



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional



Explorando o dodecágono: Uma proposta didática utilizando o GeoGebra

Hanna Carolina da Silva Rezende

Brasília

2026

Hanna Carolina da Silva Rezende

Explorando o dodecágono: Uma proposta didática utilizando o GeoGebra

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. Rogério César dos Santos

Brasília
2026

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Explorando o dodecágono: Uma proposta didática utilizando o GeoGebra

por

Hanna Carolina da Silva Rezende

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 10 de junho de 2026

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Rogério César dos Santos - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo - MAT/UnB (Membro Interno)

Prof. Dr. Thiago Williams Siqueira Ramos - IFB (Membro Externo)

Para minha Coralina.

Agradecimentos

Primeiramente, à minha família. Ao meu pai, Fernando, e à minha mãe, Ana Lúcia, por todo carinho e incentivo que sempre me deram ao longo dos anos. Às minhas irmãs Michelle, Christielle e, em especial, a Beatriz por ser a melhor companheira de caminhada que a vida poderia me proporcionar.

Ao meu avô, Emílio, por, ainda criança, ter me mostrado a beleza da matemática.

Ao meu esposo, Matheus, e à nossa filha, Coralina. Vocês me fortalecem todos os dias e sem vocês eu não teria conseguido chegar até aqui.

Ao meu orientador, Rogério, e ao departamento de matemática, por essa oportunidade de aprendizado e desenvolvimento que foi o PROFMAT.

Resumo

Esse trabalho foi pensado a partir de uma propriedade recentemente descoberta dos dodecágonos e da constatação de que o ensino de geometria é relevante socialmente, mas encontra desafios na educação básica. Além disso, tecnologias digitais, em particular, softwares de geometria dinâmica, já são reconhecidas como ferramentas importantes para a compreensão e utilização de noções matemáticas. Dessa forma, buscou-se construir uma sequência didática que fortalecesse a compreensão de conceitos básicos da geometria plana e analítica com a manipulação do GeoGebra que envolvesse essa propriedade. Assim, foram levantados os conceitos que seriam trabalhados e a delimitação do público alvo, 3ª série do ensino médio. Ademais, para averiguar a eficácia deste produto a sequência foi aplicada em duas turmas de 3ª série do Instituto Federal de Brasília (IFB) - Campus Brasília do curso técnico em eventos integrado ao ensino médio totalizando 37 alunos. A execução durou três aulas de 1 hora em cada turma. Um questionário foi aplicado antes e depois da aplicação para fins de comparação do desempenho. Deste modo, foi possível avaliar a efetividade e adequação desta ação para trabalhar conceitos geométricos, principalmente os de geometria plana. Por fim, a atividade se mostrou engajadora e possibilitou que os estudantes pudessem perceber que a matemática ainda tem espaço para descobertas.

Palavras-chaves: geometria. geometria analítica. geogebra. ensino de matemática. dodecágono.

Abstract

This dissertation was conceived based on a recently discovered property of dodecagons and the observation that the teaching of geometry is socially relevant, yet faces challenges in basic education. Furthermore, digital technologies—particularly dynamic geometry software—are already recognized as important tools for understanding and applying mathematical concepts. Thus, the aim was to develop a didactic sequence that would strengthen the understanding of basic concepts in plane and analytic geometry through the use of GeoGebra, incorporating this property. To this end, the concepts to be addressed were identified, as well as the target audience: third-year high school students. Moreover, to assess the effectiveness of this product, the sequence was implemented in two third-year classes at the Federal Institute of Brasília (IFB) – Brasília Campus, in the technical course in Events integrated with high school, totaling 37 students. The implementation lasted three one-hour classes in each group. A questionnaire was administered before and after the intervention for performance comparison. In this way, it was possible to evaluate the effectiveness and suitability of this approach for teaching geometric concepts, especially those related to plane geometry. Finally, the activity proved to be engaging and allowed students to realize that mathematics still holds room for discovery.

Key-words: geometry. analytical geometry. geogebra. math teaching. dodecagons.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ângulos internos do paralelogramo	20
Figura 2 – Diagonal do paralelogramo com ângulos	21
Figura 3 – Diagonal do paralelogramo	21
Figura 4 – Base média do triângulo	22
Figura 5 – Quadrilátero e seus pontos médios	22
Figura 6 – Diagonal BD do quadrilátero	22
Figura 7 – Diagonal AC do quadrilátero	23
Figura 8 – Pontos no plano cartesiano	24
Figura 9 – Distância entre pontos	24
Figura 10 – Ponto médio de um segmento	25
Figura 11 – Baricentro de um triângulo	26
Figura 12 – Paralelogramo associado ao octógono	27
Figura 13 – Paralelogramo associado ao dodecágono	28
Figura 14 – Comandos segmento e ponto médio no GeoGebra	33
Figura 15 – Coordenadas e comprimentos na janela de álgebra	33
Figura 16 – Comandos polígonos e ângulos no GeoGebra	34
Figura 17 – Resposta do estudante A à pergunta 3	38
Figura 18 – Resposta do estudante B à pergunta 3	39
Figura 19 – Gráfico com as respostas dos estudantes as perguntas 1, 2, 3, 5 e 7 do questionário inicial	39
Figura 20 – Gráfico com as respostas do estudantes as perguntas 4 e 6 do questionário inicial	40
Figura 21 – Gráfico com as resposta dos estudantes à pergunta 8 a	41
Figura 22 – Resposta do estudante C à pergunta 8 a	41
Figura 23 – Resposta do estudante D à pergunta 8 b	42
Figura 24 – Gráfico com as respostas dos estudantes às perguntas 1, 2, 3, 5 e 7 do questionário final	45
Figura 25 – Resposta do estudante E à pergunta 5 do questionário final	45
Figura 26 – Gráfico com as respostas dos estudantes às perguntas 4 e 6 do questionário final	46
Figura 27 – Gráfico com as respostas dos estudantes à pergunta 8 a do questionário final	46
Figura 28 – Resposta do estudante F à pergunta 8 b do questionário final	47
Figura 29 – Desenho realizado por um aluno G que respondeu (0; 0) à questão 8 c do questionário final	47

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dias de aplicação da sequência didática nas turmas X e Y	42
---	----

Sumário

	Introdução	17
1	NOÇÕES MATEMÁTICAS	20
1.1	Geometria Plana	20
1.2	Geometria Analítica	23
2	A PROPRIEDADE DO DODECÁGONO	28
3	A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	31
3.1	Plano de aula 1	32
3.2	Plano de aula 2	35
3.3	Plano de aula 3	36
4	RELATO DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	38
	Considerações Finais	48
	REFERÊNCIAS	49
	APÊNDICES	51

Introdução

O presente trabalho foi pensado a partir da minha trajetória durante o Mestrado Profissional em Matemática em Rede - PROFMAT. Ao cursar a matéria de geometria me deparei com a propriedade do octógono descrita por Santos, Comby e Silva (2018). Além disso, lembrei da propriedade do quadrilátero que diz que se $ABCD$ é um quadrilátero e tomarmos M_1 , M_2 , M_3 e M_4 como pontos médios dos lados AB , BC , CD e DA , respectivamente, então $M_1M_2M_3M_4$ é um paralelogramo. Com base nisso, pensei se existiria uma generalização dessa propriedade para polígonos com quantidades de lados múltipla de quatro.

O primeiro passo foi então visualizar o que seria essa propriedade para o próximo polígono com quantidade de lados múltipla de quatro, ou seja, o dodecágono. Para essa representação foi utilizado o *software* GeoGebra, onde foi construído um dodecágono $A_1A_2A_3...A_{12}$ e os pontos médios de todos os seus lados, M_1 , M_2 , M_3 , ..., M_{11} e M_{12} .

Fazendo um paralelo com a propriedade do quadrilátero e a do octógono, na primeira construía-se só os pontos médios e na segunda, os segmentos que uniam pontos médios opostos, ou seja, uma linha que une dois pontos. Dessa forma, para o dodecágono foi ponderado que seria necessário construir triângulos a partir desses pontos médios. Assim, quatro triângulos com vértices em três pontos médios distintos foram construídos, sendo eles $M_1M_5M_9$, $M_2M_6M_{10}$, $M_3M_7M_{11}$ e $M_4M_8M_{12}$.

Como, na propriedade do octógono, considerava-se o ponto médio de cada segmento construído, no dodecágono foi considerada a construção dos baricentros dos triângulos. Por fim, o quadrilátero com vértices nos baricentros foi construído e, de fato, era um paralelogramo. Com a confirmação da intuição pelo desenho no GeoGebra, a autora partiu para a demonstração formal dessa propriedade (Rezende; Santos, 2025).

A partir desse histórico, achei interessante trazer essa descoberta para a realidade da educação básica levando em conta que tal propriedade utiliza diretamente conceitos básicos de geometria como nomenclatura de polígonos, ponto médio de um segmento, baricentro de um triângulo e definição e propriedades de paralelogramos.

Porém, surgiram dois questionamentos: 1) o ensino de geometria na educação básica é mesmo relevante? 2) é necessário pensar em formas alternativas de ensinar geometria na educação básica? O Currículo em Movimento do Distrito Federal (2018, p. 161) responde a primeira pergunta quando diz que a geometria “está presente em nosso dia a dia quando, por exemplo, desde muito cedo, os estudantes precisam desenvolver noções espaciais para interagir com o mundo que os recebe”. Sobre a segunda pergunta, percebe-se que os estudantes têm dificuldade nessa área da matemática, principalmente quando se

começa a trabalhar de forma mais abstrata e com menor uso de imagens para exemplificar. É possível apontar como justificativa para isso, o fato de que a geometria ser trabalhada como algo pronto, estático e imutável. Dessa forma, pensar em alternativas para o ensino da geometria se faz fundamental.

Tendo em vista o disposto e reconhecendo a importância do GeoGebra para a minha visualização acerca do problema original, passou-se a considerar o uso de alguma tecnologia digital nesta sequência didática.

Atualmente, as tecnologias digitais fazem parte do cotidiano das pessoas nos mais diversos aspectos da vida. Em relação à educação, essas tecnologias também se fazem cada vez mais presentes. A importância desse assunto é tão grande que é citado entre as dez competências gerais da educação básica da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Brasil, 2018, p. 09)

Essas dez competências devem ser trabalhadas de forma transversal a todos os componentes curriculares durante toda a educação básica a fim de assegurar os direitos de aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes. Especificamente na área de matemática já se reconhece que *softwares* de geometria dinâmica são recursos didáticos que têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. (Brasil, 2018)

Dentro do universo dos *softwares* de geometria dinâmica, o GeoGebra se destaca por ser um recurso gratuito de interface leve e intuitiva. Além disso, a capacidade de perceber objetos matemáticos em suas representações algébrica e geométrica simultaneamente torna essa ferramenta uma escolha acertada para trabalhos que envolvam geometria plana e geometria analítica, pois possibilita o estudante de visualizar aquilo que está sendo calculado e algebrizar o que está sendo visualizado. Ainda, "o GeoGebra oferece ao aluno um ambiente motivador e rico em possibilidades de aprendizagem de forma lúdica e atrativa, contribuindo para uma educação significativa através de suas experiências". (Sousa et al., 2022, p. 396)

Sousa e seus colaboradores (2022) realizaram uma revisão bibliográfica com o objetivo de apresentar a importância da utilização do GeoGebra como forma de auxílio a professores e alunos no ensino de geometria plana. Nessa pesquisa foram selecionados e analisados 14 trabalhos relacionados ao uso do GeoGebra na geometria plana e ao uso da tecnologia no ensino da matemática. Eles concluíram que:

1. é notável a importância do GeoGebra no ensino da matemática por ser uma ferramenta que facilita a aprendizagem de forma dinâmica e produtiva;

2. o GeoGebra é capaz de auxiliar a compreender os conceitos intrínsecos à matemática por meio de visualizações geométricas a partir de informações algébricas e
3. é um recurso metodológico que pode auxiliar na compreensão de situações do cotidiano.

