RAPHAEL DOS SANTOS MESQUITA

# O ENSINO DE GEOMETRIA ATRAVÉS DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA ABORDAGEM NO 6º E 7º ANOS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

2026

RAPHAEL DOS SANTOS MESQUITA

# O ENSINO DE GEOMETRIA ATRAVÉS DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA ABORDAGEM NO 6º E 7º ANOS

"Dissertação apresentada como parte das exigências para obtenção do título de *Mestre em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação Básica*, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro."

Orientador: Prof. Rafael Brandão de Rezende Borges

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2026

RAPHAEL DOS SANTOS MESQUITA

# O ENSINO DE GEOMETRIA ATRAVÉS DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA ABORDAGEM NO 6º E 7º ANOS

"Dissertação apresentada como parte das exigências para obtenção do título de *Mestre em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação Básica*, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro."

Aprovada em 14 de Janeiro de 2026.

Documento assinado digitalmente
gov.br NANCY BAYGORREA CUSIHUALLPA
Data: 14/04/2026 10:57:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Profª. Nancy Baygorrea Cusihuallpa**
D.Sc. - UENF

**Prof. Nelson Machado Barbosa**
D.Sc. - UENF

Documento assinado digitalmente
gov.br LUIS HUMBERTO GUILLERMO FELIPE
Data: 14/04/2026 10:27:38-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Prof. Luis Humberto Guilhermo Felipe**
D.Sc. - UENF

Documento assinado digitalmente
gov.br REBECA COSTA DIAS ARAUJO
Data: 14/04/2026 11:16:02-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Profª. Rebeca Costa Dias**
D.Sc. - SEDU-RJ

Documento assinado digitalmente
gov.br RAFAEL BRANDAO DE REZENDE BORGES
Data: 14/04/2026 12:46:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Prof. Rafael Brandão de Rezende Borges**
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

*Dedico este trabalho aos meus filhos, Júlia e Bento, e minha esposa, Laís, que sempre me incentivaram, apoiaram e nunca mediram esforços para me ajudar no que fosse preciso para a realização deste mestrado.*

# Agradecimentos

Primeiro quero agradecer a Deus que pelo dom da vida e por me permitir, que em meio a tantas dificuldades e desafios, pudesse concluir esta etapa tão importante em minha vida.

Aos meus pais, Dalton Sérgio e Rosana Mesquita, pela criação e ensinamentos que me tornaram a pessoa que sou hoje.

Aos meus irmãos, Manuela, Dalton e Weliton, por todo apoio e incentivo.

Aos meus filhos, Júlia e Bento, por serem a minha maior determinação, sem eles eu não teria conseguido.

À minha esposa, Lais Louvain, que desde o início me apoiou e me ajudou para que eu pudesse concluir o curso.

Aos professores do PROFMAT/UENF por todo o apoio e atenção durante o curso e por todo saber que foi transmitido.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rafael Brandão, por ter me ajudado e apoiado ao longo dessa jornada e ter acreditado no meu potencial.

E a todos os colegas de curso PROFMAT - turma de 2023.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

“A Geometria existe por toda parte.
É preciso, porém, olhos para vê-la,
inteligência para compreendê-la
e alma para admirá-la.”

Johannes Kepler

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes por meio de construções geométricas realizadas com régua, transferidor, esquadros, compasso e o software GeoGebra. A metodologia adotada fundamenta-se na Teoria dos Níveis de van Hiele, que propõe uma progressão nos níveis de pensamento geométrico, sendo a sequência didática elaborada com o intuito de favorecer o avanço dos alunos nesses níveis. Para a coleta de dados, foram aplicados dois testes — um diagnóstico inicial e outro após a intervenção — com o objetivo de identificar os níveis de pensamento geométrico dos estudantes. A partir dos resultados do teste inicial, foi elaborada uma sequência de aulas e atividades envolvendo construções de pontos, retas, ângulos, retas paralelas, retas perpendiculares e bissetrizes no plano. A proposta foi desenvolvida com alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental de duas escolas públicas. A análise dos dados, considerando a aplicação das atividades e a reaplicação do teste, indicou que, apesar das dificuldades apresentadas, houve indícios de melhoria na compreensão dos conceitos geométricos, possibilitando a progressão de parte dos estudantes nos níveis de van Hiele. Observou-se, ainda, aumento no interesse e na participação dos alunos durante a sequência didática, evidenciando as potencialidades de práticas pedagógicas que promovem o envolvimento ativo no processo de aprendizagem. Conclui-se que o uso articulado de construções geométricas e recursos digitais pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico, especialmente nos níveis iniciais, embora os resultados indiquem a necessidade de intervenções mais prolongadas para avanços mais consistentes.

**Palavras-chaves**: Construções geométricas, GeoGebra, Teoria de van Hiele, Ensino de Geometria.

# Abstract

This study aims to analyze the development of students' geometric thinking through geometric constructions using a ruler, protractor, set squares, compass, and the GeoGebra software. The methodology is based on the van Hiele Theory, which proposes a progression through levels of geometric thinking. In this context, the didactic sequence was designed to support students' advancement across these levels. Data collection was carried out through the application of two tests — an initial diagnostic test and a post-intervention test — in order to identify students' levels of geometric thinking. Based on the results of the initial test, a sequence of lessons and activities was developed, involving constructions of points, lines, angles, parallel lines, perpendicular lines, and angle bisectors in the plane. The study was conducted with 6th and 7th grade students from two public schools. The analysis of the data, considering both the implementation of the activities and the post-test results, indicated that, despite the difficulties encountered, there were signs of improvement in students' understanding of geometric concepts, allowing part of them to progress through the van Hiele levels. An increase in students' interest and participation was also observed throughout the sequence, highlighting the potential of instructional approaches that promote active engagement in the learning process. It is concluded that the combined use of geometric constructions and digital tools can contribute to the development of geometric thinking, particularly at the initial levels, although the results suggest that longer interventions are necessary to achieve more consistent progress.

**Key-words**: Geometric constructions, GeoGebra, van Hiele Theory, Geometry teaching.

# Lista de ilustrações

# Lista de quadros

# Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|---|---|
| a.C. | Antes de Cristo |
| BNCC | Base Nacional Comum Curricular |
| E.M. | Escola Municipal |
| GDI | Geometria Dinâmica e Interativa |
| o.p.v. | Ângulos Opostos pelo Vértice |
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

A Geometria é uma ferramenta extremamente importante no nosso cotidiano, constituindo um dos eixos fundamentais do ensino de Matemática na Educação Básica. Seus conceitos se aplicam em diversas áreas de conhecimento como nas engenharias, na arquitetura, na astronomia, entre outras. Sendo essencial para o desenvolvimento do raciocínio espacial, da visualização, da argumentação lógica e da compreensão do espaço físico e social. Alguns autores destacam a importância de se desenvolver o pensamento geométrico, visto que:

> (...) sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (Lorenzato, 1995, p. 5)

Documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), ressaltam a importância do ensino de Geometria como meio para a construção de conceitos matemáticos significativos, Segundo Lorenzato (1995),

> A Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz. (Lorenzato, 1995, p. 6–7)

Segundo Oliveira (2015), o ensino de construções geométricas está sendo esquecido pelos ensinos Fundamental e Médio das escolas brasileiras, gerando nos alunos uma dificuldade em Geometria. Aprender Geometria utilizando as construções geométricas desenvolve no aluno a capacidade de planejar, projetar e/ou abstrair. Ainda segundo Oliveira (2015), é grande a importância das construções geométricas pois serve como base para a Geometria.

Sabendo da importância deste ensino torna-se obrigatório o ensino de Geometria em todas as etapas da educação básica, abrangendo alunos da Educação Infantil até o Ensino Médio. Os conteúdos são organizados a fim de que haja uma continuidade na aprendizagem dos temas abordados.

Foi por passar por frustrações e dificuldades como estas durante o ensino da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental e por assistir ao baixo rendimento e não compreensão dos conteúdos por parte dos estudantes que decidi realizar este trabalho na área de Geometria. Optei por trabalhar as construções geométricas utilizando ferramentas físicas — régua, transferidor, esquadros e compasso — e virtuais — *software* de geometria dinâmica (Geogebra).

O uso de tecnologias digitais potencializa as possibilidades de pesquisa, tornando o aprendizado mais realista, trazendo o estudante para um papel de protagonista do seu aprendizado e o professor ficando como mediador.

Diante desse cenário, esta dissertação tem como objetivo investigar o desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do Ensino Fundamental II a partir da aplicação de uma sequência didática fundamentada na Teoria de van Hiele.

A pesquisa foi desenvolvida em duas escolas públicas, envolvendo turmas do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. A escolha da utilização de ferramentas, físicas e virtuais, se deu ao fato de que régua, transferidor, esquadro e compasso ser um material de fácil acesso para alunos. E das escolas escolhidas terem aparelhos digitais disponíveis para utilização dentro da sala de aula.

Para atingir esse objetivo, foi elaborada e aplicada uma sequência de atividades que buscou promover através das construções geométricas o desenvolvimento do pensamento geométricos dos alunos. Espera-se que após a citada aplicação os alunos evoluam nos níveis propostos por van Hiele. A investigação caracteriza-se como uma pesquisa de abordagem qualitativa, com elementos quantitativos, utilizando como instrumentos de coleta de dados testes diagnósticos (inicial e final), observações das aulas e análise das produções dos estudantes.

Este trabalho está dividido em oito capítulos. O Capítulo 2 aborda uma breve histórico da Geometria na humanidade com o objetivo de sustentar sua importância no contexto escolar. O Capítulo 3 trata das construções geométricas básicas que são competências da BNCC, para os níveis de ensino do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. No Capítulo 4 é apresentado o GeoGebra, *software* de geometria dinâmica, e suas ferramentas. No Capítulo 5, apresenta-se o referencial teórico no qual essa dissertação se baseia: a Teoria de van Hiele (Van Hiele, 1986) e como as construções geométricas auxiliam no avanço nos níveis de raciocínio geométrico. No Capítulo 6, abordam-se os aspectos metodológicos: contextualizando e caracterizando os participantes, indicando o tipo de pesquisa, fundamentado a proposta e descrevendo a sequência didática. No Capítulo 7 está descrita a implementação da sequência didática constituída pela Teoria de van Hiele e pelas atividades que foram elaboradas e desenvolvidas dentro de sala de aula. Neste capítulo também foram feitas as análises destas atividades. No Capítulo 8 estão as conclusões e sugestões para os próximos trabalhos. O trabalho se encerra com um apêndice que contém as atividades aplicadas e um anexo contendo o teste de van Hiele.

# Capítulo 2

# Um Breve Histórico da Geometria

A Matemática é a ciência das quantidades e das formas em que são calculáveis e mensuráveis, que originou-se por volta de 2.400 a.C., decorrente das necessidades primárias do homem primitivo que costumava contar com o uso de ossos, pedras e dedos para controlar suas atividades.

Todas as civilizações da nossa história humana desenvolveram meios próprios de compreensão do mundo e de integração harmônica com o mesmo. Realmente todas as grandes civilizações tiveram profundos conhecimentos na estrutura geral da natureza, no modo mais adequado de equilibrar a atividade e na vida humana com o meio ambiente em que se encontrava.

A necessidade de o homem relacionar as suas atividades cotidianas com os acontecimentos naturais foi primordial para o desenvolvimento da Matemática, por meio de descobertas e teoremas defendidos ao longo do tempo por diversos estudiosos, na Mesopotâmia, Egito, Grécia, Índia e Oriente Médio.

Com a Geometria não foi diferente, todos os postulados e teoremas não surgiram de uma só vez. Os primeiros conhecimentos geométricos foram desenvolvidos pelas necessidades cotidianas do homem.

Segundo Calabria (2013, p. 5), "A Geometria é uma das áreas da Matemática mais antigas e foi utilizada pelas primeiras civilizações em atividades do dia a dia para resolver problemas na medição de áreas de terras". De fato, a palavra grega γεωμετρία (geometria) é composta por γεω (geo), que significa "terra", e μετρία (metria), que significa "medida".

## 2.1 A Geometria na Babilônia

Na Babilônia, segundo Eves (2004), a Geometria se relacionava intimamente com a mensuração prática. Exemplos concretos mostram que os babilônios do período de 2.000 a 1.600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles, da área do trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto- retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal. Os babilônios também sabiam que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais. A marca principal da Geometria babilônica é seu caráter algébrico, assim como a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais.

## 2.2 A Geometria no Egito Antigo

No Egito, as marcas deixadas pelas águas do Rio Nilo após as enchentes fizeram os egípcios desenvolverem métodos para calcular a área de um quadrado, de um retângulo e de um trapézio, com objetivo de demarcarem suas terras

> A cobrança de imposto foi, talvez, o primeiro imperativo para o desenvolvimento da Geometria, pois embora teoricamente o faraó possuísse todas as terras e bens, na realidade os templos e até os indivíduos em particular possuíam imóveis. O governo determinava os impostos da terra baseado na altura da enchente do ano e na área de superfície das propriedades. (Mlodinow, 2004, p. 12).

A vida no Egito dependia totalmente das terras fertilizadas pelo Nilo e, por isso, era importantíssimo para a economia egipciana saber exatamente a quem pertenciam os terrenos, onde era o começo e fim de cada terreno.

> O conhecimento geométrico da civilização egípcia era grande: construíram grandes obras arquitetônicas, como as pirâmides, além de construírem barcos, barragens e canais. Também se encontra Geometria nas construções de suas estátuas, pórticos, templos, muralhas e lagos (Calabria, 2013, p. 6).

Eves (2004) aponta que o Papiro de Rhind (Figura 1), um dos primeiros documentos históricos de caráter matemático de que se tem notícia, é um manuscrito que apresenta os conhecimentos matemáticos dos antigos egípcios. Esse documento descreve as operações de adição, multiplicação e divisão, além de apresentar indícios do uso de frações pelos egípcios e seu emprego no método de falsa posição e na solução de problemas de determinação de áreas. Portanto, questões relacionadas às frações e ao cálculo de áreas eram importantes para a arrecadação de impostos, enquanto as relacionadas às medidas de capacidade essenciais ao controle dos depósitos. Conforme o Papiro de Rhind, o Problema 49 refere-se ao cálculo da superfície de um retângulo de comprimento 10 e largura 2. O Problema 51 mostra o cálculo da área de um triângulo de altura 13 e de base 4. O Problema de número 52, mostra o cálculo da área de um trapézio,com base maior 6, a base menor 4 e a altura 20.

Figura 1 – Papiro de Rhind

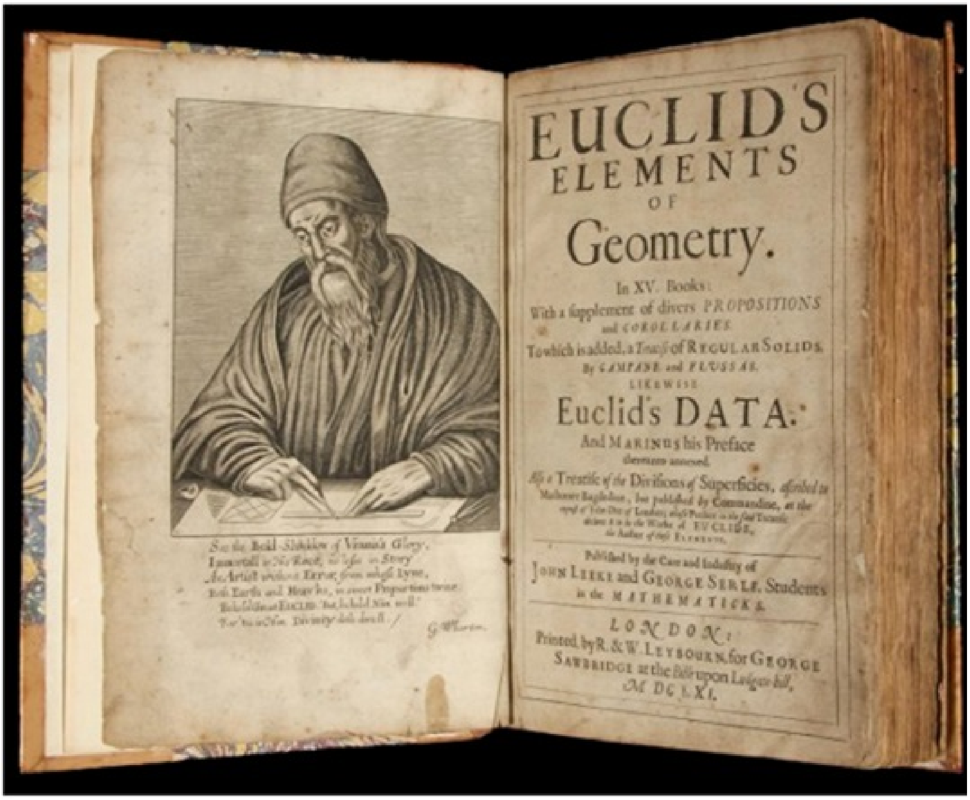
Fonte: Reis (2018).

## 2.3 A Geometria na Grécia Antiga e "Os Elementos"

A civilização grega teve grande importância no desenvolvimento da Geometria. Da Grécia antiga temos aquele que é chamado de o pai da Geometria, Euclides (ca. 330–ca. 270 a.C.). A maior de todas as suas contribuições à Matemática, bem como à ciência em geral, foi a obra Os Elementos (Figura 2) escrita por volta de 300 a.C. Nela, ele apresentou, sistematicamente, os conhecimentos de Geometria plana de seu tempo — hoje chamada de Geometria euclidiana — muitos dos quais frutos de seu próprio trabalho.

> No livro 1 dos Elementos de Euclides, inicia-se o estudo da geometria plana, hoje conhecida como Geometria Euclidiana Plana em sua homenagem. (Santos; Viglioni, 2011, p. 14)

Figura 2 – Livro “Os Elementos”, de Euclides




Fonte: AFC Educação (2020).

De acordo com Papa Neto (2017), o livro Os Elementos é composto por 13 volumes, que abordam algumas definições, postulados, proposições e provas matemáticas sobre geometria, números, dos incomensuráveis e da geometria espacial. Segundo Ávila (2003), os quatro primeiros livros de Euclides são dedicados à Geometria. Toda teoria é dada junto com as construções geométricas, o que mostra sua importância no desenvolvimento e entendimento da Matemática e mais especificamente da Geometria. Ainda segundo Ávila (2003), nos três primeiros postulados, Euclides enuncia construções geométricas:

1. Pede-se que se desenhe uma reta de um ponto qualquer até outro ponto, (ou seja, que se trace uma reta por dois pontos);

2. Que se produza uma linha reta finita continuamente em uma linha reta (ou seja, que se prolongue uma linha reta continuamente segundo uma reta);

3. E que com qualquer centro e distância se descreva um círculo (ou seja, que se descrevam o círculo conhecendo um ponto e uma distância).

Os Elementos compreendem praticamente tudo o que temos da Matemática grega desde o seu início até a aquele momento. Nos tempos de Euclides, não havia a preocupação pedagógica dos dias de hoje, então não sabemos se o objetivo era o ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático — a sorte foi que ele alcançou os dois objetivos. Os Elementos foram muito usados no aprendizado da Matemática por mais de dois milênios (Ávila, 2001).

Para Eves (2004, p. 178), talvez mais importante que o conteúdo de Os Elementos seja a maneira formal como se apresenta esse conteúdo. “De fato, Os Elementos de Euclides tornaram-se o protótipo da forma matemática moderna”.

## 2.4 O Ensino de Geometria no Brasil

No Brasil, segundo Oliveira (2015), D. João VI funda a Academia Real Militar da Corte, em 4 de dezembro de 1810, sendo a primeira instituição destinada a um curso completo de Ciências Matemáticas, de Ciências de Observação, da Física, Química, Mineralogia, Metalurgia e História Natural. Sendo assim, ficou a cargo das escolas do Exército, da Marinha e das Engenharias ensinar a Matemática de nível superior, pois antes de 1934 não havia instituições com essa responsabilidade.

De acordo com Zuin (2002), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática sugerem como um retorno da Geometria não apenas com os instrumentos euclidianos, mas permitindo também, o uso dos outros instrumentos como, régua graduada, esquadro e transferidor.

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) nos orienta a utilizar diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica. Estando presente na BNCC em suas habilidades do 6º ano, 7º ano e 8º ano do ensino fundamental, a existência de orientações para a utilização de régua, compasso, transferido e esquadros para a construção de retas paralelas, retas perpendiculares, polígonos e ângulos, como podemos verificar nos Quadros 1 e 2.

Quadro 1 – BNCC – Geometria – 6º ano do fundamental

| **OBJETOS DE CONHECIMENTO** | **HABILIDADES** |
|---|---|
| Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados | **(EF06MA16)** Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono. |
| Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas) | **(EF06MA17)** Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial. |
| Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados | **(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.<br>**(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.<br>**(EF06MA20)** Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles. |
| Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas | **(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais. |
| Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e *softwares* | **(EF06MA22)** Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou *softwares* para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.<br>**(EF06MA23)** Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.). |

Fonte: Brasil ([2018?]).

Quadro 2 – BNCC – Geometria – 7º ano do fundamental

| **OBJETOS DE CONHECIMENTO** | **HABILIDADES** |
|---|---|
| Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem | **(EF07MA19)** Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.<br>**(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem. |
| Simetrias de translação, rotação e reflexão | **(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. |
| A circunferência como lugar geométrico | **(EF07MA22)** Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. |
| Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal | **(EF07MA23)** Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de *softwares* de geometria dinâmica. |
| Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos | **(EF07MA24)** Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.<br>**(EF07MA25)** Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.<br>**(EF07MA26)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados. |
| Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero | **(EF07MA27)** Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.<br>**(EF07MA28)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado. |

Fonte: Brasil ([2018?]).

# Capítulo 3

# A Geometria com Régua e Compasso

Neste capítulo, apresentaremos os fundamentos básicos da Geometria Plana necessários no desenvolvimento deste trabalho.

## 3.1 A Ideia de Ponto, Reta e Plano

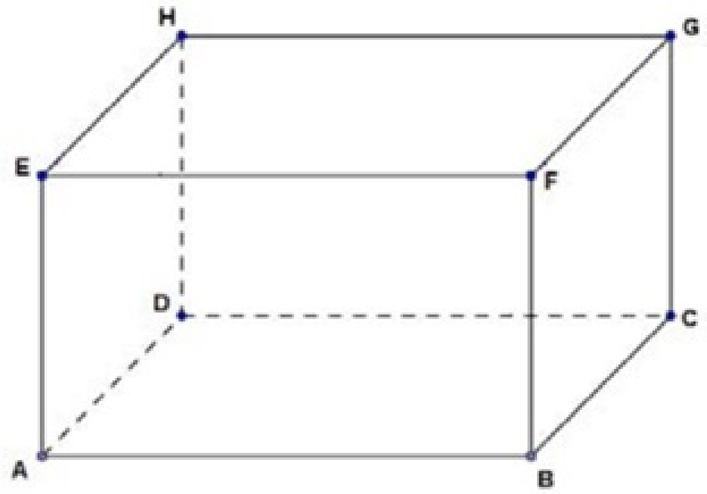
Na Geometria, existem elementos que são abstratos. O ponto, a reta e o plano, por exemplo, não têm uma forma concreta; podemos apenas imaginá-los. Por isso, eles são denominados *conceitos primitivos da Geometria*. De acordo com Euclides (2009, p. 97), as definições de ponto, reta e plano são:

**Definição 3.1** (Definições 1–7 de Euclides)**.** *Definimos ponto, reta e plano através das seguintes noções:*

1. *Ponto é aquilo de que nada é parte.*
2. *E linha é comprimento sem largura.*
3. *E extremidades da linha são pontos.*
4. *E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.*
5. *E uma superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.*
6. *E extremidades de uma superfície são retas.*
7. *Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.*

Na Figura 3, podemos observar a representação de um poliedro. Neste, os vértices $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ e $H$ são o que chamamos de pontos, e esses devem ser representados por letras maiúsculas do alfabeto.

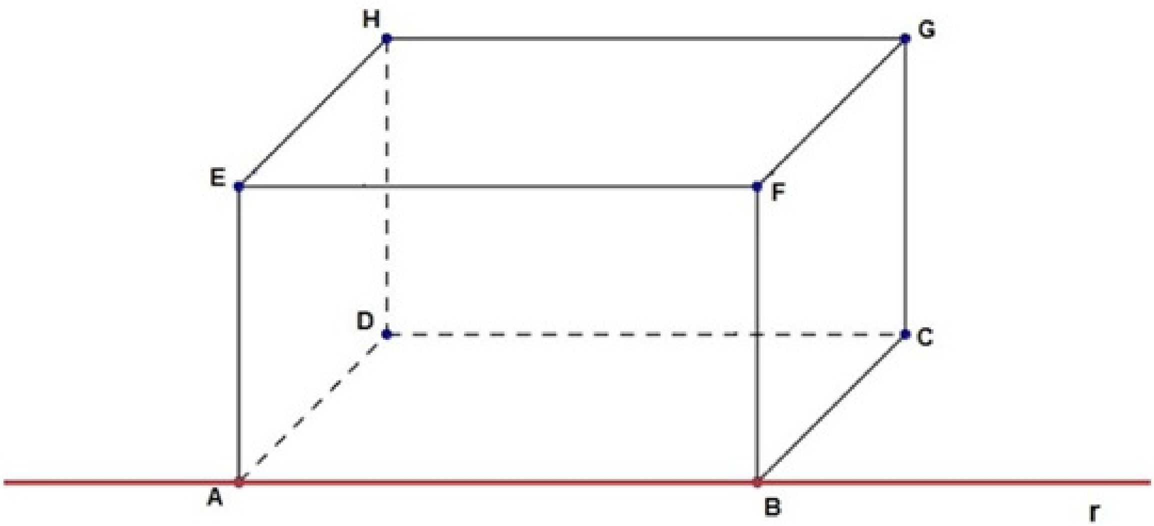
Figura 3 – Poliedro




Fonte: elaboração própria.

Na Figura 4, podemos imaginar que cada aresta do poliedro está contida em uma reta. As retas não têm espessura e são ilimitadas nos dois sentidos. As retas podem ser indicadas por uma letra minúscula do nosso alfabeto ou por dois pontos contidas nela. Ao representá-las, desenhamos apenas parte delas.

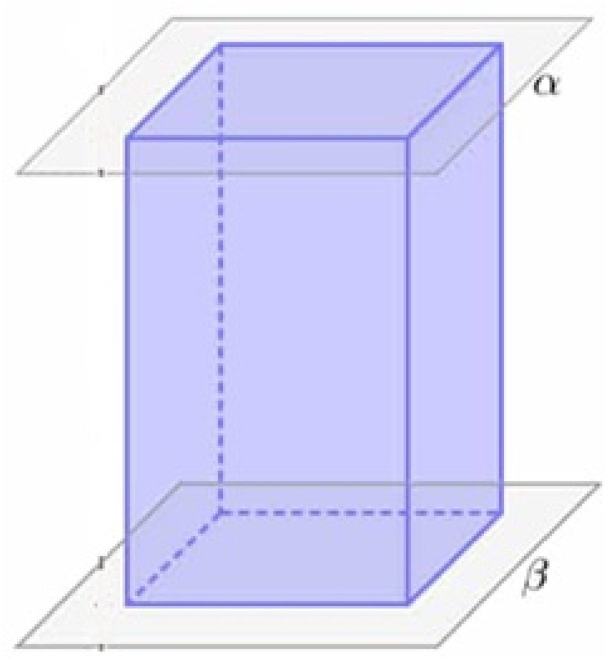
Figura 4 – Reta AB




Fonte: elaboração própria.

