têm uma dupla responsabilidade: aprender o que o professor lhes ensina e procurar que todos os estudantes do grupo aprendam o mesmo.

Assim, há uma interdependência positiva quando todos os estudantes do grupo se sentem corresponsáveis pela aprendizagem de todos.

De acordo com Pujolàs (2001), há cinco modalidades de interdependência principais:

- a interdependência positiva de finalidades;
- a interdependência positiva de recompensa/celebração;
- a interdependência de tarefas;
- a interdependência de recursos;
- a interdependência de papéis.

A interdependência de finalidades manifesta-se quando todos os integrantes de um grupo trabalham em direção a um propósito comum, com a consciência de que os objetivos só serão alcançados se, e somente se, cada membro do grupo também obtiver sucesso.

Quando o grupo atinge seus objetivos, cada integrante sente-se recompensado e celebra o sucesso coletivamente com seus companheiros. Esse fenômeno caracteriza a interdependência positiva de recompensa e celebração. A atribuição de recompensas ou a comemoração de conquistas alcançadas pelos grupos de aprendizagem colaborativa atua como um poderoso incentivo. Essa prática eleva o entusiasmo e a autoconfiança dos indivíduos e do grupo como um todo, promovendo uma maior motivação para o engajamento em novas aprendizagens.

A interdependência de tarefas acontece quando os entes de um mesmo grupo se organizam para realizar uma tarefa que lhes foi dada como, por exemplo, resolver um problema ou preparar determinado tema.

A interdependência de tarefas está de alguma forma ligada à interdependência de recursos. Cada ente do grupo retém, apenas, uma parte dos recursos, informação ou materiais necessários à concretização de uma certa tarefa. Para que o grupo consiga atingir o objetivo, far-se-á necessário o compartilhamento do material que possuem.

Por fim, a interdependência de papéis ocorre quando cada integrante do grupo desempenha uma função específica que está diretamente relacionada às dos demais. Nesse contexto, o sucesso do grupo depende de que cada membro assuma, com responsabilidade e eficácia, o papel que lhe foi atribuído, contribuindo de maneira indispensável para a realização dos objetivos coletivos.

O segundo elemento essencial da aprendizagem é a responsabilidade pessoal e o compromisso individual. Cada indivíduo deve sentir-se responsável, não somente por alguma demanda individual, mas, também, pela atividade deliberada ao grupo. Portanto, a necessidade de preocupar-se não só consigo, mas com outros cria laços de empatia, proatividade e sinergia

para com os outros entes do grupo. O jovem se sente útil, inserido em um meio, aumentando, por fim, sua autoestima.

A responsabilidade individual implica que cada estudante do grupo seja avaliado e que o grupo saiba que a sua avaliação é o resultado dessas avaliações individuais. A finalidade dos grupos de aprendizagem colaborativa é que os estudantes aprendam juntos para, posteriormente, poderem desempenhar sozinhos as tarefas que lhe são propostas (Johnson e Johnson 1999 a).

O terceiro elemento da aprendizagem colaborativa é interação frente-a-frente ou cara-a-cara. A este propósito, Johnson e Johnson (1999 a) consideram que algumas atividades cognitivas e interpessoais só podem realizar-se quando cada educando promove a aprendizagem dos seus companheiros, explicando verbalmente como resolver os problemas (falar ajuda a pensar) ao analisar conceitos que estão sendo aprendidos, ou ainda ensinar o que sabe aos seus companheiros.

Desta forma, ao promover a aprendizagem pessoal, os entes do grupo adquirem um compromisso uns com os outros, assim como com os seus objetivos comuns, criando assim, tramas de relacionamentos interpessoais com compartilhamentos de liderança.

O quarto componente da aprendizagem colaborativa consiste em ensinar aos estudantes algumas competências sociais e grupais. Além da natural necessidade de aprender as competências acadêmicas, também precisam aprender competências sociais: empatia, tolerância, proatividade etc; necessárias para que este funcione como parte de um grupo colaborativo.

Pujolás (2001) considera que para que cada educando seja responsável pela tarefa que lhe foi atribuída deve utilizar e desenvolver corretamente um conjunto de competências sociais de modo que:

- Todos os estudantes se conheçam e confiem uns nos outros;
- dentro do grupo haja um diálogo aberto, direto;
- todos os estudantes do grupo respeitem as diferenças individuais e se apoiem uns aos outros;
- resolvam de forma construtiva os eventuais conflitos que surjam dentro do grupo.

Tal como diz Pujolás (2001, p.79):

Os estudantes não nascem com estas competências sociais, nem elas surgem espontaneamente. Elas têm de ser ensinadas e trabalhadas de forma correta e

sistemática de modo a permitir aos educando a sua aquisição e consequente utilização no trabalho da célula. Quanto maior for o nível das competências sociais atingidas por cada estudante da célula, maior será o rendimento e aproveitamento da célula cooperativo.

O quinto e último elemento da aprendizagem cooperativa é a avaliação grupal. Johnson e Johnson (1999 a) afirmam que esta avaliação ocorre quando os alunos analisam em que medida os objetivos do grupo foram atingidos, levando em consideração as regras definidas, anteriormente. Devem, também, determinar quais as atitudes positivas e negativas e quais as condutas que o grupo deve manter ou modificar.

Pujolàs (2001) considera necessário, inclusive, que tal avaliação seja feita de forma continuada, durante o processo, permitindo ao grupo refletir sobre o seu funcionamento garantindo, assim, aos seus membros, o *feedback* do seu desempenho oportunizando a afirmação em alguns comportamentos e a modificação em outros. Caso contrário, é possível que o trabalho do grupo torne-se inócuo fazendo com que o professor não o utilize na sala de aula ou então o faça esporadicamente.

Todavia, nem os adolescentes, nem os adultos sabem de forma inata como trabalhar em grupo com êxito.

Puttnam (1993), citado por Pujolàs (2001) afirma que a colaboração não ocorre de forma automática, requerendo tempo e trabalho. Portanto, um grupo, hoje, ineficaz num determinado ofício poderá, futuramente, obter sucesso, se os seus membros interagirem e refletirem sobre os problemas, de tal modo que, quanto maior for a aquisição das competências sociais, maior será o rendimento da célula.

5 A BNCC e o Ensino de Números.

5.1 Diretrizes e Práticas

A unidade temática de Números tem como propósito promover o desenvolvimento do pensamento numérico, o qual engloba habilidades como quantificar atributos de objetos e interpretar argumentos baseados em quantidades. Durante o processo de construção da noção de número, os alunos são desafiados a compreender conceitos como aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, que são fundamentais para a compreensão matemática. É enfatizado que, para alcançar esse objetivo, é crucial oferecer aos alunos situações significativas que permitam a exploração e a ampliação dos campos numéricos, destacando diferentes formas de representação e operações (BNCC, 2017, p. 266).

No Ensino Fundamental, especialmente nos cinco primeiros anos, há um foco na resolução de problemas como estratégia para aprimorar a compreensão dos conceitos relacionados aos números. Para os anos finais, espera-se que os alunos sejam capazes de resolver problemas envolvendo números naturais, inteiros e racionais, empregando diversas estratégias e compreendendo os processos subjacentes. Além disso, é ressaltada a importância de apresentá-los a problemas geométricos que demandam o uso de números irracionais, ampliando assim sua compreensão sobre os diferentes tipos de números. Os alunos também devem adquirir habilidades no cálculo de porcentagens, juros, descontos e acréscimos, incluindo a utilização de tecnologias digitais. Quanto à compreensão dos números reais, espera-se que saibam reconhecê-los, compará-los e ordená-los, utilizando a reta numérica como recurso auxiliar. Destaca-se ainda que "o desenvolvimento do pensamento numérico é complementado e enriquecido quando relacionado a conteúdos de outras áreas da Matemática, como Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidades e Estatística" (BNCC, 2017, p. 267).

A resolução de problemas, como já mencionado, requer uma abordagem cuidadosa ao propor problemas contextualizados e relevantes para os alunos, evitando situações distantes de seu cotidiano. Ademais, os próprios alunos devem ser incentivados a elaborar e resolver seus próprios problemas, promovendo assim um maior engajamento e compreensão dos conceitos matemáticos.

A BNCC define oito competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental.

Aqui estão elas:

1. Reconhecer e interpretar diferentes significados das representações simbólicas e seus contextos de uso, como expressões numéricas, algébricas, geométricas, tabelas, gráficos, diagramas, esquemas, entre outros.],[Reconhecer e interpretar diferentes significados das representações simbólicas e seus contextos de uso, como expressões numéricas, algébricas, geométricas, tabelas, gráficos, diagramas, esquemas, entre outros.
2. Resolver situações-problema que envolvam a utilização de conhecimentos matemáticos, selecionando procedimentos e estratégias adequados, justificando resultados e identificando as diferentes etapas da resolução.
3. Comunicar-se matematicamente de forma oral, escrita e/ou por meio de representações, como gráficos, tabelas, diagramas, esquemas, entre outros, interpretando informações e resultados apresentados.
4. Investigar e descrever regularidades e/ou padrões em sequências numéricas, geométricas, algébricas, entre outras, utilizando diferentes estratégias de representação e análise.
5. Reconhecer e estabelecer relações entre diferentes representações de um mesmo objeto matemático, como números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais, entre outros.
6. Utilizar métodos e técnicas apropriadas para resolver problemas envolvendo operações matemáticas, como adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, incluindo seus algoritmos e propriedades.
7. Compreender e aplicar conceitos de geometria, como forma, espaço, transformações geométricas, congruência, semelhança, propriedades de figuras planas e espaciais, relações métricas e trigonométricas, entre outros.
8. Interpretar e representar dados estatísticos e probabilísticos em diferentes contextos, reconhecendo e analisando informações apresentadas em tabelas, gráficos, diagramas, esquemas, entre outros.

Quanto às habilidades que envolvam os números irracionais descreve-se:

- (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

- (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
- (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes negativos e fracionários. Racionalizar expressões envolvendo operações com radicais. Compreender o processo de racionalização de expressões envolvendo radicais.
- (EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

5.2 A BNCC e a Metodologia Investigativa: Conexões e Perspectivas

A metodologia investigativa na educação constitui uma abordagem pedagógica que se destaca por sua capacidade de engajar os estudantes em um processo ativo e reflexivo de aprendizagem. Essa abordagem, que coloca o aluno como protagonista do seu próprio processo educacional, visa estimular não apenas a aquisição de conhecimentos, mas também o desenvolvimento de habilidades cognitivas, socio emocionais e metacognitivas.

