



UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA
CENTRO DAS CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

WEBERSON SOUSA DOS ANJOS

**EXPLORANDO PRODUTOS NOTÁVEIS ATRAVÉS DE ÁREAS DE
RETÂNGULOS COM SINAL: UMA ABORDAGEM PEDAGÓGICA INOVADORA**

**BARREIRAS
2025**

WEBERSON SOUSA DOS ANJOS

**EXPLORANDO PRODUTOS NOTÁVEIS ATRAVÉS DE ÁREAS DE
RETÂNGULOS COM SINAL: UMA ABORDAGEM PEDAGÓGICA INOVADORA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal do Oeste da Bahia como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edwin Oswaldo Salinas
Reyes

Coorientadora: Profa. Dra. Ana Maria
Porto Nascimento

**BARREIRAS
2025**



ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE ARGUIÇÃO E DEFESA DE DISSERTAÇÃO PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA


Aos dez dias do mês de julho de dois mil e vinte e cinco, no horário das 14h, Videoconferência (Google Meet), deu-se início à sessão pública para arguição e defesa da dissertação intitulada **“Explorando produtos notáveis por composição de áreas de retângulos com sinal: Uma abordagem pedagógica inovadora”**, apresentada pelo pós-graduando WEBERSON SOUSA DOS ANJOS. A Comissão Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática, conforme o que estabelecem o Regulamento Geral dos Cursos de Pós-Graduação da Universidade Federal do Oeste da Bahia e o Regimento do Programa de Mestrado Profissional em Matemática foi composta por: Prof. Dr. Edwin Oswaldo Salinas Reyes, Doutor em Matemática – (UFOB) (orientador e presidente), Prof. Dr. Ismael Santos Lira, Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências (UFOB) e Prof. Dr. Edmo Fernandes Carvalho, Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências (UFBA). Após a apresentação da dissertação, a Comissão Examinadora realizou a arguição que foi respondida satisfatoriamente pelo mestrando. A dissertação apresentada foi considerada aprovada, com 04 parecer(es) favorável(is). Nada mais havendo a ser tratado, esta Comissão Examinadora encerrou essa reunião da qual lavrei a presente Ata que, após lida e aprovada, vai ser assinada por mim, Prof. Dr. Edwin Oswaldo Salinas Reyes, orientador e pelos demais membros da Comissão e pelo discente. A Comissão Examinadora aprova a dissertação:

(X) Com recomendações que devem ser incorporadas à versão final da dissertação.

() Sem recomendações de modificações da versão final.

Assinaturas dos Membros da Banca Examinadora:


Prof. Dr. Edwin Oswaldo Salinas Reyes

Documento assinado digitalmente
 EDWIN OSWALDO SALINAS REYES
Data: 10/07/2025 16:17:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. Ismael Santos Lira

Documento assinado digitalmente
 ISMAEL SANTOS LIRA
Data: 10/07/2025 18:02:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. Edmo Fernandes Carvalho

Documento assinado digitalmente
 EDMO FERNANDES CARVALHO
Data: 10/07/2025 20:40:17-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profª Dra. Ana Maria Porto Nascimento

Documento assinado digitalmente
 ANA MARIA PORTO NASCIMENTO
Data: 14/07/2025 20:27:17-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Weberson Sousa dos Anjos

Documento assinado digitalmente
 WEBERSON SOUSA DOS ANJOS
Data: 18/09/2025 07:42:47-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Ata aprovada na Sessão do dia 10/07/2025.

FICHA CATALOGRÁFICA

A599

Anjos, Weberson Sousa dos.

Explorando produtos notáveis através de áreas de retângulos com sinal: uma abordagem pedagógica inovadora. / Weberson Sousa dos Anjos. – 2025.

103 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Edwin Oswaldo Salinas Reyes

Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Ana Maria Porto Nascimento

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias – CCET. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

1. Material manipulável; 2. Produtos notáveis; 3. Áreas; 4. Retângulos; 5. Ensino. I. Reyes, Edwin Oswaldo Salinas. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. III. Título.

CDD 510

Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB

*"A matemática é o alfabeto com o qual Deus
escreveu o universo."
(Galileu Galilei)*

AGRADECIMENTOS

A Deus pela dádiva da vida, pois sem ele eu nada seria.

Ao meu pai por sempre acreditar que eu seria capaz e me incentivar a lutar por meus sonhos.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Edwin Oswaldo Salinas Reyes e Prof^a. Dr. Ana Maria Porto Nascimento por tanta paciência e dedicação em todo o processo de escrita do trabalho.

A minha esposa por compartilhar comigo as alegrias, preocupações, tensões e as vitórias durante toda minha caminhada no curso.

Agradeço também imensamente a todos os professores do Profmat-UFOB por aulas tão ricas em conhecimento, as quais já sinto saudades.

Por fim, a todos os amigos e colegas do Profmat-UFOB que de forma direta ou indireta me ajudaram a alcançar esse grande objetivo da minha vida.

ANJOS, Weberson Sousa dos. **Explorando produtos notáveis através de áreas de retângulos com sinal: Uma abordagem pedagógica inovadora**. 2025. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Programa De Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Oeste da Bahia – UFOB, Barreiras, 2025.

RESUMO

O ensino de Álgebra na Educação Básica apresenta grandes desafios a serem superados, que vão desde a desmitificação da matemática como algo incompreensível até a criação de recursos didáticos que promovam um ensino mais participativo, exploratório e investigativo. A utilização dos materiais manipuláveis no ensino de produtos notáveis vem ao encontro das concepções de Lorenzato (2010) e os resultados dessa utilização dialogam com a teoria de registros de representação semiótica de Duval. Nesta pesquisa organizada no formato multipaper, procuramos explicar no artigo 1 a relevância do uso dos materiais manipuláveis nas aulas de matemática e mostrar algumas teses e dissertações que argumentam sobre o tema por meio de uma fundamentação teórica realizada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), livros didáticos e livros de história da matemática. No artigo 2, foi feito um estudo de caso com estudantes da rede pública de ensino do estado do Tocantins sobre o manuseio de um material manipulável construído utilizando cartolinas dupla face, sendo sua essência a utilização de áreas de retângulos sinalizados. Neste material os estudantes foram capazes de representar as identidades polinomiais conhecidas como produtos notáveis por meio de representações de áreas sinalizadas e por meio dessas representações geométricas descrever algebricamente as expressões. Os estudantes perceberam que expressões como $(a - b)^2$ podem ser decompostas em soma de áreas de retângulos diversos e que as muitas decomposições quando organizadas algébrica e geometricamente resultam na mesma expressão final. Dessa forma, o material desenvolvido se constitui uma ferramenta para o ensino de produtos notáveis, articulando conhecimentos algébricos e geométricos, proporcionando a criação de hipóteses e validação destas.

Palavras-Chave: Material manipulável, Produtos notáveis. Áreas. Retângulos. Ensino.

ANJOS, Weberson Sousa dos. **Explorando produtos notáveis através de áreas de retângulos com sinal: Uma abordagem pedagógica inovadora**. 2025. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Programa De Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Oeste da Bahia – UFOB, Barreiras, 2025.

ABSTRACT

The teaching of algebra in basic education has major challenges to be overcome, ranging from demystifying the idea that mathematics is incomprehensible to creating teaching resources that promote more participatory, exploratory, and investigative teaching. The use of manipulative materials in teaching remarkable products is in line with Lorenzato's (2010) concepts, and the results of this use are in line with Duval's theory of semiotic representation registers. In this research, organized in a multipaper format, we seek to explain in article 1 the relevance of using manipulative materials in mathematics classes and to show some theses and dissertations that argue positively about the topic through a theoretical foundation carried out in BDTD, textbooks, and books on the history of mathematics. In article 2, a case study was conducted with students from the public school system in the state of Tocantins on the handling of an innovative manipulative material constructed using double-sided cardboard, the essence of which is the use of areas of marked rectangles. With this material, the students were able to represent the polynomial identities known as remarkable products through representations of marked areas and, through these geometric representations, describe the expressions algebraically. The students realized that expressions such as $(a-b)^2$ can be decomposed into the sum of areas of different rectangles and that the many decompositions, when organized algebraically and geometrically, result in the same final expression. Thus, the material developed constitutes a powerful tool for teaching remarkable products, covering the algebraic and geometric fields, allowing the creation of hypotheses and their validation.

Keywords: Manipulable material, Remarkable products. Areas. Rectangles. Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Print de uma página do livro 2.....	31
Figura 2: Print de uma página do livro 3- $(a+b)^2$	32
Figura 3: Print de uma página do livro 3- $(a-b)^2$	32
Figura 4: Print de uma página do livro 3- a^2-b^2	33
Figura 1: Interface do quiz Kahoot.....	50
Figura 2: Exemplo de pergunta do quiz	50
Figura 3: Quadrado subdividido em retângulos e quadrados	51
Figura 4: Quadrado subdividido em quadrados e retângulos com marcações.....	52
Figura 5: Distribuição organizada do material concreto	52
Figura 6: Quadrado com lado $(a + b)$	55
Figura 7: Resultados obtidos pelos estudantes ao decompor o quadrado de lado $(a + b)$	56
Figura 8: Representação esquemática da decomposição.....	56
Figura 9: Validação de expressões algébricas no quadro branco.....	57
Figura 10: Retângulo com área $a(a + b)$	58
Figura 11: Resultados obtidos pelos estudantes ao decompor o retângulo de área $a(a + b)$	58
Figura 12: Soma de áreas com sinais positivos	59
Figura 13: Soma de áreas com sinais opostos	59
Figura 14: Retângulo com área $b(a + b)$	59
Figura 15: Retângulo sobreposto por $b^2 + ab$	60
Figura 16: Retângulo com área $a(a + b)$	60
Figura 17: Retângulo $a(a + b)$ sobreposto pelo retângulo $-(a - b)(a + b)$	61
Figura 18: Sobreposição por $b(a + b)$ na expressão $a(a + b) - [(a - b)(a + b)]$	61
Figura 19: Representação do retângulo com área $a(a + b)$	61
Figura 20: Retângulo $a(a + b)$ sobreposto por $-[b(a + b)]$	62
Figura 21: Representação do produto $(a - b)(a + b)$ por sobreposição de retângulos	62
Figura 22: Resultado encontrado pelos estudantes para o quadrado de área b^2	62
Figura 23: Retângulo com área $b(a + b)$	63
Figura 24: Retângulo $b(a + b)$ sobreposto por $-b^2$	63
Figura 25: Representação geométrica da expressão $b(a + b) - b^2 = ab$	63
Figura 26: Análise gráfica da avaliação diagnóstica	65
Figura 27: Análise gráfica da avaliação após aplicação do recurso didático	67
Figura 28: Estudantes em primeiro contato com o material concreto	67
Figura 29: Estudantes durante a construção com o material concreto	68
Figura 30: Soluções apresentadas pelo estudante A	68
Figura 31: Soluções apresentadas pelo estudante D	69
Figura 32: Soluções apresentadas pelo estudante I	69
Figura 33: Soluções apresentadas pelo estudante K	70
Figura 34: Soluções apresentadas pelo estudante L	71
Figura A1: Itens usados na confecção do material.....	75
Figura A2: Construção do material I.....	76
Figura A3: Construção do material II.....	76
Figura A4: Construção do material III	77
Figura A5: Construção do material IV	77
Figura A6: Construção do material V	78
Figura A7: Construção do material VI.....	78
Figura A8: Construção do material VII.....	79
Figura A9: Construção do material VIII.....	80
Figura B1: Soma de áreas de mesmo sinal.....	81
Figura B2: Soma de áreas de sinais opostos.....	81
Figura B3: Representação geométrica de a^2-b^2	82

Figura B4: Representação geométrica de a^2-b^2	83
Figura B5: Representação geométrica de $(a+b)^2$	83
Figura B6: Representação geométrica de $(a+b)^2$	84
Figura B7: Representação geométrica de $(a+b)^2$	84
Figura B8: Representação geométrica de $(a-b)^2$	85
Figura B9: Representação geométrica de $(a-b)^2$	85
Figura B10: Representação geométrica de $(a-b)^2$	85
Figura B11: Representação geométrica de $-(a-b)^2$	86
Figura B12: Representação geométrica de $-(a-b)^2$	86
Figura B13: Representação geométrica de $-(a-b)^2$	86
Figura B14: Representação geométrica de $b^2- a^2$	87
Figura B15: Representação geométrica de $b^2- a^2$	87

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Trabalhos encontrados na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e Google acadêmico	22
Quadro 2: Comparação entre os aspectos metodológicos do trabalho de Camargo (2020) e Anjos (2025).	25
Quadro 3: Comparativo entre nosso estudo × Lais Scorziello da Silva (2024)	25

Sumário

1. INTRODUÇÃO.....	14
1.1. Trajetória profissional/acadêmica e a aproximação com o objeto de pesquisa	14
1.2. Apresentação do tema.....	15
1.3. Problemática.....	16
1.4. Objetivos da pesquisa Objetivo Geral	17
Objetivos Específicos	17
1.5. Relevância da pesquisa.....	17
1.6. Aspectos metodológicos.....	18
1.7. Organização da dissertação.....	18
MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E APLICAÇÕES NOS PRODUTOS NOTÁVEIS ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM GEOMETRICA INOVADORA	20
1. INTRODUÇÃO.....	21
2. METODOLOGIA.....	22
3. RELAÇÃO HISTORICA ENTRE A GEOMETRIA E A ÁLGEBRA A PARTIR DOS PRODUTOS NOTÁVEIS.....	27
3.1 NO PRINCIPIO ERA GEOMETRIA.....	29
4. PRODUTOS NOTAVEIS NOS LIVROS DIDÁTICOS.....	30
4.1 BINÔMIOS, POLINÔMIOS E O ESTUDO DE PRODUTOS NOTÁVEIS.....	35
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
6. REFERÊNCIAS	38
CAPÍTULO II.....	41
EXPLORANDO PRODUTOS NOTÁVEIS ATRAVÉS DE ÁREAS DE RETÂNGULOS COM SINAL: UMA ABORDAGEM PEDAGÓGICA INOVADORA	41
1. INTRODUÇÃO.....	42
1.1 MATERIAIS MANIPULÁVEIS COMO RECURSOS DIDÁTICOS EM SALA DE AULA	44
1.2 UM NOVO RECURSO PARA O ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS.....	46
2. METODOLOGIA.....	47
3. EXPLORAÇÃO DOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS NAS AULAS DE MATEMÁTICA: ÁREAS DE RETÂNGULOS COM "SINAL".....	54
3.1 EXPLORANDO PRODUTOS NOTÁVEIS COM UMA ABORDAGEM INOVADORA	55
4. ANÁLISE DO TRABALHO REALIZADO	64
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
6. REFERÊNCIAS	72
Apêndice A: Construção do material manipulável	75
Apêndice B: Como usar o MD em sala de aula	81
ANEXO A – RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE JOSÉ CARLOS VIEIRA DE SOUZA	88
ANEXO B – RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE MARCIANO MAURO PAGLIARINI.....	89
ANEXO C – RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE LIDIANE GARCIA BRESSAN	90

ANEXO D – RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE FERNANDA CAROLINE CYBULSKI.....	91
ANEXO E - RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE MÁRCIA REGINA SILVA BERBETZ	93
ANEXO F- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE MATEUS ANTÔNIO VARGAS FERRO	94
ANEXO G- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE NATALI ANGELA FELIPE.....	95
ANEXO H- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE DAYANE MOARA COUTINHO.....	96
ANEXO I- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE ALEX SANDER MARTINS DE CAMARGO.....	97
ANEXO J- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE MICAELA MARIA DOS SANTOS	98
ANEXO K- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE STEPHANY MARIA PEREIRA DA SILVA	100
ANEXO L- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE PEDRO ITALLO VAZ.....	102
ANEXO M- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE LAIS SCORZIELLO FEITOSA DA SILVA	103

1. INTRODUÇÃO

Nesta seção, apresento minha trajetória acadêmica profissional, bem como projetos e programas dos quais participei que ajudaram a criar minha identidade docente e que me aproximam do tema desta pesquisa: Exploração de produtos notáveis por meio de recursos manipulativos. Após esta breve apresentação, exporei o tema de forma contextualizada, a questão de pesquisa que me impulsionou a/ou para pesquisa, os objetivos traçados, relevância desta pesquisa, os instrumentos metodológicos utilizados para investigar a eficácia do material desenvolvido e, por fim, apresento como ficou organizada a dissertação.

1.1. Trajetória profissional/acadêmica e a aproximação com o objeto de pesquisa

Minha trajetória acadêmica e profissional é marcada por experiências que contribuíram para a construção da minha identidade docente. Desde o início do curso em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia (UNEB), tive a oportunidade de participar de programas e ações formativas que me colocaram diretamente em contato com o cotidiano escolar, com as dificuldades reais dos estudantes e com os desafios enfrentados pelos professores em sala de aula.

Um dos momentos mais marcantes dessa formação foi minha atuação como bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). Pude vivenciar na prática o que até então era apenas teoria. O PIBID me inseriu no ambiente escolar e me permitiu observar, planejar e executar intervenções pedagógicas junto aos estudantes da Educação Básica. Foi ali que comecei a perceber com clareza o quanto os estudantes enfrentavam dificuldades em compreender conteúdos abstratos da unidade temática Álgebra. Também percebi que muitos desses obstáculos poderiam ser amenizados com o uso de recursos manipulativos, visuais e interativos, que dessem significado à manipulação simbólica. De acordo com Lorenzato (2006), o uso de materiais concretos contribui para tornar o aprendizado mais significativo, permitindo que os alunos compreendam conceitos abstratos por meio da experiência prática. Além disso, Borba e Penteado (2016) destacam que o uso de tecnologias digitais e representações visuais potencializa a construção do conhecimento, favorecendo uma aprendizagem mais ativa e próxima da realidade dos estudantes. Nesse contexto, algumas dessas observações e intervenções culminaram na publicação de artigos em revistas (LORENZATO, 2006), relatos de experiências (BORBA; PENTEADO, 2016) e comunicações científicas (D'AMBROSIO, 2012), que possibilitaram socializar práticas pedagógicas e contribuir para o avanço das pesquisas em Educação Matemática.

Paralelamente, participei como monitor em disciplinas da própria universidade, como matemática I e Álgebra Linear. Nessas experiências, pude aprofundar minha compreensão dos conteúdos e desenvolver habilidades para explicá-los de maneira mais acessível. As monitorias

foram fundamentais para fortalecer minha base teórica e metodológica, além de me instigar a refletir sobre como diferentes estratégias de ensino podem impactar a aprendizagem dos estudantes. Nessas monitorias, ficou evidente que muitos estudantes recém-ingressantes no curso de licenciatura em matemática possuem algumas dificuldades quanto a manipulações algébricas quando envolvido os produtos notáveis, conhecimento esse necessário para compreensão de Álgebra linear, Geometria analítica, Calculo diferencial e integral entre outros componentes curriculares. Isso me incomodou muito, fazendo-me questionar como estaria o ensino da álgebra na educação básica.

Outro ponto decisivo em minha trajetória foi a participação no Programa Universidade Para Todos (UPT), no qual atuei como professor/monitor de Matemática e Física. Esse programa de extensão me aproximou ainda mais de estudantes em processo de preparação para o ingresso no ensino superior, a maioria oriunda de escolas públicas. Durante as aulas, me deparei com um público que carregava lacunas importantes na aprendizagem da Álgebra, o que reforçou minha percepção da necessidade de abordagens didáticas mais concretas e eficazes.

A experiência no Programa UPT me fez compreender que a escola precisa de práticas que vão além da exposição teórica e que dialoguem com a realidade e o nível de compreensão dos estudantes. Segundo Moreira (2011), o ensino se torna mais eficaz quando o professor estabelece relações entre os conteúdos escolares e situações do cotidiano, possibilitando que os estudantes façam conexões com sua própria realidade e, assim, desenvolvam uma aprendizagem mais crítica e significativa.

Todas essas vivências não só contribuíram para minha formação técnica e pedagógica, mas também foram fundamentais para a construção da minha identidade como professor de Matemática. A partir dessas experiências, consolidei meu interesse por metodologias que tornem o ensino mais acessível e significativo, especialmente no que diz respeito ao ensino da Álgebra.

Minha identidade docente tem sido portanto, construída com base na prática, na escuta atenta aos estudantes e na constante busca por alternativas pedagógicas que respeitem o tempo e o modo de aprender de cada estudante. o incômodo em relação ao ensino de Álgebra na Educação Básica e o interesse pelo uso de materiais didáticos manipuláveis se somaram ao interesse do Prof. Edwin em pensar estratégias para o ensino do objeto de conhecimento produtos notáveis, algo que reforça seu compromisso com uma Educação Matemática para todos.

1.2. Apresentação do tema

Segundo Lorenzato (2010), material didático manipulável é todo e qualquer objeto que possa ser manuseado com a intenção de facilitar a aprendizagem de um conteúdo. Material

didático (MD) é todo e qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Assim, pode-se considerar como tal uma embalagem, uma laranja, uma calculadora, uma régua, um livro, um filme, uma transparência, um quebra-cabeça, um jogo, um giz (LORENZATO, 2010, p. 15).

Pensando nisso, apresentamos um novo recurso pedagógico para aulas de matemática no ensino de produtos notáveis. Recurso esse que se configura em um material didático manipulável que possibilita a compreensão de expressões algébricas como os polinômios por meio de representações geométricas palpáveis, daí o nome manipulável. “Manipulável significa que o estudante possa agir com as mãos sobre o material, transformando-o, adaptando-o, construindo com ele, com a finalidade de compreender determinado conteúdo (Lorenzato, 2010, p. 16).”

Neste material usamos áreas de retângulos sinalizados com cores distintas nas suas fases. Uma cor (vermelha por exemplo) para referir a uma expressão de sinal negativo e uma cor (Azul por exemplo) para representar uma expressão de sinal positivo sabendo que as expressões aqui referidas são representações das áreas dos retângulos. As operações executadas com o material podem ser validadas de forma algébrica, sendo que uma mesma expressão pode ser representada por diversas somas de partições distintas de retângulos.

O material aqui desenvolvido surge então como uma oportunidade do estudante investigar propriedades e processos de fatoração de produtos notáveis, levantar hipóteses e estabelecer conjecturas transitando pelas distintas representações algébrica e geométrica, isto é, fazendo uma conversão entre registros. A conversão é o processo de passar de um registro a outro, mantendo o mesmo significado matemático. Para Duval (2003), essa conversão é fundamental para a compreensão profunda dos conceitos matemáticos, pois nenhum registro, isoladamente, permite compreender todas as propriedades do objeto matemático.

1.3.Problemática

Embora meu incômodo inicial com as dificuldades dos alunos em compreender os produtos notáveis tenha motivado esta investigação, ele, por si só, não seria suficiente para sustentar o fluxo da pesquisa. Essa problemática adquire relevância ao se articular com discussões mais amplas no campo da Educação Matemática. Pesquisas como as de Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) e Ponte (2012) apontam que o ensino de álgebra ainda enfrenta desafios relacionados à abstração dos conceitos e à falta de metodologias que promovam a compreensão significativa. Nesse sentido, meu estudo busca dialogar com essas discussões, propondo uma abordagem que integra representações visuais e recursos tecnológicos para potencializar a aprendizagem.

Dessa forma, sabendo da importância do uso de material didático em sala de aula e da

mobilização de registros de representação para compreensão dos conceitos, buscamos responder a seguinte questão norteadora desta pesquisa:

- Como o uso de áreas de retângulos com sinal pode contribuir para a compreensão dos produtos notáveis, oferecendo uma abordagem visual e que favoreça a construção do significado das expressões algébricas por meio das representações geométricas?

1.4. Objetivos da pesquisa

Objetivo Geral

- ✓ Avaliar como o uso de áreas de retângulos com sinal pode contribuir para a compreensão dos produtos notáveis, oferecendo uma abordagem visual e que favoreça a construção do significado das expressões algébricas por meio das representações geométricas

Objetivos Específicos

- ✓ Realizar um mapeamento não sistemático da literatura;
- ✓ Apresentar uma revisão teórica dos produtos notáveis em relação ao seu contexto;
- ✓ Analisar a abordagem dos produtos notáveis em livros didáticos do EF e EM;
- ✓ Desenvolver um novo recurso pedagógico alicerçado na representação geométrica para explicar e exemplificar os conceitos e operações com produtos notáveis;
- ✓ Aplicar esse recurso em uma sala de aula da Educação Básica;
- ✓ Explorar a eficácia do recurso em comparação com modelos tradicionais de ensino;
- ✓ Explorar a aplicabilidade dessa abordagem em diferentes contextos matemáticos.

1.5. Relevância da pesquisa

Nossa pesquisa assume relevância tanto do ponto de vista didático-pedagógico quanto formativo, uma vez que se propõe a investigar e desenvolver uma abordagem inovadora para o ensino dos produtos notáveis com a construção de um material didático manipulável, o qual o professor pode utilizar em sua sala de aula tanto para introduzir o conceito de produtos notáveis no Ensino Fundamental e no Ensino Médio como uma revisão.

Apesar de haver várias pesquisas relacionadas ao uso de materiais manipuláveis, nossa pesquisa traz como diferencial a criação de um material que aborda o objeto matemático “área” sob uma nova perspectiva, levando em conta o sinal positivo ou negativo da expressão pela área representada.

A pesquisa contribui para a formação de professores de Matemática ao propor uma metodologia que integra álgebra e geometria de forma visual e significativa. O uso de cartolinas coloridas facilita a compreensão dos conceitos envolvendo áreas com sinal positivo e negativo,

oferecendo aos docentes uma alternativa prática e acessível para explicar conteúdos tradicionalmente abstratos. Além de ampliar o repertório pedagógico, a proposta estimula a reflexão sobre as próprias práticas, promovendo uma postura mais crítica e investigativa, alinhada às tendências atuais da Educação Matemática (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013). Dessa forma, a pesquisa favorece tanto a formação inicial quanto a continuada, pois auxilia professores a desenvolverem estratégias criativas, contextualizadas e adaptáveis às diferentes realidades escolares, potencializando a aprendizagem dos estudantes.

1.6.Aspectos metodológicos

Esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa porque busca compreender e interpretar os significados atribuídos por professores e estudantes ao trabalharem com a proposta de ensino das áreas de retângulos com sinal. Mais do que mensurar dados ou quantificar resultados, o estudo tem como objetivo analisar os processos de aprendizagem, as estratégias adotadas e as dificuldades enfrentadas, considerando o contexto e as interações em sala de aula.

De acordo com Lüdke e André (2013), a pesquisa qualitativa privilegia a compreensão aprofundada dos fenômenos educacionais, valorizando a interpretação e a descrição detalhada dos acontecimentos. Nessa mesma perspectiva, Minayo (2001) destaca que esse tipo de abordagem permite captar significados, percepções e relações, elementos fundamentais para investigar práticas pedagógicas. Assim, a escolha por uma abordagem qualitativa justifica-se por possibilitar uma análise mais ampla e contextualizada sobre como a metodologia proposta contribui para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

O desenvolvimento da pesquisa ocorreu em três etapas principais: a primeira envolveu um levantamento teórico sobre materiais manipuláveis e os produtos notáveis, suas propriedades algébricas e suas possibilidades de representação geométrica; a segunda consistiu na construção do recurso didático e elaboração e apresentação de atividades exploratórias; e a terceira referiu-se à aplicação prática do recurso em uma turma do ensino médio de uma escola da rede pública de Educação Básica.

1.7.Organização da dissertação

Esta dissertação está organizada no formato multipaper, e é composta por dois artigos que dialogam entre si. O primeiro artigo apresenta uma revisão bibliográfica sobre os produtos notáveis e o segundo artigo descreve a proposta metodológica desenvolvida e apresenta a análise dos resultados obtidos a partir de sua aplicação em sala de aula.

No primeiro artigo apresentamos uma revisão bibliográfica com trabalhos encontrados numa busca junto a BDTD dos principais trabalhos que dialogavam com o tema da pesquisa usando como termos de busca: Material Manipulável, Álgebra e registros de representação semiótica, de forma isolada e combinada.

Em seguida, foram feitos comparativos entre as estratégias de ensino adotadas nesta pesquisa para com outras, mostrando a relevância e pertinência dos materiais manipuláveis em sala de aula. Ainda neste artigo, foi feito um levantamento histórico acerca dos produtos notáveis e sua importância como pré requisito para estudos futuros como, por exemplo, a equação quadrática e equação da circunferência entre outros. Levantamos ainda algumas discussões sobre a análise de alguns livros didáticos do ensino fundamental II e ensino médio, como os autores abordam os produtos notáveis e quais estratégias didático-metodológicas são fornecidas ao professor de tais etapas da Educação Básica para o ensino de produtos notáveis.