Na Figura 5, podemos também imaginar que as faces do poliedro estão contidas em planos. Os planos também não têm espessura e são ilimitados em todas as direções. Os planos podem ser indicados por uma letra minúscula do alfabeto grego ($\alpha$, $\beta$, $\phi$, $\pi$, etc.). Ao representá-los, desenhamos apenas parte deles.

Figura 5 – Planos $\alpha$ e $\beta$




Fonte: elaboração própria.

## 3.2 Semirretas e Segmento de Reta

De uma reta podemos obter semirretas e segmentos de reta.

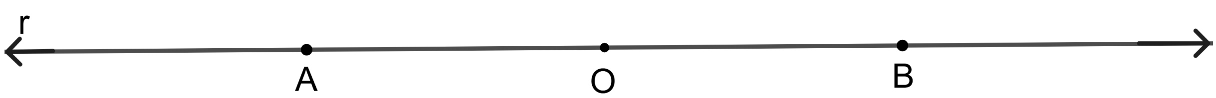
### 3.2.1 Semirreta

Um ponto $O$ em uma reta $r$ determina duas semirretas em $r$. Esse ponto é chamado de *origem* das semirretas.

**Definição 3.2.** *Semirreta é uma parte da reta que possui uma origem, mas não existe um ponto em que ela termine.*

Na Figura 6, a semirreta que tem origem em $O$ e passa pelo ponto $A$ é indicada por $\overrightarrow{OA}$. E a semirreta de origem em $O$ e que passa por $B$ é indicada por $\overrightarrow{OB}$.

Figura 6 – Exemplos de semirreta




Fonte: elaboração própria.

### 3.2.2 Segmento de Reta

Considere os pontos $A$, $B$ e $C$ da reta $r$ e os pontos compreendidos entre eles.

**Definição 3.3.** *Segmento de reta é um pedaço finito da reta, isto é, ele tem um início e fim.*

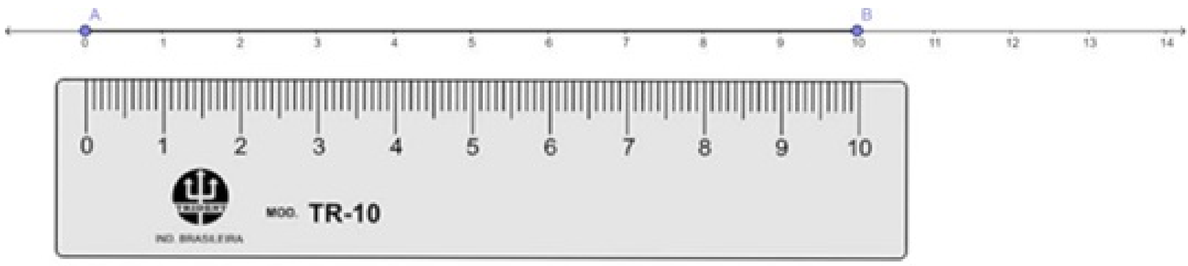
O segmento de reta $\overline{AB}$ é o conjunto de pontos formados pelo ponto $A$, pelo ponto $B$ e por todos os pontos da reta compreendidos entre $A$ e $B$, sendo demonstrado na Figura 7, o segmento na cor vermelha. Podemos observar também o segmento $\overline{BC}$, na cor lilás.

Figura 7 – Exemplos de segmentos de reta


Fonte: elaboração própria.

Na Figura 8, usando uma régua graduada, exibimos como associar um número real positivo a um segmento qualquer.

Figura 8 – Régua graduada



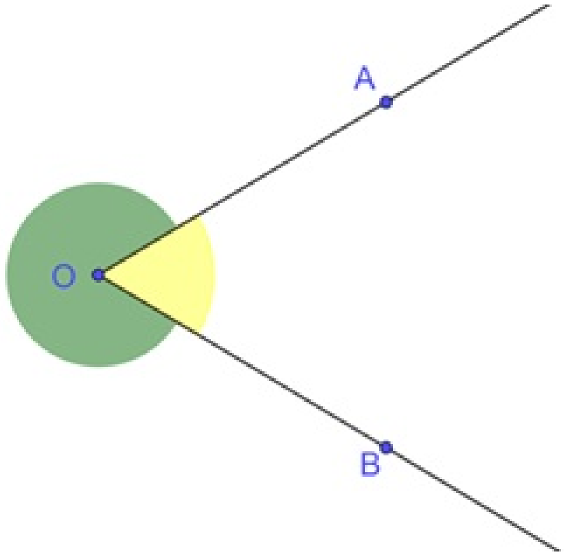

Fonte: elaboração própria.

## 3.3 Ângulos

De acordo com Gay e Silva (2018, p. 204), a definição de ângulo "é a união de duas semirretas de mesma origem em um plano com uma das regiões determinadas por elas". As semirretas são os lados do ângulo, e a origem delas é o vértice do ângulo.

Observando a Figura 9, vemos que as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ separam o plano que as contém em duas regiões, uma região menor (amarela) e uma região maior (verde).

Figura 9 – Ângulos



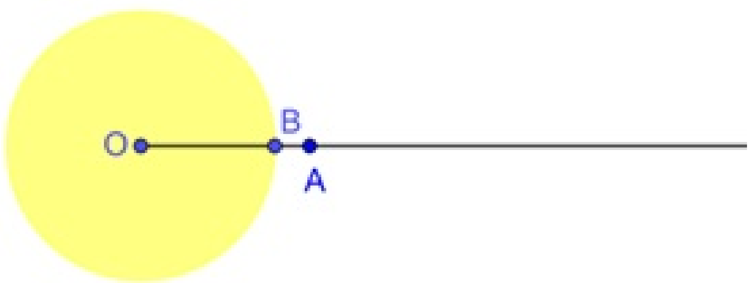

Fonte: elaboração própria.

Indicamos um ângulo por $A\widehat{O}B$ ou $B\widehat{O}A$ ou, simplesmente, $\widehat{O}$. As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, de mesma origem, são os lados do ângulo. A origem $O$ é o vértice do ângulo.

Existem várias formas de medir ângulos, cada uma adequada para diferentes situações e necessidades. As unidades mais comuns são o grau e radiano. Também existem inúmeros instrumentos utilizados para a medição de ângulos e os mais comuns são: transferidor, goniômetro, esquadro, prumo e teodolito. Neste trabalho, a unidade de medida de ângulo utilizada será o grau (°) e o instrumento usado será o transferidor.

Vimos que a rotação de uma semirreta em torno de um ponto de origem descreve um ângulo. Se essa rotação for de uma volta completa, como na Figura 10, então o ângulo terá medida igual a 360°, sendo chamado de ângulo completo.

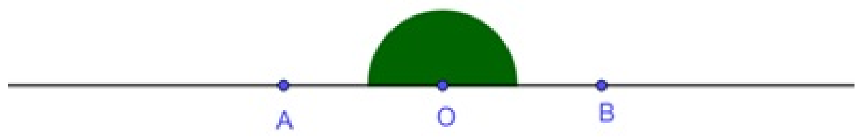
Figura 10 – Ângulo completo




Fonte: elaboração própria.

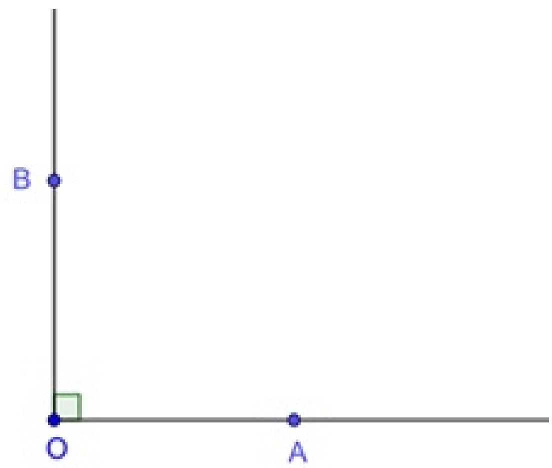
Quando a rotação for de 1/2 volta, como na Figura 11, o ângulo terá medida igual a 180° e será chamado de ângulo raso. Se a rotação for de 1/4 de volta, como na Figura 12, sua medida será igual a 90°, sendo chamado de ângulo reto. Por último, quando não houver giro, como na Figura 13, o ângulo terá medida igual a 0° e será denominado ângulo nulo.

Figura 11 – Ângulo raso




Fonte: elaboração própria.

Figura 12 – Ângulo reto




Fonte: elaboração própria.

Figura 13 – Ângulo nulo


Fonte: elaboração própria.

Existem ainda os submúltiplos do grau que são o minuto (representado por ’) e o segundo (representado por ”). Um minuto é 1/60 de 1°, ou seja, 1° é igual a 60’. Um segundo é 1/60 de 1’, ou seja, 1’ é igual a 60”.

Para medir ângulos em grau, utilizando um transferidor, devemos primeiro coincidir o centro do transferidor com o vértice do ângulo, depois a linha do transferidor que indica zero grau deve estar alinhada com um dos lados do ângulo. Assim, a medida do ângulo, a ser lida nas marcas numeradas do transferidor, estará indicada pelo outro lado do ângulo.

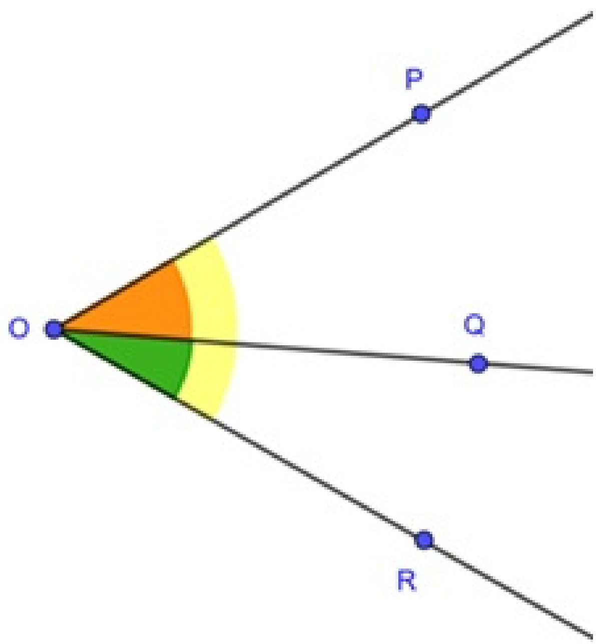
O ângulo pode ainda ser classificado, quanto à sua medida, como ângulo agudo, quando sua medida está entre 0° e 90°, ou como ângulo obtuso, quando sua medida está entre 90° e 180°.

Dois ângulos serão chamados de congruentes quando a medida da região compreendida entre duas semirretas que tem a mesma origem for igual nos dois. São chamados de ângulos consecutivos, dois ângulos que possuem o mesmo vértice e tem um lado em comum. Dois ângulos consecutivos que não pontos internos comuns são denominados ângulos adjacentes.

Serão chamados de ângulos complementares dois ângulos que tiverem a soma das suas medidas igual a 90°. E serão chamados de suplementares aqueles que tiverem a soma de suas medidas igual a 180°.

Na Figura 14 temos que os ângulos $P\hat{O}Q$ e $Q\hat{O}R$, $P\hat{O}Q$ e $P\hat{O}R$, $Q\hat{O}R$ e $P\hat{O}R$ são ângulos consecutivos, pois possuem, respectivamente, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OR}$ como lado comum. Por outro lado, os ângulos $P\hat{O}Q$ e $Q\hat{O}R$ não possuem pontos internos em comum. Como são consecutivos segue que são ângulos adjacentes.

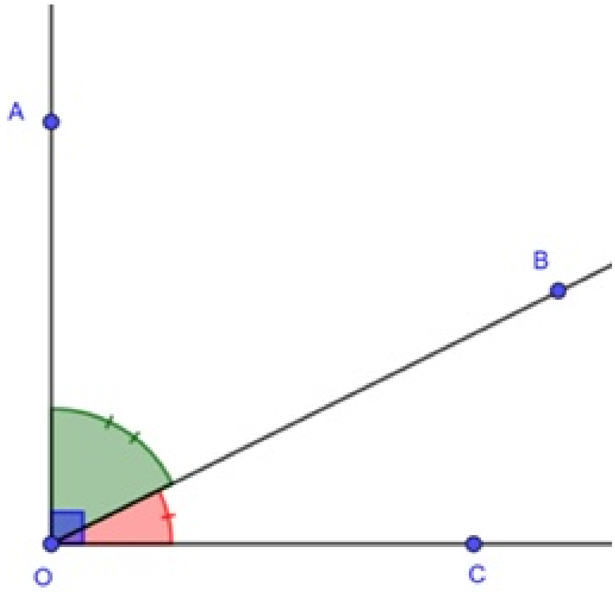
Figura 14 – Ângulos consecutivos e adjacentes




Fonte: elaboração própria.

Na Figura 15, os ângulos $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ são complementares, pois a soma deles é igual a 90°. É possível também dizer que $A\widehat{O}B$ é o complemento de $B\widehat{O}C$ e vice-versa.

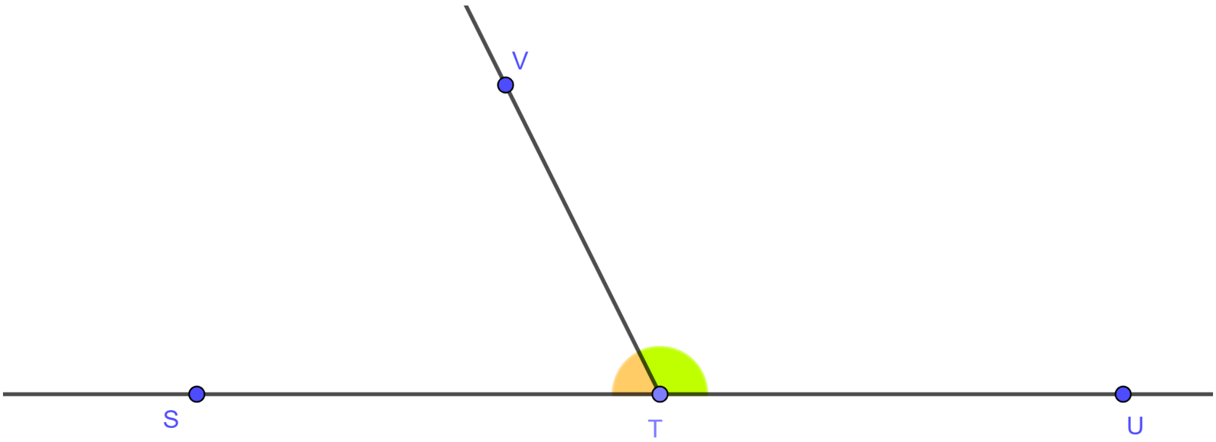
Figura 15 – Ângulos complementares




Fonte: elaboração própria.

Podemos observar na Figura 16 que os ângulos $S\widehat{T}V$ e $V\widehat{T}U$ são suplementares, pois a soma de suas medidas é igual a 180°. Logo, é possível dizer que $S\widehat{T}V$ é o suplemento de $V\widehat{T}U$ e vice-versa.

Figura 16 – Ângulos Suplementares



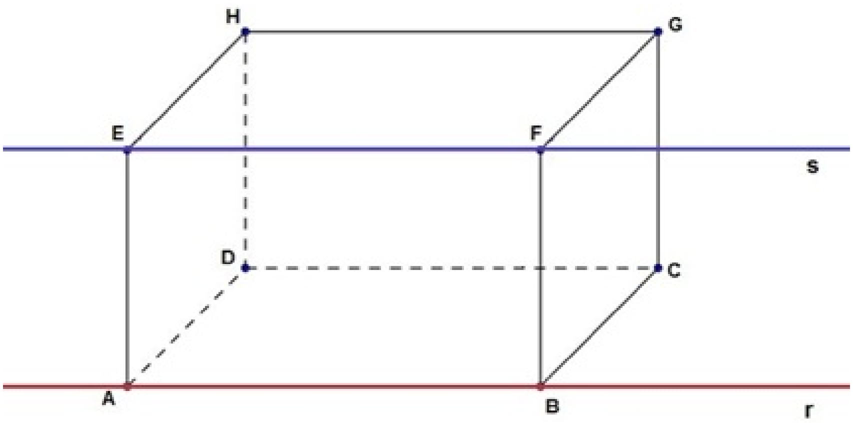

Fonte: elaboração própria.

## 3.4 Posição Relativa Entre Duas Retas no Plano

### 3.4.1 Retas Paralelas

Duas retas de um plano são paralelas quando não têm pontos em comum e a distância entre elas permanece constante. Podemos observar um exemplo na Figura 17, onde as retas $r$ e $s$, que contém os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ respectivamente, são paralelas.

Figura 17 – Retas paralelas

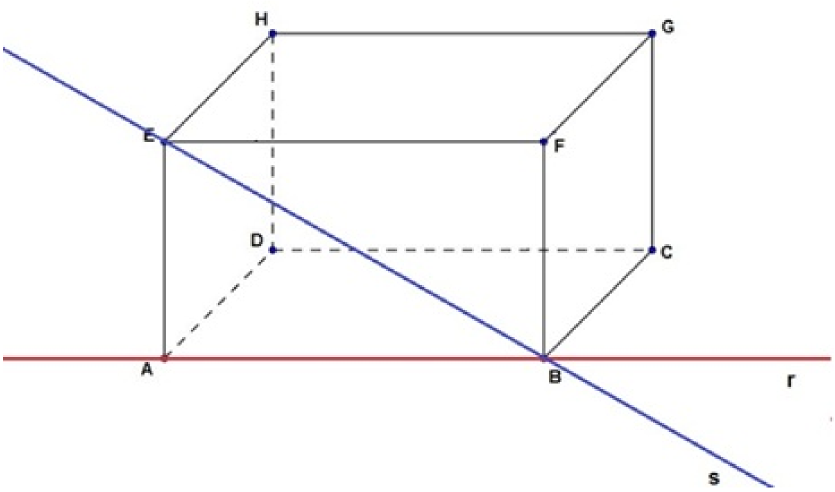



Fonte: elaboração própria.

### 3.4.2 Retas Concorrentes

Duas retas de um plano são concorrentes quando têm apenas um ponto em comum. Na Figura 18, podemos observar que o ponto $B$ pertence às retas $r$ e $s$ e que esse é o único ponto comum às duas retas. Sendo assim, dizemos que $r$ e $s$ são concorrentes.

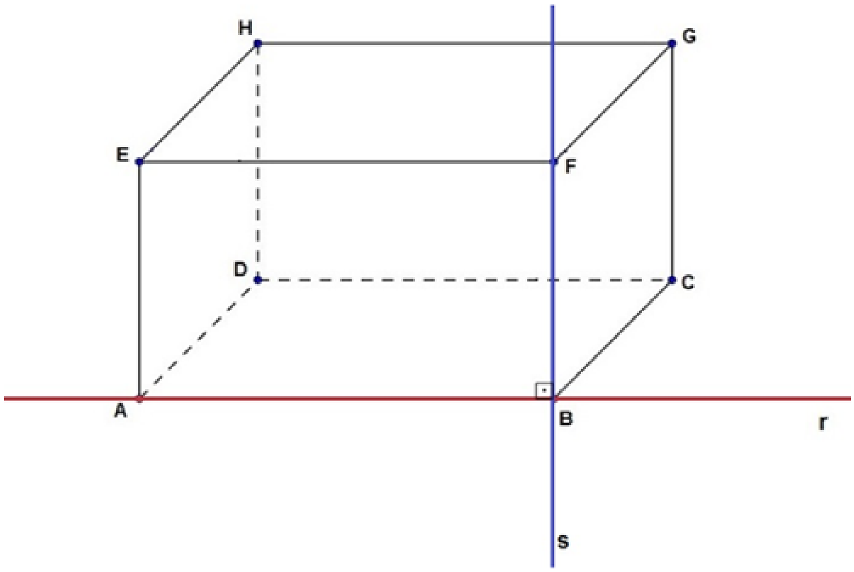
Figura 18 – Retas concorrentes




Fonte: elaboração própria.

Quando o ângulo formado pelas duas retas tem medida igual a 90°, dizemos que as retas são perpendiculares (Figura 19).

Figura 19 – Retas perpendiculares




Fonte: elaboração própria.

Duas retas concorrentes determinam ângulos opostas pelo vértice (abreviamos o.p.v.). Segundo Giovanni Júnior e Castrucci (2018), "dois ângulos são chamados opostos pelo vértice quando os lados de um forem prolongamentos dos lados do outro, e vice-versa". Uma propriedade importante dos ângulos o.p.v. é que eles são congruentes, ou seja, apresentam rotações com a mesma abertura. A demonstração dessa propriedade é simples e baseada no fato de os ângulos $A\widehat{O}C$ e $D\widehat{O}A$ serem suplementares, ou seja, sua soma é igual a 180°. Assim como $A\widehat{O}C$ e $C\widehat{O}B$ também são ângulos suplementares cuja soma é igual a 180°. Logo, temos que:

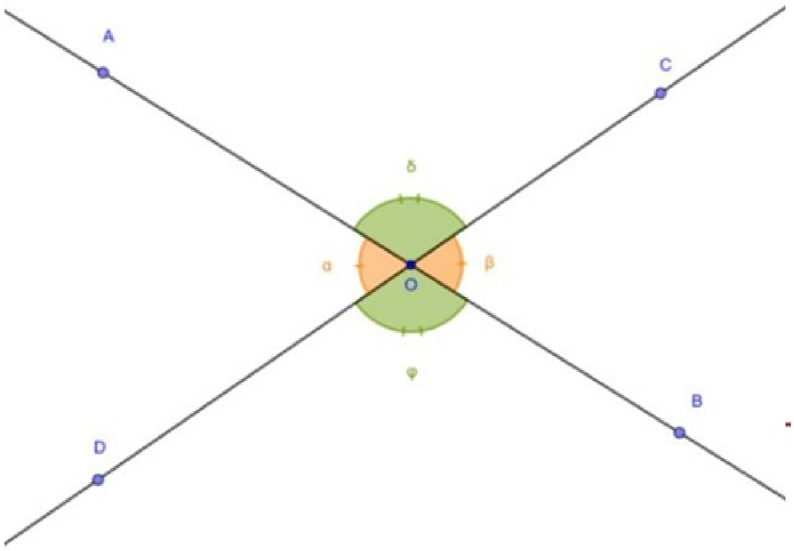
$$A\widehat{O}C + D\widehat{O}A = 180^\circ = A\widehat{O}C + C\widehat{O}B. \tag{3.1}$$

Isto implica que

$$D\widehat{O}A = C\widehat{O}B, \tag{3.2}$$

como queríamos demonstrar. Portanto, verificamos que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes (Figura 20).

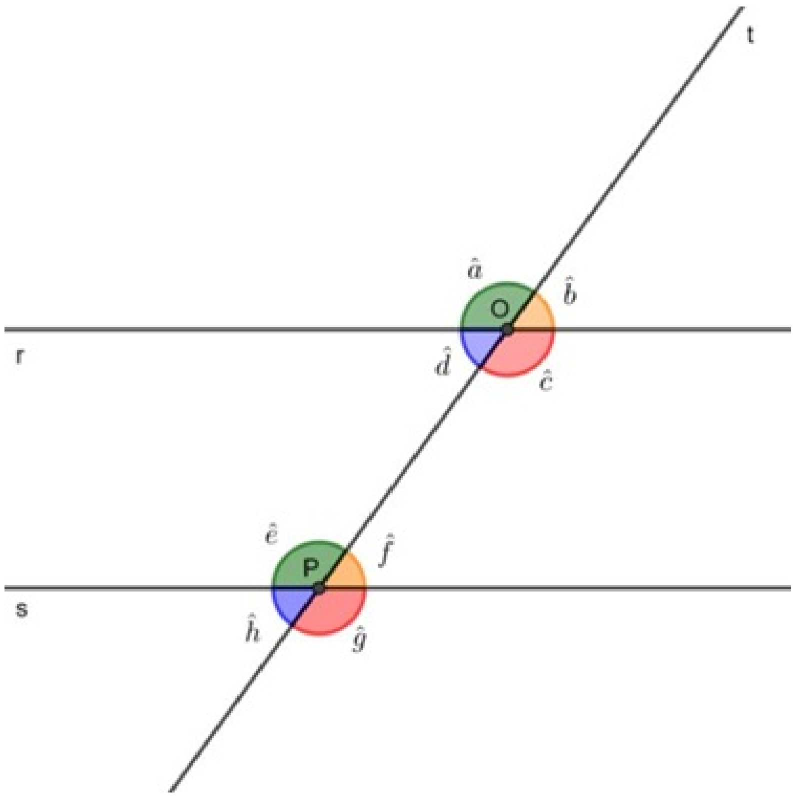
Figura 20 – Ângulos opostas pelo vértice




Fonte: elaboração própria.

Na Figura 21, temos que as retas paralelas $r$ e $s$ são cortadas por uma transversal $t$. Conforme observamos nessa figura, a reta $t$ corta as retas $r$ e $s$, respectivamente, nos pontos $O$ e $P$ e determinam oito ângulos.

Figura 21 – Ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal




Fonte: elaboração própria.

As retas paralelas $r$ e $s$ dividem o plano em duas regiões: uma região interna, ou seja, entre as retas, e uma região externa. A reta $t$, transversal a $r$ e $s$, também divide o plano em duas regiões, uma à direita de $t$ e outra à esquerda. A reta $r$ intercepta a reta $t$ no ponto $O$, formando os ângulos $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ e $\widehat{d}$, enquanto a reta $s$ intercepta a reta $t$ no ponto $P$ e forma os ângulos $\widehat{e}$, $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ e $\widehat{h}$.

De acordo com a posição de cada ângulo, eles são denominados: ângulos correspondentes, ângulos alternos e ângulos colaterais.

Os ângulos correspondentes são ângulos que estão situados no mesmo semiplano determinado pela transversal e situados em regiões diferentes determinadas pelas retas paralelas, ou seja, um interno e o outro externo.

Os ângulos alternos internos estão em semiplanos distintos determinado pela transversal e situados entre as duas retas paralelas.

Os ângulos alternos externos estão em semiplanos distintos determinado pela transversal e estão situados na região exterior as duas retas paralelas.

Os ângulos colaterais internos são os ângulos que estão situados no mesmo semiplano determinado pela transversal e na região compreendida entre as duas retas paralelas.

Os ângulos colaterais externos são os ângulos que estão situados no mesmo semiplano determinado pela transversal e na região externa as duas retas paralelas.