Ao estabelecer uma relação entre a metodologia investigativa e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), percebe-se uma profunda consonância entre esses dois elementos no contexto educacional brasileiro. A BNCC, ao definir as competências e habilidades essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da educação básica, fornece um arcabouço que pode ser enriquecido e potencializado por meio da aplicação da metodologia investigativa.

No contexto específico do ensino da matemática no Ensino Fundamental, a metodologia investigativa revela-se particularmente relevante. Estudiosos como Paulo Freire e Lev Vygotsky destacaram a importância da construção ativa do conhecimento e do papel fundamental do diálogo e da interação social no processo de aprendizagem. Nesse sentido, a metodologia investigativa propicia um ambiente para a aplicação desses princípios, ao promover a exploração de situações-problema, a formulação de hipóteses, a experimentação, a coleta e análise de dados, e a construção compartilhada de significados matemáticos.

Ao utilizar a metodologia investigativa no ensino de matemática, os educadores têm a oportunidade de proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem ricas e significativas. Essas experiências não apenas contribuem para o desenvolvimento de competências específicas em matemática, como também promovem o desenvolvimento de habilidades transversais, tais como pensamento crítico, raciocínio lógico, resolução de problemas, comunicação matemática e trabalho em equipe.

Por meio da aplicação da metodologia investigativa, os estudantes são incentivados a se tornarem protagonistas ativos do seu processo de aprendizagem, assumindo um papel ativo na construção do conhecimento. Dessa forma, a metodologia investigativa não apenas atende aos princípios e diretrizes da BNCC, mas também contribui para a formação de cidadãos críticos, reflexivos e autônomos, capazes de enfrentar os desafios do mundo contemporâneo de maneira consciente e responsável.

5.3 A BNCC e a Aprendizagem Colaborativa: Integração e Possibilidades

A aprendizagem colaborativa, como abordagem pedagógica, destaca-se pela sua ênfase na cooperação entre os estudantes, promovendo a construção compartilhada do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades sociais e cognitivas. Essa metodologia, que enfatiza a interação entre os alunos e o trabalho em equipe, tem sido reconhecida como uma forma eficaz de promover a aprendizagem significativa e o desenvolvimento integral dos estudantes.

Ao relacionar a aprendizagem colaborativa com a BNCC, é possível identificar uma forte convergência entre esses dois elementos no contexto do ensino de matemática no Ensino Fundamental. A BNCC estabelece as competências e habilidades que todos os estudantes brasileiros devem desenvolver ao longo da educação básica, e a aprendizagem colaborativa pode ser uma estratégia eficaz para alcançar esses objetivos, especialmente no contexto do ensino da matemática.

No âmbito do ensino de matemática, a aprendizagem colaborativa pode ser aplicada de diversas formas, desde a resolução de problemas em grupos até a realização de projetos de investigação matemática. Estudiosos como Johnson e Johnson destacaram os benefícios da aprendizagem colaborativa, incluindo o desenvolvimento de habilidades sociais, como comunicação e trabalho em equipe, e o aprimoramento de habilidades cognitivas, como pensamento crítico e resolução de problemas.

Ao utilizar a aprendizagem colaborativa no ensino de matemática, os educadores têm a oportunidade de proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem mais dinâmicas e interativas. Essas experiências não apenas contribuem para o desenvolvimento de competências específicas em matemática, como também promovem o desenvolvimento de habilidades transversais, tais como colaboração, liderança e empatia, que são fundamentais para a formação integral dos estudantes.

Além disso, a aprendizagem colaborativa pode contribuir para a criação de um ambiente de sala de aula mais inclusivo e democrático, onde todos os alunos têm a oportunidade de participar

ativamente e contribuir para o processo de aprendizagem. Ao promover a interação entre os alunos e o compartilhamento de ideias e perspectivas, a aprendizagem colaborativa também pode ajudar a combater a desigualdade e a promover a diversidade no contexto educacional.

6 Abordagem do Conjunto dos Números Irracionais nos Livros Didáticos Nacionais

Segundo Silva (2021), os livros didáticos têm um papel crucial no ensino da matemática, pois são frequentemente utilizados como recursos e são considerados objetos de referência. Conforme afirmam os PCNs, os professores, por não terem recursos suficientes para as práticas em sala de aula, recorrem aos livros didáticos como principal recurso, mesmo que sua qualidade não seja boa.

De maneira geral, os livros didáticos abordam os conteúdos matemáticos através de definições, propriedades e exemplos, seguidos por atividades para verificar os assuntos estudados. Os conteúdos são tratados de forma sequencial, baseados nos documentos oficiais e currículos, e são influenciados pelos autores e pesquisadores que abordam os conhecimentos a serem ensinados.

Como o livro didático é frequentemente utilizado como recurso para a compreensão dos estudos matemáticos, compreende-se que uma análise sobre ele proporcionará uma melhor compreensão do ambiente de aprendizagem em sala de aula, revelando como esses conteúdos estão sendo abordados.

A questão do ensino inadequado dos números irracionais é ressaltada por Souto (2010), que argumenta que muitos alunos concluem o Ensino Fundamental e Médio sem compreender adequadamente esses conceitos. Ele sugere que parte desse problema reside na forma como os números irracionais são apresentados nos materiais didáticos.

Em sua pesquisa, Souto (2010) analisou nove dos dezesseis Livros Didáticos de matemática do Ensino Fundamental e cinco das oito coleções do Ensino Médio aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 2008. O estudo teve como objetivo investigar como a história da matemática foi abordada nesses materiais, utilizando categorias específicas de avaliação baseadas na análise preliminar de Ozamir e Perez (1993).

De acordo com esses autores, a história da matemática deve cumprir três objetivos: mostrar o processo de descobrimento matemático como algo vivo e em desenvolvimento, aceitar o significado dos objetos matemáticos em seu contexto institucional, pessoal e temporal, e estabelecer

distinções entre prova, argumentação e demonstração dos conceitos matemáticos.

A pesquisa de Souto (2010) se baseou na Teoria de Registros de Representação Semióticas de Durval (2003) e na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999). Seu objetivo era avaliar se a abordagem histórica dos números irracionais nos Livros Didáticos continha informações gerais, informações adicionais e estratégias didáticas. Os resultados revelaram que a maioria dos livros analisados apresentava abordagens históricas fragmentadas, com dados isolados e informações desprovidas de contexto.

Essas informações geralmente eram apresentadas ao longo ou no final dos textos, como elementos adicionais. Além disso, a praxeologia - as atividades envolvendo os números irracionais - era incompleta, focando principalmente em procedimentos de saber-fazer em detrimento de atividades mais reflexivas.

A pesquisa também destacou as limitações no tratamento do conceito de incomensurabilidade, que foi mencionado em apenas dois dos quatorze livros analisados.

A investigação conduzida por Silva (2010) enfatiza a relevância de explorar os aspectos algébricos e geométricos dos números reais no Ensino Fundamental, utilizando o teorema de Pitágoras como ponto de partida. Ao investigar os casos de comensurabilidade e incomensurabilidade de segmentos nesse contexto, Silva observou que muitos materiais didáticos abordam o teorema de Pitágoras superficialmente, sem estabelecer a distinção entre números racionais e irracionais.

A análise incluiu sete Livros Didáticos brasileiros de matemática, publicados entre a segunda metade do Século XIX e o final do Século XX. Embora a maioria desses livros tenha apresentado o teorema de Pitágoras com foco nos segmentos comensuráveis, um livro em particular, o de Souza (1910), se destacou ao abordar tanto segmentos comensuráveis quanto incomensuráveis de forma cuidadosa. O estilo dedutivo e axiomaticamente orientado desse livro, influenciado por autores como Euclides e Descartes, serviu de referência para outros textos da época.

Silva (2010) conclui que ao longo do tempo, os materiais didáticos foram se afastando das demonstrações relacionadas à incomensurabilidade de segmentos. Isso sugere que, para muitos professores, o material didático é a principal fonte teórica, determinando o ritmo e o conteúdo do ensino de matemática. Essa dependência excessiva pode ser problemática, como mencionado por Santos (2015), que descreve alguns professores e alunos como "prisoneiros do material didático".

Além disso, estudos como o de Oliveira (2001) e Costa (2001), citados por Silva (2010),

revelam deficiências na compreensão dos números irracionais por parte dos estudantes de matemática. A falta de entendimento sobre a incomensurabilidade entre segmentos e a necessidade dos irracionais são apontadas como causas principais. Silva sugere que uma abordagem geométrica, como a construção de triângulos retângulos, pode ajudar a elucidar esse conceito complexo para os alunos.

No entanto, a pesquisa de Almeida e Santos (2008) destaca preocupações adicionais, mostrando que muitos professores também têm dificuldades em identificar números irracionais e racionais em representações decimais, evidenciando a necessidade de uma formação mais sólida e abrangente.

6.1 Concepções de Números Irracionais na Perspectiva da Aprendizagem Significativa

Segundo Paz (2024), o conceito de números irracionais é de importância fundamental no ensino de matemática, pois é relevante tanto para a compreensão de conceitos matemáticos avançados quanto para sua aplicação em diversas áreas do conhecimento. No entanto, observa-se que o ensino dos números irracionais muitas vezes é limitado por abordagens simplificadas, que não contemplam suas especificidades conceituais de maneira adequada. Documentos curriculares oficiais, como os PCNs e a BNCC, enfatizam a necessidade de uma abordagem contextualizada e significativa dos números irracionais, indo além de uma visão puramente formal e axiomática.

Por outro lado, Paz (2024) afirma que as pesquisas indicam que, tanto os materiais didáticos, quanto os cursos de formação de professores, frequentemente, não oferecem um tratamento adequado desse conceito, o que pode resultar em lacunas conceituais entre alunos e professores. Diante dessa lacuna, o artigo propõe investigar as concepções de alunos do Ensino Médio sobre números irracionais, buscando identificar possíveis dificuldades e lacunas conceituais e fornecer *insights* para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais eficazes. Utilizando a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel como referencial teórico, o estudo busca subsidiar reflexões sobre a importância da construção do conceito de números irracionais no ensino de matemática.