No segundo artigo apresenta-se um relato de como foi feita a aplicação do recurso didático/material manipulável em uma escola da rede pública no estado do Tocantins e uma análise dos resultados obtidos por meio de quadros, gráficos e imagens. Foi analisado também como tal material pode influenciar no engajamento dos estudantes e modificar sua percepção sobre a Álgebra como algo totalmente abstrato e não palpável, evitando falas como: “*quem foi que colocou o alfabeto na matemática?*” por parte dos estudantes da educação básica.

Por fim, o produto educacional gerado a partir desse estudo, proposto aos estudantes e analisado é apresentado em dois apêndices bem ilustrados por meio de figuras abordando a construção e a maneira de usar o material didático manipulável.

CAPÍTULO I

ARTIGO 1

MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: FUNDAMENTOS
TEÓRICOS E APLICAÇÕES NOS PRODUTOS NOTÁVEIS ATRAVÉS DE UMA
ABORDAGEM GEOMETRICA INOVADORA

Weberson Sousa dos Anjos
Edwin Oswaldo Salinas Reyes
Ana Maria Porto Nascimento

Resumo:

Este artigo discute a relevância do uso de materiais manipuláveis no ensino de Matemática, com ênfase na abordagem dos produtos notáveis. A partir de uma revisão de literatura sistemática construída com base em teses e dissertações disponíveis na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), o estudo destaca como esses recursos podem favorecer a aprendizagem significativa, especialmente ao tornar conceitos abstratos mais acessíveis e concretos. A análise inclui também a investigação de livros didáticos e obras sobre a história da matemática, que reforçam a importância da manipulação de materiais no processo de ensino-aprendizagem. Os resultados evidenciam que o uso de materiais manipuláveis potencializa o entendimento dos produtos notáveis, promovendo maior envolvimento dos estudantes e contribuindo para a construção de saberes matemáticos de forma mais dinâmica e visual.

Palavras-chave: Produtos notáveis. Material manipulável. Ensino. Aprendizagem.

Abstract:

This article discusses the relevance of using manipulative materials in mathematics teaching, with an emphasis on addressing notable products. Based on a systematic literature review of theses and dissertations available in the Digital Library of Theses and Dissertations (BDTD), the study highlights how these resources can promote meaningful learning, especially by making abstract concepts more accessible and concrete. The analysis also includes research into textbooks and works on the history of mathematics, which reinforce the importance of manipulative materials in the teaching-learning process. The results show that the use of manipulative materials enhances the understanding of notable products, promoting greater student engagement and contributing to the construction of mathematical knowledge in a more dynamic and visual way.

Keywords: Notable products. Manipulative material. Teaching. Learning.

1. INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática deveria ser muito mais do que a simples aplicação de fórmulas, memorização de procedimentos e realização de cálculos de forma mecânica, pois essa ciência desempenha um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento lógico, da capacidade de argumentação e na resolução de problemas. Como afirma D'Ambrosio (1996), a Matemática deve ser compreendida como um instrumento para interpretar e intervir no mundo, e não apenas como um conjunto de técnicas e regras. Nesse sentido, o ensino deve ser planejado e executado de forma mais significativa, tornando o estudante protagonista do processo de aprendizagem. Para Lorenzato (2006), o conhecimento matemático só se consolida quando o aluno participa ativamente da construção do saber, relacionando o conteúdo com situações reais e com suas próprias experiências. Tal processo torna-se ainda mais efetivo quando são utilizadas metodologias ativas, como a resolução de problemas, o uso de tecnologias digitais e o manuseio de materiais manipuláveis, pois, segundo Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), essas práticas favorecem o engajamento, promovem a compreensão conceitual e aproximam o aprendizado da realidade dos estudantes.

Identificamos em sala de aula que o desafio é mostrar que a matemática não é um obstáculo, mas um recurso essencial para a vida.

Lorenzato (2010), esclarece que, para muitos de nós, a matemática foi ensinada como um conjunto de regras e fórmulas que devem ser usadas apenas para resolver exercícios em exames. Para o estudante, mais importante que conhecer as ditas verdades matemáticas, é obter a alegria da descoberta, a percepção da sua competência, a melhoria da autoimagem, a certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer constatações, a satisfação do sucesso, e compreender que a matemática, longe de ser um bicho-papão, é um campo de saber onde ele, estudante, pode navegar.

Refletindo sobre o processo de ensino e possibilidades de melhorias no processo de aprendizagem de modo a garantir aos estudantes o protagonismo e autonomia nesse processo, neste trabalho trazemos um estudo teórico sobre as possibilidades e potencialidades que o uso dos materiais manipuláveis pode oferecer para as aulas de Matemática na Educação Básica, mais especificamente para o ensino de produtos notáveis. Além disso, analisaremos também a importância do ensino usando atividades investigativas com o suporte de materiais manipuláveis, e nesse contexto, como a interseção entre representação geométrica e algébrica pode fomentar momentos de criação de hipóteses, testes e validação de resultados.

Para organização e interpretação dos dados houve a fundamentação em Lorenzato (2010), Fiorentini (1994), Grandó (2000), Duval (2003), Pólya (1945), Lakatos (1976) e Berlinghoff e Gouvêa (2018). Tais autores formam aqui a base para análise crítica e divulgação

sistemática de um trabalho científico.

2. METODOLOGIA

Realizamos buscas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD que se configura como uma base de dados essencial para conduzir revisões de literatura e identificar o estado da arte, oferecendo uma visão ampla e atualizada das pesquisas realizadas em diferentes campos do saber. Segundo Medeiros (2014), a BDTD permite aos pesquisadores identificar tendências, lacunas e avanços em suas áreas de interesse, proporcionando uma base sólida para a elaboração de novas investigações.

Para a formação do corpus de análise das produções acadêmicas que fundamentaram este estudo, foram definidos os seguintes critérios:

- a) Seleção de produções - por meio de consulta à plataforma BDTD;
- b) Delimitação temporal – período de 2013 a 2024;
- c) Tipo de produção - focando em teses e dissertações.

Usando tais critérios, encontramos 95 resultados para “Material Manipulável”, 13 resultados para “Material manipulável; Álgebra” e 3 resultados para “Material manipulável; Álgebra; registros de representação semiótica”.

Após feita a verificação e seleção, organizamos no quadro abaixo os 13 principais trabalhos que dialogam com nossa pesquisa.

Quadro 1: Trabalhos encontrados na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e Google acadêmico.

Ano	Título	Autor(es)	Instituição	Sujeitos da Pesquisa	Foco da Pesquisa	Metodologia Empregada	Objetivo do Estudo
2013	Calculando distâncias em geometria espacial usando material manipulável como recurso didático	Eliane Veiga Moreira	UFRN	Estudantes de Ensino Médio	Proposta pedagógica para ensino de distâncias em geometria espacial utilizando material manipulável.	Desenvolvimento e aplicação de atividades práticas com material manipulável para ensino de distâncias em geometria espacial.	Apresentar proposta pedagógica para ensino de distâncias em geometria espacial utilizando material manipulável.
2016	Abordagem metodológica para o ensino de trigonometria por meio de material manipulável e registros de representação semiótica	Marciano Mauro Pagliarini	UTFPR	Estudantes de Ensino Médio	Desenvolvimento de metodologia para ensino de trigonometria utilizando materiais manipuláveis e registros semióticos.	Aplicação de materiais manipuláveis e registros semióticos no ensino de trigonometria, com análise de sua eficácia.	Desenvolver metodologia para ensino de trigonometria utilizando materiais manipuláveis e registros semióticos.
2021	Utilização do Algeplan ¹ nas operações com polinômios e raízes de equações do 2º grau	Lidiane Garcia Bressan	UFSM	Estudantes de Ensino Médio	Aplicação do software Algeplan no ensino de operações com polinômios e resolução de equações quadráticas.	Utilização do Algeplan em atividades práticas para ensino de Álgebra e resolução de	Aplicar o Algeplan no ensino de operações com polinômios e resolução de equações quadráticas.

¹ Software educativo desenvolvido para auxiliar o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

						equações do 2º grau.	
2022	Geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática: indicativos de dissertações e teses brasileiras	Fernanda Caroline Cybulski	UEL	Estudantes de Licenciatura em Matemática	Análise de dissertações e teses brasileiras sobre a formação inicial de professores de matemática com foco em geometria.	Análise documental de dissertações e teses sobre a formação inicial de professores de matemática, com foco em geometria.	Analisar dissertações e teses sobre a formação inicial de professores de matemática com foco em geometria.
2019	Educação matemática inclusiva – o material didático na perspectiva do desenho universal para área visual	Márcia Regina Silva Berbetz	UFPR	Estudantes com deficiência visual	Investigação sobre materiais didáticos inclusivos na educação matemática para deficientes visuais, com base no desenho universal.	Análise de materiais didáticos sob a ótica do desenho universal, aplicados ao ensino de matemática para deficientes visuais.	Investigar materiais didáticos inclusivos na educação matemática para deficientes visuais, com base no desenho universal.
2018	Estudo de conceitos de Álgebra com o auxílio de materiais manipuláveis	Mateus Antônio Vargas Ferro	UFN	Estudantes de Ensino Médio	Estudo sobre o uso de materiais manipuláveis no ensino de conceitos algébricos.	Aplicação de materiais manipuláveis no ensino de Álgebra, com análise de sua eficácia no aprendizado dos estudantes.	Estudar o uso de materiais manipuláveis no ensino de conceitos algébricos.
2021	A significação dos números inteiros por estudantes cegos e de baixa visão a partir do material Soroban dos inteiros	Natali Angela Felipe	UTFPR	Estudantes cegos e de baixa visão	Investigação sobre a compreensão de números inteiros por estudantes cegos e de baixa visão utilizando o material Soroban.	Utilização do material Soroban para ensino de números inteiros a estudantes cegos e de baixa visão, com análise qualitativa dos resultados.	Investigar a compreensão de números inteiros por estudantes cegos e de baixa visão utilizando o material Soroban.
2019	Divisão e multiplicação de polinômios com o auxílio de materiais manipuláveis e tecnologias sob o olhar da representação semiótica	Dayane Moara Coutinho	UTFPR	Estudantes do Ensino Médio	Avaliação de uma sequência didática apoiada em materiais manipuláveis e atividades online para o ensino das operações de multiplicação e divisão de polinômios.	Sequência didática utilizando materiais manipuláveis e atividades online, com base na Teoria de Registro de Representação Semiótica.	Avaliar uma sequência didática apoiada em materiais manipuláveis e atividades online para o ensino das operações de multiplicação e divisão de polinômios.
2020	O material manipulável Algeblocks: uma proposta para o ensino médio	Alex Sander Martins de Camargo	UFSCar	Estudantes do Ensino Médio	Desenvolvimento de uma proposta de ensino de Álgebra no ensino médio utilizando o material manipulável Algeblocks.	Desenvolvimento de um produto educacional na forma de uma proposta de ensino para o ensino médio, utilizando o material manipulável Algeblocks.	Desenvolver uma proposta de ensino de Álgebra no ensino médio utilizando o material manipulável Algeblocks.
2023	A prática pedagógica do professor de matemática e o uso do material manipulável com estudantes surdos incluídos nos anos finais do Ensino Fundamental	Micaela Maria dos Santos	UFPE	Professores de matemática e estudantes surdos do EF II em Caruaru	Prática pedagógica com foco na inclusão de estudantes surdos no ensino de matemática	Estudo qualitativo, exploratório e descritivo; uso de questionários, observação e entrevistas; análise de conteúdo (Bardin, Franco)	Analisar as contribuições do uso de material manipulável na prática pedagógica de professores de matemática com estudantes surdos incluídos
2024	Conhecimentos para o ensino de média aritmética nos anos finais para estudantes	Stephany Maria Pereira da Silva	UFPE	Brailistas, estudantes cegos e professores	Ensino de média aritmética para estudantes cegos usando material manipulável	Estudo qualitativo com entrevistas semiestruturadas, planejamento	Analisar conhecimentos mobilizados no ensino de média aritmética para cegos e a viabilidade de

	cegos utilizando material manipulável			de matemática		de aula e análise do uso de material manipulável por professores	material manipulável para esse público
2024	A História da EJA: uma proposta para o ensino de Condição de Existência de Triângulos utilizando material manipulável	Pedro Itallo Vaz	UFG	Estudantes da EJA	Ensino de geometria básica na EJA usando recursos manipuláveis	Pesquisa qualitativa com aplicação de proposta didática; uso de material manipulável como macarrão para construção de triângulos	Propor e aplicar uma sequência didática para o ensino da condição de existência de triângulos na EJA com material manipulável
2024	Formação continuada com professores que ensinam matemática: uma abordagem sobre o uso de material didático manipulável	Lais Scorziello Feitosa da Silva	UFES	Professores de matemática do município de Piúma-ES	Formação continuada e uso de materiais didáticos manipuláveis	Pesquisa qualitativa e participante; aplicação de curso de formação continuada, uso de questionários, rodas de conversa e diário de campo	Investigar se um curso de formação continuada com foco em materiais manipuláveis contribui para o conhecimento e práticas de professores que ensinam matemática

Fonte: Diário do pesquisador 2024

Analisando esses trabalhos, é possível destacar em cada um deles a relevância do ensino de Matemática por meio de materiais manipuláveis, suas dificuldades de inserção em sala de aula e estratégias para oferecer um ensino de qualidade e significativo.

Dentre os trabalhos catalogados, destacamos o de Alex Sander Martins de Camargo (2020) e Scorziello Feitosa da Silva (2024), como os que mais dialogam com o que queremos propor. Em seu trabalho, Camargo (2020) desenvolve uma sequência didática que utiliza materiais manipuláveis (Algeblocks)² para ajudar os estudantes a visualizarem e compreenderem as operações algébricas, promovendo uma interação prática com o conteúdo.

Camargo (2020), explora como os algeblocks podem melhorar o entendimento dos estudantes sobre conceitos algébricos, ao mesmo tempo que torna o processo de aprendizagem mais dinâmico e concreto.

Já Silva (2024), promove um curso de formação continuada com professores de matemática da Educação Básica do estado de Espírito Santo para trabalhar estratégias metodológicas como o uso de materiais manipuláveis para exploração de diversos objetos matemáticos desde escalas, análise de gráficos até estudo de fractais e média aritmética. Em seu trabalho, Silva (2024) documenta mudanças na percepção dos professores sobre o uso dos materiais didáticos manipuláveis (MDM) após o curso e usa uma metodologia qualitativa participativa com uma aplicabilidade direta na prática docente.

O quadro abaixo mostra um comparativo entre o trabalho desses autores e a nossa pesquisa em relação a algumas perspectivas metodológicas:

Quadro 2: Comparação entre os aspectos metodológicos do trabalho de Camargo (2020) e Anjos (2025).

² Material manipulável concreto desenvolvido para auxiliar no ensino de Álgebra, especialmente no trabalho com expressões algébricas, polinômios e produtos notáveis. Eles funcionam como "blocos algébricos" — peças físicas que representam termos algébricos — e são fortemente inspirados na lógica do ensino concreto → pictórico → simbólico.

Aspecto	Trabalho de Alex Sander Martins de Camargo (2020)	Nosso Estudo
Tipo de Material Manipulável	Utilização de Algeblocks, blocos coloridos que representam operações algébricas.	Uso de retângulos sinalizados com áreas positivas (azul) e negativas (cinza) para representar produtos notáveis, permitindo uma visualização clara das operações.
Contexto de Aplicação	Ensino de Álgebra, com foco em multiplicação e divisão de polinômios.	Ensino de produtos notáveis, como soma de quadrados e diferença de quadrados, usando uma abordagem geométrica para resolver expressões algébricas.
Interatividade	Foco na manipulação dos Algeblocks para formar expressões algébricas.	Estudantes resolvem expressões de produtos notáveis por meio da construção de retângulos sinalizados, promovendo uma interação visual e ativa com o conteúdo.
Abordagem Matemática	Conceitos de Álgebra, especialmente multiplicação e divisão de polinômios	Enfoque na compreensão de produtos notáveis, estimulando os estudantes a conectar a Álgebra à geometria por meio da visualização e manipulação de áreas
Desenvolvimento de Habilidade	Desenvolvimento da habilidade algébrica para manipulação de expressões algébricas	Desenvolvimento das habilidades de resolução de expressões algébricas e interpretação geométrica, estimulando o raciocínio lógico e a criatividade na formulação de soluções
Acessibilidade	Material manipulável físico e simples, fácil de ser usado em sala de aula	O uso de cores distintas (azul para áreas positivas e cinza para áreas negativas) proporciona uma forma acessível para estudantes de diferentes estilos de aprendizagem
Tecnologia Integrada	Uso de Algeblocks como material manipulável, sem integrar recursos digitais	Potencial de integração com ferramentas digitais para complementar a construção dos retângulos e explorar os produtos notáveis de maneira interativa e dinâmica a exemplo do Geogebra
Avaliação	Avaliação prática baseada na aplicação do material manipulável para construir e entender expressões algébricas	Avaliação do aprendizado por meio de atividades que desafiem os estudantes a construir e validar expressões algébricas utilizando os retângulos sinalizados, promovendo a reflexão crítica sobre as soluções encontradas
Relevância para o Ensino de Matemática	Favorece a aprendizagem de Álgebra ao tornar as expressões mais tangíveis e manipuláveis	Oferece uma abordagem inovadora ao conectar Álgebra e geometria, proporcionando uma experiência de aprendizado mais concreta e visual, onde os estudantes compreendem melhor a natureza dos produtos notáveis e sua aplicação

Fonte: Diário do pesquisador 2024

Quadro 3: Comparativo entre nosso estudo × Lais Scorziello da Silva (2024)

Critério	Nosso estudo	Lais Scorziello da Silva (2024)
Tema Central	Produtos notáveis (identidades algébricas)	Uso de material manipulável no ensino da matemática
Público-alvo	Estudantes do Ensino Médio	Professores que ensinam matemática na Educação Básica (Piúma-ES)
Objetivo Geral	Tornar produtos notáveis mais compreensíveis com recursos visuais e táteis	Investigar os efeitos de uma formação continuada sobre o uso de material manipulável
Recursos Utilizados	Cartolinas dupla face (azul/vermelho) representando áreas geométricas sinalizadas	Diversos materiais manipuláveis: EVA, tangram, embalagens, etc.
Metodologia	Ensino exploratório com base visual e concreto	Pesquisa qualitativa participante com formação, rodas de conversa, diário de campo
Fundamentação Teórica	Construtivismo, área como representação algébrica, visualidade no ensino	Teoria de aprendizagem significativa, ensino de matemática com MDM
Tipo de Produto	Atividades investigativas e visuais	Curso de formação continuada para professores com aplicação prática
Contribuição para a prática	Facilita a compreensão algébrica por meio da visualização	Ressignifica o uso de MDM como potencial pedagógico
Abordagem Inclusiva	Visual, voltada para diversos estilos de aprendizagem	Enfatiza adaptação à realidade docente, inclusive com limitações materiais
Potencial de Expansão	Pode ser replicado com baixo custo em diversas escolas	Propõe continuidade em formações futuras com base nas experiências do curso

Fonte: Diário do pesquisador 2024

As concepções aqui trazidas por esses autores dialogam com Lorenzato (2010), Diniz (2001) e Fiorentini (1994), no que tange ao papel dos materiais manipuláveis no processo de ensino-aprendizagem. São esses materiais que para Diniz (2001), possibilitam a representação física de conceitos matemáticos, permitindo que os estudantes estabeleçam conexões entre o mundo abstrato da matemática e situações reais, facilitando a compreensão e o desenvolvimento do pensamento lógico.

Vygotsky (1987), por sua vez, ressalta que a interação social e o uso de ferramentas mediadoras desempenham papéis cruciais no desenvolvimento cognitivo. Nessa perspectiva, entendemos que os materiais manipuláveis desempenham o papel de mediadores na construção do conhecimento matemático, possibilitando a participação ativa do estudante no processo de aprendizagem e a atribuição de significado aos conceitos explorados.

Segundo a Base nacional Comum Curricular (BNCC), (2018, p.476), a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio deve ser articulada ao uso de diferentes recursos, como materiais manipuláveis e tecnologias digitais, com o objetivo de promover a compreensão de conceitos, o desenvolvimento de habilidades e a aplicação em situações reais.

Apoiando-se nas ideias de Davidov(1982) e Kopnin(1978), Lorenzato (2010) esclarece que:

Os conceitos evoluem com o processo de abstração; a abstração ocorre pela separação mental das propriedades inerentes a objetos (Davidov, 1982, p.332). Esse processo começa com o apoio dos nossos sentidos e, assim, ele é aparentemente paradoxal porque, para se chegar ao abstrato, é preciso partir do concreto. O abstrato, segundo Kopnin (1978, p.54), é o “isolamento de alguma propriedade sensorialmente acessível do objeto”. Faz-se necessário partir do concreto.

Assim, ao sugerir o título “MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E APLICAÇÕES NOS PRODUTOS NOTÁVEIS” estamos levando em consideração as distinções entre material concreto e material manipulável definidas por Lorenzato (2010), quando afirma: “O concreto pode ter duas interpretações: uma delas refere-se ao palpável, manipulável, e outra, mais ampla, inclui também as imagens gráficas; ainda sobre o concreto, às vezes, o real tem sido confundido com o concreto”.

Com essa afirmação, Lorenzato (2010), sugere que muitas vezes se assume que algo palpável e manipulável (concreto) é automaticamente "real" para o estudante, o que nem sempre é verdade. Em outras palavras, é necessário compreender o concreto como manipulável e o concreto como representação gráfica. Na primeira interpretação, o concreto refere-se a objetos físicos que podem ser tocados e manipulados, como blocos matemáticos, réguas ou materiais didáticos manipuláveis. Já na segunda interpretação, algo pode ser considerado concreto mesmo que não seja palpável, mas sim visualmente compreensível, como gráficos, diagramas e

representações pictóricas.

Isto é, muitas vezes consideramos que o estudante entenderá um conceito só porque ele foi apresentado de forma concreta por meio de objetos físicos ou representações. Entretanto, o que é real para o estudante depende de sua experiência e do seu nível de abstração para com o objeto matemático trabalhado. Um material pode ser concreto para o professor, mas ainda abstrato para o estudante, se ele não conseguir estabelecer uma conexão significativa com a ideia representada.

Esse olhar para com a intencionalidade na aplicação do material por parte do professor é previsto também por Lorenzato (2010), quando esclarece:

O professor de matemática, ao planejar sua aula, precisa perguntar-se: será conveniente, ou até mesmo necessário, facilitar a aprendizagem com algum material didático? Com qual? Em outras palavras, o professor está respondendo às questões: “Por quê material didático?”, “Qual é o material?” e “Quando utilizá-lo?”. Em seguida, é preciso perguntar-se: “Como esse material deverá ser utilizado?”. Essa última questão é fundamental, embora não suficiente, para que possa ocorrer uma aprendizagem significativa.

Levando em consideração tais perguntas e evidenciando as dificuldades dos estudantes em tópicos abstratos como os produtos notáveis e a importância da inserção do didático em sala de aula, verificamos a necessidade de ensinar produtos notáveis, usando áreas de retângulos acompanhados de um sinal positivo e negativo a fim de promover uma aprendizagem mais ativa e que os estudantes estabeleçam conexões entre Álgebra e geometria.

Essas conexões entre Álgebra e geometria para o ensino de produtos notáveis são observadas em livros didáticos de forma superficial, limitando-se muitas vezes ao caso $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, sem propor estratégias metodológicas para outros casos ou indicação de materiais manipuláveis para uma construção prática.

A ideia de um novo recurso segue a concepção de Kammi (1995), para inovação quando indaga que,

Inovar o ensino da matemática geralmente relaciona-se com o desenvolvimento de novas metodologias de ensino que complementam o conteúdo trabalhado com o objetivo de desenvolver a autonomia dos estudantes bem como seu conhecimento lógico matemático analisado dentro de uma visão interativa e autônoma, na formação de indivíduos autônomos, capazes de raciocinar de forma independente, participativo e criativo (KAMMI, 1995, p. 45).

Ou seja, é necessário a criação de metodologias que favoreçam a autonomia, participação ativa e o raciocínio independente dos estudantes, fazendo com que estes possam construir o conhecimento matemático de forma lógica, participativa e criativa.

3. RELAÇÃO HISTÓRICA ENTRE A GEOMETRIA E A ÁLGEBRA A PARTIR DOS PRODUTOS NOTÁVEIS

Os produtos notáveis são expressões algébricas com formas específicas que podem ser

fatoradas de maneira especial. Os casos particulares acontecem quando tomamos dois números reais não negativos $a, b \geq 0$. Algumas destas expressões são apresentadas a seguir:

1. $a^2 + ab + ba + b^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$.
2. $a^2 - ab - ba + b^2 = (a - b)(a - b) = (a - b)^2$.
3. $-a^2 + ab + ba - b^2 = (a - b)(b - a) = -(a - b)^2$.
4. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = (b + a)(a - b)$.
5. $b^2 - a^2 = (b + a)(b - a) = (a + b)(b - a)$.

Entender esses produtos notáveis é essencial para a aprendizagem da Álgebra, pois eles são frequentemente utilizados em equações quadráticas, fatoração e simplificação de expressões. No entanto, a metodologia tradicional de ensino frequentemente enfatiza a memorização dessas fórmulas, o que pode ser um obstáculo para os estudantes.

A relação entre geometria e Álgebra remonta às civilizações antigas, como os babilônios, egípcios e gregos. Enquanto os babilônios já resolviam equações quadráticas utilizando métodos geométricos, os gregos, principalmente por meio da obra de Euclides, estruturaram o conhecimento geométrico de forma lógica e rigorosa (Eves, 2004). Esse método de solução de equações quadráticas desenvolvido pelos babilônios também possui um significado histórico, pois a Álgebra e a geometria grega desenvolvida pelos pitagóricos e por Euclides seguiram esse mesmo método de solução, porém, em termos de segmentos de retas e áreas, que eram ilustrados por figuras geométricas” (ROSA; OREY, 2012, p. 91)

No entanto, foi com matemática persa Al-Khwarizmi, no século IX, que a Álgebra começou a se estruturar como um campo independente. Em sua obra, *Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala* (O Livro do Cálculo por Completamento e Balanço), Al-Khwarizmi utilizou métodos geométricos para aplicação de operações algébricas, incluindo a resolução de equações quadráticas. Esse livro é um marco na história da matemática e influenciou significativamente o desenvolvimento da Álgebra na idade média.

Segundo Du e Gouvêa (2018), no livro *A Matemática Através dos Tempos*, a transição da geometria para a Álgebra simbólica ocorreu acidentalmente, ganhando força a partir do Renascimento. Durante esse período, matemáticos como René Descartes e Pierre de Fermat desenvolveram a Geometria Analítica, estabelecendo uma ponte definitiva entre as duas áreas. Descartes, em sua obra *La Géométrie*, modificou o sistema de coordenadas cartesianas, permitindo que curvas geométricas fossem representadas por equações algébricas. Esse avanço revolucionou a matemática e abriu caminho para o design diferencial e integral.

Ainda segundo Berlinghoff e Gouvêa (2018), a Álgebra simbólica moderna só se consolidou com matemáticos como François Viète, que difundiu o uso de letras para representar pequenas coisas conhecidas e desconhecidas, e posteriormente, com a padronização da notação algébrica no século XVII.

Foi a partir dessas mudanças que os produtos notáveis passaram a ser sistematizados

como fórmulas algébricas independentes, mas sua interpretação complexa como um recurso importante para a compreensão intuitiva dos conceitos.

Assim, a conexão entre Álgebra e geometria não apenas moldou o desenvolvimento da matemática ao longo dos séculos, mas também continua sendo uma ferramenta essencial para a aprendizagem, permitindo que os estudantes desenvolvam um raciocínio matemático mais amplo e estruturado.

No que tange a aprendizagem em Álgebra, segundo Klusener et al. (2007), os conceitos matemáticos vinculados a Álgebra e suas operações têm evidenciado com frequência dificuldades e conflitos para os estudantes. Percebe-se em sala de aula que apenas a utilização da linguagem algébrica por parte do professor no processo de ensino muitas vezes tem se tornado insuficiente na aprendizagem da Álgebra.

A fim de superar muitos desafios ligados ao ensino e aprendizagem de produtos notáveis inseridos no campo da Álgebra, é de notória importância adotar novas abordagens de ensino que promovam a compreensão profunda dos conceitos, em vez de simplesmente focar na simples memorização das fórmulas. Uma tática eficaz é a utilização de ferramentas visuais e geométricas com ou sem o apoio de tecnologias digitais as quais possibilitem a ilustração de teoremas, problemas, etc. Matos e Serrazina (1996) ressaltam que existem fortes evidências, que nos permitem afirmar que professores que fazem uso de materiais manipuláveis em suas aulas favorecem a aprendizagem, e desenvolvem nesses estudantes uma atitude mais positiva, um aprender mais significativo.