Para Gay e Silva (2018, p. 88), "os ângulos correspondentes, determinados por duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, são congruentes". Em outras palavras, os ângulos correspondentes são ângulos que possuem a mesma medida. Essa afirmação junto com o fato de os ângulos opostos pelo vértice serem congruentes produzem as seguintes igualdades: $\widehat{a} = \widehat{c} = \widehat{e} = \widehat{g}$ e $\widehat{b} = \widehat{d} = \widehat{f} = \widehat{h}$.

A partir das igualdades acima concluímos que os ângulos alternos internos e alternos externos são congruentes, assim como os ângulos colaterais internos e colaterais externos são suplementares.

## 3.5 Construções Geométricas

Segundo Marca, Biesford e Bennemann (2016), as Construções Geométricas foram desenvolvidas pelos gregos e repassadas através dos tempos como uma forma de resolver problemas geométricos e até algébricos. Isso se dá pelo fato de que, através das Construções Geométricas, torna-se mais fácil de visualizar as propriedades das figuras envolvidas na resolução.

O desenvolvimento das Construções Geométricas com régua e compasso teve início na Grécia, servindo de ferramenta para o desenvolvimento da Geometria. Segundo Wagner (2007), as Construções Geométricas permaneceram imunes ao tempo, diferentemente de outros campos da Matemática que se desenvolveram ou foram modificados, e são tão úteis hoje como na antiguidade, para a compreensão das propriedades geométricas das figuras.

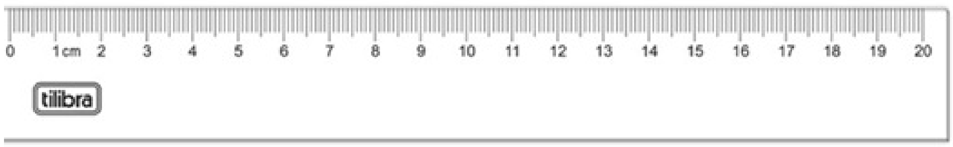
### 3.5.1 Instrumentos

Serão enunciados agora os instrumentos usados nas Construções Geométricas.

1. A Régua

   A régua é usada exclusivamente para ligar dois pontos e construir retas, semirretas ou segmentos de reta. Essa régua pode ser graduada ou não. Normalmente as réguas que os alunos utilizam são graduadas em milímetros e centímetros (Figura 22).

   Figura 22 – Exemplo de régua

   Fonte: Tilibra Express ([ca. 2025]).

2. O Compasso

   O compasso é um instrumento com muitas utilidades em desenho geométrico. Entre elas estão: c6onstrução de circunferências, arcos, ângulos, transporte de ângulo e segmentos. Ele possui duas hastes: uma chamada ponta seca, onde encontramos uma ponta metálica e na outra encontra-se o grafite que deve estar sempre apontado. As duas hastes do compasso devem ter o mesmo tamanho (Figura 23).

   Figura 23 – Exemplo de compasso

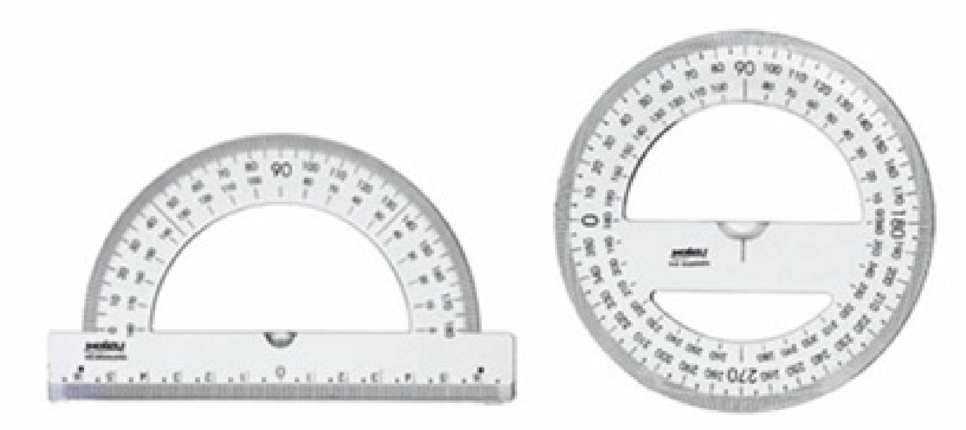
   
   

   Fonte: A Casa das Artes ([ca. 2025]).

3. O Transferidor

   Existem dois tipos de transferidor: um de meia volta ou 180° e o outro de uma volta ou 360° como mostra a Figura 24. Esses instrumentos são utilizados para medir ângulos e auxiliar em suas construções.

Figura 24 – Exemplos de transferidores



Fonte: Dunorte Office ([ca. 2025]).

4. Os Esquadros

   Há dois tipos de esquadros como se pode observar na Figura 25, um deles possui os seguintes ângulos 45°, 45° e 90° (esse esquadro é comumente chamado de esquadro de 45° ou ainda isósceles), o outro possui ângulos de 30°, 60° e 90° (sendo esse chamado de esquadro de 60° ou ainda escaleno).

Figura 25 – Exemplos de esquadros

Fonte: Gênesis Suprimentos ([ca. 2025]).

Os esquadros são utilizados para traçar segmentos perpendiculares ou paralelos e alguns ângulos.

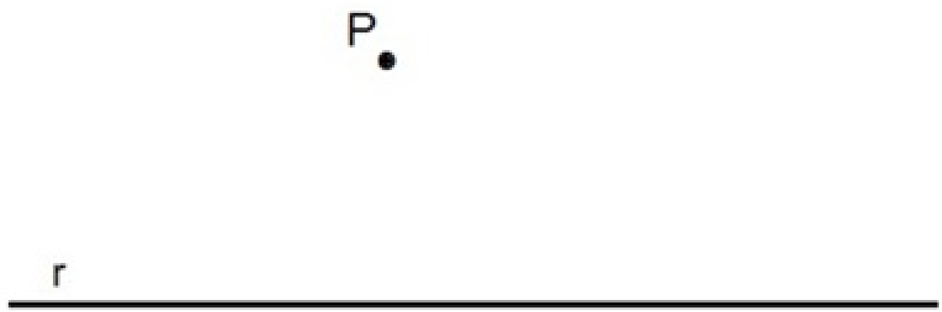
### 3.5.2 Retas Paralelas e Perpendiculares

Nesta seção vamos demonstrar a construção de retas paralelas e perpendiculares utilizando os instrumentos descritos anteriormente.

#### 3.5.2.1 Com Régua e Compasso

1. Dados, no plano, uma reta $r$ e um ponto $P$, não pertencente a $r$, construa com régua e compasso uma reta $s$, perpendicular a $r$ e que passa por $P$. Na Figura 26, vemos o problema descrito.

Figura 26 – Problema 1




Fonte: elaboração própria.

Descrição dos passos:

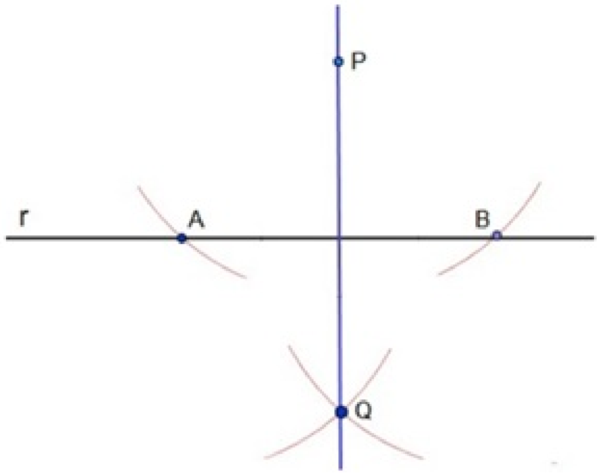
a) Com o compasso centrado em $P$, descreva um arco de círculo que intersecte a reta $r$ em dois pontos distintos $A$ e $B$.

b) Fixe uma abertura $w$, no compasso, maior que a metade de $\overline{AB}$, e trace dois arcos de raio $w$ e centros em $A$ e em $B$, arcos que se intersectam em dois pontos distintos, sendo um deles o ponto $Q$.

c) Trace a reta que contém os pontos $P$ e $Q$. Esta será perpendicular a $r$, conforme a Figura 27.

d) A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e a justificativa é fácil. Como $PA = PB$ e $QA = QB$, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é mediatriz de $\overline{AB}$ e portanto perpendicular a $r$.

Figura 27 – Solução do problema 1




Fonte: elaboração própria.

2. Dados, no plano, uma reta $r$ e um ponto $P$, pertencente a $r$, construa com régua e compasso uma reta $s$, perpendicular a $r$ e que passa por $P$. Na Figura 28, vemos o problema descrito.

Figura 28 – Problema 2


Fonte: elaboração própria.

Descrição dos passos:

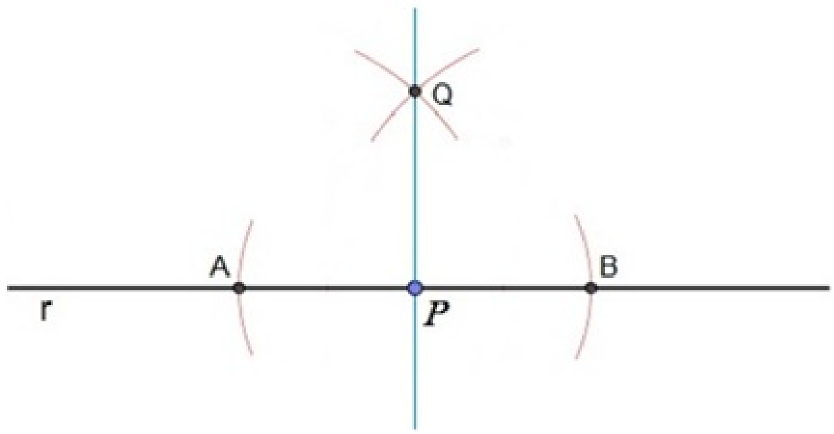
a) Com o compasso centrado em $P$, descreva um semicírculo que intersecte a reta $r$ em dois pontos distintos $A$ e $B$.

b) Fixe uma abertura $w$, maior que a metade de $\overline{AB}$, no compasso e trace dois semicírculos de raio $w$ e centros em $A$ e em $B$, arcos que se intersectam em um ponto $Q$.

c) Trace a reta que contém os pontos $Q$ e $P$. Esta será perpendicular a $r$, conforme a Figura 29.

d) Como $PA = PB$ e $QA = QB$, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é mediatriz de $\overline{AB}$ e portanto perpendicular a $r$.

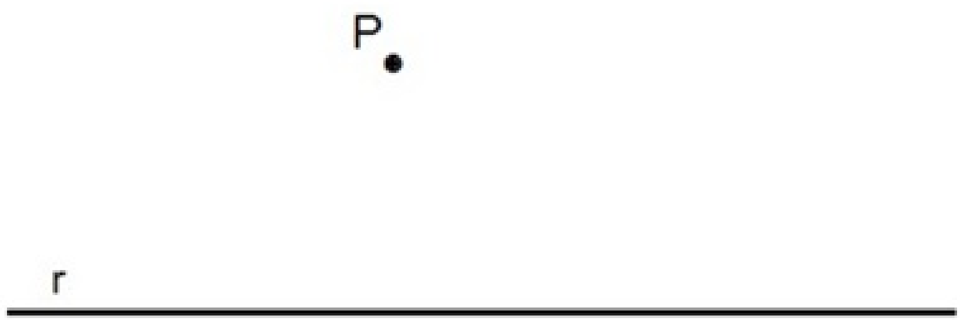
Figura 29 – Solução do problema 2




Fonte: elaboração própria.

3. Dados, no plano, uma reta $r$ e um ponto $P$, não pertencente a $r$, construa com régua e compasso uma reta $s$, paralela a $r$ e que passa por $P$. Na Figura 30, vemos o problema descrito.

Figura 30 – Problema 3




Fonte: elaboração própria.

Descrição dos passos:

a) Com o compasso centrado em $P$, descreva um arco de círculo que intersecte a reta $r$ no ponto $A$.

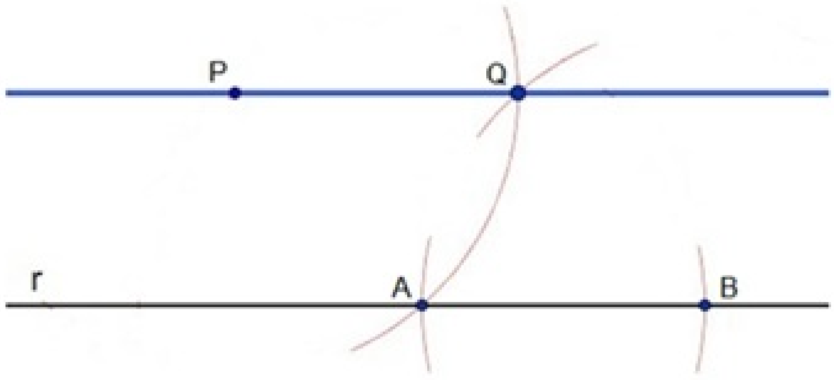
b) Mantendo a abertura no compasso, trace um arcos com centro em $A$ e marque o ponto $B$ na intersecção com $r$.

c) Ainda mantendo a abertura no compasso, faça um terceiro arco com centro em $B$ formando com o primeiro um ponto $Q$.

d) Trace uma reta que contém os pontos $P$ e $Q$. Esta será paralela a $r$, conforme a Figura 31.

e) A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é paralela a reta $r$ e a justificativa também é fácil. Da forma como foi feita a construção, $PABQ$ é um losango e portanto, seus lados $PQ$ e $AB$ são paralelos.

Figura 31 – Solução do problema 3



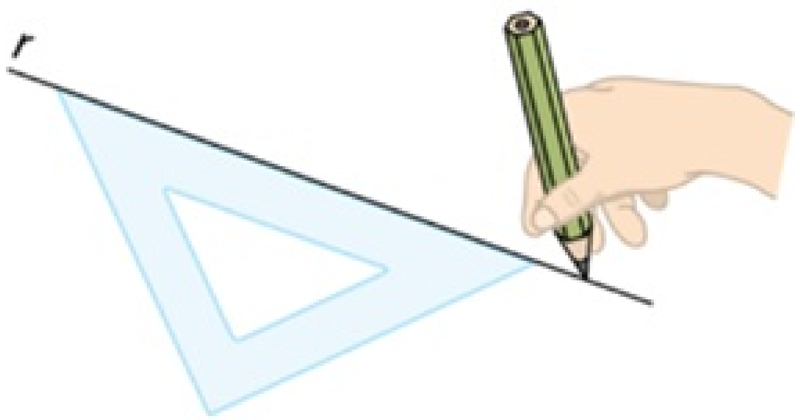

Fonte: elaboração própria.

#### 3.5.2.2 Com Régua e Esquadro

1. Traçando retas paralelas

    a) Primeiro, com a régua ou o esquadro, trace a reta $r$ posicionando o esquadro conforme a Figura 32.

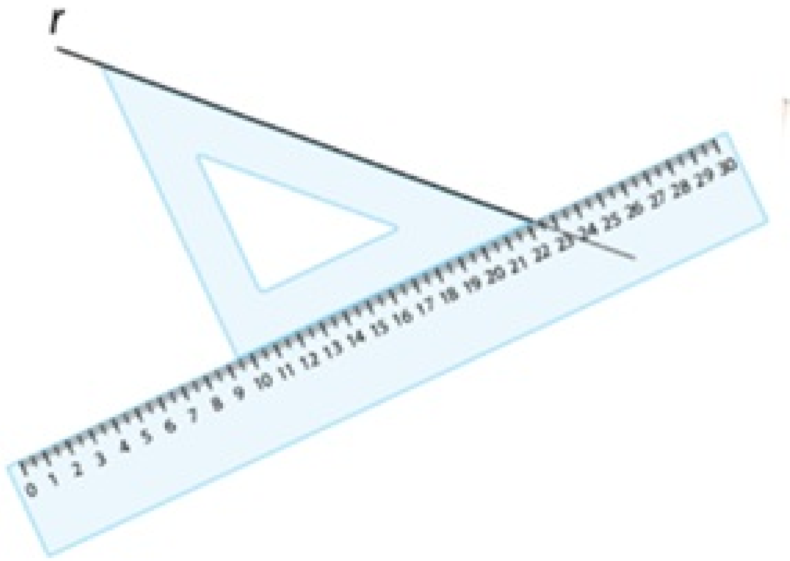
    Figura 32 – Paralelas - Passo 1

    Fonte: Gay e Silva (2018)

    b) Em seguida, coloque a régua em um dos lados do esquadro, mantendo-a fixa, conforme a Figura 33.

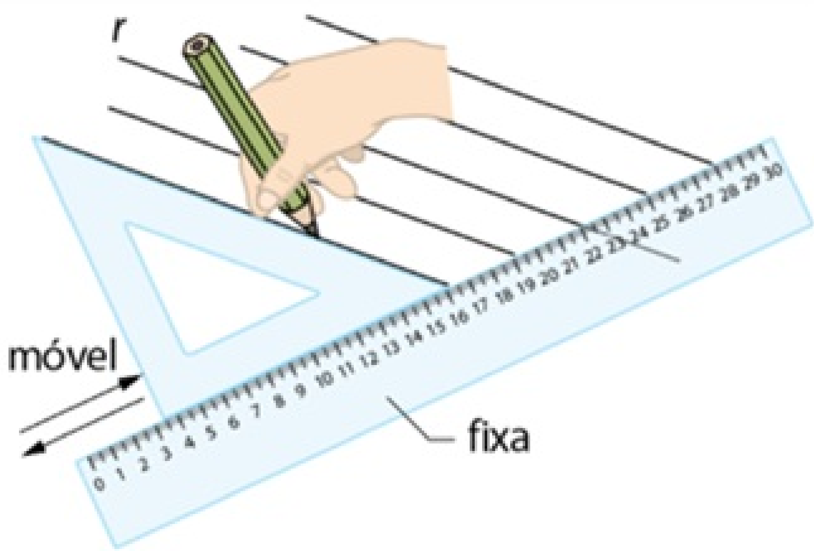
Figura 33 – Paralelas - Passo 2




Fonte: Gay e Silva (2018)

c) Depois, deslize o esquadro sobre a régua e trace as retas paralelas a reta $r$, conforme a Figura 34.

Figura 34 – Paralelas - Passo 3

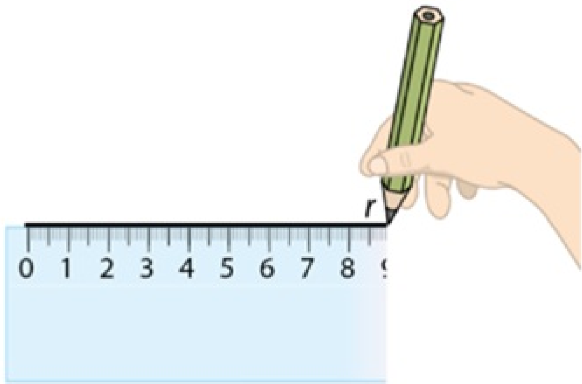



Fonte: Gay e Silva (2018)

2. Traçando retas perpendiculares

a) Primeiro, com a régua, trace a reta $r$ mantendo a régua fixa conforme a Figura 35.

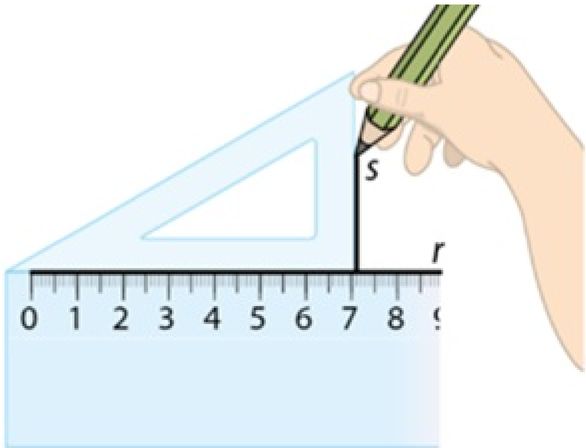
Figura 35 – Perpendiculeres - Passo 1




Fonte: Gay e Silva (2018)

b) Em seguida, um dos lados do ângulo reto do esquadro apoiando na régua e trace a reta $s$, conforme a Figura 36.

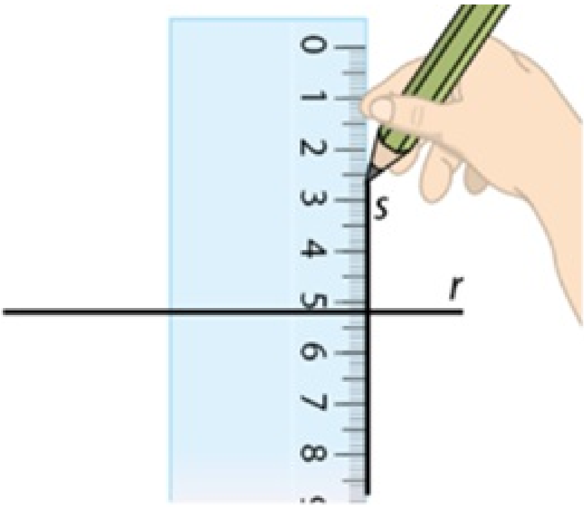
Figura 36 – Perpendiculeres - Passo 2




Fonte: Gay e Silva (2018)

c) Depois, prolongue a reta $s$, conforme a Figura 37. Assim, as retas $r$ e $s$ são perpendiculares.

Figura 37 – Perpendiculeres - Passo 3




Fonte: Gay e Silva (2018)

# Capítulo 4

# O *Software* de Geometria Dinâmica

O uso de recursos tecnológicos digitais no ambiente escolar exerce um papel decisivo no ensino de Matemática em virtude das possibilidades de modelos virtuais para a Matemática imaginária. Segundo Mendes (2009), a informática é considerada um dos componentes tecnológicos mais importantes para a efetivação da aprendizagem matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) enfatizam a importância dos recursos tecnológicos para a educação.

Segundo Nascimento (2012), a proposta do uso de *softwares* de geometria dinâmica no processo de ensino-aprendizagem em Geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica. A habilidade de visualizar pode ser desenvolvida à medida em que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo. Assim, essa visualização, através da tecnologia, se mostra mais confortável para o aluno, visto que esses apresentam, muitas vezes, uma desenvoltura maior que o professor no uso das tecnologias mais recentes.

O GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica gratuito criado por Markus Hohenwarter. Ele consiste em um sistema de geometria dinâmica que permite realizar construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas e funções que podem ser modificadas dinamicamente. Uma de suas vantagens é a possibilidade de apresentar, em um único ambiente, tanto as características algébricas quanto as geométricas de um mesmo objeto. Trata-se de um *software* livre e interativo que permite criar, manipular e explorar construções geométricas, facilitando a compreensão de conceitos como simetria, congruência, semelhança e transformações. O foco do desenvolvimento do GeoGebra é o uso didático. A interface do programa é intuitiva, o que facilita o uso de seus comandos básicos.

Uma interessante vantagem do uso de geometria dinâmica e Interativa (GDI) — em contraste com o uso de régua, compasso e esquadro — é que, após o aluno realizar uma construção, ele pode alterar, ou movimentar, determinada estrutura, preservandose suas propriedades originais. Isto torna a tela do computador, ou *smartphone*, ou *tablet*, em um "laboratório" de testes, diferentemente do uso das construções em papel com compasso, régua e esquadro.

Para Nascimento (2012), a utilização do *software* foi considerada pelos alunos como sendo de fácil compreensão e assimilação. O uso de GDI evidencia o aprendizado geométrico — através de experimentações e a criação de objetos geométricos, conjecturas são feitas, introduzindo conceitos matemáticos da Geometria.

## 4.1 A interface

O GeoGebra é de fácil manuseio, sendo possível utilizá-lo de forma *on-line*, acessando a página https://www.geogebra.org/ (GeoGebra, [ca. 2026]), ou baixá-lo na loja de aplicativo de um *smartphone* ou *tablet*. A tela inicial do GeoGebra (Figura 38) traz vários detalhes:

Figura 38 – Tela inicial do GeoGebra

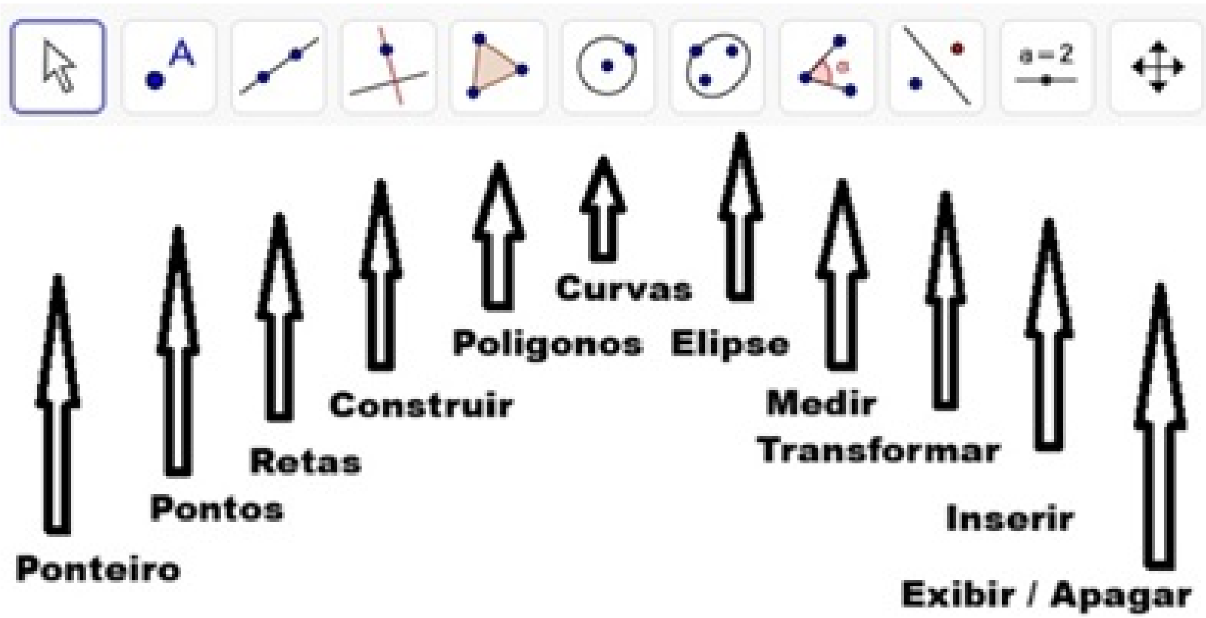

Fonte: elaboração própria.

- A barra de ferramentas, que fica na parte superior da tela. Nessa barra, você encontra as principais funções usadas em construções geométricas.
- A janela de Álgebra, que fica na lateral esquerda da tela, contém as descrições de todos os elementos construídos, como nomes e coordenadas de pontos e equações de retas e circunferências.
- A janela de visualização fica na parte central da tela. Essa região é a tela de desenhos e contém os eixos $x$ e $y$ e a malha quadriculada, que nos ajuda em algumas construções.

