UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

ISMAEL GOMES DOS SANTOS

ANALITICIDADE DO BINÔMIO DE NEWTON E TRIÂNGULO DE PASCAL NO ENSINO DA MATEMÁTICA: Contribuições histórica, formação de professores, aplicabilidade teórica e contextualizada

ABAETETUBA – PA
2025

ISMAEL GOMES DOS SANTOS

ANALITICIDADE DO BINÔMIO DE NEWTON E TRIÂNGULO DE PASCAL NO ENSINO DA MATEMÁTICA: Contribuições histórica, formação de professores, aplicabilidade teórica e contextualizada

Dissertação apresentada à Banca Avaliadora do Departamento PROFMAT, da Universidade do Federal do Pará – UFPA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa.

ABAETETUBA – PA
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237a Santos, Ismael Gomes dos.
ANALITICIDADE DO BINÔMIO DE NEWTON E TRIÂNGULO DE PASCAL NO ENSINO DA MATEMÁTICA : Contribuições histórica, formação de professores, aplicabilidade teórica e contextualizada / Ismael Gomes dos Santos. — 2025.
83 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2025.

1. Binômio de Newton. 2. Triângulo de Pascal. 3. Ensino da Matemática. 4. Álgebra e Aplicabilidade. I. Título.

CDD 510

ISMAEL GOMES DOS SANTOS

ANALITICIDADE DO BINÔMIO DE NEWTON E TRIÂNGULO DE PASCAL NO ENSINO DA MATEMÁTICA: Contribuições histórica, formação de professores, aplicabilidade teórica e contextualizada

Dissertação apresentada à Banca Avaliadora do Departamento PROFMAT, da Universidade do Federal do Pará – UFPA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data de aprovação: _____/_____/________

Conceito:

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. JOSÉ FRANCISCO DA SILVA COSTA – Orientador
PROFMAT/UFPA (Membro interno)

____
Prof. Dr. AUBEDIR SEIXAS COSTA
PROFMAT/UFPA (Membro interno)

____
Prof. Dr. SEBASTIÃO MARTINS SIQUEIRA CORDEIRO
PROFMAT/UFPA (Membro interno)

____
Prof. Dr. GENIVALDO DOS PASSOS CORRÊA
PROFMAT/UFPA (Membro interno)

____
Prof. Dr. WILSON RODRIGUES OLIVEIRA
PROFMAT /UFPA (Membro interno)

____
Prof. Dr. ANTONIO MAIA DE JESUS CHAVES NETO
ICEN/UFPA (Membro externo)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, meu Senhor e Salvador, que me deu força, sabedoria e discernimento para superar os desafios e perseverar até a conclusão desta dissertação. Sua graça e misericórdia foram o alicerce para cada etapa deste trabalho, guiando meus passos e iluminando minha mente em momentos de dúvida.

Ao meu orientador, o Professor José Francisco da Silva Costa, pela valiosa orientação, pelo apoio incondicional e pela paciência demonstrada em cada fase deste projeto. Sem sua experiência e dedicação, este trabalho não seria o que é hoje.

À minha família, meu porto seguro e minha maior inspiração. A você, minha amada esposa, Franciane Matias Martins dos Santos, e meu precioso filho Saymon Gael Martins dos Santos, minha profunda gratidão por sempre acreditarem em mim e me incentivarem a buscar meus sonhos.

Aos meus amigos mestrandos da turma de 2023 e em especial ao meu amigo, Rogério Margalho da Silva, pelo companheirismo, pelas discussões enriquecedoras e pelos momentos de descontração que tornaram esta jornada mais leve e prazerosa.

À UFPA, pelo suporte e pelas oportunidades proporcionadas para a realização desta pesquisa.

Este trabalho é uma expressão da minha gratidão a Deus por todas as bênçãos que recebi, e um reflexo da fé que me impulsionou a cada passo. Que Ele seja louvado em cada conquista."

RESUMO

Este estudo, por meio de uma revisão de literatura, analisa as contribuições do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal para o ensino e a aprendizagem de conteúdos algébricos e combinatórios no Ensino Básico. Esses dois conceitos se consolidaram como instrumentos teóricos e operacionais de grande relevância, integrando diferentes áreas da matemática como a álgebra, análise combinatória, teoria dos números e probabilidade. O objetivo geral da pesquisa foi analisar, sob as perspectivas histórica, formal e didático-pedagógica, como esses conceitos podem aprimorar a formação de professores e o ensino de matemática. A abordagem se justifica pela necessidade de resgatar a riqueza estrutural e histórica de conteúdos frequentemente ensinados de forma descontextualizada. A metodologia consistiu em uma revisão da literatura, com a análise de 72 referências, incluindo artigos científicos, dissertações e teses, priorizando publicações entre 2020 e 2025. Os resultados da pesquisa apontam que o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal contribuem significativamente para o desenvolvimento do raciocínio algébrico e para a articulação entre diferentes campos da matemática. Conclui-se que a interligação entre a aplicabilidade, os processos históricos e o formalismo teórico desses conceitos eleva a qualidade do ensino de álgebra e combinatória, favorecendo a aprendizagem dos discentes e a formação de professores, e promovendo uma prática pedagógica mais reflexiva, criativa e conectada com a construção de significados.

Palavras-chave: Binômio de Newton. Triângulo de Pascal. Ensino da Matemática. Álgebra e Aplicabilidade.

ABSTRACT

This study, through a literature review, analyzes the contributions of the Binomial Theorem and Pascal's Triangle to the teaching and learning of algebraic and combinatorial concepts in Basic Education. These two concepts have become significant theoretical and operational tools, integrating different areas of mathematics such as algebra, combinatorics, number theory, and probability. The general objective of the research was to analyze, from historical, formal, and didactic-pedagogical perspectives, how these concepts can improve teacher training and mathematics education. The approach is justified by the need to recover the structural and historical richness of content often taught out of context. The methodology consisted of a literature review, with the analysis of 72 references, including scientific articles, dissertations, and theses, prioritizing publications between 2020 and 2025. The research results indicate that the Binomial Theorem and Pascal's Triangle contribute significantly to the development of algebraic reasoning and to the connection between different fields of mathematics. It is concluded that the interlinking of the applicability, historical processes, and theoretical formalism of these concepts elevates the quality of algebra and combinatorics teaching, favoring student learning and teacher training, and promoting a more reflective, creative, and meaningful pedagogical practice.

Keywords: Binomial Theorem. Pascal's Triangle. Mathematics Education. Algebra and Applicability.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A matemática, como ciência formal, desenvolveu-se ao longo dos séculos por meio da sistematização de padrões numéricos e relações algébricas. Entre os elementos que marcaram esse processo estão o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal, cujas contribuições atravessam desde fundamentos aritméticos até aplicações combinatórias e probabilísticas.

A intersecção entre esses dois objetos matemáticos representa uma das mais elegantes conexões da álgebra, fornecendo subsídios importantes tanto para o desenvolvimento teórico quanto para estratégias de ensino mais eficazes (Silva; Elian, 2020). O Binômio de Newton surge como uma generalização da multiplicação de expressões algébricas, estabelecendo a fórmula de expansão de potências de binômios a partir da combinação de termos. A fórmula

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^{\mathrm{n}} = \binom{n}{0} a^{n-0} b^{0} + \binom{n}{1} a^{n-1} b^{1} + \cdots . + \binom{n}{n} a^{n-n} b^{n}, \tag{1}$$

é acompanhada por coeficientes específicos que seguem um padrão matemático rigoroso, cujas origens se relacionam com princípios da combinatória. Esses coeficientes, conhecidos como números binomiais, representam o número de formas de escolher subconjuntos e são organizados de forma visual no Triângulo de Pascal (Islam *et al.*, 2022).

A história do Triângulo de Pascal, entretanto, antecede o próprio Blaise Pascal. Estruturas similares foram identificadas por matemáticos indianos, chineses e árabes, como Bhaskara, Yang Hui e Al-Karaji, que já utilizavam arranjos numéricos triangulares para resolver problemas aritméticos. No entanto, foi com Pascal, no século XVII, que a estrutura ganhou formalização no Ocidente e passou a ser amplamente reconhecida como instrumento de apoio à álgebra, especialmente na resolução de binômios e no ensino da matemática (Luca; Oliveira, 2024).

A estrutura do Triângulo de Pascal permite visualizar diretamente os coeficientes binomiais associados a qualquer potência natural de um binômio. A simetria do triângulo, as somas recorrentes de seus elementos e sua aplicação em áreas como análise combinatória, geometria e probabilidade tornam-no uma ferramenta valiosa tanto na formação de professores quanto no processo de aprendizagem de discentes do Ensino Básico (Galvão; Chagas, 2022). A disposição triangular favorece ainda a identificação de padrões, o que fortalece a argumentação matemática e o raciocínio lógico.

Além das aplicações tradicionais, pesquisadores contemporâneos têm revisitado o Binômio de Newton sob novas abordagens. Keçeci (2025) propôs uma releitura da expansão binomial por meio de uma matriz quadrada, denominada "*Keçeci Binomial Square*", que introduz perspectivas geométricas e computacionais à estrutura clássica. Essa proposta amplia o entendimento tradicional da expansão e evidencia o potencial investigativo e didático do tema. Tais abordagens reafirmam que o binômio não é um conteúdo estanque, mas sim um campo em constante reelaboração.

Justifica-se, portanto, a realização deste estudo pela relevância histórica, pedagógica e epistemológica dos temas em questão. A compreensão do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal ultrapassa o domínio técnico de fórmulas: trata-se de conteúdos que sintetizam a evolução do pensamento algébrico, revelam a beleza dos padrões matemáticos e oferecem recursos significativos para o ensino de matemática. A aplicabilidade do conteúdo eleva sua importância, aproximando o discente de um ensino contextualizado e, ao mesmo tempo, torna-se útil na formação de professores, pois o domínio aprofundado desses conceitos é essencial para a prática docente crítica, criativa e contextualizada (Luca; Oliveira, 2024).

A metodologia do presente estudo se baseia em uma pesquisa bibliográfica, com abordagem qualitativa, focada em uma revisão de literatura (GIL, 2017). Para a construção do referencial teórico, foram selecionadas 72 fontes bibliográficas que tratam do desenvolvimento histórico e formal do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal, bem como estudos que discutem práticas pedagógicas voltadas ao ensino da álgebra, da combinatória e dos produtos notáveis no âmbito do Ensino Básico.

As buscas foram realizadas em bases acadêmicas nacionais e internacionais, tais como SciELO, Google Acadêmico, Portal de Periódicos da CAPES, ERIC, arXiv e periódicos especializados em Educação Matemática, utilizando-se descritores como "Binômio de Newton", "Triângulo de Pascal", "produtos notáveis", "ensino de álgebra", "formação de professores de matemática", "metodologias de ensino" e "educação básica". A seleção das obras considerou critérios de relevância acadêmica, pertinência temática, ano de publicação (priorizando produções dos últimos cinco anos, entre 2020 e 2025) e reconhecimento das fontes.

Foram incluídos livros didáticos, artigos científicos, dissertações, teses e documentos oficiais que contribuem para a análise do objeto de estudo, bem como textos históricos clássicos que elucidam a evolução dos conceitos abordados.

O objetivo geral da pesquisa foi analisar, sob as perspectivas histórica, formal e didático-pedagógica, como esses conceitos podem aprimorar a formação de professores e o ensino de matemática. Desse modo, a organização e interpretação dos dados bibliográficos seguiram a lógica dos objetivos específicos da pesquisa:

- Investigar a evolução histórica do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal, destacando os principais pensadores e matemáticos envolvidos no seu desenvolvimento;
- Refletir sobre o papel do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal na formação inicial e continuada de professores de matemática, avaliando abordagens didáticas e recursos pedagógicos que utilizam esses conceitos como instrumentos facilitadores da aprendizagem no Ensino Básico;
- Discutir o formalismo matemático relacionado ao Binômio de Newton e sua relação com os coeficientes binomiais presentes no Triângulo de Pascal;
- Identificar as propriedades estruturais e os padrões algébricos do Triângulo de Pascal aplicáveis ao ensino de somatórios e produtos notáveis.

A análise do material coletado foi conduzida por meio de leitura analítica e interpretação crítica dos textos, com ênfase na identificação de convergências, divergências, lacunas e contribuições relevantes para a prática docente. A sistematização dos achados foi realizada em consonância com os objetivos propostos, buscando articular fundamentos teóricos com possibilidades práticas de aplicação em sala de aula, de modo a valorizar a interdisciplinaridade entre álgebra, combinatória e história da matemática.

Assim, a revisão de literatura não se limita à exposição dos conteúdos pesquisados, mas propõe uma reflexão sobre sua importância no processo de ensino-aprendizagem, contribuindo para a qualificação da prática pedagógica e para o fortalecimento da formação matemática de professores atuantes no Ensino Básico. Diante disso, o trabalho busca responder à seguinte problemática: como a compreensão histórica, formal e didática do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal pode contribuir para a formação de professores de matemática e para o aprimoramento das práticas de ensino-aprendizagem no contexto do Ensino Básico?

Considerando esse contexto, objetivo, justificativa, metodologia e problemática, o estudo se encontra estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 2, a dissertação traça a evolução histórica e conceitual do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal, partindo da visão de autores relevantes e explorando as origens e o desenvolvimento progressivo da expansão binomial, desde suas raízes na matemática antiga até sua formalização por Newton. Destaca, também, a contribuição de pensadores e filósofos que avançaram no estudo do binômio, bem como o desenvolvimento histórico do Triângulo de Pascal e sua origem em diferentes civilizações.

No Capítulo 3, o trabalho concentra-se nas contribuições para a prática e a formação docente, tendo como tema central a aplicabilidade e contextualização do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal no ensino da matemática. O estudo aborda a importância do conhecimento histórico e formal na formação inicial, e reflete sobre o processo de ensino-aprendizagem de álgebra e combinatória no ensino básico, discutindo a superação de práticas pedagógicas tradicionais em favor de abordagens mais significativas e contextualizadas.

No Capítulo 4, o trabalho aprofunda-se no formalismo matemático e nas propriedades algébricas dos dois conceitos aplicadas ao ensino da matemática. O capítulo aborda a fórmula geral, os coeficientes binomiais e suas aplicações em contextos escolares, explorando o Triângulo de Pascal como ferramenta didática e analisando a relação entre ele, produtos notáveis e padrões algébricos.

Por fim, o trabalho culmina nas Considerações Finais, onde são apresentadas as conclusões da pesquisa e as sugestões para estudos futuros, seguidas pelas Referências Bibliográficas que embasaram todo o estudo.

CAPÍTULO 2

EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO BINÔMIO DE NEWTON E DO TRIÂNGULO DE PASCAL

A história da matemática é repleta de contribuições progressivas que culminam em estruturas simbólicas e conceituais utilizadas até os dias atuais. Entre essas construções, o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal se destacam por sua relevância no desenvolvimento da álgebra e da combinatória. Esses dois elementos não apenas compartilham fundamentos históricos comuns, mas também se complementam na representação dos coeficientes binomiais e nas propriedades matemáticas associadas às potências de expressões algébricas.

2.1 A Visão de Relevantes Autores para o Aspecto Conceitual e Histórico da Matemática

O estudo de Aliu, Rexhepi e Iseni (2023) concentra-se na eficácia do uso do Triângulo de Pascal na resolução de problemas matemáticos elementares, especialmente no que se refere à formação do pensamento algébrico. Os autores exploram como a visualização e a manipulação direta dessa estrutura favorecem a compreensão de padrões numéricos e de relações combinatórias, sendo eficazes em ambientes escolares nos quais os discentes apresentam dificuldades na abstração simbólica. Eles destacam que atividades que envolvem a geração de linhas do triângulo, identificação de simetrias e ligação com coeficientes binomiais tornam-se ferramentas acessíveis e cognitivamente produtivas para discentes do ensino fundamental e médio, contribuindo para um ensino mais exploratório e menos mecânico.

Cameron e Nkwanta (2023) abordam uma perspectiva mais avançada ao explorar as matrizes de Riordan e suas aplicações na enumeração de caminhos em reticulados, conectando essas ideias à estrutura do Triângulo de Pascal. Embora o artigo esteja mais voltado à matemática superior, ele oferece elementos valiosos para a discussão sobre como estruturas binomiais e recursivas se conectam com outras áreas da matemática, como a análise combinatória e a álgebra linear. A aplicação didática, embora não central no artigo, pode ser inferida ao se considerar a importância do desenvolvimento da noção de recorrência e padrões, úteis desde os primeiros anos do ensino médio.

No campo histórico, Chatterjee (2021) apresenta uma reconstrução crítica das origens da matemática, enfatizando o papel da álgebra clássica e dos desenvolvimentos que culminaram no Binômio de Newton. Segundo o autor, o surgimento do pensamento algébrico está intimamente ligado às necessidades práticas de resolução de problemas numéricos e geométricos, sendo o binômio uma expressão simbólica da generalização que a álgebra proporciona. Ele destaca que a compreensão da história desses conceitos não apenas humaniza o conteúdo matemático, mas também pode ser utilizada como ferramenta didática para a formação crítica de professores.

Corroborando essa visão, Cordeiro (2024) reitera a importância de inserir o ensino de álgebra e combinatória em um contexto histórico. O autor destaca que tanto o Triângulo de Pascal quanto o Binômio de Newton são frutos de um desenvolvimento progressivo de ideias que remontam à antiguidade chinesa, islâmica e europeia, e que sua compreensão histórica fortalece a prática docente ao oferecer aos professores um panorama mais amplo da evolução dos conceitos, o que favorece abordagens pedagógicas mais conscientes.

Galvão e Chagas (2022) trazem uma contribuição específica ao discutirem onde e como os somatórios são abordados no currículo do Ensino Básico. Eles mostram que, apesar de aparecerem com frequência nos livros didáticos e provas, os somatórios são, em geral, tratados de maneira superficial e desvinculada de suas estruturas subjacentes, como o próprio Triângulo de Pascal. Os autores defendem uma abordagem mais integrada, que permita aos discentes compreenderem como os padrões do triângulo podem ser utilizados para facilitar cálculos e justificar propriedades de somas sucessivas, inclusive em produtos notáveis.

O artigo de García-García *et al.* (2022) oferece uma análise detalhada da origem histórica da distribuição binomial e das situações-problema que a tornaram relevante. Para os autores, a formalização do Binômio de Newton representa uma síntese entre os avanços da álgebra simbólica e os problemas probabilísticos que emergiram entre os séculos XVII e XVIII. Eles defendem que a abordagem dessa evolução histórica pode ser utilizada como estratégia de ensino para aproximar os discentes da construção conceitual da matemática, em oposição à simples memorização de fórmulas.

Islam *et al.* (2020, 2022) aprofundam o estudo sobre as propriedades do Triângulo de Pascal a partir de potências do número 11, apresentando uma leitura inovadora da expansão binomial e suas conexões com padrões numéricos. A proposta, intitulada como "trabalho inacabado de Newton", mostra que os números das linhas do triângulo até a quinta potência coincidem com os números gerados pelas potências de 11, o que pode ser explorado como atividade lúdica e investigativa no ensino médio. A abordagem é especialmente interessante para discentes em fase de transição entre a aritmética e a álgebra, pois permite conectar operações numéricas com representações simbólicas.

Keçeci (2025), por sua vez, propõe uma reinterpretação formal da expansão binomial por meio do que denomina “Quadrado Binomial de Keçeci”. Embora voltado a um público especializado, seu trabalho apresenta implicações didáticas ao sugerir que diferentes representações algébricas do binômio podem ser exploradas para desenvolver a flexibilidade cognitiva dos discentes no trato com expressões algébricas. A visualização do binômio como área, por exemplo, reforça a conexão com a geometria e pode ser adaptada para o ensino fundamental, como propõe Dante (2023) ao discutir o ensino exploratório de padrões.

Luca e Oliveira (2024) introduzem uma nova relação recursiva para obtenção dos elementos do Triângulo de Pascal, apontando que tal abordagem facilita a compreensão da construção do triângulo, especialmente quando inserida no contexto da resolução de produtos notáveis e de combinações simples. Essa nova relação, ao invés de apenas somar os dois elementos adjacentes da linha anterior, propõe operações alternativas que ampliam as possibilidades de exploração em sala de aula. Os autores sugerem que essa técnica pode ser útil para consolidar o conceito de recorrência e para fortalecer o raciocínio lógico-matemático dos discentes.

Noble (2022), em um estudo extenso, examina o desenvolvimento dos teoremas binomial e multinomial, destacando sua trajetória desde as análises combinatórias medievais até os sistemas formais modernos. Ele ressalta que o Binômio de Newton não surgiu isoladamente, mas está vinculado a um contexto epistemológico mais amplo que envolve a sistematização das técnicas algébricas. Para ele, a inserção desses conteúdos no Ensino Básico deve considerar sua profundidade teórica sem desconsiderar as possibilidades pedagógicas, evitando tanto a simplificação excessiva quanto o tecnicismo desvinculado do sentido.

Pinheiro e Sá (2023) voltam o olhar para a história da equação do primeiro grau, abordando aspectos similares aos da evolução do binômio e sugerindo que a exposição histórica pode favorecer a compreensão de estruturas algébricas. Eles apontam que o percurso da álgebra escolar precisa ser reconstruído de forma contextualizada para que o discente perceba a matemática como linguagem e como construção social e cultural, o que é igualmente válido para os temas centrais deste estudo.

Silva e Elian (2020) exploram atividades dinâmicas baseadas no Triângulo de Pascal, com foco na apropriação de propriedades por meio de jogos e tarefas investigativas. Os resultados obtidos indicam que o uso de práticas lúdicas e manipulativas potencializa a aprendizagem, especialmente entre discentes dos anos finais do ensino fundamental. Eles destacam a importância de trabalhar a simetria, as diagonais do triângulo, os somatórios e os padrões de crescimento de forma visual e interativa, o que facilita o reconhecimento de regularidades e o desenvolvimento da autonomia matemática.