3.1 NO PRINCÍPIO ERA GEOMETRIA

O uso de materiais manipuláveis no ensino da Álgebra, especialmente no tratamento de produtos notáveis, representa uma estratégia pedagógica potente para tornar conteúdos abstratos mais acessíveis e compreensíveis. Segundo Lorenzato (2010, p. 21), “para se alcançar a abstração é preciso começar pelo concreto [...] este é o caminho para a formação de conceitos.”

Em vez de apresentar diretamente fórmulas como identidades algébricas prontas, como o quadrado da soma ou da diferença, é possível explorar visualmente essas expressões por meio de representações geométricas, recortes, dobraduras ou construções com papel colorido. Essas abordagens não apenas facilitam a compreensão, mas também favorecem o desenvolvimento do pensamento matemático mais autônomo e investigativo por parte dos estudantes. A visualização de um problema, muitas vezes, é o primeiro passo para sua solução” (PÓLYA, 1945, p. 38).

A esse respeito, Carmen Sessa (2009), em sua obra *Iniciação ao Estudo Didático da Álgebra: Origens e Perspectivas*, chama atenção para as origens da Álgebra na própria geometria. No capítulo intitulado “No princípio era a geometria”, a autora destaca que, historicamente, muitos conceitos algébricos surgiram de construções geométricas. Nesse

sentido, ela defende que o ensino da Álgebra deve retomar esse vínculo com a geometria, como forma de construir significados mais sólidos e duradouros. Para Sessa, “a passagem da geometria à Álgebra não se faz por oposição, mas por um prolongamento da intuição espacial na simbolização algébrica” (SESSA, 2009, p. 42).

Adotar essa perspectiva ao ensino dos produtos notáveis significa, por exemplo, representar o quadrado de um binômio como a área de um quadrado maior formado por quadrados e retângulos menores. Com cartolina colorida, os estudantes podem montar um quadrado de lado $(a + b)$, visualizar suas partes, recortá-las e reorganizá-las, percebendo que sua área corresponde à soma das áreas dos quadrados e retângulos menores: $a^2 + 2ab + b^2$. Assim, compreendem a identidade algébrica de forma concreta antes de memorizá-la. Nesse sentido, é sabido que a percepção de regularidades e padrões, a generalização e a simbolização são elementos que caracterizam o pensamento algébrico, e a geometria pode ser um campo fértil para o desenvolvimento dessas habilidades” (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993, p. 45).

Essas estratégias favorecem a aprendizagem significativa, conforme propõe a própria Sessa (2009), ao proporcionar que os estudantes se apropriem dos conceitos por meio da ação, da visualização e da reflexão. O material manipulável, nesse caso, atua como mediador entre o pensamento concreto e o pensamento abstrato, promovendo uma aprendizagem mais ativa, crítica e contextualizada.

Portanto, retomar o uso de recursos visuais e táteis no ensino de produtos notáveis não é apenas uma inovação pedagógica, mas um retorno às origens epistemológicas da Álgebra. Como propõe Sessa (2009), ensinar Álgebra a partir da geometria é resgatar um caminho histórico de construção do conhecimento, favorecendo o entendimento e a valorização da matemática como linguagem e ferramenta para interpretar o mundo.

4. PRODUTOS NOTÁVEIS NOS LIVROS DIDÁTICOS

O ensino dos produtos notáveis tem início por volta do 8º ano do Ensino Fundamental II em capítulos que abordam polinômios e operações.

Analisamos três livros didáticos distintos do 8º ano para verificar a abordagem dos autores a esse tema tão importante e pertinente para compreensão de conceitos matemáticos futuros do ensino fundamental, ensino médio, e até mesmo em disciplinas como Álgebra linear e o cálculo diferencial e integral do ensino superior.

Foi observado que no livro 1 de título “A CONQUISTA DA MATEMÁTICA” da editora FTD do ano 2020 não há citação alguma sobre produtos notáveis. Neste livro, o ensino de polinômios ocorre de forma algébrica, sem menção a qualquer material manipulável para facilitar a compreensão das operações puramente algébricas.

Para Lorenzato (2006b, p.3), “ensinar é dar condições para que o estudante construa seu próprio conhecimento”. Nessa mesma perspectiva, Lorenzato deixa claro a importância de

materiais manipuláveis quando afirma que,

palavras não alcançam o mesmo efeito que conseguem os objetos ou imagens, estáticas ou em movimento. Palavras auxiliam, mas não são suficientes para ensinar. [...] o fazer é mais forte que o ver ou ouvir. [...] o “ver com as mãos” é mais popular do que geralmente se supõe. [...] as pessoas precisam “pegar pra ver”, como dizem as crianças. Então, não começar o ensino pelo concreto é ir contra a natureza humana (LORENZATO, 2006a, p.17-19).

No livro 2 de título “MATEMÁTICA: Ideias e desafios” da editora Saraiva, ano 2015, as autoras discorrem sobre o conteúdo de polinômios com alguns preceitos geométricos de áreas sem dar ênfase nos produtos notáveis, sendo os cálculos realizados em sua grande maioria sem levar em consideração os conceitos de áreas. Neste livro, o único momento em que as autoras fazem referência aos produtos notáveis é em uma atividade a ser investigada e escrita no caderno como mostra a figura 1 abaixo:

Figura 1: Print de uma página do livro 2

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

- Calcule os valores numéricos destes polinômios para $a = 3$ e $b = -7$:

$A = a^2 - 2ab + b^2$

$B = (a - b)^2$

A: 100; B: 100
- Escolha um valor para **a** e outro para **b** e peça ao colega que calcule o valor numérico desses polinômios. *Resposta pessoal.*
- Comparem os valores numéricos dos polinômios **A** e **B**, calculados no item anterior. O que pode ser observado? *São iguais.*
- Façam o mesmo para os polinômios:

$C = a^2 + 2ab + b^2$

$D = (a + b)^2$
- Escolham um valor para **a** e outro para **b**, calculem e comparem os valores numéricos desses polinômios. Escrevam o que observaram. *Eles também são iguais.*

Fonte: Diário do pesquisador 2024

Notamos que as autoras nem tão pouco mencionaram casos como $a^2 + b^2$ e $a^2 - b^2$.

Analisando o livro 3 da editora Ática de nome PROJETO TELÁRES do autor Luiz Roberto Dante também do ano de 2015 notamos a presença do ensino de polinômios e com ênfase nos produtos notáveis quando explanado a respeito das operações de adição, subtração e multiplicação entre polinômios.

O autor trabalha o tratamento da informação com o suporte de representação de áreas em retângulos para dar significados as equações algébricas como observamos nas figuras a seguir:

Figura 2: Print de uma página do livro 3- $(a+b)^2$

Produtos notáveis

Algumas multiplicações que envolvem polinômios apresentam uma regularidade (padrão) em seus resultados (produtos). Por isso, são conhecidas como **produtos notáveis**. Conhecendo-os, podemos economizar muitos cálculos.

Vamos estudar os produtos notáveis conhecidos por **quadrado da soma**, **quadrado da diferença**, **produto da soma pela diferença**, **cubo da soma** e **cubo da diferença**.

Quadrado da soma: $(a + b)^2$ ou $(a + b)(a + b)$

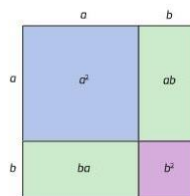
$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

Como $a \cdot b = b \cdot a$
(propriedade comutativa),
então $a \cdot b + b \cdot a = 2ab$.



Assim, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Geometricamente, é o mesmo que calcular a área de uma região quadrada de lado $(a + b)$.

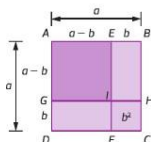


Fonte: Diário do pesquisador 2024

Figura 3: Print de uma página do livro 3- $(a-b)^2$

Quadrado da diferença: $(a - b)^2$ ou $(a - b)(a - b)$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$



Geometricamente, equivale a calcular a área de uma região quadrada de lado $(a - b)$.

Para obter a área da região quadrada $AEIG$, determinamos a área de $ABCD$ (a^2) e dela subtraímos as áreas de $EBCF$ e de $GHCD$ ($2ab$). Ao subtrair essas duas últimas áreas, subtraímos duas vezes a área de $IHCF$. Por isso, precisamos adicionar de novo uma vez a área de $IHCF$ (b^2). Assim, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Veja que aqui também temos uma regularidade e que, por isso, o quadrado da diferença também é um produto notável.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

quadrado do 1º termo o oposto do dobro do produto dos dois termos quadrado do 2º termo

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo menos o dobro do produto do 1º termo pelo 2º termo mais o quadrado do 2º termo.

Fonte: Diário do pesquisador 2024

Figura 4: Print de uma página do livro 3- $a^2 - b^2$

Produto da soma pela diferença: $(a + b)(a - b)$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

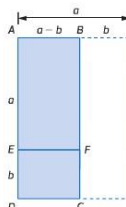
Assim, $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

Geometricamente equivale a calcular a área de uma região retangular de lados

$(a + b)$ e $(a - b)$:

área de ABCD = área de ABFE + área de EFCD

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= a(a - b) + b(a - b) \\ &= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$



Logo, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Temos aqui mais um produto notável, pois há uma regularidade no resultado. Observe:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

quadrado do 1º termo

oposto do quadrado do 2º termo

Note que a soma e a diferença são dos mesmos termos.

O produto da soma pela diferença dos mesmos termos é igual ao quadrado do 1º termo menos o quadrado do 2º termo.



Fonte: Diário do pesquisador 2024

Notamos que, apesar do autor usar as representações de áreas para dar significado geométrico as expressões algébricas, o mesmo trabalhou apenas com expressões de sinal positivo e não houve menção ou divulgação de algum material físico manipulável que fornecesse ao estudante um contato direto e palpável das expressões algébricas por ele descritas.

Contudo os desenhos, figuras e esquemas trazidos pelo autor para representar um mesmo objeto matemático por duas vertentes (algébrica e geométrica) dialogam com intervenções pedagógicas na teoria de registros semióticos de Duval (2009).

A articulação entre diferentes registros de representação é fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático, pois contribui para uma compreensão mais profunda dos conceitos envolvidos (DUVAL, 2011). Assim, compreendemos que essa transição pelas diversas representações de um objeto configura-se em uma aprendizagem mais significativa.

A situação se torna mais grave no ensino médio, pois muitos estudantes chegam sem se quer saber o que são produtos notáveis ou realizar o produto entre polinômios simples. Acredita-se que um dos fatores que dificulta o ensino de Álgebra é a maneira em que ela é introduzida, muitas vezes a falta de conexão do conteúdo com o mundo real do estudante (SILVA; NUNES; LIMA, 2018, p. 4).

As defasagens sobre tais conceitos são identificados quando se é abordado equações de grau 2 e métodos de resolução por completamento de quadrado nas primeiras séries, bem como no estudo de equação geral da circunferência na terceira série entre outros.

Embora seja um objeto de estudo do fundamental, os produtos notáveis são usados com frequência no Ensino Médio e muitos autores, em livros voltados à 1ª série, limitam o feedback desses polinômios em seus livros. Um exemplo claro é a necessidade de sua compreensão para a dedução da fórmula resolutive da equação do 2º grau, a conhecida fórmula de Bhaskara. Essa dedução costuma ser apresentada por meio da soma de quadrados, o que, por sua vez, pressupõe que o estudante já domine os produtos notáveis.

Sem o suporte de representações geométricas, essa abordagem é predominantemente algébrica e teórica, não explorando estratégias que favoreçam a visualização geométrica e o raciocínio concreto como é o caso do livro da editora FTD de nome PRISMA de 2020 dos autores José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa que de forma alguma propõem o uso de materiais manipuláveis, como recortes, dobraduras, mosaicos ou recursos visuais interativos, que poderiam facilitar significativamente a compreensão dos produtos notáveis por meio da representação de áreas e compreensão mais clara das manipulações feitas na demonstração da fórmula resolutive de uma equação do 2º grau mostrada a seguir.

Teorema 1. Dada a equação polinomial $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, então a solução da equação é obtida por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demonstração 1. Com $a \neq 0$ podemos dividir a equação por a . Logo,

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right].$$

Note que, $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$, por completamento de quadrados, podemos escrever $ax^2 + bx + c = \left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$ sendo esta a forma canônica do trinômio.

A forma canônica do trinômio conduz imediatamente à fórmula que dá as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, temos as seguintes equivalências

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (II)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (III)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (IV)$$

Entende-se que as implicações III e IV fazem sentido quando o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ visto que as operações são no conjunto dos números reais.

A demonstração realizada acima é um exemplo de como ela é abordada nos livros didáticos com a prevalência da Álgebra e verifica-se nos livros analisados até o momento, a ausência de estratégias pedagógicas com o uso de materiais manipuláveis. Essa ausência de propostas com recursos manipuláveis representa uma lacuna metodológica, pois compromete a construção do significado dos produtos notáveis de forma intuitiva e acessível. A maioria dos estudantes apresenta grandes dificuldades quanto ao uso de aplicações algébricas. Os mesmos destacam que essas dificuldades ocorrem devido à falta de entendimento nos conceitos (SILVA; NUNES; LIMA, 2018, p. 3).

Pensando nessas lacunas metodológicas, dentre elas a falta de compreensão de conceitos, existe então uma abertura para a criação de recursos didáticos que impulsionem a aprendizagem de produtos notáveis e sanem muitas das dificuldades que permeiam o ensino de matemática. Na próxima seção faremos uma explanação matemática sobre os objetos que são essenciais nesta pesquisa: binômios, polinômios e produtos notáveis.

4.1 BINÔMIOS, POLINÔMIOS E O ESTUDO DE PRODUTOS NOTÁVEIS

Um binômio pode ser entendido como uma expressão algébrica composta por dois termos. Em diversos contextos da Matemática e da Física, surge a necessidade de elevar um binômio a uma potência, ou seja, repetir sua multiplicação por ele mesmo várias vezes. Quando essa potência é 2 ou 3 temos os chamados produtos notáveis $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$, $(a + b)^3$ por exemplo. A resolução destas potências não são trabalhosas e chegamos facilmente em polinômios como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Quando aumentamos o valor da potência, o cálculo dos polinômios não fica tão trivial assim e requer o reconhecimento de alguns padrões percebidos por Isaac Newton, ele identificou padrões e regularidades que ajudam a descobrir qual será o resultado final dessa potenciação sem precisar fazer todas as contas manualmente ficando chamado de Binômio de Newton expresso da seguinte maneira:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Nessa expressão, $\binom{n}{k}$ representa o coeficiente binomial, que indica quantas vezes determinado termo aparece no desenvolvimento. Esses coeficientes podem ser calculados por meio da fórmula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ com } n, k \in \mathbb{N}.$$

Apesar dessa abordagem ser disseminada apenas no ensino médio, o seu entendimento básico no ensino fundamental principalmente com o uso do Triângulo de Pascal o qual fornece os coeficientes binomiais de forma prática, pode fomentar momentos de criação e discussões ricas, pois permite ao estudante perceber que os casos estudados anteriormente, como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, são exemplos particulares de uma fórmula mais ampla. Além disso, essa abordagem favorece o desenvolvimento do pensamento generalizador e pode ser utilizada em propostas de atividades investigativas pelos professores de matemática. A seguir mostramos como ficaria a criação desse triângulo.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

Extraindo os coeficientes em destaque temos o seguinte triângulo numérico:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

É fácil notar que, em cada linha, a partir da segunda, iniciamos e terminamos com o número 1 e os números entre eles são obtidos somando os dois números que estão imediatamente na linha acima, à esquerda e à direita

Essa análise dos padrões numéricos e a compreensão da relação entre Álgebra e combinatória representa uma oportunidade de ampliação conceitual no ensino de produtos notáveis, pois a compreensão de um objeto matemático exige a mobilização de diferentes registros de representação semiótica, pois nenhuma representação isolada é suficiente para apreender todas as propriedades do objeto. (DUVAL, 1993, p. 39). Não distante disso, a

percepção de regularidades e padrões, a generalização e a simbolização são elementos que caracterizam o pensamento algébrico, e a geometria pode ser um campo fértil para o desenvolvimento dessas habilidades” (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993, p. 45).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse estudo, usamos as concepções de Lorenzato (2010) para conceituar e explicar sobre o que são materiais didáticos manipuláveis e como sua inserção no ensino de matemática na Educação Básica pode fomentar uma aprendizagem mais significativa pautada na criação de conjecturas, validação de hipóteses e investigação acerca dos produtos notáveis.

Assim, por meio de uma vasta revisão literária, concluímos que, o material é concreto no sentido físico, mas a ideia matemática dos produtos notáveis pode ainda ser abstrata para o estudante após a utilização do MDM. O desafio então, é garantir que o material manipulável ajude na transição do abstrato para o concreto, permitindo que o estudante não apenas interaja com o material, mas também desenvolva um entendimento real do conceito algébrico que se deseja representar utilizando-o. Verifica-se ainda que, o professor possui papel essencial nesse processo não somente como mediador, mas tendo o espírito de investigar caminhos metodológicos inovadores ao propor atividades com MD que se afaste de aulas apenas expositivas, tornando o estudante um sujeito ativo no processo de ensino-aprendizagem.

A revisão bibliográfica realizada nesta dissertação evidenciou que, embora existam avanços importantes no ensino de geometria e álgebra, ainda há lacunas significativas no que se refere à abordagem de conceitos como áreas de retângulos com sinal no Ensino Médio. A análise dos trabalhos apontou que a maioria das propostas presentes na literatura concentra-se em métodos tradicionais, baseados na aplicação de fórmulas, o que limita o desenvolvimento do raciocínio geométrico e algébrico dos estudantes. Por outro lado, os estudos que exploram metodologias ativas, como o uso de materiais manipulativos, tecnologias digitais e abordagens investigativas, demonstram maior potencial para promover a compreensão conceitual e a autonomia dos alunos (LORENZATO, 2006; BORBA; PENTEADO, 2016).

Como desdobramento desta pesquisa, podem ser desenvolvidas futuras investigações voltadas à formação inicial e continuada de professores de matemática, explorando diferentes possibilidades de intervenção pedagógica. Podem ser elaborados cursos de capacitação continuada e oficinas práticas que integrem o uso de materiais manipulativos, do GeoGebra e de tecnologias digitais interativas, possibilitando que os docentes ampliem seu repertório metodológico e utilizem estratégias inovadoras no ensino de conceitos geométricos e algébricos.

Além disso, pode-se investigar as concepções e dificuldades de professores de diferentes níveis de ensino em relação ao conceito de área com sinal, buscando compreender as barreiras pedagógicas enfrentadas ao abordar esse conteúdo. Tais pesquisas poderão subsidiar

a produção de materiais didáticos mais acessíveis e a criação de sequências didáticas investigativas que articulem teoria, prática e tecnologia, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa.

6. REFERÊNCIAS

- BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Tradução de Elza Gomide e Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2018.
- BORBA, Marcelo Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: Ministério da Educação, 2018.
- CAMARGO, Alex Sander Martins de. **O material manipulável Algeblocks: uma proposta para o ensino médio**. 2020. 156 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2020. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/SCAR_efcbbb4343ca2e1c41d4ecb3b9487707 . Acesso em: 30 maio 2025.
- CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique, 1991.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações**. 3ª série do Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2010.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.
- DINIZ, Maria Helena Menna Barreto; SMOLE, Kátia Cristina Stocco. **Matemática: uma nova abordagem**. Porto Alegre: Artmed, 2001
- DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg, v. 5, p. 35–65, 1993.
- DUVAL, R. **Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Berna: Peter Lang, 2003.
- DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. São Paulo: PROEM, 2011.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.
- FIORENTINI, D. O que é pesquisa qualitativa em educação matemática? **Bolema**, Rio Claro, v. 7, pág. 1-5, 1994.

- FIorentini, D.; Miorim, M. A.; Miguel, A. Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar. **Proposições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78–91, mar. 1993.
- GRANDO, R.C. **O jogo e a matemática no ensino fundamental**. Campinas: Papyrus, 2000.
- KAMII, Constance. **A criança e o número**: Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 e 6. Tradução A. de Assis. 11ª ed. Campinas: Papyrus, 1990.
- KLUSENER, P. R. et al. **A Álgebra e suas dificuldades: a importância do concreto no processo ensino-aprendizagem**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. Anais [...]. Belo Horizonte: SBEM, 2007.
- MINAYO, Maria Cecília de Souza. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. 18. ed. Petrópolis: Vozes, 2001.
- LAKATOS, I. **Provas e Refutações: A Lógica da Descoberta Matemática**. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
- LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.
- LORENZATO, Sérgio. **O uso de material concreto no ensino de matemática**. Campinas: Autores Associados, 2010.
- LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. São Paulo: EPU, 2013.
- MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. de L. **Didática da Matemática**. Universidade Aberta: Lisboa, 1996.
- MEDEIROS, P. M. A. Bibliotecas digitais de teses e dissertações: um panorama global. **Ciência da Informação**, v. 43, n. 3, p. 101-113, 2014.
- NACARATO, Adair Mendes. **Eu trabalho primeiro no concreto**. Revista de Educação Matemática, [s. l.], v. 9, n. 9-10, p. 1–6, 2005.
- OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. **Explorando tarefas matemáticas: uma proposta de ensino investigativo**. In: CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H. (org.). *Explorando tarefas matemáticas: uma proposta de ensino investigativo*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2013. p. 13-30.
- PAVANELLO, Regina Maria. **Álgebra: dificuldades de aprendizagem e implicações para o ensino**. São Paulo: Contexto, 2001.
- PONTE, João Pedro da. **Investigar para aprender matemática**. In: GTI (Org.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM, 2012. p. 11–34.
- PÓLYA, G. **Como Resolver: Um Novo Enfoque do Método Matemático**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 39-56.

ROSA, M.; OREY, D. C. **Uma prática retórica-matemática babilônia**. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, v. 6, n. 3, p. 91, 2013.

SERRAZINA, M. L. Os materiais e o ensino da Matemática. **Educação e Matemática**, n. 13, jan/mar., 1990. (Editorial).

SESSA, Carmen. **Iniciação ao estudo didático da Álgebra: origens e perspectivas**. São Paulo: SM, 2009.

SILVA, J. A.; NUNES, M. F.; LIMA, R. S. **Dificuldades no aprendizado de Álgebra e estratégias para a sua superação**. Enalic, 2018. Disponível em:

<https://editorarealize.com.br/editora/anais/enalic/2018/443-55311-28112018-205731.pdf>.

Acesso em: 25 maio 2025.

SILVA, Laís Scorziello Feitosa da; GUALANDI, Jorge Henrique. Trabalhando com números inteiros: uma prática de ensino por meio de material didático manipulável. **Revista Educação Pública**, Rio de Janeiro, v. 24, n. 28, 6 ago. 2024. Disponível em:

<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/24/28/trabalhando-com-numeros-inteiros-uma-pratica-de-ensino-por-meio-de-material-didatico-manipulavel> . Acesso em: 30 maio 2025.

SOARES, Claudia Lisete Oliveira; AZEVEDO, Sônia Maria da Silva. **História da Matemática e sua Implicação no Ensino**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 57-76.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

CAPÍTULO II

ARTIGO 2

EXPLORANDO PRODUTOS NOTÁVEIS ATRAVÉS DE ÁREAS DE RETÂNGULOS
COM SINAL: UMA ABORDAGEM PEDAGÓGICA INOVADORA

Weberson Sousa dos Anjos
Edwin Oswaldo Salinas Reyes
Ana Maria Porto Nascimento

Resumo:

Este texto apresenta resultados de uma pesquisa que investigou o ensino de produtos notáveis por meio de áreas de retângulos com sinal. Buscou-se estabelecer uma representação geométrica inovadora para os produtos notáveis, possibilitando aos estudantes nesse processo a criação de hipóteses, o teste e a validação de conjecturas através de um material manipulável. A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa em que foi realizado um experimento de ensino com estudantes da Educação Básica propondo um novo recurso didático a fim de verificar o avanço dos estudantes quanto a sua aprendizagem sobre produtos notáveis e expressões algébricas, fomentando para os professores uma estratégia para o ensino de matemática. O processo avaliativo nesse sentido, esteve presente em todo o percurso de implementação do material manipulável desde a avaliação diagnóstica e a análise dos erros até a avaliação formativa. Os resultados e as discussões apontam que os produtos notáveis podem ser abordados de forma mais dinâmica e visual, em que o uso de materiais manipuláveis promova a criação de diferentes estratégias e reformulações são essenciais para sua compreensão.

Palavras-chave: Áreas. Áreas de retângulos. Produtos notáveis. Materiais manipuláveis. Aprendizagem matemática.

Abstract:

This paper presents the results of a study that investigated the teaching of remarkable products through areas of signed rectangles. The aim was to establish an innovative geometric representation for remarkable products, enabling students to create hypotheses, test, and validate conjectures using manipulative materials. The research adopted a qualitative approach, conducting a teaching experiment with elementary school students. A new teaching resource was proposed to assess students' progress in learning about remarkable products and algebraic expressions, fostering a strategy for teaching mathematics to teachers. The evaluation process, in this sense, was present throughout the implementation of the manipulative materials, from diagnostic assessment and error analysis to formative assessment. The results and discussions indicate that remarkable products can be approached in a more dynamic and visual way, where the use of manipulative materials promotes the creation of different strategies, and reformulations are essential for their understanding.

Keywords: Areas. Areas of rectangles. Remarkable products. Manipulable materials. Mathematical learning

1. INTRODUÇÃO

O aprendizado da matemática é indispensável, pois contribui de forma crucial para a formação da estrutura do conhecimento humano, desenvolvendo habilidades de raciocínio lógico, abstração e argumentação (Ávila, 2010). A matemática ensina a pensar de forma estruturada e lógica, ajudando a desenvolver habilidades de resolução de problemas, análise e tomada de decisões. Esse tipo de pensamento é útil não apenas na matemática, mas também em muitas outras áreas da vida. A matemática está presente em muitos aspectos do cotidiano, como finanças pessoais, compras, cálculos de tempo e distância, além de ajudar a compreender dados e informações que encontramos diariamente. Esse entendimento reforça a importância do ensino da Matemática, conforme aponta Ávila (2010).

Muitas disciplinas, como física, química, economia, engenharia e até mesmo biologia, dependem da matemática para modelar e entender fenômenos. Sem uma base sólida em matemática, torna-se mais difícil compreender e avançar nesses campos. Vivemos em uma era tecnológica, e a matemática é a base para grande parte da inovação tecnológica. A matemática desafia os estudantes a pensar de maneira crítica, a questionar e a buscar soluções para problemas complexos. Esse processo contribui para a formação de cidadãos mais preparados para lidar com os desafios do mundo moderno.

Enquanto educadores, é muito comum ouvirmos: Para que tanta Matemática professor? Para que serve tudo isso? Onde vou usar esse conteúdo na minha vida? Perguntas como essas nem sempre possuem respostas curtas ou imediatas que justifiquem o ensino da Matemática. Entretanto, para além do exposto no parágrafo anterior, Ávila (2010) afirma que o ensino da Matemática se justifica ainda pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do estudante, seja pela exatidão do pensamento demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia.

Sabendo dessa importância, ao longo da história da trajetória sobre o ensino da Matemática, muitos estudiosos pesquisadores se debruçaram sobre livros, artigos, relatos, pesquisas, etc, para entender como o sujeito aprende matemática. Esse processo investigativo resultou no desenvolvimento de diversas teorias e metodologias de ensino, que vão desde

abordagens tradicionais, focadas na memorização e repetição, até metodologias mais modernas e interativas, que valorizam a compreensão conceitual e a aplicação prática. (Fiorentini e Miorim, 1990).

Muitas destas investigações e debates fundamentam-se no fato de que o aproveitamento dos estudantes da Educação Básica em matemática em avaliações nacionais como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) e a Prova Brasil, está aquém das metas estabelecidas. Nos trabalhos de Fiorentini e Miorim (1990), Lorenzato (2006) e Smole e Diniz (2007) há discussões sobre esses resultados e a proposição de estratégias pedagógicas para o ensino da matemática na Educação Básica. Tais autores protagonizam relatos e estratégias pedagógicas para o ensino da matemática na Educação Básica, trazendo resultados significativos e práticos para o professor que ensina matemática.

Alguns desses resultados significativos, indicam que as estratégias didático pedagógicas como uso de jogos e de Tecnologias digitais da informação e comunicação (TDICs) em sala de aula fomentam nos estudantes, momentos de criatividade, aprendizado e motivação para estudar matemática. Neste contexto alguns autores apontam a importância do uso de materiais didáticos, que de acordo com Lorenzato (2010), é descrito como qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Material didático (MD) pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros.

Esta pesquisa centra-se em estudar um material didático manipulável físico específico, o qual poderá possibilitar ao estudante o entendimento de propriedades matemáticas oportunizando a interação com conceitos abstratos de forma prática e sensorial. Esse MD físico é denotado por material manipulável e será utilizado neste estudo para representar áreas de retângulos com sinal.