- O teclado virtual aparece na parte inferior da tela e tem as opções normais de um teclado, além de letras gregas e comandos de funções.

A barra de ferramentas (Figura 39) está dividida em 11 janelas. Ao clicar em qualquer botão da barra, e passando o cursor do mouse sobre os botões, aparecem as opções de ferramentas disponíveis. Ao selecionar uma ferramenta aparece uma dica na parte inferior da tela.

Figura 39 – Barra de ferramentas




Fonte: elaboração própria.

No nosso estudo utilizaremos apenas algumas das várias funções disponíveis.

### 4.1.1 Ponteiro

No botão Ponteiro (Figura 40) usaremos a ferramenta MOVER. Com essa ferramenta pode-se selecionar, manipular e/ou escolher objetos já construídos.

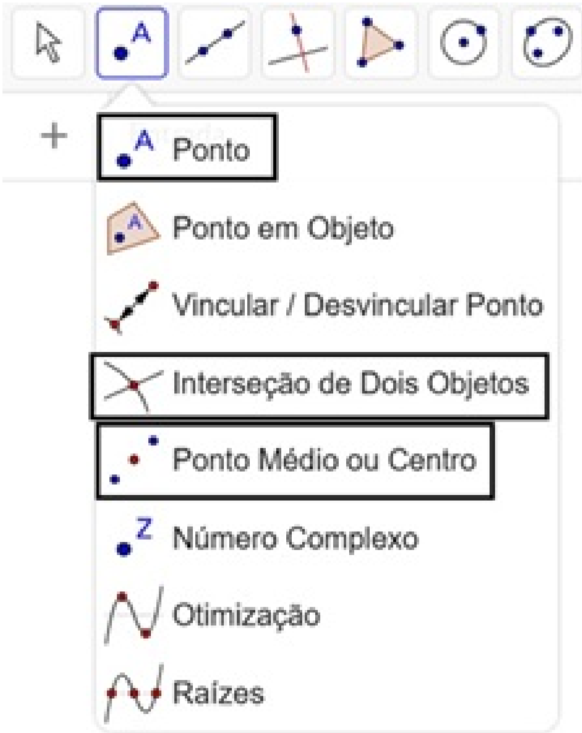
Figura 40 – Botão Ponteiro


Fonte: elaboração própria.

### 4.1.2 Pontos

No botão Pontos (Figura 41) usaremos três ferramentas.

Figura 41 – Botão Pontos



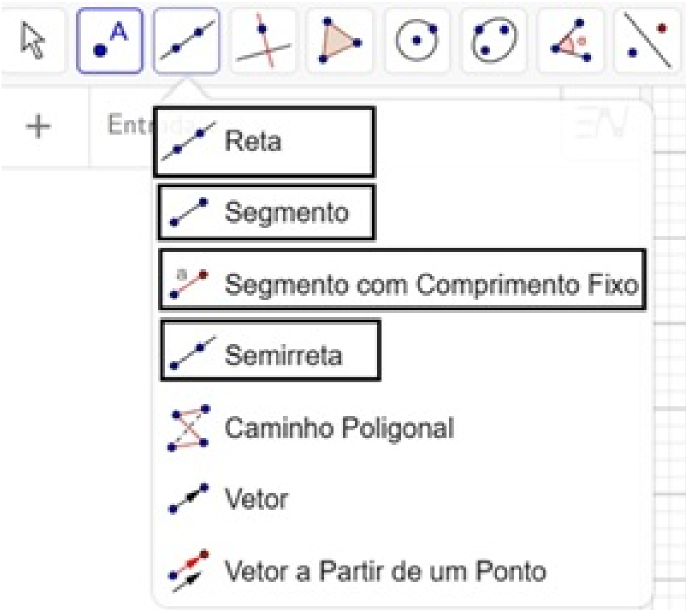

Fonte: elaboração própria.

- Ponto: Cria um ponto em um espaço livre;
- Intersecção de dois objetos: Com esta opção pode-se exibir os pontos de interseção entre dois objetos;
- Ponto médio ou centro: Essa ferramenta cria o ponto médio entre dois pontos.

### 4.1.3 Retas

No botão Retas (Figura 42) usaremos quatro ferramentas:

Figura 42 – Botão Retas



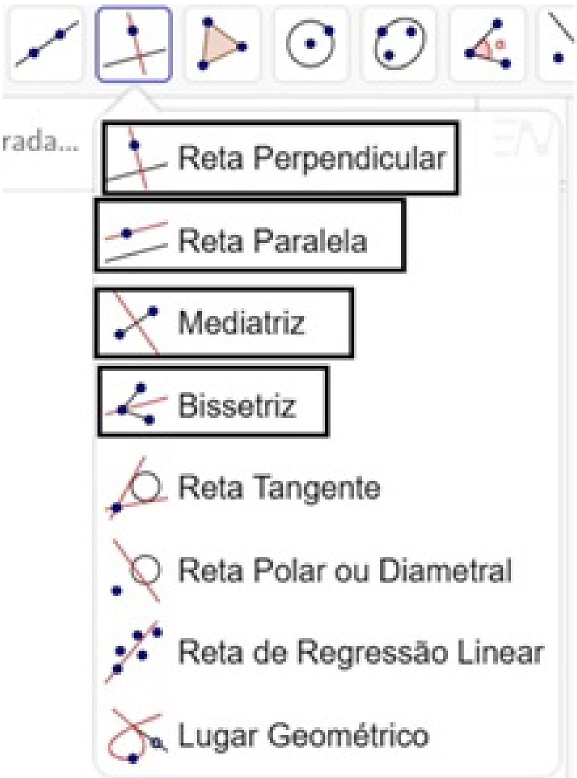

Fonte: elaboração própria.

- Reta definida por dois pontos: ativando esta ferramenta pode-se criar uma reta que passa por dois pontos.
- Segmento definido por dois pontos: esta ferramenta cria o segmento de reta que une dois pontos.
- Segmento com comprimento fixo: esta ferramenta cria um segmento de reta com um comprimento definido
- Semirreta: esta ferramenta pode-se criar uma semirreta que começa num ponto e passa por outro.

### 4.1.4 Construir

No botão Construir (Figura 43) utilizaremos 4 ferramentas:

Figura 43 – Botão Construir



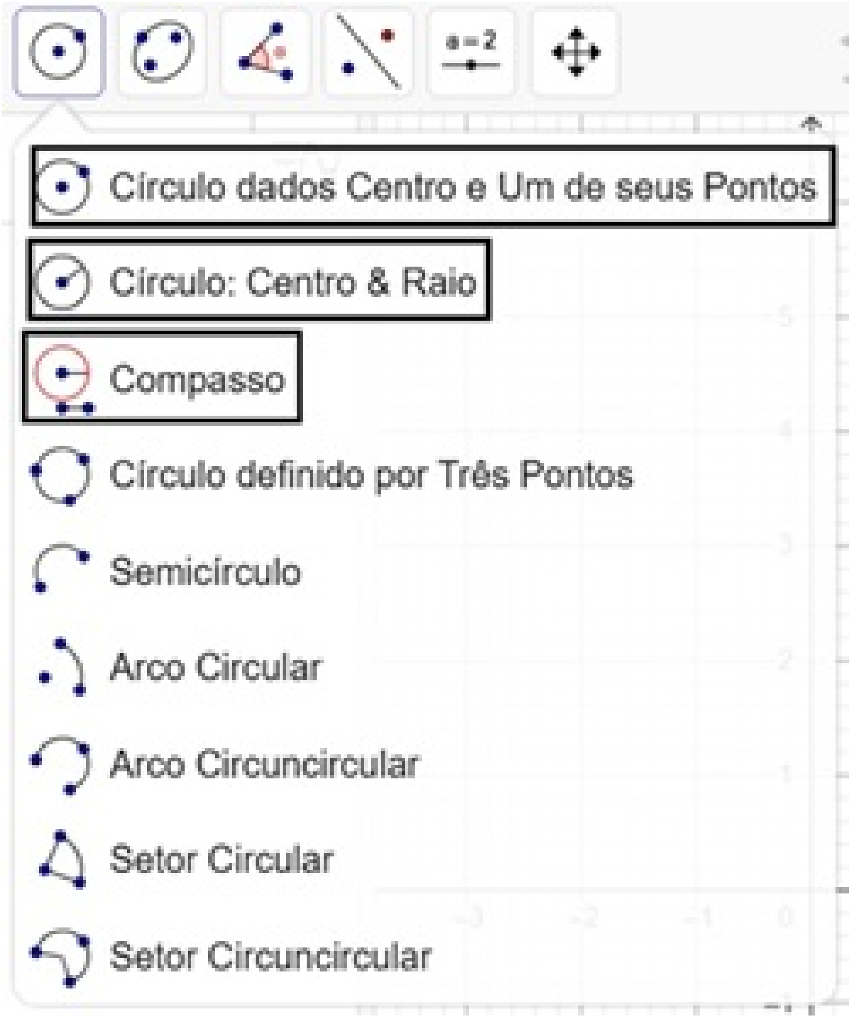

Fonte: elaboração própria.

- Reta perpendicular: com esta ferramenta pode-se construir uma reta perpendicular a uma outra reta, ou semirreta, ou segmentos de reta previamente criado.
- Reta paralela: Com esta ferramenta pode-se construir uma reta paralela a uma outra reta, ou semirreta, ou segmento de reta previamente criado.
- Mediatriz: esta ferramenta constrói a reta perpendicular que passa pelo ponto médio entre dois pontos.
- Bissetriz: Com esta ferramenta pode-se construir a bissetriz de um ângulo. Para isto, deve-se clicar nos três pontos que determinam o ângulo.

### 4.1.5 Curvas

No botão Curvas (Figura 44) utilizaremos três ferramentas:

Figura 44 – Botão Curvas



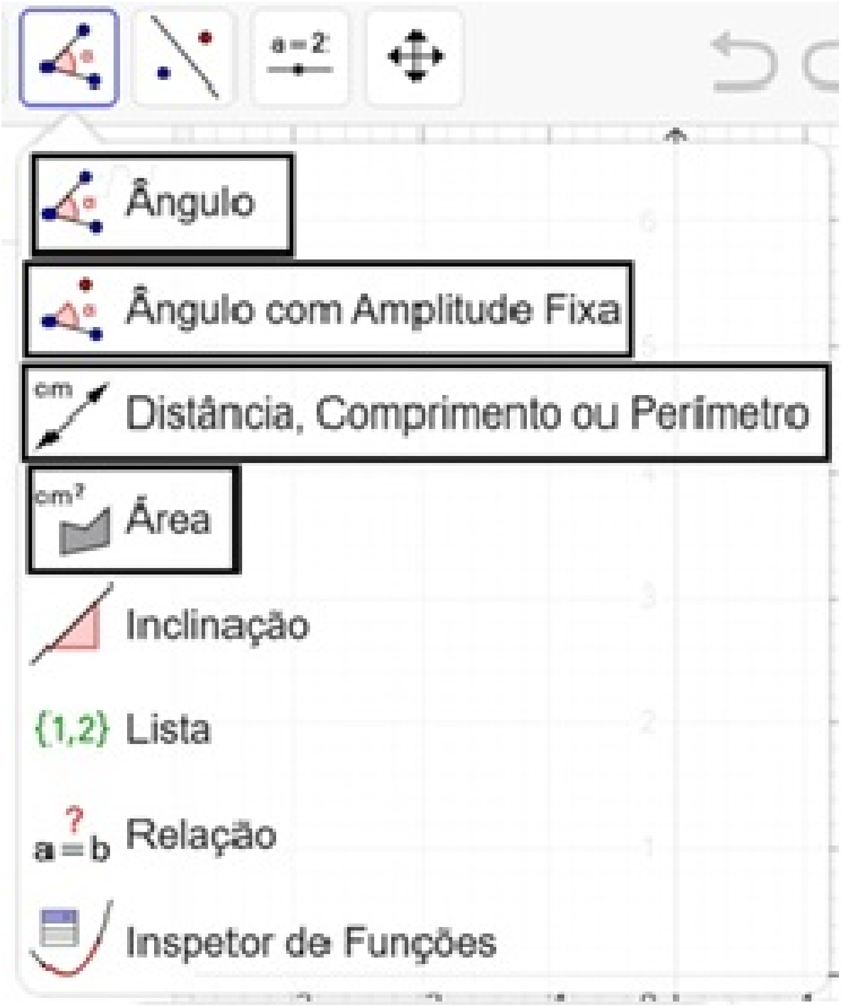

Fonte: elaboração própria.

- Círculo definido pelo centro e um de seus pontos: esta ferramenta constrói um círculo a partir de dois pontos.
- Círculo dados centro e raio: esta ferramenta constrói um círculo a partir do centro e com o comprimento do raio definido.
- Compasso: nesta ferramenta pode-se construir um círculo definindo o raio selecionando dois pontos, ou um segmento de reta, e o centro do círculo.

### 4.1.6 Medir

No botão Medir (Figura 45) usaremos as ferramentas:

Figura 45 – Botão Medir




Fonte: elaboração própria.

- Ângulo: com esta ferramenta é possível marcar um ângulo definido por três pontos onde o segundo ponto clicado é o vértice dele.
- Ângulo com amplitude fixa: Nesta ferramenta podemos definir, a partir de dois pontos um terceiro ponto, que terá uma amplitude definida.
- Distância ou Comprimento: esta ferramenta mostra como medir o comprimento de um segmento ou distância entre dois pontos.
- Área: nesta ferramenta podemos determinar a área de uma figura plana qualquer.

Com as ferramentas descritas anteriormente foi possível desenvolver o trabalho com os discentes.

# Capítulo 5

# Referencial Teórico

## 5.1 O Ensino de Geometria no Ensino Fundamental

O ensino da Geometria constitui um dos pilares da formação matemática dos estudantes, pois desenvolve a percepção espacial, o raciocínio lógico e a capacidade de compreender o mundo em suas dimensões e formas. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Geometria "possibilita ao aluno compreender, representar e interagir com o espaço que o cerca, favorecendo o desenvolvimento da percepção e da imaginação" (Brasil, 1998, p. 55). Essa área do conhecimento está diretamente ligada à construção de noções fundamentais para o estudo de outras áreas da Matemática e para a vida cotidiana.

Na mesma direção, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça que o ensino da Geometria deve promover "a compreensão das formas, tamanhos e posições relativas de figuras e objetos no espaço, desenvolvendo a capacidade de argumentação e resolução de problemas" (Brasil, 2018, p. 272). A BNCC destaca ainda a importância de práticas investigativas e do uso de diferentes recursos didáticos, como materiais manipulativos e tecnologias digitais, para tornar o aprendizado mais ativo e significativo.

Esses documentos orientadores apontam que o ensino da Geometria deve ser estruturado de modo a estimular o aluno a explorar, representar e analisar o espaço em que vive. Isso implica que as aulas devem ir além da memorização de fórmulas e da repetição de procedimentos, valorizando a experimentação, a visualização e a construção de conceitos. O trabalho com figuras, medições e construções geométricas contribui para que o aluno desenvolva não apenas habilidades matemáticas, mas também cognitivas e criativas.

Além do mais, é fundamental que o professor atue como mediador nesse processo, incentivando a curiosidade e a investigação. Quando o estudante é levado a observar, manipular e criar representações geométricas, ele se torna protagonista do seu aprendizado, construindo o conhecimento de forma autônoma e reflexiva.

Ainda assim, o ensino de Geometria apresenta desafios que exigem dos professores novas estratégias didáticas e o uso de recursos que aproximem os alunos dos conceitos geométricos de forma mais significativa (Santos; Menezes; Etcheverria, 2013).

## 5.2 Métodos Tradicionais: O Uso de Régua e Compasso

Historicamente, o ensino da Geometria esteve fortemente associado às construções com régua e compasso. Desde os tempos de Euclides, essas ferramentas representam não apenas instrumentos de desenho, mas também meios para desenvolver o raciocínio dedutivo e a compreensão das propriedades geométricas. A prática de construir figuras geométricas favorece a observação, a precisão e a descoberta das relações entre os elementos, aspectos essenciais para a formação do pensamento matemático.

De acordo com Oliveira (2015, p. 23), o uso de instrumentos como a régua e o compasso proporciona aos estudantes uma experiência concreta com os conceitos geométricos, permitindo-lhes "visualizar propriedades, testar hipóteses e compreender de forma mais significativa as relações entre os elementos das figuras". O autor destaca que a manipulação desses instrumentos desperta o interesse e favorece o aprendizado, especialmente quando acompanhada de discussões orientadas pelo professor.

Marca, Biesford e Bennemann (2016) reforçam que as construções geométricas em sala de aula favorecem a compreensão de conceitos como ângulos, paralelismo e perpendicularidade, estimulando o raciocínio lógico e o pensamento espacial. Segundo os autores, "as construções geométricas com régua e compasso contribuem para o desenvolvimento do pensamento lógico e do raciocínio espacial" (Marca; Biesford; Bennemann, 2016, p. 4).

Essas práticas também se alinham à proposta da BNCC, que recomenda o uso de recursos concretos como forma de apoiar a compreensão de propriedades geométricas e favorecer a argumentação (Brasil, 2018). Ao construir, medir e comparar figuras, os alunos não apenas aplicam regras, mas constroem significados e passam a compreender os fundamentos por trás de cada conceito.

Além disso, as construções geométricas favorecem o desenvolvimento de habilidades cognitivas e motoras, estimulando a coordenação, a atenção e a paciência. Oliveira (2015, p. 31) aponta que o processo de construção requer "planejamento, precisão e reflexão, o que torna o aluno mais consciente das etapas e das propriedades envolvidas". Essa abordagem, portanto, não se limita à execução de traçados, mas constitui um exercício de raciocínio e lógica.

Entretanto, é importante reconhecer que, embora eficazes, as metodologias tradicionais enfrentam limitações quando aplicadas de forma isolada. O ensino baseado exclusivamente em procedimentos manuais pode se tornar mecânico e desmotivador se não for contextualizado e articulado com outras práticas. Por isso, autores como Marca, Biesford e Bennemann (2016) e Oliveira (2015) defendem a integração dessas atividades com momentos de reflexão e investigação, aproximando o estudante da natureza exploratória da Matemática.

Dessa forma, o uso de régua e compasso deve ser entendido como uma estratégia didática que valoriza o fazer e o pensar geométrico, possibilitando ao aluno construir conhecimentos de maneira ativa. Essa perspectiva dialoga diretamente com a Teoria de van Hiele (Van Hiele, 1986), que explica os diferentes níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico e será discutida na seção a seguir.

## 5.3 A Teoria de van Hiele

A Teoria de van Hiele, desenvolvida pelo casal Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele na década de 1950, representa um dos principais referenciais para compreender como ocorre o desenvolvimento do pensamento geométrico. Segundo essa teoria, a aprendizagem da Geometria se dá por meio de cinco níveis progressivos de raciocínio, que não dependem da idade do aluno, mas das experiências e interações que ele vivencia em sala de aula.

De acordo com os Van Hiele (1986), os níveis são os seguintes:

1. Visualização (ou reconhecimento) – os alunos reconhecem as figuras geométricas por sua aparência global. Reconhecem tri ângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, não conseguindo identificar suas partes ou propriedades. São capazes de reproduzir figuras dadas e aprender um vocabulário geométrico básico .

2. Análise – Neste nível, os alunos começam a discernir as características e propriedades das figuras, mas não conseguem ainda estabelecer relações entre essas propriedades e nem entendem as definições ou vê inter-relações entre figuras.

3. Dedução informal – Aqui o aluno começa a estabelecer inter-relações de propriedades dentro de figuras e entre figuras, deduzindo propriedades e reconhecendo classes de figuras. Agora, a definição já tem significado; todavia, o aluno ainda não entende o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas nas provas formais.

4. Dedução formal – Neste estágio, o aluno analisa e compreende o pro cesso dedutivo e as demonstrações com o processo axiomático associado. Agora, ele já consegue construir demonstrações e desenvolvê-las de mais de uma maneira, também faz distinções entre uma afirmação e sua recíproca.

5. Rigor – Agora, o aluno já é capaz de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos; analisa e compreende geometrias não euclidianas. A geometria é entendida sob um ponto de vista abstrato.

Segundo Van Hiele (1986), a progressão entre os níveis depende da mediação pedagógica e das experiências de aprendizagem. O autor destaca que “os estudantes não podem compreender um nível sem dominar o anterior” (Van Hiele, 1986, p. 47). Assim, o papel do professor é criar situações que estimulem a observação, a manipulação, a conjectura e a justificativa, permitindo que o aluno avance gradualmente em sua forma de pensar geometricamente.

### 5.3.1 Fases de Aprendizagem

Para completar a descrição da teoria, vamos expor a proposta de Van Hiele sobre os passos que o professor deve seguir para ajudar seus alunos a avançar nos níveis de raciocínio. Como já foi mencionado, os Van Hiele afirmam que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da maturidade do aluno.

Dessa forma, os Van Hiele propuseram uma sequência didática de cinco fases de aprendizagem: interrogação informada, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração.

As fases não são, por conseguinte, associada para um determinado nível, mas cada nível de raciocínio começa com atividades da primeira fase e continua com as atividades das fases seguintes. No final da quinta fase, os alunos devem ter atingido o próximo nível de raciocínio.

As principais características das fases de aprendizagem são:

1. Interrogação informada – Professor e aluno conversam e desenvolvem atividades sobre os objetos de estudo do respectivo nível. Aqui se introduz o vocabulário específico do nível, são feitas observações e várias perguntas. É uma fase preparatória para estudos posteriores.

2. Orientação dirigida – Atividades são desenvolvidas para explorarem as características de um nível e isso deve ser feito com o uso de material selecionado e preparado pelo professor.

3. Explicação – Agora, o papel do professor é de somente orientar o aluno no uso de uma linguagem precisa e adequada. Baseando-se em experiências anteriores, os alunos revelam seus pensamentos e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas trabalhadas e observadas.

4. Orientação livre – Diante de tarefas mais complexas, os alunos procuram soluções próprias que podem ser concluídas de maneiras diferentes. Assim, eles ganham experiência ao descobrir sua própria maneira de resolver tarefas.

5. Integração – Nesta fase, o aluno relê e resume o que foi aprendido, com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações. Assim, o aluno alcança um novo nível de pensamento.

No contexto brasileiro, a teoria tem sido amplamente utilizada em pesquisas sobre o ensino de Geometria. Oliveira (2015) aplicou os níveis de van Hiele em uma proposta didática com construções geométricas no 8º ano do Ensino Fundamental, observando avanços significativos na compreensão dos alunos. Segundo o autor, "a manipulação dos instrumentos de desenho favoreceu a passagem do nível de visualização para o de análise, uma vez que o aluno pôde relacionar a aparência da figura com suas propriedades" (Oliveira, 2015, p. 42).

A Teoria de van Hiele também dialoga com as orientações da BNCC (Brasil, 2018), que enfatiza o papel das práticas investigativas e da argumentação na aprendizagem matemática. Quando o aluno é incentivado a observar, testar hipóteses e justificar suas conclusões, ele se engaja em um processo de raciocínio próximo ao descrito por van Hiele. Dessa forma, a teoria oferece um marco teórico que orienta o planejamento e a avaliação das atividades geométricas, ajudando o professor a identificar em que nível de compreensão cada aluno se encontra.

Além de orientar a prática docente, a teoria é essencial para compreender como integrar métodos tradicionais e tecnológicos. Ao utilizar régua e compasso, o aluno desenvolve as etapas iniciais — visualização e análise — de forma concreta e manipulativa. Já o uso do GeoGebra, por exemplo, pode ampliar essa aprendizagem, permitindo que o estudante explore propriedades e construções de forma dinâmica, favorecendo a transição para níveis mais avançados de raciocínio.

Em síntese, a Teoria de van Hiele oferece uma base sólida para compreender o desenvolvimento do pensamento geométrico e orientar práticas pedagógicas mais eficazes. Ao reconhecer que o aprendizado da Geometria ocorre em estágios e que a progressão depende da mediação e das experiências, o professor pode planejar atividades que articulem manipulação, reflexão e tecnologia, promovendo um ensino mais significativo e inclusivo.

## 5.4 A Tecnologia no Ensino da Geometria

Nas últimas décadas, as tecnologias digitais têm transformado o modo como o conhecimento é construído e compartilhado. No contexto da Educação Matemática, essas tecnologias assumem papel relevante, pois oferecem novas formas de representação e interação com os objetos geométricos. O ensino de Geometria, tradicionalmente centrado em construções manuais e representações estáticas, passou a incorporar recursos dinâmicos e interativos, como *softwares* de geometria dinâmica, vídeos educativos e ambientes virtuais de aprendizagem.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reconhece essa importância ao afirmar que "o uso de tecnologias digitais amplia as possibilidades de ensino e aprendizagem, permitindo a exploração de múltiplas representações e a construção de significados" (Brasil, 2018, p. 67). Na área de Matemática, o documento orienta que o professor promova atividades que estimulem a investigação e a experimentação com o apoio de recursos tecnológicos, como forma de potencializar o raciocínio lógico e a visualização espacial dos alunos.

Entre as ferramentas digitais disponíveis, o GeoGebra destaca-se como uma das mais utilizadas no ensino de Geometria. De acordo com Silva (2017), o uso do GeoGebra em sala de aula desperta o interesse dos estudantes e promove uma aprendizagem mais significativa, pois o aluno visualiza imediatamente o resultado de suas ações, testando hipóteses e analisando propriedades das figuras de forma autônoma.

O autor ressalta ainda que o *software* favorece o desenvolvimento de níveis mais altos de raciocínio geométrico, conforme a Teoria de van Hiele. A manipulação dinâmica das figuras permite ao aluno verificar relações e dependências, passando do nível de análise para o de dedução informal. Assim, o GeoGebra atua como mediador entre a observação empírica e a abstração conceitual.

Estudos recentes, como o de Pouzada et al. (2021), também destacam a relevância do uso de tecnologias digitais no ensino da Geometria. A pesquisa, baseada em entrevistas com professores de Matemática, revelou que os docentes reconhecem o potencial pedagógico das ferramentas digitais, mas ainda enfrentam desafios relacionados à formação e à infraestrutura escolar. Segundo os autores, a inserção das tecnologias digitais na prática docente requer mais do que a disponibilidade de recursos tecnológicos; exige planejamento, formação e reflexão sobre o papel do professor nesse novo contexto.

Na mesma linha, o estudo publicado no repositório Mathias (2023) reforça o potencial do GeoGebra como instrumento de mediação cognitiva no processo de ensino e aprendizagem da Geometria. O artigo aponta que o uso de *softwares* de geometria dinâmica contribui para a compreensão de conceitos e para o desenvolvimento do pensamento lógico e dedutivo, ao possibilitar a experimentação e a visualização de propriedades em tempo real.