É nesse contexto que o objetivo geral desse trabalho é criar e aplicar uma sequência didática que trabalhe esses conceitos geométricos a partir da propriedade do dodecágono utilizando o GeoGebra.

Além disso, de forma indissociável ao objetivo geral, os objetivos específicos são:

- a. Explorar a propriedade do dodecágono demonstrada recentemente.
- b. Aplicar a sequência didática e relatar a experiência.
- c. Mostrar aos estudantes que a geometria não parou.

Considerando o exposto nessa introdução e visando a conclusão desses objetivos, essa dissertação está organizada da seguinte forma: o capítulo 1 trata das bases matemáticas utilizadas na demonstração da propriedade do dodecágono. Em seguida, no capítulo 2, é realizada a apresentação e demonstração de tal propriedade. No capítulo 3, estão descritos os planos de aula que compõe a sequência didática que é produto deste trabalho. Já no capítulo 4 está o relato da aplicação dessa sequência e os resultados obtidos a partir disso. Por fim, no capítulo 5, encontram-se algumas considerações revisando os objetivos e pensando em futuras possibilidades de pesquisa.

1 Noções matemáticas

Neste capítulo, serão apresentadas as bases matemáticas necessárias para compreender a propriedade do dodecágono, que será abordada neste trabalho. Serão tratados princípios de geometria plana e geometria analítica, bem como definições, propriedades e demonstrações relacionados a esses temas.

1.1 Geometria Plana

A seguir estão elucidados os conceitos de geometria plana que são necessários para o andamento desse trabalho.

Definição 1 *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.*

Proposição 1 *Um quadrilátero é um paralelogramo se, e só se, seus pares de lados opostos forem congruentes.*

Demonstração: Inicialmente será provado que se um quadrilátero é um paralelogramo, então seus pares de lados opostos são congruentes. Para isso é possível considerar a figura 1 em que $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$.

Figura 1 – Ângulos internos do paralelogramo



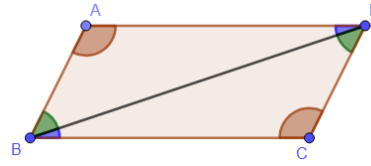
Fonte: Autoria própria (2025)

Como $AD \parallel BC$, os ângulos $\hat{B}AD$ e $\hat{A}BC$ são suplementares, ou seja, $\hat{B}AD + \hat{A}BC = 180^\circ$. Por outro lado, como $AB \parallel CD$, $\hat{B}CD + \hat{A}BC = 180^\circ$. Dessa forma, $\hat{B}AD = \hat{B}CD$. Agora será traçada a diagonal BD desse paralelogramo, como na figura 2.

Como $AB \parallel CD$, $\hat{A}BD = \hat{B}DC$ e $\hat{A}DB = \hat{C}BD$, pois são pares de ângulos alternos internos. Além disso, os triângulos ABD e CDB compartilham o lado BD .

Segue então, pelo critério ângulo-lado-ângulo, que os triângulos ABD e CDB são congruentes e, assim, $AB = CD$ e $AD = BC$. Portanto, os pares de lados opostos são congruentes.

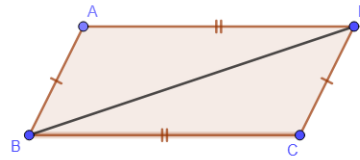
Figura 2 – Diagonal do paralelogramo com ângulos



Fonte: Autoria própria (2025)

Agora é necessário mostrar que se os pares de lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo. Como representado na figura 3, no quadrilátero $ABCD$ cujos pares de lados opostos tem a mesma medida é possível traçar a diagonal BD . Assim, os triângulos ABD e CDB são congruentes pelo critério lado-lado-lado.

Figura 3 – Diagonal do paralelogramo



Fonte: Autoria própria (2025)

Dessa forma, os ângulos $\hat{A}DB$ e $\hat{C}BD$ são congruentes. Sendo assim, $AD \parallel BC$. Analogamente, $\hat{A}BD = \hat{C}DB$ e, portanto, $AB \parallel CD$. Logo, $ABCD$ é um paralelogramo.

c.q.d.

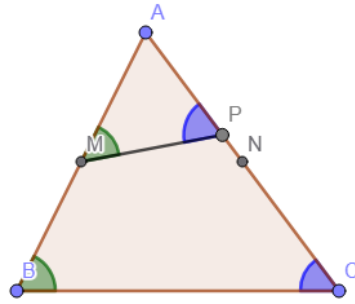
Definição 2 Uma base média de um triângulo é um segmento com extremos em pontos médios dos lados desse triângulo.

Proposição 2 Seja ABC um triângulo qualquer. Se MN é a base média de ABC relativa a BC , então $MN \parallel BC$.

Demonstração: Essa demonstração será por absurdo. Supõe-se que ABC é um triângulo, MN é sua base média relativa ao lado BC e P é um ponto pertencente ao lado AC distinto de N tal que $MP \parallel BC$, como na figura 4.

Como $BC \parallel MP$, tem-se que $\hat{A}BC = \hat{A}MP$. Analogamente, $\hat{A}CB = \hat{A}PM$. Assim, pelo critério ângulo-ângulo, os triângulos ABC e AMP são semelhantes. Como M é ponto médio de AB , tem-se que $\frac{AB}{AM} = \frac{2}{1} = \frac{AC}{AP}$. Daí, $AP = \frac{AC}{2}$. Por outro lado, $AP \neq AN = \frac{AC}{2}$, pois N é ponto médio de AC e é distinto de P . Logo, tem-se um absurdo e dessa forma P e N são o mesmo ponto. Portanto, se MN é base média relativa a BC , então $MN \parallel BC$.

Figura 4 – Base média do triângulo



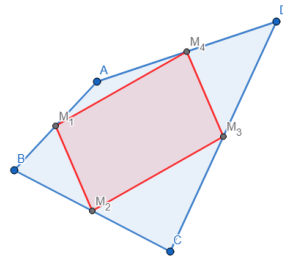
Fonte: Autoria própria (2025)

c.q.d.

Proposição 3 *Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Se tomarmos M_1 , M_2 , M_3 e M_4 os pontos médios dos lados AB , BC , CD e DA , respectivamente, então o quadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ é um paralelogramo.*

Demonstração: Na figura 5 é possível observar a situação descrita.

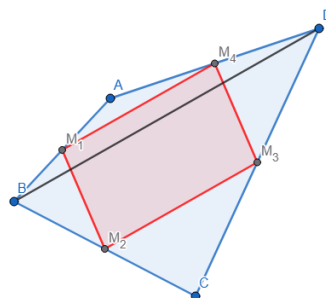
Figura 5 – Quadrilátero e seus pontos médios



Fonte: Autoria própria (2025)

Ao traçar o segmento de reta BD , M_1M_4 é base média do triângulo ABD relativa a BD , conforme figura 6. Assim, pela Proposição 2, $M_1M_4 \parallel BD$. Por outro lado, M_2M_3 é base média do triângulo BCD relativa a BD e, portanto, $M_2M_3 \parallel BD$. Conclui-se, assim, que M_1M_4 é paralela a M_2M_3 .

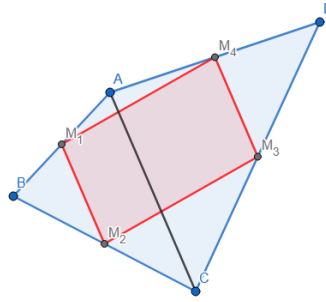
Figura 6 – Diagonal BD do quadrilátero



Fonte: Autoria própria (2025)

Analogamente, ao traçar o segmento de reta AC , M_1M_2 é base média do triângulo ABC relativa a AC e M_3M_4 é base média do triângulo ACD relativa a AC e, portanto, M_1M_2 é paralela a M_3M_4 , como na figura 7.

Figura 7 – Diagonal AC do quadrilátero



Fonte: Autoria própria (2025)

Como os lados opostos desse quadrilátero são paralelos ele é, por definição, um paralelogramo.

c.q.d.

1.2 Geometria Analítica

A geometria analítica é uma área da matemática que permite mobilizar os conhecimentos de geometria plana e álgebra. Conseguir perceber um objeto em diferentes representações para resolver problemas e investigar propriedades é uma habilidade desejável segundo o Currículo em Movimento do Novo Ensino Médio do Distrito Federal (2018).

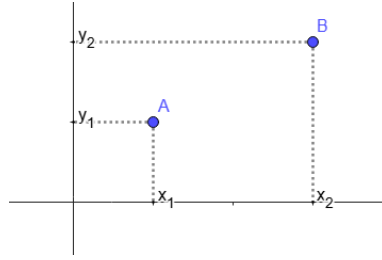
Segundo Gómez, Frensel e Crissaff (2017) "a escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ ". Dessa forma, o ponto $P \in \pi$ é associado ao par ordenado (a, b) se a é o pé da perpendicular ao eixo das abscissas e b é o pé da perpendicular ao eixo das ordenadas.

Assim, é possível encontrar a distância entre dois pontos desse plano utilizando suas coordenadas cartesianas.

Proposição 4 *Sejam A e B pontos do plano cartesiano de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , respectivamente, então a distância euclidiana entre A e B é dada por $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$*

Demonstração: Na figura 8 é possível observar os pontos A e B e suas projeções nos eixos.

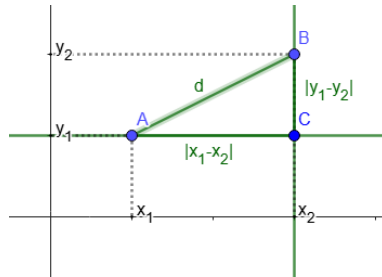
Figura 8 – Pontos no plano cartesiano



Fonte: Autoria própria (2025)

Ao traçar uma reta paralela ao eixo OX que passa por A e outra paralela ao eixo OY que passa por B é possível formar o triângulo retângulo ABC em que C é o encontro das duas retas descritas anteriormente, como na figura 9. Os catetos desse triângulo medem $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$ e a hipotenusa é a distância, d , entre A e B .

Figura 9 – Distância entre pontos



Fonte: Autoria própria (2025)

Pelo Teorema de Pitágoras $d^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$. Portanto, $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

c.q.d.

Definição 3 Seja um vetor $u = (x_0; y_0)$. Assim, a norma do vetor u é dada por $|u| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

Proposição 5 Dados dois pontos A e B no plano cartesiano $|A - B|$ é o comprimento do segmento AB .

Demonstração: Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

Assim, $A - B = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ e, conseqüentemente, $|A - B| = |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, pela definição 3. Portanto, pela proposição 4, $|A - B|$ é a distância de A a B , ou seja, o comprimento do segmento AB .

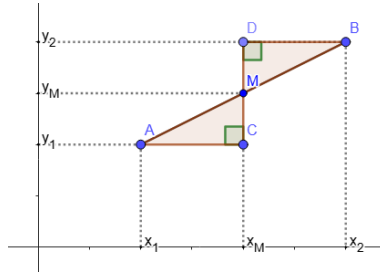
c.q.d.

Proposição 6 Se $A(x_1, y_1)$ e (x_2, y_2) são pontos do plano cartesiano, então $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ é o ponto médio do segmento AB .

Demonstração: Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ extremidades de um segmento de reta e $M(x_M, y_M)$ o ponto médio desse segmento.