Nesse sentido, analisamos um novo recurso pedagógico associado às áreas de retângulos com “sinal” a qual fornece uma nova alternativa para explicar o conceito de fatoração envolvendo produtos notáveis por meio da manipulação de materiais, possibilitando aos estudantes relacionarem conceitos algébricos abstratos a figuras geométricas, o que abre espaço para explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, as quais poderão ser validadas dentre outras maneiras pela construção geométrica.

Sendo assim, o objetivo geral deste trabalho se evidencia em desenvolver e analisar um novo recurso pedagógico alicerçado na representação geométrica para explicar os conceitos de produtos notáveis. E para isso, buscamos apresentar uma revisão teórica sobre produtos notáveis e suas propriedades algébricas, propondo a utilização desse recurso em uma sala de aula de escola da Educação Básica de modo a analisar sua eficácia em comparação com métodos tradicionais.

Tal recurso pedagógico pode facilitar a aprendizagem dos produtos notáveis uma vez que o estudante é convidado a compreender conceitos matemáticos de forma visual e intuitiva desenvolvendo habilidades de resolução de problemas na área de matemática. Habilidades essas que contribuirão na aprendizagem em outras áreas como em química, física, engenharia e tecnologia.

Isso é previsto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio nas habilidades:

(EM13MAT102) Reconhecer e utilizar as propriedades das operações (adição, subtração, multiplicação e potenciação), incluindo os produtos notáveis, para desenvolver cálculos e manipulações algébricas no tratamento de problemas matemáticos;

(EM13MAT103) Compreender, utilizar e generalizar padrões em contextos matemáticos ou de outras áreas do conhecimento, empregando Álgebra simbólica e geometria para resolver e formular problemas;

(EM13MAT301) Explorar representações geométricas e algébricas de relações e propriedades matemáticas para resolver problemas e formular generalizações;

(EM13MAT402) Utilizar conhecimentos geométricos e algébricos em situações práticas e de investigação, interpretando, representando e analisando informações de diferentes fontes.

De forma geral, este estudo se justifica pelo desenvolvimento de ações que permitem aos estudantes descobrirem princípios matemáticos por si mesmos, promovendo um aprendizado ativo e autônomo. Isso verdadeiramente ocorre já que a metodologia utilizada incentiva a investigação e a curiosidade despertando nos estudantes o desenvolvimento do pensamento crítico.

Dessa forma, acreditamos que ao adotar a abordagem das áreas de retângulos com sinal, estaremos oferecendo aos estudantes uma ferramenta valiosa que não só pode melhorar sua compreensão dos produtos notáveis, mas também irá promover uma atitude mais positiva e confiante em relação à matemática. Este trabalho se propõe a explorar esse recurso em detalhes apresentando em dois apêndices a construção/confeção do material e maneiras de usá-lo em sala de aula. Pretende-se ainda, fornecer exemplos práticos e discutir suas implicações pedagógicas para o ensino da Álgebra, descrevendo quais habilidades e competências matemáticas foram alcançadas com sua prática.

1.1 MATERIAIS MANIPULÁVEIS COMO RECURSOS DIDÁTICOS EM SALA DE AULA

Os recursos didáticos são elementos que enriquecem o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Eles podem ser desde livros e vídeos até softwares e aplicativos.

No entanto, é crucial que os recursos didáticos sejam utilizados como mediadores entre o professor, o estudante e o conhecimento, e não como meros transmissores de informações.

Um desses recursos didáticos são os materiais manipuláveis, como objetos do cotidiano e jogos, os quais são ferramentas poderosas para o ensino da matemática ao permitir que os estudantes explorem e interajam fisicamente com os conceitos, esses materiais facilitam a compreensão e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. No entanto, o uso de materiais manipuláveis exige cuidado e planejamento. É fundamental que o professor compreenda o potencial pedagógico de cada material e saiba como utilizá-lo de forma eficaz.

É inegável o fascínio que os materiais e jogos exercem sobre os professores de matemática. A promessa de aulas mais dinâmicas e envolventes, onde a matemática se torna mais acessível e "palpável", atrai muitos educadores. No entanto, será que a simples utilização desses recursos garante o aprendizado efetivo dos estudantes?

Segundo Passos (2006), geralmente a expectativa da utilização de materiais manipuláveis por parte de professores que atuam no ensino fundamental está na esperança de que as dificuldades de ensino possam ser amenizadas pelo suporte da materialidade.

Fato é que a escolha de um material específico carece de uma reflexão teórica mais aprofundada e a empolgação com a praticidade e a beleza de um recurso pode obscurecer a necessidade de uma análise crítica sobre sua adequação aos objetivos de aprendizagem.

Muitas vezes, a justificativa para o uso de materiais manipuláveis se limita à motivação dos estudantes, como se a matemática fosse meramente um fardo a ser suportado com a ajuda de "distrações lúdicas". No entanto, como alertam Fiorentini e Miorim (1990), por trás de cada material se esconde uma concepção de educação, de matemática e de mundo.

Nesse sentido é notório saber que alegria e motivação são importantes, mas não podem ser os únicos critérios. É preciso ir além da brincadeira, e compreender a proposta pedagógica que sustenta cada material. Do contrário, corremos o risco de "subjugar nossa metodologia de ensino" a um objeto atraente, mas sem real significado para o aprendizado da matemática.

Matos & Serrazina, 1996 apontam que ambientes ricos em materiais manipuláveis podem favorecer a aprendizagem da matemática. No entanto, a chave para o sucesso está na intencionalidade do professor. É ele quem precisa criar situações de aprendizagem desafiadoras, que explorem o potencial dos materiais de forma consciente e crítica.

Note que, qualquer material pode servir como ponto de partida para essa jornada. Bolinhas de gude, palitos de picolé, tampinhas de garrafa... cada objeto, em sua singularidade, pode despertar a curiosidade e o desejo de explorar. O importante é que o estudante seja capaz de ir além da aparência física do material e enxergar as relações matemáticas que ele representa.

É nesse processo de abstração que os conceitos matemáticos começam a se formar. O estudante, ao manipular os objetos, experimenta, conjectura, testa hipóteses e tira suas próprias

conclusões. Ele não apenas memoriza fórmulas, mas internaliza o significado por trás delas.

O professor, nesse contexto, atua como um mediador. Ele não entrega o conhecimento pronto, mas sim cria situações de aprendizagem que estimulam a reflexão e a descoberta. O professor é o guia que acompanha o estudante em sua jornada, oferecendo o apoio necessário para que ele possa trilhar seu próprio caminho.

De acordo com Lorenzato (2006), o professor tem um papel muito importante no sucesso ou fracasso escolar do estudante. Para este autor, não basta o professor dispor de um bom material didático para que se tenha a garantia de uma aprendizagem significativa. Mais importante do que isso é saber utilizar corretamente estes materiais em sala de aula. (Lorenzato, 2006).

Não se trata de buscar "receitas de bolo" ou de reproduzir oficinas de sucesso. Cada turma, cada estudante é único, e exige um olhar atento e uma escuta sensível do professor. Só assim é possível construir pontes entre o mundo concreto dos materiais e o mundo abstrato da matemática.

1.2 UM NOVO RECURSO PARA O ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS

A criação desse novo recurso didático para o ensino de produtos notáveis infere diretamente na transformação de conceitos abstratos em uma situação possível de ser visualizada e que possa gerar imagens mentais que contribuem na mudança de registro de representação.

Passos (2006), afirma que:

A preocupação com a visualização quando se aborda o processo ensino-aprendizagem da matemática pode ser considerada um dos processos envolvidos nas diferentes maneiras de representações. Os diferentes tipos de visualização que o estudante necessita, tanto em contextos matemáticos quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais; de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com objetos manipuláveis.

Dessa forma, acreditamos que esse novo recurso irá promover melhor abstração dos conceitos algébricos por meio de representações geométricas envolvendo os produtos notáveis.

Vale ressaltar que tal recurso aqui apresentado foi explorado em uma turma de primeira série do ensino médio, mas poderia ser desenvolvido em uma turma de 8º ou 9º ano do ensino fundamental já que nessas séries os estudantes começam a vislumbrar o ensino da Álgebra.

Os estudantes participantes da primeira série não tinham estudado produtos notáveis no ensino fundamental ou não lembravam mais sobre esse assunto quando questionados antes da avaliação diagnóstica, sendo assim, o desenvolvimento das atividades dialoga com Matos e Serrazina (1996) quando afirmam que, muitas vezes os materiais ou representações concretas são utilizados no momento de introduzir uma noção, como apoio ao discurso do professor. Uma

vez chegado ao cálculo, já não interessa o contexto que lhe deu significado.

O fato de os estudantes não lembrarem ou não terem visto dificultou o ato de “cola” no momento de organizar os quadrados e retângulos para obter o resultado da fatoração dos produtos notáveis. A cola refere-se aqui a escrever o desenvolvimento dos produtos notáveis, por exemplo $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, a partir do que havia memorizado e não a partir dos entendimentos que surgem quando manipulam o material. Esse fato é muito importante pois pode possibilitar momentos de criatividade, desafios e investigações a cerca de um resultado escrito de formas tão distintas.

O conceito de “área com sinal” tem sua origem em ideias presentes no Cálculo Vetorial e na Geometria Analítica, em que a orientação dos eixos cartesianos e das figuras no plano influencia o valor numérico da área. Em contextos avançados, esse conceito está associado à integração definida e ao cálculo de determinantes, especialmente quando se trabalha com a orientação de superfícies e regiões planas (STEWART, 2016). Embora a abordagem formal desse conceito seja típica do ensino superior, a literatura em Educação Matemática defende que elementos desses conteúdos podem ser adaptados e explorados na Educação Básica quando devidamente contextualizados. Para Chevallard (1991), por meio da transposição didática, é possível selecionar, reorganizar e ressignificar conhecimentos historicamente consolidados para torná-los acessíveis e significativos aos estudantes, desde que haja adequação à sua realidade e aos objetivos do ensino.

Do ponto de vista epistemológico, trabalhar com área com sinal no Ensino Médio permite promover uma ampliação conceitual importante. Tradicionalmente, a Matemática escolar trata o conceito de área de forma puramente positiva, limitando-se ao cálculo numérico baseado em fórmulas. No entanto, ao considerar a orientação do plano e a variação de sinais, o estudante passa a compreender que a atribuição de valores positivos e negativos às regiões não é um erro, mas sim uma construção matemática consistente, fundamentada em representações algébricas e geométricas. Segundo Duval (2011), a aprendizagem matemática só se torna efetiva quando o estudante consegue articular diferentes registros de representação no caso, a representação algébrica, a visual e a manipulativa, criando um entendimento mais profundo do conceito. Essa mudança de perspectiva favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e da flexibilidade cognitiva, além de aproximar a Matemática escolar de práticas utilizadas em níveis mais avançados, como as do ensino superior.

2. METODOLOGIA

Esta pesquisa caracteriza-se como um experimento de ensino de abordagem qualitativa, pois buscou-se compreender e analisar como 12 estudantes da primeira série do Ensino Médio da rede pública do estado do Tocantins constroem significados em torno do conceito de área com sinal a partir da interação com materiais manipulativos, discussões coletivas e registros

produzidos durante as atividades. De acordo com Nacarato (2005), experiências práticas envolvendo recursos concretos favorecem a construção de significados matemáticos, desde que acompanhadas de momentos de reflexão e problematização. Nesse sentido, o experimento de ensino visa criar um ambiente de investigação e acompanhamento sistemático do processo de aprendizagem.

Para a produção dos dados, foram utilizados diferentes instrumentos, tais como: registros escritos dos estudantes, gravações em vídeo das interações em sala, observações sistemáticas do pesquisador e anotações de campo. Essa triangulação de fontes permite uma compreensão mais ampla e aprofundada das estratégias utilizadas pelos alunos e de suas dificuldades na construção do conceito. Conforme defendem Lüdke e André (2013), na pesquisa qualitativa, é fundamental considerar múltiplas evidências para compreender os fenômenos educacionais de forma mais rica e contextualizada.

A análise dos dados foi conduzida com base na análise de conteúdo (BARDIN, 2016), permitindo a construção de categorias a posteriori a partir da leitura detalhada dos registros coletados. Inicialmente, realizamos uma leitura flutuante para identificar padrões gerais e, em seguida, selecionamos e organizamos os fragmentos mais relevantes. As categorias emergentes foram definidas com foco na compreensão dos processos de aprendizagem, evidenciando as estratégias utilizadas pelos estudantes, suas dificuldades conceituais e avanços no entendimento de áreas com sinal. Nesse contexto, seguimos Fiorentini (1995), que ressalta a importância de compreender não apenas os produtos finais da aprendizagem, mas também os processos pelos quais os estudantes constroem conhecimento matemático.

Para isso, foram confeccionados retângulos sinalizados com cartolina na cor cinza para representar áreas de sinal negativo como $-(a + b)^2$, e na cor verde para representar áreas de sinais positivos como $(a - b)^2$, permitindo a visualização simultânea das operações algébricas envolvidas. Segundo Grandó (2000), materiais manipuláveis ampliam as possibilidades de aprendizagem ao tornar conceitos abstratos mais concretos e acessíveis.

Isso vai ao encontro do que afirma Lorenzato (2006) sobre os materiais manipuláveis como ferramentas fundamentais no ensino da matemática, pois permitem que os estudantes construam o conhecimento de maneira ativa, explorando conceitos por meio da experimentação e visualização.

O trabalho foi desenvolvido em um colégio da rede estadual de educação do estado do Tocantins na cidade de Combinado com uma turma de 1º ano do Ensino Médio. A cidade com pouco mais de 4.800 habitantes possui 3 colégios estaduais, mas apenas um oferece o Ensino Médio.

O colégio estadual Joaquim de Sena e Silva onde foi realizado a pesquisa possui 8 turmas, sendo duas turmas de primeiro ano, três turmas de segundo ano e três turmas de terceiro ano. O colégio atende 198 estudantes cuja faixa etária varia de 15 a 21 anos. Esta promove uma

gestão democrática, envolvendo a participação de todos nas tomadas de decisões, pois compreende os valores presentes no processo educacional. A turma escolhida para o trabalho foi a do 1º ano composta por 12 estudantes, tendo em vista que esta série está mais próximo do EF, etapa em que os estudantes tem o primeiro contato com os produtos notáveis.

De início, foi explicado aos estudantes a importância da matemática para a evolução humana e que em meio a tanto avanço tecnológico existe sempre a presença de números e códigos matemáticos, isto é, acreditamos que a matemática não é uma ciência simples, pronta e acabada, ela está em constante aperfeiçoamento e aberta a novas descobertas e invenções, fazendo um paralelo com Lakatos (1976) em que argumenta que a matemática é um campo em constante evolução, desenvolvendo-se por meio de conjecturas e refutações, e não como um corpo de verdades imutáveis.

Depois disso foi desenvolvida uma atividade diagnóstica aos estudantes afim de identificar as habilidades e conhecimentos prévios, bem como suas dificuldades e necessidades de aprendizagem em relação ao conceito de produtos notáveis.

Entendemos que a avaliação diagnóstica é uma ferramenta essencial para identificar as potencialidades e dificuldades dos estudantes, sendo fundamental para o planejamento e a execução de práticas pedagógicas que promovam a aprendizagem de todos." (Brasil, 2018, p. 56). A partir desta atividade foram planejadas as ações e ajustadas as estratégias de ensino para a realidade dos estudantes.

Posteriormente à realização da atividade diagnóstica, a proposta foi organizada em etapas que favorecessem a participação ativa dos estudantes e a construção de significados. Inicialmente, partiu-se da problematização de situações reais que envolvem áreas de retângulos com sinal, seguida de uma exploração coletiva das ideias levantadas, com incentivo à formulação de hipóteses pelos alunos. Em seguida, houve um momento de sistematização teórica, construído de forma dialogada, no qual conceitos e propriedades foram discutidos à luz das descobertas da turma. A etapa seguinte consistiu na resolução colaborativa de desafios, permitindo que os estudantes aplicassem as ideias em diferentes contextos. Por fim, realizou-se uma discussão e reflexão coletiva, com o objetivo de consolidar os aprendizados e incentivar a análise crítica sobre as estratégias utilizadas.

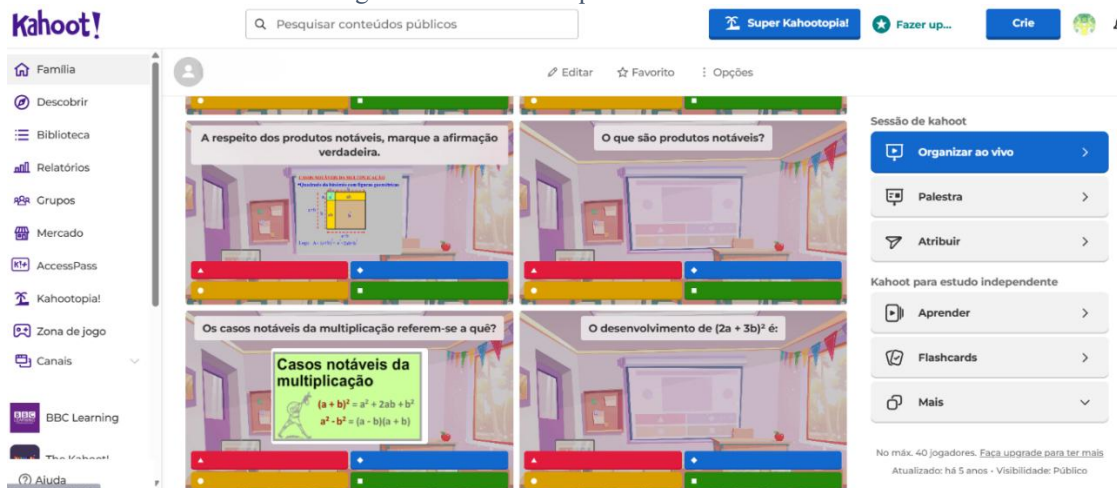
Na problematização foram utilizadas duas aulas onde apresentamos os conceitos básicos de área com sinal e como eles se conectam com a Álgebra. De forma geral, esta etapa focou na explicação formal do conceito. Tradicionalmente, área é vista como uma medida positiva. A "área com sinal" expande essa ideia, permitindo valores negativos dependendo da orientação ou posição da figura em um sistema de coordenadas. Na Álgebra, isso se manifesta, por exemplo, em operações com vetores, matrizes e no cálculo de determinantes. Foi crucial introduzir a convenção de sinais (ex: áreas acima do eixo x são positivas, abaixo são negativas) e a justificativa para essa extensão do conceito de área. Para este estudo denotamos o positivo

pela cor verde e negativo pela cor vermelha.

Neste momento do estudo houve aulas expositivas e dialogadas com os estudantes de modo a revisar pontos importantes de manipulações algébricas como expressões equivalentes, operações envolvendo propriedades de comutação e associação.

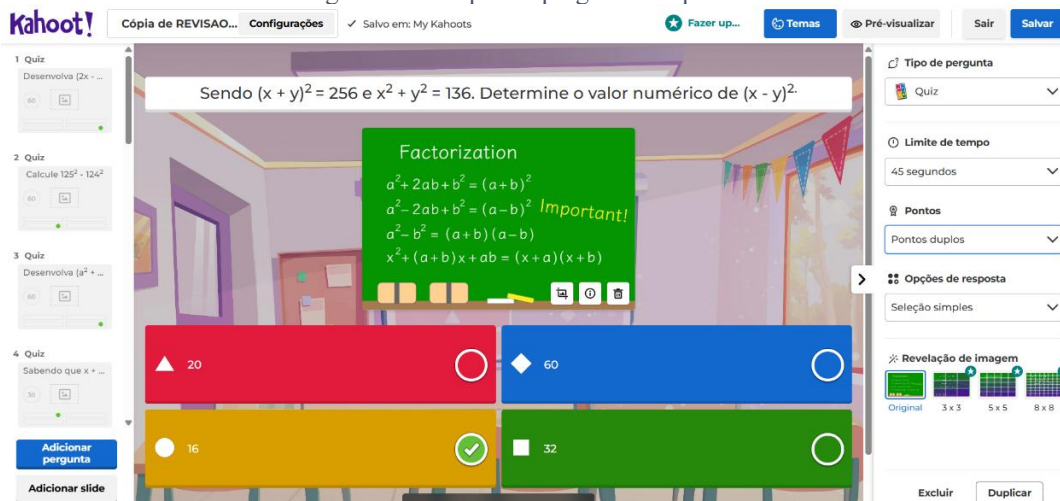
Para fecharmos essa etapa, construímos um *quiz* no software *kahoot*³ como maneira de revisar o que tínhamos trabalhado até aquele momento e motivar os estudantes com alguns desafios e competição. A interface do *quiz* pode ser observada abaixo com algumas questões.

Figura 1: Interface do quiz Kahoot



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 2: Exemplo de pergunta do quiz



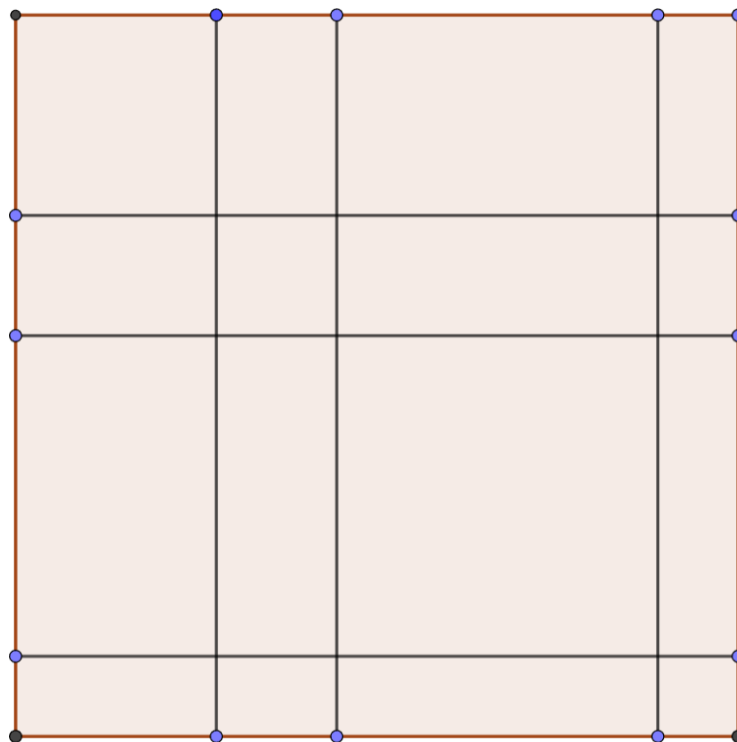
Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Na etapa seguinte, foram disponibilizados os materiais necessários à confecção do material manipulativo, tais como cartolinas dupla face cores azul e vermelho, para cada participante, tesouras de cortar papel para cada participante, régua de poliestireno ou madeira para cada participante e caneta preta para cada um.

³ plataforma digital de aprendizagem baseada em jogos, que permite a criação e aplicação de quizzes interativos, utilizados como ferramenta pedagógica para revisão de conteúdos, avaliação diagnóstica e engajamento dos estudantes por meio de dispositivos móveis ou computadores. Ele pode ser acessado por kahoot.com.

A confecção dos quadrados e retângulos com sinal deram-se em sala de aula sob orientação do professor pesquisador. Primeiramente, foi desenhado no software de geometria dinâmica *geogebra* os quadrados e retângulos com medidas e áreas de corte para facilitar a visualização pelos estudantes como mostra a figura 3 abaixo.

Figura 3: Quadrado subdividido em retângulos e quadrados

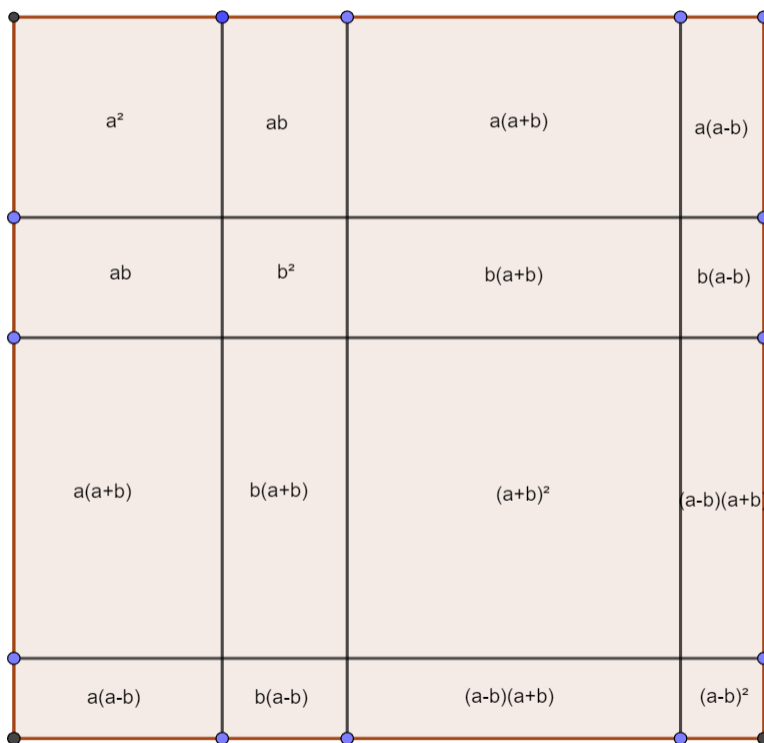


Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Após mostrar aos estudantes a construção deste quadrado e das divisões por meio de retas perpendiculares no *software*, foi solicitado que eles recortassem de uma cartolina de medida 40cm x 50cm um quadrado de lado 18cm.

Em seguida, foi indicado que para a construção das retas perpendiculares os 18cm fossem divididos em quatro segmentos com as seguintes medidas iguais a 5cm, 3cm, 8cm ($5\text{cm} + 3\text{cm}$), 2cm ($5\text{cm} - 3\text{cm}$). Com as divisões e a determinação dos quadrados e retângulos, os estudantes escreveram no centro de cada um deles sua área trocando os valores 5cm e 3cm pelas letras *a* e *b* ficando a representação como o descrito na figura 4 abaixo.

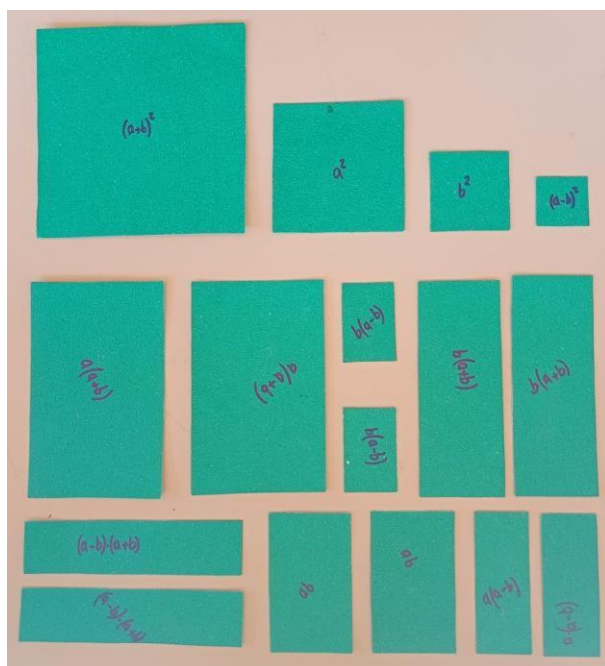
Figura 4: Quadrado subdividido em quadrados e retângulos com marcações



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Para a construção pelos estudantes, tomamos $a = 5$ e $b = 3$. Após as marcações na cartolina como indicadas na imagem acima, os quadrados e retângulos foram recortados e agrupados como indica a figura 5, onde as inscrições presentes na imagem após o desmembramento das partes foram transcritas para o lado de cor cinza da cartolina para representar a “área de sinal”.

Figura 5: Distribuição de forma organizada do material concreto



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Em resumo, seja a, b dois números reais positivos tais que $a > b > 0$. Observe-se que $a + b > 0$, $a - b > 0$ e $b - a < 0$. Por outro lado, a área de um retângulo é definida como o produto de sua base ($B > 0$) pela sua altura ($H > 0$). Matematicamente, a fórmula para calcular a área A de um retângulo é dada por $A = BH > 0$. Implicitamente, a área de um retângulo é definida de forma que seja um valor maior que zero, pois é dado como o produto de dois números positivos. No entanto, podemos definir a área com sinal de um retângulo, atribuindo um sinal (+ ou -) na área do retângulo em relação ao sinal de sua base e sua altura, isto é, A ou H podem ser dois números reais quaisquer diferentes de zero, desta forma, o sinal da área do retângulo com base $|B|$ e altura $|H|$ fica inteiramente determinado pelo sinal do número real BH , onde $||$ é a função valor absoluto.