A utilização das tecnologias digitais, porém, não deve ser vista como substituição dos métodos tradicionais, mas como ampliação das possibilidades de ensino. O uso articulado de régua, compasso e GeoGebra permite ao aluno transitar entre o concreto e o abstrato, fortalecendo as conexões cognitivas e conceituais. Essa integração torna as aulas mais dinâmicas e investigativas, estimulando a autonomia e o pensamento crítico.

Além disso, o uso de ferramentas digitais pode aproximar o ensino da realidade dos estudantes, que estão imersos em um contexto tecnológico. Essa aproximação aumenta a motivação e contribui para que o aprendizado da Geometria seja percebido como algo útil e prazeroso. No entanto, é fundamental que o professor assuma o papel de mediador, orientando o uso das tecnologias e promovendo reflexões sobre os conceitos matemáticos explorados.

Em síntese, a incorporação das tecnologias digitais, especialmente do GeoGebra, representa um avanço significativo no ensino da Geometria. Quando planejadas e contextualizadas, essas ferramentas ampliam as oportunidades de aprendizagem, favorecem a compreensão conceitual e fortalecem o desenvolvimento do raciocínio geométrico, em consonância com os princípios da BNCC e com a Teoria de van Hiele.

## 5.5 Integração Entre Métodos Tradicionais e Tecnológicos

O ensino da Geometria no Ensino Fundamental vem passando por um processo de transformação que busca equilibrar tradição e inovação. Conforme o mencionado nas sessões anteriores, as práticas com régua e compasso, fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e da precisão manual, continuam sendo recursos valiosos para a aprendizagem, mas ganham nova dimensão quando articuladas ao uso de ferramentas digitais como o GeoGebra. Essa integração permite que os alunos avancem da experimentação concreta para a abstração e análise, favorecendo uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos.

Conforme destacam Oliveira (2015) e Marca, Biesford e Bennemann (2016), as construções geométricas manuais desenvolvem nos estudantes a capacidade de observar, planejar e justificar suas ações, habilidades fundamentais para o pensamento matemático. Já o GeoGebra, como aponta Silva (2017), amplia essas experiências ao permitir que os alunos testem conjecturas e explorem propriedades de forma dinâmica, observando os efeitos de suas modificações em tempo real.

O uso combinado desses recursos cria um ambiente de aprendizagem mais rico, em que o aluno não apenas executa procedimentos, mas compreende os princípios que os sustentam. Essa prática reflete a proposta da Teoria de van Hiele, na qual o progresso entre os níveis de raciocínio depende da variedade e da complexidade das experiências vivenciadas. A manipulação de figuras com régua e compasso fortalece os níveis iniciais — visualização e análise — enquanto que o uso do GeoGebra contribui para a dedução informal e formal.

A BNCC (Brasil, 2018, p. 64) também orienta que o ensino de Matemática incorpore diferentes linguagens e recursos tecnológicos, de modo a "favorecer a construção de significados e a ampliação das formas de representação e argumentação". Nesse sentido, a combinação entre métodos tradicionais e digitais atende à proposta do documento, que valoriza tanto a exploração concreta quanto a investigação digital no processo de ensino e aprendizagem.

Além disso, Pouzada et al. (2021) destacam que a integração entre práticas tradicionais e tecnologias digitais requer reflexão docente. O uso das tecnologias digitais não deve ser apenas uma adição à aula, mas uma estratégia pedagógica planejada. Segundo os autores, é necessário que o professor compreenda o potencial e as limitações de cada recurso, para que a tecnologia atue como mediadora e não como substituta de sua prática.

A articulação entre o manual e o digital também se alinha à perspectiva da Etnomatemática, que valoriza o conhecimento construído a partir das experiências e contextos dos alunos, reconhecendo a diversidade de maneiras de aprender e compreender a Matemática.

Portanto, a integração entre métodos tradicionais e tecnológicos representa um caminho promissor para o ensino da Geometria. Ela não se trata de substituir práticas antigas por novas, mas de ampliar horizontes, combinando o rigor das construções manuais com a flexibilidade e interatividade das ferramentas digitais. Dessa forma, o estudante é colocado no centro do processo de aprendizagem, atuando como investigador e construtor do próprio conhecimento.

Em síntese, o equilíbrio entre régua, compasso e GeoGebra permite que a Geometria seja ensinada de forma mais dinâmica, investigativa e significativa, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da autonomia intelectual dos alunos — princípios essenciais de uma Educação Matemática alinhada às demandas contemporâneas.

## 5.6 Trabalhos Relacionados

Durante as pesquisas de textos que basearam este trabalho, foram encontrados diversas dissertações e artigos que relacionam-se entre si de alguma forma. Ou pelo uso de metodologias, ou por quais ferramentas foram utilizadas, ou pelo contexto do trabalho.

Este fato demonstra a importância do ensino da Geometria no ambiente escolar e que o uso de novas metodologias e ferramentas são vitais. No Quadro 3 podemos comparar alguns desses trabalhos:

Quadro 3 – Comparação das principais características dos trabalhos relacionados

| Trabalho | Construções Geométricas | Teoria de van Hiele | Geogebra | Outro Recurso Digital | Ano Escolar de Aplicação |
|---|---|---|---|---|---|
| Fabricio (2015) | | | | x | 8º E. Fund. |
| Marca, Biesford e Bennemann (2016) | x | x | | | E. Médio |
| Santos (2015) | | x | | x | 9º E. Fund. |
| Oliveira (2015) | x | x | | | 8º e 9º E. Fund. |
| Silva (2024) | x | | x | | E. Médio |
| Silva (2017) | x | | x | | 8º E. Fund. |
| Medeiros (2022) | | | | x | 9º E. Fund. |
| Costa Júnior e Silva (2014) | | x | | | E. Superior |
| Este trabalho | x | x | x | | 6º e 7º E. Fund. |

É importante ressaltar a quantidade de trabalhos desenvolvidos com o uso de tecnologias digitais. Rodrigues e Azevedo (2023) analisou, entre 2009 e 2021, 448 pesquisas, entre Dissertações e Teses, que utilizaram o Geogebra para o ensino de matemática. Observa-se também uma grande quantidade de trabalhos que utilizam os conceitos da Teoria de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos.

Quanto às construções geométricas, alguns autores, como Marca, Biesford e Bennemann (2016) e Oliveira (2015), utilizam ferramenta físicas no desenvolvimento dos seus trabalhos. Já Silva (2017) e Silva (2024) desenvolvem seus trabalhos utilizando o Geogebra.

# Capítulo 6

# Metodologia

## 6.1 Fundamentação Teórica da Proposta

A presente metodologia fundamenta-se na Teoria dos Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele (1986), amplamente reconhecida como uma das mais eficazes para orientar o ensino e a aprendizagem da Geometria. Segundo o modelo, descrito com mais detalhes na Seção 5.3, os alunos progridem em níveis hierárquicos de compreensão (visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor), mediante experiências de aprendizagem adequadas e planejadas.

Essa teoria, conforme destaca Kaiber ([2021]) no texto "O Modelo de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele", o modelo de van Hiele evidencia que o avanço não depende da idade, mas sim das situações didáticas e das interações cognitivas que o professor propicia.

A proposta também se ancora nas diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) e da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), que enfatizam a importância da Geometria para o desenvolvimento do raciocínio espacial, da visualização e da capacidade de resolver problemas. Ambos os documentos recomendam que o ensino de Geometria envolva atividades de exploração, construção, representação e uso de tecnologias digitais.

Nesse sentido, e conforme o discutido no Capítulo 5, o uso de régua, compasso, transferidor e do *software* GeoGebra torna-se uma estratégia metodológica para transitar do concreto ao digital, favorecendo a observação de propriedades geométricas e o avanço cognitivo entre os níveis de van Hiele. Essa abordagem dialoga com os resultados das dissertações de Ferreira (2020) e Silva (2017), que evidenciam como o GeoGebra promove uma aprendizagem significativa e uma visualização dinâmica dos conceitos geométricos.

## 6.2 Natureza da Pesquisa e Abordagem Metodológica

A pesquisa possui abordagem qualitativa e natureza aplicada, uma vez que busca compreender o desenvolvimento do pensamento geométrico a partir da aplicação de uma sequência didática estruturada em sala de aula. Trata-se também de uma pesquisa-ação, pois o pesquisador, enquanto docente, atua diretamente no processo de ensino, planejando, executando e avaliando as atividades junto aos alunos, sendo o professor regente.

## 6.3 Contexto da Aplicação e Participantes

A metodologia foi aplicada a duas turmas do Ensino Fundamental II (6º e 7º anos) de duas escolas públicas, Escola Municipal Professora Délfica de Carvalho Wagner e a Escola Municipal Professora Elisabete de Azevedo Brandão.

Na Escola Municipal Professora Délfica de Carvalho Wagner, situada no município de Quissamã/RJ, no distrito de Barra do Furado — região rural do município — participaram 30 alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 12 e 15 anos. A escola dispõe de salas com lousas digitais interativas, *tablets* e materiais concretos (régua, compasso, transferidor e esquadro) para uso individual e coletivo.

Esses alunos apresentavam uma defasagem no conteúdo de geometria do 6º ano, sendo necessário retomar os conceitos, com objetivo de contextualizar a matéria no 7º ano. Apesar da defasagem eles apresentavam uma boa compreensão e participação nas aulas, demonstrando um desenvolvimento satisfatório ao longo da sequência.

Na Escola Municipal Professora Elisabete de Azevedo Brandão, situada no município de Macaé/RJ, no bairro Lagomar, participaram 30 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 11 e 13 anos. A escola dispõe de salas com projetor digital, *tablets* e materiais concretos (régua, compasso, transferidor e esquadro) para uso individual e coletivo.

Aqui os alunos apresentavam algum conhecimento prévio em geometria, reconhecendo figuras planas e sólidos geométricos. Nas turmas a compreensão e participação dos alunos era suficiente, tendo assim um bom desenvolvimento ao longo da sequência.

## 6.4 Estrutura da Sequência Didática

A sequência didática foi organizada em cinco etapas correspondentes às fases de aprendizagem de van Hiele (Quadro 4), articulando atividades manuais e digitais. Cada fase favorece o avanço progressivo do raciocínio geométrico, respeitando o nível cognitivo inicial dos alunos.

Quadro 4 – Fases da Sequência Segundo os Níveis de van Hiele

| **Fases** | **Etapa prática e recursos utilizados** | **Objetivos de aprendizagem** |
|---|---|---|
| 1 – Informação | Aula exploratória de conceitos iniciais geométricos; Apresentação das ferramentas como régua, compasso, transferidor e esquadros; Apresentação do GeoGebra e suas ferramentas. | Reconhecer formas geométricas e compreender o papel dos instrumentos de construção. |
| 2 – Orientação dirigida | Construção de retas paralelas e perpendiculares e ângulos utilizando régua, compasso, transferidos e compasso; Realização das mesmas construções no Geogebra. | Compreender propriedades geométricas por meio da manipulação e observação direta. |
| 3 – Explicação | Comparação entre construções manuais e digitais; Discussão sobre congruência, paralelismo, ângulos e medidas; Nomeação das propriedades observadas. | Desenvolver linguagem geométrica e capacidade de justificar observações. |
| 4 – Orientação livre | Manipulação de construções realizadas no Geogebra: figuras simétricas e transformações geométricas (translação, reflexão, rotação e ampliação). | Estimular a autonomia, a dedução informal e a descoberta de relações variadas. |
| 5 – Integração | Aplicação das atividades elaboras. | Consolidação dos conceitos. |

O período de aplicação da sequência didática proposta para as duas turmas, seguiu os planos de aulas apresentados nos apêndices C e D.

## 6.5 Instrumentos e Procedimentos de Coleta de Dados

Para análise do desenvolvimento dos alunos, foram utilizados os seguintes instrumentos:

1. Teste diagnóstico

   A atividade do (Anexo A) foi elaborado pela equipe do Projeto Fundão (Nasser; Sant'Anna, 1997) na adaptação do questionário de van Hiele, para identificar o nível inicial de raciocínio geométrico. As questões foram elaboradas de modo a verificar principalmente os níveis de visualização e análise, nos quais os alunos identificam figuras pela aparência e começam a reconhecer suas propriedades.

   A atividade é composta por dez questões. Nas primeiras cinco questões, os alunos deveriam observar diferentes figuras geométricas e identificar aquelas que correspondem a determinados conceitos visuais. Inicialmente, foi solicitado que identificassem quais figuras eram triângulos. Em seguida, deveriam reconhecer quais figuras eram quadrados, depois quais eram retângulos e, posteriormente, quais eram paralelogramos. Na quinta questão, os estudantes deveriam analisar um conjunto de retas e indicar quais eram paralelas. O alunos que conseguir acertar 3 dessas questões alcançará o nível 1 (Visualização).

   A partir da sexta questão, a atividade passa a explorar mais explicitamente as propriedades das figuras. Os alunos deveriam analisar algumas características do retângulo, identificando suas propriedades. Na sétima questão, era solicitado que citassem três propriedades do quadrado. Na oitava questão, deveriam reconhecer ou descrever características dos triângulos isósceles. Na nona questão, os estudantes deveriam indicar propriedades dos paralelogramos.

Por fim, na décima questão, foi solicitado que os alunos desenhassem um quadrilátero cujas diagonais não possuam o mesmo comprimento, de modo a avaliar a compreensão das características e diferenças entre os quadriláteros. O alunos que conseguir acertar 3 dessas questões alcançará o nível 2 (Análise).

2. Registros escritos e gráficos produzidos pelos alunos nos cadernos, em atividades com régua, esquadro, compasso e transferidor durantes as aulas;

3. Arquivos digitais (GeoGebra) com as construções geométricas realizadas;

4. Testes adaptados para os níveis dos alunos apresentados nos Apêndices A e B (7º e 6º anos do Ensino Fundamental, respectivamente), onde os alunos puderam demonstrar suas evoluções quanto ao conhecimento em Geometria.

   As atividades propostas tiveram como objetivo introduzir e consolidar conceitos fundamentais da geometria. Foram aplicadas duas atividades nas turmas de 7º ano e uma nas turmas de 6º ano de escolaridade.

   Descrição das atividades aplicadas:

   - Atividade I do 7º ano:
     - Na primeira questão, os estudantes foram convidados a associar diferentes representações aos conceitos primitivos da geometria — ponto, reta e plano —, desenvolvendo a capacidade de reconhecer essas ideias básicas em situações diversas.
     - A segunda questão promoveu uma reflexão sobre a vivência dos alunos com instrumentos geométricos, como compasso, régua e esquadro. Os estudantes relataram se já haviam utilizado esses materiais e em quais contextos, aproximando o conteúdo matemático de suas experiências pessoais.
     - Na terceira questão, o foco foi a identificação dos elementos de um ângulo, como vértice e lados, contribuindo para a compreensão da estrutura e da formação dos ângulos.
     - A quarta questão apresentou uma imagem de um contexto urbano, na qual os alunos analisaram a disposição das ruas, classificando-as como paralelas ou concorrentes. Nos casos de retas concorrentes, também foi solicitado que identificassem se eram perpendiculares, desenvolvendo a percepção espacial e a interpretação de imagens.

  - Por fim, na quinta questão, os estudantes trabalharam com o plano cartesiano, identificando a posição de diferentes pontos e locais, o que contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da localização espacial.

- Atividade II do 7º ano:
  - Na primeira questão, os alunos utilizaram o transferidor para medir ângulos já representados, determinando suas medidas em graus. Essa etapa contribuiu para o desenvolvimento da precisão na leitura e interpretação de medidas angulares.
  - Na segunda questão, os estudantes foram desafiados a construir ângulos com medidas específicas utilizando o transferidor. Essa atividade permitiu que aplicassem, de forma prática, o conhecimento sobre abertura angular e marcação correta das medidas.
  - A terceira questão envolveu a construção de retas com o uso de régua e esquadro, seguindo orientações passo a passo. Os alunos trabalharam conceitos como paralelismo e perpendicularidade, além de aprimorarem a organização e o cuidado com os traçados geométricos.
  - Por fim, na quarta questão, os estudantes realizaram a construção de ângulos congruentes, ou seja, ângulos com a mesma medida de outros já apresentados. Essa etapa reforçou a compreensão sobre igualdade de medidas e a reprodução fiel de figuras geométricas.

- Atividade do 6º ano:
  - Na primeira questão, os alunos utilizaram o transferidor para medir ângulos representados, identificando suas medidas em graus. Essa etapa contribuiu para o reconhecimento inicial das aberturas angulares e para o uso correto do instrumento.
  - Na segunda questão, os estudantes foram convidados a construir ângulos com medidas determinadas, também com o uso do transferidor. Essa atividade favoreceu a compreensão prática de como os ângulos são formados e representados.
  - A terceira questão envolveu a construção de retas com régua e esquadro, seguindo orientações passo a passo. Os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver habilidades motoras e compreender, de forma inicial, conceitos como alinhamento, paralelismo e perpendicularidade.
  - Na quarta questão, foi apresentada uma imagem com ruas, na qual os alunos deveriam identificar quais eram paralelas e quais eram concorrentes. Nos casos de retas concorrentes, também foi solicitado que

verificassem se eram perpendiculares, estimulando a observação e a interpretação de situações do cotidiano.

– Por fim, na quinta questão, os estudantes realizaram a associação de diferentes representações com os conceitos primitivos da geometria — ponto, reta e plano —, consolidando a compreensão desses elementos fundamentais.

5. Aplicação novamente do teste diagnóstico (Anexo A), com o objetivo de verificar a evolução nos níveis de van Hiele.

Os dados foram analisados de forma qualitativa e interpretativa, buscando indícios de progressão cognitiva, apropriação da linguagem geométrica e argumentação lógica.

## 6.6 Avaliação da Aprendizagem

A avaliação teve caráter formativo e contínuo, acompanhando todas as fases da sequência didática.

Foram considerados:

- O processo de construção geométrica;
- A capacidade de justificar propriedades;
- A precisão no uso dos instrumentos e no GeoGebra;
- A participação e autonomia durante as atividades;

O portfólio final — reunindo construções manuais e digitais — foi utilizado como instrumento de síntese e reflexão do aprendizado.

## 6.7 Resultados Esperados

Ao início da pesquisa, esperava-se que, ao término da aplicação, os alunos:

- Avançassem do nível de reconhecimento (nível 1) para o de análise e dedução informal (níveis 2 e 3);
- Demonstrassem compreensão conceitual das propriedades geométricas e capacidade de argumentar geometricamente;
- Desenvolvessem habilidades de precisão, observação e abstração;

- Reconhecessem o GeoGebra como ferramenta complementar à construção manual, facilitando a visualização e a validação de hipóteses;
- Aprendessem de forma ativa, significativa e contextualizada, conforme preconizam a BNCC (Brasil, 2018) e os PCN (Brasil, 1998).

# Capítulo 7

# Análise de Dados

## 7.1 Aplicação do Teste de van Hiele

A aplicação desse instrumento ocorreu, na E. M. Prof. Elisabete de Azevedo Dias Brandão, ocorreu no dia 01/11/2025, nas duas turmas de 6º ano. Alguns alunos faltaram no dia da aplicação, com isso apenas 48 alunos participaram, onde 23 não atingiram e 25 conseguiram atingir o nível 1, como pode ser observado nos quadros 5 e 6.

Quadro 5 – Pensamento geométrico da 1ª turma do 6º ano segundo o teste de Van Hiele

| | Bloco 1 | | | | | Bloco 2 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questões** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **Acertos** | **Nível** |
| Aluno 1 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 2 | | | | | | | | | | | 1 | N.A. |
| Aluno 3 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 4 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 5 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 6 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 7 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 8 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 9 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 10 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 11 | | | | | | | | | | | 1 | N.A. |
| Aluno 12 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 13 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 14 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 15 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 16 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 17 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 18 | | | | | | | | | | | 1 | N.A. |
| Aluno 19 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 20 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 21 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 22 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 23 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |

Quadro 6 – Pensamento geométrico da 2ª turma do 6º ano segundo o teste de Van Hiele

| | Bloco 1 | | | | | Bloco 2 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questões** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **Acertos** | **Nível** |
| Aluno 1 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 2 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 3 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 4 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 5 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 6 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 7 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 8 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 9 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 10 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 11 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 12 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 13 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 14 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 15 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 16 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 17 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 18 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 19 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 20 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 21 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 22 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 23 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 24 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 25 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |

Já na E. M. Prof. Délfica de Carvalho Wagner, a plicação ocorreu no dia 13/11/2024, nas duas turmas de 7º ano. Alguns alunos faltaram no dia da aplicação, com isso apenas 24 alunos participaram, onde 10 deles não conseguiram atingir o nível 1 dos níveis de van Hiele e 14 estavam nesse nível, como pode ser observado nos quadros 7 e 8.

Quadro 7 – Pensamento geométrico da 1ª turma do 7º ano segundo o teste de Van Hiele

| | Bloco 1 | | | | | Bloco 2 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questões** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **Acertos** | **Nível** |
| Aluno 1 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 2 | | | | | | | | | | | 0 | N.A. |
| Aluno 3 | | | | | | | | | | | 6 | 1 |
| Aluno 4 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 5 | | | | | | | | | | | 1 | 1 |
| Aluno 6 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 7 | | | | | | | | | | | 5 | 1 |
| Aluno 8 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 9 | | | | | | | | | | | 1 | N.A. |
| Aluno 10 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 11 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 12 | | | | | | | | | | | 1 | N.A. |
| Aluno 13 | | | | | | | | | | | 3 | N.A. |

Quadro 8 – Pensamento geométrico da 2ª turma do 7º ano segundo o teste de Van Hiele

| | Bloco 1 | | | | | Bloco 2 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questões** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **Acertos** | **Nível** |
| Aluno 1 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 2 | | | | | | | | | | | 6 | 1 |
| Aluno 3 | | | | | | | | | | | 2 | N.A. |
| Aluno 4 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 5 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 6 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 7 | | | | | | | | | | | 3 | N.A. |
| Aluno 8 | | | | | | | | | | | 3 | 1 |
| Aluno 9 | | | | | | | | | | | 4 | 1 |
| Aluno 10 | | | | | | | | | | | 5 | 1 |
| Aluno 11 | | | | | | | | | | | 0 | N.A. |

Analisando as respostas dos alunos, percebe-se um padrão semelhante mesmo para alunos de de anos diferentes. Nas cinco primeiras questões o objetivo é verificar a capacidade de visualização dos alunos, sendo necessário que eles apenas identificassem as figuras, sem a necessidade de analisar propriedades dessas figuras.

- Na 1ª questão do teste houve uma dificuldade de reconhecer o triângulo obtuso como triângulo.
- Na 2ª questão houve uma dificuldade de considerar um dos quadrados apresentados por não estar alinhado com a base da folha.
- Na 3ª questão apresentou o mesmo problema que a 2ª, pois o retângulo não alinhado com a base da folha também foi pouco marcado.
- Na 4ª questão alguns alunos marcaram o trapézio além dos paralelogramos, o que mostra a falta de conhecimento dos termos e nomes utilizados na Geometria. No entanto nenhum dos alunos marcou o círculo ou o triângulo.
- Na 5ª questão alguns alunos marcaram a opção D, além das opções A e C, nesta alternativa as retas, apesar de não estarem se cruzando visualmente, não são paralelas, o que demonstra uma falta de entendimento (ou conhecimento) do conceito de que as retas são unidimensionais e ilimitadas.

Nas questões de número 6 a 10, onde os alunos deveriam analisar as propriedades de figuras geométricas, não houve nenhum aluno que acertasse a quantidade de questões necessárias que os classificariam para o nível 2.

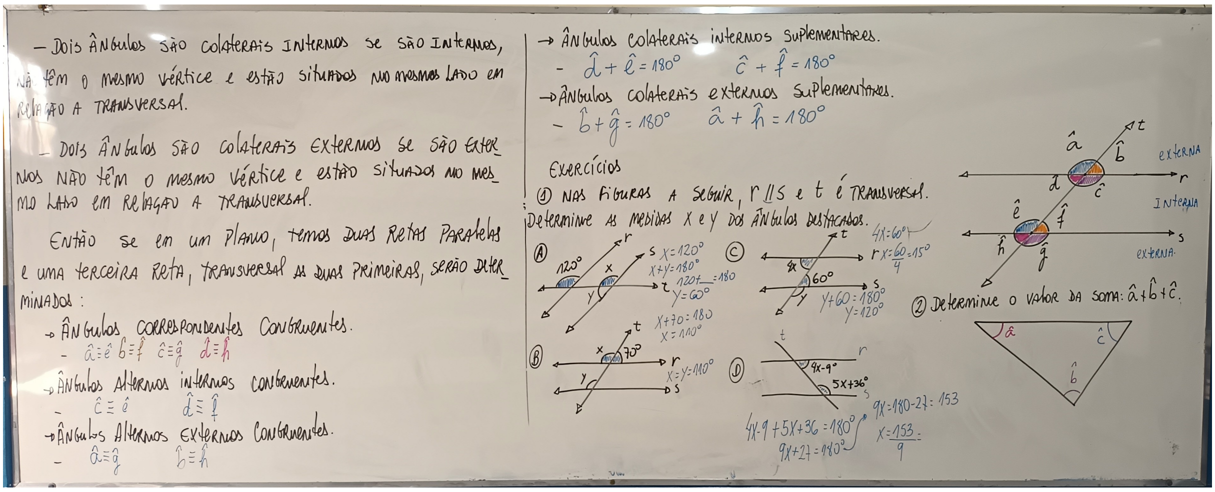
## 7.2 Aplicação das Atividades

As atividades que se encontram nos Apêndices A e B, foram elaboradas e adaptadas com o objetivo de auxiliar os discentes a avançar nos níveis de pensamento geométrico propostos pelos van Hiele (Van Hiele, 1986), fezando parte da sequência metodológica. Com essas atividades, deseja-se que os discentes tenham a oportunidade de trabalharem com as ferramentas de construções geométricas, como régua, esquadro, transferidor e compasso, demostrando as habilidades adquiridas.

As atividades foram aplicadas em concordância com o ano de escolaridade das turmas. Duas delas foram aplicadas nas turmas de 7º ano (Apêndice A) e a terceira nas turmas de 6º ano (Apêndice B). Essa diferença se dá pela necessidade de iniciar a utilização do compasso apenas no 7º ano de escolaridade.