Wang (2021), por fim, discute o papel da história da matemática nos livros didáticos estadunidenses entre os séculos XIX e XX, evidenciando que o ensino do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal passou por diferentes interpretações ao longo do tempo, ora como conteúdo puramente formal, ora como oportunidade para exploração de ideias. A obra contribui para reforçar a necessidade de revisar as abordagens pedagógicas atuais, garantindo que as potencialidades epistemológicas e didáticas desses conceitos sejam plenamente aproveitadas.

A análise conjunta dos estudos revisados evidencia um campo favorável de possibilidades didáticas e epistemológicas em torno do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal, com implicações significativas para a prática pedagógica no Ensino Básico. A primeira convergência observada refere-se ao reconhecimento do Triângulo de Pascal como instrumento heurístico e visual para a compreensão de padrões matemáticos, como indicam Aliu, Rexhepi e Iseni (2023), Silva e Elian (2020) e Luca e Oliveira (2024). Esses autores convergem ao afirmar que a manipulação do triângulo permite desenvolver habilidades cognitivas associadas à generalização, identificação de regularidades e compreensão da estrutura dos coeficientes binomiais. As atividades propostas por Silva e Elian (2020), mais voltadas ao lúdico e ao ensino fundamental, contrastam metodologicamente com a abordagem teórica de Luca e Oliveira (2024), que propõem uma nova forma recursiva de construir o triângulo, mas ambas se complementam ao indicar o valor didático da estrutura.

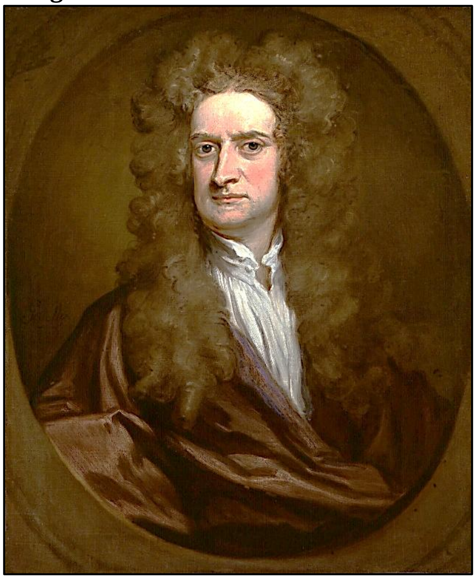
Por outro lado, Cameron e Nkwanta (2023) introduzem uma perspectiva mais formal e abstrata ao vincular o Triângulo de Pascal às matrizes de Riordan e à enumeração de caminhos em reticulados. Embora o público-alvo de seu estudo não seja diretamente o Ensino Básico, a ideia de trajetórias, recorrência e estruturas organizadas pode ser adaptada em propostas didáticas de exploração combinatória e visual, como sugerem Dante (2023) e Hopkins (2025). Essa possível transposição didática aponta para uma tendência que atravessa vários estudos: o potencial do triângulo como ponto de articulação entre a álgebra simbólica, a aritmética e a combinatória.

A complementaridade entre as abordagens também se observa na relação entre história e ensino. Chatterjee (2021), Cordeiro (2024) e Wang (2021) sustentam que a dimensão histórica dos conceitos matemáticos não deve ser relegada a segundo plano nos currículos escolares. Ao contrário, afirmam que o conhecimento sobre o percurso histórico do binômio e do triângulo pode ampliar a percepção crítica dos discentes e favorecer o trabalho do professor em sala de aula. Essa posição encontra eco em Pinheiro e Sá (2023), que defendem a abordagem histórica como estratégia para tornar o ensino da álgebra mais contextualizado e significativo. A convergência entre esses autores reforça a tese de que a história da matemática é uma ferramenta formativa e que sua incorporação pode humanizar os conteúdos, motivar os discentes e fortalecer a formação docente, especialmente no ensino de conceitos abstratos como os binomiais.

2.2 A Expansão Binomial Atribuída a Newton: Processo Histórico

A expansão binomial, hoje atribuída a Isaac Newton (Figura 1), tem raízes mais antigas e complexas. Registros históricos indicam que formas primitivas da expansão de potências de binômios já eram conhecidas por matemáticos árabes e chineses, embora com níveis distintos de generalidade e formalismo. Foi a partir do século XVII, com Newton, que a expansão adquiriu uma formulação sistemática capaz de abranger expoentes inteiros, fracionários e negativos, o que permitiu uma aplicação mais ampla nas diversas áreas da matemática (Noble, 2022).

Figura 1 - Retrato de Sir Isaac Newton.



Fonte: National Portrait Gallery, Londres.

Simultaneamente, a organização dos coeficientes binomiais em estruturas triangulares já era conhecida na China antiga, com destaque para o matemático Yang Hui (Figura 2). No entanto, o nome “Triângulo de Pascal” prevaleceu após a publicação da obra "Traité du triangle arithmétique", em 1654. A estrutura triangular passou a ser utilizada sistematicamente como instrumento visual de cálculo e análise algébrica, fornecendo uma ferramenta eficaz para a expansão binomial e para a resolução de problemas combinatórios (Cordeiro, 2024).

Figura 2 - Retrato de Yang Hui.

Fonte: MacTutor History of Mathematics Archive.

O vínculo entre o binômio e o triângulo se estabelece pela relação direta entre os coeficientes obtidos pela fórmula de Newton e os valores organizados no triângulo. Cada linha do triângulo corresponde aos coeficientes de uma potência binomial específica, o que permite sua aplicação não apenas na álgebra simbólica, mas também em áreas como probabilidade, estatística e teoria dos números (García-García *et al.*, 2022).

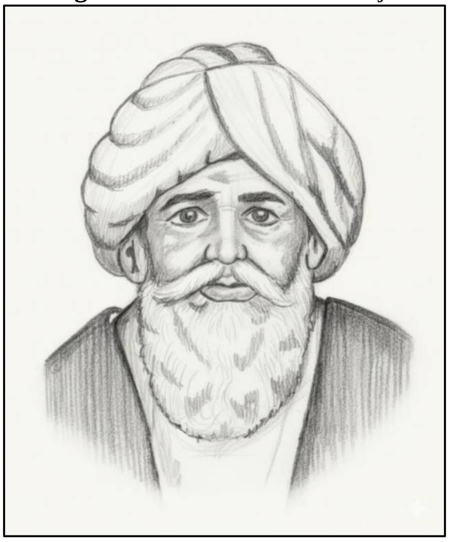
Essa evolução histórica não se deu de maneira isolada. O desenvolvimento do binômio e da estrutura triangular está inserido em um contexto mais amplo de formalização da matemática moderna, marcado pelo surgimento de novas notações, avanços no simbolismo algébrico e pela consolidação da linguagem matemática universal. O cruzamento entre tradição empírica e abstração conceitual foi determinante para a fixação dos modelos que conhecemos atualmente (Wang, 2021).

Assim, compreender a trajetória histórica desses dois elementos matemáticos permite não apenas valorizar sua importância teórica, mas também explorar suas potencialidades pedagógicas no ensino da matemática, aproximando os conteúdos escolares de sua origem epistemológica e fomentando um aprendizado mais significativo e contextualizado (Chatterjee, 2021).

2.3 Evolução Histórica Sobre o Binômio Newtoniano

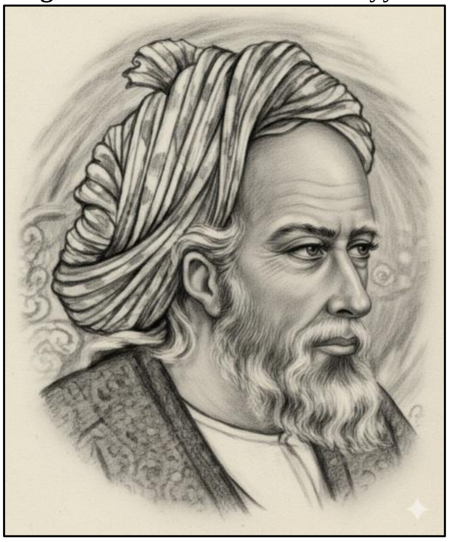
O conceito de binômio, definido como a soma de dois termos, remonta a tradições matemáticas da Antiguidade, quando operações com números e expressões ainda estavam fortemente ligadas à geometria e ao raciocínio prático. Inicialmente, as potências de binômios eram tratadas de forma empírica, por meio de multiplicações sucessivas, sem qualquer estrutura formalizada. As primeiras evidências de sistematização das potências de binômios aparecem em registros de matemáticos árabes e persas, como Al-Karaji (Figura 3) e Omar Khayyam (Figura 4), que utilizaram arranjos numéricos para expressar os coeficientes resultantes da expansão de binômios de ordens mais elevadas (Cordeiro, 2024).

Figura 3 – Retrato de Al-Karaji.



Fonte: MacTutor History of Mathematics Archive.

Figura 4 – Retrato de Omar Khayyam.



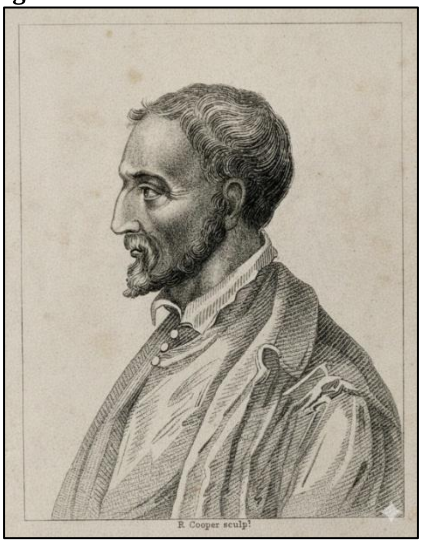
Fonte: MacTutor History of Mathematics Archive

Na matemática europeia, as primeiras referências mais estruturadas ao desenvolvimento do binômio surgem durante o Renascimento, com o ressurgimento do interesse pela álgebra simbólica. Luca Pacioli (Figura 5) e Girolamo Cardano (Figura 6) desenvolveram representações que se aproximam do que seria posteriormente formalizado por Newton, mas ainda sem uma generalização completa ou aplicação a expoentes não inteiros. Essas tentativas foram importantes para a compreensão da necessidade de um modelo mais abrangente, capaz de tratar binômios com expoentes variados (Chatterjee, 2021).

Figura 5 – Retrato de Luca Pacioli.

Fonte: Wikimedia Commons.

Figura 6 – Retrato de Girolamo Cardano.



Fonte: Wikipedia.

Isaac Newton, no século XVII, transformou de forma decisiva o tratamento da expansão binomial ao formular uma expressão geral para a expressão (1), em que “n” poderia ser qualquer número real, incluindo fracionários e negativos. Essa inovação consistiu em um salto qualitativo na matemática moderna, pois a expansão binomial deixou de ser limitada a casos específicos com expoentes naturais e passou a ser considerada sob uma perspectiva analítica e formal (Noble, 2022). A fórmula apresentada por Newton é expressa como:

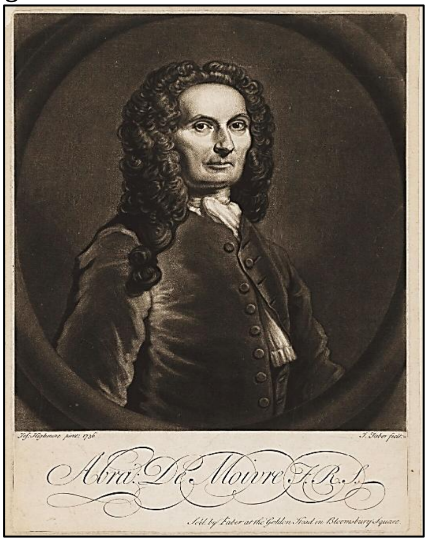
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{2}$$

Essa notação, que utiliza os coeficientes binomiais, expandiu consideravelmente a aplicação do binômio. Contudo, à época, Newton não demonstrou formalmente a validade da fórmula para todos os valores de *n*. Sua abordagem era baseada em argumentos heurísticos e em manipulações algébricas experimentais, o que gerou debates posteriores sobre o rigor matemático de sua demonstração. Somente com o avanço do cálculo e da teoria dos limites, no século XVIII, foi possível justificar formalmente o uso da série binomial generalizada (Wang, 2021).

A série binomial de Newton permitiu aplicações em diversas áreas do conhecimento, especialmente na física e na astronomia, onde o desenvolvimento de expressões algébricas era essencial para a modelagem de fenômenos naturais. Essa conexão entre álgebra e ciências aplicadas foi uma das razões para a ampla difusão do Binômio de Newton na matemática moderna. A expansão passou a ser utilizada também como ferramenta para a construção de aproximações numéricas e para o desenvolvimento da análise matemática (García-García *et al.*, 2022).

Outro ponto relevante no desenvolvimento histórico do binômio está na introdução e padronização da notação, adotada por matemáticos posteriores, como Abraham de Moivre (Figura 7) e Leonhard Euler (Figura 8). Essa notação facilitou a sistematização dos coeficientes e sua relação com a combinatória, aproximando a álgebra simbólica das técnicas de contagem e da teoria das probabilidades. De Moivre, em especial, associou os coeficientes binomiais à distribuição binomial, estabelecendo uma ligação entre o Binômio de Newton e modelos probabilísticos (Noble, 2022).

Figura 7 – Retrato de Abraham de Moivre.



Fonte: National Portrait Gallery, Londres.

Figura 8 – Retrato de Leonhard Euler.

Fonte: Wikimedia Commons.

O binômio também foi fundamental para a evolução da análise combinatória, pois os coeficientes expressam o número de maneiras distintas de escolher *k* elementos de um conjunto com *n* elementos. Essa relação entre álgebra e combinatória permitiu novas abordagens para resolver problemas de arranjos, permutações e combinações, com aplicações diretas na estatística e na matemática discreta (Aliu *et al.*, 2023).

Durante os séculos XIX e XX, os livros didáticos de matemática passaram a incorporar o Binômio de Newton como conteúdo essencial na formação básica dos discentes. Seu ensino se tornou referência nos currículos de álgebra, sendo utilizado para desenvolver habilidades de manipulação simbólica e raciocínio lógico. Em alguns sistemas educacionais, como o norte-americano e o francês, a expansão binomial foi relacionada a atividades práticas com tabelas, diagramas e triângulos numéricos, consolidando-se como um conteúdo pedagógico estratégico (Wang, 2021).

A história do binômio também se entrelaça com o desenvolvimento das chamadas matrizes de Riordan, estruturas algébricas capazes de representar transformações e relações geradoras de coeficientes binomiais. Essas matrizes, introduzidas no século XX, permitiram uma nova perspectiva sobre o binômio e sua representação algébrica, promovendo conexões entre álgebra linear, análise combinatória e teoria dos grafos (Cameron; Nkwanta, 2023).

No panorama contemporâneo, o Binômio de Newton permanece como objeto de estudo e de reinvenção. Pesquisas recentes têm explorado reinterpretações da expansão binomial com diferentes estruturas matemáticas, abordagens computacionais e aplicações em modelagens dinâmicas. Tais desenvolvimentos não apenas resgatam a importância histórica do binômio, mas também reafirmam sua relevância como fundamento conceitual e didático para o ensino da matemática em níveis diversos (García-García *et al.*, 2022).

Portanto, a trajetória histórica do Binômio de Newton não pode ser compreendida como um evento isolado, mas como parte de um processo contínuo de construção matemática, que envolve diferentes culturas, linguagens e métodos. Sua consolidação como conceito universal é resultado de séculos de aprimoramentos, reflexões e conexões interdisciplinares, que o transformaram em um dos pilares da álgebra moderna e do ensino da matemática (Chatterjee, 2021).

2.4 Desenvolvimento Histórico do Triângulo de Pascal

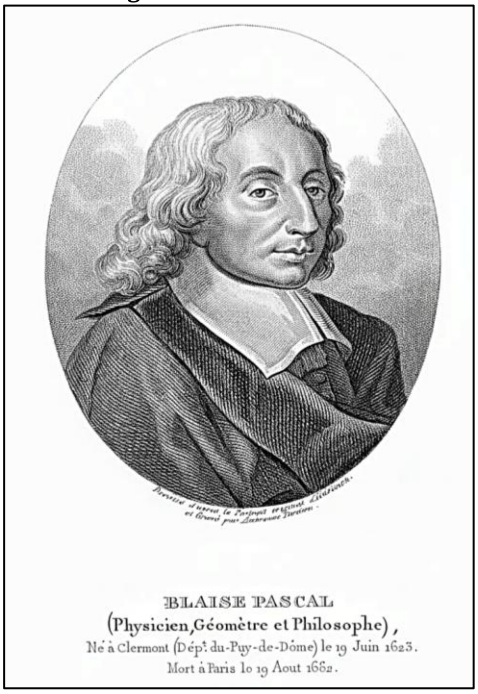
A estrutura triangular conhecida hoje como Triângulo de Pascal é uma das representações mais emblemáticas da matemática combinatória e algébrica. Sua origem remonta a culturas matemáticas diversas, evidenciando o caráter multicultural e transnacional da construção do conhecimento matemático. Embora o nome consagrado esteja associado ao matemático francês Blaise Pascal, o arranjo triangular dos coeficientes binomiais já era conhecido e aplicado muitos séculos antes em regiões como China, Índia e mundo islâmico.

Os registros mais antigos do que hoje se reconhece como o Triângulo de Pascal são atribuídos ao matemático chinês Jia Xian, por volta do século XI. Jia utilizava um arranjo triangular para calcular coeficientes binomiais com o objetivo de expandir potências de binômios de forma simplificada. Posteriormente, no século XIII, o matemático Yang Hui reproduziu e popularizou essa estrutura na China, razão pela qual em algumas tradições historiográficas o triângulo também é chamado de “Triângulo de Yang Hui” (Cordeiro, 2024). A função do triângulo era essencialmente prática: representar visualmente os coeficientes das potências do binômio e facilitar cálculos numéricos.

No mundo islâmico, o matemático persa Al-Karaji também utilizou formações triangulares para trabalhar com os coeficientes da expansão binomial. A obra de Al-Karaji apresenta métodos numéricos e argumentações algébricas que antecipam as propriedades formais do triângulo, como a simetria e a aditividade dos elementos (cada termo é a soma dos dois termos imediatamente acima). Essas observações influenciaram gerações de matemáticos islâmicos e contribuíram para a disseminação do conhecimento aritmético em tratados traduzidos para o latim a partir do século XII (Chatterjee, 2021).

Foi somente em 1654 que Blaise Pascal (Figura 9) publicou o *Traité du triangle arithmétique*, em que sistematizou o arranjo triangular sob uma perspectiva combinatória. Pascal não foi o descobridor do triângulo, mas teve um papel crucial ao propor uma linguagem e uma estrutura lógica para descrever suas propriedades. No tratado, Pascal analisa o triângulo como instrumento para resolver problemas de contagem, calcular probabilidades e desenvolver argumentações algébricas. Essa formalização consolidou o triângulo como ferramenta de ensino e pesquisa matemática no Ocidente, vinculando-o definitivamente ao nome de Pascal (Wang, 2021).

Figura 9 – Blaise Pascal.



Fonte: World History Encyclopedia.

Entre as propriedades descritas por Pascal destacam-se: a simetria bilateral da estrutura, a presença de números naturais em diagonais específicas (como os números triangulares e tetraédricos), a soma das linhas resultando em potências de dois, e a capacidade de gerar os coeficientes binomiais por meio da soma de pares adjacentes da linha anterior. Essas propriedades são atualmente fundamentais no ensino da combinatória e na construção de raciocínios algébricos a partir de padrões visuais (Aliu *et al.*, 2023).

Com o avanço da álgebra no século XVIII, o triângulo passou a ser interpretado de maneira formal como representação explícita dos coeficientes, utilizados na expansão binomial de Newton. Cada linha *n* do triângulo corresponde à lista de coeficientes da expansão da expressão (1), reforçando sua utilidade como ferramenta de apoio ao cálculo simbólico. Essa associação estreitou o vínculo entre o triângulo e o ensino da álgebra, especialmente na introdução de produtos notáveis e somatórios (García-García *et al.*, 2022).

O triângulo também se destacou como objeto de interesse filosófico e estético. Filósofos iluministas e racionalistas o viam como exemplo da ordem numérica presente na natureza, capaz de revelar verdades universais a partir de regularidades matemáticas. Essa concepção contribuiu para sua difusão nos tratados educacionais e em manuais de aritmética e álgebra durante os séculos XVIII e XIX. A clareza visual e a previsibilidade das relações numéricas despertaram interesse didático, promovendo sua presença em currículos escolares e acadêmicos (Wang, 2021).

Na matemática moderna, a análise estrutural do Triângulo de Pascal ganhou reforço com o surgimento das matrizes de Riordan. Essas matrizes permitem representar de forma algébrica as sequências associadas às colunas do triângulo, viabilizando cálculos automatizados e demonstrando propriedades avançadas de geração de coeficientes. A aplicação dessas estruturas permite representar trajetórias, caminhos em grafos e resolver problemas de enumeração com grande eficiência, ampliando o campo de aplicação do triângulo (Cameron; Nkwanta, 2023).

Outro avanço contemporâneo foi a associação entre o Triângulo de Pascal e padrões numéricos mais amplos, como os somatórios sucessivos e as relações com potências do número 11. Tais associações revelam a versatilidade da estrutura e sua aplicabilidade em atividades investigativas, promovendo o desenvolvimento de habilidades analíticas, de observação e de generalização por parte dos discentes. Esse caráter exploratório é especialmente relevante em contextos educacionais voltados ao ensino ativo da matemática (Aliu *et al.*, 2023).

O triângulo também é útil na representação de relações recursivas. Estudos recentes propõem fórmulas de recorrência alternativas para obtenção de seus elementos, o que reforça seu caráter investigativo e dinâmico. Esse tipo de abordagem amplia a compreensão do triângulo como estrutura aberta e em constante ressignificação, afastando-o da visão meramente mecânica e aproximando-o de práticas pedagógicas mais reflexivas e críticas (Noble, 2022).

