UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL PROFMAT

JESSÉ JORGE BARROS ESTUMANO

MATEMÁTICA E MÚSICA: PROPOSTA INTERDISCIPLINAR DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NO 2° ANO DO ENSINO MÉDIO

ABAETETUBA/PA

2025

JESSÉ JORGE BARROS ESTUMANO

MATEMÁTICA E MÚSICA: PROPOSTA INTERDISCIPLINAR DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NO 2° ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da universidade federal do Pará – UFPA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em matemática sob a orientação do professor Dr. Rubenvaldo Monteiro Pereira.

ABAETETUBA/PA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

E79m Estumano, Jesse Jorge Barros.
Matemática e música: proposta interdisciplinar de sequência didática para o ensino-aprendizagem de progressão geométrica no 2° ano do ensino médio / Jesse Jorge Barros Estumano. — 2025.
138 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Rubenvaldo Monteiro Pereira
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2025.

1. Matemática . 2. Música . 3. Ensino médio . 4. Progressão Geométrica. I. Título.

CDD 510.712

JESSÉ JORGE BARROS ESTUMANO

MATEMÁTICA E MÚSICA: PROPOSTA INTERDISCIPLINAR DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NO 2° ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Pará – UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador (a): Prof. Dr. Rubenvaldo Monteiro Pereira

Aprovado em: _____/_____/_______

BANCA EXAMINADORA

____
PROF. DR. RUBENVALDO MONTEIRO PEREIRA
(Orientador– Presidente - UFPA)

____
PROF. DR. JOSÉ RENATO FERREIRA ALVES DA CUNHA
(Examinador Externo – UFPA)

____
PROF. DR. MANUEL DE JESUS DOS SANTOS COSTA
(Examinador Interno – UEPA)

____
PROF. DR. ALEXANDRE DE SOUZA OLIVEIRA
(Examinador Externo – UFRA)

Abaetetuba/PA, 08/2025

Dedico este trabalho à minha querida mãe, Nair Barros Nascimento, cuja sabedoria, amor e incentivo constante foram essenciais para iluminar minha trajetória nos estudos e na vida.

AGRADECIMENTOS

Registro minha mais profunda gratidão ao meu irmão Basílio Henriques, cuja ausência física não diminui a relevância de sua influência em minha trajetória educacional. Seu apoio incondicional e sua inspiração foram determinantes para que eu buscasse constantemente aprimorar-me como ser humano e como profissional. Agradeço também à minha mãe, Nair Barros, por todo o carinho, empenho e princípios que sempre guiaram minha formação. Ao meu pai, Jorge Estumano, que sempre incluiu meu nome em suas orações, oferecendo-me segurança e amparo divino em minha trajetória.

Agradeço ao meu irmão Luiz Vanderlei, que cuidou de mim como um pai, me dando proteção, amor e ensinamentos valiosos que servirão para toda a minha vida.

Agradeço à minha amada esposa, Silvana Garcia, minha companheira incansável, pelo suporte, pela paciência e por me acompanhar em cada passo dessa trajetória. Para que eu chegasse até aqui, sua força e compreensão foram essenciais.

Tenho profunda gratidão pelo meu orientador, Dr. Rubenvaldo Monteiro Pereira, por sua orientação generosa, pelos ensinamentos e pela confiança depositada em meu trabalho. Sua participação foi fundamental para o desenvolvimento deste estudo.

Por último, agradeço a todos os amigos, colegas, professores e colaboradores que estiveram comigo ao longo dessa jornada. Cada palavra encorajadora, cada ato de apoio e cada compartilhamento de conhecimento tiveram um impacto significativo.

Faça o teu melhor, na condição que tem, enquanto você não tem condições melhores, para fazer melhor ainda.

Mário Sérgio Cortella

RESUMO

Este estudo aborda a integração entre matemática e música como estratégia inovadora para o ensino de Progressão Geométrica no Ensino Médio. O objetivo principal foi apresentar e aplicar uma sequência didática interdisciplinar que associasse conceitos matemáticos e musicais, visando promover uma aprendizagem mais significativa, interativa e contextualizada. Especificamente, buscou-se definir o conceito de sequência didática, elaborar e aplicar atividades práticas com elementos musicais, avaliar o desempenho dos estudantes antes e depois da intervenção e analisar suas opiniões sobre o uso da música como recurso didático. A pesquisa foi realizada em uma escola pública do Pará, utilizando abordagem qualitativa. Foram empregados instrumentos como questionários diagnósticos e finais, registros escritos, atividades práticas com instrumentos musicais (teclado, violão, monocórdio de Pitágoras), aplicativos de afinação e recursos multimídia. A sequência didática foi composta por dez aulas, incluindo exposições teóricas e três atividades práticas que relacionaram compassos, frequências sonoras e construção de monocórdios à progressão geométrica. Os resultados indicaram progresso significativo na aprendizagem dos alunos, tanto em conceitos musicais quanto matemáticos, além de aumento do interesse e motivação. A análise dos questionários revelou melhora expressiva no desempenho e opiniões favoráveis à abordagem interdisciplinar. Conclui-se que a integração entre música e matemática favorece a construção de significados, desperta curiosidade e contribui para um ensino mais dinâmico e eficaz, destacando a importância de metodologias ativas e interdisciplinares no contexto escolar.

Palavras-chave: Música; Matemática; Progressão geométrica; Sequência didática.

ABSTRACT

This study addresses the integration between mathematics and music as an innovative strategy for teaching Geometric Progression in High School. The main objective was to present and implement an interdisciplinary didactic sequence that associates mathematical and musical concepts, aiming to promote more meaningful, interactive, and contextualized learning. Specifically, the study sought to define the concept of a didactic sequence, develop and apply practical activities with musical elements, assess students' performance before and after the intervention, and analyze their opinions about the use of music as a didactic resource. The research was conducted in a public school in Pará, using a qualitative approach. Instruments such as diagnostic and final questionnaires, written records, practical activities with musical instruments (keyboard, guitar, Pythagorean monochord), tuning apps, and multimedia resources were employed. The didactic sequence consisted of ten lessons, including theoretical expositions and three practical activities that related musical meters, sound frequencies, and the construction of monochords to geometric progression. The results indicated significant progress in students' learning, both in musical and mathematical concepts, as well as increased interest and motivation. The analysis of the questionnaires revealed a marked improvement in performance and favorable opinions toward the interdisciplinary approach. It is concluded that the integration between music and mathematics favors the construction of meaning, arouses curiosity, and contributes to a more dynamic and effective teaching process, highlighting the importance of active and interdisciplinary methodologies in the school.

Keywords: Music; Mathematics; Geometric progression; Didactic sequence.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática representa um dos maiores desafios enfrentados por educadores em todo o mundo, sobretudo devido às dificuldades recorrentes que os alunos apresentam na compreensão dos conceitos matemáticos. Essas dificuldades podem ser atribuídas a diversos fatores, como a abordagem tradicional e excessivamente procedimental das aulas, a falta de contextualização dos conteúdos e a dificuldade dos estudantes em relacionar a teoria à prática cotidiana. Além disso, a matemática é frequentemente percebida como uma disciplina abstrata e distante da realidade dos alunos, o que contribui para a desmotivação e o desinteresse.

Nesse sentido, a busca por novas metodologias é fundamental para tornar o ensino mais eficaz e atraente. Assim, a sequência didática surge como uma ferramenta valiosa, pois permite que os professores planejem e executem aulas de forma lógica e coerente, garantindo que os alunos adquiram conhecimentos de maneira progressiva e significativa. Além disso, a integração de disciplinas, como a música e a matemática, pode ser uma abordagem inovadora e enriquecedora. Abdounur (2006) destaca que a música pode constituir uma ferramenta relevante para o ensino de matemática, pois contribui para o desenvolvimento de habilidades cognitivas, como memória, atenção e resolução de problemas.

A combinação de música e matemática em sala de aula pode resultar em uma experiência de aprendizado mais holística e estimulante, capaz de despertar a criatividade e o interesse dos estudantes, ajudando a minimizar a visão tradicional dos processos de ensino e aprendizagem que ainda se faz muito presente no contexto escolar. Além disso, a combinação de música e matemática pode levar a uma aprendizagem mais significativa e duradoura, uma vez que possibilita aos estudantes conectar conceitos matemáticos com vivências musicais.

Nesse cenário, aponta-se a relevância desta dissertação, pois seu objeto está inserido em uma área em que se buscam novas estratégias de ensino para desenvolver habilidades no campo da música e no ensino de Matemática. Assim, propõe-se a integração entre Matemática e Música por meio de atividades práticas que associam conceitos das duas áreas, objetivando possibilitar novas formas de interação dos alunos com a matemática e atribuir significado aos conteúdos para mitigar dificuldades de aprendizagem. Sob essa ótica, esta pesquisa apresenta uma sequência didática fundamentada na relação entre música e matemática, analisando sua aplicação no ensino de conceitos básicos de progressão geométrica em uma turma do 2° ano do ensino médio. Além disso, investiga-se as opiniões dos participantes e como tal abordagem pode influenciar fatores como curiosidade, interação, interesse e evolução no desempenho.

Neste sentido, o objetivo geral deste trabalho é apresentar uma sequência didática que integre a relação música e matemática no ensino de Progressão Geométrica, promovendo uma aprendizagem significativa por meio de atividades práticas e interativas. Especificamente, busca-se: definir o conceito de sequência didática; elaborar e aplicar atividades práticas utilizando elementos musicais para o ensino de progressão geométrica; avaliar o desempenho dos estudantes antes e depois da SD; e examinar a opinião dos alunos sobre as atividades desenvolvidas na SD que utilizou elementos da música como recurso didático.

Para atingir seus objetivos, este trabalho foi estruturado em sete capítulos. O primeiro capítulo apresenta a Introdução, abordando o contexto, a relevância, os objetivos e a justificativa do estudo. O segundo capítulo traz uma pesquisa bibliográfica de dissertações publicadas entre 2020 e 2024 sobre matemática e música, destacando conceitos, debates e correntes teóricas que fundamentam o estudo e auxiliam na definição do problema e dos objetivos. Essa pesquisa bibliográfica de dissertações teve como finalidade embasar teoricamente este trabalho, além de ter sido submetida a publicação como capítulo de livro. O terceiro capítulo é dedicado à fundamentação teórica, detalhando as principais correntes teóricas, além dos conceitos musicais e matemáticos que sustentam esta pesquisa.

O quarto capítulo detalha a metodologia, descrevendo o método seguido. O quinto capítulo apresenta a sequência didática SD e a descrição de uma proposta de aplicação para uma turma do Ensino Médio. No sexto estão os resultados, que apresenta o relato da experiência com a sequência didática, detalhando a participação dos alunos, a execução das atividades, os desafios enfrentados e como o professor orientador conduziu os alunos no processo. O sétimo capítulo são as nossas conclusões, em quais se apresentam as principais contribuições da utilização da música como ferramenta no ensino da Matemática, em especifico a progressão Geométrica. Por fim, as referências e os apêndices serão apresentados.

A motivação para abordar o tema surgiu, entre outros fatores, da proximidade que o autor possui com a música e a matemática e as dificuldades encontradas para proporcionar uma aula de matemática mais atrativa e significativa, visto que há uma extensa conexão entre a Matemática e a Música. Ademais, considerando as dificuldades dos alunos em assimilar o conhecimento matemático, tornou-se uma obrigação ética explorar métodos alternativos para potencializar o ensino-aprendizado da Matemática.

2 RELAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA: uma pesquisa bibliográfica de dissertações (2020-2024)

Jessé Jorge Barros Estumano
Reinaldo Feio Lima
Rubenvaldo Monteiro Pereira

2.1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática é um desafio constante para educadores e alunos. A dificuldade em compreender conceitos matemáticos é um problema comum que afeta milhões de estudantes em todo o mundo. De acordo com o relatório do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), de 2022, divulgado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), em 2023, mais de 70% dos alunos brasileiros não atingiram o nível básico de proficiência em matemática. As razões para esse insucesso são multifacetadas: falta de motivação e interesse; dificuldade em relacionar conceitos teóricos à realidade prática (Nunes, 2012); abordagem tradicional e focada em procedimentos (Schoenfeld, 2014).

No entanto, pesquisas têm demonstrado que o uso da música como recurso pedagógico pode ser uma estratégia eficaz para superar esses desafios. “A música pode ser uma ferramenta importante para o ensino de matemática, pois ajuda a desenvolver habilidades cognitivas, como memória, atenção e resolução de problemas” (Abdounur, 2006, p. 78). Segundo Gonçalves e Santos (2019), inter-relacionar conceitos matemáticos com as artes pode ser um caminho favorável, pois essas práticas divergem da abordagem tradicional. Além disso, a combinação de música e matemática pode favorecer um aprendizado mais significativo e duradouro, uma vez que possibilita aos estudantes associar conceitos matemáticos a vivências musicais.

Nessa perspectiva, o objetivo desta pesquisa é mapear dissertações brasileiras no repositório da CAPES que abordem a relação entre a matemática e a música no ensino de matemática. Para tanto, estruturamos este trabalho em quatro seções: Introdução; Procedimentos Metodológicos; Resultados e Considerações Finais.

2.2 DESENVOLVIMENTO

Este é um trabalho que assume as características de uma pesquisa qualitativa e bibliográfica, sobre dissertações brasileiras que fazem relação entre a matemática e a música.

Segundo Fonseca (2002, p. 32), “a pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos e páginas de web sites”.

Assim, partindo dessas ideias, foram levantadas dissertações dos repositórios digitais do catálogo de dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pois ela contém todas, sem exceção, as teses e dissertações brasileiras por ser o local para depósito obrigatório.

No primeiro momento da pesquisa realizada em 27 de setembro de 2024, foram utilizadas as palavras “matemática AND música” no local de busca do site, onde obtivemos 229 resultados; depois realizamos um recorte temporal para trabalhos publicados no período de janeiro de 2020 a agosto de 2024, resultando em 44 trabalhos; e por fim redefinimos estes resultados por Grande Área Conhecimento, marcando CIÊNCIAS HUMANAS e MULTIDISCIPLINAR, e por Área Avaliação, marcando ENSINO, filtrando assim 28 resultados. Em seguida, realizamos a leitura dos títulos, palavras-chave e resumos, sendo identificados 13 trabalhos que estão diretamente relacionados com ensino de matemática e música (Quadro 1).

Quadro 1 - Dissertações selecionadas do Portal da CAPES

ARTIGO	DATA DE DEFESA	AUTOR	TÍTULO DA DISSERTAÇÃO	INSTITUIÇÃO
A1	24/03/2022	Mariana Laís Batista	A unidade afeto-cognição em situações de ensino que envolvam música e matemática para a apropriação do conceito de fração	UTFPR
A2	19/04/2022	Erick Quintino dos Santos	A matemática da música: uma abordagem para o ensino de frações através da teoria musical	UFSCar
A3	28/09/2022	Amanda Couto da costa	Ensinando fração a partir da construção de instrumentos musicais	UFU
A4	27/03/2020	Fernando Luiz Andretti	Matemática e música: uma proposta de ensino para os anos iniciais do ensino fundamental	Unioeste
A5	01/08/2022	Delson Roberdo	A inserção da música nos anos iniciais do ensino fundamental e sua contribuição para a aprendizagem da matemática	UEMS
A6	23/10/2023	Cristiane Pacheco Pires Silva	A construção do número na educação infantil a partir de atividades lúdicas: a música e o jogo	UCS
A7	18/12/2020	Renato Alves de Carvalho	O resgate de elementos da *paideia* grega como orientação no uso da história da matemática e da música na sala de aula	UFOP
A8	19/02/2021	Adão Jose Martins	A matemática e a música: o ensino e a aprendizagem da matemática no ensino médio integrado por meio de paródias	IFMA
A9	05/12/2022	Norberto Barros Lemos	Frações musicais: um estudo exploratório com normalistas	UFPel
A10	30/06/2022	Ezequiel Ribeiro Rocha	Diferentes sons e tons em aulas de matemática: um estudo sobre frações	UFSCar
A11	30/10/2020	Bianca Alves Pereira	Conexões entre matemática e música em produções científicas: uma rede de possibilidades para o ensino fundamental e médio	UNIFESP
A12	22/04/2020	Roberto Lister Gomes Maia	Uma sequência didática para o ensino de progressão geométrica por meio de elementos da teoria musical	Unopar
A13	20/10/2020	Taize Cardoso de Sousa	A integração de aplicativos computacionais na construção de partituras musicais para potencializar o ensino e a aprendizagem de expressões algébricas no ensino fundamental	UESC

Fonte: Elaborado pelos Autores (2024).

Após, a seleção e leitura integral dos trabalhos encontrados, realizamos a análise destes com o intuito de identificar e compreender a relação entre matemática e música, para aplicar no ensino de conteúdos de Matemática na Educação Básica.

De acordo com Petticrew e Roberts (2006), é essencial que as pesquisas que seguem o protocolo sejam analisadas em relação à sua base teórica e metodológica, um procedimento que ajuda a revelar vieses significativos na interpretação dos dados. Ao adotar uma visão abrangente das investigações, organizamos quatro unidades de análise: objetivo, fundamentação teórica, metodologia aplicada e resultados obtidos (Quadro 2).