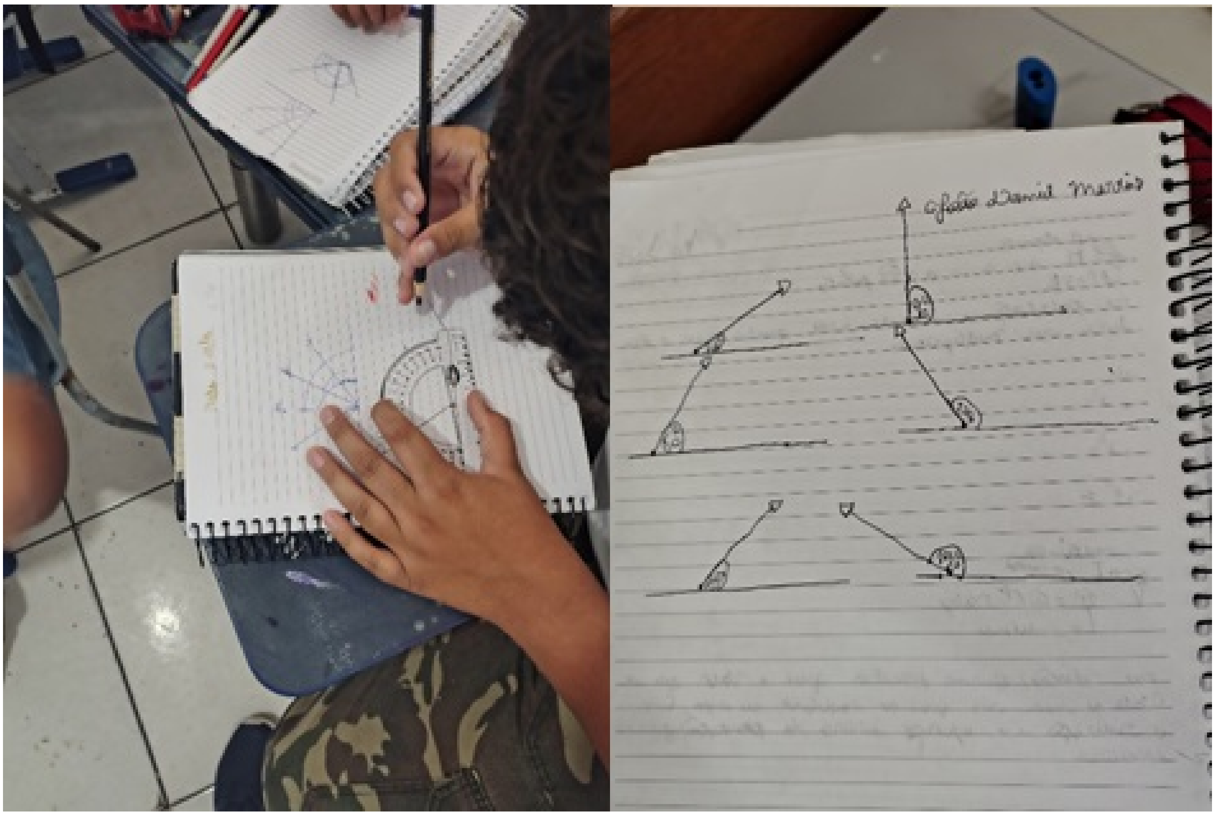
Antes das aplicações, foram ministradas aulas sobre o conteúdo de Geometria Básica, com conceitos de ponto, reta, plano, relações entre retas, sólidos geométricos e polígonos — nas Figuras 46–48 há alguns exemplos. Durante essas aulas foram apresentadas as ferramentas e discutiu-se quais profissões as utilizam. Neste momento, o docente apresentou outras ferramentas que se assemelham às utilizadas em sala de aula, como o prumo, nível de mão e esquadro de pedreiro (Figura 49).

Figura 46 – Quadro de aula no 7º ano de escolaridade



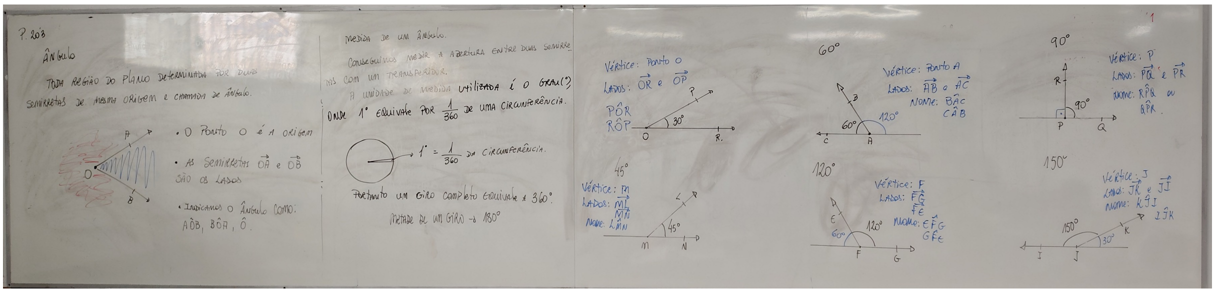

Fonte: elaboração própria.

Figura 47 – Aula de utilização do transferidor



Fonte: elaboração própria.

Figura 48 – Quadro de aula no 6º ano de escolaridade



Fonte: elaboração própria.

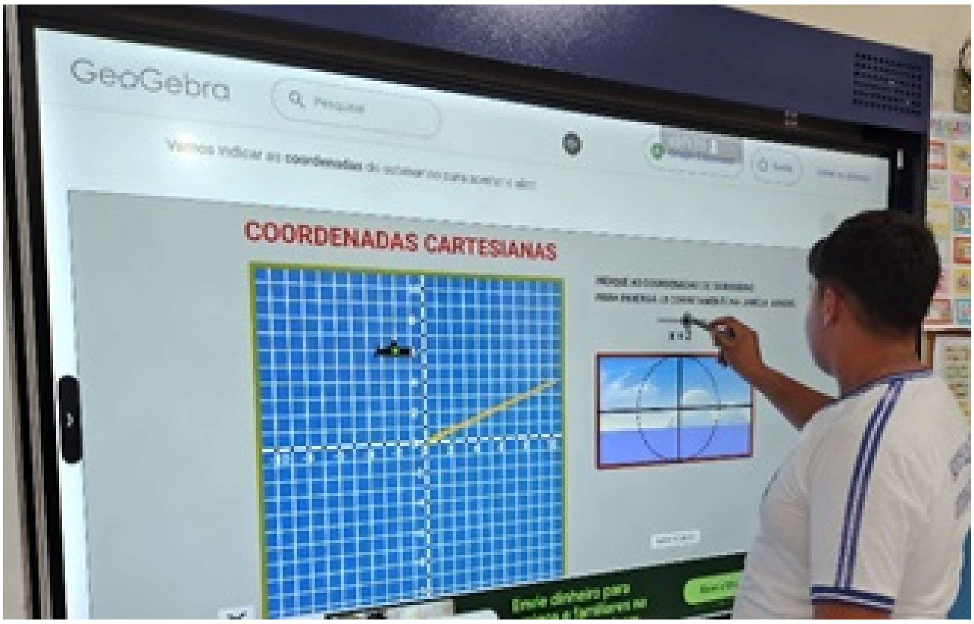
Figura 49 – Prumo, nível de mão e esquadro de pedreiro


Fonte: elaboração própria.

Também antes da aplicação das atividades foram dadas aulas utilizando o aplicativo GeoGebra. Foram utilizados, durante as aulas, ou um computador ligado a um projetor de tela, ou um quadro interativo. Nestes casos, os alunos eram convidados a interagirem com o equipamento. Em outro momento, foram disponibilizados os *tablets* com o GeoGebra, nos quais os alunos tiveram a oportunidade de utilizar as ferramentas de criação de pontos, retas, retas paralelas e perpendiculares, medição de ângulos e criação de polígonos regulares e não regulares.

Durante essas aulas, houve um aumento na interação e interesse dos alunos, que ficaram visivelmente empolgados com a oportunidade. A Figura 50 apresenta uma aula sobre coordenadas no plano cartesiano — atividade criada por Moura e Moreira (2015). Já nas Figuras 51–53, apresentam-se exemplos de aulas de construções geométricas utilizando o Geogebra.

Figura 50 – Atividade 1 no GeoGebra – Plano cartesiano

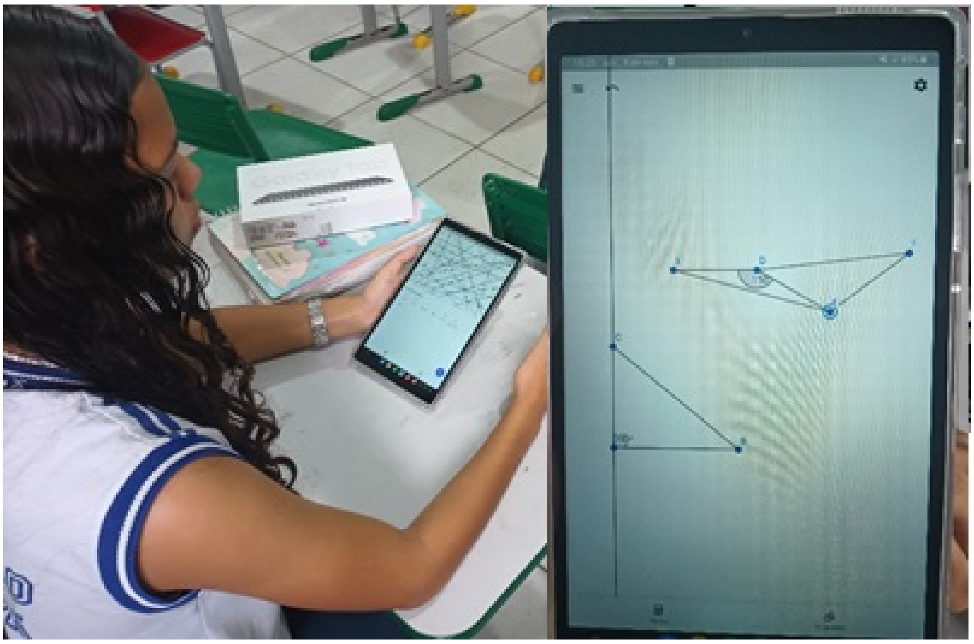



Fonte: elaboração própria.

Figura 51 – Atividade 2 no GeoGebra - Plano cartesiano

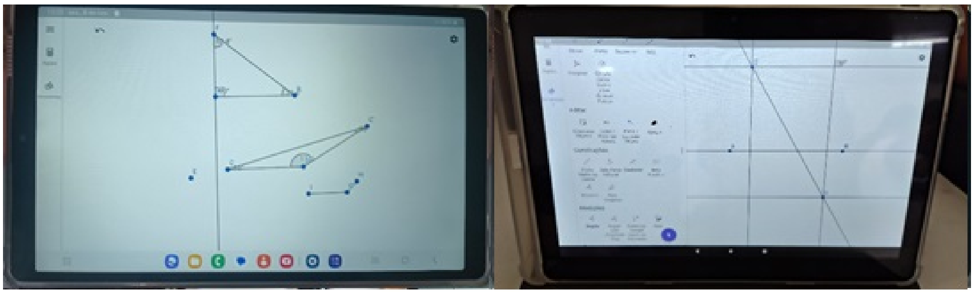
Fonte: elaboração própria.

Figura 52 – Atividade 3 no GeoGebra - Construção



Fonte: elaboração própria.

Figura 53 – Atividade 4 no GeoGebra - Construção



Fonte: elaboração própria.

### 7.2.1 Atividade Aplicada nas Turmas de 6º Ano de Escolaridade

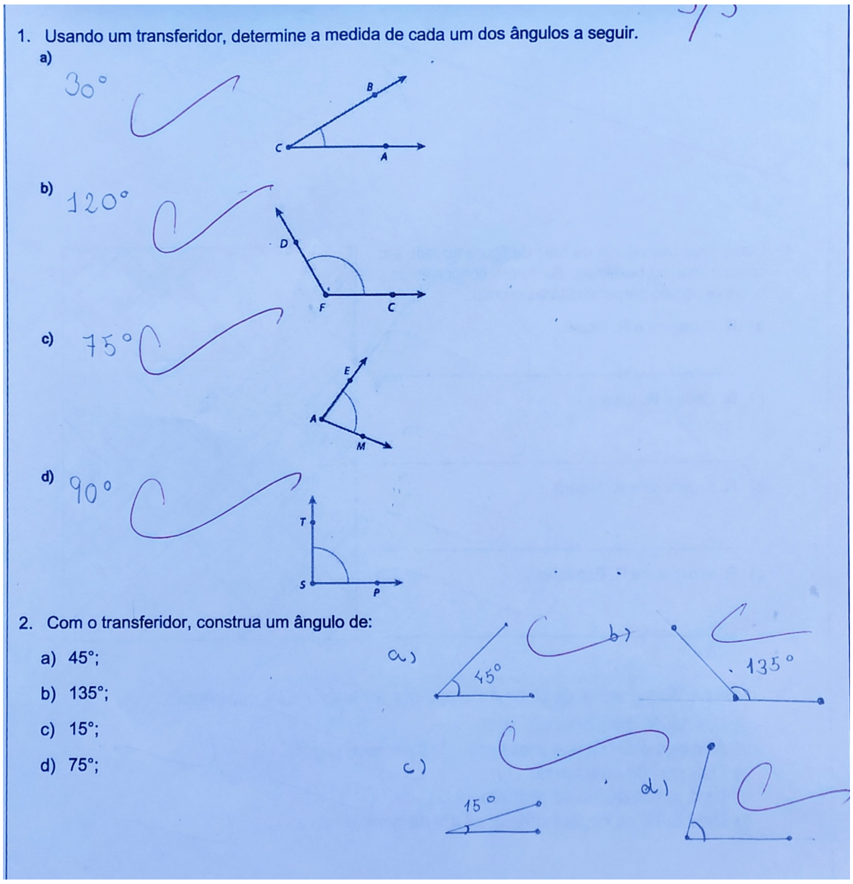
Nas turmas do 6º ano de escolaridade, foi aplicada apenas uma atividade, essa com o objetivo de reforçar as habilidades no transferidor, na régua e no esquadro. Antes da aplicação, o professor reforçou e relembrou os métodos de utilização das referidas ferramentas. Observou-se um empenho entre os alunos na execução da atividade, demonstrando uma melhora no interesse dos discentes quando são propostas atividades mais diferenciadas. Na figura 54 pode ser observado uma resumo do resultado apresentado nesta aplicação.

Figura 54 – Resultado da atividade do 6º ano


Fonte: elaboração própria.

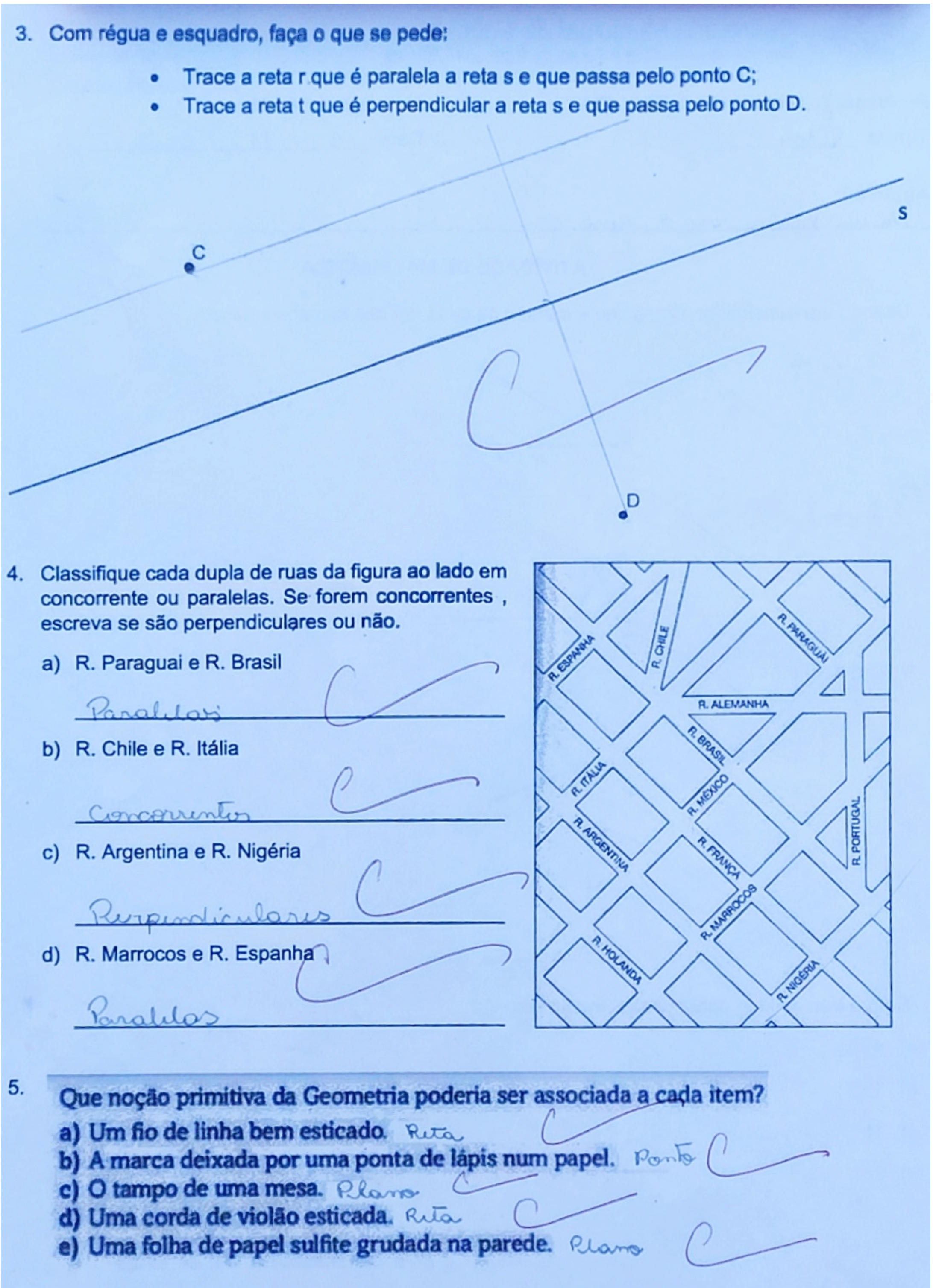
Alguns alunos necessitaram de umas intervenções durante a aplicação, mas para maioria dos casos esses conseguiram realizar a atividade de forma satisfatória. Nas duas primeiras questões, nas quais foi solicitado o uso do transferidor, houve uma facilidade maior entre os alunos. Na terceira foi solicitada a utilização de régua e esquadro; nessa, foi observada a maior dificuldade durante a execução. Porém, essa questão auxiliou no entendimento necessário para responderem a quarta questão. O que se observa é que a dificuldade na terceira questão é decorrente de falta de habilidade e prática dos alunos em utilizar os esquadros. Nas Figuras 55 e 56 observam-se exemplos de uma atividade em que o aluno conseguiu executar o que foi solicitado de forma satisfatória. Já nas Figuras 57 e 58 observa-se um exemplo da dificuldade apresentada no manuseio do esquadro.

Figura 55 – Questão 1 e 2 – Atividade 6º ano




Fonte: elaboração própria.

Figura 56 – Questão 3, 4 e 5 – Atividade 6º ano



3. Com régua e esquadro, faça o que se pede:
   - Trace a reta r que é paralela a reta s e que passa pelo ponto C;
   - Trace a reta t que é perpendicular a reta s e que passa pelo ponto D.



4. Classifique cada dupla de ruas da figura ao lado em concorrente ou paralelas. Se forem concorrentes, escreva se são perpendiculares ou não.

   a) R. Paraguai e R. Brasil

   Paralelas

   b) R. Chile e R. Itália

   Concorrentes

   c) R. Argentina e R. Nigéria

   Perpendiculares

   d) R. Marrocos e R. Espanha

   Paralelos

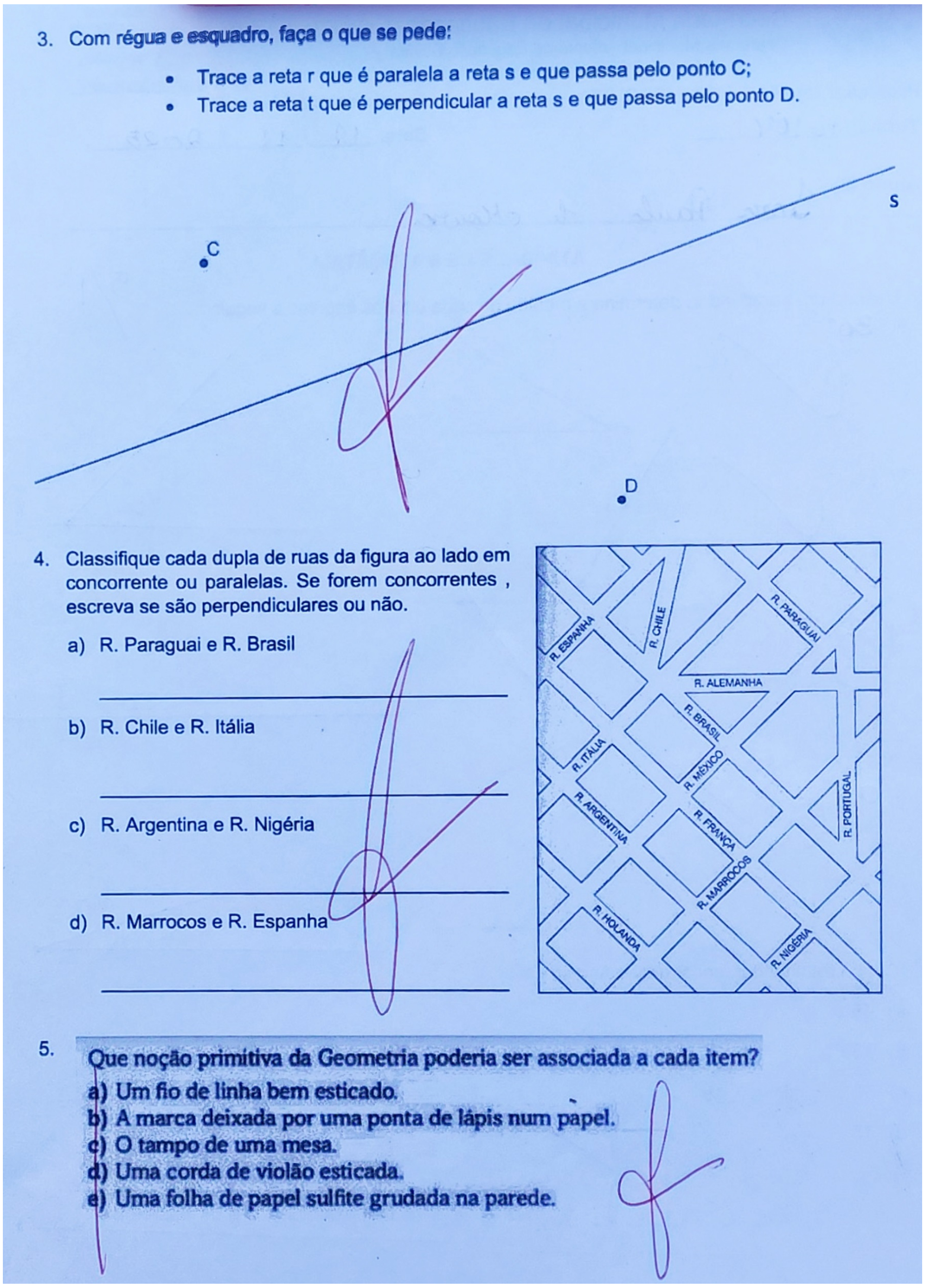


5. Que noção primitiva da Geometria poderia ser associada a cada item?

   a) Um fio de linha bem esticado. Reta
   b) A marca deixada por uma ponta de lápis num papel. Ponto
   c) O tampo de uma mesa. Plano
   d) Uma corda de violão esticada. Reta
   e) Uma folha de papel sulfite grudada na parede. Plano

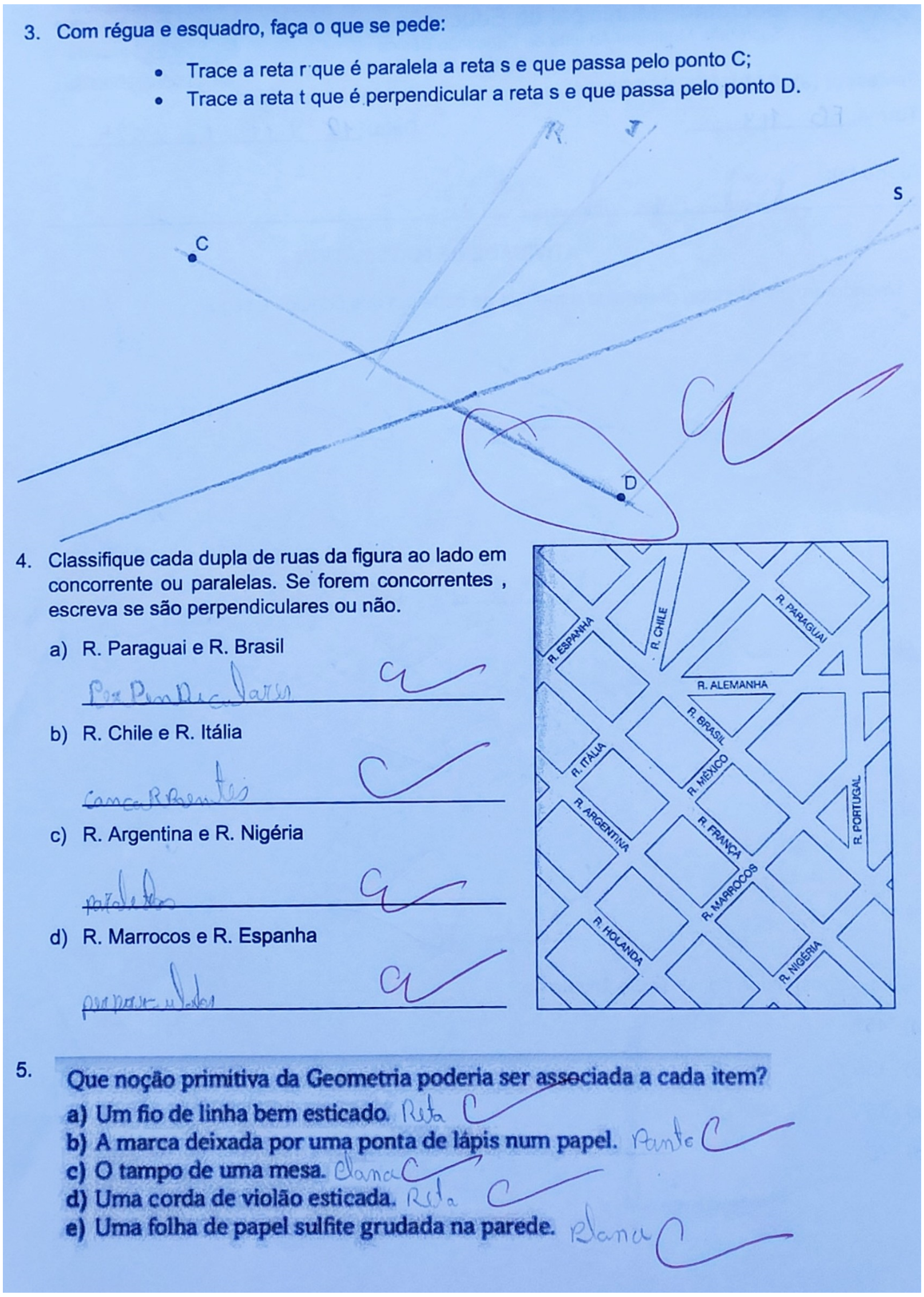
Fonte: elaboração própria.