É possível construir os triângulos retângulos ACM e BDM , como na figura 10, em que $C = (x_M, y_1)$ e $D = (x_M, y_2)$. $AM = BM$, pois M é ponto médio do segmento AB . Além disso, $\hat{A}MC = \hat{B}MD$, pois são ângulos opostos pelo vértice. Como os triângulos são retângulos, $\hat{A}CM = \hat{B}DM$ e, portanto, os triângulos ACM e BDM são congruentes pelo critério ângulo-ângulo-lado.

Figura 10 – Ponto médio de um segmento



Fonte: Autoria própria (2025)

Sendo assim, $AC = BD$ e, conseqüentemente, $|C - A| = |B - D|$. Daí, $|x_M - x_1| = |x_2 - x_M|$. Dessa forma, $x_M - x_1 = x_2 - x_M$ ou $x_M - x_1 = x_2 - x_M$. No primeiro caso, $x_1 = x_2$, o que não corresponde a situação descrita. No segundo caso, $x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Analogamente, $CM = DM$ logo, $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$. Conclui-se, então, que $M = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.

c.q.d.

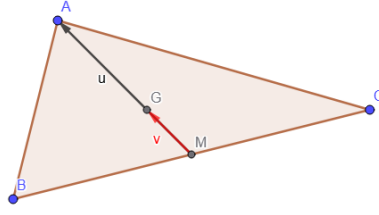
Proposição 7 As coordenadas do baricentro $G(x_G, y_G)$ de um triângulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são $G(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$.

Demonstração: Seja M o ponto médio do segmento BC do triângulo ABC . Pela proposição 6, $M = \frac{B+C}{2}$.

Além disso, como G é o baricentro de ABC e AM é uma mediana, então os pontos A , G e M são colineares. Pela figura 11 é possível ver que os vetores $u = A - M$ e $v = G - M$ possuem mesma direção e mesmo sentido. Logo, $u = \lambda \cdot v$ com $\lambda > 0$. Ainda pelo fato de G ser baricentro, o segmento GM mede um terço do segmento AM . Assim, $|G - M| = \frac{1}{3}|A - M|$. Ou seja, $G - M = \frac{1}{3}(A - M)$ ou $G - M = -\frac{1}{3}(A - M)$.

Como $\lambda > 0$, o segundo caso não é válido. Logo, $3G = A + 2M$ e, como $M = \frac{B+C}{2}$, então $G = \frac{A+B+C}{3}$.

Figura 11 – Baricentro de um triângulo



Fonte: Autoria própria (2026)

c.q.d.

Com as ferramentas de geometria analítica apresentadas anteriormente é possível sugerir uma nova demonstração para a proposição 3.

Demonstração da proposição 3: Seja $A_1A_2A_3A_4$ um quadrilátero qualquer. É possível considerar cada vértice do quadrilátero como um ponto do plano cartesiano. Dessa forma, cada vértice terá coordenadas $A_n = (x_{A_n}, y_{A_n})$. Assim, $M_1 = \frac{A_1+A_2}{2}$, $M_2 = \frac{A_2+A_3}{2}$, $M_3 = \frac{A_3+A_4}{2}$ e $M_4 = \frac{A_4+A_1}{2}$. Nessa notação, que será utilizada a partir daqui neste trabalho, é importante ressaltar que dizer que $M_1 = \frac{A_1+A_2}{2}$ significa que $x_{M_1} = \frac{x_{A_1}+x_{A_2}}{2}$ e $y_{M_1} = \frac{y_{A_1}+y_{A_2}}{2}$.

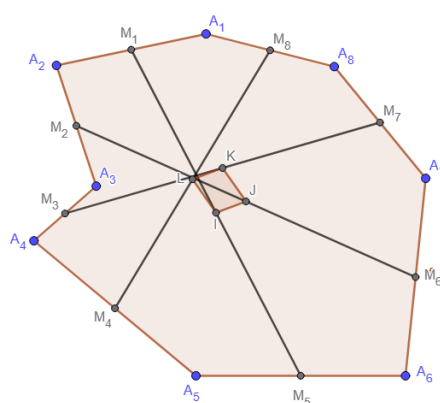
Agora, é possível comparar os comprimentos dos lados do quadrilátero $M_1M_2M_3M_4$. Os comprimentos dos lados M_1M_2 e M_3M_4 são dados, respectivamente, por $|M_1 - M_2| = |\frac{A_1+A_2}{2} - \frac{A_2+A_3}{2}| = |\frac{A_1-A_3}{2}|$ e $|M_3 - M_4| = |\frac{A_3+A_4}{2} - \frac{A_4+A_1}{2}| = |\frac{A_3-A_1}{2}|$. Logo, os lados M_1M_2 e M_3M_4 tem o mesmo comprimento.

Da mesma forma, os comprimentos dos lados M_2M_3 e M_4M_1 são, respectivamente, $|M_2 - M_3| = |\frac{A_2+A_3}{2} - \frac{A_3+A_4}{2}| = |\frac{A_2-A_4}{2}|$ e $|M_4 - M_1| = |\frac{A_4+A_1}{2} - \frac{A_1+A_2}{2}| = |\frac{A_4-A_2}{2}|$. Assim, M_2M_3 e M_4M_1 também possuem a mesma medida. Portanto, pela proposição 1, $M_1M_2M_3M_4$ é um paralelogramo.

c.q.d.

No artigo de Santos, Comby e Silva (2018), uma propriedade semelhante a proposição 3 foi provada para um octógono $A_1A_2A_3...A_8$. Ela diz que se $M_1, M_2, ..., M_8$ são os pontos médios dos lados $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_8A_1$ respectivamente, e se I, J, K e L são pontos médios, respectivamente, dos segmentos M_1M_5, M_2M_6, M_3M_7 e M_4M_8 , tem-se que o quadrilátero $IJKL$ é, necessariamente, um paralelogramo ou um polígono degenerado, como mostra a figura 12. A demonstração pode ser consultada na referência, e é semelhante a feita na segunda prova da proposição 3.

Figura 12 – Paralelogramo associado ao octógono



Fonte: Autoria própria (2026)

No próximo capítulo será demonstrada uma propriedade semelhante que vale para os dodecágonos.

2 A propriedade do dodecágono

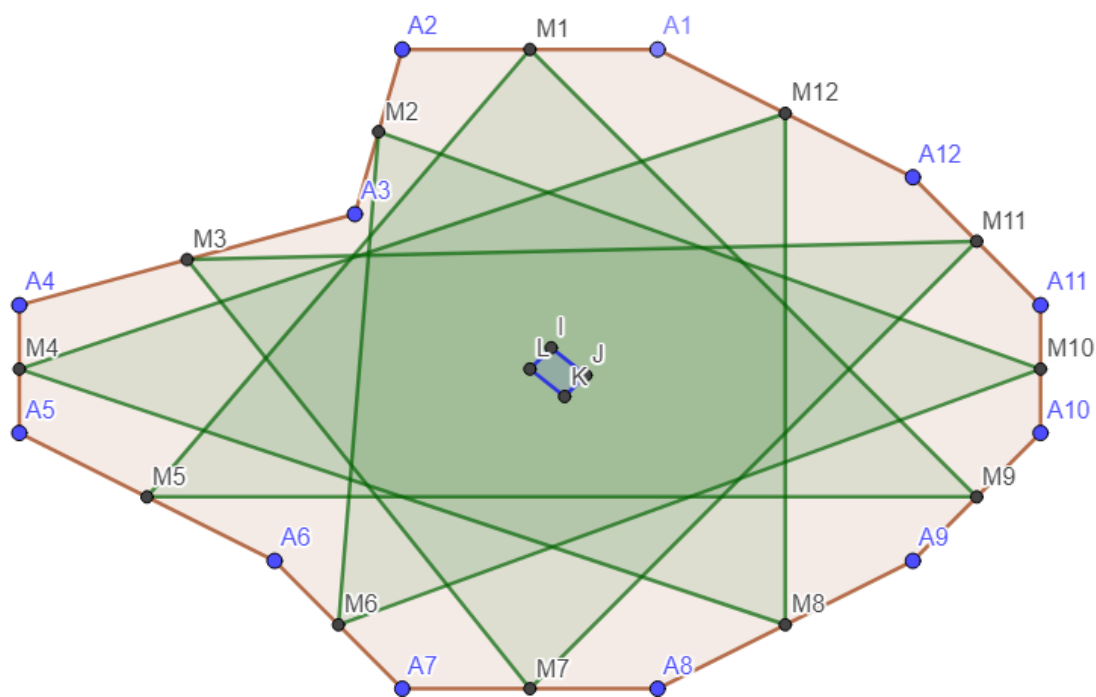
A seguinte propriedade e sua demonstração já foram publicadas na Revista do Professor de Matemática pela autora e pelo orientador deste trabalho. Mesmo assim, a fim de justificar os conceitos matemáticos que serão trabalhados na sequência didática, que foram escolhidos a partir disso, entendeu-se como relevante o detalhamento dessa demonstração também nesse trabalho.

Proposição 8 *Seja um dodecágono $A_1A_2A_3...A_{11}A_{12}$ e $M_1, M_2, M_3, ..., M_{11}$ e M_{12} os pontos médios, respectivamente, dos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., A_{11}A_{12}$ e $A_{12}A_1$. Então, os pontos I, J, K e L , baricentros dos triângulos $M_1M_5M_9, M_2M_6M_{10}, M_3M_6M_{11}$ e $M_4M_8M_{12}$, respectivamente, são vértices de um paralelogramo ou de um polígono degenerado.*

Demonstração:

Para mostrar a veracidade dessa afirmação é necessário mostrar que $IJ = KL$ e $IL = JK$ pois, um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se seus lados opostos são congruentes, como demonstrado na proposição 1.

Figura 13 – Paralelogramo associado ao dodecágono



Fonte: Rezende e Santos (2025)

É possível considerar cada vértice do dodecágono como um ponto do plano cartesiano. Dessa forma, cada vértice terá coordenadas $A_n = (x_{A_n}, y_{A_n})$. Pela proposição 6, as coordenadas do ponto médio de um segmento é a média aritmética das coordenadas dos extremos. Assim, $M_1 = \frac{A_1 + A_2}{2}$, $M_2 = \frac{A_2 + A_3}{2}$, $M_3 = \frac{A_3 + A_4}{2}$, ..., $M_{11} = \frac{A_{11} + A_{12}}{2}$ e $M_{12} = \frac{A_{12} + A_1}{2}$.

Além disso, pela Proposição 7, as coordenadas do baricentro de um triângulo são dadas pela média aritmética das coordenadas dos vértices desse triângulo. Logo,

$$I = \frac{M_1 + M_5 + M_9}{3} = \frac{A_1 + A_2 + A_5 + A_6 + A_9 + A_{10}}{6}$$

$$J = \frac{M_2 + M_6 + M_{10}}{3} = \frac{A_2 + A_3 + A_6 + A_7 + A_{10} + A_{11}}{6}$$

$$K = \frac{M_3 + M_7 + M_{11}}{3} = \frac{A_3 + A_4 + A_7 + A_8 + A_{11} + A_{12}}{6}$$

$$L = \frac{M_4 + M_8 + M_{12}}{3} = \frac{A_4 + A_5 + A_8 + A_9 + A_{12} + A_1}{6}$$

Pela Proposição 5, dados os pontos A e B , no plano cartesiano, $|A - B|$ é o comprimento do segmento AB . Assim, o comprimento do segmento IJ é dado por

$$|I - J| = \left| \frac{A_1 + A_2 + A_5 + A_6 + A_9 + A_{10}}{6} - \frac{A_2 + A_3 + A_6 + A_7 + A_{10} + A_{11}}{6} \right|$$

$$|I - J| = \left| \frac{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + A_9 - A_{11}}{6} \right|$$

Por outro lado, o comprimento do segmento KL é dado por

$$|L - K| = \left| \frac{A_4 + A_5 + A_8 + A_9 + A_{12} + A_1}{6} - \frac{A_3 + A_4 + A_7 + A_8 + A_{11} + A_{12}}{6} \right|$$

$$|L - K| = \left| \frac{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + A_9 - A_{11}}{6} \right|$$

Logo, $|I - J| = |L - K|$, ou seja, os comprimentos dos segmentos IJ e KL são congruentes. De forma análoga, é possível mostrar que os comprimentos dos segmentos IL e JK também são congruentes.