Quadro 2 - Dissertações selecionadas da CAPES

A1 - A unidade afeto-cognição em situações de ensino que envolvam música e matemática para a apropriação do conceito de fração	
Objetivo	Investigar a motivação dos estudantes na unidade afeto-cognição em situações de ensino que envolvam elementos da música para a apropriação do conceito de fração.
Referencial teórico	Embasou-se teoricamente na fonte da teoria histórico-cultural, no conceito de atividade (Leontiev, 1988) e na Atividade Orientadora de Ensino (Moura, 1996).
Metodologia utilizada	Para captação dos dados na pesquisa, foram adotados os seguintes instrumentos: diário de bordo, registro escrito e de áudio e roda de conversa.
Resultados	O autor destaca que se faz necessário pensar na organização do ensino por meio de situações de ensino que apontem para a motivação dos estudantes, podendo relacionar as ciências Música e Matemática e gerar atividade de aprendizagem, com ênfase nas construções histórico-culturais dos conceitos, nas necessidades e motivos e na intencionalidade pedagógica. Enfatiza, também, a importância de novas pesquisas envolvendo o desenvolvimento humano, pelo olhar da Psicologia Histórico-Cultural e as relações da motivação na unidade afeto-cognição, em situações de ensino que envolvam música e conceitos matemáticos. A pesquisa permite: relacionar ciências (música, matemática e psicologia); viabilizar formas e olhares ampliados para o ensino, desenvolvimento humano e arte; atender ao fim maior da educação – formar cidadãos engajados e críticos que atuem diretamente na sociedade.
A2 - A matemática da música: uma abordagem para o ensino de frações através da teoria musical	
Objetivo	Introduzir conceitos sobre frações pela perspectiva da relação entre razões, de modo a complementar e aprofundar conceitos sobre o tema, combinados à forma tradicional de apresentação prevista nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental II, através de práticas relacionadas à música e ao estudo da escala musical utilizando-se de novas perspectivas e metodologias que forneçam estruturas cognitivas e socioemocionais para o ensino da matemática de maneira consistente e significativa.
Referencial teórico	Suporte teórico: conceitos do Pensamento Analógico, de Abdounur (2006).
Metodologia utilizada	Este estudo apresenta uma proposta pautada na aplicação de metodologias inovadoras através de sequências didáticas para o ensino de Matemática, para alunos do Ensino Fundamental II.
Resultados	De acordo com o autor, os conceitos expostos que relacionam a matemática à música são essenciais para motivar os estudantes a ver a matemática como um componente do seu dia a dia e um recurso para elucidar diversos fenômenos. Além disso, demonstram que sua utilidade vai além dos conceitos

	fundamentais, sendo responsável pela existência de grande parte das tecnologias utilizadas por eles. A teoria musical engloba vários conceitos matemáticos, desde os mais básicos, como operações e aritmética básica, até os mais sofisticados, como cálculo diferencial e integral, Análise e Teoria dos Números. Isso abre uma variedade de oportunidades para professores e estudantes, independentemente do nível educacional. O desafio reside em entender a relevância da matemática para a humanidade e o seu uso em detrimento do conhecimento. Este é o conceito fundamental e, consequentemente, uma rota interessante que permite entender a posição da matemática na sociedade. A exploração da interdisciplinaridade e o uso da ciência como base de conhecimentos matemáticos auxiliam de maneira eficaz no processo de ensino e aprendizado da matemática na Educação Básica. No entanto, este estudo mostra que o assunto atrai a atenção de docentes e discentes, auxiliando na expansão do número de pesquisas e, por conseguinte, no aprofundamento deste assunto, além de fomentar debates sobre as teorias matemáticas aplicadas à teoria musical.
A3 - Ensinando fração a partir da construção de instrumentos musicais	
Objetivo	Analisar quais os conhecimentos sobre fração que dois alunos do 8º ano do Ensino Fundamental apresentam durante a construção de instrumentos musicais.
Referencial teórico	Fundamenta-se nas ideias de Marco (2004), acerca de resolução de problemas, e outros teóricos como: Polya (1997), Saviani (2000), Allevato (2005), Stanic e Kilpatrick (1989) e Moura (2004).
Metodologia utilizada	O trabalho constitui o desenvolvimento de uma proposta baseada na resolução de problemas, por meio de uma história em quadrinhos, a partir da construção dos seguintes instrumentos musicais: ganzá, pífano, pau de chuva e flauta de pan. Mediante o contexto da pandemia, vivido nos anos 2020 e 2021, a proposta foi realizada de forma presencial, com dois alunos convidados pela pesquisadora.
Resultados	Ficou evidente que os estudantes precisavam revisar seus conhecimentos sobre fração. Com a proposta observada, foi possível abordar o significado de fração como medida e divisão, além de promover um diálogo sobre a representação da fração como número decimal e porcentagem. A partir deste estudo, foi criada uma unidade didática com propostas que visavam explorar o conceito de fração através da construção de instrumentos musicais e alguns princípios fundamentais da música. Espera-se que este estudo possa motivar outros docentes a procurar métodos de ensino que promovam a redescoberta dos componentes fundamentais da fração. No âmbito da docência, espera-se auxiliar o educador a explorar a proposta apresentada neste trabalho em sala de aula, além de proporcionar situações que destaquem os principais significados da fração apresentados neste estudo. Adicionalmente, busca-se estimular o surgimento de mais propostas focadas na música e nas frações.
A4 - Matemática e música: uma proposta de ensino para os anos iniciais do ensino fundamental	
Objetivo	Levar a musicalidade às salas de aula, bem como oferecer suporte ao ensino por meio de paródias compostas a partir de temas geradores e de conteúdos matemáticos.
Referencial teórico	Embasou-se em estudiosos da literatura, como, por exemplo: Abdounur (2002), Mara (2013), Godoi (2011), Lima (2013), entre outros.
Metodologia utilizada	A pesquisa foi dividida em duas etapas, sendo a primeira uma revisão bibliográfica e a segunda com caráter de pesquisa-ação, efetivada durante o curso proposto aos professores.
Resultados	O autor destaca que um importante saldo foram as 36 (trinta e seis) paródias produzidas pelos professores que participaram da formação continuada, com carga horária de 40 (quarenta) horas, e que compõem um produto educacional

	voltado para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, vários professores tiveram contato com o mundo das paródias, abrindo, assim, um leque de novas possibilidades de ensinar, introduzir ou consolidar algum conteúdo matemático proposto. Portanto, conclui-se este estudo com a convicção de que Matemática e Música são complementares, e que é possível desenvolver metodologias diferenciadas para o ensino e aprendizado de ambas, permitindo que os estudantes absorvam conhecimentos e utilizem-nos para simplificar suas vidas.
A5 – A inserção da música nos anos iniciais do ensino fundamental e sua contribuição para a aprendizagem da matemática	
Objetivo	Investigar as possibilidades e os desafios da introdução da música na escola, em especial no contexto das aulas de matemática, tendo como referência os conteúdos das frações no quinto ano do Ensino Fundamental.
Referencial teórico	Embasou-se na teoria histórico-cultural, em especial nos trabalhos de Vygotsky (1896-1934), nos fundamentos para a investigação.
Metodologia utilizada	Os dados foram levantados por meio da aplicação de uma sequencia didática elaborada a partir da perspectiva histórico-cultural, em especial os estudos de Vygotsky, e seguiram os fundamentos da pesquisa intervenção.
Resultados	Os achados indicaram que a combinação de música e matemática é uma opção atraente para o aprendizado de ambas as linguagens e uma tática eficiente para introduzir a música no ambiente escolar, permitindo às crianças a apropriação de seus símbolos e o subsequente avanço de vários conteúdos, sejam eles de caráter conceitual, procedimental ou atitudinal. Ademais, os resultados mostram que a forma de organização do trabalho didático atual apresenta desafios a precisam serem transpostos, seja na inserção da linguagem musical nas escolas, seja na realização de propostas com metodologias diferenciadas.
A6 - A construção do número na educação infantil a partir de atividades lúdicas: a música e o jogo	
Objetivo	Investigar o potencial de atividades lúdicas, construídas a partir de músicas infantis, para promover aprendizagem de números, contagem e quantidades no ensino da matemática na Educação Infantil.
Referencial teórico	Fundamentada na Epistemologia Genética, de Jean Piaget, esta investigação buscou, em estudos bibliográficos e observação em campo, subsídios que pudessem alcançar o referido objetivo.
Metodologia utilizada	O procedimento utilizado foi a intervenção pedagógica e os dados captados através da produção documental (o planejamento das atividades a serem realizadas e seus objetivos), comunicação oral com os estudantes, anotações das observações da participação dos estudantes ao que foi proposto, registros através de fotos, autoavaliação realizada de forma oral com as crianças e elaboração de uma tabela com os objetivos propostos pela BNCC, para avaliar o desenvolvimento do aluno dentro dos objetivos propostos pela Base.
Resultados	Segundo o autor, a música conecta as pessoas e possibilita a realização de trocas por meio dela. Cada vez que alguém interpreta uma música com base nos sentimentos que ela provoca, ela cria seu próprio significado para ela. No entanto, quando permite que outra pessoa compartilhe sua perspectiva sobre a mesma música, essas informações modificam sua maneira de sentir e pensar sobre aquela música. Ao dialogarem sobre as músicas e as atividades realizadas, as crianças realizavam trocas, permitindo que o outro também participasse na construção do seu próprio saber. Assim, observou-se que a criança pode aprender de maneira significativa ao realizar atividades lúdicas que envolvem interação, pensamento, reflexão e raciocínio. A música atua como um recurso de integração e mediação, auxiliando na formação de memórias duradouras, permitindo que a criança utilize essas recordações para resolver novos desafios que envolvam conhecimentos já adquiridos.

A7 - O resgate de elementos da *paideia* grega como orientação no uso da história da matemática e da música na sala de aula	
Objetivo	Investigar se seria possível recuperar elementos do modelo clássico na escola atual, usando a história da matemática e da música como fio condutor de atividades em que se trabalha o conceito de número racional.
Referencial teórico	Tomou-se, dentre outros, como suportes teóricos: Granja (2006), Miorim (1998), Antonio Miguel (1997), Miguel e Miorim (2011).
Metodologia utilizada	Baseou-se em uma pesquisa qualitativa, formulando atividades que explorassem toda a riqueza da abordagem clássica, que envolve percepções sensoriais, atividades corporais e reflexão a respeito da estrutura da música, trabalhando com razões e medidas numa sala de aula.
Resultados	As conclusões obtidas indicam que a recuperação da *paideia* é viável, embora com grandes restrições que são componentes fundamentais do atual modelo de educação. As amarras da escola tradicional são parte da realidade educacional moderna e simplesmente concluir que a recuperação da *paideia* só é possível se reestruturar todo o modelo escolar parece muito trivial e que não vai de encontro à questão de investigação. Chegou-se à conclusão de que esse resgate de componentes da *paideia* deve ser realizado sem negligenciar a visão holística que os gregos almejavam introduzir no processo de educação. É possível separar certos elementos, como a educação sensorial e corporal, porém não se enquadra na perspectiva pedagógica tradicional. O uso da história da matemática para abordar os elementos matemáticos da música desempenha um papel pedagógico significativo, mas isso não define a concepção educativa da *paideia*. Esse resgate poderia acontecer se a perspectiva clássica pudesse dar organicidade ao processo educativo como um todo, desde o currículo até os ambientes de ensino. Na configuração atual do sistema educacional, isso poderia acontecer em um projeto pedagógico, até mesmo em uma única instituição de ensino, direcionado para fomentar uma educação completa que valorize não somente a natureza lógica e conceitual das matérias.
A8 - A matemática e a música: o ensino e a aprendizagem da matemática no ensino médio integrado por meio de paródias	
Objetivo	Investigar as potencialidades de a música, por meio da elaboração de paródias, contribuir para o ensino-aprendizagem da matemática.
Referencial teórico	Tomou, dentre outros, como suporte teórico: Azevedo (2019), Berti (2007), Ferreira (2010), Amato (2006), Luna; Eno; Caminha; Lima (2016), Camargos (2010), Campos (2009), Ferreira (2015).
Metodologia utilizada	Utilizou a abordagem quali-quantitativa, a fim de analisar as percepções por parte dos alunos e as possíveis contribuições que a paródia/música pode trazer para dinamizar e gerar interação na aprendizagem de conteúdos matemáticos.
Resultados	De acordo com o autor, a paródia, quando empregada adequadamente e com metas claras e estabelecidas, é uma opção metodológica eficaz, viável e capaz de proporcionar significativas melhorias no processo de ensino-aprendizagem de matemática. Uma das vantagens do uso da paródia é a interação e socialização entre os alunos, além de promover um aprendizado natural dos conteúdos, pois são revisados várias vezes durante a criação das paródias. Ademais, ao empregar paródias, concretizamos uma ideia amplamente defendida por educadores para o processo de ensino e aprendizado de ciências: a interdisciplinaridade. Isso se dá quando unimos matemática e música através da criação e aplicação de paródias, por exemplo.
A9 - Frações musicais: um estudo exploratório com normalistas	
Objetivo	Investigar as relações entre divisão rítmica musical e operações básicas de frações: adição de frações, subtração de frações, multiplicação de frações e divisão de frações, com atividades que relacionam conceitos matemáticos e musicais, com alunas do Curso Normal, de uma turma de primeiro e segundo

	ano do Instituto Estadual de Educação Assis Brasil, situado na cidade de Pelotas.
Referencial teórico	Baseou-se em conceitos do Pensamento Analógico, de Abdounur (2006).
Metodologia utilizada	Embasamento qualitativo na pesquisa, visando aos resultados obtidos em oficinas quanto ao processo de classificação dos resultados.
Resultados	As oficinas permitiram observar que a conexão entre os conceitos matemáticos e musicais discutidos facilita o aprendizado de operações com números racionais, possibilitando a aplicação desses conceitos no ensino de operações com frações. Observamos que todas as estudantes que participaram da oficina concordaram com essa proposta didática. Dentre todas as vantagens proporcionadas pela interação entre música e matemática, a motivação foi crucial para o êxito das oficinas.
A10 - Diferentes sons e tons em aulas de matemática: um estudo sobre frações	
Objetivo	Analisar o contexto de ser professor e inquiridor das próprias práticas no escopo da educação matemática no Ensino Básico.
Referencial teórico	Este trabalho emerge do referencial teórico no bojo da educação de jovens e adultos pronunciada por Freire (1970, 1991, 1993, 1997), tendo a música como elemento gerador das reflexões do escopo da pesquisa. Ainda, são estabelecidas relações com as ideias propostas por Cury (2008).
Metodologia utilizada	Pesquisa qualitativa descritiva que busca contextualizar reflexões sobre formas de representações interdisciplinares entre arte, isto é, o "temperamento analógico e digital" e a matemática, compreendendo frações em forma de sequências e aplicações, voltadas ao processo de ensino-aprendizagem no contexto lúdico de frações e música, atrelado por desafios em ambientes e momentos diversificados de um antes, durante e o delicado retorno progressivo aos espaços físicos escolares, devido ao desdobramento pandêmico da Covid-19.
Resultados	No percurso traçado pelo referencial teórico, estabelecem-se conexões com as ideias sugeridas por Cury (2008), um apoio para "análises de erros" hipotéticas durante a pesquisa que acompanhou alunos do 6º ao 8º ano em Vinhedo, dois 8° anos e um 9° ano, com o objetivo de ajustar, acelerar e corrigir conteúdos e currículo de alunos de uma escola municipal em Monte Mor. Além disso, as interações pedagógicas e a dinâmica virtual foram comparadas à terceira abordagem presencial de aplicação da dinâmica focada em frações (e)m música, em 2022. Variáveis como idade em anos escolares, comportamentos, diferenças e desajustes, desorganização de ações e currículos ocultos de conhecimentos básicos de matemática são algumas das variáveis que se manifestaram nas formas empíricas de segmentos de crenças que ocorreram em ambos os principais atores: o educador e os alunos.
A11 - Conexões entre matemática e música em produções científicas: uma rede de possibilidades para o ensino fundamental e médio	
Objetivo	Inventariar, analisar e sistematizar produções científicas no âmbito da Educação Matemática (publicadas no período de 2010 a 2019) acerca das relações entre matemática e música.
Referencial teórico	Apoiou-se na teoria do conhecimento como rede de significados de Machado (2011), com base na metáfora de hipertexto de Lévy (1993).
Metodologia utilizada	A pesquisa de abordagem qualitativa do tipo Estado da Arte compreendeu três etapas metodológicas: etapa 1 - levantamento de literatura em plataformas de pesquisas, que disponibilizam os textos completos eletronicamente acerca da relação entre matemática e música, e estudo da linguagem musical; etapa 2 - exploração desse material, consistindo na realização de leitura preliminar, definição das características gerais e de enfoques e perspectivas a serem analisados; e etapa 3 - análise das características gerais, comparação e análise dos enfoques e perspectivas dessas produções.

Resultados	Apresenta uma possibilidade de rede de significados, específica de cada uma, e realiza uma sistematização a partir de uma rede geral, de modo a contribuir para o ensino e aprendizagem de matemática, podendo ser explorada em diferentes aspectos por meio de um trabalho interdisciplinar. As conexões que podem ser estabelecidas fazem emergir novos conhecimentos, realçando os significados e enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem. Assim, espera-se que essa pesquisa contribua para mostrar potencialidades e limitações, evolução e características centrais das pesquisas que tratam da relação entre matemática e música para a identificação de aportes teóricos e práticos.
A12 - Uma sequência didática para o ensino de progressão geométrica por meio de elementos da teoria música	
Objetivo	Investigação de uma sequência didática sobre o Ensino de Progressões Geométricas (PG) por meio de elementos da Teoria Musical.
Referencial teórico	Baseou-se nos aportes teóricos de Abdounur (1999) e de Granja (2006).
Metodologia utilizada	Utilizou uma abordagem qualitativa, numa perspectiva descritiva, na qual elaborou uma sequência didática contemplando elementos da teoria musical para o ensino das PG.
Resultados	Percebemos, a partir dos dados da pesquisa, que muitos alunos conseguiram resolver os problemas propostos sem utilizar a fórmula resolutiva para chegar ao resultado, mas partindo de seus próprios dispositivos práticos para obter os resultados adequados. Constatamos que os resultados aplicados foram alcançados, uma vez que concluímos a presente dissertação com a proposta de atividades que propiciassem a compreensão dos alunos referente ao conteúdo Progressão Geométrica. Em resumo, observamos que a música pode estar relacionada à matemática, e por isso existem várias oportunidades para trabalhar essas duas áreas do saber. Portanto, cabe ao docente conduzir as pesquisas necessárias para gerar novas propostas ao processo de ensino-aprendizagem, além de desenvolver trabalhos didáticos e projetos recreativos utilizando a criatividade e a disposição para realizá-los.
A13 - A integração de aplicativos computacionais na construção de partituras musicais para potencializar o ensino e a aprendizagem de expressões algébricas no ensino fundamental	
Objetivo	Analisar como as partituras musicais e os aplicativos computacionais podem contribuir para o aprendizado de expressões algébricas dos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental.
Referencial teórico	Embasou-se nos aportes teóricos da concepção da espiral da aprendizagem, de Valente (2005), bem como no ensino de matemática com música.
Metodologia utilizada	A análise dos dados foi feita por meio de uma abordagem qualitativa, no intuito de avaliar o efeito da intervenção de ensino no desempenho dos estudantes em face dos problemas envolvendo expressões algébricas, além da análise dos instrumentos de coleta de dados já mencionados.
Resultados	Embora diversas pesquisas, principalmente na educação em matemática, estejam sendo desenvolvidas com enfoque nas expressões algébricas, a aprendizagem desse conteúdo ainda precisa ser estudada com o intuito de despertar nos estudantes o gosto pela matemática através da música e do aplicativo *MuseScore*, cuja utilização ainda não é de conhecimento amplo no campo da matemática. Além disso, os resultados evidenciaram a importância de buscar novos métodos para obter êxito no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de expressões algébricas. Este estudo deve agregar ao campo da Educação Matemática ao propor o uso da tecnologia e da educação musical no ensino da matemática. Assim, indica potenciais contribuições para os docentes de matemática, sobre como aprimorar

	o aprendizado de conceitos matemáticos através do uso de aplicativos de computação e da música.

Fonte: Elaborado pelos Autores (2024).