Figura 57 – Questão 3, 4 e 5 – Atividade 6º ano – Aluno com dificuldade




Fonte: elaboração própria.

Figura 58 – Questão 3, 4 e 5 – Atividade 6º ano – Aluno com dificuldade



3. Com régua e esquadro, faça o que se pede:
   - Trace a reta r que é paralela a reta s e que passa pelo ponto C;
   - Trace a reta t que é perpendicular a reta s e que passa pelo ponto D.



4. Classifique cada dupla de ruas da figura ao lado em concorrente ou paralelas. Se forem concorrentes, escreva se são perpendiculares ou não.
   a) R. Paraguai e R. Brasil
   b) R. Chile e R. Itália
   c) R. Argentina e R. Nigéria
   d) R. Marrocos e R. Espanha



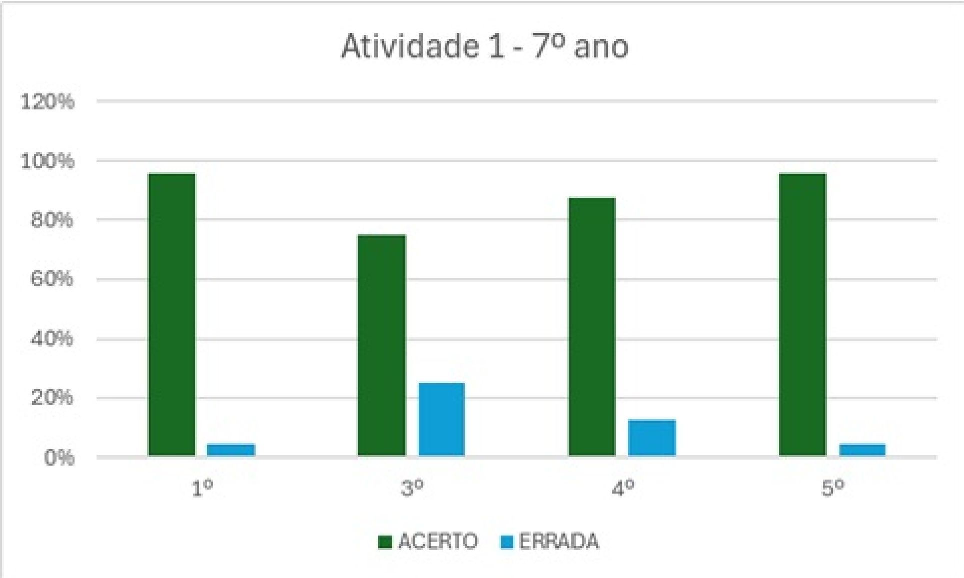
5. **Que noção primitiva da Geometria poderia ser associada a cada item?**
   **a) Um fio de linha bem esticado.** Reta
   **b) A marca deixada por uma ponta de lápis num papel.** Ponto
   **c) O tampo de uma mesa.** Plana
   **d) Uma corda de violão esticada.** Reta
   **e) Uma folha de papel sulfite grudada na parede.** Plana

Fonte: elaboração própria.

### 7.2.2 Atividades Aplicadas nas Turmas de 7º Ano de Escolaridade

Foram aplicadas duas atividades nestas turmas. Na primeira, o objetivo era verificar o entendimento dos conceitos básicos de Geometria e se estes alunos já haviam tido alguma experiência com as ferramentas. Aqui, boa parte dos alunos conseguiu realizar a atividade com pouca ou quase nenhuma ajuda; porém, o professor teve que realizar algumas intervenções durante a aplicação, relembrando os conceitos propostos e solicitados na atividade. Assim, com exceção da 2ª questão que solicita uma resposta pessoal, as outras questões foram de aproveitamento total. Na figura 59 pode ser observado uma resumo do resultado apresentado nesta aplicação.

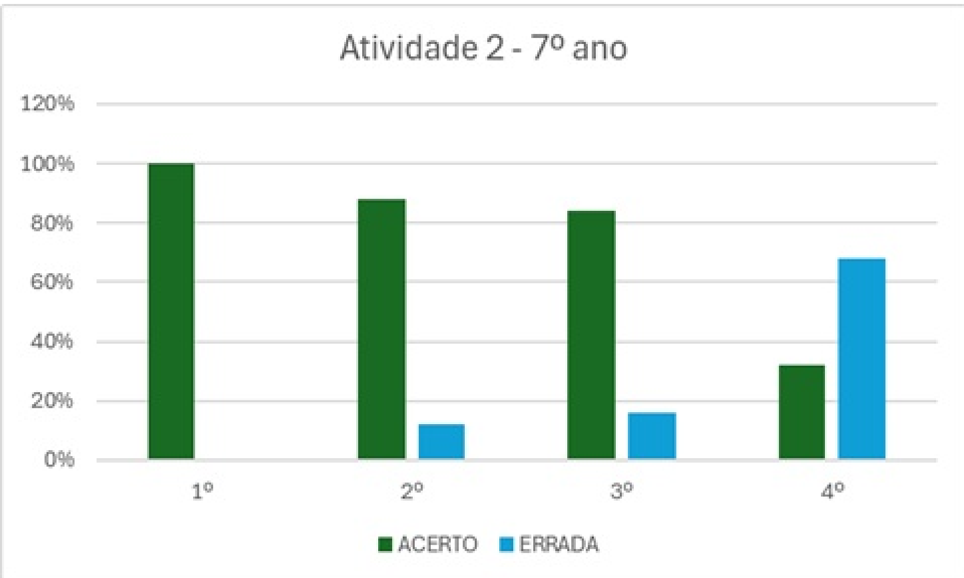
Figura 59 – Resultado da 1ª atividade do 7º ano




Fonte: elaboração própria.

Na 2ª atividade, a proposta é a utilização das ferramentas. Novamente, o professor teve que realizar algumas intervenções. Porém os alunos conseguiram utilizar bem o transferidor, régua e esquadro; a dificuldade foi na utilização do compasso. A falta de habilidade no manuseio das ferramentas foi mais evidente na 4ª questão desta atividade, onde metade dos alunos não conseguiu realizar de forma satisfatória a questão. Na figura 60 pode ser observado uma resumo do resultado apresentado nesta aplicação.

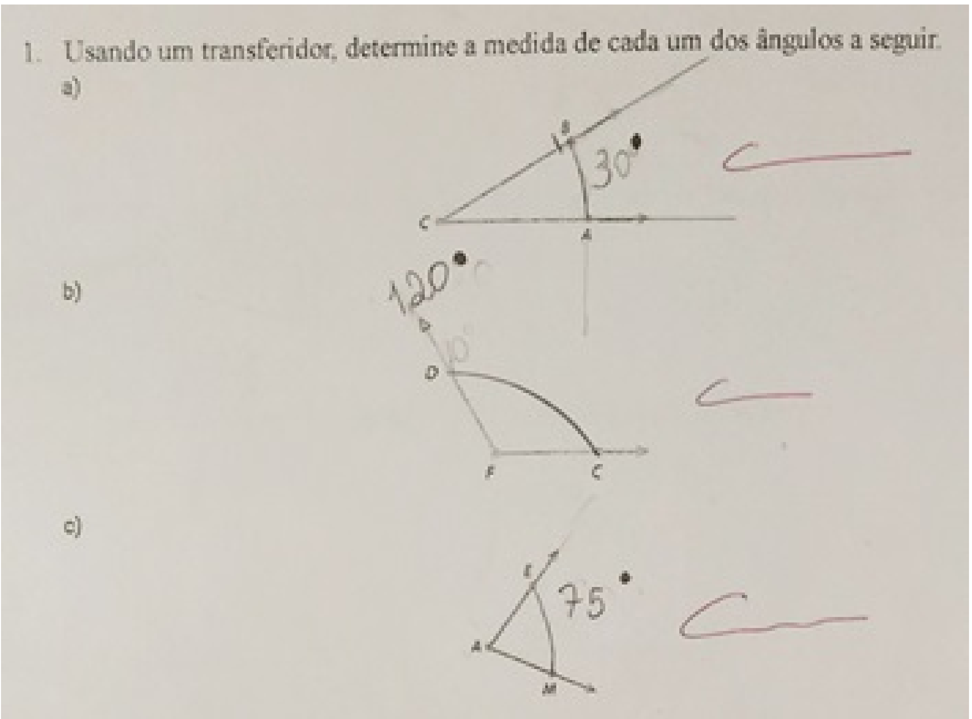
Figura 60 – Resultado da 2ª atividade do 7º ano




Fonte: elaboração própria.

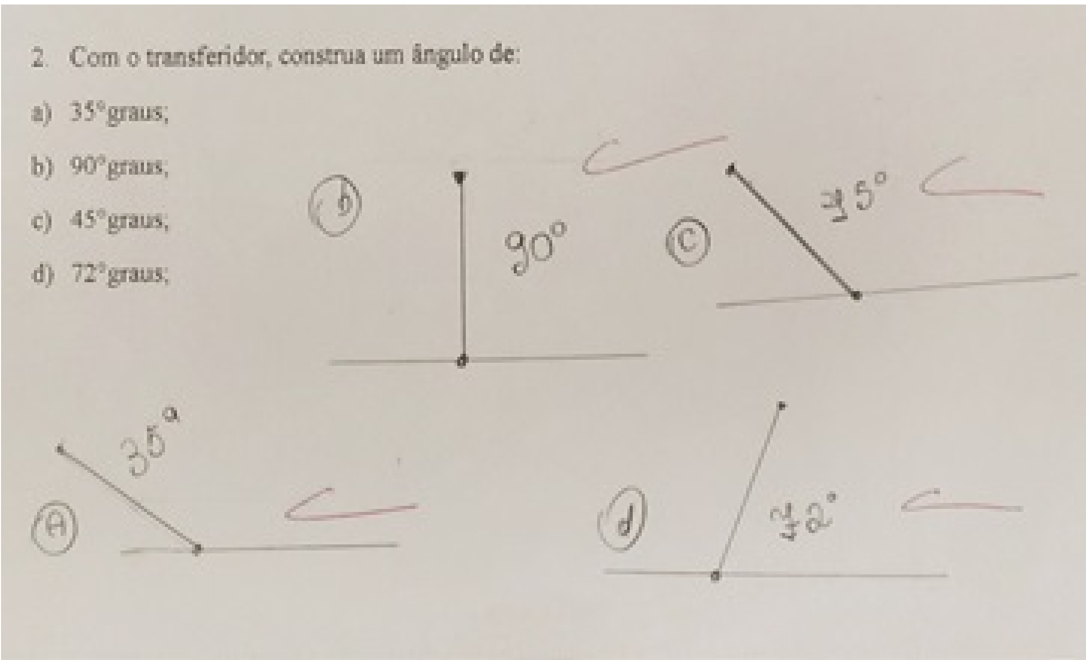
Nas Figuras 61–64 observam-se exemplos de uma atividade em que o aluno conseguiu executar o que foi solicitado de forma satisfatória. Já na Figura 65 observa-se um exemplo da dificuldade apresentada no manuseio do compasso.

Figura 61 – Questão 1 - Atividade 7º ano



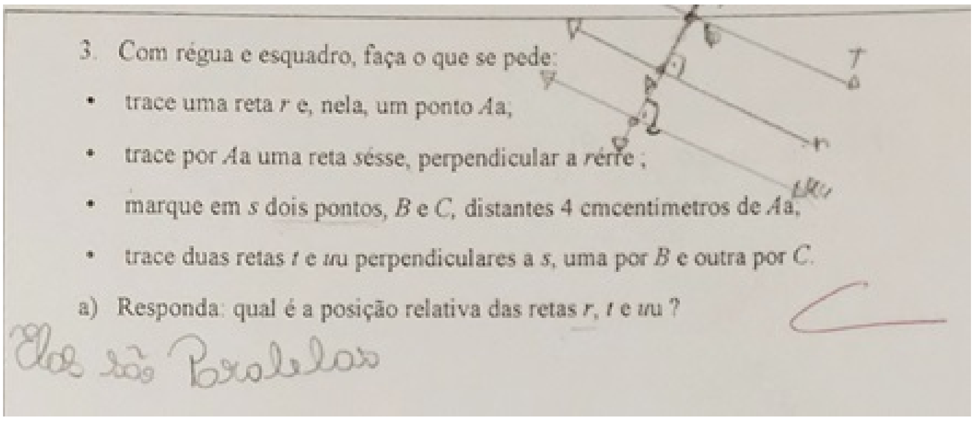

Fonte: elaboração própria.

Figura 62 – Questão 2 - Atividade 7º ano



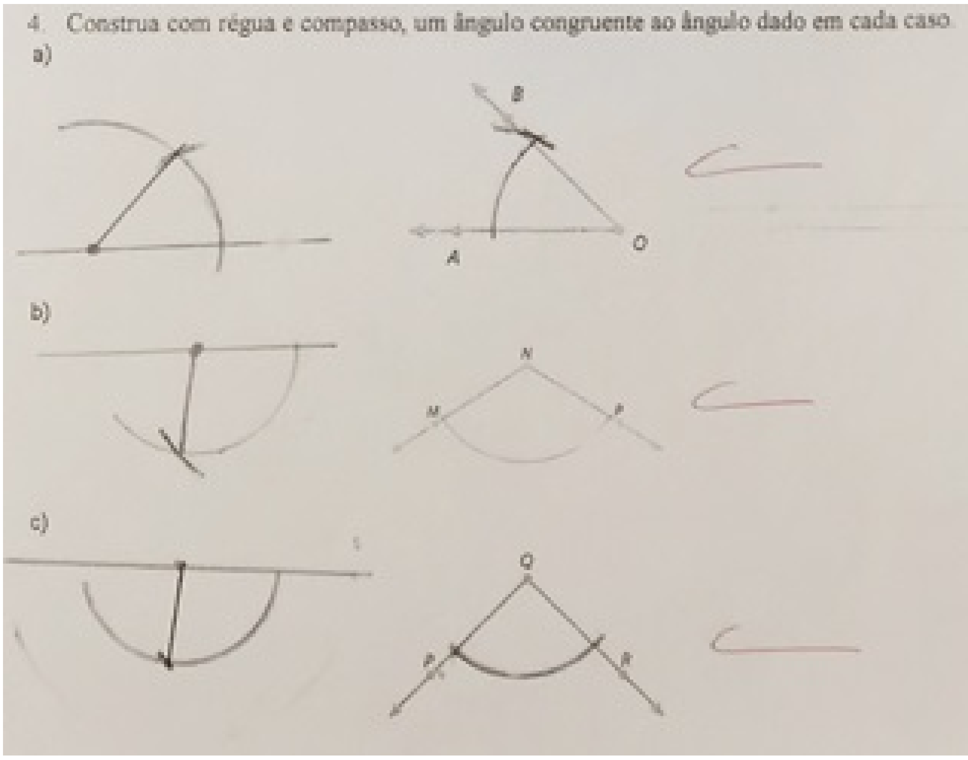

Fonte: elaboração própria.

Figura 63 – Questão 3 - Atividade 7º ano



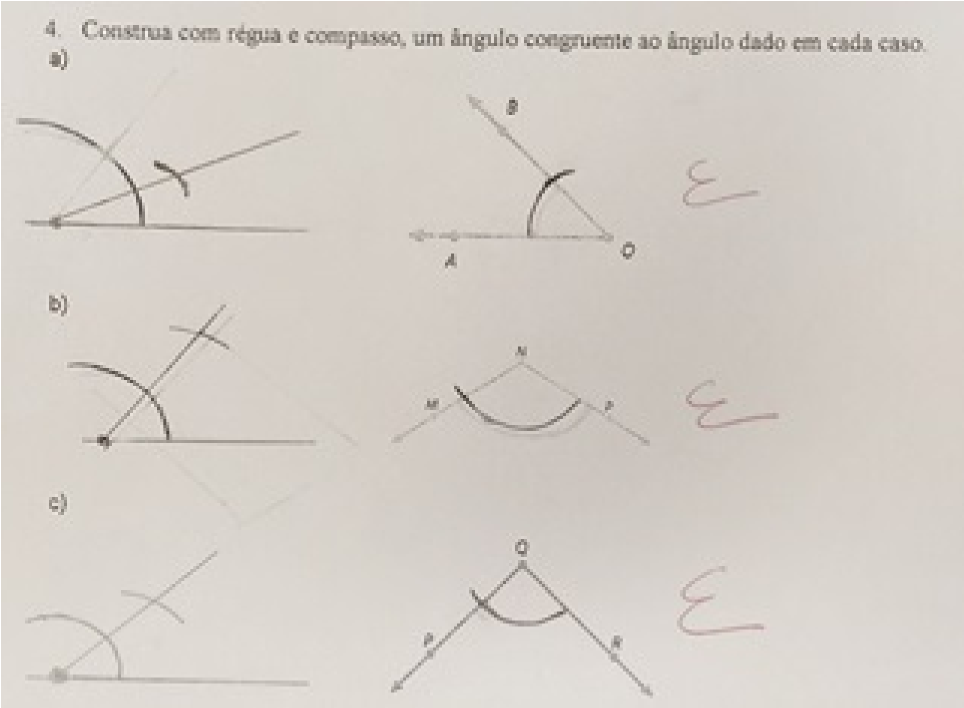

Fonte: elaboração própria.

Figura 64 – Questão 4 - Atividade 7º ano




Fonte: elaboração própria.

Figura 65 – Questão 4 - Atividade 7º ano - Aluno com dificuldade




Fonte: elaboração própria.

### 7.2.3 Reaplicação do Teste de van Hiele

A reaplicação do Teste de van Hiele se fez necessária para avaliar o desenvolvimento dos alunos após a aplicação da sequência didática proposta neste trabalho.

Nas turmas de 6º ano, dos 48 alunos que fizeram o primeiro teste, faltaram 8. Porém entre os 40 que refizeram o teste houve uma melhora nos resultados: 10 alunos não conseguiram ainda alcançar o nivél 1 (visulização), 16 alunos alcançaram o nível 1 e 14 alunos conseguiram alcançar o nível 2 (análise).

Nas turmas de 7º ano, dos 24 alunos que fizeram o primeiro teste, faltaram 3. Observou-se também uma melhora nos resultados: 6 alunos não conseguiram ainda alcançar o nivél 1 (visulização), 8 alunos alcançaram o nível 1 e 7 alunos conseguiram alcançar o nível 2 (análise).

Durante a correção verificou-se que nas cinco primeiras questões houve uma melhora na identificação (visualização) nos quadrados e retângulos que estão rotacionados nas questões 2 e 3. A dificuldade em reconhecer o triângulo C na questão 1 diminuiu, mas permanece como um erro recorrente. Na 4ª questão houve uma melhora em reconhecer os paralelogramos. E na 5ª questão não houve que marcasse a opção D como retas paralelas.

Já no bloco 2 do teste, questões de 6 a 10, onde o objetivo é a análise, observou-se uma evolução de alguns alunos. Na questão 6 os alunos que poderiam e deveriam marcar mais de uma afirmativa, marcaram apenas uma, o que me faz pensar na possibilidade de esses alunos não terem entendido a possibilidade de marcação mais de uma afirmativa. Essa analise se afirma na correção da 8ª questão, onde o enunciado solicita que seja marcado apenas a afirmativa correta. Neste caso a quantidade de acertos aumentou.

Na 7ª questão, a dificuldade foi em escrever 3 propriedades, pois para aqueles que apresentaram alguma resposta, muitos deram apenas duas propriedades corretas,

Na Questão 9 poucos conseguiram apresentar alguma propriedade do paralelogramo. Ou não escreviam nada ou erravam na tentativa. Para os que escreveram corretamente, escreviam as 3 propriedades corretamente.

Alguns poucos alunos desenharam o quadrilátero solicitado na 10ª questão. Dentre os que tentaram, poucos conseguiram executar o desenho solicitado corretamente, em sua maioria ele desenhavam quadriláteros que apresentam diagonais com o mesmo comprimento.

# Capítulo 8

# Conclusão

A presente pesquisa teve como objetivo analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental por meio da aplicação de uma sequência didática fundamentada na Teoria dos Níveis de van Hiele e mediada pelo uso de régua, compasso, transferidor e do *software* GeoGebra. A proposta adotada contribuiu para ampliar as formas de interação com os conceitos trabalhados, permitindo que os alunos participassem de maneira mais efetiva das atividades desenvolvidas. Após a aplicação da sequência didática, foi possível observar avanços no entendimento dos conteúdos geométricos por parte dos estudantes.

Os resultados do teste inicial indicaram que grande parte dos estudantes ainda se encontra no nível 0 de van Hiele, caracterizado pela visualização, com dificuldades em identificar propriedades e classificar figuras. Tanto no 6º quanto no 7º ano, observaram-se fragilidades semelhantes, especialmente no reconhecimento de triângulos obtusângulos, paralelogramos e figuras que mantêm suas propriedades mesmo quando apresentadas em diferentes orientações. Também foram identificadas dificuldades relacionadas à compreensão de paralelismo, perpendicularidade e definição de reta.

A aplicação das atividades práticas evidenciou que, apesar das dificuldades iniciais, o uso orientado dos instrumentos geométricos contribuiu para progressos perceptíveis. Os estudantes demonstraram maior autonomia no uso de régua, transferidor e esquadro, embora o compasso tenha apresentado maior desafio, especialmente em tarefas que exigiam precisão ou múltiplos passos de construção. Ainda assim, observou-se evolução na capacidade de identificar relações entre elementos das figuras e na construção de objetos geométricos com maior exatidão.

Outro aspecto relevante foi o crescente envolvimento dos estudantes ao longo da sequência didática. Atividades que fugiam da rotina, especialmente aquelas que exigiam manipulação de instrumentos ou experimentação no GeoGebra, despertaram maior interesse e contribuíram para uma postura mais investigativa diante da Geometria.

A alternância entre construções manuais e digitais possibilitou uma compreensão mais profunda das propriedades das figuras, alinhando-se ao que a Teoria de van Hiele propõe para promover avanços entre os níveis cognitivos.

Após a reaplicação do teste de van Hiele, observou-se que alguns estudantes apresentaram progressão para níveis mais avançados do modelo de van Hiele, com indícios de alcance do nível 2 (análise), o que sugere que a utilização dos recursos propostos contribuiu para esse avanço. Outro fato foi a redução no quantitativo de alunos que permaneceram abaixo do nível 1 (visualização), indicando um movimento geral de progressão nos níveis de pensamento geométrico.

A análise dos dados confirma que a metodologia adotada — articulando instrumentos tradicionais e tecnologia digital — apresenta alto potencial pedagógico.

Dessa forma, conclui-se que a abordagem adotada apresenta potencial para contribuir com o desenvolvimento do pensamento geométrico, especialmente nos níveis iniciais do modelo de van Hiele. Contudo, os resultados da reaplicação do teste indicam que avanços mais consistentes demandam maior tempo de intervenção, continuidade das atividades e ampliação das experiências geométricas, a fim de promover progressões mais consolidadas nos níveis de raciocínio dos estudantes.

Sugere-se, para trabalhos futuros, a continuidade da sequência didática ao longo de períodos maiores, a ampliação das tarefas envolvendo compasso e esquadro e a incorporação de avaliações intermediárias que permitam acompanhar a progressão entre os níveis de van Hiele.

# Referências


A CASA DAS ARTES. *Compasso Técnico Compacto 9014 TRIDENT*. [ca. 2025]. Disponível em: <https://www.acasadasartes.com.br/compasso-tecnico-compacto-9014-trident>. Acesso em: 1 set. 2025. Citado na página 36.

AFC EDUCAÇÃO. *Blog*: Os Elementos de Euclides. 2020. Disponível em: https://www.afceducacao.com.br/noticia/430/os-elementos-de-euclides/. Acesso em: 15 set. 2025. Citado na página 20.

ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. *Revista do Professor de Matemática*, n. 45, 2001. Citado na página 21.

ÁVILA, P. de. *Os elementos de Euclides*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Ferderal de Santa Catarina, Florianópolis SC, mar. 2003. Citado na página 20.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental, 1998. Volume 8. Citado 5 vezes nas páginas 14, 45, 53, 62 e 68.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília/DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Citado 8 vezes nas páginas 14, 53, 54, 57, 58, 60, 62 e 68.

BRASIL. Ministério da Educação. *BNCC para navegação. Matemática no Ensino Fundamental — Anos Finais: unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades*. [2018?]. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/matematica-no-ensino-fundamental-anos-finais-unidades-tematicas-objetos-de-conhecimento-e-habilidades. Acesso em: 15 set. 2025. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

CALABRIA, A. R. A Geometria fora da Grécia. *Revista do Professor de Matemática*, n. 81, p. 5–9, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

COSTA JÚNIOR, J. R.; SILVA, J. B. R. da. A Geometria pela Ótica da Teoria de van Hiele: uma análise do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. In: UEPB. *Anais do VIII Encontro Paraibano de Educação Matemática*. Campina Grande/PB, 2014. ISSN: 2317-0042. Citado na página 61.

DUNORTE OFFICE. *Kit Régua Geométrico Transparente Composto por 1 Régua 30cm, 1 Transferidor 180°, 1 Transferidor 360° e 1 Esquadro 60° - Maxcril - 10130002*. [ca. 2025]. Disponível em: https://www.papelariadunorte.com.br/papelaria-e-escolar/reguas-e-esquadros/kit-regua-geometrico-transparente-composto-por-1-regua-30cm-1-transferidor-180-1-transferidor-360-e-1-esquadro-60-maxcril-10130002/p. Acesso em: 1 set. 2025. Citado na página 37.

EUCLIDES. *Os Elementos*. 1. ed. São Paulo/SP: UNESP, 2009. Tradução: Irineu Bicudo. ISBN 9788571399358. Citado na página 24.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas/SP: Unicamp, 2004. ISBN 978-8526806573. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 21.

FABRICIO, C. M. *Geometria Plana: Construindo Relações e Conceitos*. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Especialização) — UFRGS, Porto Alegre/RS, 2015. Orientador: Márcia Erondina Dias de Souza da silva. Citado na página 61.

FERREIRA, R. M. *Transformações Geométricas por Meio do Software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Jataí, Jataí/GO, 2020. Citado na página 62.

GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. (Ed.). *Araribá Plus: Matemática*: 6º ano. 5. ed. São Paulo/SP: Editora Moderna, 2018. v. 1. Citado 6 vezes nas páginas 27, 35, 41, 42, 43 e 44.

GÊNESIS SUPRIMENTOS. *Esquadro Escolar 26cm 45°*. [ca. 2025]. Disponível em: https://www.genesissuprimentos.com.br/2101-ESQUADRO-ESCOLAR-26CM-45. Acesso em: 1 set. 2025. Citado na página 37.

GEOGEBRA. *Página inicial*. [ca. 2026]. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 1 jan. 2026. Citado na página 46.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. *A Conquista da Matemática*: 7º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo/SP: [s.n.], 2018. Citado na página 33.

KAIBER, C. T. *O Modelo de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele*. [2021]. Notas de aula. Disponível em: http://matematica.ulbra.br/math/geometria/vanhiele.pdf. Acesso em: 26 dez. 2025. Citado na página 62.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *A educação matemática em revista. SBEM*, v. 3, n. 4, p. 3–13, dez. 1995. Citado na página 14.