Portanto, o quadrilátero $IJKL$ é um paralelogramo.

c.q.d.

A partir disso, será apresentada no próximo capítulo, a sequência didática construída como produto desse trabalho, para que os professores do Ensino Médio possam desenvolver em sala de aula a aplicação desta proposição, reforçando, assim, os conceitos de polígono, ponto médio, paralelogramo e outros.

3 A sequência didática

Nesse capítulo é apresentada uma sequência didática a fim de nortear atividades que envolvam a propriedade dos dodecágonos citada nos capítulos anteriores. Nessa sequência consta os planos de cada aula envolvendo os procedimentos metodológicos, os objetivos a serem alcançados, recursos necessários, sugestões de avaliação e proposta de mediação para o professor.

A sugestão é que sejam utilizadas três aulas de 50 minutos para a realização da sequência completa. Os conteúdos referentes a essas atividades são geometria plana e geometria analítica. Mais especificamente são objetivos:

- Compreender e definir o conceito de ponto médio de um segmento no plano cartesiano e relacioná-lo a média aritmética das coordenadas dos extremos de um segmento;
- Reconhecer e validar a fórmula da distância entre dois pontos no plano;
- Verificar experimentalmente a validade do Teorema da Base Média em triângulos;
- Utilizar o GeoGebra como ferramenta de investigação matemática;
- Identificar e justificar propriedades de paralelogramos a partir de construções geométricas;
- Investigar propriedades de polígonos, em particular, octógono e dodecágono, a partir de construções dinâmicas e;
- Compreender o conceito de baricentro e relacioná-lo à média aritmética das coordenadas dos vértices de um triângulo.
- Mostrar aos alunos que descobertas recentes em matemática continuam sendo feitas em pesquisas.

Dessa forma, é possível contemplar as habilidades da BNCC (Brasil, 2018, p. 545):

- “EM13MAT308: aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos” e
- “EM13MAT505: resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.”

3.1 Plano de aula 1

Tempo sugerido: 50 minutos

Objetivos específicos:

- Compreender e definir o conceito de ponto médio de um segmento no plano cartesiano e relacioná-lo a média aritmética das coordenadas dos extremos de um segmento;
- Reconhecer e validar a fórmula da distância entre dois pontos no plano;
- Verificar experimentalmente a validade do Teorema da Base Média em triângulos e;
- Utilizar o GeoGebra como ferramenta de investigação matemática.

Procedimentos didático-pedagógicos

Essa aula deverá ser realizada em um laboratório de informática que tenha pelo menos um computador por dupla. O(a) professor(a) inicia perguntando aos estudantes se lembram o que é ponto médio. Após ouvir as respostas ele(a) questiona como é possível então encontrar o ponto médio de um segmento. Uma resposta esperada é que para construir o ponto médio basta medir o segmento com uma régua e marcar o ponto na metade desse comprimento. É importante explicar sobre erros instrumentais e que, fazendo dessa forma, provavelmente o ponto encontrado não será o ponto médio.

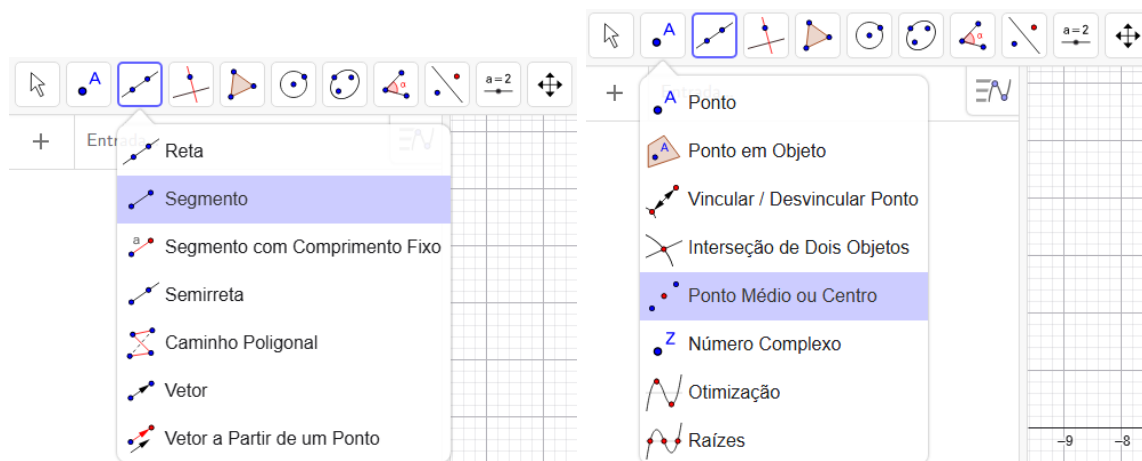
Inicia-se então a apresentação do GeoGebra pedindo que os estudantes acessem o *software*. Uma breve explicação sobre suas funcionalidades é feita e já se segue para as construções iniciais, onde serão apresentadas algumas ferramentas.

Dessa forma, o(a) professor(a) solicita aos estudantes que construam um segmento utilizando a ferramenta “Segmento” e que encontrem seu ponto médio utilizando a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” como na figura 14. É importante mostrar que na janela de álgebra é possível visualizar as coordenadas de todos os pontos construídos como na figura 15. Assim, recordando como calcular a distância entre dois pontos do plano cartesiano, é possível que os estudantes verifiquem que as distâncias do ponto médio à cada um dos extremos é a mesma.

Agora, pede-se aos estudantes que construam dois novos segmentos, cada um conectando um dos extremos do segmento original com o ponto médio. Na janela de álgebra é possível visualizar o comprimento de todos os segmentos construídos, possibilitando a confirmação de que a distância calculada anteriormente realmente condiz com o comprimento desses segmentos. Logo, os alunos podem reconhecer e validar a fórmula da distância entre dois pontos no plano.

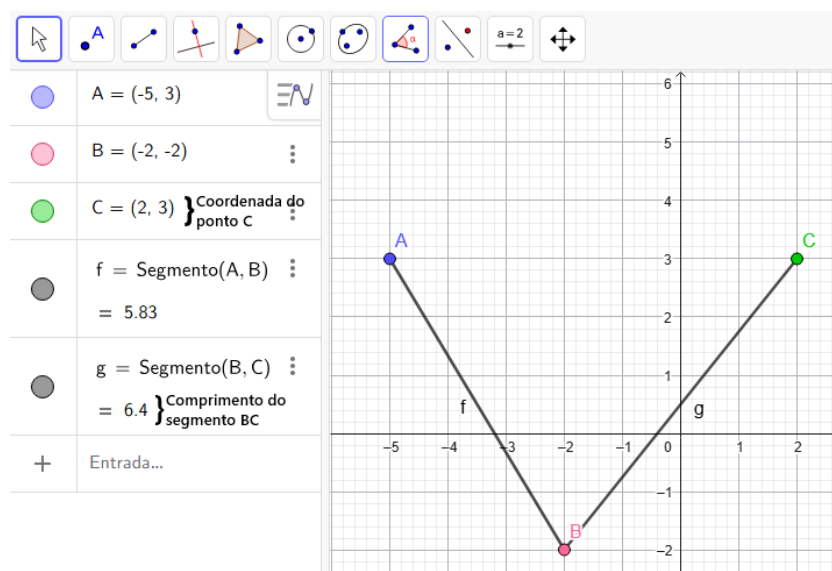
Em seguida o(a) professor(a) mostra que é possível mover os extremos do segmento e mesmo assim o ponto médio mantém sua propriedade. Com essa informação, solicita-se

Figura 14 – Comandos segmento e ponto médio no GeoGebra



Fonte: Autoria própria (2026)

Figura 15 – Coordenadas e comprimentos na janela de álgebra



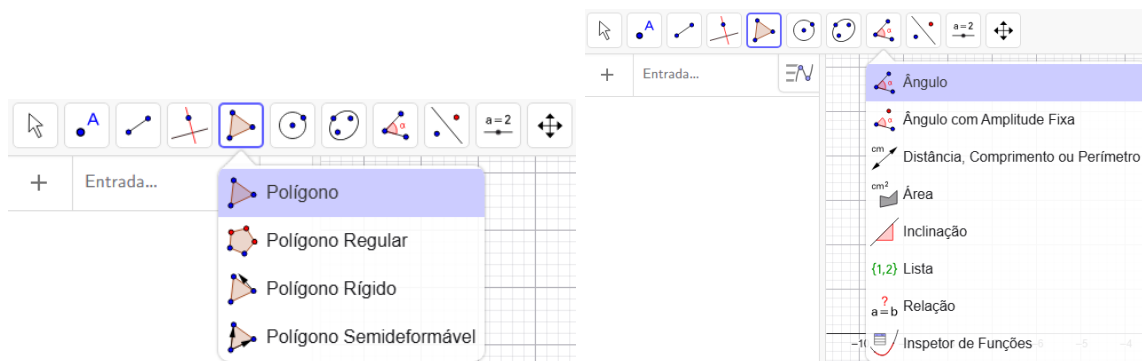
Fonte: Autoria própria (2026)

aos estudantes que movam os extremos do segmento para pontos que possuem as coordenadas inteiras. É questionado aos estudantes se eles conseguem perceber alguma relação entre as coordenadas dos extremos e as coordenadas do ponto médio. O(a) professor(a) deve conduzir para que os estudantes concluam que as coordenadas do ponto médio é a média aritmética das coordenadas dos extremos.

Feita, então, a introdução ao GeoGebra os estudantes serão instruídos a explorar o recurso e suas ferramentas livremente por 5 minutos, podendo construir pontos, polígonos, ângulos e outros da forma que acharem melhor para entender o funcionamento da plataforma.

Para o próximo passo é solicitado aos estudantes que demonstrem a validade do Teorema da Base Média de forma visual e exploratória. Dessa forma, o(a) professor(a)

Figura 16 – Comandos polígonos e ângulos no GeoGebra



Fonte: Autoria própria (2026)

inicia relembando o que é a base média de um triângulo, ou seja, diz que é o segmento que une os pontos médios de dois lados do triângulo.

O próximo passo é enunciar o teorema: a base média de um triângulo mede metade do comprimento da base relativa a ela e é paralela a ela.

Nessa primeira demonstração o(a) professor(a) guiará os estudantes em como construir a figura que auxiliará a demonstrar o teorema com o seguinte passo-a-passo utilizando as ferramentas das figuras 14 e 16:

- Construa um triângulo qualquer utilizando a ferramenta “Polígono”.
- Encontrem os pontos médios de dois lados desse triângulo utilizando a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”.
- Utilizando a ferramenta “Ângulo”, selecione os ângulos que a base e a base média fazem com os outros dois lados do triângulo.

Após essa construção realizada o(a) professor(a) deve mediar uma discussão com os alunos para cheguem à conclusão que essas informações obtidas são suficientes para confirmar a validade do teorema. Perguntas como quanto vale a razão entre a base e a base média e quais são as condições para que duas retas sejam paralelas podem auxiliar a guiar esse momento.

Para confirmar que o resultado vale para qualquer triângulo e não apenas para aquele construído por eles, o docente solicitará que os estudantes movam os vértices do triângulo como queiram e depois verifiquem se as conclusões anteriores são mantidas.