O desenvolvimento histórico do Triângulo de Pascal evidencia não apenas uma trajetória de aperfeiçoamento técnico, mas também uma história de reinterpretações culturais, epistemológicas e pedagógicas. Desde os manuscritos chineses até as modelagens computacionais atuais, o triângulo se manteve relevante por sua simplicidade estrutural, pela multiplicidade de aplicações e por sua capacidade de conectar diferentes áreas da matemática. No contexto da formação de professores, compreender essa trajetória histórica contribui para a valorização da matemática como uma construção social e cultural, promovendo um ensino mais consciente e fundamentado (Cordeiro, 2024).

2.5 Matemáticos e Filósofos e suas contribuições para o Binômio de Newton

A consolidação do binômio como conceito central da álgebra moderna é fruto de uma longa trajetória intelectual, marcada por contribuições significativas de diversos pensadores, matemáticos e filósofos ao longo da história. A expansão do binômio, em especial, reflete um processo cumulativo de formulações que partem de observações empíricas até chegar à abstração algébrica formalizada. O estudo dos personagens históricos envolvidos nesse processo permite compreender como o conhecimento matemático evolui em diálogo com as concepções filosóficas e científicas de cada época.

Na tradição árabe-medieval, Al-Karaji (século X) foi um dos primeiros a apresentar métodos sistemáticos para trabalhar com potências de binômios. Sua obra introduziu uma abordagem baseada em argumentos puramente algébricos, dissociando-se da geometria euclidiana predominante até então. Al-Karaji também utilizou arranjos triangulares para representar coeficientes, antecipando ideias que mais tarde seriam sistematizadas por Pascal. A influência de sua obra estendeu-se por gerações e fundamentou a abordagem simbólica que seria resgatada por matemáticos europeus na Renascença (Cordeiro, 2024).

No século XI, o matemático persa Omar Khayyam deu continuidade à tradição algébrica iniciada por seus predecessores. Embora mais conhecido por seus estudos sobre equações cúbicas e geometria, Khayyam também realizou análises sobre coeficientes binomiais e relações combinatórias. Seus registros destacam o uso de proporções numéricas e de métodos indutivos para identificar padrões nos coeficientes das potências de binômios. Essas observações foram fundamentais para o avanço da aritmética algébrica no mundo islâmico (Chatterjee, 2021).

Durante o Renascimento europeu, nomes como Tartaglia e Cardano foram centrais na recuperação e ampliação do conhecimento matemático clássico. Girolamo Cardano (1501–1576), por exemplo, trabalhou intensamente com expressões algébricas e equações, tendo delineado representações parciais da expansão binomial em suas obras. Embora sem o aparato formal que Newton viria a utilizar, Cardano já sinalizava a existência de regularidades nos coeficientes das potências, o que revela a crescente sofisticação das práticas algébricas da época (Pinheiro; Sá, 2023).

O salto conceitual mais expressivo ocorreu com Isaac Newton (1642–1727), cuja obra transformou definitivamente o entendimento do binômio. Ao propor uma fórmula geral para a expansão da expressão (1), Newton estabeleceu a base para o uso de séries infinitas e avançou a noção de coeficientes binomiais além dos números inteiros positivos. Ainda que sua demonstração não tenha sido totalmente rigorosa à luz dos padrões atuais, seu raciocínio permitiu um tratamento analítico do binômio e contribuiu diretamente para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral (Noble, 2022).

Outro pensador decisivo foi Abraham de Moivre (1667–1754), que utilizou o binômio para desenvolver aplicações em estatística e probabilidade. De Moivre percebeu que os coeficientes binomiais tinham implicações além da álgebra pura e os empregou na construção da distribuição binomial, hoje amplamente utilizada em análises estatísticas. Sua contribuição evidencia o deslocamento do binômio para campos aplicados, estabelecendo pontes entre álgebra, combinatória e estatística (García-García *et al.*, 2022).

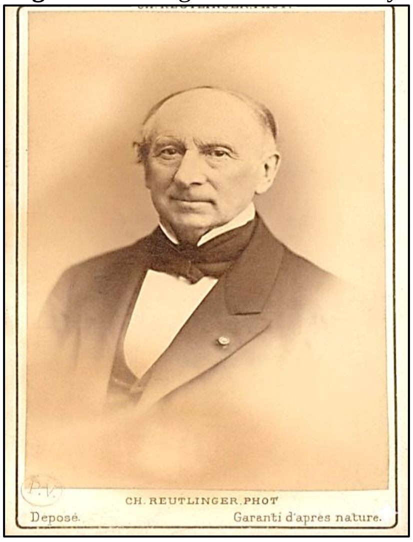
Leonhard Euler (1707–1783) aprofundou as ideias de Newton e De Moivre, introduzindo refinamentos na notação e ampliando o uso das séries binomiais. Euler também explorou casos em que os expoentes não eram inteiros e empregou o binômio em problemas envolvendo funções hipergeométricas. Sua habilidade em lidar com fórmulas gerais e sua ênfase na clareza da notação contribuíram para a consolidação da linguagem matemática moderna e para a difusão do binômio como ferramenta fundamental na matemática analítica (Noble, 2022).

Na transição para o século XIX, Carl Friedrich Gauss (Figura 10) e Augustin-Louis Cauchy (Figura 11), também deixaram sua marca sobre o tema. Gauss utilizou o binômio em suas investigações sobre teoria dos números, demonstrando propriedades específicas dos coeficientes binomiais em contextos modulares. Já Cauchy sistematizou aspectos analíticos da série binomial, oferecendo maior rigor à abordagem de Newton, principalmente com a introdução formal do conceito de convergência de séries. Esses avanços ajudaram a legitimar o uso do binômio em diversas aplicações da análise matemática (Wang, 2021).

Figura 10 – Carl Friedrich Gauss.

Fonte: Wikimedia Commons.

Figura 11 – Augustin-Louis Cauchy.



Fonte: Smithsonian Libraries.

A partir do século XX, as investigações em álgebra abstrata, combinatória e estruturas algébricas proporcionaram novos olhares sobre os coeficientes binomiais. As matrizes de Riordan, por exemplo, formuladas no século XX, são estruturas algébricas que sistematizam sequências geradoras de coeficientes e expandem a análise combinatória do binômio. Cameron e Nkwanta (2023) discutem como essas matrizes permitem descrever trajetórias em grafos e contagens de caminhos em estruturas discretas, evidenciando a versatilidade e a permanência do binômio no pensamento matemático contemporâneo.

Os estudos de Pascal, embora mais diretamente associados ao triângulo que leva seu nome, também foram fundamentais para a formalização dos coeficientes binomiais. Em sua obra *Traité du triangle arithmétique*, publicada em 1654, Pascal apresentou uma sistematização visual e lógica das relações entre os números do triângulo e os coeficientes binomiais. Sua contribuição dialoga com o pensamento filosófico do século XVII, marcado pela busca de uma ordem matemática subjacente ao mundo natural, o que se traduz em sua tentativa de integrar álgebra, geometria e lógica combinatória (Aliu *et al.*, 2023).

Ao longo da história, portanto, o avanço no estudo do binômio foi promovido por diferentes figuras que, a partir de contextos culturais e científicos diversos, contribuíram para sua formulação e aplicação. Esses pensadores não apenas sistematizaram técnicas, mas também imprimiram visões filosóficas sobre a matemática como linguagem universal, capaz de expressar regularidades, prever fenômenos e organizar o raciocínio abstrato. O binômio, em sua trajetória, reflete não apenas uma construção algébrica, mas um símbolo do desenvolvimento intelectual humano e da capacidade de formular padrões a partir da observação e da dedução (Chatterjee, 2021).

CAPÍTULO 3

CONTRIBUIÇÕES PARA A PRÁTICA E A FORMAÇÃO DOCENTE

A abordagem de produtos notáveis e desenvolvimentos algébricos no ensino exige, por parte do professor, não apenas o domínio técnico do conteúdo, mas também a sensibilidade didático-pedagógica para mediar processos de aprendizagem que envolvem abstração. Nesse sentido, a formação inicial e continuada dos docentes deve contemplar tanto os fundamentos conceituais da álgebra quanto metodologias que estimulem o raciocínio investigativo e a construção ativa do conhecimento. As práticas formativas que articulam teoria e prática, inseridas em contextos reais de ensino, são decisivas para o aprimoramento profissional (Gatti, 2020).

A prática reflexiva é fundamental na formação docente, como defendem Freitas *et al.* (2020), Gatti (2020) e Santos e Gouw (2021). Estratégias como a curricularização da extensão, a residência pedagógica e as práticas investigativas no estágio supervisionado aproximam a teoria matemática da realidade escolar. Essa abordagem é particularmente relevante no ensino de álgebra e combinatória, temas que muitas vezes parecem distantes da vivência dos alunos.

3.1 A Curricularização da Extensão

A curricularização da extensão contribui significativamente para a formação de professores ao inserir licenciandos em práticas educativas concretas. Ao participarem de projetos que envolvem o planejamento e a execução de atividades sobre produtos notáveis no Ensino Básico, os futuros docentes vivenciam os desafios da sala de aula e refletem criticamente sobre suas estratégias. Essa aproximação entre universidade e escola constrói saberes pedagógicos contextualizados (Santos e Gouw, 2021).

Programas como o PIBID e a residência pedagógica também têm impacto relevante. Segundo Galiza, Silva e Silva (2020), os professores supervisores se beneficiam da troca de experiências e da atualização metodológica. A residência pedagógica, em particular, oferece uma imersão mais prolongada no cotidiano escolar, permitindo uma compreensão profunda da dinâmica da sala de aula e favorecendo a elaboração de sequências didáticas contextualizadas (Freitas, Freitas e Almeida, 2020).

Além dos programas institucionais, a formação docente exige uma revisão crítica da concepção de matemática como um corpo de técnicas. É necessário promover uma abordagem mais problematizadora que valorize a compreensão conceitual e o pensamento generalizador.

Isso implica desenvolver nos futuros docentes a capacidade de analisar estratégias, explorar regularidades e justificar propriedades algébricas com base em argumentos lógicos e visuais (Moreira e Ferreira, 2021). A articulação entre teoria e prática se efetiva quando o professor é capaz de interpretar e adaptar os conteúdos de forma criativa (Gatti, 2020).

O planejamento colaborativo e o trabalho em equipe também são cruciais. A construção coletiva de atividades e o compartilhamento de experiências entre pares promovem o desenvolvimento profissional contínuo. Iniciativas como oficinas e grupos de estudo fortalecem a consolidação de abordagens didáticas inovadoras no ensino de álgebra (Santos e Gouw, 2021).

Em resumo, as contribuições para a prática e a formação docente no ensino de produtos notáveis envolvem a articulação entre teoria e prática, a vivência em contextos escolares, a problematização dos saberes matemáticos, o uso de estratégias diversificadas e o trabalho colaborativo. Quando esses elementos são integrados, o ensino da álgebra se torna uma experiência significativa para alunos e professores (Moreira e Ferreira, 2021).

3.2 A Importância do Conhecimento Histórico na Formação Inicial Docente

A formação inicial de professores de matemática exige a articulação entre o domínio formal dos conteúdos e a compreensão de sua historicidade. O conhecimento histórico desmistifica a ideia da matemática como um corpo de verdades absolutas, mostrando seu caráter construído, revisável e contextualizado. Essa abordagem forma professores mais conscientes de seu papel na mediação entre o saber científico e os saberes escolares (Sousa, 2023).

A história da matemática, ao ser incorporada à formação, atua como um elo entre o saber teórico e a prática pedagógica. Disputas conceituais e epistemológicas, embora pareçam tensões entre a matemática como ciência formal e a educação matemática como campo pedagógico, são, na verdade, complementares (Gomes e Paiva, 2024).

A prática como componente curricular (PCC), instituída pela Resolução CNE/CP 02/2015, reforça a importância de integrar o conhecimento histórico e formal às experiências pedagógicas. A vivência em situações reais de ensino permite aos licenciandos reconhecer a relevância do domínio conceitual, ao mesmo tempo que a história dos conceitos, como os produtos notáveis, enriquece essas experiências (Pereira *et al.*, 2021).

O conhecimento formal é central, mas se torna sem significado quando desarticulado de seu contexto histórico e de suas aplicações didáticas. A combinação entre rigor e contexto é indispensável. O aprofundamento conceitual, quando conectado com a prática, contribui para uma atuação docente mais autônoma e sensível às dificuldades dos alunos (Moraes e Martins, 2024).

A presença do conhecimento histórico também ajuda a valorizar o erro como parte do processo científico. Ao estudar as trajetórias de desenvolvimento de conceitos, os futuros professores veem a matemática como um campo de avanços progressivos, o que pode ser transposto para a sala de aula, criando uma abordagem pedagógica mais empática (Sousa, 2023). O ensino de produtos notáveis, por exemplo, pode ser enriquecido com o resgate das contribuições de al-Khwarizmi e o uso de formas geométricas (Pereira *et al.*, 2021).

Dessa forma, o conhecimento histórico e formal deve ser um eixo estruturante da formação, e não um conteúdo adicional. A integração entre a história da matemática, a epistemologia e o domínio técnico-operacional é o que permite ao professor ensinar com profundidade, flexibilidade e criatividade. Essa formação constrói identidades docentes mais críticas e comprometidas com a qualidade do ensino e a emancipação intelectual dos alunos (Gomes e Paiva, 2024).

Em síntese, o conhecimento histórico e formal desempenha um papel fundamental na formação inicial docente, permitindo uma compreensão mais ampla e sensível da matemática como ciência e prática pedagógica. A pesquisa de Gatti (2020) e Sousa (2023) reforça essa visão, destacando a necessidade de articular o domínio do conteúdo com a capacidade de transposição didática, transformando o saber matemático em saber ensinável.

3.3 Propostas de Atividades Exploratórias com Binômio e Triângulo de Pascal

O desenvolvimento de atividades exploratórias que envolvem o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal é uma estratégia eficaz para promover o pensamento matemático ativo e a compreensão conceitual. Tais propostas estimulam a curiosidade e a capacidade de relacionar padrões numéricos a estruturas algébricas, transformando tópicos tradicionalmente mecanizados em experiências de aprendizagem envolventes (Paz; Arakawa, 2025).

Uma forma acessível de explorar o Triângulo de Pascal é através de sua construção manual. Ao preencher as linhas do triângulo (onde cada número é a soma dos dois acima), os alunos identificam padrões e simetrias de forma intuitiva. Essa abordagem pode ser potencializada com o uso de cores para representar paridades ou múltiplos, incentivando a formulação de conjecturas (García-García *et al.*, 2022). Uma proposta lúdica é o uso de um jogo de dominó onde as peças representam a soma de números consecutivos no triângulo, estimulando o raciocínio lógico e a compreensão da estrutura recursiva (Paz; Arakawa, 2025).

As atividades também podem explorar fontes históricas e biografias de matemáticos. O uso de documentos originais ou a discussão sobre a contribuição de Blaise Pascal e Isaac

Newton humaniza a matemática e oferece uma compreensão cultural mais ampla dos conceitos (Massa-Esteve *et al.*, 2023).

O uso de tecnologia, como planilhas eletrônicas ou softwares de geometria dinâmica, também enriquece a exploração. Ferramentas digitais permitem que os alunos explorem a construção do triângulo interativamente, gerem as linhas automaticamente e visualizem os resultados. Isso favorece a autonomia e a investigação focada na generalização de padrões (Paz; Arakawa, 2025).

Outra proposta relevante é associar a expansão de binômios ao estudo de probabilidades, especialmente a distribuição binomial. Ao utilizar os coeficientes do Triângulo de Pascal para calcular probabilidades em experimentos com moedas ou dados, os alunos desenvolvem a compreensão da estatística e da análise combinatória em contextos reais (García-García *et al.*, 2022).

Para aprofundar a compreensão do Teorema do Binômio, uma atividade investigativa pode propor que os alunos construam as potências de $(a + b)^n$ para diferentes valores de n, identifiquem os coeficientes e os relacionem com o Triângulo de Pascal. Essa tarefa explora a simetria da expansão e a aplicação da fórmula combinatória. A conexão entre álgebra e geometria, ao representar $(a + b)^2$ como área e $(a + b)^3$ como volume, também favorece a compreensão da estrutura das expressões e amplia o repertório representacional dos alunos (Massa-Esteve *et al.*, 2023).

Deste modo, as atividades exploratórias devem privilegiar a descoberta, o raciocínio e a contextualização. O uso de jogos, história da matemática, recursos digitais e experimentos probabilísticos contribui para uma aprendizagem mais significativa, crítica e criativa. Ao integrar múltiplas estratégias, os professores estimulam a participação ativa dos alunos, promovem conexões entre diferentes áreas e fortalecem a formação matemática (García-García *et al.*, 2022). A pesquisa de Lima (2021) reforça essa visão, mostrando que o Triângulo de Pascal pode servir como uma ponte para o raciocínio combinatório e o desenvolvimento do pensamento lógico.

3.4 Reflexões Sobre o Ensino-Aprendizagem de Álgebra e Combinatória no Ensino Básico

O ensino de álgebra e combinatória é um desafio e uma oportunidade essencial no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Para superar a abordagem fragmentada e formalista, esses conteúdos precisam ser ressignificados como linguagens e ferramentas de modelagem (Costa; Huanca, 2024).

A álgebra, frequentemente vista como um conteúdo isolado e de difícil acesso, pode se tornar mais significativa através da resolução de problemas e do uso de tecnologias digitais. Essas práticas promovem o raciocínio algébrico em situações concretas, rompendo com a aplicação mecânica de regras operatórias (Costa; Huanca, 2024). Uma abordagem lógico-histórica, que recupera a origem dos conceitos, também ajuda os alunos a entender o significado da linguagem algébrica como uma construção cultural, tornando o tema mais acessível (Moraes, 2021).

A combinatória, por sua vez, muitas vezes é reduzida à aplicação de fórmulas sem a compreensão do raciocínio envolvido. O trabalho com problemas que envolvem princípios de contagem desenvolve habilidades de organização lógica e análise de possibilidades. A relação entre álgebra e combinatória se manifesta claramente no estudo do Triângulo de Pascal e no Teorema do Binômio, oferecendo uma excelente oportunidade para integrar os dois campos em atividades exploratórias (Correia; Santos, 2021).

Para que essas abordagens se concretizem, é essencial superar as lacunas na formação inicial de professores. Muitos cursos ainda priorizam o domínio técnico em detrimento da aplicação pedagógica (Silva e Moreira, 2021). É necessário que os currículos de formação promovam reflexões sobre os obstáculos didáticos da álgebra e incentivem práticas que valorizem a mediação ativa. Além disso, os livros didáticos precisam ir além dos problemas descontextualizados, articulando a álgebra a representações geométricas ou situações do cotidiano para uma aprendizagem mais significativa (Correia; Santos, 2021).

Deste modo, o ensino de álgebra e combinatória deve focar no protagonismo do aluno, em estratégias investigativas e na valorização do erro. Propor desafios abertos, explorar padrões e usar diferentes linguagens (simbólica, gráfica, verbal) são ações que fortalecem a compreensão conceitual e o pensamento matemático estruturado (Costa; Huanca, 2024).

Refletir sobre o ensino-aprendizagem desses conteúdos implica reconhecer sua importância para a formação matemática e para o exercício da cidadania. O papel do professor é mobilizar estratégias que valorizem o raciocínio e a criatividade, contribuindo para um ensino de matemática crítico e significativo (Moraes, 2021; Silva; Moreira, 2021; Correia; Santos, 2021; Costa; Huanca, 2024).

3.5 A Superação de Práticas Pedagógicas Tradicionais

A superação de práticas pedagógicas tradicionais, que se concentram na repetição mecânica de algoritmos, exige uma sólida base epistemológica e histórica por parte dos professores (Sousa, 2023; Gatti, 2020). Nesse contexto, a incorporação da história da matemática — como defendem Chatterjee (2021), Wang (2021) e Cordeiro (2024) — não deve ser vista como um complemento, mas como um elemento estruturante da prática docente. O conhecimento da trajetória conceitual de temas como o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal permite ao professor ressignificar conteúdos que, muitas vezes, são ensinados de forma descontextualizada.

Há um consenso crescente sobre a importância de práticas que priorizem a compreensão estrutural e visual dos conceitos matemáticos em detrimento da mera aplicação de algoritmos. A utilização do Triângulo de Pascal como objeto de ensino e ferramenta heurística é recorrente, pois ajuda a desenvolver competências como a resolução de problemas, a abstração e o pensamento generalizador. Essa perspectiva está alinhada com o que propõem Tillema e Burch (2022), Silva e Elian (2020), Dante (2023) e Valadão (2022), entre outros.

Uma das principais tensões discutidas na literatura é a entre o formalismo e a aplicabilidade didática. Abordagens mais formais, como as de Keçeci (2025) e Cameron e Nkwanta (2023), apesar de seu valor teórico, exigem uma mediação cuidadosa para serem aplicadas no Ensino Básico. Essa reflexão contínua é fundamental para a formação de professores.

Moraes e Martins (2024) reforçam essa ideia, defendendo o uso de narrativas autobiográficas para resgatar a centralidade do ensino com sentido. No contexto de programas como o PROFMAT, essas contribuições são relevantes, pois o objetivo é articular o aprofundamento teórico com a melhoria da prática docente. A compreensão do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal ganha força quando se reconhece que esses conteúdos, apesar de clássicos, podem ser mobilizados de maneira inovadora em sala de aula.

Autores como Santos e Luchetta (2024) e Moreira e Ferreira (2021) reiteram que a formação do professor deve ir além do domínio técnico, incluindo a habilidade de mobilizar conteúdos em diferentes contextos didáticos. A construção do pensamento algébrico, especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental, depende da superação de uma abordagem puramente procedimental (Kuhn e Lima, 2021; Scremin e Righi, 2020). Para isso, ferramentas como o Triângulo de Pascal, que articulam representação visual, lógica combinatória e formalismo algébrico, podem ser centrais na construção do pensamento generalizador.

3.6 Estratégia do Ensino

Existe um conjunto consistente de estratégias didáticas capazes de promover a aprendizagem significativa dos produtos notáveis, do Binômio de Newton e do Triângulo de

Pascal. Essas abordagens buscam superar a mera repetição de algoritmos, incentivando a compreensão conceitual e o raciocínio matemático. O Quadro 1 sintetiza algumas dessas estratégias, baseadas na revisão de literatura realizada.