A etapa da demonstração buscou tornar o conceito abstrato dos produtos notáveis mais tangível à compreensão dos estudantes por meio de exemplificações envolvendo as áreas de retângulos com sinal.

O quarto e quinto encontro foram destinados a prática guiada e exploração independente, promovendo a aplicação do recurso pedagógico acompanhado de uma atividade ao final para verificarmos de que forma os estudantes pensaram nos problemas e quais estratégias desenvolveram para solucioná-los.

Por fim, nas discussões e reflexões por meio de debates e indagações, os estudantes compartilharam suas descobertas, os desafios encontrados e os insights obtidos. Nesse momento foi possível reforçar a ligação entre a área com sinal e conceitos algébricos, além de esclarecer dúvidas e consolidar o aprendizado. Essa etapa fortaleceu a compreensão conceitual e a capacidade de comunicação matemática dos estudantes.

Nesse sentido, ressaltamos que as atividades aqui desenvolvidas para o ensino de matemática são acessíveis e significativas, pois auxiliam a compreensão de conceitos complexos permitindo que os estudantes explorem e internalizem conceitos abstratos de maneira mais natural e envolvente. Essas atividades podem ser classificadas como exploratórias. As atividades exploratórias em matemática permitem aos estudantes investigar, formular conjecturas e testar hipóteses, o que enriquece o processo de ensino-aprendizagem ao torná-lo mais dinâmico e significativo" (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003, p. 43).

3. EXPLORAÇÃO DOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS NAS AULAS DE MATEMÁTICA: ÁREAS DE RETÂNGULOS COM "SINAL".

Em Educação Matemática, a pesquisa qualitativa se mostra presente em muitos contextos, sendo um deles o de investigar estratégias didáticas que favorecem a aprendizagem dos estudantes. Fiorentini (1994) destaca que essa abordagem busca compreender os fenômenos educacionais a partir da interação entre os sujeitos e o contexto em que estão inseridos. Nesse sentido, o uso de materiais manipuláveis configura-se como um recurso mediador significativo para a construção do conhecimento matemático em sala de aula.

De acordo com Grandó (2000), os materiais manipuláveis possibilitam que os estudantes visualizem e interajam com conceitos abstratos, tornando a aprendizagem mais significativa. No ensino de produtos notáveis, a utilização de retângulos sinalizados auxilia na compreensão da estrutura algébrica dessas expressões, permitindo uma abordagem geométrica que reforça a interpretação simbólica. Essa estratégia está alinhada com a perspectiva de Lorenzato (2006), que enfatiza que os materiais manipuláveis são fundamentais para a mediação do conhecimento matemático, proporcionando uma ponte entre a experimentação e a formalização dos conceitos.

Lorenzato (2006), também destaca que a utilização de materiais manipuláveis deve ser planejada de forma criteriosa, garantindo que os estudantes não apenas manipulem os objetos, mas que sejam orientados a refletir sobre as relações matemáticas que emergem dessa interação. Ele argumenta que o aprendizado significativo ocorre quando há intencionalidade pedagógica na escolha e no uso desses materiais, promovendo a construção de conceitos de forma ativa. Além disso, o autor ressalta que o uso contínuo de materiais manipuláveis pode contribuir para a autonomia dos estudantes, tornando-os mais confiantes na exploração de novas ideias matemáticas e na resolução de problemas.

Além disso, Veiga (2012) ressalta a importância de metodologias que incentivem a participação ativa dos estudantes, promovendo investigações e reflexões sobre os conceitos trabalhados. A interação com materiais manipuláveis estimula o raciocínio lógico e contribui para a construção do conhecimento de forma autônoma e significativa. Essa abordagem também encontra respaldo na teoria de registros de representação semiótica de Duval (2003), que aponta a necessidade de múltiplas representações para a aprendizagem efetiva da matemática.

A interseção entre as teorias apresentadas evidencia a importância da utilização e materiais didáticos, da intencionalidade pedagógica e da conversão entre registros semióticos para o ensino da matemática. Em sínteses, compreendemos que Lorenzato (2006) e Grandó (2000) enfatizam que os materiais manipuláveis favorecem a experimentação e a construção do conhecimento matemático de maneira ativa, alinhando-se à visão de Veiga (2012), que defende metodologias que incentivem a participação reflexiva dos estudantes.

Por sua vez, Duval (2003) complementa essa abordagem ao argumentar que a

aprendizagem efetiva ocorre quando há transições entre diferentes registros de representação, sendo o material manipulável um mediador essencial nesse processo. A relação entre as ideias de Duval e Lorenzato se manifesta na necessidade de transformar a experimentação em representações matemáticas mais abstratas, garantindo que o estudante desenvolva autonomia na conversão entre registros, essencial para a compreensão dos produtos notáveis.

Este estudo também se fundamenta em Pólya (1945) e Lakatos (1976) no que tange ao ensino da matemática ser dinâmico e jamais ser estático, nunca pronto e acabado, mas sim algo em constante construção e tal construção perpassando por criação de conjecturas, refutações e validações.

3.1 EXPLORANDO PRODUTOS NOTÁVEIS COM UMA ABORDAGEM INOVADORA

Com os materiais confeccionados, os estudantes foram levados a aplicar o recurso para responderem algumas perguntas sob supervisão e orientação do professor.

O primeiro desafio foi o de encontrar somas de áreas cujos resultados fossem equivalentes às áreas descritas abaixo e para isso em alguns casos os estudantes precisavam entender a ideia de área com sinal denotada aqui como sendo positiva para o lado verde da cartolina e negativa para o lado cinza da mesma.

- I. $(a + b)(a + b)$
- II. $a(a + b)$
- III. $b(a + b)$
- IV. $(a - b)(a + b)$
- V. b^2
- VI. ab

Como resultado para I, os estudantes encontraram $b(a + b) + a^2 + ab$, $b(a - b) + b^2 + ab + a(a - b) + b(a + b)$, $a(a + b) + b(a + b)$ e $a^2 + ab + ab + b^2$, representação algébrica das figuras abaixo respectivamente encontradas pelos estudantes.

Figura 6: Quadrado de lado $(a+b)$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 7: Resultados encontrados pelos estudantes ao decompor o quadrado de lado $(a+b)$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Ou seja, quatro soluções possíveis foram encontradas pelos estudantes para representar a área de um quadrado de lado $(a + b)$.

Ainda nessa questão um estudante como mostra a figura 6 obteve como solução $-[(a - b)a + a(a - b) + b(a - b) + (a - b)b + ((a - b)(a + b)) + ((a - b)(a + b))]$ como mostramos a seguir:

Figura 8: Representação



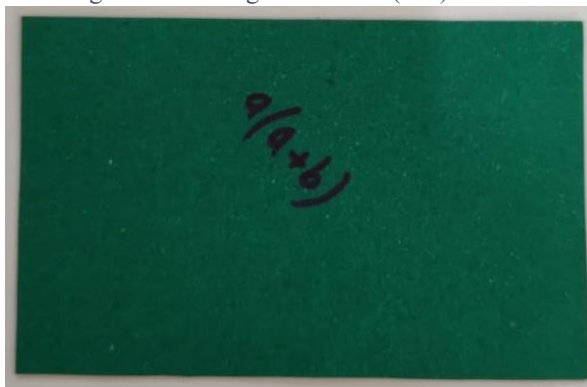
Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Da mesma maneira, para o item II os estudantes usaram apenas a sobreposição de retângulos para encontrar áreas equivalentes sem a necessidade de uma interpretação mais profunda das áreas com sinal e perceberam como soluções possíveis as seguintes somas:

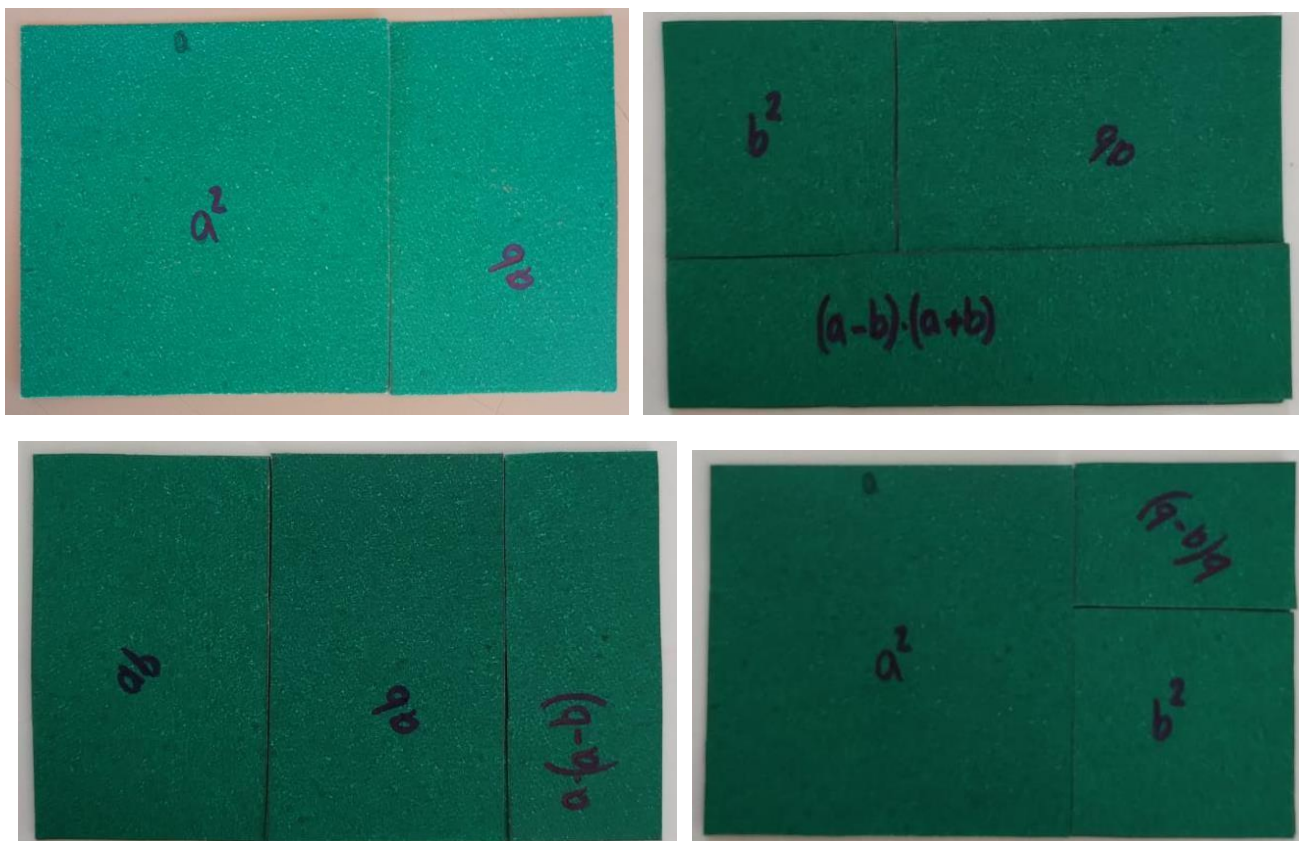
$$\begin{aligned} a(a+b) &= ab + a^2 = b^2 + ab + (a-b)(a+b) = ab + ab + a(a-b) \\ &= a^2 + b^2 + b(a-b) \end{aligned}$$

Figura 10: Retângulo de área $a(a+b)$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 11: Resultados encontrados pelos estudantes ao decompor o retângulo de área $a(a+b)$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

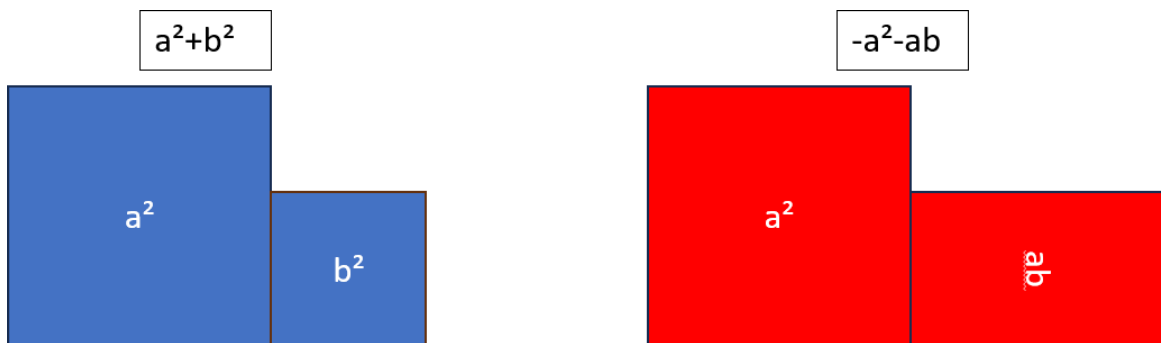
Já para solucionar o item III, os estudantes conseguiram apenas um resultado possível e nesse momento precisaram de orientações do professor e consideraram alguns critérios descritos abaixo. Vale ressaltar que a cor azul e vermelha apresentadas nas figuras 12 e 13

fazem menção respectivamente ao verde e ao cinza do material manipulável feito com as cartolinas, isto é, sinal positivo para azul e sinal negativo para vermelho.

- i. Para somar duas áreas de mesmo sinal colocamos os retângulos de mesma cor adjacente a outro.

Ex:

Figura 12: Soma de áreas de mesmo sinal

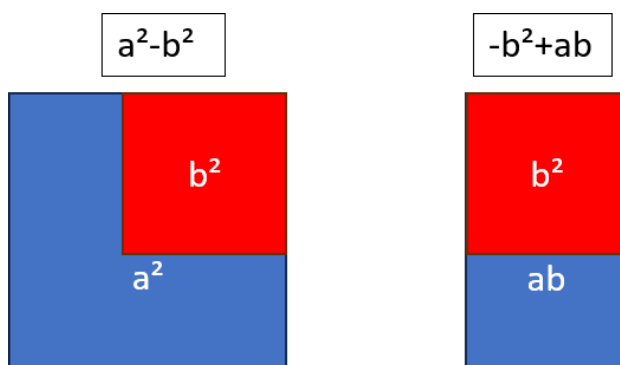


Fonte: Diário do pesquisador 2024

- ii. Para somar áreas com sinais opostos, sobrepomos a menor área sobre a maior.

Ex:

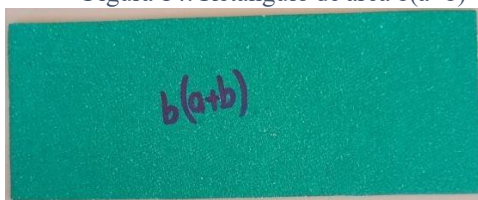
Figura 13: Soma de áreas de sinais opostos



Fonte: Diário do pesquisador 2024

Dessa forma, utilizando o material confeccionado obtemos:

Figura 14: Retângulo de área $b(a+b)$



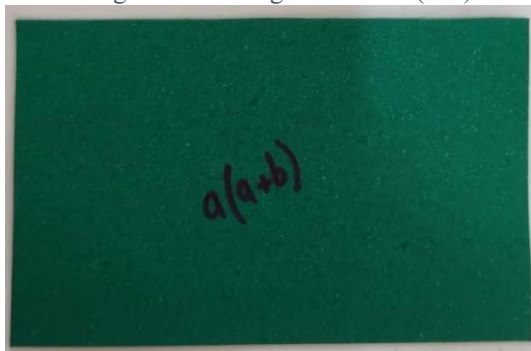
Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 15: Retângulo sobreposto por $b^2 + ab$ 

Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

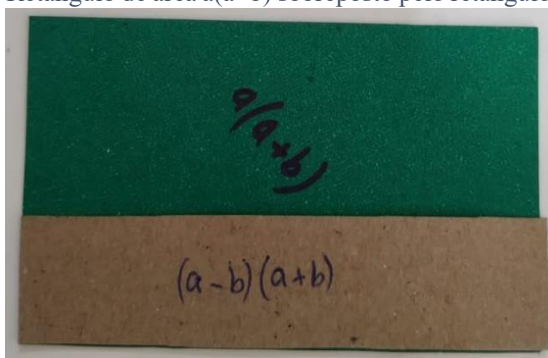
Apenas com explicações orais os estudantes não obtiveram êxito no item III para além do resultado acima, então foi usando este como exemplo prático pelo professor a fim de encontrar outras soluções para o problema e promover a compreensão de todos como demonstrado abaixo.

Queremos uma expressão cujo resultado seja $b(a + b)$ e note que, sobrepor completamente este retângulo com outros dentre os disponíveis é uma tarefa complexa já que ao sobrepor sobrarão espaços não preenchidos ou teremos uma sobreposição em excesso. Dessa forma, notamos que ao iniciarmos com um retângulo de área $a(a + b)$ de área com sinal positivo como ilustra a figura 16 abaixo, podemos sobrepor-la pelo critério (ii) com o retângulo de área $(a - b)(a + b)$ com sinal negativo na cor cinza (figura 17) e sendo assim notamos que a área verde restante possui valor $b(a + b)$, ou seja, $b(a + b) = a(a + b) - [(a - b)(a + b)]$ como vemos na figura 18.

Figura 16: Retângulo de área $a(a+b)$ 

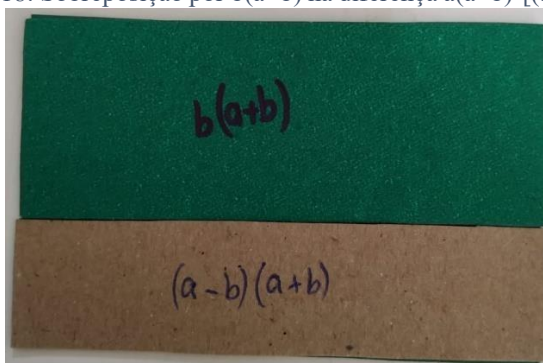
Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 17: Retângulo de área $a(a+b)$ sobreposto pelo retângulo $-[(a-b)(a+b)]$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

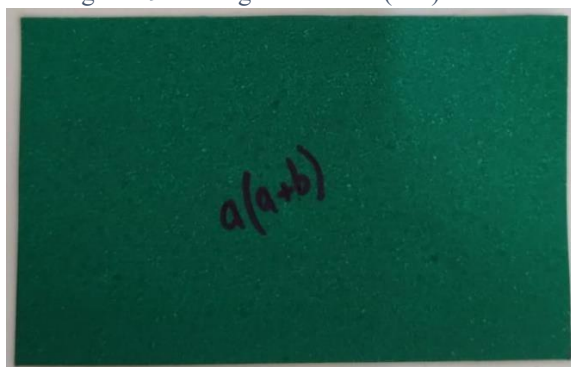
Figura 18: Sobreposição por $b(a+b)$ na diferença $a(a+b)-[(a-b)(a+b)]$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

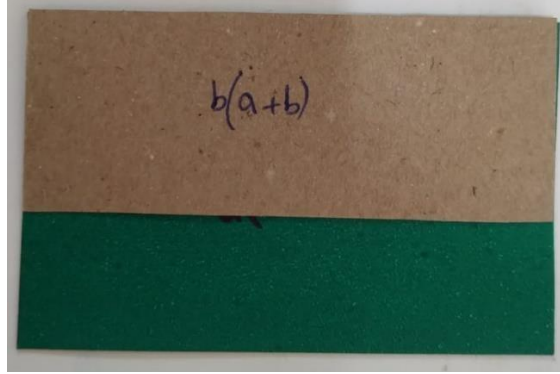
Após a realização deste exemplo os estudantes obtiveram êxito na execução do item IV como observado abaixo nas figuras abaixo em que $(a - b)(a + b) = a(a + b) - b(a + b)$.

Figura 19: Retângulo de área $a(a+b)$



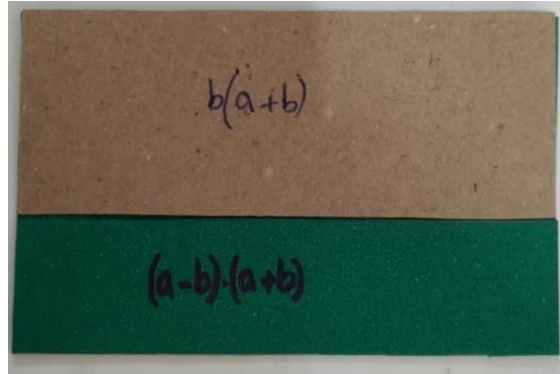
Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 20: Retângulo de área $a(a+b)$ sobreposto por $-[b(a+b)]$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 21: Resultado de $(a-b)(a+b)$ por sobreposição de retângulos



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Para o item V, encontrou-se $b^2 = ab - [b(a - b)]$

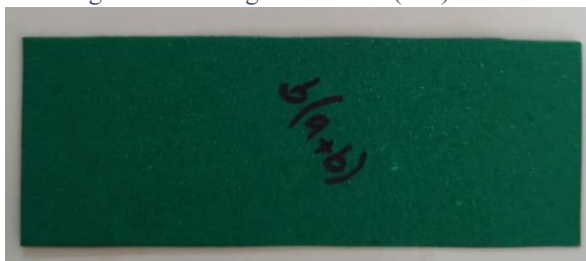
Figura 22: Resultado encontrado pelos estudantes para o quadrado de área b^2



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

De forma análoga encontrou-se para o item VI, $ab = b(a + b) - b^2$

Figura 23: Retângulo de área $b(a+b)$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 24: Retângulo de área $b(a+b)$ sobreposto por $-b^2$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 25: Representação geométrica de $b(a+b)-b^2 = ab$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Evidenciou-se com esses exemplos, a exploração, questionamentos e construção de conhecimento de forma colaborativa, investigando cada situação, criando hipóteses e validando conjecturas. Por meio disso, entende-se a matemática como uma ciência repleta de descobertas e que as descobertas surgem dessas indagações em procurar resolver problemas buscando diversos caminhos e representações para soluções. Assim, compreender a matemática envolve

a conversão entre diferentes registros de representação semiótica, fazendo um paralelo com a teoria de Raymond Duval (2003)

Isso dialoga com George Pólya (1945) quando argumenta que a matemática não deve ser ensinada apenas como um conjunto de regras fixas, mas como um processo dinâmico de descoberta. Assim segundo o autor, explorar múltiplos caminhos permite ao estudante desenvolver autonomia na resolução de problemas e ampliar sua visão sobre as conexões entre diferentes conceitos matemáticos.

Seguindo nossa reflexão, nos referenciamos também em Imre Lakatos (1976) em *Provas e Refutações*, quando analisa o desenvolvimento do conhecimento matemático a partir da interação entre conjecturas, experiências e refutações. Ele defende que a matemática não é um processo fechado e definitivo, mas sim um campo dinâmico onde diferentes abordagens e reformulações são essenciais para o avanço da compreensão.

Constatou-se que o recurso que propomos permite essa criação de conexões entre os campos da Álgebra e geometria, permitindo aos estudantes a criação de hipóteses e possibilitando suas validações por meio de reformulações e testes.

Vale ressaltar que, a validação dos resultados encontrados pelos estudantes com o material manipulável foi realizada de forma algébrica no quadro pelo professor- pesquisador e primeiro autor do estudo, bem como pelos estudantes no caderno, como foi o caso de $b(a + b) = a(a + b) - [(a - b)(a + b)]$ e

$$a(a + b) = ab + a^2 = b^2 + ab + (a - b)(a + b) = ab + ab + a(a - b) = a^2 + b^2 + b(a - b) \text{ e também } (a + b)^2 = b(a + b) + a^2 + ab = b(a - b) + b^2 + ab + a(a - b) + b(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2.$$

O diferencial do material está na proposta de sinalizar áreas positivas e negativas de modo bidimensional, com o uso de cartolinas dupla face coloridas. Embora já existam propostas que relacionam produtos notáveis a áreas de retângulos, a introdução do conceito de “área com sinal” permite representar expressões algébricas que envolvem adição e subtração diretamente no plano geométrico.

4. ANÁLISE DO TRABALHO REALIZADO

Os resultados dialogam com nossas ideias iniciais das potencialidades do material manipulável proposto.

Como explicitado anteriormente, os estudantes foram submetidos a uma avaliação diagnóstica contendo sete perguntas objetivas, sendo quatro delas múltipla escolha com quatro alternativas e três questões com alternativas a e b (verdadeiro ou falso) como mostramos abaixo:

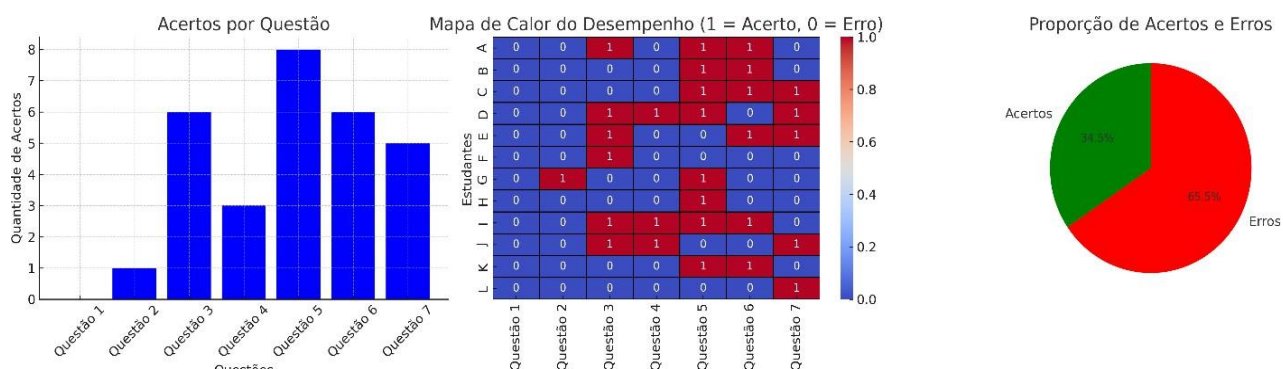
Prova de Múltipla escolha- Produtos Notáveis (Avaliação 1)

Escolha a opção correta para cada questão. Justifique a sua resposta.

1. Qual é o resultado do produto notável $(a + b)^2$?
 - a) $a^2 + b^2$
 - b) $a^2 + ab + b^2$
 - c) $a^2 + 2ab + b^2$
 - d) $a^2 - 2ab + b^2$
2. Qual é o resultado do produto notável $(a - b)^2$?
 - a) $a^2 - b^2$
 - b) $a^2 - 2ab + b^2$
 - c) $a^2 - ab + b^2$
 - d) $a^2 + 2ab + b^2$
3. Qual é o resultado do produto notável $(a + b)(a - b)$?
 - a) $a^2 + b^2$
 - b) $a^2 - 2ab + b^2$
 - c) $a^2 - b^2$
 - d) $b^2 - a^2$
4. Qual é o resultado do produto notável $(a + b)(b - a)$?
 - a) $a^2 + b^2$
 - b) $a^2 - 2ab + b^2$
 - c) $a^2 - b^2$
 - d) $b^2 - a^2$
5. Se $a > b > 0$ então $(a + b)(b - a)$ é um número?
 - a) Positivo
 - b) Negativo
6. Se $a > b > 0$ então $(a + b)(a - b)$ é um número?
 - c) Positivo
 - d) Negativo
7. Se $a > b > 0$ então $(b - a)^2$ é um número?
 - a) Positivo
 - b) Negativo

As questões com mais erros foram a de número 1 e número 2. A figura abaixo mostra os resultados da avaliação diagnóstica em três perspectivas distintas.

Figura 26: Análise gráfica da avaliação diagnóstica



Analisamos as respostas dos 12 estudantes e houve 34,5% de acerto na avaliação e 65,5% de erro como vemos no gráfico de setores.

Pelo gráfico de calor(Heatmap) na questão 1 não houve acertos, e por meio de uma análise mais detalhada notamos que 10 estudantes marcaram a opção $a^2 + b^2$ e 2 marcaram $a^2 + ab + b^2$. Já na questão 2, apenas 1 acertou e 8 estudantes marcaram $a^2 - b^2$ como solução.

Verificamos assim que os estudantes não tinham conhecimento sobre manipulações algébricas como propriedade distributiva da multiplicação e potenciação para desenvolver alguns produtos notáveis como $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$ cometendo um erro muito comum que é sugerir como solução respectivamente $a^2 + b^2$ e $a^2 - b^2$.

A questão 5 foi a que teve mais acertos, sendo 8 respostas corretas e 4 incorretas.

Vale registrar algumas falas dos estudantes durante a entrega da avaliação diagnóstica como a do estudante B, D, F e K:

*Estudante B: Misericórdia professor! Está parecendo prova de português...
Só tem letras.*

Estudante K: Acho que errei todas! Não sei fazer isso não. Estudante

F: Fui pela regra dos sinais.

Estudante D: Muito complicado! Parecia língua maia.