Com o intuito de proporcionar uma visão panorâmica dos estudos, trazemos a Figura 1 que representa uma nuvem de palavras-chave extraídas dos trabalhos elencados no Quadro 2.

Figura 1 – Nuvem de palavras-chave

Fonte: Elaborado pelo autor a partir das dissertações analisadas.

Compreendemos que a utilização de palavras-chave facilita o acesso ao conteúdo dos trabalhos, indo além da informação expressa pelo título e pelo resumo; elas espelham o pensamento dos autores e direcionam para aspectos significativos das investigações.

Ao observar a Figura 1, as palavras mais citadas são: matemática, música, educação, ensino, frações, aprendizagem. Essas palavras podem se relacionar de diversas maneiras, por exemplo: as palavras matemática, música e frações são interligadas, pois a palavra “frações” gera um elo forte entre elas. Isso porque as frações são uma forma de representar partes de um todo na matemática e na música, podendo representar duração das notas, ordem dos valores das notas, divisão do tempo, notação musical, etc. Já as palavras educação, ensino e aprendizagem podem se referir diretamente ao conhecimento e ensino da matemática/música, e alinhar-se ao processo formativo do docente. Portanto, o Gráfico 1 ajuda a identificar a frequência e a importância das palavras em um contexto, permitindo relacioná-las e facilitando a identificação do que é mais relevante nos trabalhos.

A escolha dos tópicos selecionados (objetivos, referencial teórico, metodologia utilizada e resultados) se justifica por desempenharem um papel primordial na estrutura e na qualidade de um trabalho acadêmico, o que passaremos a discutir adiante.

No que concerne aos objetivos de um artigo científico, observamos que ambos corroboram com os entendimentos de Fernandes (2013), ao argumentar que eles devem: identificar o problema e delimitá-lo; ser apresentados de uma forma geral e específica; definir o que o pesquisador pretende alcançar; definir etapas do trabalho para alcançar o objetivo geral. Isso proporciona ao leitor uma visão do que esperar do artigo, ajudando na compreensão do intuito e da importância do estudo.

A partir dos objetivos das pesquisas apresentados no Quadro 2, observamos uma preferência dos autores ao estudo de frações, que está presente em 53,8% dos trabalhos (A1, A2, A3, A5, A7, A9 e A10). Outros conteúdos matemáticos verificados nos trabalhos foram: números, contagem e quantidades (A6), número racional (A7), raízes quadradas exatas, funções afins, trinômios incompletos (A10), Progressões Geométricas (A12), Expressões Algébricas (A13), com exceção do trabalho A11 que foi uma pesquisa teórica.

Com relação ao público-alvo, praticamente 100% dos trabalhos está voltado para Educação Básica, a qual é dividida em três etapas: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Percebemos que 53,8% dos trabalhos são voltados para o Ensino Fundamental (A1, A2, A3, A4, A5, A10 e A13), dos quais 23,0% estão atrelados aos anos iniciais (A1, A4 e A5) e 30,8% aos anos finais (A2, A3, A10 e A13). Já os que focam no Ensino Médio são 30,8% dos trabalhos (A7, A8, A9 e A12), onde A7, A8 e A9 visaram ao 1º ano e A9 e A13 ao 2º ano. Apenas um dos trabalhos (A6), que corresponde a 7,7% do total, voltou-se para a Educação Infantil. Por fim, A11 é um trabalho realizado com base em levantamento de literatura, abrangendo um total de 7,7% dos trabalhos.

No tocante aos referenciais teóricos, segundo Salomon (2014), são importantes porque: devem esclarecer, fundamentar e fornecer subsídios para a análise e discussão do tema da pesquisa; servem como base para o desenvolvimento do trabalho acadêmico; sustentam as discussões dos resultados da pesquisa; dentre os 13 trabalhos, 9 possuem uma fundamentação teórica. A2, A9 e A12 se fundamentam nos princípios do Pensamento Analógico, de Abdounur (2006), para relacionar a música ao estudo de conteúdos matemáticos. Abdounur (2006) sustenta que o raciocínio analógico se baseia na equivalência de relações ou proporções entre diferentes objetos, por exemplo, matemática e música. Ademais, ele ressalta que esse raciocínio analógico envolve um raciocínio não dedutivo e, sob uma perspectiva matemática, impreciso, procurando semelhanças e similaridades entre esses objetos.

Por outro lado, A1 e A5 embasam-se na teoria histórico-cultural de Leontiev (1988), Moura (1996) (A1) e Vygotsky (1896-1934) (A5). Sendo que Leontiev foi um discípulo de Vygotsky e Moura fora influenciado pelas ideias de ambos, sendo talvez Vygotsky o mais famoso dos três. Assim, com base nos estudos e na teoria socioconstrutivista de Vygotsky, A5 desenvolveu uma sequência didática para o ensino de frações e a introdução da música no quinto ano do Ensino Fundamental. Para A1, a teoria histórico-cultural proposta por Leontiev

(1988) e Moura (1996) foi crucial para examinar como a motivação dos alunos na unidade afeto-cognição pode se manifestar através de contextos de ensino de música e matemática para a assimilação do conceito de fração.

A10 foi fundamentada na Educação de Jovens e Adultos, de Paulo Freire (1970, 1991, 1993, 1997), usando a música como elemento gerador das reflexões. Estabeleceu conexões com as ideias sugeridas por Cury (2008), que emprega a psicologia cognitiva para proporcionar uma reflexão sobre os erros humanos e o impacto desses erros na vida das pessoas, suas decisões e seu processo de desenvolvimento. Já A11 fundamentou-se na teoria do conhecimento como rede de significados de Machado (2011) e na metáfora de hipertexto de Lévy (1993), com o objetivo de considerar a discussão sobre a conexão entre a matemática e a música como uma rede que subsistirá em um 'espaço de representações', formado pelos campos da música e da matemática. Por fim, A6 embasa-se na Epistemologia Genética de Jean Piaget para entender melhor a infância, a Educação Infantil, o brinquedo, o jogo, a brincadeira e o desenvolvimento infantil, além do uso da música como linguagem para o ensino, a aprendizagem de matemática e a avaliação neste estágio da educação escolar.

Para além desses, os demais trabalhos apresentaram uma diversidade de estudos que se embasam em vários autores da literatura, ao propor a utilização da música como recurso pedagógico para a compreensão de conceitos matemáticos. A4 acredita ser imprescindível a utilização de metodologias diferenciadas no ensino da matemática, o que leva à mudança no estilo das aulas (Godoi, 2011). A música surge como mais uma alternativa metodológica para o ensino e aprendizagem da matemática, pois, dentre outros, em A8, de acordo com Ferreira (2010), o maior benefício de usar a música no ensino de uma disciplina específica é a possibilidade de abrir um segundo canal de comunicação, além do verbal que é o mais comum. Lima (2013), em A4, afirma que a criança é cercada por estímulos sonoros, identificando nos sons a sua habilidade de se comunicar com o mundo ao seu redor. Ao manusear objetos que emitem som, o corpo se move e a criatividade se expressa, desenvolvendo, assim, suas habilidades, conhecidas como cognitivas.

A respeito das metodologias utilizadas nas pesquisas, Praça (2015) descreve que, na maioria, são norteadas por duas vertentes, métodos qualitativos e métodos quantitativos. Os trabalhos apresentados no Quadro 2, de modo geral, assumem uma abordagem qualitativa, ou seja, priorizam a descrição minuciosa dos fenômenos e dos componentes que os compõem e preocupam-se em entender o processo investigativo. De acordo com Denzin e Lincoln (2006), a pesquisa qualitativa se baseia em uma perspectiva interpretativa do mundo, onde os pesquisadores analisam os fenômenos em seus contextos naturais, buscando compreender os fenômenos através dos significados que as pessoas atribuem a eles. Nesse sentido, Vieira e Zouain (2005) argumentam que a pesquisa qualitativa dá uma importância crucial aos relatos dos participantes sociais, aos discursos e aos significados comunicados por eles.

Além disso, os trabalhos do Quadro 2 recorrem a uma variedade de instrumentos para obtenção e produção de dados, isto é: A2, A5 e A12 aplicaram uma sequência didática; A1 adotou diário de bordo, registro escrito e de áudio e roda de conversa; A4, A8 e A11 realizaram revisão bibliográfica e pesquisa-ação; A6 utilizou produção documental, comunicação oral, anotações das observações, registros de fotos, autoavaliação oral e elaboração de uma tabela; A7 formulou atividades que envolvem percepções sensoriais, atividades corporais e reflexão a respeito da estrutura da música; A9 elaborou oficinas; A10 e A12 abordou uma perspectiva descritiva com relatos de experiências; A13 estruturou uma intervenção de ensino com questionários e atividades; e A3 optou por gravações de vídeos pelo celular.

Na discussão dos resultados, verificamos nos estudos que a utilização da música como instrumento pedagógico pode favorecer um ensino mais envolvente e um aprendizado mais dinâmico, tornando as aulas mais cativantes e desafiadoras. Isso demonstra que a matemática pode ser atraente e estimulante, mas não intrincada como muitos acreditam. Nunes (2012) destaca que a música traz motivação e cria vínculos, o que pode ajudar na compreensão de vários conteúdos.

Na análise destes trabalhos é perceptível a possibilidade da conexão entre música e matemática, bem como os elementos motivacionais e emocionais que a música possa despertar. Pensando na unidade afeto-cognição, "pensar na motivação para a aprendizagem implica pensar em afetação, em como o sujeito é tomado por atravessado, perpassado pelas ideias, pelos objetos e fenômenos da realidade escolar" (Gomes; Mello, 2010, p. 689).

Além disso, constatamos que, para introduzir, aprofundar ou investigar conceitos matemáticos, como o de fração, por exemplo, que foi explorado em 53,8% dos estudos, buscaram várias alternativas para inserir a música no processo de ensino, como: A3 usou a construção de instrumentos musicais; A2 utilizou o estudo da escala musical; A9 recorreu a divisão rítmica musical; A4 e A8 valeram-se das paródias, dentre outros que de alguma forma recorreram a elementos da música.

> Relacionar a música com o estudo de frações e proporções é uma proposta interessante para o ensino fundamental. A música motiva e faz com que os alunos criem vínculos com o que está sendo estudado, isso facilita a construção do conhecimento. Em níveis mais avançados, por exemplo, no ensino médio, a música pode ajudar na compreensão de conteúdos como funções, logaritmos, progressões, entre outros. As alternativas para relacionarmos a música com a matemática são quase ilimitadas (NUNES, 2012, p. 21).

Ainda, notamos que a possibilidade de refletir sobre o conceito interdisciplinar e a importância da música como ferramenta pedagógica, no processo de aprendizado, em várias disciplinas, inclusive na matemática, é reforçada com base na Lei nº 11.769, de 18 de agosto de 2008, que obriga o ensino de música na formação de alunos na Educação Básica. Tal lei é citada em alguns trabalhos do Quadro 2, inclusive em A8 que afirma que apesar desta determinação, conforme destaca Martins, Silva e Leal (2019), até o presente momento, pouquíssimas instituições têm cumprido a referida determinação legal, gerando uma série de problemas e desafios para que, efetivamente, o ensino de música, ainda que utilizada como ferramenta metodológica com viés interdisciplinar, se concretize e alcance a todos.

Depois de examinar os principais resultados dos trabalhos elencados, as conclusões finais deste estudo são apresentadas enfatizando a perspectiva desses autores sobre o uso da música no ensino de matemática, levando em conta as considerações sugeridas pelos estudos examinados.

2.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O propósito deste estudo foi analisar a forma como as pesquisas acadêmicas no Brasil abordam a interação entre matemática e música, enfatizando o uso da música como ferramenta pedagógica no ensino e aprendizado de matemática. Assim, por meio da pesquisa bibliográfica, 13 trabalhos foram escolhidos e examinados dos bancos de dados da CAPES. Desse modo, esperamos que esse trabalho contribua para mostrar potencialidades e limitações, evolução e características centrais das pesquisas, que tratam da relação entre matemática e música, para a identificação de aportes teóricos e práticos.

Em resumo, os achados das dissertações escolhidas revelam vários autores que discutem o assunto nas diversas perspectivas da conexão entre matemática e música, incluindo os principais nomes do assunto no Brasil: Abdounur (1999; 2003; 2006), Camargos (2010) e Paulo Freire (1992), dentre outros. Esses autores frequentemente discutem a conexão entre a matemática e a música como uma opção pedagógica no ensino e aprendizado de conteúdos matemáticos. É evidente que a música é uma ferramenta com a qual o aluno se acostuma e se envolve facilmente, e por meio dela estabelece relações e intensifica emoções. Segundo Nicolau (1997), os educadores devem estar convencidos de que a música oferece um valor inestimável para a formação, crescimento e equilíbrio da personalidade de crianças e adolescentes. O acesso à música representa as oportunidades de criação, interpretação ou audição, que podem ser incentivadas, aprimoradas e ensinadas. A música potencializa o aprendizado ao formar lembranças, deixar impressões e estabelecer vínculos com experiências vividas. Através da música, o professor tem a possibilidade de instituir um ambiente de aprendizado dinâmico, interativo, agradável e inovador.

Portanto, é unânime entre os trabalhos a importância da utilização da música como recurso pedagógico no ensino e aprendizado de conteúdos matemáticos. De acordo com Cavalcanti e Lins (2010), a música pode ser uma ferramenta de desenvolvimento do raciocínio e da criatividade, o que é importante para aprender conceitos matemáticos. Além disso, a música pode ser uma atividade didático-pedagógico-afetiva. Assim, ao evidenciar essa relação entre matemática e música, segundo Camargo (2010), percebemos que a arte de ensinar utilizando a música não proporciona apenas a alegria de observar o olhar curioso e encantado de alguns estudantes, mas também a satisfação de compreender que a Matemática, tal como a Música, é uma arte capaz de atingir o mais profundo do ser humano e despertar, mesmo que de forma sutil, o interesse em aprender.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo, serão abordadas as fundamentações teóricas que sustentam a proposta deste trabalho, que trata da implementação de uma SD com o auxílio da relação entre a matemática e a música para o ensino de conceitos básicos de PG em uma turma do 2° ano do ensino médio.

Inicialmente, será discutido o pensamento analógico, conforme proposto por Abdounur (2006), que tem como objetivo a criação de significados para explorar de maneira pedagógica o potencial de semelhança e diferenciação, associando conceitos matemáticos e musicais a estruturas e conceitos parecidos. Em seguida, teceremos comentários a luz de uma proposta interdisciplinar abordando a relevância da Interdisciplinaridade para consolidar conceitos matemáticos por meio da Música. Na sequência, são apresentados conceitos fundamentais da música e de sequências numéricas, conceitos esses importantes para o aprofundamento dos conteúdos e principalmente para o embasamento das atividades propostas na SD.

Por fim, abordaremos a relação música e matemática e temas como: afinação e temperamento; a escala pitagórica; transposição na escala pitagórica; a escala temperada; e a relação da música com a PG.

3.1 O PENSAMENTO ANALÓGICO

O presente estudo baseia-se na ideia de que tanto a matemática quanto a música fazem uso de estruturas que podem ser compreendidas por meio do pensamento analógico, conforme proposto por Abdounur (2006). Ele ressalta que esse pensamento analógico envolve um raciocínio não dedutivo e, sob uma perspectiva Matemática, impreciso, que procura a semelhança e as similaridades entre objetos. Nesta perspectiva, ao relacionarmos conceitos musicais, sonoros e de sequência numérica (PG), objetivamos a criação de significados para explorar de maneira pedagógica o potencial de semelhança e diferenciação desses conceitos a estruturas e conceitos parecidos.

A conexão entre a música e a matemática será explorada com foco na análise dos símbolos e frequências das notas musicais, com o propósito de permitir a implementação de uma sequência didática para ensinar os conceitos básicos de uma sequência numérica (PG). Acredita-se que as semelhanças e analogias possíveis em uma interação harmoniosa entre Matemática e Música podem auxiliar na construção de significados matemáticos durante o desenvolvimento intelectual do aluno. Segundo Abdounur (2006), a utilização de analogias e a identificação de padrões em variados contextos auxiliam na construção de significados.

A fábula dos seis cegos que tentam descrever um elefante ao tocarem diferentes partes de seu corpo serve como uma metáfora poderosa para a construção de significados. Cada cego tem uma percepção limitada e parcial do elefante, da mesma forma que nossos conhecimentos e experiências são fragmentados e incompletos. Porém, é por meio do pensamento analógico que conseguimos criar ligações entre essas percepções parciais, associando-as e reconhecendo padrões e similaridades entre elas. Ao fazer isso, podemos construir uma compreensão mais completa e significativa do todo, pois o pensamento analógico nos permite criar pontes entre diferentes conceitos e ideias, facilitando a construção de significados e a compreensão de complexidades.

À luz das ideias de Abdounur (2006) sobre o papel do pensamento analógico na construção de significados, uma conduta didático-pedagógica que aproxima e equilibra as diversas competências da inteligência pode ser vista como uma estratégia eficaz para promover a integração de diferentes contextos e formas de conhecimento. Ao reconhecer e valorizar distintas formas de argumentação e negociação mentais, essa abordagem didática estimula o pensamento analógico, permitindo que os indivíduos estabeleçam conexões entre diferentes áreas do saber e identifiquem princípios válidos em vários ramos do conhecimento. Dessa forma, ao conciliar conceitos musicais (notas, escalas, símbolos), sonoros (altura, intensidade, timbre) e de sequência numérica (PG), busca-se potencializar a compreensão dos estudantes e despertar seu interesse e motivação, tornando o processo de aprendizagem mais relevante e envolvente.

Há milênios, já era possível perceber as conexões entre a matemática e a música: seja no som emitido pela corda de um arco e flecha, na relação entre a frequência (mais ou menos grave) e as propriedades da corda (tamanho, tensão e espessura), ou ao assoprar em um osso, como se fosse uma flauta, havia variações nos sons gerados, dependendo do tamanho e da posição dos furos no osso.

Segundo Boyer (1996), o primeiro registro, de fato, associando matemática e música, ocorre por volta do século VI a.C. na Grécia Antiga, na Escola Pitagórica. Os pitagóricos, utilizando um instrumento de corda, associaram intervalos musicais ao conceito de frações. Este instrumento, conhecido como monocórdio, consistia em uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos em uma tábua ou mesa, com um cavalete móvel posicionado sob a corda para separá-la em duas partes (Abdounur, 2002).

A história de Pitágoras com a batida dos martelos pode ser entendida como um exemplo clássico do pensamento analógico. Segundo Abdounur (2006), o termo analogia pode ter decorrido do movimento pitagórico e, nessa concepção, o pensamento analógico consiste na identidade de relações ou proporções entre distintas coisas. Ao identificar padrões e relações entre os sons, Pitágoras estabeleceu uma conexão entre o som e a matemática. Essa conexão permitiu uma compreensão mais profunda da estrutura subjacente da música e da matemática criando uma ponte entre dois domínios distintos.