Além disso, Paz (2024) destaca a necessidade de uma abordagem diferenciada no Ensino Superior, especialmente nos cursos de Licenciatura em matemática, que prepare adequadamente os futuros professores para lidar com os desafios do ensino dos números irracionais na educação básica. Ao identificar e abordar essas lacunas conceituais, espera-se contribuir para uma formação mais sólida e uma prática docente mais efetiva no ensino de matemática.

6.2 O ensino de matemática em uma perspectiva investigativa: a construção de alguns irracionais

Segundo Malfi (2016), é crucial apresentar atividades que promovam a prática da investigação matemática, especialmente focadas nos números reais, com ênfase nos números irracionais. Ele ressalta a importância de discutir considerações sobre o ensino e a aprendizagem desses conceitos, destacando a relevância das atividades investigativas em sala de aula.

Os PCNs enfatizam a necessidade de ampliar e aprofundar a compreensão dos números irracionais, reconhecendo sua importância para resolver problemas que os números racionais não conseguem solucionar.

Malfi (2016) aponta que o ensino dos números irracionais muitas vezes se limita a regras de operações matemáticas, sem conexão com o mundo real. Ele sugere que a abordagem desse tema deve ser integrada a outras áreas da matemática, como geometria e medidas, para tornar o aprendizado mais significativo e contextualizado. Além disso, o autor destaca o papel fundamental do professor na apresentação histórica da matemática, incentivando os alunos a se envolverem em práticas investigativas. Isso inclui agir como matemáticos na formulação de questões, conjecturas e provas.

Por fim, ainda conforme Malfi (2016), deve-se elaborar uma metodologia baseada em atividades de investigação matemática, nas quais os alunos têm a oportunidade de formular conjecturas, testá-las e, se necessário, prová-las. As atividades devem ser concebidas em prol da construção do conceito de número irracional, incentivando o trabalho em grupo para promover a comunicação matemática e a autonomia na construção do conhecimento.

6.3 Ensino Colaborativo em Ciências Exatas

A aprendizagem colaborativa envolve um esforço intelectual conjunto, com estudantes trabalhando em grupos para explorar ou aplicar material do curso. Baseia-se nas teorias de interdependência social de Lewin e Deutsch, promovendo motivação e habilidades sociais. De acordo com Barbosa (2024), é relevante revisar experiências de esquemas colaborativos em Ciências Exatas para distinguir claramente entre cooperação e colaboração e, assim, propor o termo “Ensino Colaborativo” para englobar práticas democráticas e humanizadas.

Barbosa (2024) afirma que, comparado ao ensino tradicional, o ensino colaborativo promove maior interesse e pressão para alcançar metas. Esta abordagem representa uma mudança significativa de uma metodologia centrada no professor para uma focada na interação dos es-

tudantes. As metas e processos de aprendizagem colaborativa podem variar, abrangendo desde tarefas estruturadas até atividades mais espontâneas, conforme os objetivos e interesses dos estudantes.

Pioneiros em aprendizagem cooperativa, como David W. Johnson e Roger T. Johnson, Robert Slavin e Elizabeth Cohen, dedicaram anos de pesquisa para elucidar as condições em que estruturas cooperativas, competitivas ou individualizadas afetam ou aumentam a realização dos estudantes. Barbosa (2024) observa que esquemas cooperativos, comparados aos tradicionais, tendem a promover maior motivação entre os estudantes, sendo mais interessantes, divertidos e agradáveis, além de implicarem em uma maior pressão para obter sucesso nas metas estabelecidas.

Em uma abordagem colaborativa, os professores se veem como facilitadores de um processo de aprendizagem mais avançado, projetando experiências intelectuais para os estudantes e orientando o trabalho em grupo de forma mais eficaz. Conforme destacado por Barbosa (2024), as atividades colaborativas podem variar desde tarefas estruturadas até processos mais espontâneos, dependendo dos objetivos e interesses dos estudantes. A aprendizagem cooperativa visa não apenas à aprendizagem acadêmica, mas também ao desenvolvimento de habilidades interpessoais.

A distinção entre cooperação e colaboração, segundo Barbosa (2024), está centrada na estrutura da tarefa do grupo, com esta última envolvendo uma coordenação mais complexa para alcançar um objetivo compartilhado. No entanto, ambos os conceitos enfatizam a participação ativa e a socialização durante o processo de aprendizagem. Esta abordagem colaborativa e cooperativa no ensino de Ciências Exatas representa uma oportunidade para promover uma prática mais democrática e humanizada, preparando os estudantes não apenas para o sucesso acadêmico, mas também para o desenvolvimento de habilidades sociais e colaborativas essenciais para o mundo contemporâneo.

7 O conjunto dos números irracionais

Este capítulo aborda o conjunto dos números irracionais, explorando sua definição, propriedades e classificação. O texto inicia com uma contextualização geométrica, exemplificando a incomensurabilidade de $\sqrt{2}$. Em seguida, diferencia números racionais e irracionais, analisando suas representações decimais e operações. Os números irracionais são classificados em algébricos e transcendentais, destacando exemplos notáveis, como π e e . Por fim, são apresentadas demonstrações rigorosas da irracionalidade de raízes quadradas de números primos e do número π , conectando teoria e prática matemática para fundamentar o tema.

7.1 Medida de um Segmento

Segundo Silva (2020), a medição de um segmento AB , representada por $\overline{AB}$, é um valor numérico que expressa quantas vezes o segmento AB contém uma unidade de medida u , previamente estabelecida. Considerando três segmentos, denotados por $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$, essa medição pode resultar nas seguintes três situações:

- O segmento u , se encaixa um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$, ou seja, $\overline{AB} = m \cdot u$, onde m é um número inteiro positivo.
- O segmento u não se encaixa um número inteiro de vezes em $\overline{CD}$, mas um submúltiplo de u — obtido dividindo-o em partes iguais — pode ser utilizado para medi-lo. Assim, $\overline{CD}$ pode ser expresso como $\overline{CD} = \frac{m}{n} \cdot u$, onde m e n são números inteiros positivos.
- Não existe um múltiplo de u , por menor que seja, que se encaixe um número inteiro de vezes em $\overline{EF}$.

Nos dois primeiros casos, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são considerados comensuráveis com a unidade de medida u , pois é possível expressá-los como um múltiplo ou submúltiplo dessa unidade.

Definição 7.1. Dois segmentos quaisquer são considerados **comensuráveis** quando eles podem ser medidos utilizando a mesma unidade de medida. Por outro lado, dois segmentos são considerados **incomensuráveis** quando não há uma unidade de medida, mesmo que seja mínima, que seja capaz de medir ambos os segmentos.

Definição 7.2. é uma relação entre duas grandezas na qual não existe uma unidade comum capaz de medi-las simultaneamente de forma exata.

Portanto, dois segmentos AB e CD são comensuráveis se, e somente se, podemos escrever:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}, \quad (7.1)$$

onde m e n são números inteiros, e $n \neq 0$.

Para exemplificar a existência de segmentos incomensuráveis, iremos apresentar o caso do lado (que será considerado igual a 1) e da diagonal de um quadrado, conforme ilustrado na Figura 7.1.

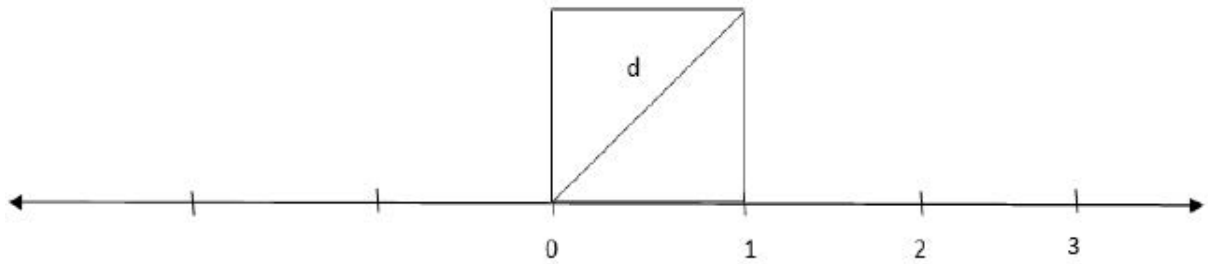


Figura 7.1: Representação Gráfica da $\sqrt{2}$

É importante observar que, caso a diagonal do quadrado, que denominaremos por d , seja comensurável com o lado, poderemos expressar isso da seguinte forma:

$$d = \frac{m}{n}, \quad (7.2)$$

onde m e n são números inteiros e a fração $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível.

Pelo Teorema de Pitágoras obtemos que

$$d^2 = 1^2 + 1^2. \quad (7.3)$$

Substituindo (7.2) em (7.3), obtemos

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \implies m^2 = 2n^2$$

Donde podemos concluir que m^2 é par e, portanto, m é par¹. Logo, existe um inteiro k tal que $m = 2 \cdot k$, donde concluimos que $(2k)^2 = 2n^2$, isto é, $2k^2 = n^2$. Ou seja, n também é par.

Chegamos, portanto, a uma contradição. De fato, como m e n são números inteiros e $\frac{m}{n}$ uma fração irredutível, não é possível que m e n sejam ambos números pares, pois teriam, pelo menos, o fator comum 2.

Assim, concluimos que a diagonal d é incomensurável com o lado 1, ou seja, não é possível expressar $\frac{m}{n}$ como uma fração com m e n sendo números inteiros.

A presença de segmentos incomensuráveis indica a inadequação dos números naturais e das frações para mensurar qualquer intervalo de reta. Como, então, determinar o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1? A solução encontrada pelos estudiosos da matemática foi expandir o conceito de número e introduzir os denominados números irracionais.

Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade (LIMA et al., 1996).

7.2 Definição de Números Racionais e Irracionais

Segundo Serafim (2020), é conhecido que os números decimais finitos e as dízimas periódicas são números racionais, uma vez que esses números podem ser expressos como frações. Podemos afirmar que os números irracionais são aqueles cuja representação decimal não é nem finita nem periódica, ou seja, números que não podem ser escritos como a divisão de dois números inteiros, com o divisor diferente de zero. O número irracional também pode ser definido como um número decimal da forma:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots,$$

que não é uma dízima periódica, ou seja, um número decimal que não pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, onde m é um número inteiro e n é um número inteiro não nulo.