Sobre já terem estudado produtos notáveis no ensino fundamental, alguns estudantes afirmaram: “Se estudei, não me lembro”, “Não vi isso não professor”, “Nunca estudei isso na minha vida!”

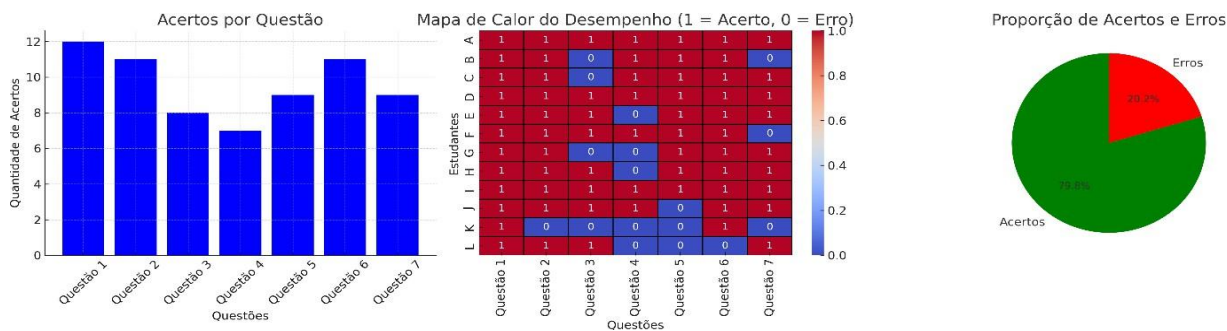
Como mencionado anteriormente, isso evitou uma “cola” que poderia ocorrer caso se lembrassem das formulas.

Após a aplicação da atividade diagnóstica, houve a introdução teórica do conteúdo, demonstração e prática guiada com o recurso didático criado e em seguida a exploração independente e discussão e reflexão.

As discussões geraram reflexões e asseguraram a criação de hipóteses e descobertas diversas sobre a representação dos produtos notáveis.

Por fim, a mesma avaliação objetiva foi realizada e uma avaliação formativa discursiva foi proposta aos estudantes. Os resultados da segunda avaliação objetiva estão na figura a seguir:

Figura 27: Análise gráfica de avaliação pós aplicação do recurso



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Vale ressaltar que na segunda aplicação da avaliação, os estudantes a resolveram com o intermédio do recurso didático. Os resultados foram muito satisfatórios chegando a 79,8% de acertos, sendo 100% de acerto na questão 1 e 91,6% de acerto na questão 2. De maneira geral os resultados foram positivos.

O estudante K, em especial, permaneceu com baixo desempenho mesmo após a intervenção. Isso chamou a atenção por destoar dos demais resultados, indicando que pode haver fatores externos interferindo em sua aprendizagem, como dificuldades cognitivas, emocionais ou falta de engajamento. Para aprofundar essa análise, seriam necessárias outras estratégias avaliativas e acompanhamento pedagógico individualizado. Duval (1993) destaca que a compreensão matemática exige a mobilização de diferentes registros de representação semiótica, e que a conversão entre esses registros é uma atividade cognitiva fundamental. Nesse processo, os erros podem indicar dificuldades na coordenação entre registros, sendo, portanto, oportunidades para intervenções pedagógicas que promovam uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

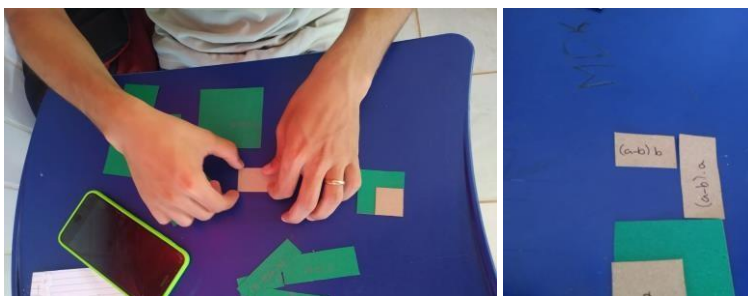
Alguns registros dos estudantes interagindo com o material estão a seguir:

Figura 28: Estudantes tendo o primeiro contato com o material



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 29: Estudantes no processo de construção com material concreto



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

A atividade abaixo mostra a proposição de um instrumento de avaliação formativa que foi proposto aos estudantes ao final de todo o processo.

Áreas com sinal- Produtos Notáveis (Avaliação 2)

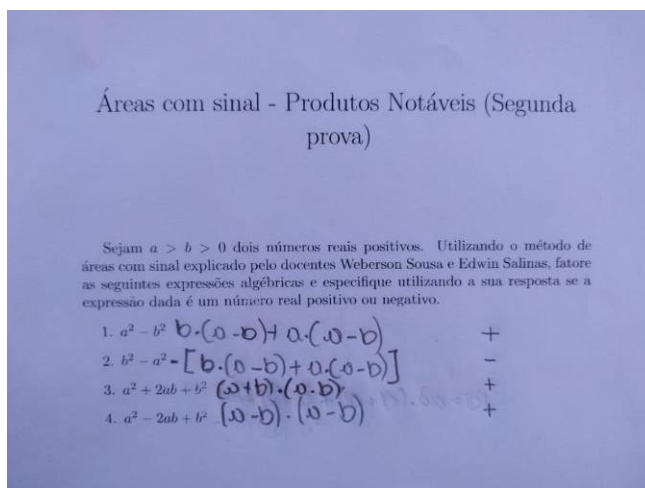
Sejam $a > b > 0$ dois números reais positivos. Utilizando o método de áreas com sinal explicado pelos docentes Weberson Sousa e Edwin Salinas, fatore as seguintes expressões algébricas e especifique utilizando a sua resposta se a expressão dada é um número positivo ou negativo.

1. $a^2 - b^2$
2. $b^2 - a^2$
3. $a^2 + 2ab + b^2$
4. $a^2 - 2ab + b^2$

Nas questões aqui propostas tomamos a e b números reais positivos, e no ato da sua resolução os estudantes estavam com o material didático como suporte. A maior dificuldade foi na questão 2 pelo fato de termos uma área maior sendo subtraída de uma área menor, o que desencadeou algumas hipóteses interessantes. Os estudantes que acertaram essa questão, em sua maioria notaram que bastaria inverter o sinal da expressão para solucioná-la e a acertaram.

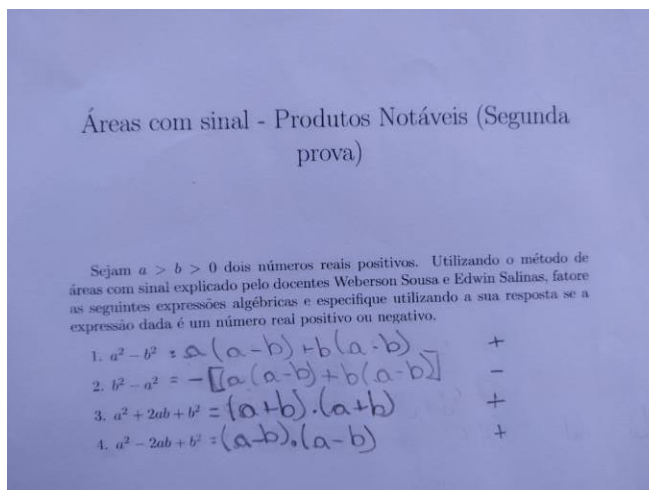
Abaixo verificamos alguns dos registros dos estudantes ao realizarem a avaliação formativa.

Figura 30: Soluções do estudante A



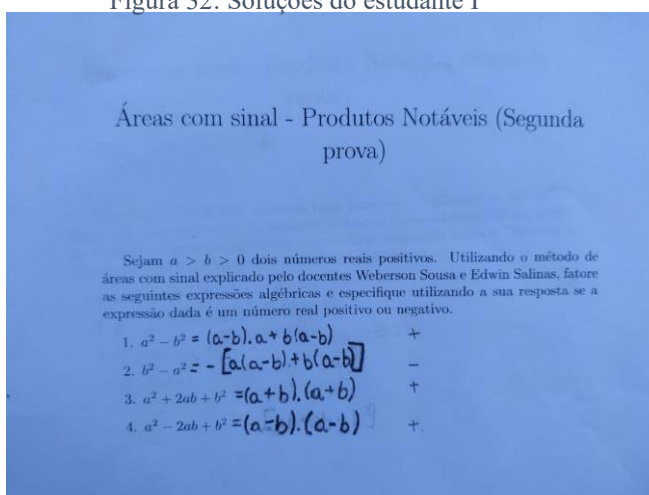
Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 31: Soluções do estudante D



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 32: Soluções do estudante I



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Notamos que esses estudantes conseguiram acertar com precisão a fatoração e o sinal positivo ou negativo para cada uma das expressões, mas para além da obtenção da resposta correta, vemos esses acertos como reflexo do processo de compreensão do estudante.

Segundo Raymond Duval (2009), a aprendizagem matemática envolve a progressão de diferentes registros de representação semiótica, como o algébrico, o geométrico e o gráfico.

Ao trabalhar com esse material manipulável envolvendo áreas de retângulos com sinal, os estudantes transitam entre representações diferentes: a visual (geométrica), ao manipular as figuras, e a simbólica (algébrica), ao formular expressões correspondentes. O certo, nesse contexto, indica que o estudante conseguiu estabelecer redes entre esses registros e converter

corretamente a informação de um registro para outro, o qual foi um processo essencial para a compreensão profunda de produtos notáveis.

Duval (2003) enfatiza que o verdadeiro desafio da aprendizagem matemática não está apenas na manipulação de símbolos, mas na habilidade de conversão entre diferentes registros semióticos de representação.

Assim, quando os estudantes abordaram uma questão sobre produtos notáveis após trabalhar com o material manipulável, não significava apenas que memorizou a fórmula, mas indicava que ele desenvolveu uma compreensão mais estruturada, pois conseguiu relacionar a área das figuras acompanhadas com sinal com a expressão algébrica correspondente.

Verificamos isso quando os estudantes ao final chegarem a solução:

- ✓ Foram capazes de implementar a solução usando múltiplas representações.
- ✓ Conseguiram transitar entre a representação visual (áreas dos retângulos) e a simbólica (expressões algébricas).
- ✓ Os conceitos foram baseados em compreensão conceitual e não apenas em memorização mecânica.

Com base nessas reflexões, concluímos que o material manipulável realmente cumpriu seu papel de suporte cognitivo na construção do conhecimento matemático sobre os produtos notáveis.

Contudo, também tivemos entre os 12 resultados tabulados, 2 que não foram totalmente corretos em suas resoluções como os indicados abaixo:

Figura 33: Soluções do estudante K

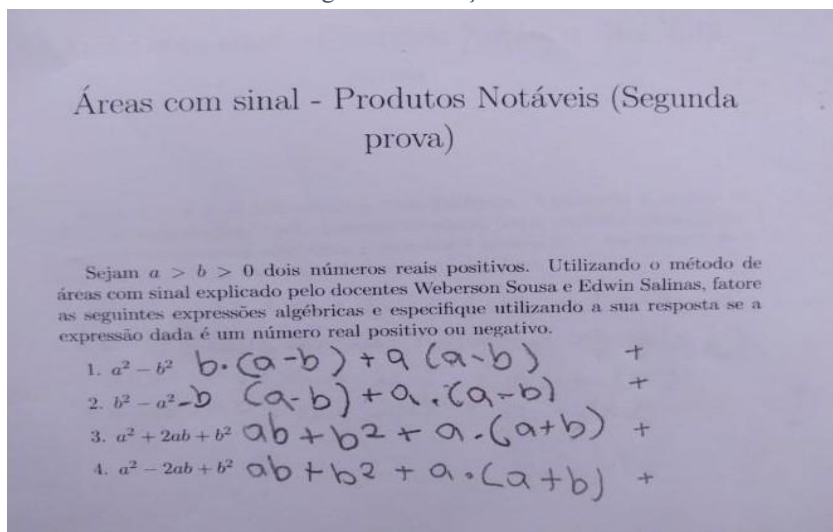
Áreas com sinal - Produtos Notáveis (Segunda prova)

Sejam $a > b > 0$ dois números reais positivos. Utilizando o método de áreas com sinal explicado pelo docentes Weberson Sousa e Edwin Salinas, fature as seguintes expressões algébricas e especifique utilizando a sua resposta se a expressão dada é um número real positivo ou negativo.

1. $a^2 - b^2 = b \cdot (a-b) + a \cdot (a-b)$ +
2. $b^2 - a^2 = -b \cdot (a-b) + a \cdot (a-b)$ -
3. $a^2 + 2ab + b^2 = ab + b^2 + a \cdot (a+b)$ +
4. $a^2 - 2ab + b^2 = -a \cdot (a+b) + b^2 + ab$ +

Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 34: Soluções do estudante L



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Os estudantes K e L cujas respostas estão representadas respectivamente acima nas figuras 33 e 34, erraram a representação algébrica da questão 2 por ausência de um colchete, sendo que o estudante L também cometeu um equívoco para o sinal da expressão encontrada em afirmar que tal seria positivo. O erro na questão 4 aparentemente veio da tentativa de aproveitar o resultado da questão 3. Na questão 3 a construção foi precisa desde a expressão até o seu sinal, sendo que na fatoração feita por esses estudantes ficou nítida a utilização dos retângulos sinalizados.

Os erros aqui cometidos durante a avaliação configuram oportunidades excelentes para reavaliar o processo de ensino. Esses erros indicaram nesta pesquisa dificuldades na transição entre a manipulação concreta e a abstração algébrica por parte destes estudantes, já que posteriormente o encontro das expressões a validação poderia ter sido feita por meio de manipulações algébricas e não foi realizada.

Nesse sentido, o desafio frente a tais estudantes que obtiveram 100% de acerto é o de garantir que essa representação visual por meio do material manipulável se converta em autonomia na resolução/representação simbólica.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Verificamos que, os estudantes puderam relacionar os conceitos algébricos dos produtos notáveis com sua representação geométrica por meio do manuseio de áreas de retângulos com sinal, o que abriu espaço para exploração de hipóteses já que o material manipulável aqui desenvolvido abre a possibilidade de investigar diversas soluções para um mesmo problema.

Observou-se que a possibilidade de manipular os objetos, visualizar a variação de sinais

e estabelecer relações entre representações algébricas e geométricas favoreceu o desenvolvimento do pensamento lógico e da argumentação matemática.

Os estudantes puderam validar seus resultados geométricos por meios algébricos, fazendo assim uma conversão entre registros de representação, constituindo assim uma aprendizagem efetiva que segundo Duval (2003) ocorre quando há transições entre diferentes registros de representação, sendo o material manipulável um mediador essencial nesse processo.

Os resultados obtidos até o momento permitem afirmar o quão significativo para o ensino é o uso de materiais manipuláveis em sala de aula desde que realizado de forma planejada e com uma intencionalidade. Estes materiais fazem o estudante ver e interpretar de forma concreta dados e situações algébricas ditas abstratas presentes nas aulas de matemática da Educação Básica. Segundo Lorenzato (2006), o uso de materiais manipulativos só cumpre seu papel quando acompanhado de intervenções pedagógicas que deem significado à ação dos estudantes, o que reforça a necessidade de formação continuada de professores voltada para a utilização de metodologias ativas e recursos didáticos inovadores.

Esta pesquisa também aponta caminhos para futuras investigações e aprimoramentos do material desenvolvido. Uma possibilidade promissora é moldar o recurso para um formato digital, transformando-o em um jogo interativo online, o que permitiria maior engajamento dos estudantes e facilitaria a sua utilização em ambientes híbridos e virtuais de aprendizagem. Além disso, recomenda-se a exploração do uso de tecnologias de impressão 3D para produzir o material de forma rápida, precisa e acessível, permitindo que professores e escolas utilizem kits prontos.

Assim, os resultados alcançados nesta pesquisa podem servir de base para novos estudos voltados à incorporação de recursos digitais e materiais físicos inovadores no ensino da Matemática, além de oferecer contribuições relevantes para a formação de professores, fornecendo subsídios teóricos e práticos para a criação de sequências didáticas mais dinâmicas, contextualizadas e interativas, utilizando materiais manipulativos como recurso central para o ensino de produtos notáveis, pois como foi mostrado, os materiais manipuláveis permitem que os alunos visualizem, manipulem e compreendam a estrutura dos produtos notáveis, tornando o processo de ensino mais exploratório, investigativo e próximo da realidade dos estudantes.

6. REFERÊNCIAS

- ÁVILA, G. **Ensino da Matemática: princípios e práticas**. São Paulo: Editora X, 2010.
- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.
- CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique, 1991.

- DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg, v. 5, p. 35–65, 1993.
- DUVAL, R. **Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Berna: Peter Lang, 2003.
- DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- FIorentini, D. O que é pesquisa qualitativa em educação matemática? **Bolema**, Rio Claro, v. 7, pág. 1-5, 1994.
- FIorentini, D.; LOrenzato, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.
- FIorentini, D.; MIORIM, M,A. Uma reflexão sobre o uso de materiais manipuláveis e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM**. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.
- GRANDO, R.C. **O jogo e a matemática no ensino fundamental**. Campinas: Papyrus, 2000.
- LAKATOS, I. **Provas e Refutações: A Lógica da Descoberta Matemática**. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
- LOrenzato, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 1991.
- LOrenzato, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.
- LOrenzato, Sérgio. **O uso de material concreto no ensino de matemática**. Campinas: Autores Associados, 2010.
- LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. São Paulo: EPU, 2013.
- MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. de L. **Didática da Matemática**. Universidade Aberta: Lisboa, 1996.
- PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LOrenzato, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.
- NACARATO, Adair Mendes. **Eu trabalho primeiro no concreto**. *Revista de Educação Matemática*, [s. l.], v. 9, n. 9-10, p. 1–6, 2005.
- PÓLYA, G. **Como Resolver: Um Novo Enfoque do Método Matemático**. Princeton: Princeton University Press, 1945.
- PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana Fernandes; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica, 2003.
- SMOLE, KS; DINIZ, M.I. **Matemática na educação infantil: formação de conceitos e desafios**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

STEWART, James. **Cálculo. Volume 1.** 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

VEIGA, Ilma Passos Alencastro. **Metodologia participativa: as técnicas de ensino-aprendizagem.** 3. ed. Campinas: Papirus, 2012.

Apêndice A: Construção do material manipulável

Passo 1: Confeção dos recursos

1 cartolina dupla face

1 marcador de tinta preta

1 régua

1 tesoura

Figura A1: Itens usados na confecção do material

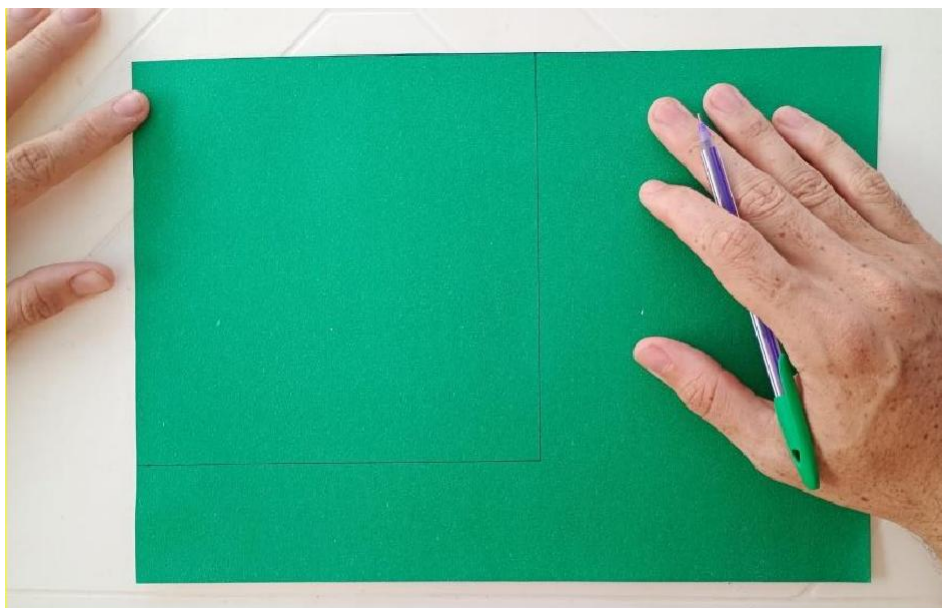


Fonte: Diário do pesquisador, 2024

Passo 2: Construção

Escolha um dos lados da cartolina e utilize a régua e a caneta para marcar na cartolina um quadrado de lado medindo 18cm.

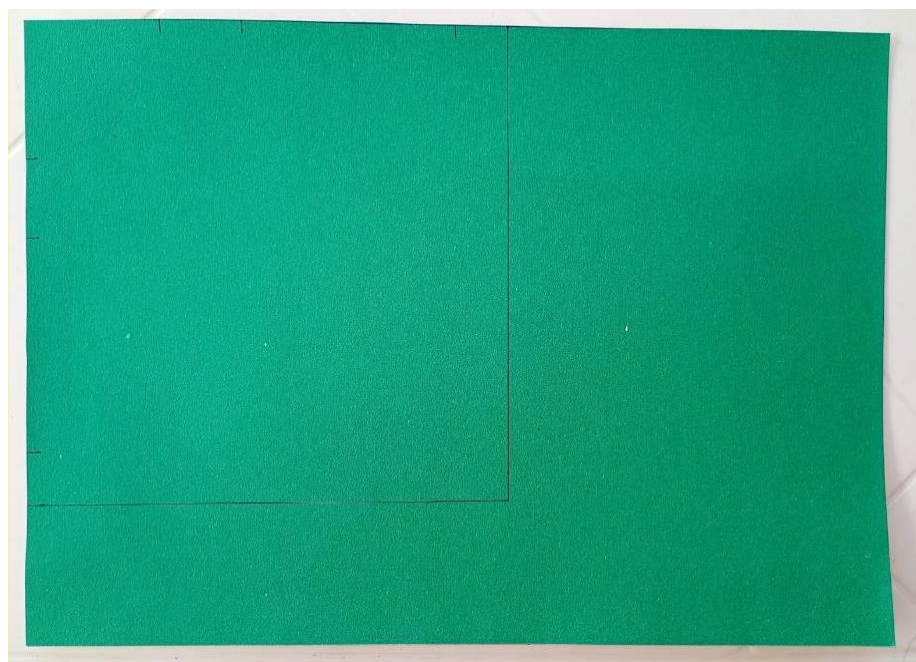
Figura A2: Construção do material I



Fonte: Diário do pesquisador, 2024

Em seguida partindo do vértice superior esquerdo, iremos marcar 4 segmentos medindo respectivamente 5cm, 3cm, 8cm e 2cm tanto na horizontal como também na vertical.

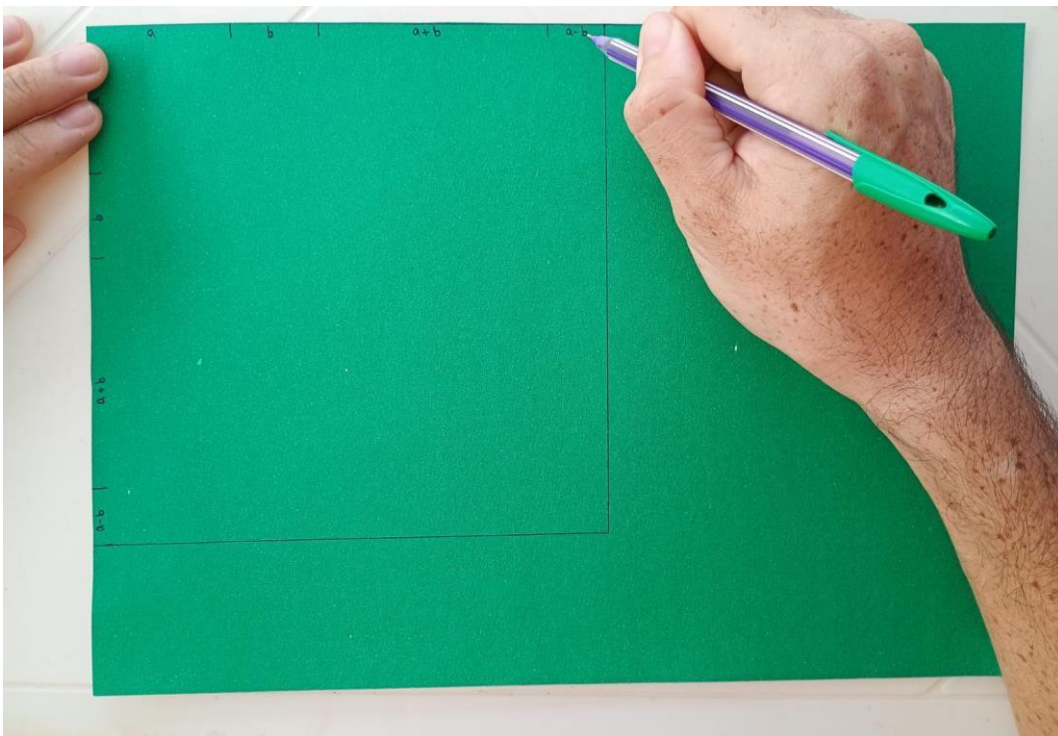
Figura A3: Construção do material II



Fonte: Diário do pesquisador, 2024

Sobre cada um desses segmentos indicaremos respectivamente a , b , $a + b$, $a - b$, atribuindo assim $a = 5cm$, $b = 3cm$, $a + b = 8cm$ e $a - b = 2cm$.

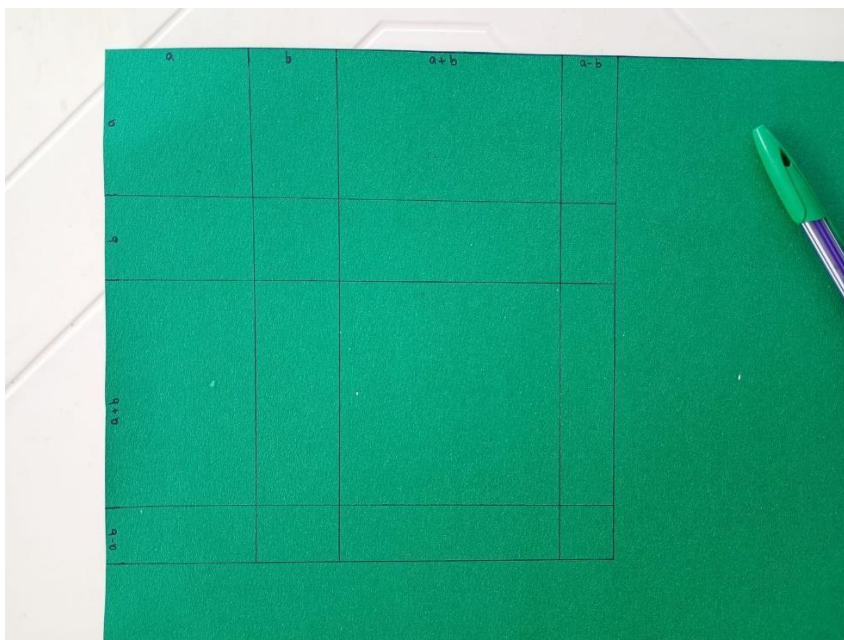
Figura A4: Construção do material III



Fonte: Diário do pesquisador, 2024

A partir de cada um dos pontos demarcados ao final dos segmentos traçaremos retas paralelas partindo dos pontos até o lado oposto do quadrado. As retas serão feitas na horizontal e vertical ficando perpendiculares entre si como ilustra a imagem abaixo:

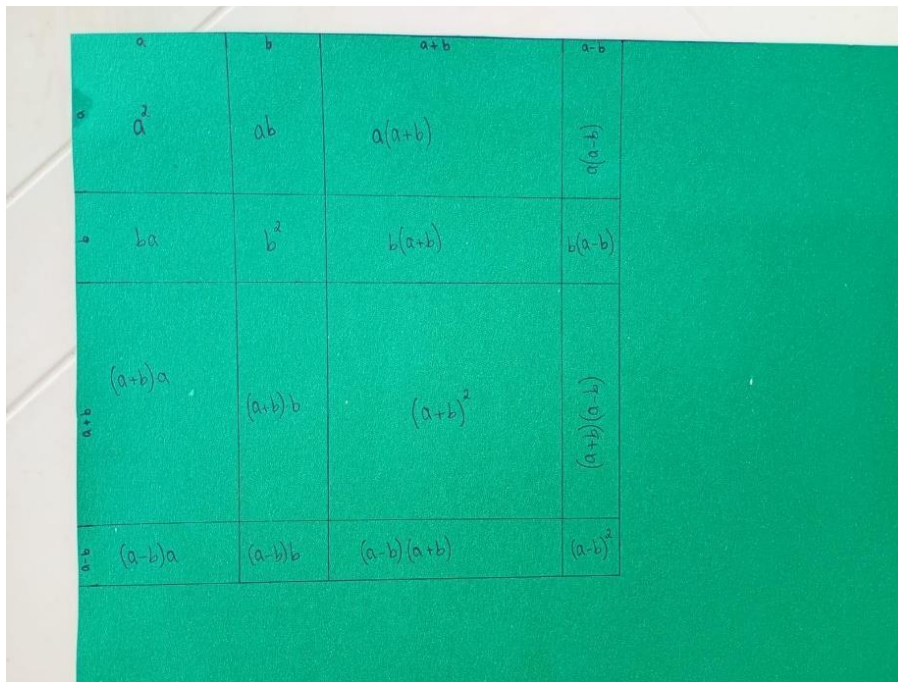
Figura A5: Construção do material IV



Fonte: Diário do pesquisador, 2024

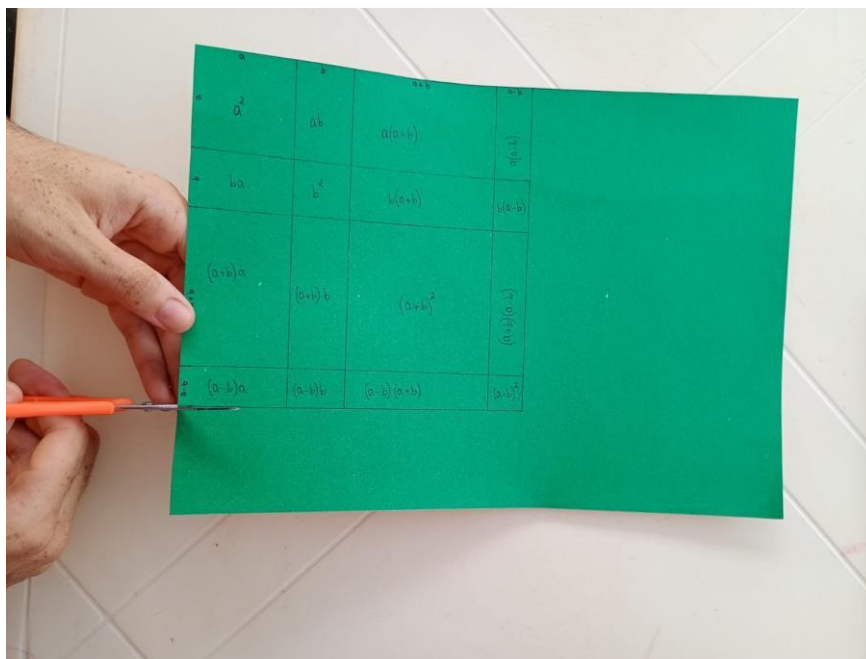
Agora, demarque em função de a e b as áreas dos retângulos e quadrados encontrados utilizando a caneta preta. Ao final dessa etapa utilize a tesoura e desmembre o quadrado da cartolina como indica a figura abaixo.