Recursos necessários: Laboratório de informática com acesso à internet ou com o GeoGebra baixado, quadro branco e pincel.

Sugestão de avaliação: A participação dos estudantes nas atividades investigativas.

3.2 Plano de aula 2

Tempo sugerido: 50 minutos

Objetivos específicos:

- Utilizar o GeoGebra como ferramenta de investigação matemática;
- Identificar e justificar propriedades de paralelogramos a partir de construções geométricas e;
- Investigar propriedades de polígonos, em particular, do octógono, a partir de construções dinâmicas.

Procedimentos didático-pedagógicos

Na segunda aula, será apresentado aos estudantes o seguinte enunciado: Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Se tomarmos M_1 , M_2 , M_3 e M_4 os pontos médios dos lados AB , BC , CD e DA , respectivamente, então o quadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ é um paralelogramo.

Será solicitado que os estudantes utilizem o que aprenderam sobre o GeoGebra junto com o conhecimento de geometria que eles já possuem para tentar mostrar que vale essa afirmação. Nesse momento, caso seja necessário, é permitido que os alunos pesquisem propriedades dos paralelogramos caso não lembrem. Diferente da demonstração do Teorema da Base Média feita na aula 1, os alunos devem ter liberdade para construir suas figuras ao invés de seguir um passo-a-passo pré elaborado pelo professor.

No GeoGebra existe um recurso chamado “protocolo de construção” que possibilita ver a ordem em que os elementos foram construídos na tabela de visualização. Essa ferramenta se mostra útil para avaliar a linha de raciocínio dos estudantes na construção da figura. Por isso, no fim, eles devem enviar para o professor:

- A imagem construída por eles no GeoGebra;
- O protocolo de construção gerado pelo GeoGebra e;
- Uma breve explicação do porque esse quadrilátero realmente é um paralelogramo.

Novamente os estudantes devem ser estimulados a deformar o quadrilátero original de várias formas para concluir que a propriedade se mantém.

Uma segunda investigação será feita nessa aula agora para mostrar a validade da propriedade do octógono (Santos, Comby e Silva, 2018). Ou seja, mostrar que sendo $A_1A_2A_3...A_8$ um octógono se M_1 , M_2 , ..., M_8 são os pontos médios dos lados A_1A_2 , A_2A_3 ,

..., A_8A_1 , respectivamente, e se I , J , K e L são pontos médios, respectivamente, dos segmentos M_1M_5 , M_2M_6 , M_3M_7 e M_4M_8 , temos que o quadrilátero $IJKL$ é, necessariamente, um paralelogramo ou um polígono degenerado.

Para que não exista confusão será orientado aos estudantes que mude o nome dos vértices para os mesmos do enunciado. Novamente, os estudantes devem enviar a imagem gerada e o protocolo de construção.

Recursos necessários: Laboratório de informática com acesso à internet ou com o GeoGebra baixado, quadro branco e pincel.

Sugestão de avaliação: A participação dos estudantes nas atividades investigativas, as construções geométricas realizadas no GeoGebra e a clareza e consistência das argumentações matemáticas apresentadas.

3.3 Plano de aula 3

Tempo sugerido: 50 minutos

Objetivos específicos:

- Utilizar o GeoGebra como ferramenta de investigação matemática;
- Investigar propriedades de polígonos, em particular, octógono e dodecágono, a partir de construções dinâmicas e;
- Compreender o conceito de baricentro e relacioná-lo à média aritmética das coordenadas dos vértices de um triângulo
- Mostrar aos alunos que descobertas recentes em matemática continuam sendo feitas em pesquisas.

Procedimentos didático-pedagógicos

Na terceira aula, será trabalhado, primeiramente, o conceito de baricentro. O professor deve perguntar aos estudantes se eles sabem o que é baricentro. Caso ninguém responda corretamente é solicitado a eles que pesquisem para somente depois realizar a construção do triângulo, de suas medianas e, por último, a do baricentro. Mas se responderem que é o encontro das medianas do triângulo eles já partem para a construção acima. Essa parte é importante para que os estudantes percebam que realmente as medianas sempre se encontram em um mesmo ponto.

Após a realização dessa primeira parte é explicado aos alunos que o baricentro é também o centro do triângulo logo, utilizando a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” também é possível encontrar o baricentro sem precisar construir as medianas.

Daí parte-se para a demonstração visual da propriedade dos dodecágonos descrita neste trabalho. Os estudantes devem ficar livres para construir a figura no GeoGebra e mais uma vez devem enviar para o professor a imagem gerada e o protocolo de construção.

Uma possibilidade para trabalhar os conceitos de geometria analítica é realizar as demonstrações das propriedades do quadrilátero, do octógono e do dodecágono apresentadas, respectivamente, na seção 1.2 desta dissertação, no artigo de Santos, Comby e Silva (2018) e no capítulo e deste trabalho.

Para encerrar a aula e, também, esta sequência didática, o professor deve mediar uma discussão questionando quais conceitos os estudantes conseguiram entender melhor com esta atividade como forma de sistematizar todo o conteúdo trabalhado.

Recursos necessários: Laboratório de informática com acesso à internet ou com o GeoGebra baixado, quadro branco e pincel.

Sugestão de avaliação: A participação dos estudantes nas atividades investigativas, as construções geométricas realizadas no GeoGebra e as conclusões da discussão final.

4 Relato da aplicação da sequência didática

A sequência apresentada no capítulo anterior foi aplicada em duas turmas de 3ª série do curso técnico em eventos integrado ao ensino médio (EMI Eventos) do Instituto Federal de Brasília (IFB) campus Brasília. A escolha da instituição se deu por se tratar do local em que a autora desta dissertação trabalha. As turmas que serão tratadas aqui como turma X e turma Y possuem, respectivamente, 21 e 16 estudantes.

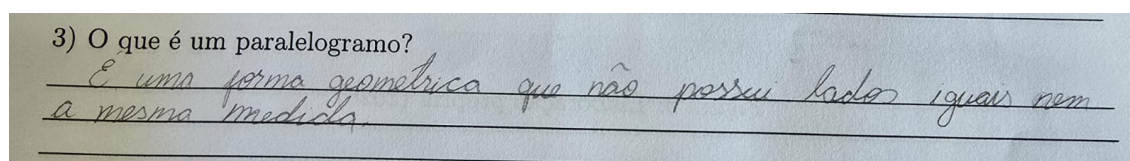
No IFB - campus Brasília existem laboratórios de informática que comportam até 38 estudantes, portanto, a estrutura da instituição possibilitou que a sequência didática fosse aplicada.

Inicialmente, a professora aplicou um questionário composto por 8 questões, que se encontra no anexo 1, sobre os conceitos básicos de geometria plana e analítica que esse produto trabalha para verificar quais dessas ideias os estudantes haviam realmente absorvido no ano anterior. Esse questionário foi aplicado nas turmas X e Y nos dias 12 e 11 de março, respectivamente, e tratava de conceitos como ponto médio, definição de paralelogramo e polígonos e baricentro. Participaram do questionário inicial 15 estudantes da turma X e 15, da turma Y.

As questões 1, 2, 3, 5 e 7 englobavam perguntas abertas sobre definições. A pergunta 1 dizia "Descreva com as suas palavras o que é o ponto médio de um segmento?"; a 2, "O que é a base média de um triângulo?"; a 3, "O que é um paralelogramo?"; a 5, "O que é um polígono?" e a 7, "Você já ouviu falar em baricentro? Se sim, diga com suas palavras o que ele representa".

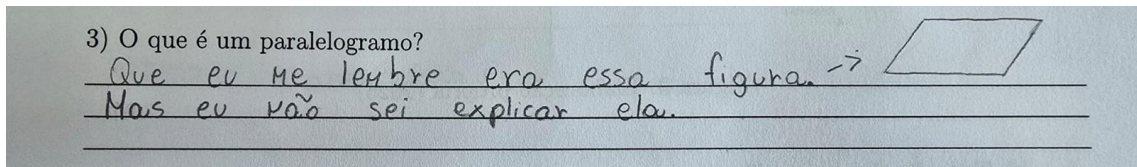
As respostas dos alunos para essas questões foram analisadas e separadas nas seguintes categorias: branco, erro, acerto parcial e acerto. A resposta foi categorizada como branco apenas quando realmente não estava escrito nada. Foi enquadrada como erro quando não havia nenhuma conexão com a ideia da pergunta como na figura 17. Foi considerada como acerto parcial quando, apesar de não estar correta, tinha uma conexão com a pergunta, como na figura 18. E foi computada como acerto quando a ideia estava realmente correta.

Figura 17 – Resposta do estudante A à pergunta 3



Fonte: produção do estudante A (2026)

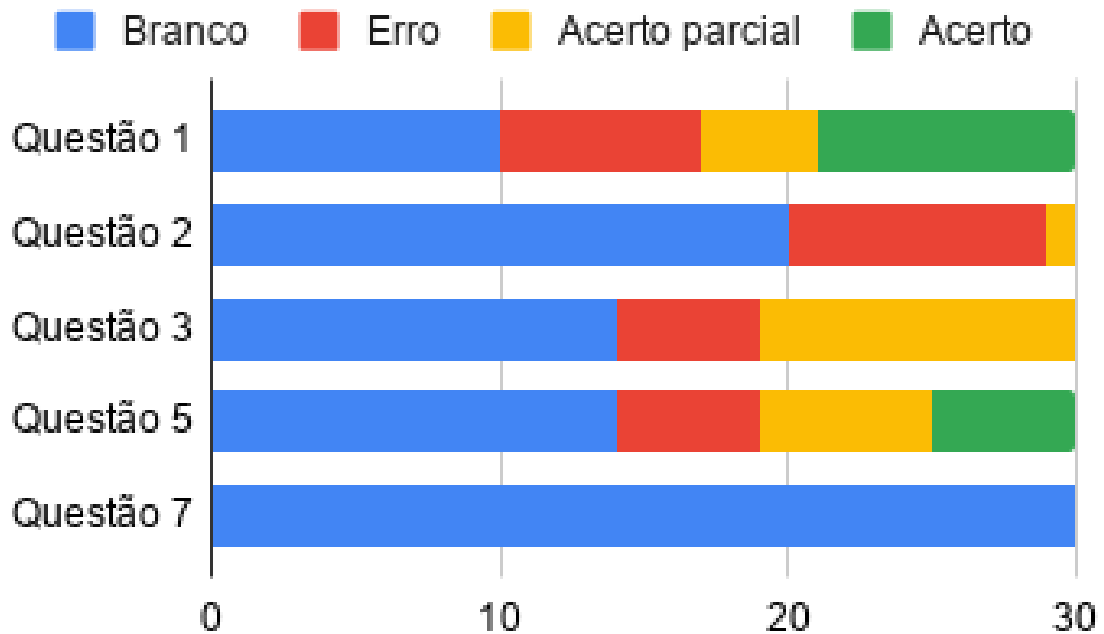
Figura 18 – Resposta do estudante B à pergunta 3



Fonte: produção do estudante B (2026)

A partir disso, construiu-se o gráfico presente na figura 19 com os resultados das duas turmas juntas para essas questões. É possível observar que a quantidade de estudantes que deixaram essas questões em branco foi maior que 30% para todas, mostrando que esses alunos não dominavam essas definições geométricas.