Devemos observar que, ao considerarmos segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis, notamos que nem todo segmento possui uma medida que seja um número racional,

¹podemos provar, pela contra positiva que, se $p = 2k + 1$, com k inteiro, então p^2 é ímpar, e não par.

como é o caso da diagonal de um quadrado de lado unitário. Esses números cujas medidas representam segmentos incomensuráveis são chamados de números irracionais.

O conjunto dos números irracionais é normalmente representado pela letra maiúscula $\mathbb{I}$. Você também pode encontrá-lo representado como $(\overline{\mathbb{Q}})$ ou $(\mathbb{Q}')$, sendo este último símbolo utilizado para indicar o complementar do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$. Em outras palavras, dado um número real x , temos que $x \in \mathbb{I} \iff x \notin \mathbb{Q}$, o que implica que um número pertence ao conjunto dos números irracionais se, e somente se, ele não pertence ao conjunto dos números racionais.

O conjunto dos números irracionais não é fechado em relação à adição e nem em relação à multiplicação, como ocorre nos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais. Ou seja, dados dois números irracionais, não podemos afirmar que a soma desses números seja um número irracional, nem que o produto desses números seja um número irracional. Simbolicamente, podemos escrever:

Dados $x, y \in \mathbb{I}$, não podemos afirmar que $(x + y) \in \mathbb{I}$ e que $(x \cdot y) \in \mathbb{I}$. Vejamos os exemplos:

- a) $x = \sqrt{2} + 3 \in \mathbb{I}$ e $y = 1 - \sqrt{2} \in \mathbb{I}$, mas $x + y = \sqrt{2} + 3 + 1 - \sqrt{2} = 4 \notin \mathbb{I}$
- b) $x = \sqrt{2} \in \mathbb{I}$ e $y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, mas $x \cdot y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \notin \mathbb{I}$

Consequentemente, dados $x, y \in \mathbb{I}$, não podemos afirmar que $(x - y) \in \mathbb{I}$ e que $(\frac{x}{y}) \in \mathbb{I}$. Vejamos os exemplos:

- c) $x = \sqrt{2} + 3 \in \mathbb{I}$ e $y = 1 + \sqrt{2} \in \mathbb{I}$, mas $x - y = \sqrt{2} + 3 - 1 - \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{I}$
- d) $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ e $y = \sqrt{2} \in \mathbb{I}$, mas $(\frac{x}{y}) = (\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) = 2 \notin \mathbb{I}$.

7.2.1 Algumas Propriedades Operatórias

Existem algumas características operacionais relacionadas aos números irracionais e aos números racionais.

1. Seja x um número racional e y um número irracional, então $x + y$ é um número irracional.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $x + y$ seja um número racional. Logo, podemos escrever $x + y$ na forma $\frac{c}{d}$, com $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$. Como por hipótese x é racional, então também existem inteiros a e b , com b diferente de zero, tal que $x = \frac{a}{b}$. Portanto,

$$x + y = \frac{a}{b} + y = \frac{c}{d} \implies y = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$

Neste caso, y será um número racional, pois será o resultado da diferença de dois números racionais. Isso é uma contradição, pois a hipótese define que y é um número irracional.

Desta forma, $x + y$ não é racional. Logo, $x + y$ é um número irracional.

2. Seja x um número racional e y um número irracional, então $x - y$ é um número irracional.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $x - y$ seja um número racional. Logo, podemos escrever $x - y$ na forma $\frac{c}{d}$, com $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$.

Portanto,

$$x - y = \frac{a}{b} - y = \frac{c}{d} \implies y = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$$

Neste caso, y será um número racional, pois será o resultado da soma de dois números racionais. Isso é uma contradição, pois a hipótese define que y é um número irracional.

Portanto, $x - y$ não é racional. Logo, $x - y$ é um número irracional.

3. Seja x um número racional e y um número irracional, então $x \cdot y$ é um número irracional.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $x \cdot y$ seja um número racional. Logo, podemos escrever $x \cdot y$ na forma $\frac{c}{d}$, com $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$.

Portanto:

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot y = \frac{c}{d} \implies y = \frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}}.$$

Neste caso, y será um número racional, pois será o quociente de dois números racionais. Isso é uma contradição, pois a hipótese define que y é um número irracional.

Portanto, $x \cdot y$ não é racional. Logo, $x \cdot y$ é um número irracional.

4. Seja x um número racional e y um número irracional, então $\frac{x}{y}$ é um número irracional.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $\frac{x}{y}$ seja um número racional. Logo, podemos escrever $\frac{x}{y}$ na forma $\frac{c}{d}$, com $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$.

Portanto,

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{d} \implies x \cdot d = y \cdot c \implies y \cdot c = \frac{a}{b} \cdot d \implies y = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Neste caso, y será um número racional, pois será o produto de dois números racionais. Isso é uma contradição, pois a hipótese define que y é um número irracional.

Portanto, $\frac{x}{y}$ não é racional. Logo, $\frac{x}{y}$ é um número irracional.

5. Seja x um número racional e y um número irracional, então $\frac{y}{x}$ é um número irracional.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $\frac{y}{x}$ seja um número racional. Logo, podemos escrever $\frac{y}{x}$ na forma $\frac{c}{d}$, com $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$.

Portanto,

$$\frac{y}{x} = \frac{c}{d} \implies y \cdot d = x \cdot c \implies y \cdot c = \frac{a}{b} \cdot d \implies y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Neste caso, y será um número racional, pois será o produto de dois números racionais.

Isso é uma contradição, pois a hipótese define que y é um número irracional.

Portanto, $\frac{y}{x}$ não é racional. Logo, $\frac{y}{x}$ é um número irracional

7.3 Classificação dos Números Irracionais

Segundo Niven (2005), os números irracionais podem ser divididos em dois grupos principais: algébricos e transcendentais. Os números irracionais algébricos são aqueles que são soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros. Um exemplo clássico é $\sqrt{2}$, que é a solução da equação $x^2 - 2 = 0$. Já os números irracionais transcendentais são aqueles que não podem ser expressos como raízes de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Exemplos notáveis incluem o número π e o número e , ambos de extrema importância em diversas áreas da matemática, como a geometria e o cálculo.

A distinção entre números algébricos e transcendentais não é meramente teórica, mas reflete a diferença fundamental na natureza desses números. Enquanto os números irracionais algébricos estão intimamente ligados à álgebra, sendo soluções de polinômios, os números transcendentais transcendem essas equações, surgindo em contextos mais abstratos e frequentemente associados a propriedades geométricas e funções que não podem ser simplificadas em termos de equações polinomiais.

7.4 A raiz quadrada de um número primo

É sabido que a raiz quadrada de qualquer número primo resulta em um número irracional. Esse fato não se restringe à raiz quadrada de 2, como demonstrado previamente.

Teorema: Para qualquer número primo p , a raiz quadrada $\sqrt{p}$ é irracional.

Demonstração:

Segundo Stewart (2003), suponhamos, por contradição, que $\sqrt{p}$ seja um número racional. Nesse caso, poderíamos expressá-lo como $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros positivos e primos entre si (isto é, não têm divisores comuns maiores que 1), de modo que a fração $\frac{a}{b}$ se encontra em sua forma irredutível.

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado, temos:

$$(\sqrt{p})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \implies p = \frac{a^2}{b^2} \implies a^2 = p \cdot b^2.$$

A equação acima nos mostra que p divide a^2 . Pelo teorema fundamental da aritmética, sendo p um número primo, concluímos que p deve necessariamente dividir a . Assim, podemos escrever $a = p \cdot k$, para algum inteiro k .

Substituindo $a = p \cdot k$ na equação original e elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

$$a^2 = (p \cdot k)^2 = p^2 \cdot k^2.$$

Como $a^2 = p \cdot b^2$ e $a^2 = p^2 \cdot k^2$, obtemos a relação:

$$p \cdot b^2 = p^2 \cdot k^2,$$

que pode ser simplificada para:

$$b^2 = p \cdot k^2.$$

Esse resultado implica que p divide b^2 , e, novamente pelo fato de p ser primo, concluímos que p também divide b .

Contudo, essa conclusão gera uma contradição, já que supusemos que a e b são primos entre si, ou seja, p não poderia dividir ambos simultaneamente. Portanto, concluímos que nossa suposição inicial de que $\sqrt{p}$ é racional estava incorreta. Assim, $\sqrt{p}$ deve ser irracional.

7.5 O Número π

O símbolo π representa a primeira letra de uma palavra grega que significa "perímetro". Este símbolo é amplamente utilizado na matemática moderna para descrever a razão constante

entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Embora atualmente saibamos que o valor de π é aproximadamente 3,14159, o valor exato de π não era amplamente conhecido nas antigas civilizações.

Uma das referências mais antigas ao valor de π pode ser encontrada no Antigo Testamento, no Primeiro Livro dos Reis, capítulo 7, versículo 23. A passagem descreve a construção de um grande reservatório circular feito por Hiram: “Hiram fez também o mar de bronze, que tinha dez côvados de uma borda à outra, perfeitamente redondo e com altura de cinco côvados; sua circunferência media-se com um fio de trinta côvados”. Esta descrição leva à dedução de que o valor de π era igual a 3 na época, pois a relação entre o diâmetro e a circunferência era de 10 para 30.

Segundo Eves (2011), contudo, avanços significativos foram feitos posteriormente, e o valor de π foi refinado ao longo da história. Os egípcios foram pioneiros ao perceber que a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro era constante, embora ainda usassem $\pi = 3$ em muitos de seus cálculos. O matemático inglês William Jones foi o primeiro a usar o símbolo π para representar essa constante em uma publicação de 1706.

Segundo Maor (1998), o método de aproximação do valor de π foi significativamente aprimorado por Arquimedes por volta de 240 a.C. Utilizando polígonos regulares inscritos e circunscritos em um círculo, ele conseguiu calcular que o valor de π estava entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$. Este método, descrito em vários textos antigos, foi um dos primeiros exemplos de uma aproximação científica de π .

7.5.1 Passos seguidos por Arquimedes

1. Polígonos Inscritos e Circunscritos: Arquimedes desenhou dois tipos de polígonos:

- Polígono inscrito: um polígono regular cujos vértices tocam a circunferência do círculo, ficando dentro do círculo.