Ainda nesse capítulo trataremos com mais detalhes sobre o surgimento na história dos primeiros registros que relacionaram música e matemática, além de mostrar como Pitágoras associou a batida dos martelos a sons consonantes e chegou às relações entre as notas de uma escala musical através de um monocórdio.

3.2 A INTERDISCIPLINARIDADE

A interdisciplinaridade é um processo de construção do conhecimento que se fundamenta na cooperação, diálogo e colaboração entre diversas áreas do saber, superando a fragmentação tradicional entre as disciplinas. De acordo com os estudos de Fazenda (1995), a interdisciplinaridade é caracterizada pela interação entre duas ou mais disciplinas, abrangendo desde a simples relação entre ideias até a conexão de conceitos. Sua presença nas escolas é fundamental, pois oferece um leque de possibilidades, e é essencial que os educadores estejam receptivos a inovações e à integração de conteúdos.

O debate sobre metodologias de ensino traz reflexões que indicam a necessidade de encontrar métodos que tornem a aprendizagem dos conteúdos escolares verdadeiramente significativa para os alunos. As estratégias instrutivas ou didáticas empregadas pelo professor representa, em grande parte, o sucesso ou não na construção de significados pelos alunos, pois eles assimilam um conteúdo quando este é dotado de algum significado.

Neste sentido, uma proposta interdisciplinar de ensino pode promover uma visão mais integrada e significativa do conhecimento, aproximando os conteúdos escolares da realidade vivida pelos alunos. Em vez de aprender de forma fragmentada, os estudantes conseguem perceber relações entre diferentes áreas do saber, o que estimula o pensamento crítico, a criatividade e a resolução de problemas de forma mais contextualizada. Além disso, a interdisciplinaridade favorece a colaboração entre professores, enriquece as práticas pedagógicas e torna o processo de aprendizagem mais dinâmico e motivador.

A luz de uma proposta interdisciplinar, podemos encontrar apoio nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1999, p. 38), já que

> O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos.

Essa abordagem interdisciplinar é essencial para a formação integral do aluno, pois permite que ele perceba a conexão entre diferentes áreas do conhecimento e como elas se complementam. Ao integrar conteúdos de diversas disciplinas, o aluno desenvolve uma visão mais ampla e crítica do mundo, tornando-se capaz de aplicar os conhecimentos adquiridos em situações reais e complexas. Além disso, a interdisciplinaridade promove a colaboração entre professores de diferentes áreas, enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem. Essa colaboração possibilita a criação de projetos e atividades que estimulam a curiosidade e o interesse dos alunos, tornando o aprendizado mais significativo e prazeroso.

Os comentários sobre interdisciplinaridade neste estudo são relevantes, pois abordam questões sobre várias áreas do saber e a conexão entre elas. Assim, estamos de acordo com o documento oficial ao afirmar que:

> A interdisciplinaridade deve ser compreendida a partir de uma abordagem relacional, em que se propõe que, por meio da prática escolar, sejam estabelecidas interconexões e passagens entre os conhecimentos através de relações de complementaridade, convergência ou divergência. (BRASIL, 2000, p. 21).

Na Interdisciplinaridade, a especificidade dos campos de estudo é adequadamente utilizada, pois as ligações feitas são mais flexíveis e menos normativas. A relevância de apresentar diversos conteúdos ao estudante em atividades interdisciplinares reside na criação de chances para que ele observe, perceba, aprenda, compare e relacione os assuntos abordados. Neste sentido, reconhecemos a importância da Interdisciplinaridade para consolidar conceitos matemáticos por meio da Música.

Campos (2009) afirma que o trabalho com a música em sala de aula ativa simultaneamente diversos sentidos dos alunos, favorecendo o envolvimento cognitivo e afetivo no processo de aprendizagem. Gardner (1995), ao discutir a Teoria das Inteligências Múltiplas, argumenta que os indivíduos possuem habilidades distintas relacionadas às suas capacidades cognitivas. Segundo o autor, as principais inteligências inicialmente propostas são: linguística, espacial, cinestésica, interpessoal, intrapessoal, musical e lógico-matemática, com destaque, neste estudo, para as inteligências musical e lógico-matemática, por apresentarem maior relação com a proposta desenvolvida.

Trabalhos posteriores ao de Gardner ampliaram esse conjunto de inteligências, incorporando, por exemplo, a inteligência emocional. Nesse sentido, Mayer e Salovey (1997, p. 15) definem que a inteligência emocional abrange a habilidade de perceber, avaliar e expressar emoções de forma precisa; a habilidade de identificar e/ou criar sentimentos que favoreçam o pensamento; a habilidade de compreender as emoções e o conhecimento emocional; e a habilidade de gerenciar emoções de modo a promover o desenvolvimento emocional e intelectual.

Essa última inteligência pode ser aprimorada por meio da música, uma vez que ela nos possibilita expressar e identificar emoções de maneira intensa e pessoal. Além disso, a música pode ser utilizada como um recurso para controlar emoções e promover o bem-estar. Ademais, a música tem o potencial de fortalecer conexões sociais e fomentar a empatia.

A inteligência musical refere-se à habilidade do indivíduo em entender, perceber, criar e reproduzir ritmos, melodias e timbres de maneira simples. Por outro lado, a inteligência lógico-matemática é definida pela elevada habilidade do indivíduo em deduzir, realizar cálculos mentais e possuir um bom entendimento de lógica.

Quando aplicamos essa perspectiva à relação entre música e matemática, a interdisciplinaridade se revela, por exemplo, ao: Investigar os padrões rítmicos e métricos da música, que estão diretamente ligados a conceitos matemáticos como frações, proporções e sequências; Examinar frequências sonoras, escalas musicais e intervalos, que envolvem conexões numéricas e geométricas; Analisar a estrutura das composições musicais, que pode ser compreendida por meio de simetrias, algoritmos e lógica matemática; entre outras.

Essa variedade de opções oferece suporte na busca por estratégias didáticas e pedagógicas que façam a aprendizagem ser dinâmica e eficiente, resultando em uma aprendizagem significativa. Assim, é baseando-se em uma proposta interdisciplinar através dessas possibilidades que este trabalho propõe a elaboração e implementação de um conjunto de atividades práticas através de uma SD para o ensino de conceitos básicos de sequência numérica (PG).

3.3 CONCEITOS MUSICAIS

Neste tópico, introduzimos alguns conceitos relacionados à música que são essenciais para compreender a teoria musical e, simultaneamente, auxiliar na descoberta de relações entre a música e a matemática, que é o propósito do nosso estudo.

3.3.1 Música

A música é uma linguagem universal que ultrapassa fronteiras e culturas, sendo capaz de despertar sentimentos, narrar histórias e estabelecer vínculos significativos entre as pessoas. A música, ao combinar melodia, harmonia e ritmo, tem a capacidade de transmitir sentimentos e conceitos de forma única e impactante, tornando-se assim um elemento essencial da vida e da experiência humana. Segundo Med (1996), a música pode ser compreendida como a arte de organizar e combinar sons de forma simultânea e sucessiva, respeitando princípios de ordem, equilíbrio e proporção ao longo do tempo.. Para ele, a música é constituída principalmente das seguintes partes

> 1) MELODIA – conjunto de sons dispostos em ordem sucessiva. 2) HARMONIA – conjunto de sons dispostos em ordem simultânea. 3) CONTRAPONTO – conjunto de melodias dispostas em ordem simultânea. 4) RITMO – ordem e proporção em que estão dispostos os sons que constituem a melodia e harmonia. (MED, 1996, p. 11)

A diferença entre a melodia e a harmonia está na disposição dos sons. Melodia é uma sequência de notas musicais, enquanto a harmonia é a combinação de múltiplas notas musicais tocadas simultaneamente. A melodia cria uma linha musical, enquanto a harmonia cria uma estrutura vertical que adiciona profundidade e complexidade à música. A melodia é frequentemente usada para criar a identidade da música, enquanto a harmonia é usada para criar tensão e resolução, ou para estabelecer um padrão musical.

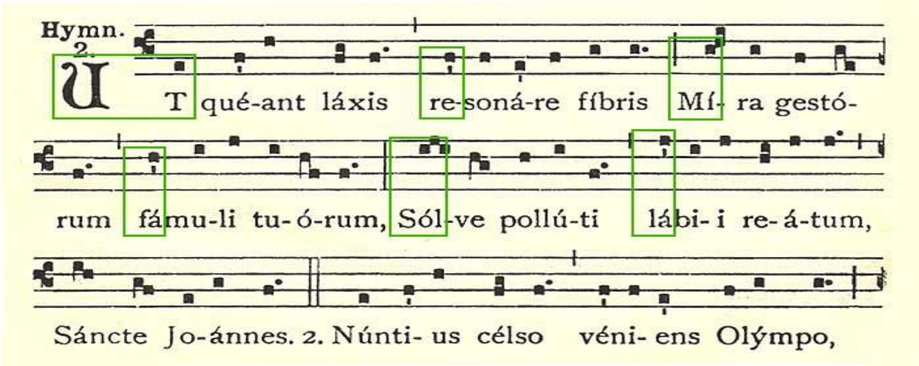
O contraponto é uma técnica musical que envolve a combinação de duas ou mais linhas melódicas independentes que se movem simultaneamente criando harmonia e textura musical. Por outro lado, o ritmo é o padrão de duração e acentuação das notas musicais que criam uma sensação de movimento e estrutura na música. É a organização do tempo e do espaço sonoro que dá vida à música. Portanto, o ritmo é um elemento fundamental da música que cria uma sensação de movimento e estrutura através da organização do tempo e do espaço sonoro.

3.3.2 Notas Musicais

Todo objeto, ao ser beliscado, percutido ou friccionado, produz um som específico que gera uma frequência determinada, medida em hertz na física. Essas frequências no contexto musical são conhecidas como notas musicais. Quando combinadas por um ou mais instrumentos, resultam em uma vasta gama de composições sonoras.

Por volta do ano 900, um monge chamado Guido D'arezzo sentiu a necessidade de sistematizar as notas presentes nos livros de canto dos monges. Inspirando-se no hino em latim de São João Batista mostrado na Figura 2, ele estabeleceu as sete notas musicais que conhecemos atualmente.

Figura 2 – Letra e partitura do hino São João Batista



Fonte: <https://www.padreleonardo.com/artigos/hino-sao-joao-batista-nome-notas-musicais>

As notas musicais são os elementos fundamentais da música, representando diferentes alturas sonoras. Existem sete notas principais: **Dó**, **Ré**, **Mi**, **Fá**, **Sol**, **Lá** e **Si**. Essas notas podem ser combinadas de diversas maneiras para criar melodias, harmonias e acordes, formando a base de toda composição musical. A compreensão e o domínio dessas notas são essenciais para qualquer músico, pois elas são a linguagem universal da música. Em inglês e alemão, essas notas são indicadas pelas primeiras sete letras do alfabeto, com a seguinte correspondência (Quadro 3):

Quadro 3 - indicação das notas em inglês e alemão

Em inglês	Dó = C	Ré = D	Mi = E	Fá = F	Sol = G	Lá = A	Si = B
Em alemão	Dó = C	Ré = D	Mi = E	Fá = F	Sol = G	Lá = A	Si = H

Fonte: Baseado em Med (1996)

Observe no Quadro 3 que a letra “B” corresponde à nota Si no inglês. No entanto, no sistema alemão, a nota Si é representada pela letra “H”, enquanto a letra “B” corresponde à nota Si bemol. As letras (C, D, E, F, G, A, B) que representam as notas ou acordes (conjunto de três ou mais notas tocadas simultaneamente) em inglês são utilizadas como símbolos que substituem a partitura tradicional, facilitando a leitura e a execução de músicas em instrumentos como violão, guitarra e teclado. Esse sistema de notação simplificado para representar acordes e estruturas harmônicas em músicas populares é chamado de cifra. Veja na Figura 3 um exemplo de música cifrada.

Figura 3 – Cifra da música parabéns pra você

PARABÉNS PRA VOCÊ

Tom: C

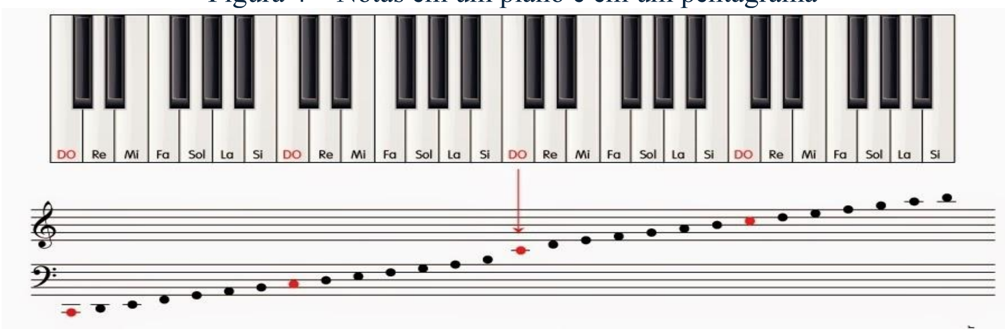
```
 C                   G
Parabéns pra você
      Dm      G      C
Nesta da . . .ta querida
          C7    F
Muitas felicidades
         C       G       C
Muitos a . . . nos de vida

       C             G
Parabéns pra você
         Dm     G       C
Nesta da . . . ta querida
          C7     F
Muitas felicidades
         C       G      C
Muitos a . . . nos de vida
```

Fonte: Elaborado pelo autor

É importante compreender que as notas acima da letra da música mostrada na Figura 3 indicam a harmonia que acompanha o cantor, não a melodia. A melodia consiste em uma sequência de notas musicais tocadas ou cantadas consecutivamente, constituindo a linha principal de uma composição. Por outro lado, a harmonia consiste no conjunto de notas tocadas ao mesmo tempo que acompanham a melodia, formando uma base sonora que enriquece e complementa a música.

Na Figura 4, são apresentadas as notas musicais associadas às teclas de um piano e ao pentagrama que é um conjunto de cinco linhas paralelas horizontais onde estão inseridos símbolos musicais que representam notas musicais (veja no tópico 3.3.3). É importante observar que as notas se repetem em ciclos de sete e estão situadas nas teclas brancas do instrumento. As notas localizadas à esquerda possuem frequências mais graves, enquanto aquelas à direita apresentam frequências mais agudas.

Figura 4 – Notas em um piano e em um pentagrama



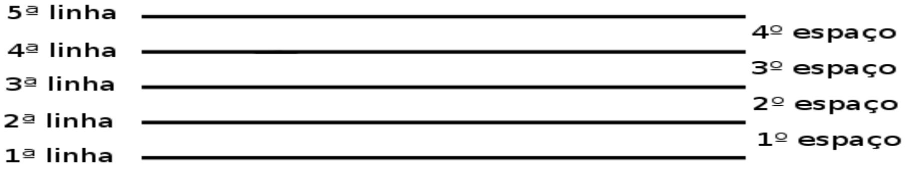
Fonte: <https://www.clasedelenguajemusical.com/2-1/>

Observe na Figura 4, que as notas musicais estão dispostas nas teclas brancas do piano. As teclas pretas são chamadas de notas sustenido ou bemol que são representados na partitura como acidentes musicais (veja tópico 3.3.4).

3.3.3 Pentagrama ou pauta musical

Segundo Med (1996), o pentagrama, também conhecido como pauta musical, é composto por cinco linhas paralelas horizontais e quatro espaços entre elas, nos quais as notas musicais são escritas (Figura 5).

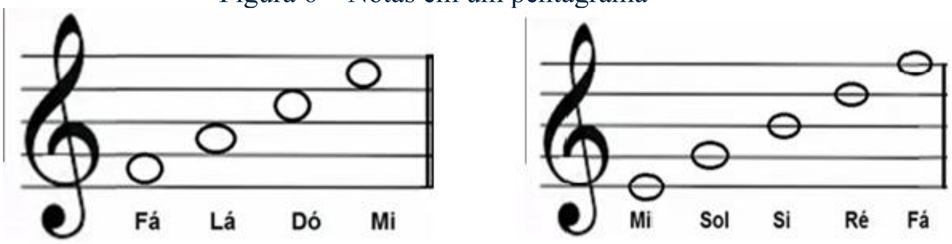
Figura 5 – Pentagrama



Fonte: <https://musicienciarte.blogspot.com/2015/01/teoria-musical-aula-2.html>

A nota que está em um espaço não deve ser cortada pela linha superior nem pela inferior. Por outro lado, a nota em uma linha ocupa metade dos espaços acima e abaixo. A Figura 6 mostra todas as notas musicais naturais que ocupam as linhas e os espaços do pentagrama.

Figura 6 – Notas em um pentagrama



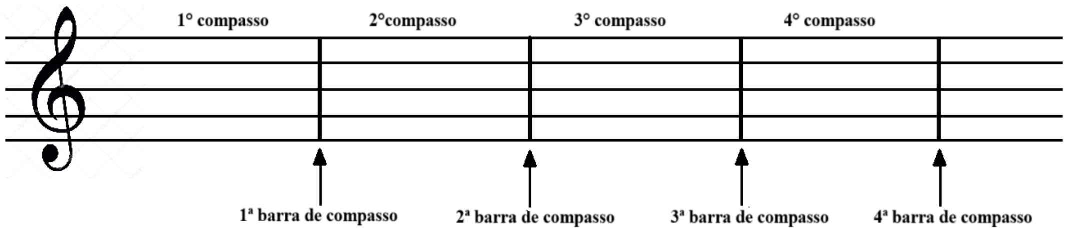
Fonte: <https://tablaturasecifras.com.br/como-ler-partitura/>

As claves musicais são símbolos colocados no início da pauta que indicam a posição exata das notas, permitindo a leitura correta da música. Elas são essenciais para adaptar a escrita à tessitura dos instrumentos e vozes, evitando o excesso de linhas suplementares. As principais claves são a clave de Sol, a clave de Fá e a clave de Dó. A clave de Sol, por exemplo, marca o sol na segunda linha da pauta e é amplamente utilizada em partituras para violino e flauta. Na Figura 6, foi utilizada a clave de Sol.

3.3.4 Compassos

O compasso divide o tempo musical em partes iguais, chamadas de tempos ou batidas. De acordo com Med (1996, p. 114), “compasso é a divisão musical em séries regulares de tempos; é o agente métrico do ritmo”. Uma linha vertical, conhecida como barra de compasso ou travessão, divide os compassos (Figura 7).

Figura 7 – Compassos e barras de compasso em um pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor

Entre as funções mais importantes do compasso estão: marcar o ritmo, organizar as notas, sinalizar a pulsação da música e simplificar a leitura e a execução. Med (1996) sustenta que a segmentação da música em compassos torna mais fácil a leitura e a execução da partitura. Dessa forma, o compasso é o coração da música, responsável por marcar os batimentos que sustentam a melodia e a harmonia, além de conferir à obra ordem, ritmo e expressividade.