Quadro 1 – Estratégias didáticas para promoção do aprendizado

ESTRATÉGIAS	DESCRIÇÃO METODOLÓGICA
Uso de representações visuais	A proposta de Keçeci (2025), ao tratar da expansão binomial por meio de quadrados numéricos, exemplifica como recursos gráficos podem facilitar a compreensão de conceitos abstratos. Essa abordagem se relaciona com as atividades lúdicas de Hopkins (2025) e com o uso de tabelas proposto por Dante (2023). Essas visualizações, ao transformar uma expressão algébrica em uma área ou um padrão, oferecem uma ponte cognitiva entre o abstrato e o concreto, tornando o conteúdo mais acessível e intuitivo.
Integração com resolução de problemas	O estudo de Santos *et al.* (2020) mostra que a aprendizagem dos produtos notáveis pode ser potencializada quando os discentes são desafiados a formular e testar hipóteses a partir de situações reais ou construídas. Essa metodologia, alinhada com as propostas de Sai (2022) sobre interdisciplinaridade, favorece o desenvolvimento da autonomia, da criatividade e do pensamento crítico, competências essenciais para a formação integral do discente.
Exploração de padrões e regularidades	Segundo Valadão (2022) e Linares *et al.* (2023), o Triângulo de Pascal permite investigar simetrias, paridade e recorrência. Essas explorações podem ser conectadas aos conteúdos de progressões, somatórios e identidades algébricas, estabelecendo uma rede de significados que fortalece o raciocínio matemático. Essa abordagem investigativa, que encoraja o discente a descobrir as relações por si mesmo, promove uma aprendizagem mais ativa e duradoura.

Fonte: elaborado pelo autor.

Outro aspecto recorrente nos estudos analisados é a importância de conectar a álgebra à combinatória, como demonstram os trabalhos de García-García *et al.* (2022), Islam *et al.* (2020, 2022) e Tillema e Burch (2022). Esses autores sustentam que o Binômio de Newton não deve ser ensinado como uma fórmula isolada, mas como parte de um sistema simbólico que articula diferentes áreas da matemática. A abordagem combinatória, ao fornecer sentido aos coeficientes binomiais, não apenas amplia o repertório dos discentes, mas também desenvolve sua capacidade de resolver problemas estruturados, indo além da simples aplicação de fórmulas.

Cabe destacar também as possibilidades de interdisciplinaridade trazidas por autores como Sai (2022), que propõe articulações entre álgebra e genética, e Paz e Arakawa (2025), que sugerem o uso de jogos e atividades lúdicas com o triângulo aritmético. Essas abordagens apontam para a ampliação do escopo do ensino do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal, permitindo conexões com outras áreas do conhecimento e com a experiência cotidiana dos discentes. Ao contextualizar a matemática em cenários reais, o ensino se torna mais relevante e motivador.

Assim sendo, a diversidade de abordagens encontradas nos estudos analisados reforça a necessidade de flexibilizar o ensino da matemática, valorizando tanto a precisão conceitual quanto a criatividade pedagógica. O Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal, por sua estrutura interna e riqueza de aplicações, constituem conteúdos ideais para desenvolver competências fundamentais no processo de ensino-aprendizagem da matemática escolar: generalização, abstração, visualização e argumentação.

A análise revelou a tensão entre as abordagens teóricas e aplicadas. Autores como Cameron e Nkwanta (2023) e Keçeci (2025) tendem a uma abordagem teórica e estrutural, com menor ênfase na aplicação direta ao Ensino Básico. Em contrapartida, os autores Silva e Elian (2020), Luca e Oliveira (2024) e Aliu, Rexhepi e Iseni (2023) optam por estratégias aplicadas à sala de aula, propondo atividades práticas e manipulações. Essa dicotomia exige do professor a capacidade de identificar quais elementos teóricos podem ser traduzidos em práticas didáticas e quais atividades podem ser fundamentadas em conteúdos matemáticos rigorosos, articulando o formalismo com a pedagogia.

CAPÍTULO 4

FORMALISMO ANALÍTICO MATEMÁTICO E PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO BINÔMIO DE NEWTON NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A Matemática, enquanto construção histórica e linguagem formal, organiza o pensamento por meio de estruturas lógicas, símbolos e regras precisas. Nesse contexto, o Binômio de Newton destaca-se no Ensino Básico por sua capacidade de articular a álgebra, a combinatória e a lógica matemática. Tradicionalmente associado à expansão de potências de binômios e ao uso do Triângulo de Pascal, este conteúdo contribui para a consolidação do raciocínio algébrico e para o desenvolvimento do pensamento generalizante.

O ensino da matemática, em seus diferentes níveis, enfrenta o desafio de equilibrar o rigor formal com a aplicabilidade prática. No que se refere ao estudo do Binômio de Newton, a tensão entre esses dois polos é particularmente evidente. O formalismo matemático, com suas notações e estruturas abstratas, é fundamental para a compreensão das leis que regem o teorema. Contudo, uma abordagem excessivamente formal pode tornar o conteúdo inacessível aos discentes. A transição da compreensão empírica para a formalização do conhecimento é um dos principais desafios pedagógicos, e a forma como o Binômio de Newton é apresentado pode ser um exemplo de sucesso ou de insucesso nesse processo.

A análise de diversas obras sugere que o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal, longe de serem conteúdos isolados, articulam-se em um eixo interdisciplinar que atravessa a álgebra, a aritmética, a combinatória e a geometria. A construção do conhecimento matemático por meio desses temas permite ao discente desenvolver habilidades de raciocínio lógico, identificação de padrões, generalização e argumentação. Ao mesmo tempo, esses temas oferecem ao professor a oportunidade de trabalhar conteúdos curriculares de maneira articulada e significativa.

4.1 A Fórmula Geral do Binômio de Newton

A fórmula geral do Binômio de Newton combina propriedades da álgebra e da análise combinatória. Os coeficientes binomiais, $\binom{n}{k}$, são visualizados no Triângulo de Pascal, o que permite a identificação de simetrias e padrões, reforçando a compreensão das propriedades dos números naturais. A expansão da expressão (2) nos leva à sua forma geral:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots . + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n, \quad (3)$$

Donde se deriva o termo geral do desenvolvimento:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k. \quad (4)$$

O termo geral é assim chamado por gerar todos os termos da expansão. Notamos que a soma dos expoentes de a e b é sempre n, e o expoente de a é igual à diferença entre os termos do coeficiente binomial. Essa análise vai além da manipulação algébrica, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio e da abstração (Tedesco, 2023).

No Ensino Básico, a prioridade deve ser a compreensão conceitual do binômio. O formalismo matemático não deve ser um obstáculo, mas sim uma linguagem que organiza e comunica ideias com precisão, exigindo que os educadores conectem o conteúdo a sua origem lógica, histórica e combinatória (Soares, 2023; Dias *et al.*, 2024). Essa abordagem permite explorar as propriedades da álgebra, como a distributividade e a simetria dos coeficientes, revelando princípios fundamentais do pensamento algébrico por meio de uma prática reflexiva sobre o significado das expressões (Tedesco, 2023).

A construção histórica do binômio, que remonta a tradições persas e chinesas, e sua formalização moderna por Newton, oferece uma perspectiva valiosa para que os discentes compreendam a matemática como um saber em constante evolução (García-García *et al.*, 2022).

A relação do binômio com a análise combinatória é outro ponto central. Vários estudos, como os de García-García *et al.* (2022), Islam *et al.* (2020, 2022) e Keçeci (2025), demonstram que o Binômio de Newton tem múltiplas aplicações didáticas, servindo como introdução à combinatória, ferramenta para a álgebra ou objeto de exploração numérica.

O Triângulo de Pascal, por sua vez, atua como uma ferramenta visual e analítica que facilita a compreensão e o reconhecimento de padrões em produtos notáveis (Aliu, Rexhepi e Iseni, 2023; Islam *et al.*, 2020, 2022; Luca e Oliveira, 2024). Sua estrutura recursiva e simétrica desenvolve a intuição dos alunos sobre combinações e progressões, servindo de base para o pensamento algorítmico e a generalização (Valadão, 2022; Dante, 2023). A sua riqueza matemática vai além dos binômios, sendo aplicável a outras áreas, como probabilidade e sequências numéricas (Dattoli, 2023).

Nesse sentido, a abordagem do Binômio de Newton no ensino deve ir além dos procedimentos, focando no entendimento das operações algébricas como estruturas lógicas. O formalismo, quando trabalhado a partir de problemas contextualizados, enriquece o aprendizado sem sacrificar o rigor (Dias *et al.*, 2024). Isso permite que o discente adquira instrumentos para justificar suas respostas e formular generalizações (Soares, 2023). Ao final, o domínio dessas propriedades contribui para a formação integral do estudante, articulando saberes matemáticos à lógica, à linguagem simbólica e à história do conhecimento.

4.2 Estrutura Formal do Binômio de Newton: Definição, Fórmula Geral e Coeficientes Binomiais

O Binômio de Newton é uma das construções formais mais expressivas da álgebra, cuja estrutura permite a generalização da potenciação de binômios. Sua formulação sistemática estabelece relações entre combinatória, aritmética e álgebra, exigindo a compreensão de sua estrutura formal: definição, representação e interpretação de coeficientes (Bustamante, 2020). Formalmente, o binômio é definido como a expansão de $(a+b)^n$, onde n é um número natural, resultando em um polinômio com $n+1$ termos. A regularidade dessa expansão justifica o uso do formalismo matemático para descrever o comportamento do polinômio (Santos; Luchetta, 2024).

A fórmula geral do Binômio de Newton é a expressão (2), onde $\binom{n}{k}$ representa o número de combinações de n elementos tomados k a k. Essa notação é central, pois quantifica as formas de selecionar subconjuntos. A interpretação combinatória confere à fórmula um duplo significado: ela não apenas define a expansão, mas também expressa uma contagem (Lima, 2021). O coeficiente binomial pode ser calculado pela fórmula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \tag{5}$$

em que $n!$ é o fatorial de n (Lima, 2021).

A simetria dos coeficientes é um aspecto relevante da estrutura formal do Binômio de Newton, observada em:

$$\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-\mathrm{k}}, \tag{6}$$

Isso implica que os coeficientes da expansão são simétricos em relação ao termo central ou aos termos centrais. Essa simetria é visível no Triângulo de Pascal e reforça o entendimento do binômio como uma expressão ordenada (Valadão, 2022). Além da simetria, os coeficientes têm outras propriedades, como o fato de que a soma dos coeficientes de uma linha do Triângulo de Pascal é sempre 2^n, o que demonstra a conexão do binômio com o crescimento exponencial e a contagem de subconjuntos (Valadão, 2022).

A natureza recursiva dos coeficientes binomiais também é um componente fundamental, onde cada número do Triângulo de Pascal é a soma dos dois termos imediatamente acima, conforme a relação:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \tag{7}$$

Essa lógica aditiva favorece abordagens didáticas baseadas em padrões e indução, sendo crucial para introduzir conceitos de construção algorítmica e indução matemática (Lima, 2021).

O entendimento das condições de validade é igualmente importante. Embora a fórmula possa ser generalizada para expoentes não inteiros usando séries infinitas, no Ensino Básico, sua aplicação se restringe a expoentes naturais, o que garante a finitude e exequibilidade dos cálculos sem comprometer a potência conceitual do tema (Bustamante, 2020).

Adicionalmente, os coeficientes binomiais aparecem em contextos como o de congruências, conforme demonstrado por Linares *et al.* (2023), o que ressalta seu valor em diferentes áreas da Matemática. Esse estudo das propriedades de divisibilidade dos coeficientes pode expandir o escopo do ensino para além da álgebra elementar, atraindo alunos para olimpíadas de matemática e projetos de aprofundamento.

Nesse aspecto, a estrutura formal do Binômio de Newton serve como uma ponte entre conceitos operatórios e princípios teóricos. A clareza de sua definição, a fórmula bem estabelecida e os coeficientes com múltiplas interpretações tornam o conteúdo acessível. A introdução progressiva dos elementos formais, combinada com representações gráficas e problemas contextualizados, transforma o estudo do Binômio de Newton em uma experiência de reflexão e descoberta (Santos; Luchetta, 2024).

Nas aplicações a seguir, mostra-se a aplicabilidade do binômio de Newton para melhor aprofundar e compreender as formulações matemáticas do ponto de vista teórico e contextualizado.

4.2.1 Aplicações do Binômio de Newton

Aplicação 1: Desenvolva a expressão $(3x^2 + a)^4$.

Solução:

Fazendo a expansão do binômio, obtém-se que,

$$(3x^2 + a)^4 = \binom{4}{0}(3x^2)^4 + \binom{4}{1}(3x^2)^3a^1 + \binom{4}{2}(3x^2)^2a^2 + \binom{4}{3}(3x^2)a^3 + \binom{4}{4}a^4.$$

Obtendo os valores dos coeficientes, pela expressão (5), tem-se:

$$(3x^2 + a)^4 = 81x^8 + 108x^6a + 54x^4a^2 + 12x^2a^3 + a^4.$$

Que representa o desenvolvimento de $(3x^2 + a)^4$.

Aplicação 2: No desenvolvimento de $(x^2 + 1)^6$, qual o coeficiente de x^8?

Solução:

Pela expressão (3), o termo geral do desenvolvimento de $(x^2 + 1)^6$ é:

$$\binom{6}{k}(x^2)^{6-k} \cdot 1^k = \binom{6}{k}x^{12-2k}$$

Para obter-se o termo que possua x^8, deve-se impor que $12 - 2k = 8$, isto é, $k = 2$.

Logo, o termo que possui x^8 é:

$$\binom{6}{2} \cdot (x^2)^4 = \binom{6}{2} \cdot x^8$$

$$\binom{6}{2} = 15.$$

Portanto, o coeficiente de x^8 é 15.

Aplicação 3: Qual é o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$?

Solução:

Aplicando o termo geral, expressão (3), para o binômio $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$, tem-se que:

$$\binom{8}{k}x^{8-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k = \binom{8}{k}x^{8-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{-k} = \binom{8}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^{8-2k}$$

Para que o termo seja independente de x, deve-se impor que $8 - 2k = 0$, isto é, $k = 4$.

Logo, o termo procurado é:

$$\binom{8}{4}(-1)^4 \cdot x^{8-2\cdot 4} = \binom{8}{4} = 70$$

Portanto, o termo independente de x procurado é 70.

Aplicação 4: Desenvolvendo $(x+y)^{10}$ em potências de expoentes decrescentes de x, qual é o 6º termo?

Solução:

Pelo desenvolvimento binomial, tem-se que:

o 1º termo conterá x^{10}

o 2º termo conterá x^9

$\vdots \qquad \vdots$

o 6º termo conterá x^5

Logo, para $k=5$, o termo procurado é dado por:

$$\binom{10}{5}x^5\cdot y^5=252x^5y^5.$$

Portanto o 6º termo é $252x^5y^5$.

Solução Alternativa:

Um outro modo de encontrar o termo desejado seria observar o desenvolvendo do binômio em potências de expoentes decrescentes de x, que pode ser representado por:

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{1^\circ\, termo} \quad \underbrace{\binom{n}{1}}_{2^\circ\, termo} \quad \underbrace{\binom{n}{2}}_{3^\circ\, termo} \quad \cdots \quad \underbrace{\binom{n}{p}}_{(p+1)termo}.$$

Como o 6º termo, deve conter o coeficiente binomial $\binom{n}{5}$, que no presente exemplo é $\binom{10}{5}$.

O termo desejado é:

$$\binom{10}{5}x^5\cdot y^5=252x^5y^5.$$

Portanto, segue que o 6º termo é $252x^5y^5$.

Aplicação 5: Encontre o coeficiente de x^9 na expansão de

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{100}).$$

Solução:

Para encontrar o coeficiente de x^9 na expansão de

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{100}),$$

precisa-se considerar todas as combinações de termos dos fatores $(1+x^k)$ que resultam em x^9 quando multiplicados.

Isso corresponde a encontrar todas as partições distintas de 9 em somas de inteiros positivos distintos (pois cada fator contribui com 1 ou x^k, e cada x^k é usado no máximo uma vez devido à forma do produto).

As partições de 9 em inteiros distintos são:

- 9
- 8 + 1
- 7 + 2
- 6 + 3
- 6 + 2 + 1
- 5 + 4
- 5 + 3 + 1
- 4 + 3 + 2

O coeficiente de x^9 é:

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{8\,vezes} = 8.$$

Portanto, temos um total de 8 partições, ou seja, o coeficiente de x^9 é 8.

Aplicação 6: Qual o coeficiente de x^7 na expansão de $(2 + 3x + x^2)^4$?

Solução:

A expressão $(2 + 3x + x^2)^4$ pode ser reescrita como:

$$(x + 1)^4 \cdot (x + 2)^4.$$

Devido a forma do produto, tem-se que x^7 pode ser obtido pelos produtos:

$$x^3 \cdot x^4 \;\; e \;\; x^4 \cdot x^3.$$

Logo, tem-se:

$$\text{I)} \begin{cases} (x+1)^4 \Rightarrow \binom{4}{1} x^{4-1} \cdot 1^1 = 4x^3 \\ (x+2)^4 \Rightarrow \binom{4}{0} x^{4-0} \cdot 2^0 = x^4 \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} (x+1)^4 \Rightarrow \binom{4}{0} x^{4-0} \cdot 1^0 = x^4 \\ (x+2)^4 \Rightarrow \binom{4}{1} x^{4-1} \cdot 2^1 = 8x^3 \end{cases}$$

O coeficiente de x^7é dado por:

$$C = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 8$$

$$C = 12.$$

Portanto, o coeficiente de x^7 é igual a 12.

Aplicação 7: Na análise de sinais, a transformação de Fourier utiliza funções exponenciais complexas da forma $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$. Considere um sinal que é modelado pela expressão $(1 + i)^4$. Faça a expansão binomial para encontrar o resultado e identifique a parte real e a parte imaginária do resultado.

Solução:

Expandindo $(1 + i)^4$, usando o Binômio de Newton com $n = 4$, tem-se:

$$(1+i)^4 = \binom{4}{0} 1^4(i)^0 + \binom{4}{1} 1^3(i)^1 + \binom{4}{2} 1^2(i)^2 + \binom{4}{3} 1^1(i)^3 + \binom{4}{4} 1^0(i)^4$$

Ao calcular cada termo e soma-los, tem-se que:

$$(1+i)^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1$$

$$(1+i)^4 = (1-6+1) + (4i-4i) = -4 + 0i = -4.$$

Portanto, a parte real do resultado é -4, e a parte imaginária é 0. Isso mostra que, apesar de a expressão original ser complexa, o resultado final é um número puramente real, o que pode indicar que o sinal tem uma fase específica ou que, após a operação, ele se alinha perfeitamente com o eixo real no plano complexo.

Aplicação 8: Em circuitos de corrente alternada (AC), as impedâncias são representadas por números complexos, onde a parte real é a resistência e a parte imaginária é a reatância. Um engenheiro está analisando um circuito com uma impedância complexa elevada ao quadrado, $(R+iX)^2$. Encontre a expansão desse termo e determine qual componente física do circuito o termo com i^2 representa.

Solução:

A expansão de $(R+iX)^2$ é:

$$(R+iX)^2 = R^2 + 2(R)(iX) + (iX)^2 = R^2 + 2iRX + i^2X^2.$$

Como $i^2 = -1$, a expressão se torna:

$$(R+iX)^2 = R^2 + 2iRX - X^2.$$

O termo com i^2 é $-X^2$. Na física e na engenharia elétrica, R é a resistência (um valor real) e X é a reatância (também um valor real). O termo $-X^2$ é um valor real que contribui para a parte real da impedância final. Em um circuito elétrico, isso significa que a reatância, mesmo sendo um valor imaginário na representação original, tem um efeito real e mensurável na impedância total quando a potência (que é proporcional ao quadrado da impedância) é considerada.

Aplicação 9 (Velocidade de um drone em decolagem): Durante um teste de desempenho, um drone de pequeno porte é programado para acelerar suavemente após a decolagem. Os engenheiros determinaram que sua velocidade horizontal pode ser descrita, em função do tempo, pela seguinte equação: $v(t) = (2+0{,}1t)^3\ m/s$. Qual a velocidade no instante $t = 3s$ usando o binômio de Newton para o cálculo da função?

Solução:

A função que descreve a velocidade do drone é $v(t) = (2 + 0{,}1t)^3$. Deve-se encontrar a velocidade no instante $t = 3s$. Embora a forma mais simples seja substituir t diretamente na expressão, o pedido é para usar a expansão binomial, o que pode ajudar a entender a contribuição de cada termo para o resultado final.

Expandindo a expressão termo por termo, tem-se:

$$(2 + 0{,}1t)^3 = \binom{3}{0}(2)^3 t^0 + \binom{3}{1}(2)^2 0{,}1t^1 + \binom{3}{2}(2)^1(0{,}1t)^2 + \binom{3}{3}(2)^0(0{,}1t)^3.$$

Calculando cada coeficiente binomial e simplificando a expressão expandida, tem-se que:

$$v(t) = 8 + 1{,}2t + 0{,}06t^2 + 0{,}001t^3$$

De posse da função velocidade expandida, substitui-se $t = 3s$ em cada termo. Logo, tem-se:

$$v(3) = 8 + 1{,}2.3 + 0{,}06(3)^2 + 0{,}001(3)^3$$

Calculando:

$$v(3) = 8 + 3{,}6 + 0{,}54 + 0{,}027 = 12{,}17$$

Portanto, a velocidade do drone no instante $t = 3s$ é de $12{,}17m/s$. valor que está coerente com o desempenho de drones de médio porte utilizados em monitoramento e entregas leves.

4.3 Demonstrações, Abordagem Algébrica e Combinatória

A compreensão das demonstrações matemáticas é fundamental no Ensino Básico, e no caso do Binômio de Newton, isso pode ser alcançado por duas perspectivas: algébrica e combinatória. Ambas contribuem para que o discente compreenda não apenas o resultado, mas também sua validade e a lógica interna que o sustenta. A demonstração, portanto, assume um papel formativo, desenvolvendo o raciocínio dedutivo e a construção de argumentos sólidos (Santos; Luchetta, 2024).