Figura 7.2: Exemplos de Polígonos Inscritos

- Polígono circunscrito: um polígono regular que tem seus lados tangentes à circunferência do círculo, ficando fora do círculo.

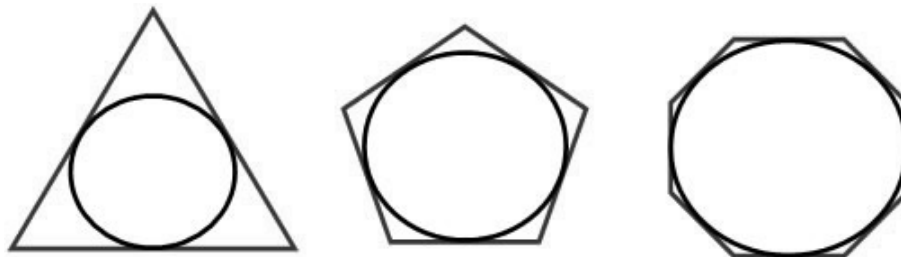


Figura 7.3: Exemplos de Polígonos Inscritos

2. Aproximação por Polígonos Regulares: Ele começou com polígonos de poucos lados (hexágonos) e foi aumentando o número de lados (até 96 lados). À medida que o número de lados dos polígonos aumentava, tanto os polígonos inscritos quanto os circunscritos se aproximavam cada vez mais do perímetro do círculo.

3. Limites Inferiores e Superiores: Arquimedes observou que o perímetro do polígono inscrito sempre seria menor que a circunferência do círculo, enquanto o perímetro do polígono circunscrito seria sempre maior. Dessa forma, ele foi capaz de estabelecer limites superiores e inferiores para o valor de π .

4. Cálculo de π : Com polígonos de 96 lados, Arquimedes calculou que o valor de π estava entre as frações:

$$\frac{310}{71} \approx 3.1408 \quad \text{e} \quad \frac{31}{7} \approx 3.1429$$

Portanto, ele determinou que π estava entre esses dois valores.

5. Método de Exaustão: A técnica que Arquimedes utilizou é conhecida como método de exaustão, porque ao aumentar o número de lados do polígono, o valor da sua área "exauria" o valor da área do círculo, ou seja, se aproximava infinitamente da circunferência. Esse método, que pode ser considerado um precursor do cálculo moderno, permitiu uma aproximação extremamente precisa para a época.

Na figura a seguir, é ilustrado o conceito de circunferência (C) e diâmetro (d), onde π é a razão entre eles:

$$\pi = \frac{C}{d}$$

Conforme tabela 7.1, o número π não só desempenha um papel crucial em geometria, mas também tem uma rica história que demonstra a evolução do pensamento matemático. Seu valor irracional e transcendental continua sendo um dos conceitos mais estudados e aplicados em diversas áreas da matemática.

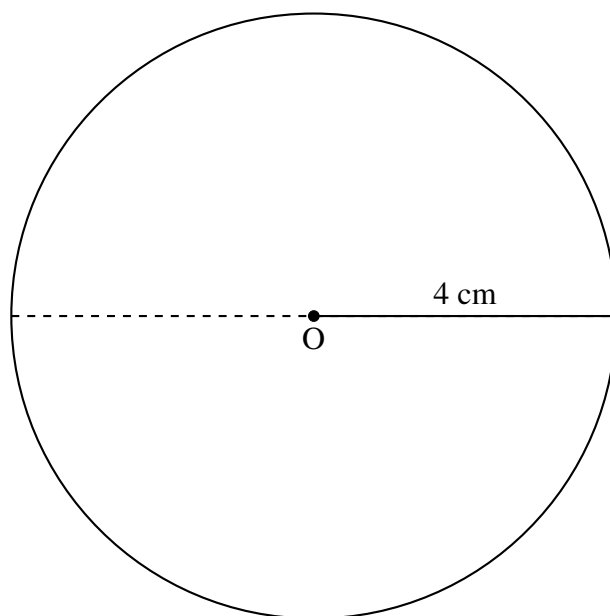


Figura 7.4: Circunferência com raio de 4 cm

Ano/Período	Feitos/Avanços
1650 a.C.	Os egípcios apresentavam o número π com uma casa decimal.
250 a.C.	Arquimedes apresentava o número π com três casas decimais.
480 d.C.	Zu Chongzhi apresentou o número π com sete casas decimais, entre 3,1415926 e 3,1415927. Um recorde que não seria superado por 800 anos.
1150	Bhaskara apresentou π com quatro casas decimais, calculando π como $\frac{754}{240} = 3,1416$.
1424	Ghiyath al-Kashi apresentou o número π com 16 casas decimais. Calculou a constante 2π com 9 dígitos sexagesimais de precisão, equivalentes a 16 dígitos decimais.
1596	Ludolph van Ceulen calculou π com 35 casas decimais, utilizando polígonos de até 15 lados.
Século XVIII	Johann Heinrich Lambert provou a irracionalidade de π .
1794	Georg von Vega apresentou π com 126 casas decimais.
1824	Carl Friedrich Gauss apresentou π com 200 casas decimais.
1874	William Shanks calculou corretamente π até a 527ª casa decimal, mas um erro foi descoberto a partir da 528ª casa em 1944.

1949	John William Wrench Jr., pioneiro no uso de computadores para cálculos matemáticos, alcançou 2.037 casas decimais para π .
1961	Daniel Shanks e John William Wrench Jr. calcularam π com 100.265 casas decimais.
1986	Com a ajuda de um computador da NASA, π foi calculado com 29.360.000 casas decimais, aumentando posteriormente para 134.217.700.
1997-1999	Yasumasa Kanada e Daisuke Takahashi calcularam π com 51.539.600.000 e 206.158.430.000 casas decimais, respectivamente.
2002	Yasumasa Kanada estabeleceu o recorde mundial ao calcular π com 1,2411 trilhões de dígitos.
2009	Daisuke Takahashi alcançou 2.576.980.370.000 casas decimais para π .
2010	Fabrice Bellard anunciou um novo recorde de π com 2.699.999.990.000 casas decimais.
2010-2011	Shigeru Kondo e Alexander Yee calcularam π com 5 trilhões e 10 trilhões de casas decimais, respectivamente.
2016	Peter Trueb calculou 22,4 trilhões de dígitos de π .
2019	Emma Haruka Iwao, desenvolvedora do Google Cloud, calculou 31,4 trilhões de dígitos de π , superando o recorde anterior.

Tabela 7.1: Avanços históricos no cálculo do número π

7.5.2 Demonstração da irracionalidade de π .

Segundo Niven (1947), a irracionalidade de π foi formalmente provada pela primeira vez no século XVIII. Em 1761, o matemático Johann Heinrich Lambert foi o responsável por essa conquista, utilizando frações contínuas em sua demonstração. Embora seja lembrado como o pioneiro a provar essa característica de π , o trabalho de Ivan Niven também é amplamente citado. Em 1947, Niven apresentou uma demonstração mais simples e direta em seu artigo intitulado "A Simple Proof that π is Irrational", publicado no *Bulletin of the American Mathematical Society* (Niven 1947).

Vamos utilizar uma versão moderna da demonstração de Niven para provar que π é irracional. Para isso, empregaremos ferramentas comuns no Cálculo Diferencial e Integral, normalmente vistas no primeiro semestre de um curso de Cálculo, assim como o Binômio de Newton, tópico abordado no Ensino Médio.

A demonstração da irracionalidade de π baseia-se em um argumento por contradição. Suponhamos, inicialmente, que π seja um número racional. Assim, podemos expressá-lo como uma fração de inteiros positivos:

$$\pi = \frac{a}{b},$$

onde a e b são inteiros positivos e primos entre si.

Definimos então uma função auxiliar $f_n(x)$ que será utilizada na demonstração. Seja n um inteiro positivo, definimos:

$$f_n(x) = x^n(\pi - x)^n.$$

Essa função é contínua no intervalo fechado $[0, \pi]$ e diferenciável no intervalo aberto $(0, \pi)$.

Consideremos a integral

$$I_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin(x) dx.$$

Nosso objetivo é analisar o valor de I_n de duas maneiras distintas para chegar a uma contradição.

Cálculo de I_n como número inteiro

Primeiramente, expandimos $f_n(x)$ usando o Teorema do Binômio:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+k} (-1)^k \pi^{n-k}.$$

Então, I_n pode ser escrito como:

$$I_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \pi^{n-k} \int_0^\pi x^{n+k} \sin(x) dx.$$

Agora, integramos por partes repetidamente a integral $\int_0^\pi x^{n+k} \sin(x) dx$. Após $n+k+1$ integrações por partes, todas as integrais resultantes se anulam nos limites de integração, restando apenas termos envolvendo derivadas sucessivas de $\sin(x)$ e potências de x . Como $x=0$ e $x=\pi$ são zeros das funções seno e cosseno, os termos avaliados nesses pontos serão múltiplos intei-

ros de π elevados a potências inteiras, resultando em valores inteiros. Portanto, I_n é um número inteiro.

Estimativa de I_n

Por outro lado, podemos estimar o valor absoluto de I_n :

$$|I_n| = \left| \int_0^\pi f_n(x) \sin(x) dx \right| \leq \int_0^\pi |f_n(x) \sin(x)| dx \leq \int_0^\pi f_n(x) dx,$$

já que $|\sin(x)| \leq 1$ e $f_n(x) \geq 0$ no intervalo considerado.

Calculamos a integral:

$$\int_0^\pi f_n(x) dx = \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n dx.$$

Fazendo a substituição $u = \frac{x}{\pi}$, temos $x = \pi u$ e $dx = \pi du$, então:

$$\int_0^\pi f_n(x) dx = \pi^{2n+1} \int_0^1 u^n (1-u)^n du = \pi^{2n+1} B(n+1, n+1),$$

onde B é a função Beta, definida por:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

e Γ é a função Gamma. Sabemos que $\Gamma(n+1) = n!$ para n inteiro positivo. Portanto,

$$\int_0^\pi f_n(x) dx = \pi^{2n+1} \frac{n!n!}{(2n+1)!}.$$

Assim, temos a estimativa

$$|I_n| \leq \pi^{2n+1} \frac{n!n!}{(2n+1)!}.$$

As funções Beta e Gama possuem diversas propriedades úteis em cálculos envolvendo distribuições estatísticas e integrais relacionadas a distribuições de probabilidade.²

²Para aprofundar-se no tema, recomenda-se consultar referências especializadas como o livro de Abramowitz e Stegun, "*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*", ou textos introdutórios de análise matemática avançada.