A classificação dos compassos pode ser feita de diversas maneiras, sendo a mais frequente aquela que leva em conta a quantidade de tempos em cada compasso. O compasso binário possui dois tempos, sendo o primeiro forte e o segundo fraco. Isso confere a ele um caráter distinto e sólido, sendo amplamente utilizado em marchas e polcas. Por outro lado, o compasso ternário possui três tempos, sendo o primeiro forte e os dois seguintes fracos. Esse padrão cria um balanço característico, amplamente empregado em gêneros como a valsa. Por fim, o compasso quaternário, que é composto por quatro tempos (um forte seguido de três fracos, com destaque intermediário no terceiro), é o mais usado na música ocidental contemporânea, sendo predominante na música popular, como no rock, samba e no pop.

Além do número de tempos indicados em cada compasso, os compassos musicais também podem ser classificados de acordo com a forma como cada tempo, ou pulsação, é subdividido. Quando cada pulsação se divide naturalmente em duas partes iguais, tem-se o chamado compasso simples. Esse tipo de compasso é bastante comum na música ocidental e pode ser observado em exemplos como 2/4, 3/4 e 4/4, nos quais cada batida se organiza de maneira binária.

Por outro lado, quando cada pulsação é subdividida em três partes iguais, surge o compasso composto, como ocorre nos compassos 6/8, 9/8 e 12/8. Nesses casos, embora o numerador indique um maior número de tempos, a sensação rítmica é ternária, o que confere à música um caráter mais fluido e frequentemente mais dançante. Por essa razão, esse tipo de compasso é amplamente utilizado em músicas folclóricas e em canções que apresentam movimento rítmico contínuo.

Além dos compassos simples e compostos, existem ainda os compassos mistos e alternados, mais recorrentes em composições eruditas contemporâneas e em determinadas manifestações da música folclórica. Os compassos mistos resultam da combinação de diferentes padrões rítmicos simples, como ocorre no compasso 5/4, que pode ser percebido como a soma de um compasso ternário (3 tempos) com um compasso binário (2 tempos). Essa combinação produz estruturas rítmicas menos regulares, ampliando as possibilidades expressivas da música.

3.3.5 Figuras musicais

As figuras musicais são símbolos gráficos utilizados para representar a duração dos sons dentro de uma partitura. Elas não indicam a altura da nota, mas sim o tempo que cada som deve ser sustentado, funcionando como a base da escrita rítmica na música. Entre as principais figuras, destacam-se a semibreve, a mínima, a semínima, a colcheia, a semicolcheia, a fusa e a semifusa, cada uma com valores proporcionais de duração. Além das figuras, existem as pausas, que representam o silêncio com a mesma duração das notas correspondentes. O quadro 4 exibe os nomes das figuras musicais, seus símbolos e pausas correspondentes. Além disso, indica os tempos de duração de cada figura e os valores de representação que mostram o número máximo de notas possíveis em um compasso 4/4.

Quadro 4 – Figuras musicais

Nome	**Semibreve**	**Mínima**	**Semínima**	**Colcheia**	**Semicolcheia**	**Fusa**	**Semifusa**
Valor	1	2	4	8	16	32	64
Figura musical	𝅝	𝅗𝅥	𝅘𝅥	𝅘𝅥𝅮	𝅘𝅥𝅯	𝅘𝅥𝅰	𝅘𝅥𝅱
Pausa	𝄻	𝄼	𝄽	𝄾	𝄿	𝅀	𝅁
Tempo	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16

Fonte: Elaborada pelo autor

As figuras musicais são fundamentais para a leitura e execução musical, pois permitem que os músicos compreendam não apenas o que tocar, mas também quando e por quanto tempo cada som ou silêncio deve acontecer, garantindo a precisão rítmica e a expressividade da obra.

3.3.6 Acidentes musicais

Na música, acidentes são símbolos que alteram a altura das notas, dando mais flexibilidade e expressividade. Os principais acidentes são **sustenido** (♯), **bemol** (♭), **dobrado sustenido** (𝄪) e **dobrado bemol** (♭♭) (Figura 8).

Figura 8 – Acidentes na música

Fonte: <https://homolitteras.blogspot.com/2011/05/acidentes-musicais.html>

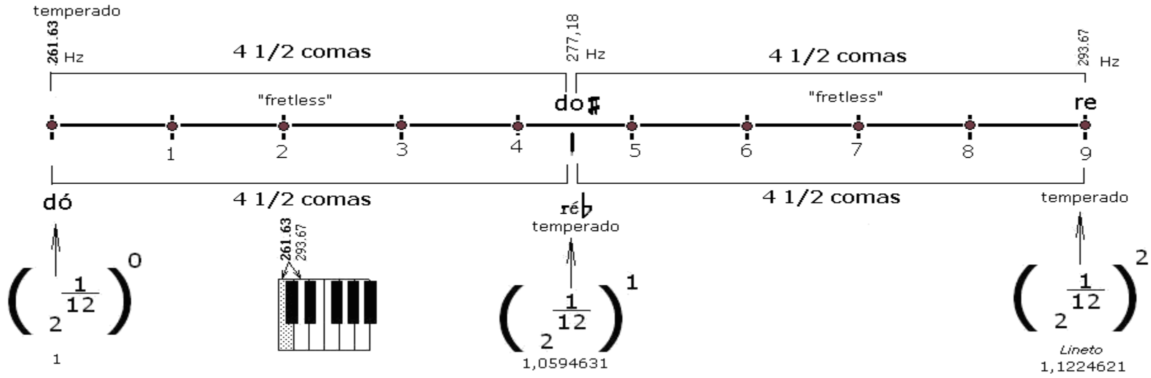
O sustenido (♯) aumenta a altura de uma nota musical em um semitom (ver tópico **3.3.7**). Por exemplo, ao adicionar um sustenido à nota Dó, ela é denominada Dó sustenido ($C^{\sharp}$), que corresponde à tecla preta imediatamente à direita da tecla Dó. Por outro lado, o bemol (♭) reduz a altura de uma nota em um semitom. Por exemplo, ao colocar um bemol diante da nota Mi, ela se transforma em Mi bemol (E^{b}). Nas teclas do piano, corresponde ao deslocamento da tecla Mi para a tecla preta imediatamente à esquerda.

Agora, para aumentar a nota em dois semitons, utiliza-se o dobrado sustenido (𝄪). Por exemplo, ao adicionar o dobrado sustenido na nota Ré, ela se transforma em Mi ($D^{𝄪}$), enquanto para diminuir uma nota em dois semitons, usa-se o dobrado bemol (♭♭). Por exemplo, a nota Sol dobrado bemol (G♭♭) é equivalente à nota Fá. O uso desses dois últimos acidentes musicais é raro e ocorre em contextos em que a precisão teórica é necessária. O bequadro (♮) que aparece na Figura 8 é uma notação musical que cancela um sustenido ou bemol anterior, retornando a nota à sua altura natural.

3.3.7 Semitom e tom

Semitom é o menor intervalo entre duas notas no sistema temperado e tom é a soma de dois semitons. O sistema temperado iguala os semitons em partes iguais, cada um com quatro comas e meia, ou seja, o intervalo de 1 tom compreende os intervalos de 9 comas (Figura 9).

Figura 9: O intervalo de um tom dividido em 9 comas



Fonte: <https://musicaeadoracao.com.br/25365/o-intervalo-musical-coma-na-escala-temperada/>

Na música, a coma é um intervalo extremamente pequeno, menor que um semitom, que resulta da diferença entre determinadas afinações. Existem principalmente dois tipos: a coma pitagórica, diferença entre 12 quintas justas e 7 oitavas, e a coma sintônica, diferença entre quatro quintas justas e duas oitavas mais uma terça maior pura. Esses intervalos são quase imperceptíveis ao ouvido comum, mas são cruciais em sistemas de afinação como o temperamento justo ou pitagórico. As notas musicais obtidas nesses intervalos podem ser executadas apenas em instrumentos de altura variável (sem trastes), como violino, viola, violoncelo, contrabaixo, trombone e a voz humana, pois conseguem produzir esses intervalos sutis, ajustando a afinação conforme a necessidade harmônica. Instrumentos de altura fixa, como piano e órgão, não conseguem executar a coma, pois são afinados pelo sistema temperado igual, que é um método de afinação em que a oitava é dividida em 12 semitons exatamente iguais, garantindo uniformidade entre todos os intervalos.

Desde o século XVIII, a escala temperada (ou temperamento igual) tem sido o sistema de afinação mais empregado na música ocidental. Segundo Med (1996), o sistema temperado abandona a afinação perfeita do sistema natural pelo uso do sistema cromático, privilegiando projeções harmônicas sobre cálculos físicos e acústica pura. O sistema natural é mais afinado, porém bastante complexo. Já o sistema temperado que consiste na divisão da oitava em doze semitons iguais, garantindo uniformidade entre todos os intervalos, é menos afinado, no entanto mais prático.

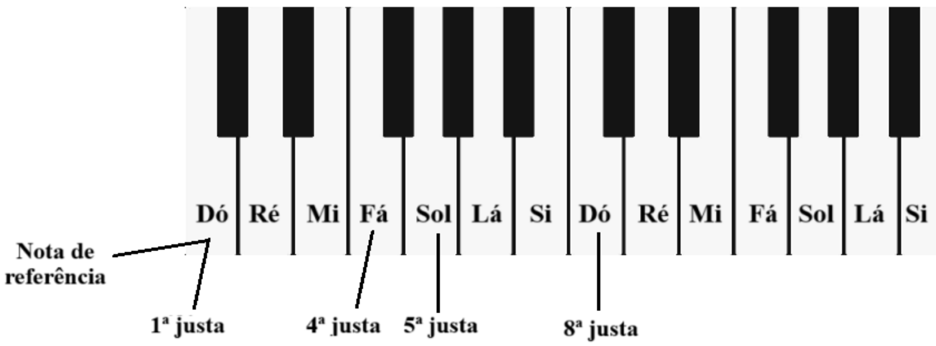
3.3.8 Intervalos justos, menores e maiores

Na música, um intervalo refere-se à distância em altura (frequência sonora) entre duas notas. Segundo Med (1996, p. 60), o intervalo representa a variação de altura entre dois tons, a conexão existente entre duas alturas e a distância que separa dois sons.

Os intervalos justos são aqueles que soam estáveis e consonantes, sendo considerados "perfeitos". Eles são conhecidos como: **primeira justa**; **quarta justa**; **quinta justa** e **oitava justa.** A primeira justa, também chamada de uníssono, ocorre quando dois sons possuem a mesma altura (mesma frequência) e o mesmo nome. A quarta justa corresponde ao intervalo de dois tons e um semitom; por exemplo, de Dó para Fá, cuja razão de frequência é 4:3. Já a quinta justa equivale a três tons e um semitom, como de Dó para Sol, com razão de frequência de 3:2. Por fim, a oitava justa é formada por dois sons da mesma nota, separados por cinco tons e dois semitons, mantendo entre si a proporção de 2:1 nas frequências.

Na Figura 10, ao tomar a tonalidade de Dó como referência, temos Dó, Fá, Sol e Dó como 1ª, 4ª, 5ª e 8ª justas, respectivamente.

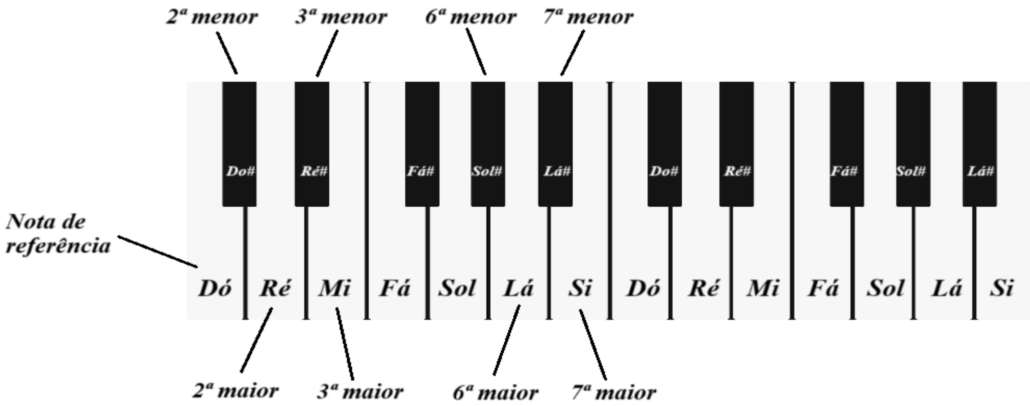
Figura 10 – Intervalos justos de Dó em um piano



Fonte: Elaborado pelo autor

Por outro lado, pode-se dizer que os intervalos maiores e menores são todos os intervalos que compõem toda uma oitava, excluindo os intervalos justos. Eles são conhecidos como: **segunda menor**, **segunda maior**, **terceira menor**, **terceira maior**, **sexta menor**, **sexta maior**, **sétima menor e sétima maior.** Tomando a nota Dó como referência, esses intervalos são formados, respectivamente, por: um semitom, um tom, um tom mais um semitom, dois tons, quatro tons, quatro tons mais um semitom, cinco tom e cinco tom mais um semitom.

Figura 11 – intervalos maiores e menores



Fonte: Elaborado pelo autor

O menor intervalo (um semitom) ocorre quando temos duas teclas consecutivas e a cada duas teclas consecutivas no piano obtemos um tom como intervalo. Com isso, se considerarmos, por exemplo, a primeira nota Ré da esquerda para a direita, da Figura 11, notaremos que a distância dela para a nota de referência (Dó) é de um tom, pois é preciso deslocar-se por 2 teclas consecutivas do Dó para o Do$^{\#}$ e do Do$^{\#}$ para o Ré. A distância de um tom indica que ela é a segunda maior. Da mesma forma, se considerarmos a nota Sol$^{\#}$ ela está a 4 tons da nota de referência (Dó), pois é preciso deslocar-se por 8 teclas consecutivas da nota de referência até ela. Logo, ela é a sexta menor. É importante saber que a nota Lá^{b} está localizada na mesma tecla da nota Sol$^{\#}$, ou seja, ambas possuem a mesma altura sonora na escala temperada (enarmônicos). Assim, conhecendo as distâncias dos intervalos menores e maiores e aplicando a mesma ideia conseguimos identificá-las no piano como se apresenta na Figura 11.

É importante saber que a nota Lá^{b} está localizada na mesma tecla da nota Sol$^{\#}$ citado anteriormente, ou seja, ambas possuem a mesma altura sonora na escala temperada, o que conhecemos na música como enarmônicos. Isso acontece em todas as notas sustenidos, logo temos: Dó$^{\#}$ = Ré^{b}, Ré$^{\#}$ = Mi^{b}, Fá$^{\#}$ = Sol^{b} e Sol$^{\#}$ = Lá^{b}, Lá$^{\#}$ = Si^{b}.

3.3.9 Escalas musicais

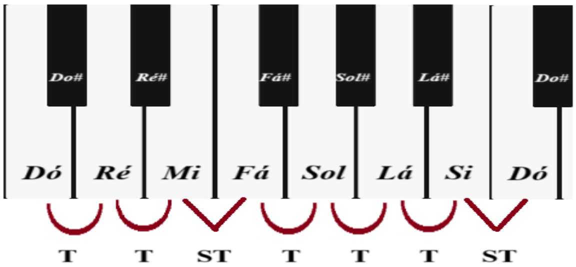
A palavra "escala" vem do latim e significa escada. Na música, uma escala é uma sequência de notas dentro de uma oitava, seguindo um padrão de tons (T) e semitons (ST). A oitava ocorre quando um ciclo de notas se repete, começando na tônica e terminando novamente nela em uma oitava acima (crescente) ou abaixo (decrescente). As escalas podem ser ascendentes ou descendentes. A escala ascendente é caracterizada por notas sucessivas que produzem um som cada vez mais agudo, com aumento na frequência em hertz. Por outro lado, a escala descendente é definida por notas sucessivas que produzem um som cada vez mais grave, com redução na frequência em hertz.

Essas escalas podem ser cromáticas ou diatônicas. As cromáticas são aquelas cujos sons se sucedem somente por semitons e as diatônicas os sons se sucedem por tons e semitons que se organizam dependendo da escala. A palavra “diatônica” vem do grego e significa “através dos tons”, ressaltando a alternância entre intervalos maiores e menores que geram equilíbrio e variedade melódica. A escala diatônica pode ser classificada como maior ou menor. A escala diatônica maior é formada pela seguinte sequência de intervalos:

T – T – ST – T – T – T – ST

Essa estrutura cria uma sonoridade clara e alegre, típica da música ocidental. Cada nota da escala pode servir como base para a construção de acordes dentro da tonalidade. Ela é amplamente utilizada em melodias, harmonias e como referência para o estudo de modos e progressões musicais. A escala diatônica maior é uma das mais importantes da música ocidental, formada por sete notas distintas dentro da oitava. Por exemplo, a escala de Dó maior é formada pelas notas Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si. Observe a estrutura dessa escala na Figura 12 representada nas teclas de um piano.

Figura 12 – Escala diatônica maior da nota Dó



Fonte: Elaborado pelo autor

Já a escala diatônica menor é formada por sete notas com uma sequência específica de tons e semitons que confere um caráter mais sombrio ou melancólico à música. Existem três formas principais: natural, harmônica e melódica, cada uma com pequenas variações nos intervalos. Neste trabalho citaremos apenas a estrutura da escala diatônica menor natural que é formada pela seguinte sequência de intervalos:

T – ST – T – T – ST – T – T

Se fossemos escrever as notas que compõem a escala diatônica menor da nota Dó, teríamos as seguintes notas: Dó, Ré, Mi^{b}, Fá, Sol, Lá^{b}, Si^{b}, Dó. O esquema a seguir mostra essas notas com os intervalos que as separam.

Dó – T – **Ré** – ST – **Mi**^{b} – T – **Fá** – T – **Sol** – ST – **Lá**^{b} – T – **Si**^{b} – T – **Dó**

Além dessas escalas apresentadas existem muitas outras diferentes, e é muito difícil listar todas elas, pois novas escalas podem ser criadas e utilizadas por compositores e músicos. Além disso, não é o objetivo desse estudo exaurir todas as escalas, mas fornecer uma visão geral e uma base para entender a estrutura e a aplicação a partir das escalas mais comuns.

3.4 CONCEITOS SONOROS

O som está presente em todos os aspectos da vida humana, desde os fenômenos naturais mais simples até as formas mais sofisticadas de expressão artística. Na música, o som transcende sua natureza puramente física e se transforma em linguagem, meio de comunicação e forma de arte. Para entender essa linguagem, é essencial estar familiarizado com os conceitos sonoros que a organizam, tais como altura, duração, intensidade e timbre. Esses elementos, em suas combinações e variações, constituem a base da experiência musical, permitindo a composição de melodias, harmonias e ritmos.