A abordagem algébrica da demonstração se baseia na manipulação simbólica e na indução matemática. Para provar a validade da fórmula (expressão 2) para todo $n \in N$, inicia-se com o caso base $n = 1$ e, em seguida, assume-se a validade para um valor k, demonstrando que também é válida para $k + 1$. Esse procedimento desenvolve a noção de generalização estruturada, mas exige familiaridade com a linguagem e notação de somatórios, o que demanda um trabalho didático cuidadoso (Galvão; Chagas, 2022). A notação de somatório, embora subutilizada, tem grande potencial para a formalização, introduzindo o aluno à linguagem matemática moderna e à autonomia na leitura de argumentos (Galvão; Chagas, 2022).

Para muitos estudantes, a abordagem algébrica pode ser abstrata. Nesse ponto, a abordagem combinatória surge como uma alternativa complementar. Ela oferece uma justificativa que parte de contextos de contagem e seleção. Cada termo da expansão binomial pode ser interpretado como o número de formas de escolher k elementos entre n, com as potências representando as combinações das variáveis a e b. Assim, a fórmula expressa não apenas uma regularidade algébrica, mas um modelo para problemas de natureza combinatória (Tillema; Burch, 2022). Essa abordagem é pedagogicamente vantajosa por estar ancorada em situações concretas, tornando-se mais acessível e permitindo a exploração do significado real dos coeficientes binomiais, o que favorece a aprendizagem significativa (Tillema; Burch, 2022).

As justificativas combinatórias também fortalecem a percepção estrutural da Matemática. Entender que $\binom{n}{k}$ representa a quantidade de subconjuntos de k elementos em um conjunto de n faz com que o discente associe a expansão a uma lógica de organização de possibilidades. Essa conexão promove a interdisciplinaridade entre áreas frequentemente tratadas de forma isolada (Leal; Fonseca, 2024). Historicamente, a justificação combinatória antecede a formulação algébrica, evidenciando a centralidade da contagem como fundamento lógico para a álgebra. Compreender essa trajetória histórica enriquece o ensino e ajuda o discente a perceber a matemática como uma construção coletiva (Noble, 2022).

A prática pedagógica que combina demonstrações algébricas e justificativas combinatórias amplia o repertório didático. Essa integração de abordagens é essencial para consolidar a concepção de prova matemática como um processo argumentativo. A introdução da ideia de demonstração no Ensino Básico deve priorizar a exploração, formulação e teste de conjecturas (Santos; Luchetta, 2024).

A existência de múltiplas justificativas para um mesmo resultado, como no caso do Binômio de Newton, é uma oportunidade para desenvolver o pensamento crítico. Ao comparar as abordagens, os estudantes aprendem que a validade de um resultado pode ser sustentada por diferentes percursos argumentativos, cada um com seu grau de formalismo e clareza. Essa experiência contribui para a formação de sujeitos capazes de questionar procedimentos e compreender os fundamentos do conhecimento matemático (Noble, 2022).

4.4 Aplicações do binômio de Newton em Contextos Escolares: Estratégias Didáticas

A introdução do Binômio de Newton no Ensino Básico deve ir além da simples memorização, explorando sua capacidade de desenvolver o raciocínio lógico, a análise de padrões e a modelagem. Estratégias didáticas eficazes se concentram na aplicabilidade do binômio em problemas contextualizados e na articulação de seus aspectos conceituais e operatórios (Cardoso, 2024).

Uma das abordagens mais eficientes é a resolução de problemas que envolvem contagem e probabilidade. Ao trabalhar com situações como jogos de cartas ou a distribuição de objetos, o professor pode demonstrar como os coeficientes binomiais organizam a quantidade de combinações possíveis. Essa aplicação direta contribui para a construção de um conhecimento mais significativo (Álvarez *et al.*, 2020).

Outra estratégia didática importante é o uso de representações visuais e tabelas, como o Triângulo de Pascal. Sua construção manual e o uso em expansões promovem a compreensão da regularidade e simetria das expressões. Além disso, recursos digitais podem tornar a exploração mais dinâmica, promovendo o engajamento e a aprendizagem ativa (Wu, 2020).

A interdisciplinaridade também pode potencializar o ensino. Problemas que envolvem crescimento populacional ou juros compostos podem ser interpretados pela expansão binomial. Essa abordagem mostra a funcionalidade da matemática, permitindo que o aluno identifique a utilidade do formalismo algébrico em situações concretas (Li *et al.*, 2021). Os livros didáticos, nesse sentido, devem propor tarefas investigativas e situações-problema que favoreçam a autonomia do discente e a compreensão conceitual (Li *et al.*, 2021).

Explorar a paridade dos coeficientes binomiais é outra estratégia valiosa, embora incomum. A análise de padrões e a soma de coeficientes exercitam o raciocínio dedutivo, proporcionando uma abordagem mais sofisticada do conteúdo e um ambiente de investigação (Cardoso, 2024; Valadão, 2022). Essa abordagem pode servir como porta de entrada para temas como congruências e divisibilidade (Linares, Bruno-Alfonso & Barbosa, 2023).

A elaboração de tarefas abertas também é um recurso importante para o ensino. Ao propor questões que exigem que o aluno construa suas próprias estratégias, o professor incentiva a autonomia e a criatividade, reforçando a matemática como uma prática argumentativa (Álvarez *et al.*, 2020). Além disso, a criação de sequências didáticas graduais, que começam com padrões numéricos e avançam até a fórmula geral, respeita o tempo de aprendizagem do aluno e permite a internalização progressiva dos conceitos (Wu, 2020).

As estratégias didáticas para o Binômio de Newton devem ir além da técnica, explorando seu potencial como ferramenta de pensamento. Ao articular diferentes representações e favorecer o raciocínio combinatório, o professor contribui para uma compreensão mais completa do conteúdo (Álvarez *et al.*, 2020). Pesquisas como as de Tillema e Burch (2022) confirmam que a manipulação de situações combinatórias melhora a capacidade de abstração algébrica, o que ressoa com os achados de García-García *et al.* (2022) e Islam *et al.* (2022).

Outros estudos, como o de Keçeci (2025), mostram como interpretações formais podem se traduzir em aplicações didáticas, como a visualização da expansão binomial como um quadrado numérico. Essa diversidade de abordagens demonstra que não existe um único caminho para o ensino eficaz do binômio e do Triângulo de Pascal, mas sim múltiplas possibilidades a serem escolhidas de acordo com os objetivos e perfis dos alunos.

Em síntese, o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal oferecem profundidade teórica e potencial pedagógico. A sua integração contextualizada ao currículo do Ensino Básico, como defendido por Islam *et al.* (2022), Luca e Oliveira (2024) e Hopkins (2025), é altamente produtiva para o desenvolvimento do raciocínio algébrico e para o ensino de técnicas como produtos notáveis e somatórios.

4.5 Teorema Binomial no Ensino de Probabilidade

A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em uma sequência de n ensaios independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada ensaio é p, é

$$P = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{8}$$

A justificativa quanto a aplicabilidade de probabilidade com a utilização do binômio newtoniano, pode-se ser verificado em livro presente na literatura (Morgado et al, 1991).

Seja o exemplo a seguir. Qual é a probabilidade de obter k sucessos nessas n provas (ensaios)?

Considera-se que a probabilidade de nessas n provas obter-se k sucessos (S) e, consequentemente, $n-k$ fracassos (F) em uma ordem predeterminada, por exemplo, os sucessos nas k primeiras provas e os fracassos nas demais $\underbrace{SSS\cdots S}_{k\ vezes}\underbrace{FFF\cdots F}_{n-k\ vezes}$, é:

$$\underbrace{ppp\cdots p}_{k\ vezes}\underbrace{(1-p)(1-p)(1-p)\cdots(1-p)}_{n-k\ vezes} = p^k(1-p)^{n-k} \tag{9}$$

pois as provas (ensaios) são independentes.

A probabilidade de obter-se k sucessos e $n-k$ fracassos em qualquer ordem é $p^k(1-p)^{n-k}$ multiplicado pelo número de ordens possíveis que é dado pela combinação de n resultados com k resultados de sucesso e, consequentemente, $n-k$ resultados de fracasso:

$$C_{n,k} = C_{n,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{10}$$

Desse modo está provado o Teorema Binomial das Probabilidades.

Nas aplicações a seguir, mostra-se a aplicabilidade do Teorema Binomial das Probabilidades para melhor aprofundar e compreender as formulações matemáticas do ponto de vista teórico e contextualizado.

4.5.1 Aplicações do Teorema Binomial das Probabilidades

Aplicação 1: Considere que a chance de um atirador acertar o alvo quando o mesmo efetua um disparo é de 60%. Se este atirador efetuar 7 disparos, qual a probabilidade de ele acertar o alvo 3 vezes?

Solução:

Considerando $sucesso = acertar$, tem-se:

$$P = 60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

em cada ensaio (disparo) e os ensaios são independentes.

Determinando a probabilidade de $k = 3$ sucessos em $n = 7$ ensaios, pelo Teorema Binomial, tem-se:

$$P = \binom{7}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right)^4$$

$$P = \frac{15120}{78125} \approx 0{,}1935 \approx 19{,}35\%.$$

Portanto, a probabilidade de acertar o alvo corresponde aproximadamente a $19{,}35\%$.

Aplicação 2: Em genética, a frequência de alelos em uma população pode ser modelada usando a expansão binomial. Considere um gene com dois alelos, A e a, com frequências p e q, respectivamente, onde $p + q = 1$. O genótipo da próxima geração é descrito pela expansão de $(p+q)^2$. Considere um cenário onde um gene que controla a cor das flores (alelos $A = amarelo$ e $a = branco$) e outro gene que controla a altura da planta (alelos $B = alta$ e $b = baixa$) se combinam em uma população. O genótipo de um indivíduo da próxima geração pode ser modelado pela expansão de $(pA + qa)^2 \times (pB + qb)^2$. Suponha que $p = 0{,}5$

e $q = 0{,}5$ para ambos os genes. Expanda a expressão e interprete o termo que representa a probabilidade de um indivíduo ter o genótipo duplo heterozigoto ($AaBb$).

Solução:

Primeiro, expande-se cada parte separadamente:

- Expansão para o gene da cor: $(pA + qa)^2 = (0{,}5A + 0{,}5a)^2$
  - $(0{,}5)^2A^2 + 2(0{,}5A)(0{,}5a) + (0{,}5)^2a^2$
  - $0{,}25AA + 0{,}50Aa + 0{,}25aa$
  - As frequências genotípicas são $0{,}25$ para AA, $0{,}50$ para Aa e $0{,}25$ para aa.
- Expansão para o gene da altura: $(pB + qb)^2 = (0{,}5B + 0{,}5b)^2$
  - $(0{,}5)^2B^2 + 2(0{,}5B)(0{,}5b) + (0{,}5)^2b^2$
  - $0{,}25BB + 0{,}50Bb + 0{,}25bb$
  - As frequências genotípicas são $0{,}25$ para BB, $0{,}50$ para Bb e $0{,}25$ para bb.

Para encontrar a probabilidade do genótipo $AaBb$, multiplica-se a frequência de Aa pela frequência de Bb:

Probabilidade de $AaBb = (frequência\ de\ Aa) \times (frequência\ de\ Bb)$

Probabilidade de $AaBb = (0{,}50) \times (0{,}50) = 0{,}25$

A interpretação biológica é que, se os dois genes se segregam de forma independente, a probabilidade de um indivíduo herdar o genótipo $AaBb$ é de 25% da população. O termo em si é o resultado da combinação dos termos do meio de cada expansão binomial, representando a mistura dos alelos dominantes e recessivos para ambas as características.

Aplicação 3: Um aluno marca ao acaso as respostas em um teste múltipla-escolha com 10 questões e cinco alternativas por questão. Qual a probabilidade dele acertar: **a)** exatamente 4 questões? **b)** pelo menos 4 questões?

Solução:

Considerando $sucesso = acerto$, tem-se $p = \frac{1}{5}$ em cada ensaio (questão), e os ensaios são independentes. Considerando, ainda, P_k a probabilidade dele acertar k questões, ou seja, dele obter k sucessos em $n = 10$ ensaios. Aplicando o Teorema Binomial, segue que:

$$P_k = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{10-k} = \binom{10}{k} \cdot \frac{4^{10-k}}{5^{10}}$$

a) A probabilidade dele acertar exatamente $k = 4$ questões é:

$$P_4 = \binom{10}{4} \cdot \frac{4^{10-4}}{5^{10}}$$

$$P_4 = \frac{172032}{1953125} \approx 0,088.$$

Portanto, a probabilidade de se acertar exatamente 4 questões é de aproximadamente 0,088.

b) Observe que para descobrir a probabilidade de acertar pelo menos 4 questões, basta fazer a diferença entre o evento certo e as probabilidades de acertar 0, 1, 2 e 3 questões.

$$P_{(4 \leq k \leq 10)} = P_{(evento\ certo)} - P(0) - P(1) - P(2) - P(3)$$

$$P_{(4 \leq k \leq 10)} = 1 - \binom{10}{0} \cdot \frac{4^{10}}{5^{10}} - \binom{10}{1} \cdot \frac{4^9}{5^{10}} - \binom{10}{2} \cdot \frac{4^8}{5^{10}} - \binom{10}{3} \cdot \frac{4^7}{5^{10}}$$

$$P_{(4 \leq k \leq 10)} = \frac{1180409}{9765625} \approx 0,121.$$

Portanto, a probabilidade de acertar pelo menos 4 questões é de aproximadamente 0,121:

Aplicação 4: Lançando uma moeda não viciada 10 vezes, qual a probabilidade de obtermos exatamente 4 caras?

Solução:

Fazendo $sucesso = cara$, tem-se $p = \frac{1}{2}$ em cada ensaio (lançamento) e os ensaios são independentes.

Deseja-se determinar a probabilidade de $k = 4$ sucessos em $n = 10$ ensaios.

Logo, pelo Teorema Binomial, tem-se:

$$P = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^6$$

$$P = 210 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{64} = \frac{210}{1024} = \frac{105}{512}.$$

Portanto, a probabilidade de obter-se exatamente 4 caras é de $\frac{105}{512}$.

Aplicação 5: Um ecologista está estudando a distribuição de duas espécies de árvores, E_1 e E_2, em um parque. Ele observa 50 parcelas de terra e modela a probabilidade de encontrar uma combinação de árvores em cada parcela usando a expansão de $(e_1 + e_2)^3$, onde e_1 e e_2 representam a presença de cada espécie. O termo de expansão com $e_1^2 e_2^1$ representa a probabilidade de uma parcela ter 2 árvores da espécie E_1 e 1 árvore da espécie E_2. Se a probabilidade de uma espécie estar presente em uma parcela é igual para ambas

$(e_1 = e_2 = 0{,}5)$, encontre a expansão completa e interprete o termo que representa a maior probabilidade de combinação de espécies.

Solução:

A expansão de $(e_1 + e_2)^3$ é:

$$(e_1 + e_2)^3 = \binom{3}{0} e_1^3 e_2^0 + \binom{3}{1} e_1^2 e_2^1 + \binom{3}{2} e_1^1 e_2^2 + \binom{3}{3} e_1^0 e_2^3$$

Substituindo $e_1 = 0{,}5$ e $e_2 = 0{,}5$, tem-se:

- **Termo 1:** $\binom{3}{0} e_1^3 e_2^0 = 1 \cdot 0{,}125 \cdot 1 = 0{,}125\ (3\ da\ E_1, 0\ da\ E_2)$
- **Termo 2:** $\binom{3}{1} e_1^2 e_2^1 = 3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}375\ (2\ da\ E_1, 1\ da\ E_2)$
- **Termo 3:** $\binom{3}{2} e_1^1 e_2^2 = 3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}375\ (1\ da\ E_1, 2\ da\ E_2)$
- **Termo 4:** $\binom{3}{3} e_1^0 e_2^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}125 = 0{,}125\ (0\ da\ E_1, 3\ da\ E_2)$

A expansão completa é: $0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 + 0{,}125 = 1$.

O termo que representa a maior probabilidade é o segundo (ou o terceiro), com $0{,}375$ ou $37{,}5\%$. Isso ocorre quando a combinação de espécies é de 2 de uma e 1 da outra. A interpretação biológica é que, se a probabilidade de encontrar qualquer uma das espécies é a mesma, as combinações mais prováveis são as que têm uma distribuição mais equilibrada entre elas. As combinações mais desequilibradas (só uma espécie) são as menos prováveis.

4.6 O Triângulo de Pascal como Ferramenta Didática no Ensino Básico

No ensino de matemática, o Triângulo de Pascal se destaca como uma ferramenta didática valiosa. Sua riqueza matemática permite abordagens interdisciplinares que conectam aritmética, álgebra e análise combinatória, estimulando a compreensão conceitual e o reconhecimento de padrões e relações (Lopes; Carneiro, 2020).

Essa disposição triangular de números, onde cada elemento é a soma dos dois acima, é frequentemente atribuída a Blaise Pascal, mas sua origem histórica remonta a matemáticos chineses, persas e indianos (Lopes; Carneiro, 2020). Conceitualmente, o triângulo representa os coeficientes binomiais, $\binom{n}{k}$, que são essenciais para a expansão de binômios e para a resolução de problemas de combinações e arranjos (Luca; Oliveira, 2024).

Além de sua utilidade algébrica, o Triângulo de Pascal possui propriedades notáveis, como a geração de potências de dois e de sequências importantes, como a de Fibonacci e os números triangulares e tetraédricos (Hopkins, 2025). A utilização de materiais manipuláveis e representações visuais é apontada por diversos autores como um facilitador para a aprendizagem de conceitos abstratos (Aliu *et al.*, 2023).

Ao construir e investigar o triângulo, os alunos desenvolvem habilidades de observação, generalização e argumentação, que são fundamentais para a formação matemática. O seu caráter visual promove a equidade, atendendo a diferentes estilos de aprendizagem. Além disso, a ferramenta pode ser articulada com situações-problema contextualizadas, como contagem de caminhos em grades ou jogos com múltiplas possibilidades, o que torna a resolução de problemas mais acessível (Hopkins, 2025).

Uma análise de livros didáticos brasileiros aponta, no entanto, que a abordagem do "princípio de Pascal" é, muitas vezes, superficial e técnica. Isso reforça a necessidade de propostas pedagógicas mais aprofundadas, que considerem o triângulo como um recurso formativo, e não apenas um artefato decorativo (Hidalgo, Queiroz e Anselmo, 2021). A proposta de Lopes e Carneiro (2020) é um exemplo de como a abordagem histórica, combinada com a resolução de problemas, pode promover o protagonismo do aluno e a significação matemática.

O fato de novas relações de recursividade para o triângulo continuarem a ser descobertas, como a de Luca e Oliveira (2024), demonstra a atualidade e a dinamicidade dessa estrutura matemática. Para os docentes, esse domínio permite a diversificação de estratégias de ensino.

A exploração do Triângulo de Pascal também contribui para o desenvolvimento de competências previstas na BNCC, como raciocínio lógico e argumentação. Atividades investigativas baseadas no triângulo estimulam os alunos a formular hipóteses e a justificar soluções, alinhando o ensino a uma abordagem construtivista (Aliu *et al.*, 2023).

Deste modo, a utilização do Triângulo de Pascal exige dos professores sensibilidade pedagógica, com foco em atividades que articulem teoria e prática. Sua integração ao currículo, junto ao Binômio de Newton, revela um potencial didático significativo para o desenvolvimento do raciocínio algébrico e para o ensino de temas como produtos notáveis e somatórios (Islam *et al.*, 2022; Luca e Oliveira, 2024; Hopkins, 2025).

4.7 Desenvolvimento e Propriedade do Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal representa uma tabela que dispõe, de forma ordenada, os coeficientes binomiais dados por $\binom{n}{k}$. Ou seja:

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\iddots \quad \iddots \quad \vdots \quad \ddots \cdots \ddots \\
\binom{k}{0} \quad \binom{k}{1} \quad \binom{k}{2} \quad \binom{k}{3} \cdots \binom{k}{k} \\
\iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \vdots \quad \ddots \cdots \ddots \quad \ddots
\end{array}
$$

Logo:

A 1ª linha apresenta o coeficiente binomial com $n = 0$.

A 2ª linha apresenta os coeficientes binomiais com $n = 1$.

A 3ª linha apresenta os coeficientes binomiais com $n = 2$.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

A kª linha apresenta os coeficientes binomiais com $n = k$. E assim por diante.

No triângulo de Pascal pode-se escrever os coeficientes binomiais substituindo-os pelos seus respectivos valores:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\iddots \quad \iddots \quad \iddots \quad \vdots \quad \ddots \cdots \ddots \quad \ddots
\end{array}
$$

Observe que:

A 1ª linha do triângulo apresenta o coeficiente da expansão de $(x + a)^0$.

A 2ª linha do triângulo apresenta os coeficientes da expansão de $(x + a)^1$.

A 3ª linha do triângulo apresenta os coeficientes da expansão de $(x + a)^2$.