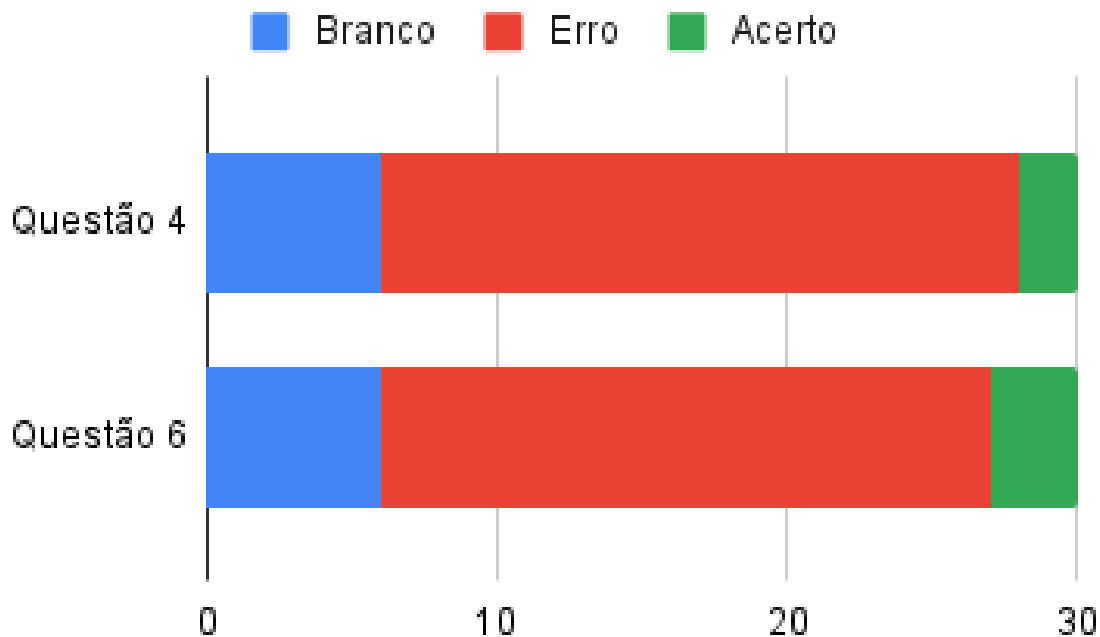
Figura 19 – Gráfico com as respostas dos estudantes as perguntas 1, 2, 3, 5 e 7 do questionário inicial



Fonte: Autoria própria (2026)

As perguntas 4 e 6 tinham por objetivo perceber se os estudantes sabiam identificar visualmente figuras que são, respectivamente, paralelogramos e polígonos. A escolha dessas questões ocorreu por entender que muitas vezes os discentes entendem os conceitos, mas não conseguem explicá-los. Esses dados foram organizados no gráfico presente na figura 20. Assim, foi viável perceber que a dificuldade dos estudantes não era apenas com a definição, mas com os próprios conceitos de paralelogramo e polígono já que em ambos os casos mais de 60% dos alunos marcou alguma figura de forma equivocada.

Figura 20 – Gráfico com as respostas dos estudantes as perguntas 4 e 6 do questionário inicial



Fonte: Autoria própria (2026)

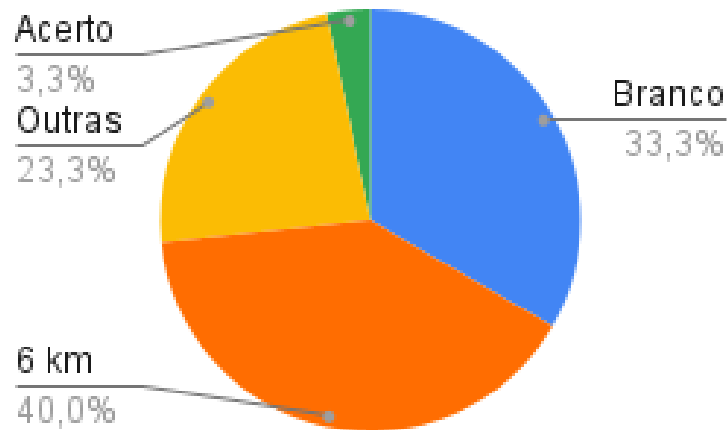
Já a questão 8, que está dividida em a, b e c, tinha como objetivo avaliar os conceitos de geometria analítica. Nela está apresentado um mapa com referencial de um plano cartesiano. Os estabelecimentos supermercado, escola, padaria, casa do Estevam, hospital e academia são representados por pontos nesse plano e suas coordenadas são conhecidas. Com base nisso, as perguntas foram:

- Todo dia de semana Estevam sai de sua casa para a escola por uma avenida em linha reta. Qual a distância percorrida por Estevam para chegar na escola?
- A farmácia do bairro fica exatamente no ponto médio entre o supermercado e a padaria. Quais as coordenadas da farmácia?
- Nesse bairro tem uma rua que liga a farmácia à academia e outra rua que liga o hospital à padaria. Quais as coordenadas do ponto em que essas duas ruas de encontram?

Em relação a questão a, os dados foram divididos entre quem deixou em branco, quem respondeu 6 quilômetros, quem respondeu outra coisa sem justificativa e quem acertou. Esses dados estão no gráfico da figura 21. Essa escolha aconteceu por 40% dos estudantes terem respondido 6 quilômetros, sendo que a resposta seria $6\sqrt{2}$ km.

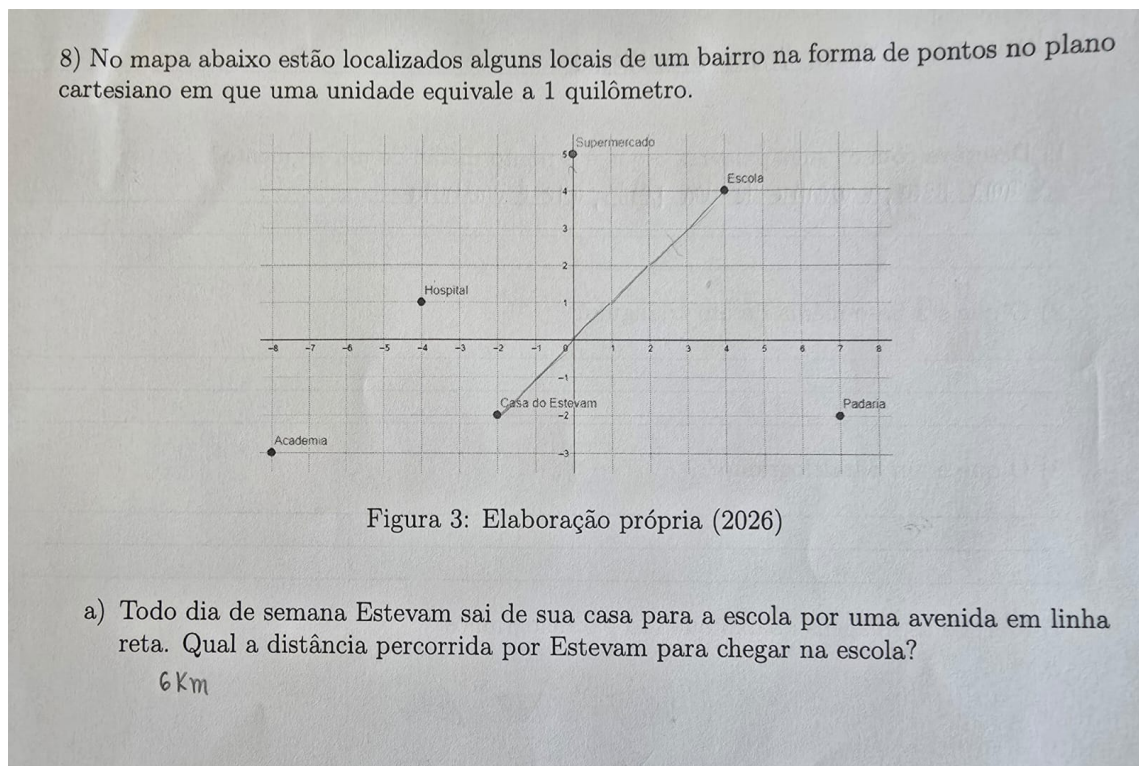
Pela figura 22, uma justificativa plausível para esse fato é que os estudantes contaram a quantidade de diagonais dos quadradinhos da malha, sem considerar que cada diagonal não possui o mesmo comprimento do que o lado do quadrado.

Figura 21 – Gráfico com as respostas dos estudantes à pergunta 8 a



Fonte: Autoria própria (2026)

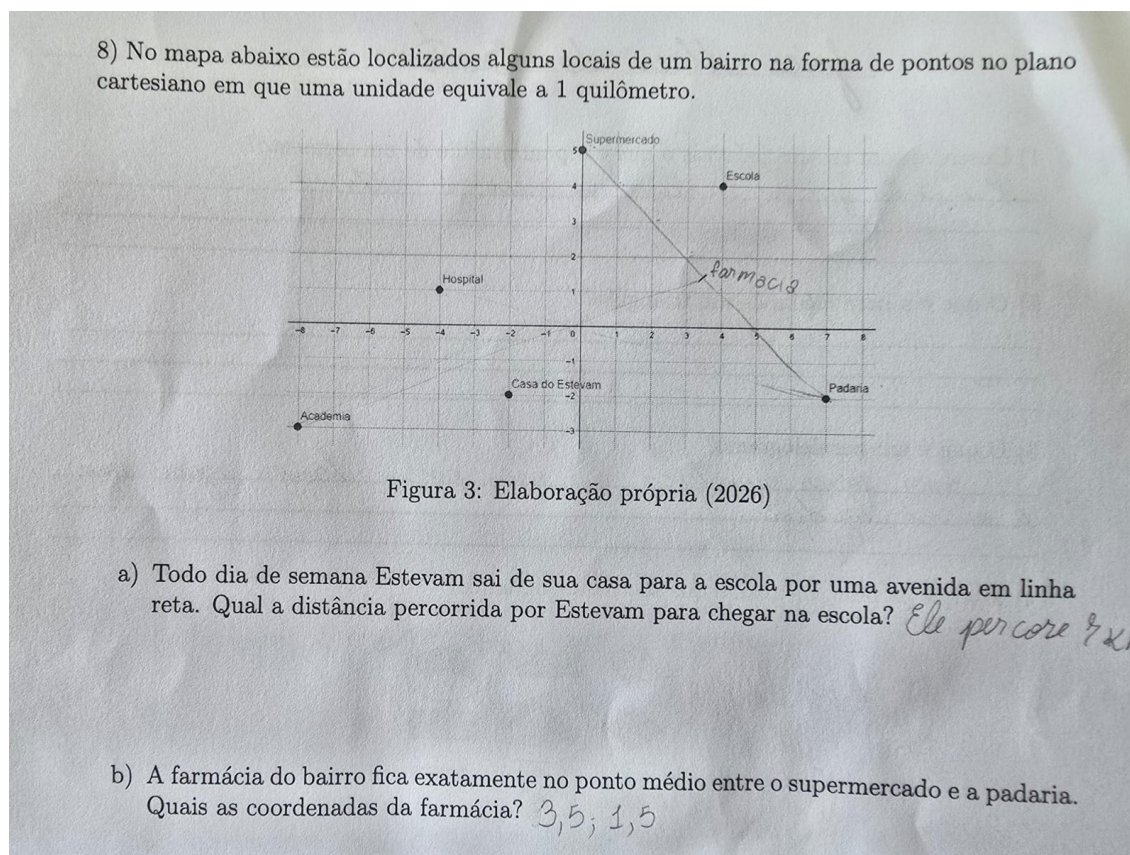
Figura 22 – Resposta do estudante C à pergunta 8 a



Fonte: Produção do estudante C (2026)

Além disso, a letra b teve apenas 3 acertos e o restante, ou deixou em branco, ou não justificou a resposta encontrada. Assim, não foi possível compreender os motivos para tais respostas. Contudo, foi perceptível que, nas respostas corretas, os estudantes conseguiram chegar até o resultado com o auxílio do desenho, como na figura 23.