Este tópico tem como objetivo definir o som e apresentar os principais conceitos sonoros, destacando suas características, funções e importância.

3.4.1 Som

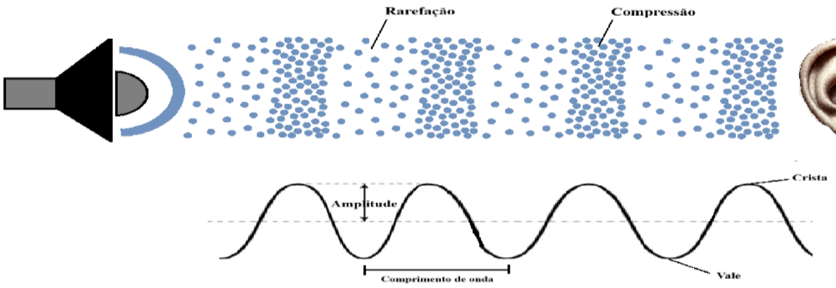
De acordo com Med (1996, p. 11), “Som é sensação produzida no ouvido pelas vibrações de corpos elásticos. Uma vibração põe em movimento o ar na forma de ondas sonoras que se propagam em todas as direções simultaneamente”. Ao bater no diapasão (Figura 13), provocamos uma perturbação que faz vibrar o ar e que se propaga até ser captada por nosso ouvido externo e direcionada para o canal auditivo atingindo as membranas do tímpano que vibram em resposta às ondas sonoras. Essas vibrações são transmitidas para o ouvido médio que é composto pelos três ossos (martelo, bigorna e estribo) que amplificam as vibrações do tímpano e transmite para o ouvido interno que é composto pela cóclea, que é responsável por converter as vibrações em sinais elétricos que são enviados ao cérebro que as identifica como tipos diferentes de som.

Figura 13 – Diapasão com frequência sonora da nota Lá (440Hz)

Fonte: <https://www.ensinolab.com.br/diapasao-de-440-hz-com-martelo>

Com relação a onda sonora, se considerarmos o som produzido por um alto-falante, como na Figura 14, onde os pontinhos representam moléculas de ar. Percebe-se que em algumas regiões, as moléculas estão mais concentradas; em outras estão mais rarefeitas. São estas regiões de **compressão** e **rarefação** que viajam pelo ar e constituem a onda sonora.

Figura 14 – Representação da onda sonora



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que, para que haja a propagação do som é necessário a presença de um meio. As ondas de som são transmitidas através do ar e de outros materiais (sólidos, líquidos e gasosos). Se o mesmo alto-falante da Figura 14 fosse colocado para emitir som dentro de uma campânula de vidro sem ar, não seria escutado som algum, ou seja, o som não se propaga no vácuo. Além disso, a rapidez de propagação do som depende das condições do vento, da temperatura e da umidade. Ela não depende do volume de som ou de sua frequência; todos os sons propagam com a mesma velocidade. Se considerarmos a temperatura ambiente normal de cerca de 20°C, o som se propaga com uma rapidez de 340 metros por segundo.

A maioria dos sons são ondas produzidas por vibrações de objetos materiais. Em um piano, um violino e em uma guitarra o som é produzido pelas vibrações das cordas; em um saxofone, pela vibração de uma palheta; em uma flauta, pela vibração de uma coluna de ar no bocal. Sua voz é o resultado da vibração de suas cordas vocais.

Em cada um desses casos, a vibração original estimula a vibração de algo maior e mais massivo, tal como a caixa de ressonância de um instrumento de corda, a coluna de ar em um instrumento de sopro ou de palheta, ou o ar do interior da boca e da garganta de um cantor. Este material vibrante, então, envia uma perturbação através do meio circundante, normalmente o ar, em forma de ondas longitudinais. Sob condições ordinárias, as frequências da fonte de vibração e do som produzido são as mesmas.

3.4.2 Propriedades do som

O som tem várias propriedades importantes que o definem e o caracterizam. Segundo Lacerda (1967) e Med (1996), as que se destacam são: duração, intensidade, altura e timbre. Seguem suas definições:

> DURAÇÃO - tempo de produção do som. INTENSIDADE - propriedade do som de ser mais fraco ou mais forte. ALTURA - propriedade do som de ser mais grave ou mais agudo. TIMBRE - qualidade do som, que permite reconhecer a sua origem. (LACERDA, 1967, p. 1).

Observe que a definição de duração é autoexplicativa, com isso nos atentaremos em definir com mais detalhes as demais propriedades.

3.4.2.1 Intensidade

A intensidade do som está ligada à energia ou força com que uma onda sonora atinge o ouvido humano. É o que nos permite diferenciar um som forte (alto volume) de um som fraco (baixo volume). Ela depende da amplitude das vibrações de pressão no interior da onda sonora e pode ser definida como a potência sonora que atinge uma unidade de área, e é medida em unidades de $\mathrm{W/m^2}$ (watts por metro quadrado), ou ainda, a intensidade do som é uma quantidade relacionada com a energia transportada pela onda e depende da potência de vibração da fonte emissora, quanto maior for a quantidade de energia transportada por unidade de tempo, maior é a intensidade do som que perceberemos.

O ouvido humano reage a intensidades que abrangem uma faixa enorme desde $10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ (o limiar da audição) até mais de $1\,\mathrm{W/m^2}$ (o limiar da dor). Como esta faixa é muito grande, utilizam-se escalas de potencias de dez para as intensidades, em que a intensidade dificilmente audível de $10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ é tomada como a intensidade de referência e chamada de 0 decibel, uma unidade que homenageia Alexandre Graham Bell e representa o nível sonoro. Como um bel configura uma diferença muito grande de nível sonora usa-se mais o seu submúltiplo decibel, que equivale a 1/10 do bel (deci = décima parte) e é abreviado como dB. A Quadro 5 lista alguns sons típicos e suas intensidades e níveis sonoro.

Quadro 5 – Intensidade e nível sonoro de algumas fontes comuns

Fonte Sonora	Intensidade (W/m^2)	Nível Sonoro (dB)
Avião a jato a 30m de distância	10^2	140
Sirene de alarme, próxima	1	120
Show de rock	10^{-1}	110
Buzina	10^{-3}	100
Tráfego na rua movimentada	10^{-5}	70
Conversação em casa	10^{-6}	60
Ruido baixo em casa	10^{-8}	40
Murmúrio	10^{-10}	20
Farfalhar de folhas de árvores	10^{-11}	10
Limiar de audição	10^{-12}	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Esses dados do Quadro 5 nos mostram a grande variação na intensidade e no nível sonoro de diferentes fontes sonoras. É importante estar ciente dos níveis de som aos quais estamos expostos, pois sons muito altos podem causar danos auditivos permanentes. Sons acima de 85 dB são considerados potencialmente prejudiciais se a exposição for prolongada. Portanto, é essencial tomar medidas para proteger a audição em ambientes ruidosos.

3.4.2.2 Altura

A altura de um som é determinada pela frequência das vibrações da onda sonora. Um som muito agudo, como o produzido por um flautim, possui uma alta frequência de vibração. Por outro lado, um som grave, como o de um trovão, tem uma baixa frequência de vibração. É importante destacar que, no uso cotidiano, é comum usar as palavras "alto" e "baixo" para se referir à intensidade do som. No entanto, de acordo com a física, isso é incorreto e deve ser evitado. Um som agudo é um som de alta frequência, enquanto um som grave é um som de baixa frequência. A intensidade, por sua vez, está diretamente relacionada à amplitude da onda sonora, como discutido na seção 3.4.2.1.

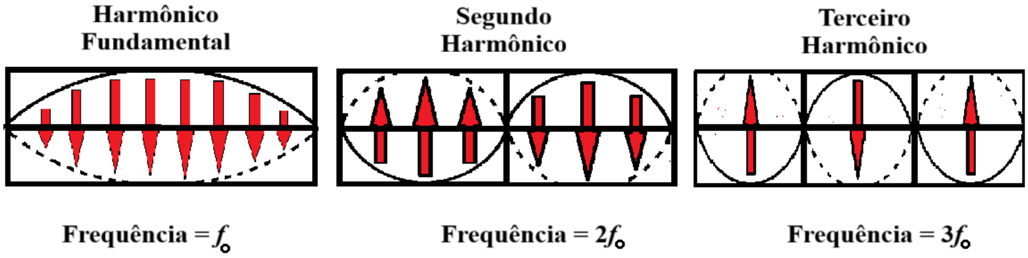
O ouvido de uma pessoa jovem normalmente pode escutar sons com alturas correspondentes à faixa de frequências entre aproximadamente 20 e 20.000 hertz. Com o envelhecimento, os limites da audição humana encolhem, especialmente na parte das frequências altas. Ondas sonoras com frequências abaixo de 20 hertz são infra-sônicas, enquanto as com frequências superiores a 20.000 hertz são denominadas ultra-sônicas. Não podemos escutar as ondas sonoras desses dois tipos.

Na música, a altura está diretamente ligada as notas musicais. Cada nota apresenta uma frequência bem definida, por exemplo, a nota Lá$_0$ que é a mais grave de um piano, tem frequência de 27,5 Hz, enquanto o Lá$_7$ que é a mais aguda, possui frequência de 3520 Hz. Quando um conjunto de notas é organizado de acordo com suas alturas, obtemos as escalas, que nos permitem criar melodias e estruturar harmonias.

3.4.2.3 Timbre

Não temos problemas em distinguir entre o som de um piano e um violino, para a mesma nota. Cada um desses sons tem uma característica sonora que difere em **timbre,** ou qualidade. A maioria dos sons musicais é formada pela superposição de muitos sons com frequências diferentes. Esses vários sons são chamados de **componentes de frequência,** ou simplesmente componentes. A frequência mais baixa deles, chamada **frequência fundamental** (f_0), determina a altura da nota. Aquelas componentes de frequência que são múltiplas inteiras da frequência fundamental são chamadas de **harmônicos**. Um tom com frequência duas vezes maior do que a frequência fundamental (f_0) é o segundo harmônico, um tom com três vezes a frequência fundamental (f_0) é o terceiro harmônico, e assim por diante (Figura 15).

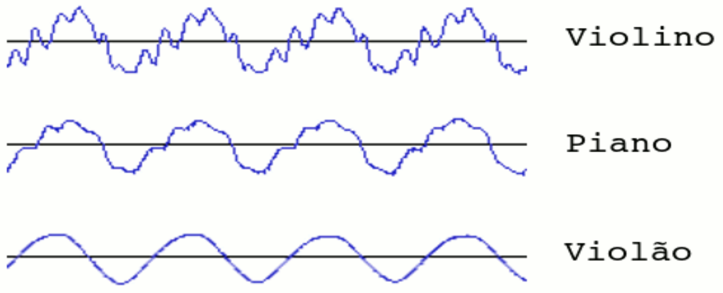
Figura 15 – Representação dos três harmônicos de uma corda vibrante



Fonte: Elaborado pelo autor

O timbre de um som é determinado pela presença e pela intensidade relativa das várias componentes. O som produzido por uma certa nota do violino, por um piano e aquele produzido por um violão todos de mesma altura, têm timbres diferentes, que o ouvido reconhece por serem diferentes as componentes que os formam (ver Figura 16).

Figura 16 – representação das ondas sonoras de diferentes timbres



Fonte: Desconhecida

Portanto, Timbre é a qualidade sonora que permite identificar a fonte de um som e distinguir sons de diferentes fontes, mesmo que tenham a mesma altura e intensidade. Está diretamente relacionado ao formato da onda sonora.

3.5 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Percebemos que o conceito de sequências ou sucessão está fortemente enraizado no dia a dia das pessoas, devido à nossa necessidade de procurar regularidades entre elementos de um mesmo conjunto. Há várias situações no nosso cotidiano em que nos deparamos com o conceito de sequência, como por exemplo: a sequência dos dias da semana (segunda, terça, quarta, ...), a sequência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, março, ...), a sequência melódica de uma música (Dó, Ré, Mí, Fá, ...), a sequência rítmica de uma música (semibreve, mínima, colcheia, ...), a sequência dos números naturais (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...) e etc.

Observa-se que cada componente dos conjuntos mencionados pode ser ligado a um único componente dos conjuntos de números naturais (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...), como por exemplo (janeiro - 1° mês, fevereiro - 2° mês, março - 3° mês, ...) Quando isso ocorre, criamos uma sequência, um padrão. Portanto, podemos definir sequência de forma informal como qualquer agrupamento ou conjunto que esteja organizado em uma determinada ordem. Para o estudo da matemática, as sequências que nos interessam são as denominadas sequências numéricas.

Segundo Ávila (1999, p. 16), "Uma sequência numérica a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... é uma função f, definida no conjunto dos números naturais, ou inteiros positivos: $f\colon n \mapsto f(n) = a_n$. O número n que aí aparece é chamado o *índice* e a_n o $n-ésimo$ elemento da sequência, ou

$termo\ geral$". Por exemplo, se considerarmos a sequência dos números quadrados perfeitos, então sua representação será dada por $a_n = n^2$, onde $n = 1, 2, 3, ...$

As sequências numéricas podem ser classificadas em relação à quantidade de termos e através da função que a define. Com relação a quantidade de termos, ela pode ser finita se possuir um número limitado de termos, a qual pode ser representada como $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, ou infinita se possuir um número ilimitado de termos representada por $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$. Quanto a função que a define, a sequência numérica pode ser linear quando a função que a define é uma função linear, ou não linear se a função que a define é não linear.

3.5.1 Lei de formação de uma sequência numérica

De acordo com Paiva (1995, p. 4), "Uma sequência fica determinada se cada termo a_n for expresso em função de sua posição n", com $a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Esse tipo de lei de formação é expresso através de uma fórmula fechada. Temos um exemplo ao considerar a sequência finita f cujos termos obedecem à lei de formação $a_n = 3n - 1$, com $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Logo, temos:

$$a_1 = 3.1 - 1 = 2$$
$$a_2 = 3.2 - 1 = 5$$
$$a_3 = 3.3 - 1 = 8$$
$$a_4 = 3.4 - 1 = 11$$
$$\therefore\ f = (2, 5, 8, 11)$$

Paiva (1995, p. 4) também afirma que "uma sequência fica determinada se conhecemos um de seus termos e uma sentença que expresse cada termo em função de seu antecessor (ou sucessor). O conjunto de informações que determina a sequência dessa maneira é denominado lei de formação por recorrência", em outras palavras, é uma regra que nos possibilita calcular um termo qualquer de uma sequência com base em seu antecessor ou sucessor imediato, denominando-a como uma lei de formação recursiva. Veja a seguir um exemplo de como determinar o quinto termo de uma sequência representada por uma lei de formação recursiva dada como $X_{n+1} = (X_n)^2 + 1, X_1 = 0$. Observe a solução a seguir:

$$Para\ n = 1 \Rightarrow X_2 = {X_1}^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$$
$$Para\ n = 2 \Rightarrow X_3 = {X_2}^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$
$$Para\ n = 3 \Rightarrow X_4 = {X_3}^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$Para\, n = 4 \Rightarrow X_5 = {X_4}^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$$
$$\therefore X_5 = 26$$

Uma recorrência, por si só, não define a sequência. É necessário identificar o(s) primeiro(s) termo(s) para que a sequência seja completamente definida.

3.5.2 Recorrências lineares

Definimos uma recorrência como linear quando a função que relaciona os termos da sequência for do primeiro grau. Existem recorrências lineares de ordem qualquer, no entanto, vamos citar principalmente as recorrências lineares de primeira e segunda ordem.

3.5.2.1 Recorrência Linear de Primeira Ordem

Definição 3.1. Uma recorrência é dita linear de 1ª ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele e são apresentadas no seguinte formato:

$$X_{n+1} = g(n)X_n + h(n), \qquad com\ \ g(n) \neq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

onde $g(n)$ e $h(n)$ são funções de $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a recorrência é homogênea, se $h(n) = 0$. Caso contrário ela será não-homogênea. Vejamos alguns exemplos de recorrências lineares e não-lineares.

Exemplos:

a) $X_{n+1} = nX_n$ (Recorrência linear e homogênea)
b) $X_{n+1} = nX_n + n + 1$ (Recorrência linear e não-homogênea)
c) $X_{n+1} = X_n^2$ (Recorrência não-linear e homogênea)
d) $X_{n+1} = X_n^2 + 2n$ (Recorrência não-linear e não-homogênea)

Ao resolver uma recorrência, a meta é descobrir uma fórmula fechada para a recorrência, isto é, uma expressão que possibilite o cálculo de X_n apenas em função de n. Nos exemplos seguintes, observaremos que a resolução de uma recorrência linear de primeira ordem não apresenta grandes desafios.

Exemplo 3.1: Resolver a recorrência $X_{n+1} = X_n + 4$, com $X_1 = 2$.

Solução

$$X_1 = 2$$
$$Para\, n = 1 \Rightarrow X_2 = X_1 + 4$$
$$Para\, n = 2 \Rightarrow X_3 = X_2 + 4$$
$$Para\, n = 3 \Rightarrow X_4 = X_3 + 4$$
....
$$Para\, n = n \Rightarrow X_n = X_{n-1} + 4$$

Somando temos:

$$X_n = 2 + \underbrace{4 + 4 + \cdots + 4}_{(n-1)\ vezes}$$
$$\therefore\ X_n = 2 + 4(n-1)$$

Exemplo 3.2: Resolva a recorrência $X_{n+1} = 5X_n$, com $X_1 = 2$.

Solução

$$X_1 = 2$$
$$Para\, n = 1 \Rightarrow X_2 = 5X_1$$
$$Para\, n = 2 \Rightarrow X_3 = 5X_2$$
$$Para\, n = 3 \Rightarrow X_4 = 5X_3$$
....
$$Para\, n = n \Rightarrow X_n = 5X_{n-1}$$

Multiplicando temos:

$$X_n = 2.\underbrace{5.5.5.5.\ldots.5}_{(n-1)\ vezes}$$
$$\therefore X_n = 2.5^{n-1}$$

3.5.2.2 Recorrência Linear de Segunda Ordem

Definição 3.2. Uma recorrência é dita linear de segunda ordem quando aparece na equação de recorrência um termo em função de seus dois antecessores imediatos, ou seja, tem o seguinte formato:

$$X_{n+2} + g(n)X_{n+1} + f(n)X_n + k(n) = 0,$$

Onde as funções g, f e k são funções cujos domínios são o conjunto dos números naturais e $f(n)$ nunca se anula. Além disso, se $k(n) = 0$, a recorrência é dita homogênea, caso contrário ela será não-homogênea.