$\vdots$

Na forma de coeficientes binomiais, tem-se:

$$
\begin{array}{ccc}
\binom{0}{0} & \longrightarrow & (x+a)^0 \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} & \longrightarrow & (x+a)^1 \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} & \longrightarrow & (x+a)^2 \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} & \longrightarrow & (x+a)^3
\end{array}
$$

4.7.1 Propriedades do Triângulo de Pascal

I) O primeiro elemento em cada linha vale 1, pois, independente da linha, o elemento inicial é dado por $\binom{n}{0} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbf{1} & & & & \\ & & & \mathbf{1} & & 1 & & & \\ & & \mathbf{1} & & 2 & & 1 & & \\ & \mathbf{1} & & 3 & & 3 & & 1 & \\ \mathbf{1} & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \iddots & & \iddots & & \vdots & & \ddots & & \cdots \end{array}$$

II) O último elemento em cada linha vale 1, pois, independente da linha, o último elemento é dado por $\binom{n}{n} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbf{1} & & & & \\ & & & 1 & & \mathbf{1} & & & \\ & & 1 & & 2 & & \mathbf{1} & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & \mathbf{1} & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & \mathbf{1} \\ \iddots & & \iddots & & \vdots & & \ddots\ \cdots & & \ddots \end{array}$$

III) Todo elemento, partindo da 3ª linha, exceto o primeiro e o último elemento, é determinado pela soma dos dois elementos pertencentes a linha anterior e que estão imediatamente acima do elemento a ser determinado.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

Denomina-se esta propriedade como Relação de Stifel, a qual afirma:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}; \quad k \geq 2. \tag{12}$$

Demonstração: Seja um conjunto A com n elementos, e considere um determinado elemento $a \in A$. Efetuando o cálculo do número de combinações dos elementos de A, tomados k a k, de dois modos: **1)** Pela fórmula $\binom{n}{k}$; **2)** Determinando o número de combinações que **não possuam** o elemento a, ou seja, determinando $\binom{n-1}{k}$. Em seguida, determinando o número de combinações que **possuem** o elemento a, ou seja, determinando $\binom{n-1}{k-1}$.

Logo, o número de combinações é dado por:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

De **1)** e **2)** conclui-se que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

IV) Dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos e figurados em uma mesma linha são iguais. Isto equivale a demonstrar que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{13}$$

O que é imediato, pois:

$$\left.\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \end{aligned}\right\} =.$$

Nas aplicações a seguir, mostra-se a aplicabilidade das Propriedades do Triângulo de Pascal para melhor aprofundar e compreender as formulações matemáticas do ponto de vista teórico e contextualizado.

4.7.2 Aplicações das Propriedades do Triângulo de Pascal

Aplicação 1: Escreva 1100^4 como uma soma de notações científicas, utilizando o método do Binômio de Newton.

Solução:

Decompondo 1100 na sua forma aditiva, tem-se o seguinte binomial:

$$(1000 + 100)^4.$$

A linha 4 do Triângulo de Pascal ($n = 4$) corresponde a linha dos coeficientes do binômio.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longleftarrow & \boldsymbol{linha\ 0}: n = 0 \\ 1\ \ 1 & \longleftarrow & \boldsymbol{linha\ 1}: n = 1 \\ 1\ \ 2\ \ 1 & \longleftarrow & \boldsymbol{linha\ 2}: n = 2 \\ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 & \longleftarrow & \boldsymbol{linha\ 3}: n = 3 \\ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 & \longleftarrow & \boldsymbol{linha\ 4}: n = 4 \end{array}$$

Utilizando os coeficientes encontrados para expandir o Binômio de Newton, tem-se:

$$\mathbf{1} \cdot 1000^4 + \mathbf{4} \cdot 1000^3 \cdot 100^1 + \mathbf{6} \cdot 1000^2 \cdot 100^2 + \mathbf{4} \cdot 1000^1 \cdot 100^3 + \mathbf{1} \cdot 100^4.$$

Ao escrever as potências na base 10, encontra-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{1} \cdot (10^3)^4 + \mathbf{4} \cdot (10^3)^3 \cdot 10^2 + \mathbf{6} \cdot (10^3)^2 \cdot (10^2)^2 + \mathbf{4} \cdot (10^3) \cdot (10^2)^3 + \mathbf{1} \cdot (10^2)^4$$

Portanto, 1100^4 como uma soma de notações científicas, utilizando o método do Binômio de Newton é representado por $1 \cdot 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 6 \cdot 10^{6} + 4 \cdot 10^{9} + 1 \cdot 10^{8}$.

Aplicação 2: No intervalo $[0,2\pi]$, se α é a maior raiz da equação

$$\binom{4}{0} cos^4 x - \binom{4}{1} cos^3 x + \binom{4}{2} cos^2 x - \binom{4}{3} cos x + 1 = 0,$$

então $sen\frac{3\alpha}{4}$ vale:

Solução:

A equação pode ser reescrita como:

$$\binom{4}{0} cos^4 x \cdot 1 - \binom{4}{1} cos^3 x \cdot 1 + \binom{4}{2} cos^2 x \cdot 1 - \binom{4}{3} cos^1 x \cdot 1 + \binom{4}{4} cos^0 x \cdot 1 = 0$$

donde segue, pelo desenvolvimento do Binômio de Newton, que:

$$\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3} \ e \ \binom{4}{4}$$

são os coeficientes correspondentes a linha 4 ($n = 4$) do Triângulo de Pascal.

$$\begin{matrix} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \boldsymbol{\binom{4}{0}} & & \boldsymbol{\binom{4}{1}} & & \boldsymbol{\binom{4}{2}} & & \boldsymbol{\binom{4}{3}} & & \boldsymbol{\binom{4}{4}} \end{matrix}$$

Desse modo, tem-se, para $k = -1$, a expressão:

$$(cos\, x - 1)^4 = 0 \Rightarrow cos\, x = 1.$$

No intervalo $[0, 2\pi]$, a maior solução é $\alpha = 2\pi$. Logo, tem-se:

$$sen\frac{3\alpha}{4} = sen\frac{3\pi}{2} = -1.$$

Portanto, para o intervalo de $[0, 2\pi]$ $sen\frac{3\alpha}{4}$ vale -1.

Aplicação 3: No saguão de um teatro, há um lustre com 10 lâmpadas, todas de cores distintas entre si. Como medida de economia de energia elétrica, o gerente desse teatro estabeleceu que só deveriam ser acesas, simultaneamente, de 4 a 7 lâmpadas, de acordo com a necessidade. Nessas condições, de quantos modos distintos podem ser acesas as lâmpadas desse lustre?

Solução:

Como só devem ser acesas de 4 a 7 lâmpadas simultaneamente, tem-se:

$$\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}.$$

Pela Relação de Stifel, segue que,

$$\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}=\binom{11}{5}+\binom{11}{7}.$$

Por outro lado, $\binom{11}{4}$ e $\binom{11}{7}$ estão equidistantes dos extremos da linha com $n=11$, logo:

$$\binom{11}{7}=\binom{11}{4}.$$

Consequentemente, tem-se que:

$$\binom{11}{5}+\binom{11}{4}=\binom{12}{5}=792.$$

Portanto, as lâmpadas do lustre podem ser acesas de 792 formas distintas.

Aplicação 4: Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante. Com base nessas informações, calcule o número total de laranjas que compõem quinze camadas.

Solução:

Observe que cada camada forma um retângulo de $n \times m$ laranjas, começando com 2×1, sendo que a cada nova camada n e m aumentam uma unidade. Assim, o total de laranjas é

$$2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4+\cdots+16\cdot 15.$$

Daí multiplicando e dividindo essa expressão por 2, tem-se:

$$2\cdot\left(\frac{2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4+\cdots+16\cdot 15}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\frac{2\cdot 1}{2}+\frac{3\cdot 2}{2}+\frac{4\cdot 3}{2}+\frac{5\cdot 4}{2}+\cdots\frac{16\cdot 15}{2}\right).$$

Reescrevendo os termos da soma entre parênteses como números binomiais, obtém-se a soma dos termos de uma das colunas ($k=2$) do Triângulo de Pascal.

Dai,

$$=2\cdot\left(\frac{2\cdot 1}{2}+\frac{3\cdot 2}{2}+\frac{4\cdot 3}{2}+\frac{5\cdot 4}{2}+\cdots\frac{16\cdot 15}{2}\right)$$

$$=2\cdot\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\cdots+\binom{16}{2}\right]$$

Pelo teorema das colunas, tem-se:

$$2 \cdot \left[\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \cdots + \binom{16}{2}\right] = 2\binom{17}{3} = 2 \cdot 680 = 1360.$$

Portanto, o total de laranjas que compõem as 15 camadas é de 1360 laranjas.

4.8 Propriedades e Implicações Didáticas do Triângulo de Pascal

A construção do Triângulo de Pascal, baseada em um processo recursivo, revela uma profunda estrutura matemática. A configuração triangular se inicia com o número 1 no topo, e cada elemento subsequente é a soma dos dois imediatamente acima. Em termos formais, o número na posição $C_{(n,k)}$ representa um coeficiente binomial. Essa disposição visual das relações combinatórias revela um padrão de crescimento simétrico e exponencial (Silva; Elian, 2020).

A estrutura do triângulo é simétrica em relação ao seu eixo central, o que deriva da propriedade matemática expressa em (6). Essa regularidade visual não apenas evidencia a equivalência entre o número de subconjuntos de k elementos e de $n - k$ elementos, mas também reforça a ideia de equilíbrio e economia algébrica (Lopes; Carneiro, 2020).

Outra propriedade fundamental é a soma dos elementos de cada linha, que é igual a 2^n. Isso pode ser verificado pela identidade binomial:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{(n-k)} = 2^n. \tag{14}$$

Demonstração:

Deve-se mostrar que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{i} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Desenvolvendo $(1 + 1)^n$ pelo teorema binomial, tem-se:

$$2^n = (1 + 1)^n,$$

donde segue que:

$$2^n = \binom{n}{0} \cdot \boxed{\cancelto{1}{1^{n-0} \cdot 1^n}} + \binom{n}{1} \cdot \boxed{\cancelto{1}{1^{n-1} \cdot 1^1}} + \cdots + \binom{n}{i} \cdot \boxed{\cancelto{1}{1^{n-i} \cdot 1^i}} + \ \ldots + \binom{n}{n} \cdot \boxed{\cancelto{1}{1^{n-n} \cdot 1^n}}$$

Portanto,

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{i} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Que denotando com o somatório, obtém-se a expressão dada por (14).

Essa propriedade ilustra a relação entre combinatória e potências de dois, conectando o triângulo a temas como funções exponenciais e sistemas binários (Dante, 2023).

O triângulo também revela a presença de números figurados ao longo de suas diagonais, como os números naturais, triangulares e tetraédricos. Essa característica reforça a relação entre o Triângulo de Pascal e a geometria, promovendo uma abordagem interdisciplinar da matemática (Silva; Elian, 2020). A sequência de Fibonacci também surge ao se somarem elementos em diagonais inclinadas, reforçando o caráter investigativo do trabalho com o triângulo (Dante, 2023).

No campo da matemática digital e combinatória, o triângulo pode ser interpretado como um objeto de estrutura discreta e de codificação binária. A coloração de números pares e ímpares, por exemplo, gera o Triângulo de Sierpiński, um fractal que aproxima o ensino de temas contemporâneos como a teoria dos fractais (Mathonet *et al.*, 2023). A perspectiva geométrica é ainda ampliada com a visualização tridimensional, como o "Pascalian 3D Simplex", que organiza os coeficientes em um tetraedro, interligando álgebra e geometria (Moretti, 2022). Estudos mais avançados, como o de Beiu *et al.* (2022), exploram a conversão da estrutura discreta do triângulo em superfícies contínuas, introduzindo conceitos de geometria analítica.

A abordagem didática das propriedades do Triângulo de Pascal deve considerar tanto seus aspectos operacionais quanto suas implicações conceituais. Atividades dinâmicas que envolvem a identificação de padrões, o uso de cores e a exploração de simetrias são recomendadas para estimular a compreensão dos alunos e o desenvolvimento de competências matemáticas (Silva; Elian, 2020).

A estrutura do triângulo pode ser associada ao estudo de polinômios, fornecendo os coeficientes para a expansão de binômios, o que facilita a compreensão de produtos notáveis. Essa abordagem intuitiva da álgebra, reforçada por propostas didáticas que integram a história da matemática e a resolução de problemas (Lopes; Carneiro, 2020), é fundamental para o desenvolvimento da formalização e da generalização (Dante, 2023). Outras pesquisas, como a de Hopkins (2025), propõem atividades lúdicas para introduzir conceitos como recorrência desde os anos iniciais.

A construção e as propriedades do Triângulo de Pascal oferecem um campo fértil para o ensino e aprendizagem da matemática. Suas regularidades visuais, relações combinatórias e simetrias proporcionam uma base rica para a exploração didática. Ao articular aspectos algébricos, geométricos e lógicos, os docentes podem promover experiências que desenvolvam não apenas o domínio técnico, mas também a capacidade de reconhecer padrões, formular conjecturas e comunicar ideias com precisão (Silva; Elian, 2020; Moretti, 2022).

Nas aplicações a seguir, mostra-se a aplicabilidade da soma dos elementos de cada linha do Triângulo de Pascal para melhor aprofundar e compreender as formulações matemáticas do ponto de vista teórico e contextualizado.

4.8.1 Aplicações da Soma dos Elementos de Cada Linha do Triângulo de Pascal

Aplicação 1: Uma empresa de tecnologia está formando equipes de projeto. Eles têm n desenvolvedores disponíveis, e cada equipe pode ter qualquer número de desenvolvedores, de 0 (uma equipe vazia, apenas para fins conceituais de contagem) até n desenvolvedores. Se o gerente de projetos quer saber de quantas maneiras distintas ele pode formar uma equipe com esses n desenvolvedores, qual é o número total de possibilidades? Se $n = 5$ desenvolvedores, quantas equipes distintas podem ser formadas?

Solução:

Para cada desenvolvedor, o gerente de projetos tem 2 opções: incluí-lo na equipe ou não incluí-lo. Como há n desenvolvedores, e a decisão para cada um é independente, o número total de maneiras de formar uma equipe é 2×2×⋯×2 (n vezes), que é igual a 2^n.

Alternativamente, pode-se pensar em termos de combinações:

Número de maneiras de formar uma equipe com 0 desenvolvedores: $\binom{0}{n}$

Número de maneiras de formar uma equipe com 1 desenvolvedor: $\binom{1}{n}$

Número de maneiras de formar uma equipe com 2 desenvolvedores: $\binom{2}{n}$

...

Número de maneiras de formar uma equipe com n desenvolvedores: $\binom{n}{n}$

O número total de maneiras é a soma de todas essas possibilidades:

$$Total = \binom{0}{n} + \binom{1}{n} + \binom{2}{n} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Segue que essa soma é igual a 2^n pela expressão (14).

Assim, para $n = 5$ desenvolvedores, tem-se que o total de equipes é igual a $2^5 = 32$.

Portanto, o número total de possibilidades para formar uma equipe é 2^n e, sendo $n = 5$ desenvolvedores, podem ser formadas 32 equipes distintas.

Aplicação 2: Uma pizzaria oferece uma pizza base e n ingredientes extras diferentes. Um cliente pode escolher qualquer combinação desses ingredientes extras, incluindo não escolher nenhum (apenas a pizza base) ou escolher todos os n ingredientes. De quantas maneiras diferentes um cliente pode montar sua pizza? Se a pizzaria oferece n=7 ingredientes extras, quantas pizzas diferentes podem ser criadas?

Solução:

Para cada um dos n ingredientes extras, o cliente tem duas escolhas: adicioná-lo à pizza ou não adicioná-lo. Como existem n ingredientes e cada escolha é independente, o número total de combinações possíveis de ingredientes é $2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (n vezes), resultando em 2^n.

Em termos de coeficientes binomiais:

Escolher 0 ingredientes: $\binom{0}{n}$

Escolher 1 ingrediente: $\binom{1}{n}$

Escolher 2 ingredientes: $\binom{2}{n}$

...

Escolher n ingredientes: $\binom{n}{n}$

A soma de todas essas combinações é dada pela expressão (14).

Dessa forma, para $n = 7$ ingredientes extras, tem-se um total de pizzas diferentes onde:

$$2^7 = 128.$$

Portanto, um cliente pode montar sua pizza de 2^n maneiras diferentes e se a pizzaria oferece $n = 7$ ingredientes extras, podem ser criadas 128 pizzas diferentes.

Aplicação 3: Em um sistema de comunicação digital, uma mensagem é transmitida usando sequências de bits (0s e 1s) de comprimento n. Por exemplo, se $n = 3$, as sequências podem ser 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Cada posição na sequência pode ser um 0 ou um 1. Quantas sequências de bits distintas de comprimento n existem? Se o sistema usa mensagens de $n = 10$ bits, quantas mensagens diferentes podem ser formadas?

Solução:

Para cada uma das n posições na sequência de bits, há duas possibilidades: um 0 ou um 1. Como as escolhas para cada posição são independentes, o número total de sequências de bits distintas de comprimento n é $2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (n vezes), que pode ser expresso por 2^n.

Ao se considerar que "escolher 1" é um sucesso e "escolher 0" é um fracasso, e ao contar o número de sequências que contêm k uns (e $n - k$ zeros) nada mais nada menos estará se fazendo a combinação $\binom{k}{n}$. A soma de todas as possibilidades para k (de 0 a n) expressa o total de sequências:

$Total\ = \binom{0}{n} + \binom{1}{n} + \binom{2}{n} + \cdots + \binom{n}{n}.$

Desa forma, para $n = 10$ bits, tem-se um total de mensagens igual a

$$2^{10} = 1024.$$

Portanto, existem 2^n sequências de bits distintas de comprimento n. Se o sistema usa mensagens de $n = 10$ bits, podem ser formadas 1024 mensagens diferentes.

Aplicação 4: Um engenheiro está projetando um circuito digital com n interruptores (ou portas lógicas simples) independentes. Cada interruptor pode estar em um de dois estados: ligado (ON) ou desligado (OFF). O engenheiro precisa testar todas as configurações possíveis dos interruptores para garantir o funcionamento correto do circuito. Quantas configurações distintas dos interruptores ele precisa testar? Se o circuito possui n=8 interruptores, quantas configurações o engenheiro deve verificar?

Solução:

Para cada um dos n interruptores, há duas configurações possíveis: ON ou OFF. Como os interruptores são independentes, o número total de configurações distintas para o circuito é $2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (n vezes), que pode ser representado por 2^n.

Considerando a analogia com coeficientes binomiais, tem-se:

Número de configurações com 0 interruptores ON: $\binom{0}{n}$

Número de configurações com 1 interruptor ON: $\binom{1}{n}$

...

Número de configurações com n interruptores ON: $\binom{n}{n}$

A soma de todas as possibilidades para o número de interruptores ligados é dada pela expressão (14).

Dessa forma, quando $n = 8$ interruptores, tem-se um total de configurações igual a

$$2^8 = 256.$$

Portanto, o engenheiro precisa testar 2^n configurações distintas dos interruptores e como o circuito possui $n = 8$ interruptores, o engenheiro deve verificar 256 configurações.

Aplicação 5: Em genética, um organismo diploide com n pares de cromossomos heterozigotos para diferentes genes (por exemplo, AaBbCc... com n pares) pode produzir uma grande variedade de gametas através da segregação independente. Para cada par de alelos heterozigotos, há duas possibilidades de alelo para o gameta. Se um organismo possui n pares de cromossomos em que é heterozigoto para um gene em cada par, quantos tipos diferentes de gametas ele pode produzir? Se um organismo tem $n = 3$ pares de cromossomos onde é heterozigoto para 3 genes (por exemplo, AaBbCc), quantos tipos de gametas diferentes ele pode formar?

Solução:

A cada par de cromossomos heterozigotos, o gameta pode receber um dos dois alelos (por exemplo, A ou a, B ou b, etc.). Como existem n pares de cromossomos heterozigotos e a segregação de cada par é independente, o número total de combinações únicas de alelos nos gametas é $2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (n vezes), que é 2^n.

Pode-se, ainda, pensar em termos de combinações de alelos "dominantes" ou "recessivos" (ou simplesmente um dos dois alelos de cada par).

Número de gametas com 0 alelos "tipo A" (apenas alelos "tipo a"): $\binom{0}{n}$

Número de gametas com 1 alelo "tipo A": $\binom{1}{n}$

...

Número de gametas com n alelos "tipo A": $\binom{n}{n}$

Assim, a soma de todas essas possibilidades para a combinação de alelos é dada por 2^n.

Logo, para $n = 3$ pares de cromossomos heterozigotos, tem-se:

$Total\ de\ tipos\ de\ gametas = 2^3 = 8$.

Portanto, um organismo com n pares de cromossomos heterozigotos pode produzir 2^n tipos diferentes de gametas e, para $n = 3$ pares, ele pode formar 8 tipos de gametas diferentes.

4.9 Regularidades Numéricas, Simetrias e Somatórios no Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é reconhecido por suas múltiplas regularidades numéricas, que emergem de sua construção recursiva e oferecem um campo fértil para o ensino e a investigação matemática. Suas propriedades incluem padrões aditivos, multiplicativos, simetrias e relações de somatórios, sendo ideais para aplicações didáticas que estimulam o reconhecimento de padrões e a modelagem (Shukla; Sharma, 2024).

Uma das primeiras regularidades visíveis é a simetria bilateral, que se manifesta a partir do centro de cada linha. Essa propriedade, baseada na identidade combinatória da expressão

(6), revela que coeficientes equidistantes do centro são iguais. Essa simetria não é apenas uma característica estética, mas um conceito de invariância que pode ser explorado para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático (Liu, 2024).

Além da simetria, o triângulo exibe diversos padrões de crescimento e multiplicação. A soma dos elementos da linha n resulta em 2^n, o que pode ser interpretado tanto por uma identidade algébrica quanto por um princípio de contagem em conjuntos binários. Essa regularidade permite a introdução intuitiva das potências de dois e conceitos de duplicação, fundamentais em estruturas computacionais (Rosenberg; Trystram, 2020).

As regularidades se estendem aos somatórios diagonais, que revelam a sequência dos números naturais, triangulares e outras classes de números figurados. Esses padrões estabelecem pontes entre o Triângulo de Pascal e a geometria, reforçando a ideia de que a matemática é um campo de estruturas recorrentes e interligadas (Shukla; Sharma, 2024).

Outra regularidade notável é a relação entre os números ímpares e pares no triângulo. Ao colori-los, obtém-se um padrão semelhante ao Triângulo de Sierpiński, um fractal que aproxima a matemática da estética e da simulação computacional. Essa abordagem visual contribui para o desenvolvimento da intuição matemática, estimulando a formulação de conjecturas a partir da paridade dos números (Liu, 2024).