Figura 23 – Resposta do estudante D à pergunta 8 b



Fonte: Produção do estudante D (2026)

Já a letra c, não teve nenhum estudante que acertou ou expressou alguma justificativa relacionada ao problema.

Esses resultados corroboram com a necessidade de se pensar intervenções baseadas em atividades lúdicas e concretas para o ensino de geometria no ensino médio. A partir disso, iniciou-se a realização da sequência didática. As aulas descritas nos planos de aula foram aplicadas nas duas turmas nos dias indicados na tabela 1. A descrição dessa aplicação se encontra a seguir.

Tabela 1 – Dias de aplicação da sequência didática nas turmas X e Y

	X	Y
Aula 1	19/02	25/02
Aula 2	26/02	04/03
Aula 3	05/03	11/03

Fonte: Elebaoração própria (2026)

Aula 1

Na turma X, por um problema técnico, o IFB ficou sem internet nos laboratórios e para conseguir dar continuidade a atividade a tela do computador da docente foi compartilhada no datashow. Mesmo assim os estudantes estavam bem engajados na atividade.

Além disso, foi possível perceber que os estudantes, que antes realmente não compreendiam o conceito de ponto médio e muito menos a relação entre as coordenadas dos extremos de um segmento com as coordenadas de seu ponto médio, passaram a conseguir definir o que é o ponto médio utilizando suas próprias palavras.

Na turma Y, a aplicação seguiu sem intercorrências. Por terem acesso direto ao GeoGebra eles puderam explorar mais o software do que a turma X. Porém, por ainda estarem conhecendo o GeoGebra eles ficaram um pouco perdidos na realização das atividades propostas nesse primeiro momento.

Nas duas turmas, os estudantes avaliaram de forma muito positiva a atividade relacionada a demonstrar o teorema da base média de um triângulo utilizando o GeoGebra pois, possibilitou que eles visualizassem os elementos geométricos que estão presentes nessa demonstração.

Aula 2

A segunda aula, foi muito similar nas duas turmas. Porém ficou nítido que a turma X, que havia tido um primeiro contato mais mediado com o GeoGebra, estava trabalhando de forma mais autônoma do que a turma Y, que precisou de mais intervenções.

Quando os estudantes foram questionados sobre o que é um paralelogramo, apenas uma aluna soube dizer o que era e, mesmo assim, não soube trazer nenhuma propriedade dos paralelogramos para discutir. Assim, a professora solicitou que eles pesquisassem sobre essas propriedades e trouxessem para o coletivo o que haviam entendido.

Dessa forma, eles trouxeram as propriedades abaixo:

- os lados opostos são congruentes;
- os ângulos opostos são congruentes;
- os ângulos adjacentes são suplementares e
- as diagonais se cruzam em seus pontos médios.

Com essas informações em mãos eles partiram para demonstração da propriedade que diz que, se tomarmos M_1 , M_2 , M_3 e M_4 os pontos médios dos lados AB , BC , CD e DA , respectivamente, então o quadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ é um paralelogramo.

Um resultado interessante foi que, na turma X, ao deixar os estudantes livres para explorarem o GeoGebra e mobilizar as ferramentas do software e conhecimentos geométricos que haviam adquirido como preferissem, a forma de concluir que $M_1M_2M_3M_4$ era um paralelogramo não foi a mesma para todos. A maioria utilizou a informação de que um paralelogramo possui os lados opostos congruentes e, ao formar o quadrilátero $M_1M_2M_3M_4$, olharam os comprimentos de seus lados na janela de álgebra para justificar.

Porém, alguns alunos utilizaram a propriedade sobre os ângulos opostos serem congruentes e, utilizando a ferramenta “ângulos”, conseguiram mostrar que $M_1M_2M_3M_4$ é de fato um paralelogramo.

Já na demonstração da propriedade do octógono foi possível perceber que os estudantes estavam mais autônomos sobre como lidar com o GeoGebra e conseguiram terminar essa atividade sem muitas intervenções.

Aula 3

A terceira aula, assim como a segunda, foi similar nas duas turmas. Quando foi questionado aos estudantes sobre o que é o baricentro de um triângulo, ninguém soube responder. Assim, eles pesquisaram e encontraram a seguinte definição: “é o ponto de encontro das medianas”. Dessa forma, a professora perguntou a eles o que era então uma mediana do triângulo e, novamente, não houve resposta de imediato. Eles pesquisaram novamente e, a partir do que encontraram, construíram no GeoGebra, um triângulo e suas três medianas. Essa construção possibilitou com que eles percebessem que as três medianas se cruzam em um único ponto, o baricentro.

Com essas novas informações, os estudantes conseguiram demonstrar a propriedade do dodecágono. Porém, foi necessário auxiliar para que eles renomeassem os pontos e pontos médios para $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$ e $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{12}$, respectivamente, para que eles não se confundissem na hora de construir os triângulos $M_1M_5M_9$, $M_2M_6M_{10}$, $M_3M_7M_{11}$ e $M_4M_8M_{12}$.

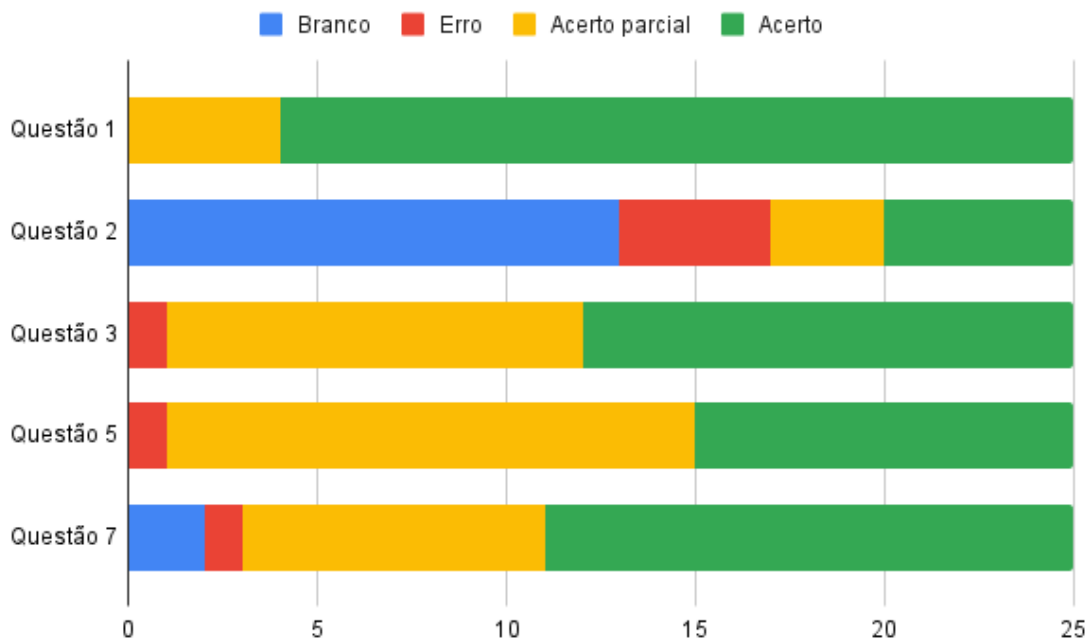
Questionário final

Para concluir as atividades relacionadas a esse tema, a professora reaplicou o questionário feito no primeiro dia a fim de comparar as respostas dos estudantes. Dessa vez, 11 estudantes da turma X responderam e 14, da turma Y.

Em relação as questões de definição, 1, 2, 3, 5 e 7, percebe-se uma grande diferença entre os questionários inicial e final. Após participação nas aulas, as perguntas 1, 3 e 5 não foram deixadas em branco por nenhum estudante, como é possível ver na figura 24. Enquanto, inicialmente, pelo menos 30% dos estudantes haviam deixado cada uma dessas sem responder.

Além disso, a taxa de acerto de todas as questões aumentou. Na questão 1 inicialmente 30% dos alunos acertaram e, no final, 84% acertaram. Já na questão 5, inicialmente 16% acertaram e, ao final, foi 40% de acerto. As questões 2, 3 e 7 não tiveram nenhuma resposta correta no primeiro questionário e aumentaram para 20%, 52% e 56% de acertos, respectivamente.

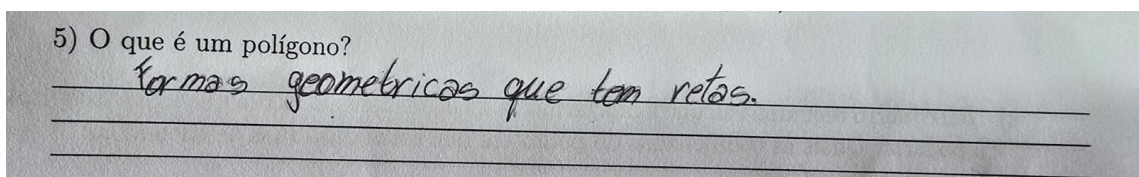
Figura 24 – Gráfico com as respostas dos estudantes às perguntas 1, 2, 3, 5 e 7 do questionário final



Fonte: Autoria própria (2026)

Outro dado notável é a alta quantidade de respostas parcialmente certas nas questões 3 e 5. Muitos estudantes escreveram conceitos corretos nesses itens, porém de forma incompleta. Como na figura 25, em que o estudante não especificou que é uma forma plana e nem que deve ser composta apenas por segmentos de reta.

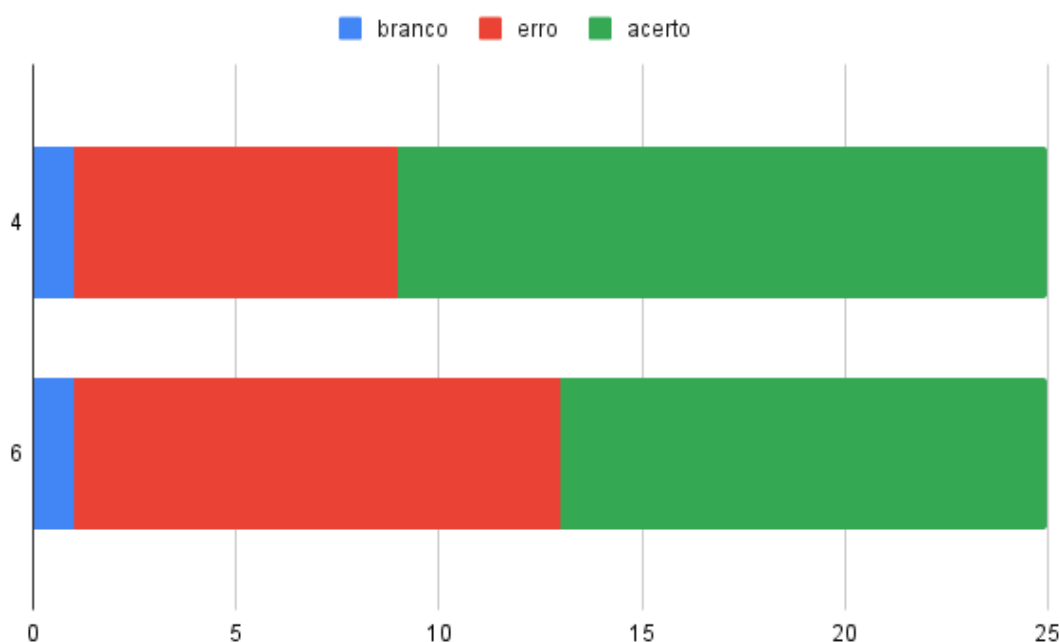
Figura 25 – Resposta do estudante E à pergunta 5 do questionário final



Fonte: Produção do estudante E (2026)

Já em relação às questões 4 e 6, também foi possível observar aumento da frequência de respostas corretas. Como é visto na figura 25, 64% acertou a 4 e 48%, a 6. No questionário inicial aproximadamente 7% dos estudantes haviam acertado a questão 4 e 10%, a 6.