Primeiramente será tratado sobre as recorrências lineares de segunda ordem homogênea, ou seja, quando $g(n)$ e $f(n)$ são constantes e $k(n) = 0$. Essas recorrências são da forma:

$$X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0, \text{ com } q \neq 0$$

Esse tipo de recorrência é associado a uma equação do segundo grau, que é denominada equação característica:

$$x^2 + px + q = 0, \text{ com } q \neq 0$$

Teorema 3.1: Se as raízes de $x^2 + px + q = 0$ são x_1 e x_2, com $x_1 \neq x_2$, então $X_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n$ é solução da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração:

Seja a recorrência

$$X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$$

Substituindo $X_n = C_1 x^n + C_2 x^n$ na recorrência, temos

$$C_1 x_1^{n+2} + C_2 x_2^{n+2} + p(C_1 x_1^{n+1} + C_2 x_2^{n+1}) + q(C_1 x_1^n + C_2 x_2^n) = 0$$
$$\Leftrightarrow C_1 x_1^n x_1^2 + C_2 x_2^n x_2^2 + p(C_1 x_1^n x_1^1 + C_2 x_2^n x_2^1) + q(C_1 x_1^n + C_2 x_2^n) = 0$$
$$\Leftrightarrow C_1 x_1^n x_1^2 + C_2 x_2^n x_2^2 + pC_1 x_1^n x_1^1 + pC_2 x_2^n x_2^1 + qC_1 x_1^n + qC_2 x_2^n = 0$$
$$\Leftrightarrow C_1 x_1^n (x_1^2 + px_1 + q) + C_2 x_2^n (x_2^2 + px_2 + q) = 0$$

Como $x^2 + px + q = 0$, temos

$$C_1 x_1^n 0 + C_2 x_2^n 0 = 0$$

Portanto X_n é solução.

Exemplo 3.3: Resolva a recorrência $X_{n+2} + 5X_{n+1} + 6X_n = 0$.

Solução

A equação característica da recorrência é: $x^2 + 5x + 6 = 0$ e possui raízes $x_1 = -2$ e $x_2 = -3$. Como $x_1 \neq x_2$, de acordo com o teorema a solução para essa recorrência é da forma:

$$X_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n$$

Substituindo as raízes temos que todas as sequências da forma $X_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n$ são soluções da recorrência.

Teorema 3.2: Se as raízes de $x^2 + px + q = 0$ são iguais, $x_1 = x_2 = x$, então, $X_n = C_1 x_1^n + C_2 n x_2^n$ é uma solução da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração:

Temos que a soma das raízes é dada por:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{1}$$

Como $x_1 = x_2 = x$ temos que

$$x + x = -p \Rightarrow \ x = -\frac{p}{2}$$

Seja a recorrência

$$X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$$

Substituindo $X_n = C_1 x^n + C_2 n x^n$ na recorrência, temos

$$\begin{aligned}
& C_1 x^{n+2} + C_2(n+2)x^{n+2} + p(C_1 x^{n+1} + C_2(n+1)x^{n+1}) + q(C_1 x^n + C_2 n x^n) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & C_1 x^n x^2 + C_2(n+2)x^n x^2 + p(C_1 x^n x^1 + C_2(n+1)x^n x^1) + q(C_1 x^n + C_2 n x^n) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & C_1 x^n x^2 + C_2 n x^n x^2 + C_2 2 x^n x^2 + p(C_1 x^n x^1 + C_2 n x^n x^1 + C_2 x^n x^1) \\
& \qquad + q(C_1 x^n + C_2 n x^n) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & C_1 x^n x^2 + C_2 n x^n x^2 + C_2 2 x^n x^2 + pC_1 x^n x^1 + pC_2 n x^n x^1 + pC_2 x^n x^1 + qC_1 x^n \\
& \qquad + qC_2 n x^n = 0 \\
\Leftrightarrow\ & C_1 x^n(x^2 + px + q) + C_2 n x^n(x^2 + px + q) + C_2 x^n x(2x + p) = 0
\end{aligned}$$

Como $x^2 + px + q = 0$, e $2x + p = 0$ temos

$$C_1 x^n 0 + C_2 n x^n 0 + C_2 x^n x 0 = 0$$

Portanto X_n é solução.

Exemplo: Resolva a recorrência $X_{n+2} + 6X_{n+1} + 9X_n = 0$.

Solução

A equação característica da recorrência é: $x^2 + 6x + 9 = 0$ e possui raízes $x_1 = -3$ e $x_2 = -3$. Como $x_1 = x_2$, de acordo com o teorema a solução para essa recorrência é da forma:

$$X_n = C_1 x_1^n + C_2 n x_2^n$$

Substituindo as raízes temos que todas as sequências da forma $X_n = C_1(-3)^n + C_2 n(-3)^n$ são soluções da recorrência.

3.5.3 Progressão aritmética

Definição 3.3. Uma Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior somado a uma constante, chamada de razão. Em outras palavras, a diferença entre termos consecutivos é sempre a mesma.

As progressões aritméticas podem ser classificadas quanto ao número de termos e quanto à razão. Quanto ao número de termos a progressão aritmética será finita quando possuir um número finito de termos ou infinita quando apresentar um número infinito de termos. Já quanto à razão, será crescente quando $r > 0$, constante ou estacionária quando $r = 0$, ou decrescente quando $r < 0$.

Teorema 3.3. O termo geral de uma progressão aritmética é dado por:

$$X_n = X_1 + (n-1)r, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Onde r é a razão da PA.

Demonstração:

Considere a proposição $P(n)$: $X_n = X_1 + (n-1)r, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

I. Base da indução: Para $n = 1$, temos

$$X_1 = X_1 + (1-1)r = X_1 + 0.r = X_1$$

Logo $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$.

II. Passo indutivo: Suponha que a proposição é válida para $n = k$, ou seja, $P(k)$ é válida para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. isto é,

$$X_k = X_1 + (k-1)r.$$

III. Tese: Precisamos provar que a proposição é verdadeira para $n = k + 1$, que $P(k+1)$ é válida. Ou seja,

$$X_k = X_1 + (k-1)r \Rightarrow X_{k+1} = X_1 + kr.$$

Pela definição da progressão aritmética temos:

$$X_{k+1} = X_k + r$$

Usando a hipótese de indução para X_k:

$$X_{k+1} = [X_1 + (k-1)r] + r$$

$$\Leftrightarrow X_{k+1} = X_1 + (k-1)r + r$$

$$\Leftrightarrow X_{k+1} = X_1 + (k-1+1)r$$

$$\Leftrightarrow X_{k+1} = X_1 + kr$$

Portanto, a proposição vale para $k+1$.

Com isso, concluímos pelo princípio da indução matemática, que

$$X_n = X_1 + (n-1)r$$

é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.

Teorema 3.4. A soma dos n termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{(X_1 + X_n)n}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Demonstração:

Considere a proposição $P(n)$: $X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = S_n = \frac{(X_1+X_n)n}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

I. Base da indução: Para $n = 1$, temos

$$S_1 = \frac{(X_1 + X_1).1}{2} = \frac{2X_1}{2} = X_1$$

$\therefore P(1)$ é verdadeira.

II. Passo indutivo: Suponha que a proposição é válida para $n = k$, ou seja, $P(k)$ é válida para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$; isto é

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_k = S_k = \frac{(X_1 + X_k)k}{2}.$$

III. Tese: Precisamos provar que a proposição é verdadeira para $n = k+1$, que $P(k+1)$ é válida. Logo,

$$S_k = \frac{(X_1 + X_k)k}{2} \Rightarrow S_{k+1} = \frac{(X_1 + X_{k+1})(k+1)}{2}$$

Note que:

$$S_{k+1} = S_k + X_{k+1} \tag{1}$$

Temos também pelo termo geral da Progressão Aritmética (Teorema 3.3):

$$X_{k+1} = X_1 + kr, \tag{2}$$

onde r é razão.

Substituindo (2) em (1), fica:

$$S_{k+1} = S_k + X_1 + kr$$

Aplicando a hipótese de indução, temos

$$S_{k+1} = \frac{(X_1 + X_k)k}{2} + X_1 + kr$$
$$\Leftrightarrow 2S_{k+1} = (X_1 + X_k)k + 2X_1 + 2kr$$
$$\Leftrightarrow 2S_{k+1} = kX_1 + kX_k + X_1 + X_1 + kr + kr$$
$$\Leftrightarrow 2S_{k+1} = (k+1)X_1 + (X_k + r)k + X_1 + kr$$

Note que: $X_k + r = X_{k+1}$ e $X_1 + kr = X_{k+1}$. Logo,

$$2S_{k+1} = (k+1)X_1 + kX_{k+1} + X_{k+1}$$
$$\Leftrightarrow 2S_{k+1} = (k+1)X_1 + (k+1)X_{k+1}$$
$$\Leftrightarrow 2S_{k+1} = (X_1 + X_{k+1})(k+1)$$
$$\Leftrightarrow S_{k+1} = \frac{(X_1 + X_{k+1})(k+1)}{2}$$

Portanto, a proposição vale para $k + 1$.

Com isso, concluímos pelo princípio da induçãoo matemática, que

$$S_n = \frac{(X_1 + X_n)n}{2}$$

é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.

3.5.4 Progressão geométrica

As progressões geométricas aparecem entre as sequências mais usadas no dia a dia, sendo empregadas em várias circunstâncias, como no cálculo de juros compostos na área financeira, na simulação do crescimento populacional na biologia, no decaimento radioativo na física, na expansão de dados na tecnologia, e em uma sequência harmônica na música, entre outras. É importante observar que qualquer progressão geométrica (a_{n}) de razão q e primeiro termo a pode ser definida recorrentemente por $a_{\text{n}+1} = q.a_{\text{n}}$ com $n > 1$ e $a_1 = a$.

Definição. "Progressão Geométrica (PG) é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de números $\{a_i\}$, diferentes de zero e denominados termos, na qual o quociente entre cada termo a_i e o seu antecedente a_{i-1} é um valor constante chamado razão". Assim,

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = q \quad \forall i > 1,$$

onde q é a razão da PG.

Seja uma progressão geométrica de razão q e termo geral a_n. Podemos classificar essa PG em:

a) Crescente: Se $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.
b) Decrescente: Se $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.
c) Constante: Se, e somente se, sua razão é igual a 1 ou se todos os seus termos forem nulos.
d) Oscilantes: Se, e somente se, $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

Teorema 3.5. O termo geral de uma progressão geométrica é dado por

$$a_n = a_1.q^{n-1}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Demonstração:

Considere a proposição $P(n)$: $a_n = a_1.q^{n-1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$

I. Base da indução: Para $n = 1$, temos

$$a_1 = a_1.q^{1-1} = a_1.q^0 = a_1$$

Logo $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$.

II. Passo indutivo: Suponha que a proposição é válida para $n = k$, ou seja, $P(k)$ é válida para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. isto é,

$$a_k = a_1.q^{k-1}$$

III. Tese: Precisamos provar que a proposição é verdadeira para $n = k + 1$, que $P(k + 1)$ é válida. Ou seja,

$$a_k = a_1.q^{k-1} \quad \Rightarrow \quad a_{k+1} = a_1.q^k$$

Pela definição de PG cada termo seguinte é obtido multiplicando o anterior pela razão:

$$a_{k+1} = a_k . q.$$

Aplicando a hipótese de indução:

$$a_{k+1} = (a_1 . q^{k-1}). q$$

$$\Leftrightarrow a_{k+1} = a_1 . q^{k-1+1}$$

$$\Leftrightarrow a_{k+1} = a_1 . q^k$$

Portanto, a proposição vale para $k + 1$.

Com isso, concluímos pelo princípio da indução matemática, que

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.

Teorema 3.6. A soma (S_n) dos n primeiros termos de uma PG, com termo geral a_n e de razão $q > 1$, dada por:

$$S_n = a_1 . \frac{(q^n - 1)}{q - 1}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Demonstração

Considere a proposição $P(n)$: $S_n = a_1 . \frac{(q^n-1)}{q-1}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$

I. Base da indução: Para $n = 1$, temos

$$S_1 = a_1 . \frac{(q^1 - 1)}{q - 1} = a_1 . \frac{q - 1}{q - 1} = a_1 \, .$$

Logo $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$.

II. Passo indutivo: Suponha que a proposição é válida para $n = k$, ou seja, $P(k)$ é válida para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. isto é,

$$S_k = a_1 . \frac{(q^k - 1)}{q - 1}.$$

III. Tese: Precisamos provar que a proposição é verdadeira para $n = k + 1$. Verifiquemos que a proposição $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja,

$$S_k = a_1 . \frac{(q^k - 1)}{q - 1} \ \Rightarrow\ S_{k+1} = a_1 . \frac{(q^{k+1} - 1)}{q - 1}$$

por definição:

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = S_k + a_1.q^k\ .$$

Aplicando a hipótese de indução:

$$S_{k+1} = a_1.\frac{(q^k - 1)}{q - 1} + a_1.q^k$$

$$\Leftrightarrow S_{k+1} = \frac{a_1.(q^k - 1) + a_1.q^k(q - 1)}{q - 1}$$

$$\Leftrightarrow S_{k+1} = \frac{a_1.(q^k - 1 + q^{k+1} - q^k)}{q - 1}$$

$$\Leftrightarrow S_{k+1} = \frac{a_1.(-1 + q^{k+1})}{q - 1}$$

$$\Leftrightarrow S_{k+1} = a_1.\frac{(q^{k+1} - 1)}{q - 1}\ .$$

Portanto, a proposição vale para $k + 1$.

Com isso, concluímos pelo princípio da indução matemática, que

$$S_n = a_1.\frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.

Para o caso em que $q = 1$, todos os termos são iguais a a_1, assim temos:

$$S_n = n.a_1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

Teorema 3.7: Sejam a_1, q $\in$ $\mathbb{R}$. Considere a sequência geométrica de termos

$$a_n = a_1.q^{n-1}, \quad com \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Definimos a soma parcial S_n pelos primeiros n termos:

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n = a_1 + a_1 q + a_1.q^2 + \cdots + a_1.q^{n-1}.$$

$$a)\ \ Se\ |q| < 1, então\ a\ série\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ converge\ e\ S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

$$b)\ \ Se\ |q| \geq 1\ e\ a_1 \neq 0, então\ a\ série\ \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}\ diverge.$$

A seguir faremos apenas a demonstração para o caso do item a).

Demonstração

Pelo teorema 3.6, temos que $S_n = a_1 . \dfrac{(q^n - 1)}{q - 1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$

Como $|q| < 1$, então $q^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 . \frac{(q^n - 1)}{q - 1} = a_1 . \frac{(0 - 1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

3.6 MATEMÁTICA E MÚSICA

Segundo Abdounur (2006), o primeiro registro da música em conjunto com a matemática ocorreu através de Pitágoras e seus métodos empíricos, no século VI a.C. Originário de *Samos*, na Grécia, a maior parte do conhecimento sobre o filósofo é fundamentada em mitos e poucos documentos oficiais. Supõe-se que Pitágoras era oriundo de uma família rica, razão pela qual fez muitas viagens ao longo de sua vida, inclusive tendo sido aluno de Tales em Mileto.

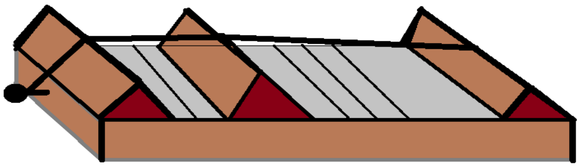
O método mais antigo de elaboração de escalas é conhecido como escala pitagórica. O sistema é muito anterior a Pitágoras (cerca de 550 a.C.), porém seu nome está ligado à fundamentação teórica, em termos matemáticos, de sua elaboração. Lendas chegaram até nós através do escritor romano Boécio, juntamente com outros, descrevendo como Pitágoras "descobriu" essa escala. Segundo estes, Pitágoras percebeu as relações harmônicas dos sons produzidos pelos martelos na forja de um ferreiro. Pesquisas posteriores revelaram que as massas desses martelos estavam, de maneira surpreendente, em proporção simples de números inteiros. Com base nessa suposta observação, Pitágoras teria chegado à conclusão de que sons consonantais e razões simples de números estão interligados e que, no final das contas, a música e a matemática possuem a mesma fundação fundamental.

3.6.1 A escala pitagórica

Pitágoras chegou às relações entre as notas de uma escala musical através de um instrumento chamado monocórdio. Conforme Abdounur (2006), Pitágoras observou, ao passar por uma oficina onde trabalhadores batiam martelos em metais, que os sons produzidos entre os martelos geravam uma consonância. Depois de pedir que os trabalhadores trocassem os martelos, ele novamente observou que a harmonia persistia. Ao examinar esses martelos, o grego determinou suas respectivas massas: o primeiro atingiu 12 kg, o segundo 9 kg, o terceiro 8 kg e o quarto 6 kg (desconhece-se a medida exata utilizada).

Pitágoras percebeu as seguintes relações entre as massas do martelo: $\frac{3}{4}$ do primeiro para o segundo, $\frac{2}{3}$ do primeiro para o terceiro e $\frac{1}{2}$ do primeiro para o quarto. Então, o filósofo decidiu realizar um novo experimento, iniciando a criação do monocórdio, um instrumento composto apenas por uma corda (ver figura 17).

Figura 17 – monocórdio de Pitágoras



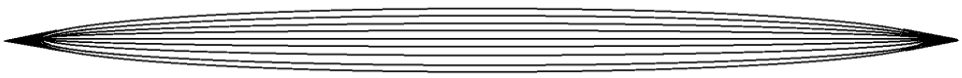
Fonte: Elaborado pelo autor

Inicialmente, Pitágoras apenas comparava a intensidade sonora entre as notas executadas. No entanto, ao posicionar o cavalete no centro do instrumento, dividindo a corda na razão de $\frac{1}{2}$, ele percebeu um som que se assemelhava ao original (sem o cavalete central), porém com uma oitava mais alta, ou seja, a corda vibrava com uma frequência maior. Pitágoras, então, começou a dividir o monocórdio com as mesmas razões obtidas nos martelos, dando origem à primeira escala musical.

Não é complicado construir uma escala com base na intuição pitagórica. A estratégia é tomar qualquer nota e produzir outras relacionadas a ela por simples razões de números inteiros, na confiança de que, segundo os princípios pitagóricos, as notas resultantes soarão consoantes. Em última análise, a estrutura dessa escala se fundamenta nas simples razões de frequência de 2:1 e 3:1.

Em relação a uma corda dedilhada, diferentes notas podem ser geradas de acordo com a vibração da corda, o que parece estar em conformidade com a observação pitagórica. Assim, considere uma corda que vibra e produz uma nota de frequência f (ver figura 18).