Uma propriedade importante da função Gama é a relação $\Gamma(n+1) = n!$, válida para $n \in \mathbb{N}$.³

Essa relação mostra que a função Gama é uma generalização do fatorial, conectando os conceitos de análise matemática à combinatória e à teoria de probabilidades.

Conclusão

Observamos que, para valores grandes de n , o termo $\frac{n!n!}{(2n+1)!}$ tende a zero, pois o fatorial no denominador cresce mais rapidamente que o produto dos fatoriais no numerador. Portanto, I_n é um número inteiro cujo valor absoluto é menor que 1, o que só é possível se $I_n = 0$.

Contudo, analisando a definição de I_n e a função $f_n(x)$, concluímos que $I_n > 0$, já que a função é positiva no intervalo $(0, \pi)$ e $\sin(x)$ é positiva em $(0, \pi)$. Essa contradição implica que nossa suposição inicial está errada, ou seja, π não pode ser um número racional. Portanto, concluímos que π é irracional.

³A relação $\Gamma(n+1) = n!$ pode ser encontrada no livro de Abramowitz e Stegun, "*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*".

8 Relato de Experiência

Neste capítulo será apresentado um relato da aplicação de uma sequência didática baseada nas metodologias investigativa e colaborativa, com o objetivo de aprofundar o ensino dos números irracionais, no oitavo ano do Ensino Fundamental II - anos finais. A experiência foi conduzida em uma escola privada no estado do Rio de Janeiro, utilizando o recurso educacional intitulado “Jogo das Régua”, que explora os conceitos de comensurabilidade e incomensurabilidade de segmentos. Serão descritos os principais aspectos da atividade, incluindo sua implementação, as percepções dos alunos e os desafios encontrados durante a aplicação. Além disso, os resultados obtidos serão analisados, buscando evidenciar os impactos da abordagem investigativa no aprendizado dos discentes. Ao final, são discutidas as reflexões sobre a eficácia do método empregado e sugestões para futuras aplicações.

Etapas da atividade e distribuição dos tempos de aula

A aplicação da sequência didática proposta foi estruturada em três fases principais, demandando a seguinte quantidade de tempos de aula (cada um com 45 minutos):

- **Introdução e Exploração Inicial (2 tempos de aula – 90 minutos)**
 - Apresentação do conceito de comensurabilidade e incomensurabilidade.
 - Contextualização dos números irracionais e sua importância histórica.
 - Discussão sobre desafios na representação de números irracionais na reta numérica.
- **Aplicação do “Jogo das Régua” e Investigação (4 tempos de aula – 180 minutos)**
 - Explicação das regras e realização da atividade prática com as régua.
 - Trabalho colaborativo entre os alunos para explorar padrões e relações matemáticas.
 - Reflexão sobre os resultados e formulação de hipóteses sobre números irracionais.
 - Registro e discussão das descobertas, incentivando argumentação matemática.
- **Análise e Sistematização dos Resultados (2 tempos de aula – 90 minutos)**

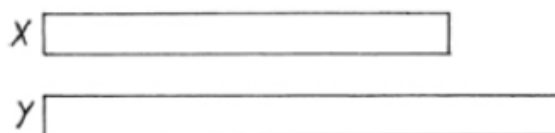
- Socialização das conclusões de cada grupo.
- Sistematização das principais aprendizagens com apoio do professor.
- Comparação com definições formais de números irracionais.
- Discussão sobre aplicações desse conhecimento no contexto da matemática.

Total estimado de tempos de aula: 8 tempos (6 horas).

Esse planejamento permitiu que os alunos se envolvessem ativamente no processo de descoberta e construção do conhecimento matemático, promovendo maior engajamento e compreensão sobre os números irracionais.

Na fase inicial da atividade, chamada introdução da tarefa, foi proposto o “Jogo das Régua”, baseado em duas régua de comprimentos diferentes. No exemplo fornecido, as régua apresentadas mediam 5 cm e 7 cm, respectivamente, e foram alinhadas à esquerda para iniciar o jogo.

JOGO DAS RÉGUAS: Considere duas régua com comprimentos distintos – a primeira, denominada **X**, com comprimento igual a 5cm; e a outra, denominada **Y** com comprimento igual a 7cm. Coloca-se sobre uma mesa duas régua com comprimentos distintos de tal forma que as suas extremidades anteriores estejam alinhadas conforme figura:



O jogo começa com a movimentação da régua menor, e a única regra a ser seguida é pegar a régua cuja extremidade anterior encontra-se mais à esquerda e deslizar para a direita exatamente pela distância de seu próprio comprimento.

a) Neste caso, podemos considerar que o jogo será encerrado em algum momento? _____.

b) Em qual momento o jogo se encerrará?

Figura 8.1: Jogo das Régua - Versão Impressa

Foi disponibilizado, para cada grupo, um kit com 20 régua de papelão sendo 10 delas medindo 7 centímetros, e as demais medindo 5 centímetros; calculadoras; 4 (quatro) fichas com

as atividades descritas e o roteiro do trabalho. Na referida ficha também estavam reservados espaços para que os alunos registrassem suas conclusões e pensamentos.

O procedimento inicial do jogo consiste em adicionar uma nova régua de 5 cm ao lado da que foi inicialmente colocada. Em seguida, o próximo jogador acrescentará uma nova régua de 7 cm ao lado da régua de mesmo comprimento inserida anteriormente, encerrando assim a primeira rodada do jogo. As rodadas subsequentes seguirão o mesmo padrão.

O objetivo do jogo é alcançar uma situação em que as extremidades das duas réguas se alinhem à direita. Quando isso ocorre, os segmentos tornam-se comensuráveis, indicando a vitória da dupla que jogou.

Foi possível notar que o jogo proporciona uma abordagem prática e interativa para explorar o conceito de comensurabilidade de segmentos de reta, facilitando a compreensão dos alunos sobre esse aspecto da geometria. Segue a sugestão de corroborar o conceito de comensurabilidade ao conceito de razão, perguntando aos alunos, por exemplo, "*quantas retas de 5 cm cabem em tantas de 7 cm?*". Uma vez respondido a pergunta, vale apresentar aos discentes o conceito formal de comensurabilidade.

Nesse momento da discussão sobre o jogo e os conceitos que naturalmente surgiram, percebi que nem todos os alunos estavam conseguindo visualizar bem o que eu queria demonstrar. Para facilitar, recorri a uma versão digital do Jogo das Réguas, que eu havia feito no Geogebra. Projetando essa representação, pude ilustrar melhor minha explicação e garantir que todos tivessem uma visão mais clara do que estávamos tentando entender.

Minha dica para o professor que deseja aplicar essa atividade é justamente essa: ter um recurso visual digital preparado pode ser seu aliado, conforme Figura 8.2. Enquanto alguns alunos conseguem acompanhar bem apenas com a construção física, outros precisam dessa representação ampliada para realmente enxergar as relações matemáticas que queremos destacar. Além disso, ao usar uma ferramenta digital, conseguimos manipular as réguas, testar diferentes ajustes e até comparar com valores numéricos, o que ajuda muito na hora de discutir a questão da incomensurabilidade. Foi assim que consegui manter o interesse da turma e aprofundar o aprendizado de maneira mais intuitiva.

A comensurabilidade dentre os segmentos abre margem para a seguinte hipótese: Será que, no jogo das réguas sempre haverá um vencedor? Ou, em outras palavras: será possível encontrar dois segmentos em que um deles não cabe $\frac{m}{n}$ vezes no outro (considerando m e n inteiros com $m \neq 0$)? É possível que dois segmentos sejam incomensuráveis?

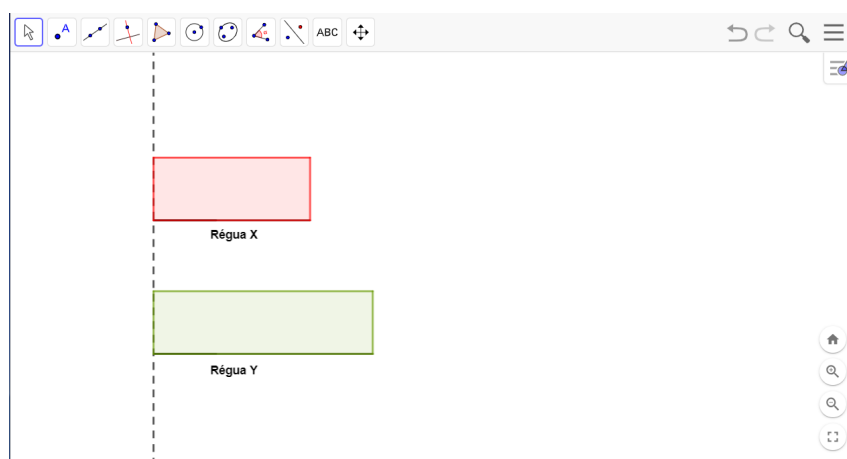


Figura 8.2: Jogo das Réguas

A experiência que vivenciei com os alunos, neste momento de discussão, é que os mesmos convergiram seu imaginário ao jogo das réguas que, factualmente, apresentou duas medidas representadas por números racionais. Portanto, foi unânime a resposta que sim, sempre haverá um vencedor. Muitos acrescentaram que *"poderia, até, demorar, mas que, em algum momento, alguém venceria!"*.

Para responder às dúvidas dos alunos, trouxemos um pouco da história da matemática, apresentando a relação entre a diagonal de um quadrado e seu lado, como era estudado pela escola pitagórica. Segundo Cruz (2003), os pitagóricos perceberam que a diagonal de um quadrado de lado 1 não pode ser expressa como uma fração simples, ou seja, ela é incomensurável em relação ao lado do quadrado. Isso significa que, se usarmos o *Jogo das Réguas* para medir essa diagonal, ele nunca terá um fim – sempre faltará um pequeno pedaço que impede de encontrarmos uma régua exata.

Aqui, vale um alerta ao professor: ao trazer essa discussão para a turma, percebi que, inicialmente, os alunos não compreenderam o motivo de analisarmos a diagonal do quadrado. Para eles, parecia apenas mais uma construção geométrica sem muita relação com o problema principal. Então, para evitar essa perda de interesse, sugiro que o professor se antecipe e faça a seguinte pergunta antes:

“O que será que a diagonal pode nos dizer sobre essa questão?”