Os somatórios parciais também apresentam regularidades instrutivas, como a soma dos dois números adjacentes que gera um número na linha seguinte. Essa propriedade pode ser utilizada para introduzir tópicos como recursividade e indução matemática. Ao compreender que cada número é o resultado de uma regra simples de formação, o discente adquire fundamentos para lidar com sucessões e prever resultados (Shukla; Sharma, 2024).

A observação de padrões em colunas fixas introduz os conceitos de progressões e relações entre os níveis de complexidade combinatória, servindo como uma introdução natural a estudos de sequências e séries (Rosenberg; Trystram, 2020). De modo geral, a identificação das regularidades no triângulo contribui para a construção do vocabulário simbólico dos discentes, tornando conceitos abstratos como simetria e aditividade concretos (Rojas, 2025).

Adicionalmente, o triângulo oferece oportunidades para a introdução de demonstrações por indução. A partir da verificação empírica de padrões, os alunos podem ser guiados à formulação de hipóteses, o que atua como um mediador entre a experimentação e o rigor formal (Rosenberg; Trystram, 2020). Essa estrutura também se conecta à computação, uma vez que algoritmos de geração do triângulo utilizam princípios recursivos e simétricos, reforçando a relevância do conteúdo em contextos interdisciplinares (Liu, 2024).

Deste modo, a exploração das regularidades do Triângulo de Pascal em sala de aula estimula a descoberta, a sistematização de ideias e a construção autônoma do conhecimento. Suas propriedades numéricas e simetrias o tornam um recurso ideal para atividades baseadas em padrões, que desenvolvem o raciocínio dedutivo e o pensamento algorítmico, fortalecendo a capacidade de generalização dos discentes (Shukla; Sharma, 2024).

4.10 Resolução de Potências de Binômios com o Uso do Triângulo de Pascal

A resolução de potências de binômios é um tema central na álgebra elementar. O Triângulo de Pascal surge como uma ferramenta didática para a expansão de expressões como a de (1), permitindo que os alunos compreendam os coeficientes de forma visual e sistematizada. Sua estrutura facilita a identificação de padrões e simetrias, simplificando o Teorema do Binômio sem a necessidade imediata de operar com fatoriais (Galvão; Chagas, 2022).

O Teorema do Binômio, formalizado por Newton, estabelece que a expansão de qualquer potência de binômio é dada pela expressão (2), na qual os coeficientes são fornecidos pelas linhas do Triângulo de Pascal. Para expandir $(a+b)^5$, por exemplo, a sexta linha do triângulo (1, 5, 10, 10, 5, 1) fornece diretamente os coeficientes. Essa abordagem simplifica o processo e associa os coeficientes a contagens de combinações, reforçando a interdisciplinaridade entre álgebra e análise combinatória (Galvão; Chagas, 2022; Islam *et al.*, 2022).

Uma abordagem didática interessante, destacada por Islam *et al.* (2020; 2022), é a relação entre as potências do número 11 e a geração dos coeficientes binomiais. Embora limitada, essa relação permite que os alunos percebam padrões numéricos surpreendentes, desenvolvendo habilidades de previsão e verificação. A análise da expansão também introduz noções de simetria e equilíbrio, pois os expoentes de a e b se comportam de forma simétrica (Yoon, 2021).

O uso da notação de somatório, na expressão (2), é outro aspecto didático importante. Ele permite que os alunos compreendam como uma expansão extensa pode ser descrita de forma compacta e generalizável. Essa prática, combinada com o uso do triângulo, proporciona uma introdução gradual ao formalismo matemático, essencial para etapas mais avançadas do ensino (Galvão; Chagas, 2022).

A capacidade do Triângulo de Pascal de simplificar o cálculo dos coeficientes sem a necessidade de fatoriais o torna uma abordagem visual e acessível, especialmente para alunos no início do ensino médio. Essa estratégia promove a compreensão do "como" e do "porquê" dos resultados, incentivando uma aprendizagem mais reflexiva (Islam *et al.*, 2022).

O potencial didático do triângulo pode ser ainda mais explorado com o uso de materiais manipuláveis ou softwares matemáticos. Tais recursos auxiliam na visualização, no reconhecimento de padrões e no engajamento dos alunos, reforçando a importância da experimentação e do protagonismo discente (Galvão; Chagas, 2022). Além disso, as conexões entre o triângulo e outras estruturas, como a sequência de Fibonacci, ampliam o alcance conceitual do conteúdo, mostrando a interdependência entre diferentes áreas da matemática (Yoon, 2021).

Deste modo, a resolução de potências de binômios com o uso do Triângulo de Pascal não apenas simplifica o processo algébrico, mas também promove o desenvolvimento de habilidades fundamentais, como o reconhecimento de padrões e a visualização de estruturas. Ao integrar álgebra, combinatória e notação somatória, o triângulo se consolida como um instrumento pedagógico versátil, cuja aplicabilidade transcende um conteúdo isolado e atinge múltiplos eixos da matemática escolar (Islam *et al.*, 2020; Yoon, 2021).

4.11 Produtos Notáveis e Padrões Algébricos no Ensino da Álgebra

O ensino de álgebra nos anos finais do ensino fundamental é crucial para a construção do pensamento matemático abstrato. Os produtos notáveis são as primeiras estruturas formais que o discente encontra ao transitar do campo aritmético para o algébrico. Esses produtos, como o quadrado da soma, o quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença, oferecem modelos que evidenciam padrões fixos nas operações algébricas, permitindo generalizações importantes. O ensino desses produtos, quando contextualizado e articulado a padrões visuais e operatórios, contribui para a compreensão da álgebra como uma linguagem, e não apenas como uma técnica (Kuhn; Lima, 2021).

Os produtos notáveis são expressões cujos resultados seguem modelos padronizados, o que facilita a expansão de binômios e a identificação de regularidades algébricas. Por exemplo, a identidade:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{15}$$

revela uma estrutura fixa que pode ser explorada tanto em situações de cálculo quanto na representação geométrica de áreas. A identificação desses padrões permite que os discentes reconheçam regularidades e antecipem resultados sem a necessidade de cálculos extensos, desenvolvendo agilidade mental e capacidade de generalização — habilidades essenciais ao pensamento algébrico (Soares *et al.*, 2021).

O trabalho com produtos notáveis deve ser conduzido de forma que os discentes não apenas memorizem fórmulas, mas compreendam sua origem e aplicação. Estratégias didáticas que envolvem resolução de problemas, construção de tabelas, uso de material manipulativo e exploração de padrões visuais podem ser eficazes na transição do raciocínio empírico para o formal. O uso de esquemas visuais, como diagramas de área, permite representar as relações entre os termos, tornando visíveis os padrões que regem sua formação e contribuindo para a compreensão conceitual (Silva; Groenwald, 2024).

A identificação de padrões algébricos é favorecida quando os produtos notáveis são apresentados como casos particulares de expressões mais amplas. A observação de que $(a+b)^2$, $(a+b)^3$e $(a+b)^n$ seguem uma estrutura crescente de termos e coeficientes pode ser conectada ao Triângulo de Pascal, promovendo um diálogo entre regularidade numérica e estrutura algébrica. Essa associação amplia o repertório cognitivo do discente, evidenciando que a álgebra não se reduz à manipulação simbólica, mas também envolve a percepção de estruturas e regularidades (Kuhn; Lima, 2021).

No contexto curricular brasileiro, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca que o pensamento algébrico deve ser desenvolvido de forma progressiva e contextualizada, o que inclui a exploração de padrões, propriedades das operações e generalizações. Nesse sentido, os produtos notáveis ocupam lugar estratégico no currículo, pois introduzem os discentes à linguagem algébrica e à ideia de formulação de regras gerais a partir de observações de casos específicos (Scremin; Righi, 2020).

As pesquisas sobre o ensino dos produtos notáveis em livros didáticos brasileiros mostram uma evolução significativa quanto à abordagem pedagógica. Segundo Io (2023), obras mais antigas enfatizavam a memorização mecânica, enquanto livros mais recentes passaram a apresentar os produtos notáveis a partir de situações-problema e visualizações gráficas, o que aponta para uma mudança na concepção de aprendizagem algébrica, em consonância com as diretrizes atuais.

Ainda assim, persistem desafios. A prática docente muitas vezes permanece centrada na repetição, o que dificulta a consolidação do pensamento algébrico em sua dimensão estrutural. Para superar essas limitações, recomenda-se o uso de sequências didáticas que integrem os produtos notáveis a contextos significativos e que incentivem a análise de regularidades. A aprendizagem se torna mais efetiva quando os discentes são levados a descobrir os padrões por si mesmos e a justificá-los com base em argumentos matemáticos (Silva; Groenwald, 2024).

A abordagem dos produtos notáveis deve ser articulada a outras áreas, como a geometria e a aritmética. A representação geométrica do produto $(a + b)^2$ como a área de um quadrado, por exemplo, possibilita uma interpretação concreta do desenvolvimento da expressão algébrica. O reconhecimento de padrões nos resultados numéricos da aplicação de produtos notáveis favorece a percepção da matemática como um campo de regularidades, promovendo uma visão integrada da disciplina (Soares *et al.*, 2021).

Os produtos notáveis representam uma entrada privilegiada para o desenvolvimento do pensamento algébrico e da capacidade de identificar padrões. Seu ensino exige a adoção de abordagens que vão além da repetição mecânica, favorecendo a compreensão estrutural e a articulação entre diferentes conteúdos. Ao integrar os produtos notáveis ao trabalho com regularidades e resolução de problemas, os professores podem promover uma aprendizagem mais significativa e reflexiva (Io, 2023; Soares *et al.*, 2021).

Estudos como o de Io (2023) mostram que, tradicionalmente, os produtos notáveis são apresentados de forma mecânica, sem conexão com estruturas como o Triângulo de Pascal ou com representações geométricas, o que reforça a necessidade de reformular práticas didáticas, articulando o ensino de produtos notáveis à análise de padrões binomiais, como propõem Luca e Oliveira (2024) e Islam *et al.* (2020). Outras pesquisas, como a de Santos *et al.* (2020), propõem a aprendizagem dos produtos notáveis por meio da investigação matemática, alinhada às abordagens indutivas que defendem a abstração progressiva e o desenvolvimento do raciocínio estruturado (Dante, 2023; Lopes e Carneiro, 2020).

4.12 Técnicas de Solução de Produtos Notáveis: Visualizações com o Triângulo de Pascal

A compreensão dos produtos notáveis é um passo crucial no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Quando ensinados apenas por regras formais, a aprendizagem pode se tornar mecânica. As visualizações gráficas, especialmente com o Triângulo de Pascal, oferecem uma alternativa pedagógica para tornar esses produtos mais acessíveis, permitindo que os alunos observem padrões e simetrias (Cordeiro, 2024).

O uso do Triângulo de Pascal ajuda a resgatar a lógica combinatória das fórmulas, mostrando que os coeficientes numéricos nas potências de binômios não são arbitrários. Cada linha do triângulo fornece os coeficientes para a expansão de uma potência específica. Por exemplo, a expansão de $(a + b)^2$ usa os coeficientes da segunda linha $(1, 2, 1)$, e a de $(a + b)^3$ usa os da terceira (1, 3, 3, 1) (Nascimento, 2020).

Essa abordagem visual é especialmente produtiva quando combinada com representações geométricas. Ao desenhar diagramas de área, os alunos podem ver a origem de cada termo da expansão. Por exemplo, a representação de $(a + b)^2$ pode ser decomposta em áreas que somadas resultam na expressão (15). Quando associada aos coeficientes do triângulo, essa visualização ajuda a conectar a regularidade algébrica com fundamentos geométricos e numéricos (Trevisan *et al.*, 2020).

A utilização de ferramentas digitais, como o GeoGebra, amplia ainda mais as possibilidades, permitindo a construção dinâmica do triângulo e a exploração investigativa dos produtos notáveis. Essa interatividade torna a aprendizagem mais envolvente e autônoma (Filho; Cruz, 2021).

Uma das principais vantagens dessa técnica é a ênfase nas regularidades. Ao visualizar as linhas do triângulo, o aluno pode antecipar o número de termos e os coeficientes da expansão, o que o capacita a reconhecer padrões de forma intuitiva e a generalizar estratégias de resolução (Nascimento, 2020). Esse processo de justificação, seja por meio de raciocínio combinatório ou visual, fortalece a compreensão conceitual e a linguagem matemática (Cordeiro, 2024).

As visualizações também ajudam a superar dificuldades comuns, como erros na multiplicação de termos. O triângulo atua como um organizador visual que guia o aluno na ordem dos termos e nos coeficientes corretos, mediando entre a escrita simbólica e o pensamento lógico (Trevisan *et al.*, 2020). É importante ressaltar que essas estratégias visuais complementam a formalização algébrica, mas não a substituem. Ao visualizar os padrões, os alunos ficam mais preparados para compreender e aplicar as expressões de forma autônoma, alinhando-se a uma abordagem construtivista (Filho; Cruz, 2021).

Em conformidade com a BNCC, o uso do Triângulo de Pascal no ensino de produtos notáveis promove o desenvolvimento da capacidade de reconhecer regularidades, generalizar padrões e argumentar matematicamente. Essa técnica pedagógica eficaz contribui para uma aprendizagem mais significativa e articulada, respeitando os princípios da diversidade didática e do protagonismo do aluno na construção do conhecimento (Cordeiro, 2024; Trevisan *et al.*, 2020).

4.13 Relações Entre Produtos Notáveis e Desenvolvimentos Binomiais

A articulação entre produtos notáveis e desenvolvimentos binomiais é fundamental na formação algébrica dos alunos. Ela permite a transição da aplicação de regras específicas para a compreensão de estruturas generalizadas. Enquanto os produtos notáveis são modelos padronizados, como na expressão (15), os desenvolvimentos binomiais abrangem a expansão de potências de binômios para expoentes maiores, conforme o Teorema do Binômio. Essa relação é conceitual, pois ambos evidenciam padrões algébricos regulares e simétricos que favorecem o raciocínio generalizador (Toth, 2021).

Os produtos notáveis podem ser vistos como casos particulares dos desenvolvimentos binomiais. Ao considerar a expressão (1) com $n = 2$ ou $n = 3$, obtêm-se as identidades clássicas. Essa observação ajuda os alunos a perceberem que as fórmulas não são arbitrárias, mas derivam de um princípio mais amplo: a combinação sistemática dos termos segundo os coeficientes binomiais, que são representados no Triângulo de Pascal. A identificação dessa origem facilita a internalização das fórmulas e promove uma aprendizagem significativa (Sai, 2022).

Nos desenvolvimentos binomiais, os coeficientes numéricos são obtidos pelas combinações:

$$C_{(n,k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{16}$$

onde n representa o expoente e k a posição do termo. Esses coeficientes, organizados no Triângulo de Pascal, são o vínculo direto com os produtos notáveis. Por exemplo, os coeficientes 1, 3, 3 e 1 presentes em $(a + b)^3$ correspondem à expansão:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \tag{17}$$

Tal análise amplia o alcance dos produtos notáveis, conectando-os à teoria combinatória e às propriedades dos polinômios (Toth, 2021). A compreensão de potências binomiais mais elevadas pode ser abordada a partir da análise de congruências e padrões modulares, mostrando que esses temas têm desdobramentos em áreas mais avançadas da matemática, como a teoria dos números (Silva *et al.*, 2025).

Outro aspecto relevante é a representação dos desenvolvimentos binomiais como expressões polinomiais, com aplicações em diversos contextos científicos. Segundo Cox (2020), os sistemas polinomiais derivados de potências binomiais são usados em equações algébricas e até em criptografia. Essa associação valoriza a matemática como ciência aplicada.

Em contextos educativos, a abordagem progressiva que parte dos produtos notáveis em direção ao desenvolvimento geral de potências binomiais fortalece o raciocínio por generalização. Os alunos começam por identificar padrões simples, como:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1, \tag{18}$$

e gradualmente percebem que esse modelo pode ser generalizado por $(x+1)^n$, utilizando os coeficientes do Triângulo de Pascal. Essa evolução exige dos alunos a identificação de regularidades e a formulação de conjecturas (Campos, 2023).

A articulação entre álgebra e outras áreas, como a biologia, também pode ser explorada. Sai (2022) propõe que os desenvolvimentos binomiais sejam abordados em diálogo com a genética, por exemplo, na combinação de alelos. Essa interdisciplinaridade estimula o interesse dos alunos e reforça o valor funcional da álgebra.

Os produtos notáveis também contribuem para a introdução de conceitos mais avançados, como a fatoração e o estudo de raízes algébricas. Com base nos desenvolvimentos binomiais, os alunos podem investigar como expressões como $(a+b)^2$ ou $(a+b)^3$ podem ser manipuladas para obter fatorações úteis na resolução de equações (Cox, 2020).

O ensino das relações entre produtos notáveis e desenvolvimentos binomiais deve priorizar a construção conceitual e a compreensão das estruturas envolvidas. Ao empregar estratégias como a construção do Triângulo de Pascal, a análise de padrões e a conexão com contextos aplicados, os professores contribuem para o fortalecimento do pensamento algébrico, que é essencial para o domínio dos conteúdos de álgebra em níveis posteriores de escolaridade (Campos, 2023).

Em síntese, os produtos notáveis são a porta de entrada para o entendimento dos desenvolvimentos binomiais, ao introduzirem padrões que se expandem de maneira regular. Sua articulação com os coeficientes binomiais e a representação polinomial contribui para uma aprendizagem integrada e contextualizada da álgebra. Assim, compreender as relações entre essas duas estruturas é crucial para desenvolver uma visão abrangente e aplicada da matemática escolar (Sai, 2022).

4.14 Estratégias de Ensino de Produtos Notáveis no Ensino Fundamental e Médio

Para que o ensino de produtos notáveis seja significativo, os professores devem ir além da memorização de fórmulas e adotar estratégias que promovam a compreensão estrutural. Metodologias diversificadas, como a resolução de problemas, o uso de tecnologia e a investigação matemática, são caminhos promissores para um ensino eficaz (Santos *et al.*, 2020).

Uma estratégia eficaz é a investigação matemática. Em vez de apresentar fórmulas prontas, os alunos exploram casos particulares e generalizam os resultados a partir de padrões observados. Essa abordagem, que valoriza o erro como parte do processo, fomenta a autonomia intelectual e ajuda os alunos a compreenderem a lógica interna de expressões a partir de experiências concretas (Santos *et al.*, 2020).

O uso de tecnologias digitais também se mostra um aliado importante. Ferramentas como o Photomath, por exemplo, permitem que os alunos analisem o passo a passo de resoluções, o que pode ser usado para identificar padrões de erro e promover reflexões metacognitivas. Essa abordagem amplia os ambientes de aprendizagem e estimula a autonomia do aluno (Almeida, Grosskopf e Motta, 2023).

Outro caminho relevante é o uso de estratégias visuais e manipulativas. Representações geométricas, como diagramas de área, ajudam a ilustrar a origem dos termos algébricos. Ao representar geometricamente o quadrado de uma soma, por exemplo, os alunos podem visualizar as quatro partes correspondentes, tornando a expressão abstrata tangível. Essa estratégia é útil para alunos com estilos de aprendizagem mais visuais (Segura, 2022).

A resolução de problemas contextualizados também promove o engajamento e estabelece conexões com outros conteúdos, como geometria ou funções. A diversidade de abordagens contribui para a equidade na aprendizagem da álgebra, pois atende a diferentes necessidades e ritmos de aprendizado (Pereira *et al.*, 2024).

A mediação pedagógica do professor é fundamental. O docente deve criar situações que provoquem questionamentos e orientem a investigação, atuando como um facilitador da aprendizagem. Isso requer escuta atenta e adaptação das estratégias às necessidades da turma (Segura, 2022). A articulação entre diferentes representações (algébrica, geométrica, numérica e verbal) também fortalece a compreensão e a flexibilidade cognitiva dos alunos (Pereira *et al.*, 2024).

A progressividade da aprendizagem deve ser considerada. No ensino fundamental, a ênfase é na exploração dos padrões, enquanto no ensino médio, o foco pode ser a formalização, a fatoração e a simplificação. Essa continuidade permite consolidar conhecimentos e expandir suas aplicações (Santos *et al.*, 2020). A valorização dos erros como ferramenta de ensino também é crucial, pois a análise coletiva dos equívocos pode reestruturar o pensamento do aluno, desde que o ambiente de aprendizagem seja acolhedor (Almeida, Grosskopf e Motta, 2023).

Deste modo, o ensino de produtos notáveis deve ser orientado por estratégias que promovam a compreensão estrutural, a autonomia e a articulação entre diferentes linguagens matemáticas. A investigação, as tecnologias, as visualizações e a resolução de problemas, quando integradas, tornam a álgebra mais significativa e acessível, transformando-a em um instrumento para o desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio matemático dos alunos (Santos *et al.*, 2020; Almeida *et al.*, 2023).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo não se limitou a uma simples investigação sobre o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal. Ele se tornou um processo para compreender como conceitos matemáticos, muitas vezes vistos como abstratos, podem ser resgatados e transformados em ferramentas pedagógicas estimulantes. A pesquisa revelou que a história de ambos os conceitos, suas propriedades e sua capacidade de revelar padrões são elementos que podem contribuir para o aprimoramento do ensino de álgebra e combinatória no Ensino Básico.

A progressão dos capítulos foi pensada para conduzir o leitor nessa jornada. O Capítulo 2 propôs uma visão da matemática como uma narrativa humana e multicultural, mostrando que o triângulo e a expansão binomial eram, inicialmente, ferramentas práticas e visuais, situando o desenvolvimento histórico desses conceitos.

Em seguida, o Capítulo 3 focou na aplicação pedagógica e na formação docente. Ao propor atividades exploratórias e refletir sobre a superação de práticas mecanicistas, a dissertação oferece um guia prático para uma abordagem investigativa. A ênfase na curricularização da extensão reforça a crença de que o ensino superior tem a responsabilidade de dialogar com o Ensino Básico. A pesquisa aponta para a necessidade de um professor mediador, capaz de traduzir o formalismo em uma linguagem acessível e instigante para os alunos.

Por sua vez, o Capítulo 4 deu o alicerce teórico e formal, aprofundando-se nas regularidades numéricas, simetrias, somatórios e no formalismo matemático desses conceitos. Isso reforça a tese de que a contextualização e a visualização são fundamentais para que o aprendizado se torne significativo, conectando a teoria à sua aplicação potencial.