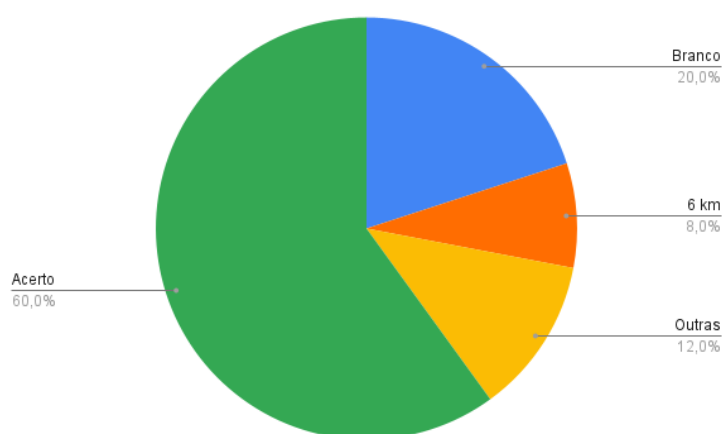
Figura 26 – Gráfico com as respostas dos estudantes às perguntas 4 e 6 do questionário final



Fonte: Autoria própria (2026)

Além disso, sobre a questão 8 a, que tratava do cálculo de distâncias, o resultado manteve a tendência de aumento no percentual de acertos, como na figura 27. Também é visto que a ocorrência da resposta 6 quilômetros, que inicialmente apareceu em 40% dos questionários, no final só apareceu em 8%.

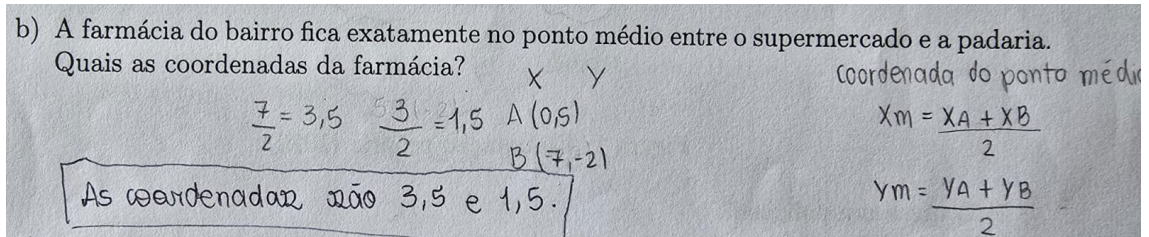
Figura 27 – Gráfico com as respostas dos estudantes à pergunta 8 a do questionário final



Fonte: Autoria própria (2026)

Por sua vez, a questão 8 b teve 18 acertos, o que representa 72% das respostas. Porém, o que mais chamou atenção foi que os estudantes, em sua maioria, não tentaram achar o ponto médio pelo desenho. Eles utilizaram a informação de que as coordenadas do ponto médio são a média aritmética das coordenadas como na figura 28.

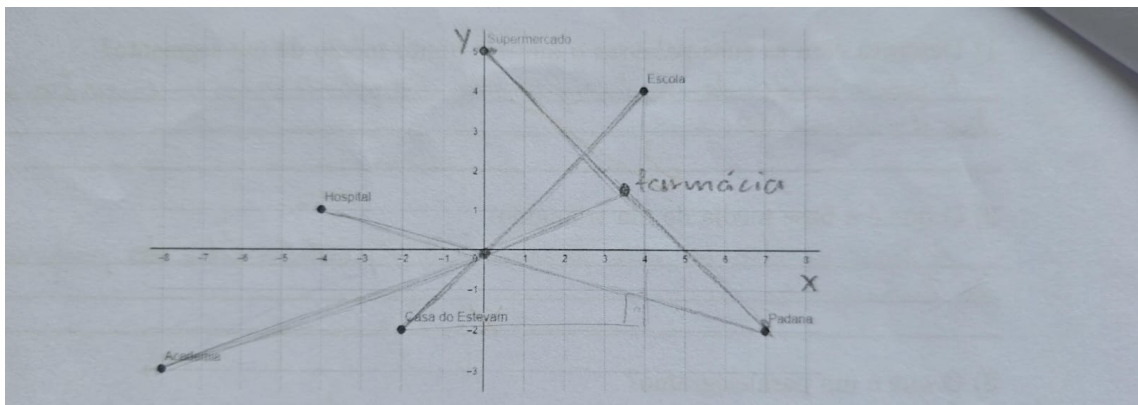
Figura 28 – Resposta do estudante F à pergunta 8 b do questionário final



Fonte: Produção do estudante F (2026)

Por último, a questão 8 c teve apenas 5 acertos, $(-\frac{1}{3}; 0)$, ou seja, 20% das respostas. Outra resposta recorrente foi $(0; 0)$, que apareceu em 16% dos questionários. Nesses casos, os estudantes tentaram encontrar o ponto a partir do mapa, como na figura 29 e, realmente, parece estar na origem por uma questão de erro instrumental. Outros 24% deixaram em branco.

Figura 29 – Desenho realizado por um aluno G que respondeu $(0; 0)$ à questão 8 c do questionário final



Fonte: Produção do estudante G (2026)

Uma justificativa para a alta quantidade de erros é que os estudantes não conseguiram perceber que, nesse caso, o ponto que deveriam encontrar se tratava do baricentro o triângulo com vértices na academia, na padaria e no supermercado. Isso ocorre pois as ruas que ligam a padaria ao hospital e a academia à escola são medianas desse triângulo.

Diante dos dados acima, ficou nítido que a quantidade de perguntas em branco diminuiu em todos os itens, além de que a taxa de respostas classificadas como acerto parcial ou acerto cresceu também em todos, mostrando que os estudantes passaram a dominar mais os conceitos trabalhados. Além disso, foi comum que durante a aplicação estudantes recorressem a memória do que haviam feito no GeoGebra para validar ou não alguma resposta.

Uma das diferenças mais marcantes entre os questionários foi que no final os estudantes, em geral, sabiam reconhecer visualmente paralelogramos e defini-los utilizando suas propriedades. Já no inicial, esse conhecimento foi percebido de forma mais frágil.

Considerações Finais

Diante do que foi discutido ao longo deste trabalho, é evidente a relevância do ensino de geometria na educação básica, bem como a necessidade de se pensar formas alternativas de ensinar geometria. Assim, foi possível explorar a propriedade do dodecágono, recentemente descoberta, descrita neste trabalho, com a finalidade de articular conhecimentos de geometria plana e analítica em uma sequência didática que valoriza a exploração.

A sequência didática aplicada, com o uso do GeoGebra, demonstrou potencial para promover engajamento dos estudantes, incentivando a participação ativa e o desenvolvimento do raciocínio matemático. Os resultados obtidos indicam avanços significativos na compreensão conceitual dos alunos, reforçando a importância de práticas pedagógicas que integrem tecnologia e investigação.

Destaca-se que este trabalho também contribuiu para evidenciar a matemática como uma área em constante construção. Os estudantes ficaram impressionados ao saber que ainda tem coisas para serem descobertas dentro dessa área e, mais ainda, por descobrirem que alguém próximo a eles, no caso a professora, havia feito uma dessas descobertas.

É importante notar que a amostra é pequena, levando em consideração que juntando as duas turmas apenas 37 estudantes faziam parte desse grupo. É apropriado considerar aplicar esta atividade em um grupo mais amplo a fim de verificar se os resultados continuariam se mostrando positivos.

Como perspectivas futuras, sugere-se a aplicação dessa proposta também para estudantes do ensino médio regular ao invés do técnico integrado. Além disso, propõe-se a investigação de propriedades semelhantes à do dodecágono para outros polígonos com quantidade de lados múltipla de quatro. Dessa forma, talvez seja possível encontrar uma generalização para tal propriedade.

Referências

- BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. p. 276. 2018.
- DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal. **Currículo em Movimento do Distrito Federal: Ensino Fundamental anos iniciais - anos finais**. Brasília, p. 161. 2018.
- GÓMEZ, J., FRENSEL, K., CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro, SBM. 2017. (Coleção PROFMAT, 23)
- REZENDE, H.; SANTOS, R. **Uma propriedade dos dodecágonos**. Revista do professor de matemática, Rio de Janeiro, n. 111, p. 12-15. 2025.
- SANTOS, R., COMBY, A., SILVA, B. **Uma propriedade curiosa dos octógonos**. Revista do professor de Matemática. n. 99, p.21-21. 2018.
- SOUSA, A., MARTINS, R., CARNEIRO, R., SILVA, K., CARNEIRO, R. (2022). **Tecnologias na matemática: uma revisão acerca de trabalhos com o uso do GeoGebra no ensino de geometria plana**. Revista Paranaense De Educação Matemática, 11(26), p. 384–401. Recuperado de <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/5201>

Apêndices

Aluno(a): _____

1) Descreva com as suas palavras o que é o ponto médio de um segmento?

2) O que é a base média de um triângulo?

3) O que é um paralelogramo?

4) Marque as imagens abaixo que são paralelogramos.

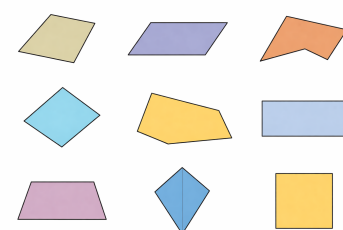


Figura 1: Elaboração própria (2026)

5) O que é um polígono?

6) Marque ss imagens abaixo que são polígonos?

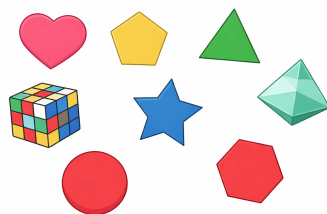


Figura 2: Elaboração própria (2026)

7) Você já ouviu falar em baricentro do triângulo? Se sim, diga com suas palavras o que ele representa.

8) No mapa abaixo estão localizados alguns locais de um bairro na forma de pontos no plano cartesiano em que uma unidade equivale a 1 quilômetro.

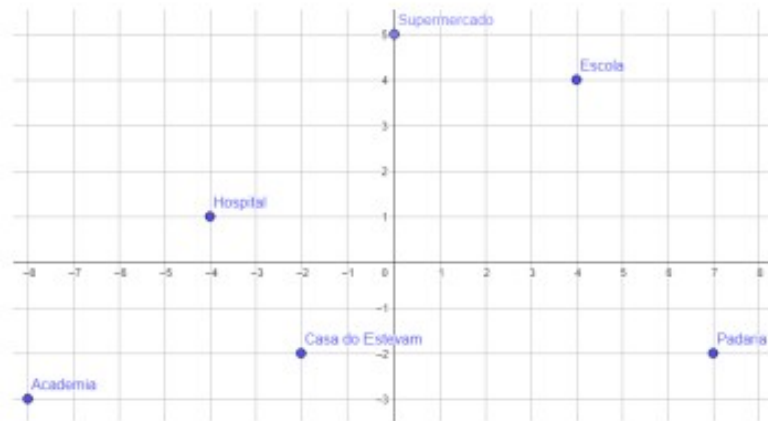


Figura 3: Elaboração própria (2026)

- Todo dia de semana Estevam sai de sua casa para a escola por uma avenida em linha reta. Qual a distância percorrida por Estevam para chegar na escola?
- A farmácia do bairro fica exatamente no ponto médio entre o supermercado e a padaria. Quais as coordenadas da farmácia?
- Nesse bairro tem uma rua que liga a farmácia à academia e outra rua que liga o hospital à padaria. Quais as coordenadas do ponto em que essas duas ruas se encontram?