Esse simples questionamento ajudou a manter o envolvimento dos alunos, pois despertou a curiosidade antes mesmo de eu apresentar a explicação.

Além disso, é interessante lembrar que, segundo Roque (2010), a descoberta dos incomensuráveis pelos pitagóricos e as supostas crises que isso teria causado em sua escola são cercadas

de lendas e mitos. Ou seja, embora seja um tema fascinante, é importante destacar que não há um consenso histórico sobre as reações dos pitagóricos diante dessa descoberta. Esse ponto pode ser uma boa oportunidade para discutir com os alunos como a história da matemática muitas vezes mistura fatos e narrativas, e como os conceitos que estudamos hoje surgiram de debates que atravessaram séculos.

Com a figura do quadrado de lado 1 e sua respectiva diagonal, iniciamos a Segunda Fase - investigativa; introduzindo uma atividade que corresponde em localizar o comprimento da diagonal em uma reta numérica. O objetivo da atividade é iniciar a discussão da insuficiência do conjunto dos racionais para a representação de um número como $\sqrt{2}$. A mera observação da localização da $\sqrt{2}$ entre os inteiros 1 e 2, na reta numérica, permite ao grupo discutir possíveis valores decimais que viabilizassem a sua representação.

No início da atividade, percebi que os alunos não demonstravam muito interesse na construção da diagonal do quadrado. Para eles, parecia apenas um exercício geométrico sem grande relevância para o problema que estávamos discutindo. Alguns até questionaram:

“Mas professor, o que isso tem a ver com os números irracionais?”

Sabendo que esse momento poderia ser crucial para manter o engajamento, resolvi instigar a curiosidade da turma antes de dar qualquer explicação direta.

Com suas, respectivas réguas e compassos, pedi para os alunos construírem um quadrado de lado 1. O desafio era simples: traçar a diagonal e tentar medi-la com a régua. No primeiro momento, os alunos fizeram suas medições e começaram a sugerir valores:

“Professor, parece 1,4!”, “Eu medi aqui e deu um pouco mais... talvez 1,41”.

Nesse ponto, perguntei:

“E se tentarmos encontrar um número exato para essa medida?”

Os alunos, animados, começaram a testar frações conhecidas:

“Será que é um número racional?”

Foi então que introduzi a questão da incomensurabilidade. Expliquei que os pitagóricos descobriram que a diagonal do quadrado de lado 1 não poderia ser expressa exatamente como

uma fração. Pedi que tentassem encontrar uma fração que, multiplicada por si mesma, resultasse exatamente em 2. Alguns tentaram com $\frac{3}{2}$, outros com $\frac{5}{3}$, mas sempre sobrava ou faltava um pequeno valor. O incômodo começou a surgir:

“Então não tem jeito? Não tem fração que funcione?”

Nesse momento, vi os olhos dos alunos brilharem ao perceberem que estavam diante de uma descoberta matemática real. Eles não estavam apenas recebendo uma informação pronta – estavam experienciando o mesmo dilema que os matemáticos da antiguidade. Para reforçar a ideia, perguntei:

“Se nenhuma fração consegue representar a diagonal, o que isso significa?”

Um dos alunos, hesitante, arriscou:

“Que talvez esse número nem seja racional?”

Exatamente! E foi assim que chegamos à ideia de que $\sqrt{2}$ é um número irracional e que sua medida representa um segmento incomensurável em relação ao lado do quadrado.

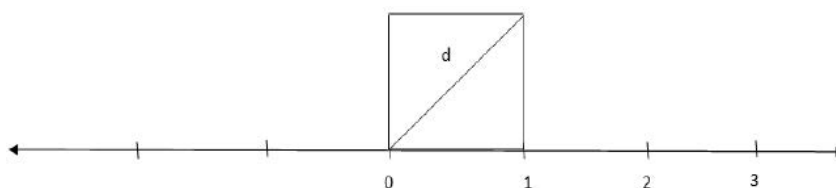
O impacto dessa descoberta foi notável. Os alunos passaram a discutir entre si, empolgados, sobre como algo tão simples quanto a diagonal de um quadrado poderia levar a um conceito tão profundo. Eles também perceberam a vantagem desse tipo de abordagem investigativa. Em vez de apenas receber a definição de um número irracional, eles vivenciaram a dificuldade de encontrá-lo e entenderam, na prática, por que certos números escapam do universo das frações.

No final da atividade, um aluno comentou:

“Nossa, nunca tinha pensado que dava para descobrir um número assim, fazendo um desenho! Parece que a matemática faz mais sentido assim.”

Foi nesse momento que tive certeza de que essa experiência havia deixado uma marca. Mais do que aprenderem sobre os números irracionais, eles aprenderam sobre a essência da matemática: questionar, investigar e, principalmente, se surpreender com as descobertas.

Após a construção geométrica da $\sqrt{2}$, os discentes foram apresentados a uma abordagem de obtenção da $\sqrt{2}$ por aproximações, ora por falta, ora por excesso construindo, previamente,

Figura 8.3: Representação Gráfica da $\sqrt{2}$

uma tabela, conforme Figura 8.4, com decimais que se aproximavam do referido número. Com isso, os alunos foram motivados a concluir que, por mais que aumentássemos a casa decimal, não encontraríamos um número que representasse, factualemte, a $\sqrt{2}$.

Aproximações Sucessivas para a $\sqrt{2}$.	
Tente 1,5. Eleve ao quadrado. Qual o resultado?	
Tente 1,4. Eleve ao quadrado. Qual o resultado?	
Tente 1,45. Eleve ao quadrado. Qual o resultado?	
Tente 1,41. Eleve ao quadrado. Qual o resultado?	
Tente 1,414. Eleve ao quadrado. Qual o resultado?	
Tente 1,414214. Eleve ao quadrado. Qual o resultado?	
...	...
É possível constatar? Encontramos algum período?	

Figura 8.4: Tabela Fonte:johnson 2003

Nesta fase foi possível verificar que não se pode encontrar uma quantidade precisa de casas decimais ou um padrão definido para $\sqrt{2}$.

Neste momento, fiz uma explicação sobre os números reais. Expliquei que, dentro desse conjunto, estão:

- os números racionais, expressos na forma de uma fração $\frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros e $n \neq 0$. Todos os números racionais podem ser representados de forma decimal precisa ou periódica;
- os números irracionais são definidos como elementos do conjunto dos números reais que não podem ser expressos em uma representação decimal finita, ou em uma representação decimal infinita e periódica. Um exemplo clássico é $\sqrt{2}$. Todas as raízes quadradas não exatas e não periódicas de números inteiros positivos também são consideradas irracionais. Por exemplo: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{24}$, e assim por diante;

Na terceira e última fase, os alunos foram convidados a discutir os resultados obtidos, compartilhar dúvidas e desafios. Nesta fase, é importante os grupos se prepararem para o debate, estabelecendo quais pontos foram bem compreendidos e quais elos cognitivos ainda estão fracos. O debate entre os grupos proporcionará uma rica experiência de saberes e vivências matemáticas sem qualquer hierarquização de conhecimento: todos são iguais perante as suas certezas e incertezas.

O professor será fundamental sendo o agente mediador deste processo, direcionando a discussão de forma construtiva e democrática, acolhendo algumas lacunas teóricas e promovendo a concepção dos números irracionais de forma plural e ressignificada. Tudo isso em um ambiente colaborativo, proporcionando a pluralidade de ideias, a empatia e colaboração entre indivíduos e a construção de um significado a partir de diversos pontos de vistas.

De início, alguns estavam mais seguros sobre suas conclusões, enquanto outros ainda apresentavam incertezas em relação ao conceito de incomensurabilidade. Para organizar a discussão, pedi que cada grupo listasse os pontos que haviam compreendido bem e aqueles que ainda precisavam de mais explicação.

No início, houve um certo silêncio, típico do momento em que os alunos processam o que querem dizer. Então, um grupo levantou uma questão:

“A gente entendeu que a diagonal não pode ser expressa como fração exata, mas ainda não conseguimos visualizar direito por que isso acontece.”

Outro grupo, que havia conseguido avançar um pouco mais na análise, tentou responder:

“Se tentarmos representar a raiz de 2 como uma fração, o valor decimal nunca fecha exatamente, sempre fica um resto.”

A partir desse ponto, a discussão começou a fluir melhor. Alguns alunos sugeriram diferentes aproximações numéricas para $\sqrt{2}$, comparando com frações e identificando que nenhuma delas era exata. Esse tipo de argumentação ajudou a reforçar a ideia de que certos números não podem ser escritos na forma de uma razão entre dois inteiros.

Um aluno fez um comentário que ajudou a esclarecer para os colegas:

“Então quer dizer que esse número não tem um padrão repetitivo como os racionais? Tipo uma dízima periódica?”

Isso permitiu que a turma chegasse à ideia de que a incomensurabilidade da diagonal do quadrado está diretamente ligada ao fato de que $\sqrt{2}$ não pode ser expresso como uma fração, ou seja, é um número irracional. O debate se desenvolveu de maneira produtiva, e meu papel foi direcionar as discussões para que todos pudessem construir um entendimento sólido do conceito.

Ao final da atividade, percebi que os alunos estavam mais confortáveis com a ideia de números irracionais e conseguiram relacionar a construção geométrica à impossibilidade de expressar certos valores como frações. Esse processo de discussão ajudou a consolidar o aprendizado, permitindo que cada um participasse ativamente e contribuísse com diferentes formas de pensar o problema.

Neste ponto, sugerimos de forma opcional, a inclusão da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ como uma atividade desafiadora, tanto para o professor quanto para os alunos. A aplicação desse conteúdo pode variar conforme fatores como planejamento didático, carga horária disponível e o desenvolvimento das atividades prévias. Além disso, essa demonstração não precisa ocorrer exclusivamente de forma presencial, podendo ser apresentada, por exemplo, por meio de um vídeo com abordagem expositiva e tradicional, proporcionando flexibilidade na sua implementação.