Deste modo, a maior contribuição desta pesquisa é a proposição de um modelo pedagógico integrado. Um modelo que usa a história da matemática como base que dá sentido ao formalismo, permitindo que o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal sejam ensinados de forma contextualizada e aplicada. Espera-se que este estudo sirva não apenas como um ponto de chegada, mas como um ponto de partida para educadores que buscam novas maneiras de inspirar seus alunos, transformando a álgebra em um campo de descobertas e não em um conjunto de regras a serem seguidas.

Para pesquisas futuras, seria valioso ver as estratégias de ensino aqui propostas sendo aplicadas em sala de aula, com estudos de caso que possam mensurar seu impacto real na compreensão conceitual e na motivação dos discentes. Além disso, a exploração mais aprofundada da relação do Triângulo de Pascal com a teoria dos números e os sistemas binários, bem como sua aplicabilidade em áreas como ciência de dados e biologia molecular, pode expandir ainda mais sua relevância, preparando os alunos para os desafios de um mundo que exige, cada vez mais, o pensamento interdisciplinar.

REFERÊNCIAS

ALIU, A.; REXHEPI, S.; ISENI, E. Efficiency of understanding some mathematical problems by means of Pascal's Triangle. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 18, n. 4, 2023. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1408819.pdf. Acesso em: 10 jan. 2025.

ALMEIDA, S. R. M. de; GROSSKOPF, A. L.; MOTTA, M. S. Possíveis contribuições do aplicativo Photomath na análise de erros no estudo sobre produtos notáveis. **EaD em Foco**, v. 13, n. 1, p. e2009-e2009, 2023. Disponível em: https://eademfoco.cecierj.edu.br/index.php/Revista/article/download/2009/820. Acesso em: 24 fev. 2025.

ÁLVAREZ, J. A. M. *et al.* The design of tasks that address applications to teaching secondary mathematics for use in undergraduate mathematics courses. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 60, p. 100814, 2020. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S073231232030078X. Acesso em: 08 mar. 2025.

BEIU, V. *et al.* On a surface associated with Pascal’s triangle. **Symmetry**, v. 14, n. 2, p. 411, 2022. Disponível em: https://www.mdpi.com/2073-8994/14/2/411. Acesso em: 15 jan. 2025.

BUSTAMANTE, J. Definición de la derivada de orden fraccionario a partir del binomio de Newton. **Matemática**, v. 2, n. 2, 2020. Disponível em: https://www.revistas.espol.edu.ec/index.php/matematica/article/download/728/622. Acesso em: 06 fev. 2025.

CAMERON, N.; NKWANTA, A. Riordan matrices and lattice path enumeration. **Notices of the American Mathematical Society**, v. 70, p. 231-242, 2023. Disponível em: https://www.ams.org/journals/notices/202302/rnoti-p231.pdf. Acesso em: 22 fev. 2025.

CAMPOS, S. S. **Desbravando π e o número de Euler:** do simples ao complexo da matemática. 2023. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/43434. Acesso em: 18 mar. 2025.

CARDOSO, V. B. **Técnicas (não) usuais de resolução de problemas:** paridade, argumentos combinatórios, contagens duplas, invariância e colorimentos. 2024. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – UFRN, Natal, 2024. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/60565. Acesso em: 27 jan. 2025.

CHATTERJEE, R. Fundamental concepts of history of mathematics. **Research Review International Journal of Multidisciplinary**, v. 6, n. 7, p. 43-59, 2021. Disponível em: https://old.rrjournals.com/wp-content/uploads/2021/07/43-59_RRIJM20210607008.pdf. Acesso em: 05 mar. 2025.

CORDEIRO, L. A. **História da matemática**. São Paulo: Editora Senac, 2024. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=RzwDEQAAQBAJ. Acesso em: 08 fev. 2025.

CORDEIRO, L. A. **Tópicos de matemática.** São Paulo: Editora Senac, 2024. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=lPoiEQAAQBAJ. Acesso em: 19 fev. 2025.

CORREIA, N. D. da S.; SANTOS, V. de O. Problemas aritméticos e algébricos em livros didáticos do ensino médio: possíveis abordagens geométricas. **Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA)**, v. 6, n. 2, p. 305-322, 2021. Disponível em: https://ojs.ifsp.edu.br/hipatia/article/download/1818/1369. Acesso em: 28 jan. 2025.

COSTA, J. G. da; HUANCA, R. R. H. Explorando a álgebra na Ensino Básicoatravés da resolução de problemas e tecnologias digitais: reflexões a partir de um problema no curso de fundamentos de álgebra. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 1, n. 25, 2024. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/download/3873/2617. Acesso em: 03 mar. 2025.

COX, D. A. **Applications of polynomial systems.** Providence: American Mathematical Society, 2020. Disponível em: https://par.nsf.gov/servlets/purl/10220108. Acesso em: 01 mar. 2025.

DANTE, L. R. **Estudo de padrões na matemática e a BNCC de bolso:** reflexões para a prática em sala de aula. São Paulo: Arco 43, 2023. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=AmLWEAAAQBAJ. Acesso em: 10 fev. 2025.

DATTOLI, G. A note on low factorial based polynomials. In: **ISSBG 2022 – 1st International Symposium on Square Bamboos and the Geometree.** Athena Publishing, 2023. p. 85-94. Disponível em: https://www.athena-publishing.com/series/atmps/issbg-22/articles/270/view. Acesso em: 07 mar. 2025.

DIAS, R. M. da C.; BRANDEMBERG, J. C.; MESSIAS, M. A. V. F. O formalismo e a axiomatização no desenvolvimento histórico e epistemológico da álgebra linear. **Revista Areté – Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, v. 17, n. 31, p. e22007-e22007, 2024. Disponível em: https://periodicos.uea.edu.br/index.php/arete/article/download/3944/2078. Acesso em: 26 jan. 2025.

FILHO, I. O. H.; CRUZ, M. P. M. da**. Geogebra:** soluções e práticas na geometria analítica. Curitiba: Editora Appris, 2021. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=BZIqEAAAQBAJ. Acesso em: 21 jan. 2025.

FREITAS, M. C. de; FREITAS, B. M. de; ALMEIDA, D. M. Residência pedagógica e sua contribuição na formação docente. **Ensino em Perspectivas**, v. 1, n. 2, p. 1-12, 2020. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/ensinoemperspectivas/article/download/4540/5196. Acesso em: 05 mar. 2025.

GALIZA, L. dos S.; SILVA, J. G.; SILVA, M. A. A. As contribuições do PIBID para a formação continuada dos professores da Educação Básica: algumas reflexões dos professores supervisores. **Kiri-Kerê – Pesquisa em Ensino**, v. 1, n. 5, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufes.br/kirikere/article/download/32534/22145. Acesso em: 11 fev. 2025.

GALVÃO, Á. T.; CHAGAS, J. Q. Somatórios: onde e como são abordados? **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 11, n. 24, p. 395-420, 2022. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/download/6715/4786. Acesso em: 15 mar. 2025.

GARCÍA-GARCÍA, J. I. *et al.* The binomial distribution: historical origin and evolution of its problem situations. **Mathematics**, v. 10, n. 15, p. 2680, 2022. Disponível em: https://www.mdpi.com/2227-7390/10/15/2680. Acesso em: 17 fev. 2025.

GATTI, B. A. Perspectivas da formação de professores para o magistério na educação básica: a relação teoria e prática e o lugar das práticas. **Revista da FAEEBA: Educação e Contemporaneidade**, v. 29, n. 57, p. 15-28, 2020. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/scielo.php?pid=S0104-70432020000100015&script=sci_arttext. Acesso em: 25 jan. 2025.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

GOMES, M. L. M.; PAIVA, P. H. A. A. de. Matemática e Educação Matemática: disputas em um curso de Licenciatura. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 38, p. e230246, 2024. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/XWsYbjfGmfPxK3T98HL6z7y/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 05 mar. 2025.

HIDALGO, J. M.; QUEIROZ, D. de M.; ANSELMO, D. H. A. L. O "Princípio de Pascal" nos livros do PNLD 2018: uma análise crítica multicontextual (histórica e conceitual). **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 43, p. e20210064, 2021. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/Xvvsv5LHkhBgmvz5PNMHy5H/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 13 jan. 2025.

HOPKINS, B. **Hands-On Combinatorics:** Building Colorful Trains to Manifest Pascal's Triangle, Fibonacci Numbers, and Much More. Providence: American Mathematical Society, 2025. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=WF9MEQAAQBAJ. Acesso em: 12 jan. 2025.

IO, L. E. **Transformações de produtos notáveis em livros didáticos brasileiros do século XX.** 2023. 136 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – UNIOESTE, Cascavel, 2023. Disponível em: http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/. Acesso em: 14 mar. 2025.

ISLAM, M. S. *et al.* Binomial coefficients in a row of Pascal's Triangle from extension of power of eleven: Newton's unfinished work. **arXiv preprint**, arXiv:2005.14490, 2020. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/2005.14490. Acesso em: 01 fev. 2025.

ISLAM, M. S. *et al.* Generating binomial coefficients in a row of Pascal's Triangle from extensions of powers of eleven. **Heliyon**, v. 8, n. 11, 2022. Disponível em: https://scholar.google.com.br/scholar?output=instlink&q=info:R487nSTdSyYJ. Acesso em: 12 mar. 2025.

KEÇECI, M. The Keçeci Binomial Square: a reinterpretation of the standard binomial expansion and its potential applications. **Zenodo**, v. 10, 2025. Disponível em: https://www.academia.edu/download/122808254/The_Kececi_Binomial_Square_A_Reinterpretation_of_the_Standard_Binomial_Expansion_and_Its_Potential_Applications.pdf. Acesso em: 25 jan. 2025.

KUHN, M. C.; LIMA, E. de. Álgebra nos anos finais do ensino fundamental: reflexões a partir dos PCN e da BNCC para construção do pensamento algébrico significativo. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1-23, 2021. Disponível em: http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/509/5092220010/html/. Acesso em: 21 mar. 2025.

LEAL, D.; FONSECA, L. F. G. **Triângulos não semelhantes de lados inteiros e perímetro.** São Paulo: Editora Dialética, 2024. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=kskZEQAAQBAJ. Acesso em: 06 fev. 2025.

LI, J. *et al.* Comparative study on binomial distribution content in high school textbooks. In**: Comparative Studies and Beyond. Singapore:** World Scientific, 2021. p. 107-136. Disponível em: https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9753#page=130. Acesso em: 27 fev. 2025.

LIMA, C. G. G. L**. Técnicas de contagem: do princípio fundamental da contagem às funções geradoras.** 2021. 112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: http://www.bdtd.uerj.br/handle/1/19455. Acesso em: 09 mar. 2025.

LINARES, J. L.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Congruências numéricas: cinco problemas resolvidos propostos para olimpíadas internacionais de matemática. **CQD – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, p. 1-15, 2023. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/download/379/388. Acesso em: 25 jan. 2025.

LIU, X. Symmetry. In: **Mathematics in Programming. Singapore:** Springer Nature Singapore, 2024. p. 57-130. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-97-2432-1_3. Acesso em: 05 mar. 2025.

LOPES, M. S.; CARNEIRO, R. S. Triângulo de Pascal: breve história e uma proposta didática para o ensino. **Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco**, v. 7, n. 1, p. 75-97, 2020. Disponível em: https://seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/download/49913/29021. Acesso em: 13 jan. 2025.

LUCA, B.; OLIVEIRA, V. F. de. Obtenção dos elementos do Triângulo de Pascal por uma nova relação de recursividade. **Revista Ciência e Natura**, v. 46, 2024. Disponível em: https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&profile=ehost&scope=site&authtype=crawler&jrnl=01008307&AN=183671642. Acesso em: 12 jan. 2025.

MASSA-ESTEVE, M. R. *et al.* The use of original sources in the classroom for learning mathematics. **History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 9th European Summer University**, p. 48-72, 2023. Disponível em: https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF23008.pdf. Acesso em: 28 jan. 2025.

MATHONET, P. *et al.* On digital sequences associated with Pascal’s triangle. **Aequationes Mathematicae**, v. 97, n. 2, p. 391-423, 2023. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/2201.06636. Acesso em: 26 mar. 2025.

MERSIN, N.; DURMUS, S. Analysis of the change in the awareness of primary school pre-service mathematics teachers on famous mathematicians. **Online Submission**, v. 7, n. 10, p. 13-38, 2020. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED607508.pdf. Acesso em: 22 jan. 2025.

MORAES, C. A. do P.; MARTINS, F. F. Narrativas autobiográficas de um professor de matemática: contribuições para aprender e praticar o ensino de matemática na educação básica. **Comunicações**, v. 31, n. 31, p. 197-232, 2024. Disponível em: https://revistas.metodista.br/index.php/comunicacoes/article/download/1555/1424. Acesso em: 23 fev. 2025.

MORAES, S. O. **Ensino da álgebra:** uma proposta de ensino dos conceitos de variável e incógnita baseado no movimento lógico-histórico da álgebra. 2021. 67 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual de Goiás, Anápolis, 2021. Disponível em: https://repositorio.ueg.br/jspui/handle/riueg/791. Acesso em: 06 jan. 2025.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. A formação matemática do professor da Educação Básica: das concepções historicamente dominantes às possibilidades alternativas atuais. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-30, 2021. Disponível em: https://trilhasdahistoria.ufms.br/index.php/pedmat/article/download/13262/9354. Acesso em: 07 jan. 2025.

MORETTI, A. Tri-simplicial contradiction: the “Pascalian 3D Simplex” for the oppositional tri-segment. In: **The Exoteric Square of Opposition:** The Sixth World Congress on the Square of Opposition. Cham: Springer International Publishing, 2022. p. 347-479. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-90823-2_16. Acesso em: 25 jan. 2025.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidades. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NASCIMENTO, R. P. do. **Aplicações do triângulo aritmético para o ensino fundamental nos anos finais.** 2020. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/216459. Acesso em: 05 mar. 2025.

NOBLE, E. A history of the binomial and multinomial theorems. In: **The rise and fall of the German combinatorial analysis**. Cham: Springer International Publishing, 2022. p. 17-66. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-93820-8_2. Acesso em: 17 mar. 2025.

PAZ, V. A. da S.; ARAKAWA, V. A. T. Dominó e o triângulo aritmético: uma abordagem lúdica para o ensino médio. **Brazilian Journal of Development**, v. 11, n. 6, p. e80310-e80310, 2025. Disponível em: https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/download/80310/55292. Acesso em: 12 jan. 2025.

PEREIRA, E. G. *et al.* Metodologias diversificadas e equidade no ensino da álgebra: uma análise do impacto no pensamento algébrico. **Cuadernos de Educación y Desarrollo**, v. 16, n. 10, p. e5835-e5835, 2024. Disponível em: https://cuadernoseducacion.com/ojs/index.php/ced/article/download/5835/4224. Acesso em: 28 jan. 2025.

PEREIRA, P. S. *et al.* A prática como componente curricular e seus desdobramentos na formação inicial de professores de matemática a partir da Resolução CNE/CP 02/2015. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 6, n. 3, p. 41-60, 2021. Disponível em: https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/download/15803/12314. Acesso em: 26 mar. 2025.

PINHEIRO, A. D.; SÁ, P. F. de. Equação do primeiro grau: aspectos históricos. **Anais do Seminário Nacional de História da Matemática**, v. 15, 2023. Disponível em: http://snhm.com.br/anais/article/download/52/46. Acesso em: 09 mar. 2025.

ROJAS, R. **The language of mathematics:** the stories behind the symbols. Princeton: Princeton University Press, 2025. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=G7QVEQAAQBAJ. Acesso em: 22 jan. 2025.

ROSENBERG, A.; TRYSTRAM, D. **Understand mathematics, understand computing.** Cham: Springer International Publishing, 2020. Disponível em: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-030-58376-7.pdf. Acesso em: 23 fev. 2025.

SAI, L. H. **Expressões algébricas e genética:** uma troca de olhares. 2022. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-31082020-182242/publico/LuizHenriqueSai_revisada.pdf. Acesso em: 06 jan. 2025.

SANTOS, F. M. T. *et al.* O estudo de produtos notáveis através da investigação matemática. **Matemática e Ciência: construção, conhecimento e criatividade**, v. 3, n. 1, p. 101-120, 2020. Disponível em: https://periodicos.pucminas.br/matematicaeciencia/article/download/24674/17215. Acesso em: 07 jan. 2025.

SANTOS, M. de C.; LUCHETTA, V. O. J. O desenvolvimento da concepção de demonstração no ensino de aritmética e álgebra na educação básica. In: **Anais da Semana da Matemática e Educação Matemática**, v. 3, 2024. Disponível em: https://revista.gru.ifsp.edu.br/semat/article/download/228/124. Acesso em: 12 mar. 2025.

SANTOS, P. M. dos; GOUW, A. M. S. Contribuições da curricularização da extensão na formação de professores. **Interfaces da Educação**, v. 12, n. 34, p. 922-946, 2021. Disponível em: https://www.revformacaodocente.com.br/index.php/rbpfp/article/download/405/278. Acesso em: 24 jan. 2025.

SCREMIN, G.; RIGHI, F. P. Ensino de álgebra no ensino fundamental: uma revisão histórica dos PCN à BNCC. **Ensino em Re-vista**, v. 27, n. 2, p. 409-433, 2020. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/scielo.php?pid=S1983-17302020000200409&script=sci_arttext. Acesso em: 22 jan. 2025.

SEGURA, E. G. Estratégias didáticas no ensino de produtos notáveis e fatoração em telesecundária. **RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo**, v. 12, n. 24, 2022. Disponível em: https://www.scielo.org.mx/pdf/ride/v12n24/2007-7467-ride-12-24-e015.pdf. Acesso em: 27 mar. 2025.

SHUKLA, D. K.; SHARMA, M. **Introductory discrete mathematics.** Delhi: Academic Guru Publishing House, 2024. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=d_ILEQAAQBAJ. Acesso em: 27 mar. 2025.

SILVA, F. A. M. da; GROENWALD, C. L. O. Sequência didática como estratégia de ensino e aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do ensino fundamental. In: **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2024. p. 1-15. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/download/137/246. Acesso em: 18 jan. 2025.

SILVA, J. P. da; MOREIRA, P. C. Formação matemática na licenciatura e demandas da prática docente escolar: o caso da álgebra. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021. Disponível em: https://trilhasdahistoria.ufms.br/index.php/pedmat/article/download/13258/9348/. Acesso em: 19 mar. 2025.

SILVA, L. D. S. da; ELIAN, S. N. Aprendendo as propriedades do Triângulo de Pascal através de atividades dinâmicas. **Anais do JEM**, 2020. Disponível em: https://www.upf.br/_uploads/Conteudo/jem/2020/Anais%202020%20-%20eixo%203/JEM2020_paper_74.pdf. Acesso em: 04 jan. 2025.

SILVA, W. R. da *et al.* **Congruências modulares:** a aplicabilidade da teoria dos números no suporte à resolução de problemas e implementação computacional do teorema chinês dos restos. Curitiba: Editora Impacto Científico, 2025. p. 1-34. Disponível em: https://periodicos.newsciencepubl.com/editoraimpacto/article/download/6003/8557. Acesso em: 10 mar. 2025.

SOARES, E. **Lógica formal:** da lógica aristotélica ao cálculo sentencial bivalente. Maringá: Editora Oficina Universitária, 2023. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=T6K_EAAAQBAJ. Acesso em: 18 fev. 2025.

SOARES, T. P. *et al.* Um estudo sobre produtos notáveis a partir da resolução de problemas no Ensino Fundamental. **Interação**, v. 21, n. 1, p. 337-359, 2021. Disponível em: https://interacao.org/index.php/edicoes/article/download/173/119. Acesso em: 25 jan. 2025.

SOUSA, M. do C. de. História de matemática na formação de professores da educação básica. **Cadernos da Pedagogia**, v. 17, n. 38, 2023. Disponível em: https://cadernosdapedagogia.ufscar.br/index.php/cp/article/download/1994/894. Acesso em: 05 mar. 2025.

TEDESCO, D. G. **Métodos matemáticos para físicos.** Curitiba: Editora Intersaberes, 2023. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=A9gKEQAAQBAJ. Acesso em: 13 jan. 2025.

TILLEMA, E. S.; BURCH, L. J. Using combinatorics problems to support secondary teachers understanding of algebraic structure. **ZDM–Mathematics Education**, v. 54, n. 4, p. 777-793, 2022. Disponível em: https://par.nsf.gov/servlets/purl/10356133. Acesso em: 12 jan. 2025.

TOTH, G. Polynomial expressions. In: **Elements of Mathematics:** A Problem-Centered Approach to History and Foundations. Cham: Springer International Publishing, 2021. p. 263-318. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-75051-0_6. Acesso em: 28 jan. 2025.

TREVISAN, A. C. R. *et al.* **Ensino da matemática:** ressignificando o ensinar e o aprender na educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental. São Paulo: Editora BAGAI, 2020. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=I3wREAAAQBAJ. Acesso em: 26 mar. 2025.

VALADÃO, D. R. **Um estudo sobre a paridade da soma de coeficientes binomiais.** 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2022. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/29226. Acesso em: 22 jan. 2025.

WANG, X. History of mathematics in American mathematical textbooks of the late 19th and early 20th centuries. In: **School Mathematics Textbooks in China: Comparative Studies and Beyond.** Singapore: World Scientific, 2021. p. 501-534. Disponível em: https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814713955_0014. Acesso em: 14 fev. 2025.

WU, H. **Algebra and geometry.** Providence: American Mathematical Society, 2020. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=wrH_DwAAQBAJ. Acesso em: 23 fev. 2025.

YOON, S. Analytic connection between the Fibonacci sequence and diagonal sums of binomial coefficients. **The Fibonacci Quarterly**, v. 59, n. 4, p. 349-361, 2021. Disponível em: https://www.fq.math.ca/Papers/59-4/yoon11092020.pdf. Acesso em: 06 jan. 2025.