Figura A6: Construção do material V



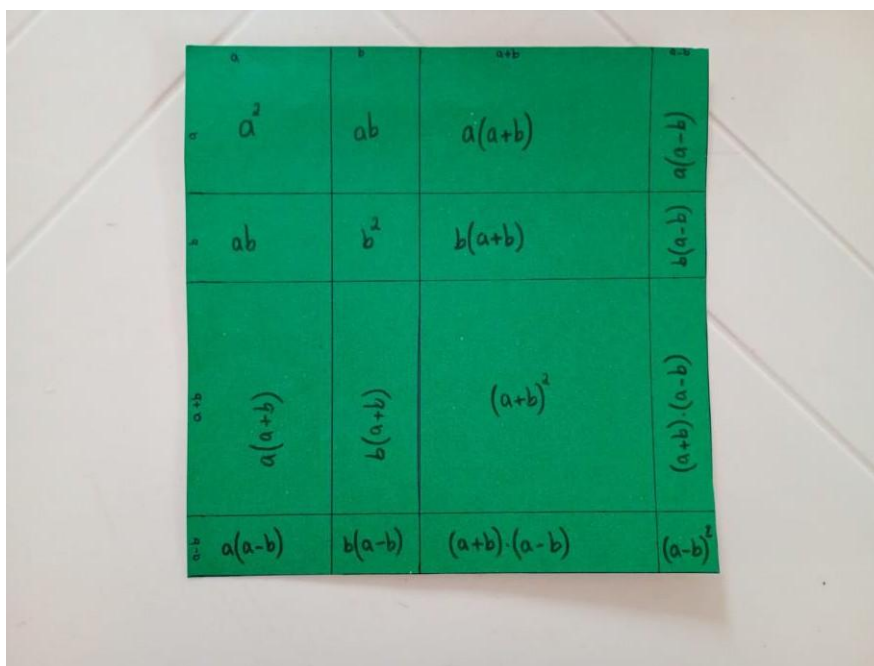
Fonte: Diário do pesquisador, 2024

Figura A7: Construção do material VI



Fonte: Diário do pesquisador, 2024

Figura A8: Construção do material VII



Fonte: Diário do pesquisador, 2024

Por fim, fazendo cortes sobre cada uma das retas desenhadas desmembre o quadrado de lado 18cm em:

- 1 quadrado de área $(a + b)^2$
- 1 quadrado de área a^2
- 1 quadrado de área b^2
- 1 quadrado de área $(a - b)^2$
- 2 retângulos de área $a(a + b)$
- 2 retângulos de área $b(a + b)$
- 2 retângulos de área $a(a - b)$
- 2 retângulos de área $b(a - b)$
- 2 retângulos de área ab
- 2 retângulos de área $(a - b)(a + b)$

Após o corte, anote o valor dessa área no lado oposto de cada quadrado e retângulo e assim o material estará finalizado.

Figura A9: Construção do material VIII



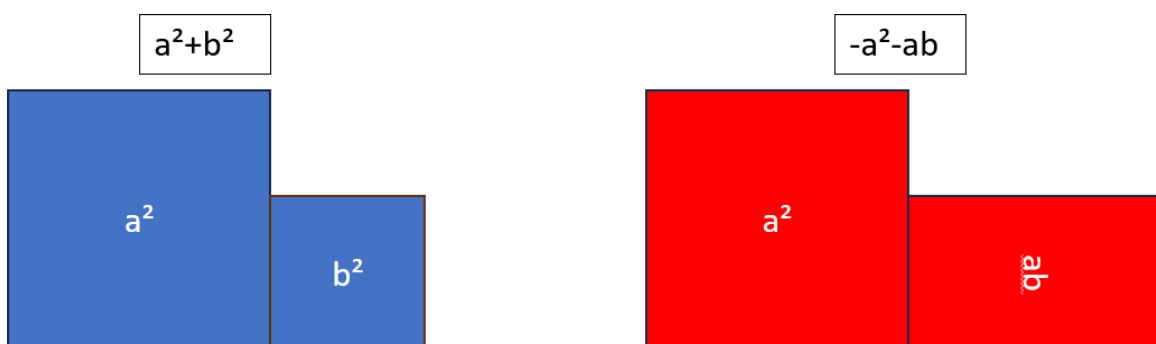
Fonte: Diário do pesquisador, 2024

Apêndice B: Como usar o MD em sala de aula

Para os cálculos utilizando o material didático manipulável em sala de aula faz se necessário adotar 2 critérios demonstrados abaixo. Para melhor visualização das cores e simetrias entre as figuras, usamos o *powepoint* para criar as ilustrações abaixo, sendo a cor azul e a cor vermelha representando respectivamente a cor verde e a cor cinza do material manipulável construído anteriormente.

- i. Para somar duas áreas de mesmo sinal colocamos os retângulos de mesma cor adjacente a outro.

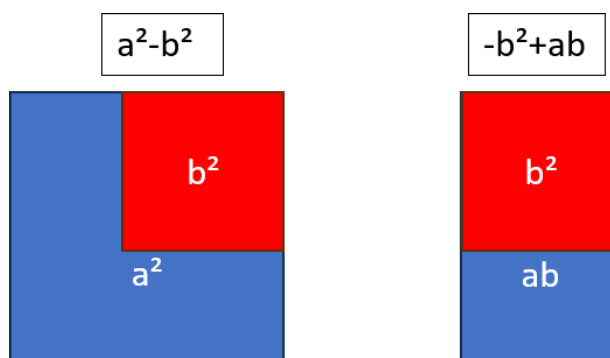
Figura B1: Soma de áreas de mesmo sinal



Fonte: Diário do pesquisador 2024

- ii. Para somar áreas com sinais opostos, sobrepomos a menor área sobre a maior.

Figura B2: Soma de áreas de sinais opostos



Fonte: Diário do pesquisador 2024

Faremos agora alguns exemplos de como usar o material.

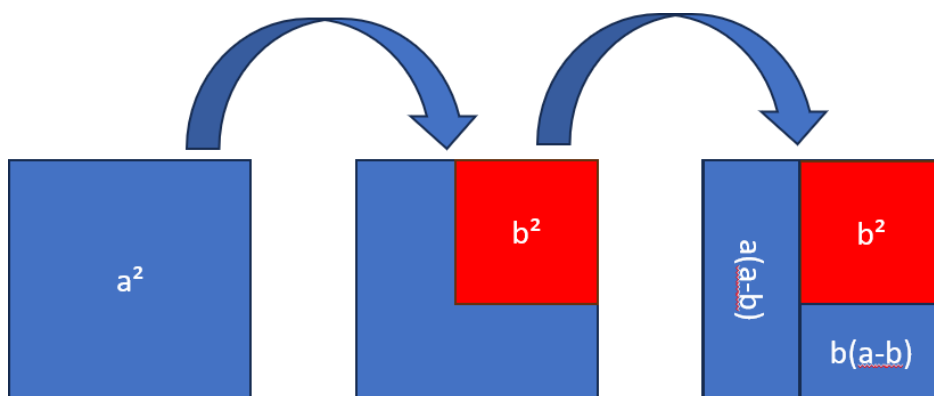
Com todos os retângulos sobre a mesa proponha algumas questões como:

1- Utilizando o material confeccionado busque ao menos duas possíveis fatorações para cada expressão abaixo:

- a) $a^2 - b^2$
- b) $(a + b)^2$
- c) $(a - b)^2$
- d) $-(a - b)^2$
- e) $b^2 - a^2$

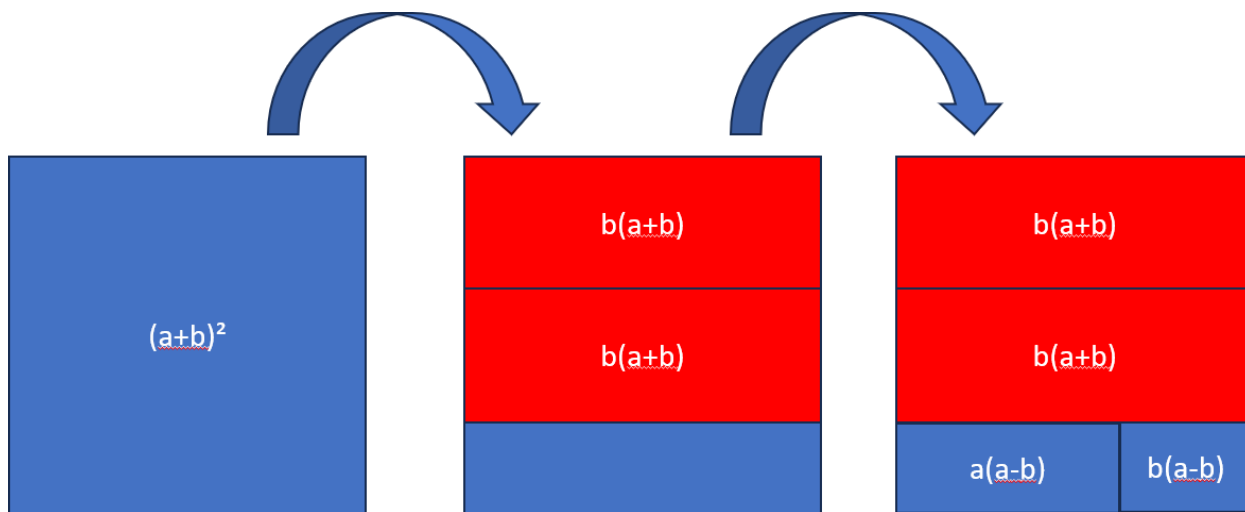
Uma possível solução para a letra (a) seria pegar inicialmente o quadrado de área a^2 e retirar b^2 . Como iremos subtrair b^2 , iremos sobrepor-lo ao quadrado de área a^2 de cor vermelha (área com sinal negativo) e o espaço que sobrou pode ser substituído por dois retângulos conhecidos como indica a figura abaixo na cor azul (área com sinal positivo), logo $a^2 - b^2 = a(a - b) + b(a - b)$.

Figura B3: Representação geométrica de $a^2 - b^2$



Fonte: Diário do pesquisador 2024

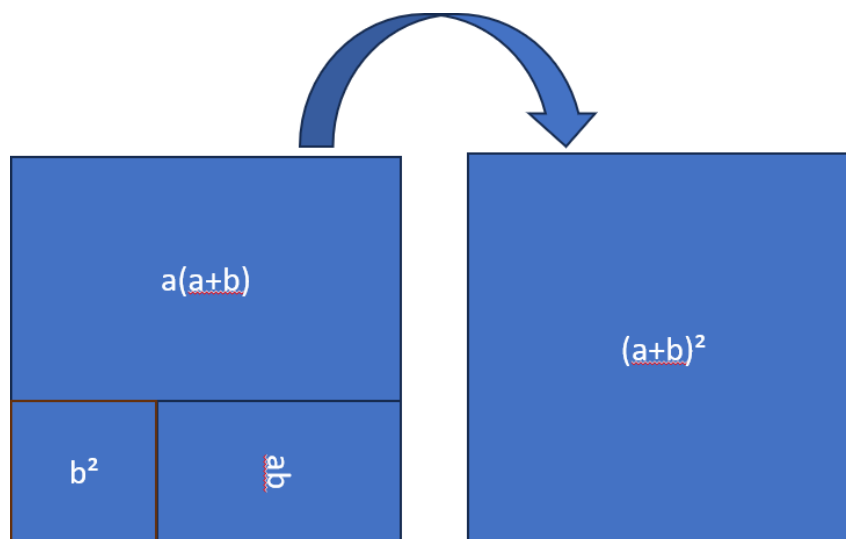
Outra maneira de obter este resultado $a(a - b) + b(a - b)$ seria realizar a operação $(a + b)^2 - 2b(a + b)$, a qual advém da seguinte operação geométrica:

Figura B4: Representação geométrica de $a^2 - b^2$ 

Fonte: Diário do pesquisador 2024

Neste, tomamos um quadrado de área $(a + b)^2$ com sinal positivo (cor azul) e em seguida somamos dois retângulos de área $b(a + b)$ com sinal negativo (vermelho) sobrando em azul um retângulo de área $a(a - b) + b(a - b)$.

Para a letra (b) podemos ter: $a(a + b) + ab + b^2$ e colocando todos de forma adjacente encontramos $(a + b)^2$.

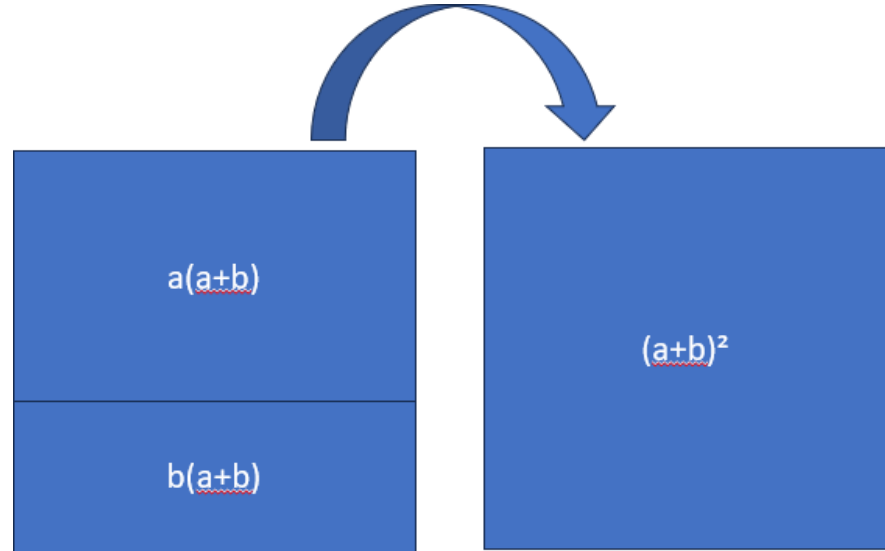
Figura B5: Representação geométrica de $(a+b)^2$ 

Fonte: Diário do pesquisador 2024

Por outro lado, temos também $(a + b)^2 = a(a + b) + b(a + b)$ e

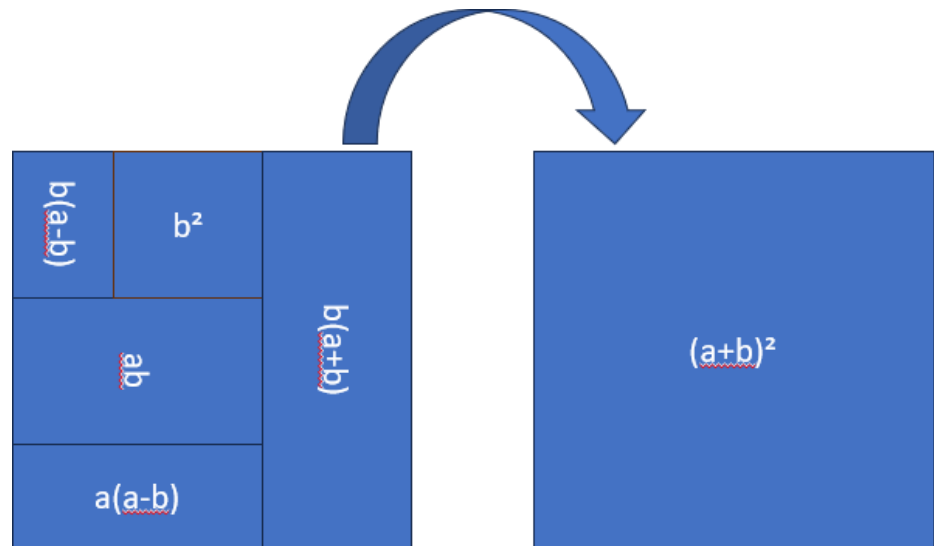
$(a + b)^2 = b(a - b) + b^2 + ab + a(a - b) + b(a + b)$ resultados algébricos das representações geométricas abaixo respectivamente construídas.

Figura B6: Representação geométrica de $(a+b)^2$



Fonte: Diário do pesquisador 2024

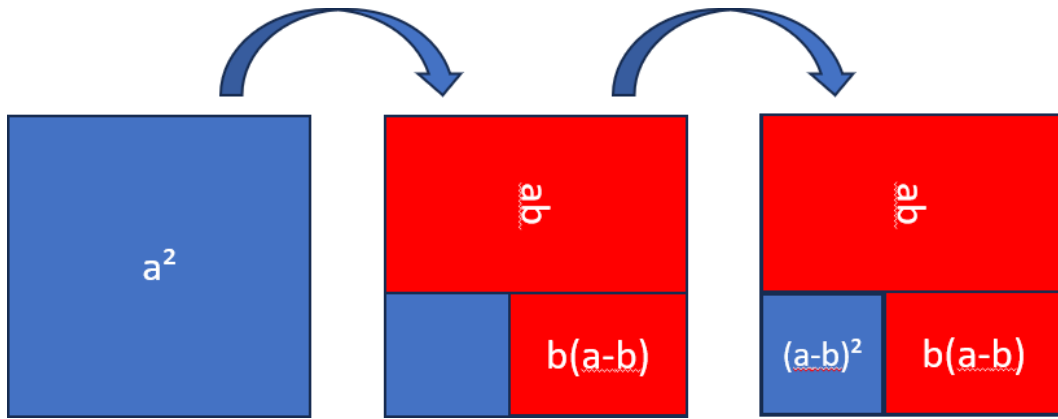
Figura B7: Representação geométrica de $(a+b)^2$



Fonte: Diário do pesquisador 2024

Já na letra (c) temos as possíveis soluções
 $a^2 - [(a - b)b] - ab$ (I)

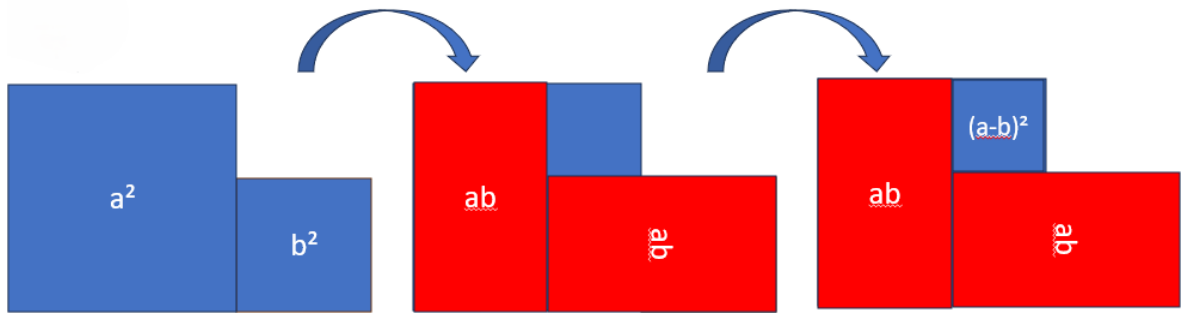
Figura B8: Representação geométrica de $(a-b)^2$



Fonte: Diário do pesquisador 2024

$$a^2 + b^2 - ab - ba \quad (\text{II})$$

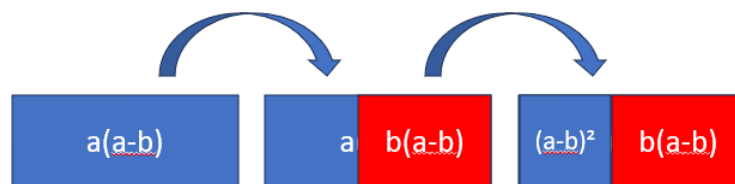
Figura B9: Representação geométrica de $(a-b)^2$



Fonte: Diário do pesquisador 2024

$$a(a - b) - b(a - b) \quad (\text{III})$$

Figura B10: Representação geométrica de $(a-b)^2$

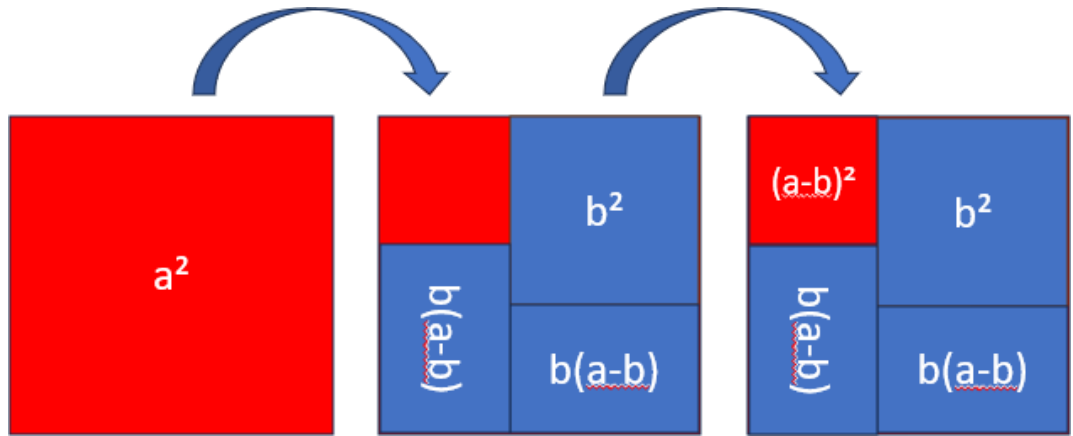


Fonte: Diário do pesquisador 2024

Na letra (d) podemos encontrar

$$-a^2 + b^2 + b(a - b) + b(a - b) \quad (\text{I})$$

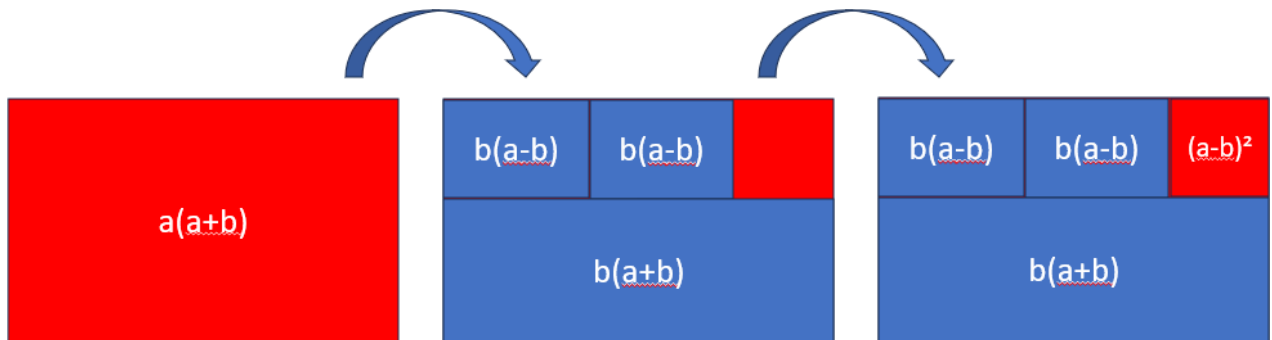
Figura B11: Representação geométrica de $-(a-b)^2$



Fonte: Diário do pesquisador 2024

$$-a(a+b) + b(a-b) + b(a-b) + b(a+b) \quad (\text{II})$$

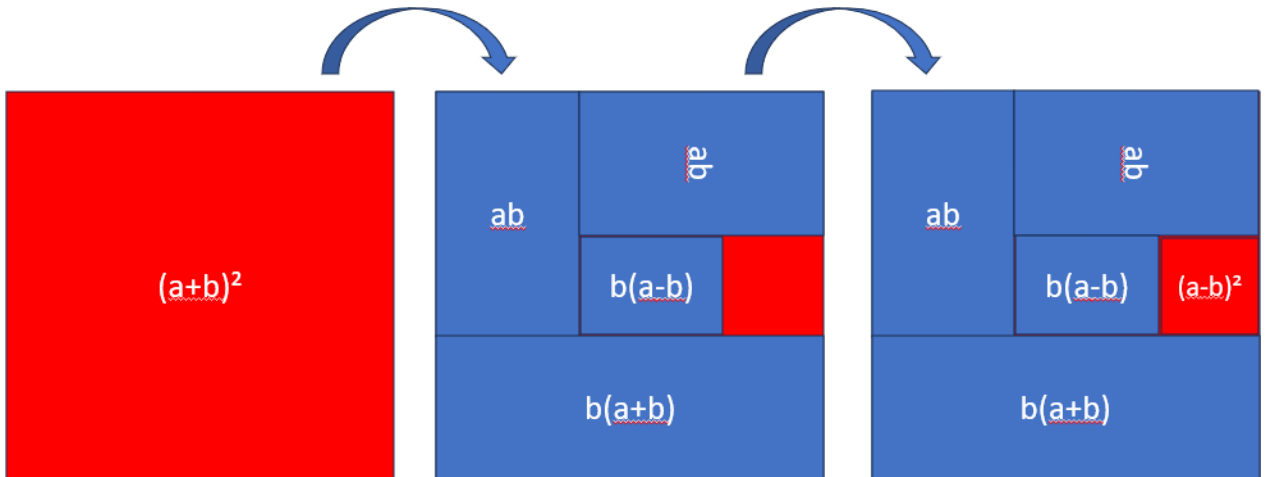
Figura B12: Representação geométrica de $-(a-b)^2$



Fonte: Diário do pesquisador 2024

$$-(a+b)^2 + 2ab + b(a+b) + b(a-b) \quad (\text{III})$$

Figura B13: Representação geométrica de $-(a-b)^2$

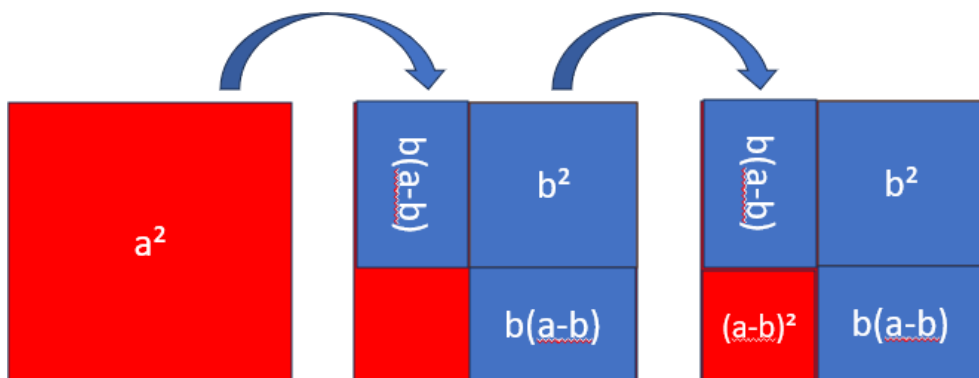


Fonte: Diário do pesquisador 2024

Para a letra (e), note que $b^2 - a^2 = -(a^2 - b^2)$, ou seja, queremos encontrar como solução um quadrado de área $a^2 - b^2$ de cor vermelha. Uma possível solução seria:

$$-a^2 + b^2 + b(a - b) + b(a - b)$$

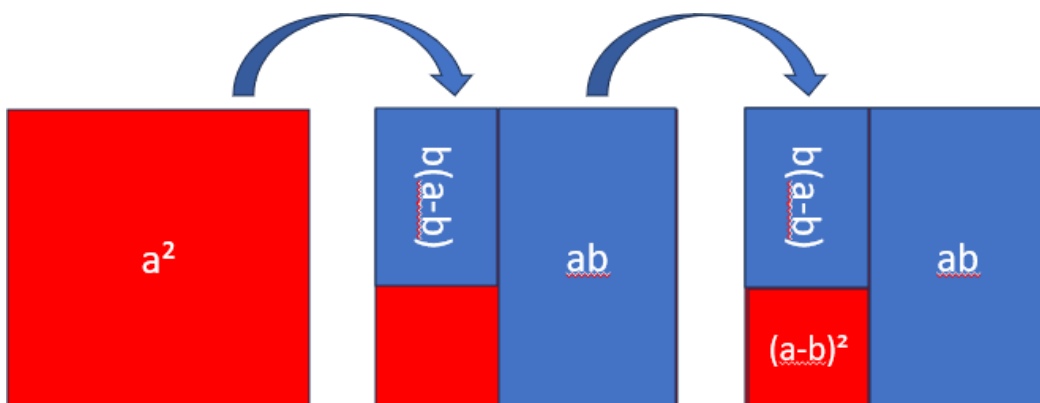
Figura B14: Representação geométrica de $b^2 - a^2$



Fonte: Diário do pesquisador 2024

Note ainda que, podemos encontrar também $-(a^2 - b^2) = -a^2 + (a - b)b + ab$ e geometricamente representada por:

Figura B15: Representação geométrica de $b^2 - a^2$



Fonte: Diário do pesquisador 2024

Vale ressaltar que, esses são apenas alguns dos possíveis resultados, podendo o estudante encontrar outras combinações.