MARCA, A.; BIESFORD, J.; BENNEMANN, M. Construções geométricas como recurso pedagógico nas aulas de matemática do ensino médio. In: SOCIEDADE BASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM*. [S.l.], 2016. ISSN 2178-034x. Citado 5 vezes nas páginas 35, 54, 55, 59 e 61.

MATHIAS, C. V. O potencial do geogebra como ferramenta de auxílio às habilidades de visualização. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, v. 12, n. 2, p. 44–66, 2023. Citado na página 58.

MEDEIROS, I. A. de A. *O Uso de Aplicativos como Instrumentos de Estímulo Pedagógico Direcionado ao Ensino e Aprendizagem de Geometria Plana no 9º Ano do Ensino Fundamental*. Dissertação (mathesis) — UFMA, São Luis/MA, 2022. Citado na página 61.

MENDES, I. A. *Matemática e Investigação em Sala de Aula — Tecendo Redes Cognitivas na Aprendizagem*. 2. ed. São Paulo/SP: Editora Livraria da Física, 2009. Citado na página 45.

MLODINOW, L. *A Janela de Euclides*. São Paulo/SP: Geração, 2004. ISBN 9788575090992. Citado na página 18.

MOURA, A.; MOREIRA, A. *GeoGebra*: Batalha naval no plano cartesiano. 2015. Atividade no GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/d5cnrys7. Acesso em: 28 ago. 2024. Citado na página 75.

NASCIMENTO, E. Avaliação do uso do software geogebra no ensino de geometria: Reflexão da prática na escola. *Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra*, v. 1, p. 125–132, 01 2012. ISSN 2301-0185. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. da F. P. *Geometria segundo a Teoria de van Hiele*. 4. ed. Rio de Janeiro/RJ: Projeto Fundão/IM-UFRJ, 1997. Citado na página 64.

OLIVEIRA, L. M. da S. *Ensinando Geometria com Régua e Compasso, Uma Proposta para o 8º Ano*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), Campos dos Goytacazes/RJ, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 14, 15, 21, 54, 55, 57, 59 e 61.

PAPA NETO, A. *Geometria Plana e Construções Geométricas*. Fotaleza/CE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, 2017. Citado na página 20.

POUZADA, T. A. et al. Discursos de professores de matemática sobre o ensinar geometria com o uso de tecnologias digitais. *Revista Pesquisa Qualitativa*, v. 9, n. 20, p. 40–59, abr. 2021. ISSN 2525-8222. São Paulo/SP. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 60.

REIS, A. M. dos. *A Matemática Egípcia — Solução de alguns problemas algébricos do papiro de Rhind*. Trabalho de Conclusão de Curso — Instituto Federal de São Paulo, São Paulo/SP, 2018. Disponível em: https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/mod/data/view.php?id=59866. Acesso em: 15 set. 2025. Citado na página 19.

RODRIGUES, M. U.; AZEVEDO, S. G. de M. Software geogebra nas aulas de matemática do ensino médio: um olhar para dissertações e teses no brasil. *Revista Prática Docente (RPD)*, v. 8, n. 1, 2023. ISSN 2526-2149. Citado na página 61.

SANTOS, A. R. S.; VIGLIONI, H. H. de B. *Geometria Euclidiana Plana*. São Cristóvão/SE: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011. Citado na página 19.

SANTOS, J. M. S. R. dos. *A Teoria de van Hiele no Estudo de Áreas de Polígonos e Poliedros*. Dissertação (mathesis) — UENF, Campos dos Goytacazes/RJ, 2015. Citado na página 61.

SANTOS, R. de J.; MENEZES, V. M. de; ETCHEVERRIA, T. C. O que pensam os professores das escolas da rede pública de Itabaiana sobre o ensino de geometria. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática*. Curitiba/PR, 2013. Citado na página 54.

SILVA, M. R. A. da. *A utilização do Software GeoGebra no Processo de Ensino-aprendizagem da Geometria Plana*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal De Alagoas, Maceió/AL, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 58, 59, 61 e 62.

SILVA, R. A. *Lugares Geométricos com o Geogebra*. Dissertação (mathesis) — UFV - Universidade Federal de Viçosa, Florestal/MG, 2024. Citado na página 61.

TILIBRA EXPRESS. *Régua em Poliestireno 20cm Académie*. [ca. 2025]. Disponível em: https://www.tilibraexpress.com.br/regua-em-poliestireno-20cm-academie. Acesso em: 1 set. 2025. Citado na página 36.

VAN HIELE, P. M. *Structure and insight: a theory of mathematics education.* Orlando, Florida: Academic Press, Inc., 1986. Citado 5 vezes nas páginas 16, 55, 56, 62 e 73.

WAGNER, E. *Construções Geométricas*. 6. ed. Rio de Janeiro/RJ: Sociedade Brasileira de Matemática SBM, 2007. Citado na página 36.

ZUIN, E. de S. L. Parâmetros curriculares nacionais de matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e o ensino das construções geométricas entre outras considerações. *REUNIÕES ANPED*, 2002. Citado na página 21.

# Apêndices

# APÊNDICE A

# Atividades do 7º Ano

PROFMAT

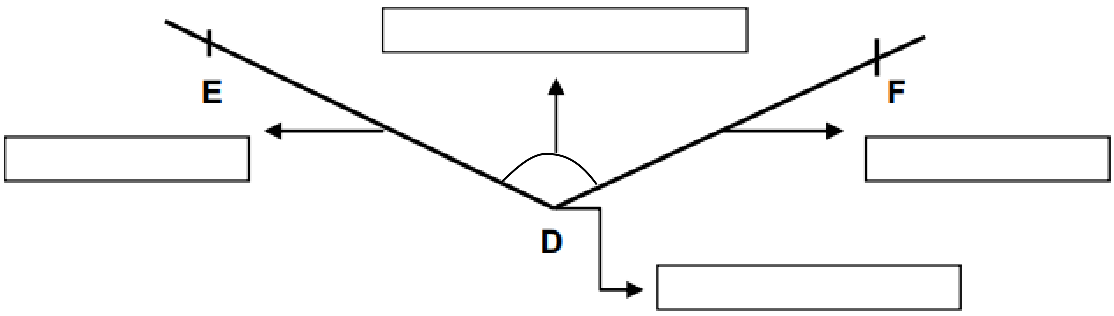
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisador: Raphael dos Santos Mesquita
Orientador: Rafael Brandão
Aluno: ______________________________________________
Turma: ____________________ Data: ____/_____/_________

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

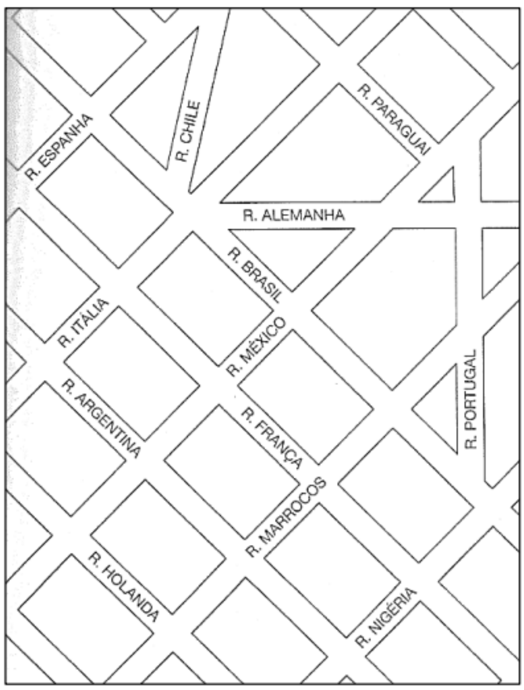
1) Que noção primitiva da Geometria poderia ser associada a cada item?
   **a)** Um fio de linha bem esticado.
   **b)** A marca deixada por uma ponta de lápis num papel.
   **c)** O tampo de uma mesa.
   **d)** Uma corda de violão esticada.
   **e)** Uma folha de papel sulfite grudada na parede.

2) Você já havia utilizado o compasso, o transferidor, os esquadros e régua? Se sim, qual e onde?

3) Observe o ângulo desenhado e identifique seus elementos escrevendo nos espaços:

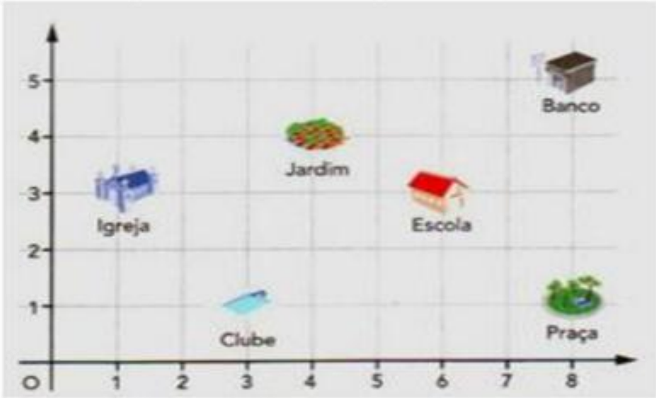



4) Classifique cada dupla de ruas da figura ao lado em concorrente ou paralelas. Se forem concorrentes , escreva se são perpendiculares ou não.
   a) R. Paraguai e R. Brasil
   b) R. Chile e R. Alemanha
   c) R. Argentina e R. Nigéria
   d) R. Marrocos e R. Itália



5) Observe a localização de alguns lugares que estão no plano cartesiano abaixo.

Que construção está localizado nas coordenadas:




a) (3,1) ____________________________

b) (1,3) ____________________________

c) (4,4) ____________________________

d) (6,3) ____________________________

e) (8,1) ____________________________

f) (8,5) ____________________________

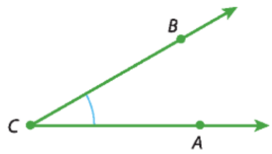
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisador: Raphael dos Santos Mesquita
Orientador: Rafael Brandão
Aluno: ____________________________________________

Turma: ______________________ Data: ____/_____/__________

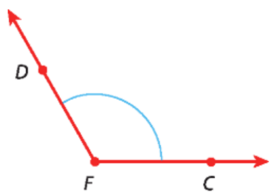
TESTE DE MATEMÁTICA

1. Usando um transferidor, determine a medida de cada um dos ângulos a seguir.

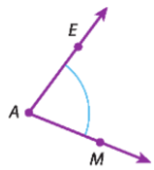
**a)**



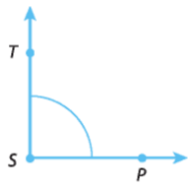

**b)**




**c)**




**d)**




2. Com o transferidor, construa um ângulo de:

a) 35°graus;

b) 90°graus;

c) 45°graus;

d) 72°graus;

3. Com régua e esquadro, faça o que se pede:

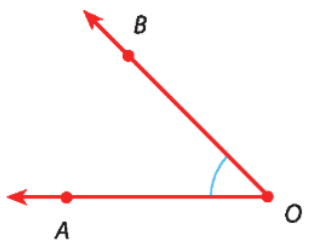
- trace uma reta *r* e, nela, um ponto *A*a;
- trace por *A*a uma reta *s*ésse, perpendicular a *r*érre ;
- marque em *s* dois pontos, *B* e *C,* distantes 4 cmcentímetros de *A*a;
- trace duas retas *t* e *u*u perpendiculares a *s*, uma por *B* e outra por *C*.

a) Responda: qual é a posição relativa das retas *r*, *t* e *u*u ?

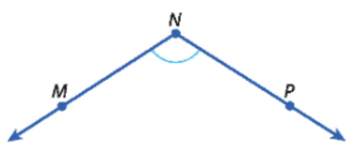
b) Quais seriam os passos para realizar essa construção com um *software*, como o apresentado no *Para saber mais*?

4. Construa com régua e compasso, um ângulo congruente ao ângulo dado em cada caso.

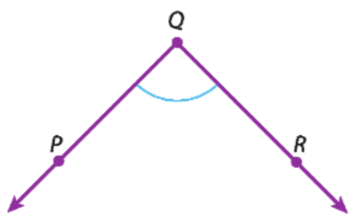
**a)**




**b)**




**c)**



# APÊNDICE B

# Atividades do 6º Ano

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisador: Raphael dos Santos Mesquita
Orientador: Rafael Brandão
Aluno: ____________________________________________
Turma: ________________ Data: ____/ _____/ _________

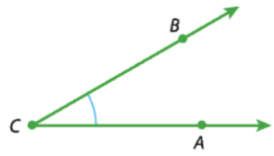
PROFMAT

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

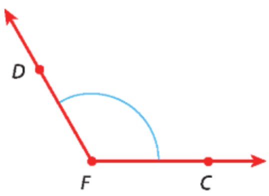
## ATIVIDADE DE MATEMÁTICA

1. Usando um transferidor, determine a medida de cada um dos ângulos a seguir.

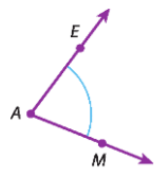
**a)**



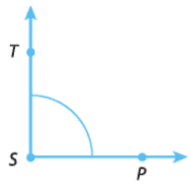

**b)**




**c)**




**d)**




2. Com o transferidor, construa um ângulo de:

a) 45°;

b) 135°;

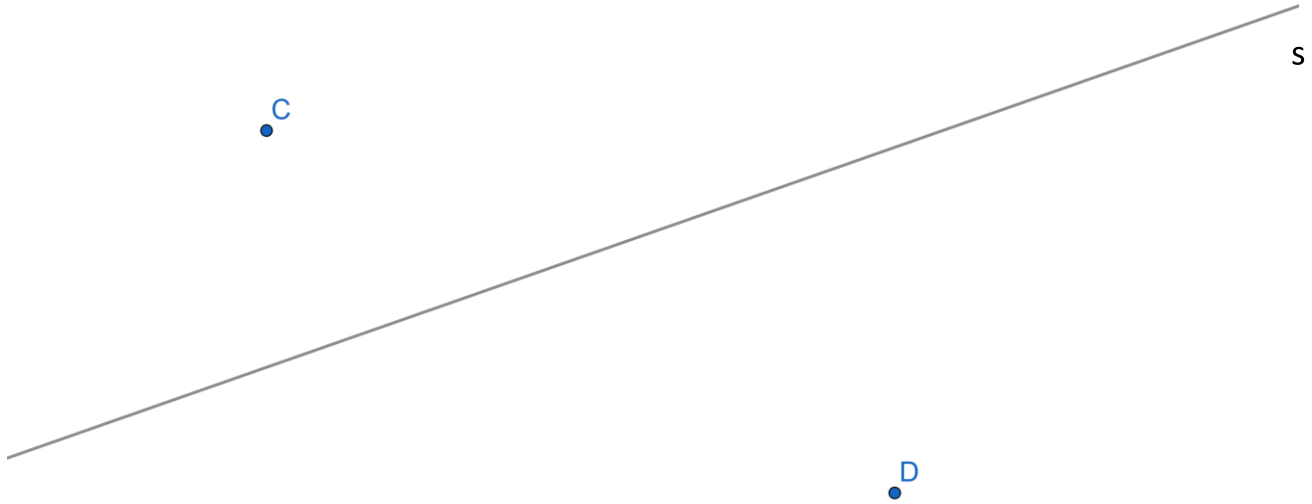
c) 15°;

d) 75°;

3. Com régua e esquadro, faça o que se pede:

- Trace a reta r que é paralela a reta s e que passa pelo ponto C;
- Trace a reta t que é perpendicular a reta s e que passa pelo ponto D.

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisador: Raphael dos Santos Mesquita
Orientador: Rafael Brandão
Aluno: ____________________________________________
Turma: ________________ Data: ___/ ____/ _______




4. Classifique cada dupla de ruas da figura ao lado em concorrente ou paralelas. Se forem concorrentes , escreva se são perpendiculares ou não.
   a) R. Paraguai e R. Brasil

   ______________________________________

   b) R. Chile e R. Itália

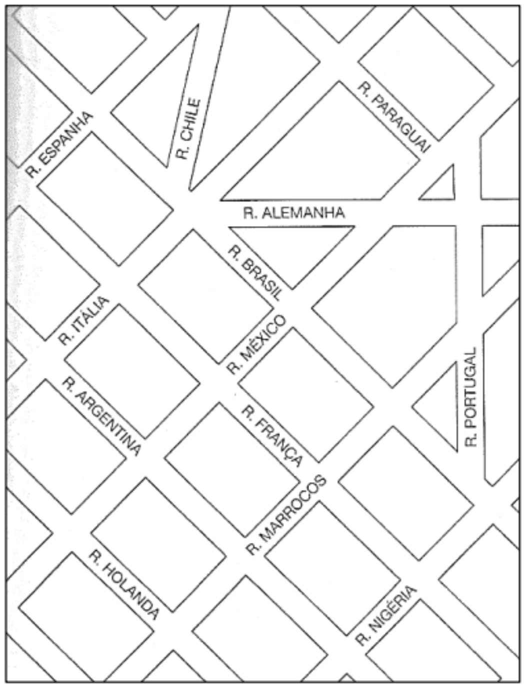
   ______________________________________

   c) R. Argentina e R. Nigéria

   ______________________________________

   d) R. Marrocos e R. Espanha

   ______________________________________




5. Que noção primitiva da Geometria poderia ser associada a cada item?
**a)** Um fio de linha bem esticado.
**b)** A marca deixada por uma ponta de lápis num papel.
**c)** O tampo de uma mesa.
**d)** Uma corda de violão esticada.
**e)** Uma folha de papel sulfite grudada na parede.

# APÊNDICE C

# Plano de estudo do 7º ano

# PLANO DE ESTUDO

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 7º ano |
| Duração: | 1 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | --- |
| Objetivo de Conhecimento: | APLICAÇÃO DE ATIVIDADE |
| Recursos utilizados: | Teste de van Hiele |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 7º ano |
| Duração: | 1 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | (EF06MA17) |
| Objetivo de Conhecimento: | Prismas e Pirâmides: Planificação e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas) |
| Recursos utilizados: | Sólidos geométricos de acrílico |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 7º ano |
| Duração: | 2 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | (EF06MA16) |
| Objetivo de Conhecimento: | Plano cartesiano: associação de pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante |
| Recursos utilizados: | Recurso digital (Geogebra). |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 7º ano |
| Duração: | 1 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | (EF06MA19) |
| Objetivo de Conhecimento: | Identificar características dos triâgulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos |
| Recursos utilizados: | Quadro branco e livro didático. |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 7º ano |
| Duração: | 1 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | (EF06MA20) |
| Objetivo de Conhecimento: | Identificar características dos quadriláteros e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. E reconhecer a inclusão e intersecção de classes entre eles |
| Recursos utilizados: | Quadro branco e livro didático. |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 7º ano |
| Duração: | 2 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | --- |
| Objetivo de Conhecimento: | APLICAÇÃO DE ATIVIDADE |
| Recursos utilizados: | Atividade 1 do apéndice A |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 7º ano |
| Duração: | 2 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | (EF07MA23) |
| Objetivo de Conhecimento: | Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal |
| Recursos utilizados: | Quadro branco e recurso digital (Geogebra). |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 7º ano |
| Duração: | 8 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | (EF06MA22), (EF06MA23), (EF07MA22) |
| Objetivo de Conhecimento: | Construção de ângulos, retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de transferidor, réguas, esquadros, compasso e softwares |
| Recursos utilizados: | Régua, esquadro, compasso e recurso digital (Geogebra). |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 7º ano |
| Duração: | 2 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | --- |
| Objetivo de Conhecimento: | APLICAÇÃO DE ATIVIDADE |
| Recursos utilizados: | Atividade 2 do apéndice A |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 7º ano |
| Duração: | 1 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | --- |
| Objetivo de Conhecimento: | APLICAÇÃO DE ATIVIDADE |
| Recursos utilizados: | Teste de van Hiele |

# APÊNDICE D

# Plano de estudo do 6º ano

# PLANO DE ESTUDO

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 6º ano |
| Duração: | 1 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | --- |
| Objetivo de Conhecimento: | APLICAÇÃO DE ATIVIDADE |
| Recursos utilizados: | Teste de van Hiele |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 6º ano |
| Duração: | 2 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | (EF06MA17) |
| Objetivo de Conhecimento: | Prismas e Pirâmides: Planificação e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas) |
| Recursos utilizados: | Sólidos geométricos de acrílico |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 6º ano |
| Duração: | 2 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | (EF06MA16) |
| Objetivo de Conhecimento: | Plano cartesiano: associação de pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante |
| Recursos utilizados: | Recurso digital (Geogebra). |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 6º ano |
| Duração: | 2 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | (EF06MA19) |
| Objetivo de Conhecimento: | Identificar características dos triâgulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos |
| Recursos utilizados: | Quadro branco e livro didático. |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 6º ano |
| Duração: | 2 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | (EF06MA20) |
| Objetivo de Conhecimento: | Identificar características dos quadriláteros e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. E reconhecer a inclusão e intersecção de classes entre eles |
| Recursos utilizados: | Quadro branco e livro didático. |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 6º ano |
| Duração: | 6 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | (EF06MA22) e (EF06MA23) |
| Objetivo de Conhecimento: | Construção de ângulos, retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de transferidor, réguas, esquadros e softwares |
| Recursos utilizados: | Transferidor, régua, esquadro e recurso digital (Geogebra). |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 6º ano |
| Duração: | 2 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | --- |
| Objetivo de Conhecimento: | APLICAÇÃO DE ATIVIDADE |
| Recursos utilizados: | Atividade do apéndice B |

| | |
|---|---|
| Ano escolar: | 6º ano |
| Duração: | 1 Aulas de 50 mim |
| Habilidades: | --- |
| Objetivo de Conhecimento: | APLICAÇÃO DE ATIVIDADE |
| Recursos utilizados: | Teste de van Hiele |

# Anexos

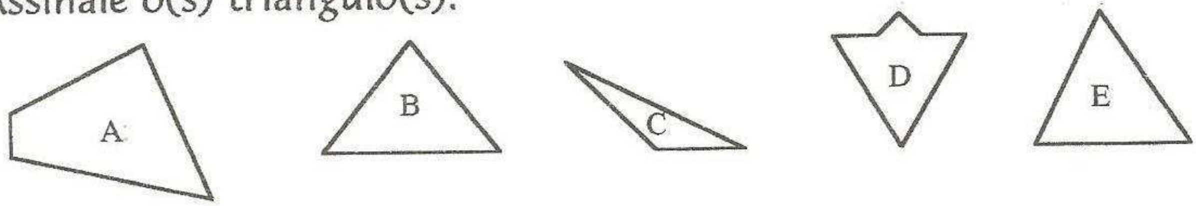
# ANEXO A

# Teste de van Hiele

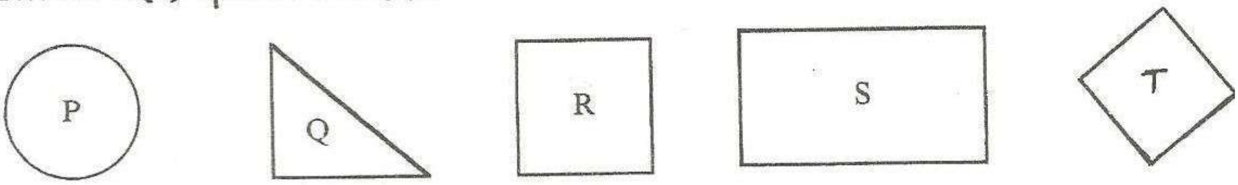
TESTE DE VAN HIELE

Nome: ........................................................ Turma:......... Idade: ...........

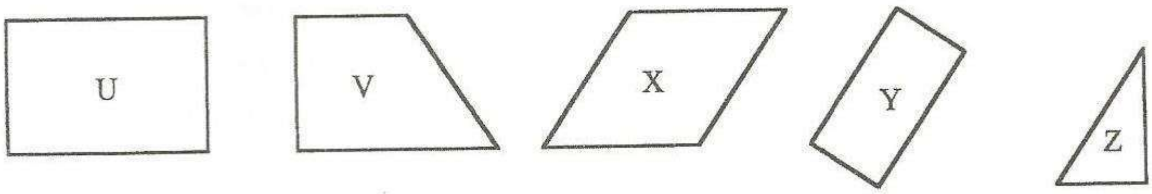
1- Assinale o(s) triângulo(s):



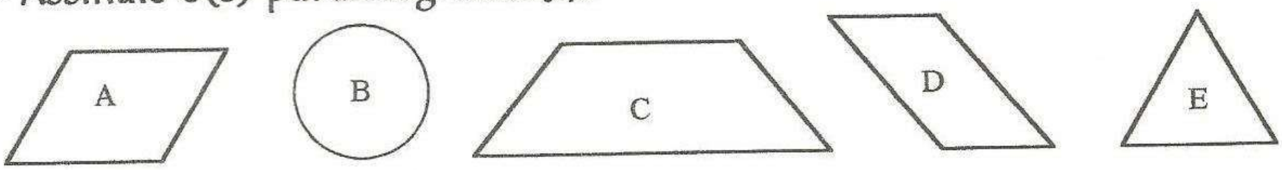

2- Assinale o(s) quadrado(s):



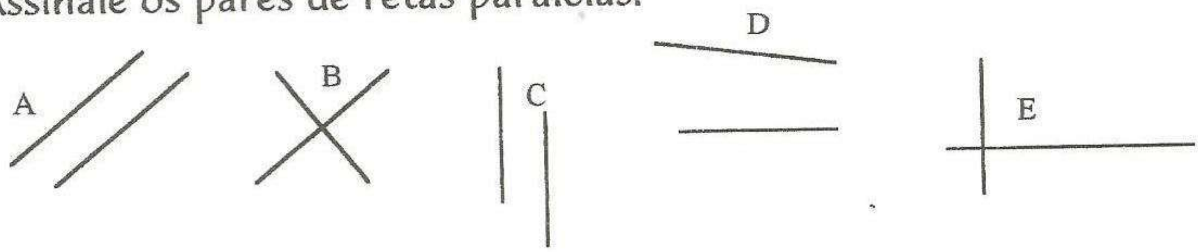

3- Assinale o(s) retângulo(s):




4- Assinale o(s) paralelogramo(s):




5- Assinale os pares de retas paralelas:

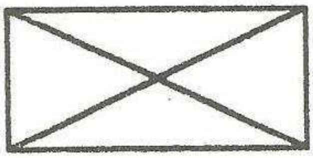



| | |
|---|---|
| Básico: | S<br>N |

Nome: ........................................................ Turma: ........ Idade:.........

6- No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os 4 lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.

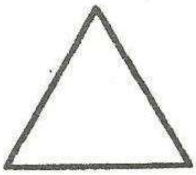


7- Dê 3 propriedades dos quadrados:

1-......................................................
2- .....................................................
3- .....................................................

8- Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.
(b) Um dos ângulos mede 90°.
(c) Dois ângulos têm a mesma medida.
(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
(e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.



9-Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

1-.................................................................
2-.................................................................
3-.................................................................

10-Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

| | |
|---|---|
| | S |
| Nível 1: | |
| | N |