Após a discussão sobre a incomensurabilidade da diagonal do quadrado, propus um novo desafio à turma: a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Sabia que essa etapa exigiria um nível maior de abstração, então iniciei perguntando:

“Agora que entendemos que a diagonal do quadrado não pode ser expressa como uma fração exata, será que conseguimos provar isso de forma mais rigorosa?”

Os alunos imediatamente demonstraram curiosidade, mas também certa hesitação. Alguns questionaram:

“Mas professor, a gente já viu que a régua não encaixa certinho. Isso já não prova que não é uma fração?”

Aproveitei essa dúvida para explicar que, na matemática, evidências experimentais são um ótimo ponto de partida, mas nem sempre são suficientes para uma prova formal. Para tornar o desafio mais acessível, introduzi a ideia de uma suposição inicial:

“E se, por um instante, assumirmos que $\sqrt{2}$ é um número racional? O que aconteceria?”

Para ajudar, apresentei a ideia de uma demonstração por contradição e expliquei como esse método funciona. Nesse momento, vi algumas expressões de surpresa e outros alunos franzindo a testa, tentando acompanhar. Decidi então estruturar a prova em pequenos passos e fui guiando a turma:

1. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional, ou seja, pode ser escrito como $\frac{p}{q}$, uma fração irredutível.
2. Elevamos ambos os lados ao quadrado, resultando em $2 = \frac{p^2}{q^2}$.
3. Isso implica que $p^2 = 2q^2$, ou seja, p^2 é múltiplo de 2, o que significa que p também deve ser múltiplo de 2.
4. Substituímos $p = 2k$ na equação e obtemos $4k^2 = 2q^2$, o que leva a $q^2 = 2k^2$, mostrando que q também é múltiplo de 2.
5. Se p e q são ambos múltiplos de 2, então a fração não era irredutível, o que contradiz nossa suposição inicial.

Assim que finalizei a explicação, houve um momento de silêncio. Alguns alunos revisavam seus cadernos, tentando refazer o raciocínio. Até que um deles disse:

“Então quer dizer que se $\sqrt{2}$ fosse racional, a gente ia acabar caindo em uma contradição? Por isso ele tem que ser irracional?”

Confirmei e expliquei que esse é o poder da demonstração por contradição: assumimos algo e mostramos que isso leva a um absurdo lógico. Foi nesse momento que percebi que a prova havia sido um desafio significativo, mas que, ao ser conduzida de forma guiada, permitiu que os alunos enxergassem a matemática de forma mais estruturada.

Como alternativa, também mencionei que essa demonstração poderia ser assistida em vídeo, permitindo que cada aluno revisitasse os argumentos no próprio ritmo. Um aluno comentou:

“Seria bom ver isso de novo depois, porque na primeira vez tem muita coisa pra processar.”

Essa foi uma ótima sugestão para reforçar o aprendizado. A abordagem da prova formal trouxe uma camada extra de compreensão, e, mesmo os alunos que tiveram dificuldade inicial, reconheceram o valor desse tipo de raciocínio na matemática.

8.1 Resultados

O gráfico da Figura 8.5 evidencia os resultados obtidos em um teste que teve como foco exclusivo o tema "Conjunto dos Números Irracionais". Os dados revelam um bom desempenho dos estudantes após a implementação da atividade proposta.

Rendimento percentual dos alunos da 80 – Teste realizado em junho de 2024

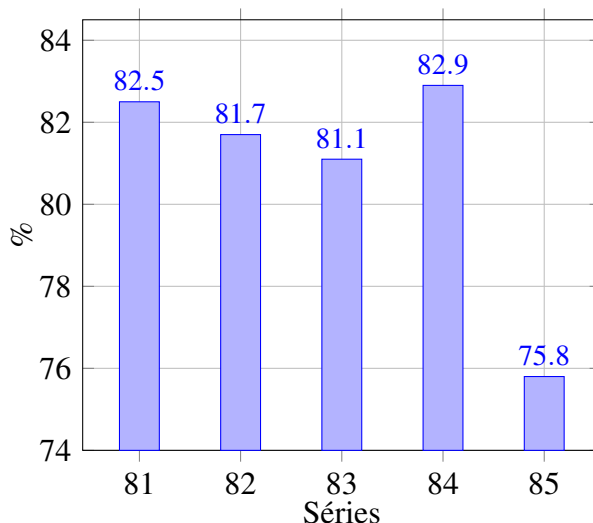


Figura 8.5: Gráfico de rendimento percentual dos alunos

O recurso educacional, estruturado para abordar de maneira aprofundada e interativa os conceitos relativos aos números irracionais, mostrou-se eficaz em promover um maior engajamento dos alunos, refletindo diretamente na elevação das notas e no aprimoramento dos resultados obtidos. Tal progresso ressalta a importância de metodologias inovadoras no processo de ensino-aprendizagem, impactando positivamente o rendimento acadêmico.

8.2 Considerações Finais

A partir da revisão sobre esquemas colaborativos e das reflexões proporcionadas pelas atividades investigativas desenvolvidas neste trabalho, evidencia-se a importância da participação ativa dos estudantes na construção do conhecimento. A abordagem colaborativa e a metodologia investigativa, ao encorajar a reflexão e a exploração matemática, promovem uma aprendizagem mais significativa, especialmente no ensino de conceitos abstratos, como os números irracionais.

Ao considerar o caráter metacognitivo das atividades propostas, percebe-se a relevância de os estudantes refletirem sobre seu próprio processo de aprendizagem. Essa autorreflexão contribui para o desenvolvimento de um pensamento matemático mais estruturado e autônomo.

Além disso, a simplicidade dos métodos colaborativos apresentados demonstra que sua implementação não exige um esforço excessivo por parte do professor, ao mesmo tempo em que proporciona benefícios substanciais para o engajamento e o desempenho dos estudantes.

Como um desdobramento deste estudo, foi desenvolvido um Produto Educacional, intitulado "Jogo das Régua: uma Abordagem Investigativa e Colaborativa para a Apresentação dos Números Irracionais". Esse material oferece um conjunto de atividades didáticas e um relato da experiência de sua aplicação em sala de aula, servindo como um recurso acessível e flexível para professores que desejam incorporar metodologias ativas ao ensino de matemática. Espera-se que este produto contribua para a prática docente, auxiliando na promoção de um ensino mais dinâmico e eficaz, e incentivando uma abordagem mais investigativa e colaborativa no ensino dos números irracionais.

Referências Bibliográficas

- [1] Abramowitz, Milton and Stegun, Irene A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. U.S. Department of Commerce, 1998.
- [2] Almeida, F. R. and Santos, P. H. *Metodologias Ativas no Ensino de Matemática*. Editora Pedagógica, Belo Horizonte, 2008.
- [3] Barbosa, Augusto César de Castro and Concordido, Cláudia Ferreira Reis. *Ensino Colaborativo em Ciências Exatas*. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2024.
- [4] Behrens, Marilda Aparecida. *O paradigma emergente e a prática pedagógica*. Champagnat, Curitiba, 1999.
- [5] Bruffee, Kenneth A. *Collaborative Learning and the “Conversation of Mankind”*. *College English*, vol. 46, no. 7, pp. 635-652, November 1984.
- [6] Burkert, W. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Harvard University Press, Cambridge, 1972.
- [7] Chevallard, Yves. *La Transposición Didáctica: Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. Aique Grupo Editor, Buenos Aires, 1999.
- [8] Costa, Maria da Conceição. *A Pedagogia de Célestin Freinet e a vida cotidiana como central na prática pedagógica*. *Revista HISTEDBR*, pp. 26-31, 2006.
- [9] Cruz, W. J. da. *Por que $\sqrt{2}$ é irracional? Buscando explicações nos processos de experimentação mental*. *Educação Matemática Em Revista*, vol. 28, no. 79, pp. 1-15, 2023. <https://doi.org/10.37001/emr.v28i79.3007>.
- [10] Deutsch, Morton. *A Theory of Cooperation and Competition*. *Human Relations*, vol. 2, pp. 129-152, 1949.
- [11] Dewey, John. *Experiência e educação*. 1ª ed., Editora Vozes, São Paulo, 1859–1952.
- [12] Fiorentini, Dario. *Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática*. *Cuadernos de Investigación y Formación em Educação Matemática*, vol. 7, no. 10, pp. 63-78, 2012. <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/10560/9997>.
- [13] Freinet, Célestin. *Conselho aos pais*. 20ª ed., Ed. Estampa, Lisboa, 1974.
- [14] Gilliam, Walter S. *Prekindergartners left behind: Expulsion rates in state prekindergarten systems*. *Yale University Child Study Center*, 2002.

- [15] Hohmann, Mary and Banet, Bernard and Weikart, David P. *A criança em ação*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1984.
- [16] Johnson, David W. and Johnson, Roger T. and Holubec, Edythe. *Circles of Learning: Cooperation in the Classroom*. Interaction Book Company, Edina, MN, 1990.
- [17] Johnson, David W. and Johnson, Roger T. *Learning Together and Alone: Cooperative, Competitive, and Individualistic Learning*. Allyn and Bacon, 1998.
- [18] Johnson, David W. and Johnson, Roger T. *Student Motivation in Co-operative Groups: Social Interdependence Theory*. In: Gillies, Robyn M., Ashman, Adrian F. (eds.), *Co-operative Learning*, RoutledgeFalmer, New York, NY, 2003, pp. 136-176.
- [19] Maor, Eli. *e: The Story of a Number*. Princeton University Press, 1998.
- [20] Munari, Alessandro. *Jean Piaget*. Ed. Daniele Saheb, Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, Recife, 2010. (*Coleção Educadores*).
- [21] Niven, Ivan. *A Simple Proof that π is Irrational*. Bulletin of the American Mathematical Society, 1947.
- [22] Niven, Ivan. *Irrational Numbers*. The Mathematical Association of America, 2005.
- [23] Roque, Tatiana. *História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Zahar, Rio de Janeiro, 2012.
- [24] Teixeira, Anísio. *Educação não é privilégio*. 3ª ed., Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1971.
- [25] Torres, Patrícia Lupion and Irala, Esrom Adriano F. *Algumas vias para entretecer o pensar e o agir. Aprendizagem colaborativa*. SANAR/PR, Curitiba, 2007.
- [26] Vygotsky, Lev S. *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press, 1978.
- [27] Vygotsky, L. S., Luria, A. R. and Leontiev, V. A. N. *Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem*. 13ª ed., Ícone, São Paulo, 2017.