Obs: As imagens apresentadas nos apêndices A e B representam o material confeccionado no software *power point* para melhor visualização de cores e das escalas entre o tamanho dos retângulos.

ANEXO A – RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE JOSÉ CARLOS VIEIRA DE SOUZA
RESUMO

Esse trabalho objetiva apresentar uma proposta de ensino para a introdução do estudo de Geometria Espacial buscando demonstrar que a utilização de materiais manipuláveis como recurso didático pode ser uma alternativa facilitadora da aprendizagem para a fixação dos conceitos primitivos da geometria, dos postulados e teoremas, das posições relativas entre pontos, retas, planos e do cálculo de distâncias. O desenvolvimento lança mão de uma sequência de atividades que visa garantir que os estudantes possam construir uma aprendizagem mais sistematizada, sendo estas divididas em quatro etapas.

Palavras-Chave: Geometria Espacial. Materiais Manipuláveis. Calculo de distância.

ANEXO B – RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE MARCIANO MAURO PAGLIARINI RESUMO

Com o intuito de desmistificar o estudo de Trigonometria, propõe-se fazer o estudo bibliográfico do seu surgimento e dos povos que deram suas contribuições, permitindo que ela se desenvolvesse ao longo do tempo. Aborda-se aqui algumas das formas de apresentar funções trigonométricas sob diferentes representações. Nesse sentido, é discutida a teoria de Raymond Duval, sobre os Registros de Representação Semiótica, que passaram a ser evidenciados nas duas últimas décadas. Tal fato é descrito a fim de evidenciar que o aprendizado de um objeto matemático só é possível quando o educando consegue visualizar o trânsito da informação matemática entre formas diferentes de representação. Para facilitar o trânsito de um objeto matemático entre as diferentes formas de representação, optou-se pela construção do material manipulável. Com o objetivo de obter a opinião de docentes referente a utilização do mesmo como ferramenta facilitadora do trânsito de informações de um objeto matemático, foi elaborada uma oficina. Nela demonstra-se que podemos visualizar diferentes relações trigonométricas de formas diferentes. Os envolvidos foram auxiliados na construção e instrução de uso do material manipulável. Com os dados coletados junto aos participantes dessa oficina, o pesquisador buscou testar a eficácia dessa metodologia de trabalho aplicando oficina semelhante a estudantes de segundo ano do Ensino Médio, obtendo bons resultados. Os resultados da pesquisa apontaram que, tanto docentes como discentes passaram a fazer cálculos e evidenciar relações trigonométricas na forma geométrica que, até então, eram conhecidas por alguns deles somente de forma algébrica.

ANEXO C – RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE LIDIANE GARCIA BRESSAN

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo tratar do uso dos materiais didáticos manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática, em específico a utilização do Algeplan no ensino de operações com polinômios e raízes de equações do 2º grau. Tal estudo partiu da ideia de que a maioria dos estudantes tendem a apresentar dificuldades em alguns conteúdos matemáticos e que a utilização de tais materiais pode auxiliar positivamente professores e estudantes nesse processo, propiciando uma abordagem de maneira participativa, clara e sucinta, e tornando o trabalho da matemática prazeroso e dinâmico. Deste modo, propõe-se uma metodologia que permita aos estudantes a construção do conhecimento com a mediação do professor desde o processo de elaboração dos materiais, até sua aplicação em sala de aula. Nesse foco, buscou-se aplicar e descrever dentre os métodos alternativos, o uso do material manipulativo do Algeplan, para auxiliar o ensino da Álgebra no 9º ano do Ensino Fundamental. Os participantes da pesquisa são 27 estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual pública da cidade de Rosário do Sul (RS). Diante do momento de pandemia que estamos vivenciando, o presente trabalho foi aplicado de forma remota, o que trouxe, durante o desenvolvimento das atividades, algumas dificuldades de interação com os estudantes. Constatou-se que a partir da aplicação das atividades com o Algeplan foi possível aos estudantes resgatarem habilidades matemáticas, trabalharem conceitos e formarem inferências, de um modo significativo. Espera-se, que o presente trabalho possa vir a servir de apoio aos colegas professores de matemática no seu trabalho diário.

Palavras-chave: Algeplan. Material Didático Manipulável. Ensino de Matemática. Polinômios. Completar Quadrados.

ANEXO D – RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE FERNANDA CAROLINE CYBULSKI RESUMO

A Geometria é uma área da Matemática prevista para ser ensinada em todos os níveis da Educação Básica brasileira. Sendo assim, torna-se fundamental compreender como a formação inicial de professores que ensinam matemática (PEM) tem trabalhado com essa temática. O objetivo desta pesquisa, qualitativa e de caráter documental, é mapear, descrever e discutir indicativos de geometria na formação inicial de PEM, presentes em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período 2009-2020. Para tanto, o corpus de análise foi constituído, com base em um mapeamento de dissertações e teses, oriundas de Programas de Pós-graduação brasileiros *stricto sensu*, das Áreas de Educação e Ensino, na plataforma digital do Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e no catálogo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, totalizando 18 trabalhos. Os resultados evidenciam que as pesquisas que investigam a formação inicial de PEM na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental têm como pontos de enfoque abordagens metodológicas para o ensino de geometria, conteúdos geométricos e aspectos da grade curricular dessa temática. Nessas formações, representações de figuras geométricas foram utilizadas para trabalhar geometria com a finalidade de identificar propriedades ou conceitos geométricos de forma perceptiva e visual. Esses trabalhos apontam que os conteúdos de geometria são trabalhados concomitantes com o “como ensinar” geometria e prevalece o uso de material manipulável. As pesquisas que investigaram contextos da formação inicial de professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio se propuseram a analisar estratégias associadas às aprendizagens dos futuros professores em geometria e relações estabelecidas, a partir de conhecimentos já constituídos por eles. Nesses contextos, representações de figuras geométricas foram utilizadas para trabalhar geometria, principalmente, com as finalidades de resolver situações problema e verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações. Essas representações de figuras geométricas, por vezes, foram associadas à Álgebra, à Aritmética ou às Medidas. Tecnologias digitais, como o software GeoGebra, foram os recursos mais utilizados para promover estratégias de aprendizagem em geometria na formação inicial desses futuros professores de Matemática, especialmente para momentos de provas e demonstrações. Além disso, conteúdos de Geometria Euclidiana predominaram nas pesquisas analisadas do corpus. Pierre van Hiele e Raymond Duval foram os autores, que mais embasaram teoricamente o corpus e, mesmo que se observe uma crescente presença de posições epistemológicas nas pesquisas, as

caracterizações de conhecimento/pensamento/raciocínio/saber geométrico ainda são incipientes, isto é, prevalece o uso arbitrário de tais termos, sem caracterizá-los ou utilizando-os, aparentemente, como sinônimos ou em sentidos de senso comum. As pesquisas analisadas sugerem que, no trabalho com geometria na formação inicial de PEM, sejam repensados aspectos, como os relacionados à organização da carga horária; à pertinência de disciplinas específicas; que geometria(s) deve(m) ser abordada(s) e com que finalidade(s); e qual o papel de representações de figuras geométricas para além de um apoio às demais áreas da Matemática.

Palavras-chave: ensino de geometria; pensamento geométrico; formação inicial de professores que ensinam matemática; mapeamento de dissertações e teses.

ANEXO E - RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE MÁRCIA REGINA SILVA BERBETZ RESUMO

O presente trabalho está inserido na linha de pesquisa Teorias e Práticas de Ensino na Educação Básica. Tem como objetivo de estudo analisar a utilização de um material manipulável tátil na perspectiva do Desenho Universal para a área visual, visando o ensino da Álgebra do Fundamental II em uma escola pública de Curitiba. Um produto, ambiente, programa ou serviço é concebido dentro do Desenho Universal se pode ser utilizado por todas as pessoas, não necessitando de um projeto específico conforme a necessidade especial, bem como, sem a necessidade de adaptação. Com isso, a pesquisa apresenta um material didático manipulativo tátil dentro da perspectiva do Desenho Universal para a Aprendizagem que contribua com a compreensão de conceitos matemáticos relacionados a polinômios num ambiente de sala de aula onde há um estudante com deficiência visual, para realizar, dessa forma, a sua inclusão. O aporte teórico possui como principais referências: Gabrilli (2016), Cast (2011; 2012), Lorenzato (2006; 2010), Ponte (2013), Nacarato (2005), Fiorentini e Miorin (1990) e Vygotsky (1993,1997). A metodologia da pesquisa caracteriza-se como qualitativa do tipo intervenção pedagógica, que utilizou como instrumentos: observação direta; gravação de áudio e vídeo; registro fotográfico; questionários; entrevista semiestruturada. O processo de construção e aplicação das atividades permeou reunião com pesquisadores e professora regente, com vistas à construção e adaptação do material manipulável tátil, denominado Placas Algébricas. Com esse material, por meio de atividades orientadas, foram produzidos dados que possibilitem a descrição de aspectos relativos à: Placas Algébricas na perspectiva do Desenho Universal para a área visual; as placas Algébricas como recurso promotor de aprendizagem em relação à interação do entre participante com deficiência visual e estudantes; como ferramenta mediadora no processo de ensino e aprendizagem; as contribuições do material manipulável tátil na perspectiva do Desenho Universal para atender as necessidades educacionais do participante com deficiência visual nas aulas de Matemática; a percepção da professora regente quanto ao uso das Placas Algébricas. As análises da pesquisa mostram que o uso das Placas Algébricas proporcionaram oportunidades flexíveis de uso e de aprendizagem por todos os estudantes, auxiliou a fixar conceitos vistos em séries anteriores e propiciou a visualização, a representação de conceitos e a sua própria construção. No processo percebeu-se o engajamento de todos os participantes que contribuíram para a inclusão do participante com deficiência visual durante as atividades. Desta forma, esta pesquisa contribui com a discussão acerca da real inclusão de estudantes com necessidades especiais, sobretudo estudantes com deficiência visual, na Educação Matemática Inclusiva.

Palavras-chave: Educação Básica; Ensino de Álgebra; Educação Inclusiva; Desenho Universal; Educação Matemática.

ANEXO F- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE MATEUS ANTÔNIO VARGAS FERRO
RESUMO

Esta dissertação vincula-se ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana de Santa Maria. A pesquisa tem como objetivo principal investigar em que medida a utilização do material manipulável pode contribuir para a aprendizagem significativa de conceitos de Álgebra para estudantes do nono ano do Ensino Fundamental. Os sujeitos da pesquisa foram seis estudantes de uma escola da rede privada do município de Santa Maria e os encontros aconteceram no turno inverso ao das aulas regulares. As ações foram organizadas em dois momentos distintos, inicialmente foi aplicado um teste diagnóstico que teve como objetivo identificar os subsunçores que os estudantes possuíam sobre a temática em questão. O segundo momento foi o desenvolvimento de uma sequência de atividades com o auxílio de materiais manipuláveis. A coleta de dados deu-se por meio dos registros das atividades dos estudantes e das observações feitas pelo professor. A teoria que norteia a pesquisa é a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (1978, 2003). Ao final do desenvolvimento das atividades, pode-se concluir que a construção dos conceitos ligados a Álgebra pode ser favorecida pelo uso de materiais manipuláveis, no entanto, salienta-se que o tempo de desenvolvimento das atividades foi um fator limitador, pois a temática requer um maior número de atividades e de tempo de estudo para que os estudantes possam (re) construir os conceitos ligados a esta área da Matemática.

Palavras-chave: Materiais Manipuláveis; Ensino Fundamental; Conceitos algébricos.

ANEXO G- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE NATALI ANGELA FELIPE RESUMO

Este estudo investigou as contribuições do Soroban dos Inteiros para a significação de números inteiros por estudantes cegos. Para tanto, foram realizados estudos bibliográficos referentes ao uso da perspectiva lógico-histórica e de nexos conceituais na significação de números inteiros e as necessidades de adaptações pedagógicas e metodológicas para estudantes cegos. Tais estudos alicerçaram a construção do material didático manipulável e a apresentação de encaminhamentos para seu uso a fim de possibilitar a compreensão dos números inteiros. Nesse sentido, para analisar as práticas desenvolvidas mediante ao uso do material didático manipulável foi adotada a pesquisa-intervenção como abordagem de pesquisa. As intervenções foram realizadas em duas escolas públicas, ambas realizadas individualmente em salas no Atendimento Educacional Especializado-AEE. A pesquisa foi desenvolvida com uma aluna cega e um estudante com baixa visão, estudantes matriculados em escolas regulares, respectivamente, no oitavo e sétimo ano do ensino fundamental. Por fim, foi realizada uma análise qualitativa, interpretativa e descritiva da intervenção e dos encaminhamentos pré-estabelecidos que evidenciou que o material, fiel aos nexos conceituais dos chineses em relação aos inteiros, permitiu que os estudantes, cego e de baixa visão, representassem e manuseassem quantidades negativas e positivas e percebessem pela visão ou tato as operações em movimentos opostos transformando ou mantendo a natureza das quantidades em estudo. As situações criadas pela pesquisadora, pelas tarefas e pelo uso do material é que possibilitaram a introdução do significado das quantidades negativas também como faltas e que fizeram os estudantes utilizarem os mesmos indícios matemáticos da Dinastia Han nos nexos conceituais da civilização chinesa de fluência e contradição; do zero como centro de simetria e equilíbrio (do ponto de vista geométrico), como convergência e anulação de opostos (móvel, do ponto de vista algébrico), de semelhança, simultaneidade e os critérios de equivalência; do cálculo com palitos coloridos. Assim, constatou-se que as movimentações e registros auxiliaram na atribuição e validação dos significados das operações de adição, subtração, na regra de sinais para a multiplicação e divisão de números inteiros pelos participantes da pesquisa. Dessa forma, acreditamos que o uso do Soroban dos Inteiros, mediada por tarefas de cunho investigativo e prático também pode potencializar a compreensão dos números inteiros em outros contextos, como para estudantes videntes no ensino regular.

Palavras-chaves: Soroban. Números inteiros. Material didático manipulável. Estudantes cegos.

ANEXO H- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE DAYANE MOARA COUTINHO RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo avaliar uma sequência didática apoiada em materiais manipuláveis e atividades on-line para trabalhar as operações de multiplicação e divisão de polinômios, a fim de favorecer a aprendizagem destes conceitos. Para tanto, procurou-se responder a seguinte questão de pesquisa: “Trabalhar com estações envolvendo Material Manipulável (MM) e atividades on-line favorece a aprendizagem dos conceitos de multiplicação e divisão de polinômios?”. As atividades foram aplicadas em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental com 8 estudantes, de uma escola da rede particular de ensino, do município de Campo Mourão, Paraná, durante o mês de junho de 2018. As tarefas foram pensadas para um ambiente de Ensino Híbrido e analisadas com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval. Foram utilizadas resoluções, avaliações, questionários, bem como diálogos registrados num diário de campo, como instrumentos de coleta de dados. A análise dos dados indicou que as atividades contribuíram para que os estudantes chegassem a propriedades e algoritmos, algumas inesperadas, como a dedução do método das chaves para divisão de polinômios. As respostas dos estudantes mostraram ânimo para realizar as atividades e argumentaram que com o MM conseguiram aprender de forma mais dinâmica e com mais facilidade. Além disso, percebeu-se dificuldade com a representação algébrica e língua natural, tendo, em algumas questões, melhores resultados com a representação figural. Após a aplicação e análise de dados, as atividades foram reformuladas, e compõem o produto educacional relativo a essa dissertação, intitulado “Atividades para Multiplicação e Divisão de Polinômios a partir da área de retângulos” (Apêndice C desta dissertação), destinado a professores interessados em trabalhar esse assunto de modo mais dinâmico.

Palavras-chaves: Álgebra. Operações com polinômios. Ensino Fundamental. Ensino Híbrido. Material Manipulável. Teoria de Registros de Representação Semiótica.

ANEXO I- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE ALEX SANDER MARTINS DE CAMARGO

RESUMO

Este trabalho teve o propósito de desenvolver um produto educacional na forma de proposta de ensino para a Álgebra das séries do ensino médio. Mais especificamente, propor os estudos de conteúdos algébricos por meio da utilização do material manipulativo concreto denominado de Algeblocks. Dado o suporte teórico metodológico das tarefas exploratórias-investigativas propostas por João Pedro da Ponte e seus colaboradores, além das representações figurais de Efraim Fischbein, foram planejadas quatro tarefas, envolvendo os seguintes conteúdos: função de 2º grau; conceitos de polígonos regulares; resolução, análise e discussão de sistemas lineares com duas equações e duas variáveis utilizando escalonamento; abordagem de conceitos prismas (área da superfície e volume) e relação de Euler. Para cada uma das tarefas, foi apresentado um possível roteiro de resolução, articulado com os referenciais teóricos apresentados nesta pesquisa. Em termos de potencialidades do material didático destacamos que é um recurso relevante para o estabelecimento de registros de representação, tanto geométrico, como algébrico; versátil para a utilização em conteúdo do ensino fundamental e médio. Uma reflexão sobre as limitações do material é que ele não assegura a validade de demonstrações matemáticas numa investigação matemática.

Palavras-chave: Algeblocks. Conceitos figurais. Representações figurais. Tarefas exploratório-investigativas.

ANEXO J- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE MICAELA MARIA DOS SANTOS

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo compreender as contribuições do uso do material manipulável presente na prática pedagógica do professor de matemática com estudantes surdos nos anos finais do Ensino Fundamental. A partir do estado da arte foi possível identificar que ainda são poucos os trabalhos que abordam esse tema, uma possibilidade de desenvolver experiências pedagógicas com abertura criativa numa direção inclusiva. Diante disso, foi realizado um estudo sobre a Educação Inclusiva (SILVA; BAZANTE, 2021, PEREIRA, 2014) buscando problematizar os avanços e dificuldades no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes surdos na sala de aula regular, assim como sobre os fatores que muitas vezes acabam acarretando na negação dos processos que por vezes fortalecem a exclusão desses estudantes, seja pela dificuldade que os professores de matemática, ainda, sentem em adaptar na prática pedagógica propostas a partir de uma perspectiva diferenciada, ou até pela falta de formação continuada com agendas teórico-práticas. A pesquisa tem como pergunta quais as contribuições que a utilização do material manipulável traz para o ensino de matemática com estudantes surdos incluídos em salas regulares a partir da prática pedagógica do professor? E como objetivos específicos: (i) mapear as escolas da Rede Pública Municipal da cidade de Caruaru que têm professores de matemática com estudantes surdos incluídos na sala de aula regular; (ii) identificar quais as práticas que os professores de matemática utilizam para estudantes surdos numa realidade de sala de aula; e (iii) analisar as contribuições do uso do material manipulável para a prática pedagógica do professor de matemática com estudantes surdos. Frente a essa problemática, pergunta e objetivos, desenhei para o caminho metodológico uma abordagem qualitativa de pesquisa caracterizada como exploratória e descritiva (OLIVEIRA, 2013; AMADO, 2014). Para coleta e produção dos dados utilizamos questionário, observação em sala de aula e entrevista semiestruturada. O tratamento dos dados produzidos foi realizado a partir do método de análise de conteúdo fundamentado em Bardin (1977) e Franco (2005) com a categorização temática. Encontra-se, portanto, que a falta de políticas públicas que disponibilizam os direitos da pessoa surda em sala de aula, como a presença de um intérprete na comunicação entre professor/estudante, além da falta de formação desses profissionais, principalmente em sua formação inicial, compromete o desejo do processo de inclusão do ensino e da aprendizagem desses estudantes. Foi encontrada ainda a evidência do desejo de que na formação continuada os elementos que não se fizeram presentes na formação inicial devam ser possibilitados e assim proporcionarem aos professores o caminho efetivo de uma prática

pedagógica com uso de materiais manipuláveis como facilitadores de um ensino de matemática inclusivo.

Palavras-chave: ensino de matemática; prática pedagógica; estudantes surdos; materiais manipuláveis.

ANEXO K- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE STEPHANY MARIA PEREIRA DA SILVA

RESUMO

A utilização de materiais manipuláveis para o ensino de Estatística se constitui em possibilidade de acesso a representações de dados por estudantes cegos por meio da exploração tátil. O objetivo geral desta pesquisa de mestrado é analisar conhecimentos para o ensino de média aritmética para estudantes cegos mobilizados com o auxílio de um material manipulável. Em termos específicos busca-se investigar a viabilidade de um material manipulável para o ensino de média aritmética para estudantes cegos a partir das experiências de brailistas e estudantes cegos; analisar conhecimentos de professores de matemática para o ensino de média aritmética para estudantes cegos em classes inclusivas; e analisar conhecimentos dos docentes em planejamento de aula para o ensino de média aritmética para estudantes cegos com a utilização do material manipulável. As contribuições teóricas de Ball, Thames e Phelps e as de Iddo Gal fundamentaram as discussões a respeito, respectivamente, dos conhecimentos docentes e da perspectiva do letramento estatístico no ensino da média aritmética. A pesquisa iniciou com a realização de entrevistas semiestruturadas com duas brailistas, uma normovisual e uma cega, e duas estudantes matriculadas no 9º ano do Ensino Fundamental, uma normovisual e uma cega. As entrevistas aconteceram de forma individual, e os questionamentos envolveram aspectos relativos à análise do material manipulável elaborado. Numa segunda etapa, entrevistou-se dois professores, um com experiência com estudantes cegos e outro sem. Na terceira etapa, esses professores desenvolveram um planejamento para o ensino de média aritmética para estudantes cegos com a utilização do material. De modo geral, todos os participantes consideraram o material manipulável adequado para o ensino de média aritmética para estudantes cegos. Eles também apresentaram considerações quanto a sua estrutura com o foco nos aspectos que potencializariam a usabilidade. As entrevistas com as brailistas evidenciaram a mobilização de conhecimentos gerais a respeito do ensino e dos estudantes cegos, sendo apresentados aspectos a serem considerados no ensino destes estudantes. Nas entrevistas com as estudantes, identificaram-se conhecimentos sobre o algoritmo da média aritmética, mas dificuldades na resolução de situações envolvendo as propriedades conceituais propostas por Strauss e Bichler. Os professores por vezes mobilizaram mais de um tipo de conhecimento simultaneamente, sobretudo: Conhecimento do Conteúdo e do Currículo, Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, e Conhecimento do Conteúdo e do Estudante. Com a utilização do material manipulável a mobilização do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino foram mais realçados. Nos planejamentos de aulas, os professores mobilizaram o Conhecimento do Conteúdo e do

Currículo e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino. A mobilização do Conhecimento Horizontal do Conteúdo pareceu requerer mais experiência na docência. A pesquisa oferece indícios da viabilidade do material manipulável proposto para o ensino de média aritmética para estudantes cegos, à medida que evidencia também a mobilização de conhecimentos docentes a partir de seu uso.

Palavras-chave: educação inclusiva; estudantes cegos; material manipulável; média aritmética; letramento estatístico.

ANEXO L- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE PEDRO ITALLO VAZ
RESUMO

Nesta dissertação será apresentado um breve relato sobre a história da Educação de Jovens e Adultos (EJA), o currículo da EJA e uma proposta para o ensino da condição de existência de triângulos para esse público. O intuito dessa proposta de ensino é visar a integração dos estudantes, produzir significado para o que o discente estuda e, conseqüentemente, promovendo ações que propiciem oportunidades de motivação para que os formandos se sintam mais entusiasmados para estudar matemática utilizando atividades lúdicas. Além disso, podemos alcançar, com essa didática, as quatro vertentes para a aprendizagem matemática com significado: experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar.

Palavras-chave: Construtivismo, Matemática, Triângulos com macarrão, Existência de triângulos.

ANEXO M- RESUMO DA DISSERTAÇÃO DE LAIS SCORZIELLO FEITOSA DA SILVA RESUMO

Diversos educadores citaram a importância de o ensino proceder do manipulável ao abstrato, por isso destaca-se, nesta pesquisa, a importância do uso de materiais didáticos manipuláveis (MDM) no ensino de matemática. Afirma-se que o uso correto de MDM promove uma aprendizagem com significado para o estudante, além de desenvolver nos sujeitos o raciocínio lógico, crítico e científico. No entanto, ressalta-se que o MDM por si só não fará com que os estudantes compreendam os conceitos matemáticos pretendidos e, para que isso ocorra, a mediação do docente se torna importante. Ademais, para o uso de MDM na sala de aula, é fundamental que o professor conheça o material escolhido e saiba organizar uma dinâmica que promova o ensino. Ao considerar que é importante o uso de MDM no ensino e a eficácia desses recursos depende mais do educador do que do próprio material, evidencia-se a pertinência de cursos de formação continuada (FC) que auxiliem os docentes nesse processo. Por isso, desenvolveu-se um curso de FC com professores que ensinam matemática no município de Piúma-ES, envolvendo o uso de MDM no ensino. Diante do exposto, o objetivo da pesquisa, de abordagem qualitativa e participante, foi investigar se um curso de FC relacionado ao ensino, mediante o uso de MDM, contribui no que os professores que ensinam matemática em escolas situadas no município de Piúma-ES conhecem e pensam. O curso de FC desenvolvido ocorreu entre agosto e outubro de 2023, com 13 participantes. Os instrumentos de produção de dados foram questionários, rodas de conversas e diário de campo. Identificou-se que os professores participantes já utilizavam alguns MDM, reconheciam a importância do uso desses recursos para seus estudantes, mas desejavam conhecer outros materiais. Mesmo apresentando alguns obstáculos referentes ao uso de MDM, como falta de recursos, necessidade de mais tempo para planejamento e turmas com número grande de estudantes, os professores utilizaram alguns materiais durante a FC com as suas turmas e se surpreenderam com os resultados positivos. Constataram-se algumas (res)significações de pensamentos referentes ao uso de MDM no ensino de matemática. Alguns participantes perceberam a importância dos MDM para promover diálogos no momento da construção de conhecimentos, outros continuaram utilizando os materiais. Além disso, identificaram-se mudanças de pensamentos quanto à forma de uso de MDM, de maneira que as potencialidades dos materiais fossem mais aproveitadas. Portanto, compreende-se a necessidade de provimento de cursos de FC no âmbito do uso de MDM no ensino de matemática, bem como a melhoria do ambiente de trabalho do professor.

Palavras-chave: Formação continuada; Material didático manipulável; Matemática.