Figura 18 – Corda vibrante



Fonte: Elaborado pelo autor

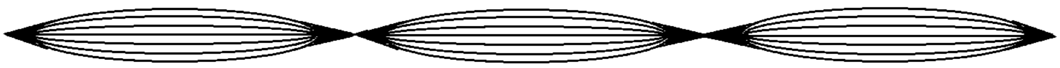
A mesma corda também pode vibrar como o dobro da frequência original, emitindo a nota de frequência $2f$. O intervalo entre a nota nova e a original é dado pela razão das frequências, $2f$:f ou 2:1, uma oitava (ver figura 19).

Figura 19 – Corda vibrante

Fonte: Elaborado pelo autor

Se a corda vibrasse com três vezes a frequência original, ela soaria uma nota de frequência $3f$ (ver figura 20).

Figura 20 – Corda vibrante



Fonte: Elaborado pelo autor

O intervalo entre as notas de frequências $3f$ e $2f$ é 3:2, ou $\frac{3}{2}$. Assim, a nota uma oitava abaixo de $3f$ é $\frac{3}{2}f$, e o intervalo entre a nota com frequência f e esta nota é $\frac{3}{2}$.

Agora temos uma escala de três notas $\{f, \frac{3}{2}f, 2f\}$. Se tomarmos a nota com frequência f como a nota Dó, por exemplo, com Dó' uma oitava acima, então teremos no Quadro 6 a representação dessa escala.

Quadro 6 – Escala de três notas

Notas	C (Dó)	G (Sol)	C' (Dó')
Frequências	f	$\frac{3}{2}f$	$2f$

Fonte: Elaborado pelo autor

Este processo não só gerou uma nova nota Sol, como também estabeleceu um novo intervalo. Nosso intervalo anterior, entre Dó e Sol, é chamado de quinta justa, e o novo intervalo entre Sol e Dó' é chamado de quarta justa. A razão correspondente à quinta justa é $\frac{3}{2}$, como vimos, enquanto a quarta justa tem razão $2f$:$\frac{3}{2}f$, ou $\frac{4}{3}$.

Agora possuímos uma técnica para produzir mais notas. Se diminuirmos a nota Do' em uma quinta justa, dividindo sua frequência por $\frac{3}{2}$, obtemos a nota Fá de frequência $\frac{4}{3}f$. Ela fica entre Dó e Sol, e a escala resultante é a apresentada no Quadro 7.

Quadro 7 – Escala com quatro notas

Notas	C (Dó)	F (Fá)	G (Sol)	C' (Dó')
Frequências	f	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$2f$

Fonte: Elaborado pelo autor

O processo de criação da escala é essencialmente interativo: cada nova nota produz um novo intervalo com seu vizinho mais próximo, que pode ser utilizado para gerar novas notas. Continuando dessa forma, obtemos o intervalo entre Fá e Sol. Este é chamado de segunda maior, ou tom inteiro, e tem razão $\frac{3}{2}f : \frac{4}{3}f$, ou seja, $\frac{9}{8}$. Este novo intervalo, por sua vez, dá origem a uma nova nota, abaixando simultaneamente Fá e Sol em uma quarta justa: a nova nota, um tom inteiro acima de Dó é Ré. Agora podemos usar o intervalo de tons inteiros para preencher as lacunas na escala (ver Quadro 8).

Quadro 8 – Escala com as sete notas e os intervalos

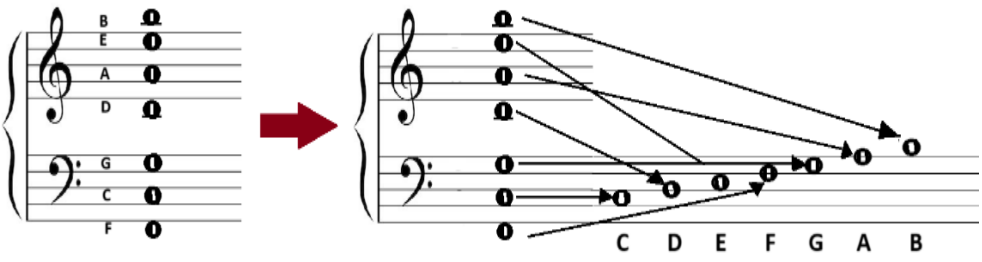
Notas	C (Dó)	D (Ré)	E (Mi)	F (Fá)	G (Sol)	A (Lá)	B (Si)	C' (Dó')
Frequências	$\frac{1}{1}f$	$\frac{9}{8}f$	$\frac{81}{64}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{27}{16}f$	$\frac{243}{128}f$	$\frac{2}{1}f$
Intervalo	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	

Fonte: Elaborado pelo autor

Cada um dos intervalos "estreitos" resultantes de Mi para Fá e de Si para Dó' é uma segunda menor, ou semitom, e tem uma razão de $\frac{4}{3}:\frac{81}{64}$, que é $\frac{256}{243}$. Além disso, outros dois novos intervalos aparecem, incluindo a terça maior de Dó para Mi, com razão $\frac{81}{64}$, a sexta maior de Dó para Lá, com razão $\frac{27}{16}$, e a sétima maior de Dó para Si, com razão de $\frac{243}{128}$. Chegamos então à escala pitagórica, e denotamos o conjunto resultante de notas por **P**.

Uma visão alternativa é considerar a escala como sendo formada por uma sucessão de quintas justas, começando em Dó. Nessa visão, formamos as cinco notas que são quintas justas sucessivas acima de Dó, e a nota que é uma quinta justa abaixo de Dó. Então, remontamos essas notas em uma única oitava (ver figura 21). O resultado desse processo é equivalente ao anterior, pois na escala resultante, notas sucessivas são separadas por um intervalo de um tom, com razão $\frac{9}{8}$, ou um semitom, com razão $\frac{256}{243}$.

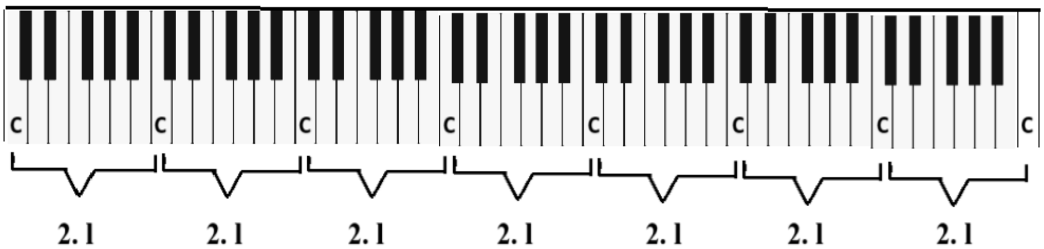
Figura 21 – Escala pitagórica



Fonte: Elaborado pelo autor

O semitom é na verdade menor do que seu nome sugere, pois $\left(\frac{256}{243}\right)^2$ é menor que $\frac{9}{8}$, portanto, não é um semitom em nenhum sentido preciso! Veremos mais tarde que isso leva a sérios problemas: por exemplo, em um teclado moderno (figura 22), parece que doze quintas justas equivalem a sete oitavas. No entanto, se a afinação for pitagórica, isso não pode ser o caso, como veremos mais adiante.

Figura 22 – Sete oitavas no teclado de um piano



Fonte: Elaborado pelo autor

De forma mais geral, se nos atermos às oitavas e quintas justas, apenas os números 2 e 3 (e suas potencias) podem ser incluídos nesses cálculos de razão. Assim, cada nota na escala pitagórica pode ser escrita simplesmente como 2^p e 3^q, onde p e q são números inteiros: aqui, e de agora em diante, omitimos o fator f. A escala **P** pode, portanto, ser representada da forma expressa no Quadro 9.

Quadro 9 – Notas na Escala pitagórica (**P**) escritas em potencias de base 2 e 3

Notas	C (Dó)	D (Ré)	E (Mi)	F (Fá)	G (Sol)	A (Lá)	B (Si)	C' (Dó')
Frequências	1	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao explorar mais a fundo a maneira como as notas da escala pitagórica se combinam, nos deparamos com um problema. Suponha que desejamos encontrar a nota uma sétima maior acima de lá $\left(\frac{3^3}{2^4}\right)$: essa nota é $\frac{3^3}{2^4} \times \frac{3^5}{2^7} = \frac{3^8}{2^{11}}$. Abaixando essa nota em uma oitava, obtemos $\frac{3^8}{2^{12}}$, que deve estar em algum lugar entre Sol e Lá (Já que $\frac{3}{2} < \frac{3^8}{2^{12}} < \frac{3^3}{2^4}$). Isso nos leva a perceber que a escala pitagórica não é "fechada" sob transposição, mas as regras sob as quais construímos a escala levarão a um número indefinido de novas notas. Isso leva a problemas se quisermos construir uma escala (em particular, uma escala fisicamente incorporada, como um teclado) que permite a transposição de teclas.

3.6.2 Transposição na escala pitagórica

Construímos a escala pitagórica **P** por meio de uma secessão de transposições da nota fundamental Dó: em cada caso, transpusemos uma quinta acima (multiplicando sua frequência por $\frac{3}{2}$) e, quando necessário, descemos a nota resultante uma oitava (reduzindo sua frequência à metade). Uma boa maneira de ver o que está acontecendo na questão problemática que acaba de surgir na seção anterior, ou seja, um número aparentemente indefinido de novas notas sendo produzidas, é considerar o efeito das mesmas transposições em toda a escala **P**. Isso leva a outra escala pitagórica? As mesmas notas estão envolvidas?

Vamos construir uma nova escala na nota Sol. Para isso, transpomos a escala pitagórica original $\mathbf{P^1}$ para cima em uma quinta e, quando necessário, transpomos uma oitava para baixo. A escala $\mathbf{P^1}$ resultante inclui a maioria das notas do próprio **P**, como resultado da regularidade parcial da distribuição dos intervalos entre as notas originais:

[tom-tom-semitom] - tom - [tom-tom-semitom]

No entanto, há um elemento 'novo', a nota $\frac{3^6}{2^9}$: esta nota situa-se entre as notas Fá e Sol existentes, uma vez que $\frac{2^2}{3} < \frac{3^6}{2^9} < \frac{3}{2}$. Esta nova nota é o conhecido Fá sustenido ($F^\sharp$), e é necessária quando transpomos da escala de Dó para a escala de Sol. Ela não se encontra simetricamente entre Fá e Sol, uma vez que o intervalo $\frac{3^7}{2^{11}}$ entre Fá e Fá$^\sharp$ é ligeiramente maior que o intervalo $\frac{3^8}{2^5}$ entre Fá$^\sharp$ e Sol (ver Quadro 10).

Quadro 10 – Escala de Dó (**P**) e de Sol (**P^1**) escritas em potencias de base 2 e 3

Notas	Dó		Ré		Mi	Fá	Fá$^\sharp$	Sol		Lá		Si	Dó’
P	1		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$	2
P^1	1		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$	2

Fonte: Elaborado pelo autor

De forma semelhante, uma nova escala pode ser construída sobre a nota Fá. Neste caso, dividimos as frequências de cada nota por $\frac{3}{2}$ e, quando necessário, transpomos uma oitava acima. Esta nova escala, que podemos chamar de **P$_1$**, contém novamente um elemento “desconhecido”, com frequência $\frac{2^4}{3^2}$, que é o familiar Si bemol, escrito Si$^\flat$, da tonalidade de Fá. Novamente, esta nova nota situa-se entre duas notas existentes, Lá e Si, visto que $\frac{3^3}{2^4} < \frac{2^4}{3^2} < \frac{3^5}{2^7}$, e novamente não simetricamente, visto que $\frac{2^8}{3^5}$ é menor que $\frac{3^7}{2^{11}}$: portanto, a nova nota é menor que a média geométrica das duas notas de cada lado dela (ver Quadro 11).

Quadro 11 – Escala de Dó (**P**) e de Fá (**P$_1$**) escritas em potencias de base 2 e 3

Notas	**Dó**		**Ré**		**Mi**	**Fá**	**Fá$^\sharp$**	**Sol**		**Lá**	**Si$^\flat$**	**Si**	**Dó’**
P	1		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$	2
P$_1$	1		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$		2

Fonte: Elaborado pelo autor

Continuando dessa forma, geramos sucessivamente uma nova nota entre um par de notas antigas, com cada nova nota ligeiramente acima ou abaixo da média geométrica de suas vizinhas. Após seis transposições em cada direção, chegamos às escalas **P^6** e **P$_6$**, opostas, em cada fileira das quais apenas uma nota (Fá ou Si, respectivamente) sobreviveu da escala **P** original.

Na Tabela 12, as notas da fileira superior correspondem à tonalidade de Fá$^\sharp$ e as da fileira inferior correspondem à de Sol$^\flat$. Comparando essas duas escalas, podemos ver que todas as notas da escala Sol$^\flat$ são ligeiramente mais graves que as da escala Fá$^\sharp$. Em particular, sob a transposição para a tonalidade Fá♯, a nota tonal original Dó tornou-se $\frac{3^6}{2^9}$, enquanto sob sua transposição para Sol♭ tornou-se $\frac{2^{10}}{3^6}$. O intervalo entre essas notas é $\left(\frac{3^6}{2^9}\right)/\left(\frac{2^{10}}{3^6}\right)$, o que simplifica para $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ ou $1{,}01364$ .... Essa diferença muito pequena, chamada de virgula pitagórica, está na raiz das contradições inerentes à escala pitagórica. Embora 3^{12} e 2^{19} sejam muito próximas, elas não são a mesma coisa (ver Quadro 12).

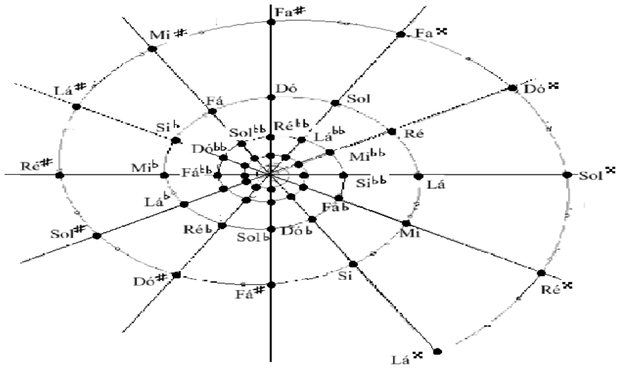
Quadro 12 – Razão das notas escritas em potencias de base 2 e 3 de todas as escalas

Notas	**Dó**	**Dó♯**	**Ré**	**Ré♯**	**Mi**	**Fá**	**Fá♯**	**Sol**	**Sol♯**	**Lá**	**Lá♯**	**Si**	**Dó’**	
P^6		$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$		$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^8}{2^{12}}$		$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^5}{2^7}$		**Fá♯**
P^5		$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^8}{2^{12}}$		$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^5}{2^7}$		**Si**
P^4		$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$		**Mi**
P^3		$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$		**Lá**
P^2		$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$		**Ré**
P^1	1		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$	2	**Sol**
P	1		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$	2	**Dó**
P_1	1		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$		2	**Fá**
P_2	1		$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$		2	**Si♭**
P_3	1		$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^4}{3^2}$		2	**Mi♭**
P_4	1	$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^4}{3^2}$		2	**Lá♭**
P_5	1	$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$		$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^4}{3^2}$		2	**Ré♭**
P_6		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$		$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{2^{12}}{3^7}$		**Sol♭**

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, deparamo-nos com o fato de que não há fim para o processo que iniciamos: a transposição de uma quinta para cima e a transposição de uma quinta para baixo nos levam a jornadas infinitas, sempre gerando novas notas, mesmo que algumas delas (como Sol♭ e Fa♯) sejam tentadoramente próximas. A jornada pode ser imaginada como a travessia de uma espiral, partindo do nosso conjunto **P** (representada por Dó): para cada passo de 30° no sentido horário, espiralamos para fora e transpomos uma quinta para cima, enquanto para cada passo 30° no sentido anti-horário, espiralamos para dentro e transpomos uma quinta para baixo. Pontos adjacente no mesmo raio da espiral diferem pela virgula pitagórica (ver Figura 23).

Figura 23 – Espiral de quintas pitagóricas



Fonte: Elaborado pelo autor

A Espiral de Quintas Pitagóricas, também conhecida como Círculo de Quintas, é uma representação visual das relações entre as 12 notas da escala musical, onde cada nota está a uma quinta justa de distância da seguinte. É um conceito fundamental na teoria musical, com raízes na afinação pitagórica e que ajuda a entender as relações tonais e as modulações entre as diferentes tonalidades.

3.6.3 A escala temperada

Após a definição de notas pitagóricas surgiram outras afinações como: a afinação justa e o temperamento médio. A afinação justa é um sistema de organização sonora que busca construir escalas a partir de razões numéricas simples, extraídas da série harmônica natural. Já o temperamento médio é um sistema de afinação/temperamento que foi muito utilizado na música dos séculos XVI e XVII. Ele surgiu como uma alternativa entre a afinação justa (muito pura, mas restrita a poucas tonalidades) e a necessidade crescente de usar diferentes tonalidades na prática musical renascentista e barroca. Esses modelos possuíam uma boa estrutura no que se refere a sons consonantes, mas são limitadas no quesito transposição tonal que é extremamente importante na música.

A solução musical envolvia uniformizar os intervalos mantendo as razões que geram boas consonâncias, pois intervalos iguais geram proporções iguais. Era necessário partir de uma frequência inicial f e sua oitava $2f$, determinando outros tons nesse intervalo. Isso levou ao temperamento igual, que resolve a transposição tonal e é adotado por quase todos. Diversas abordagens surgiram para a construção do alfabeto musical, conforme Abdounur destaca.

> O temperamento não aconteceu como um processo repentino, desenvolvendo-se de diversas maneiras como no temperamento desigual, o de tom médio etc. No início do século XVI, como as tentativas de preencher intervalos naturais de maneira relativamente simétrica sempre defrontavam-se em algum momento com a coma fatal. (ABDOUNUR, 2015, p.110)

Um fato relevante sobre o ciclo das quintas de Pitágoras é que, ao tomar 12 quintas e retornar 7 oitavas, obtém-se praticamente o mesmo som. Considerando um som de frequência 55Hz referente ao Lá_1 (está localizado na segunda oitava mais grave de um piano), ao tomar 12 quintas, a frequência aproximada será de 7.136,05 Hz, ou seja, tomando $f_{\text{Lá1}} = 55Hz$ (a frequência da nota Lá_2), $\text{I} = \frac{3}{2}$ (o intervalo entre quintas) e $a = 12$ (a quantidade de quintas tomadas), então

$$f_{\text{Lá1}} \,.\, \text{I}^{a} \Rightarrow 55.\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 7.136{,}05 \text{ Hz}$$

Agora, se dividirmos 7.136,05 Hz por 2 e o resultado novamente dividido por 2 e assim sucessivamente repetindo esse processo por 7 vezes, isso é equivalente a voltarmos 7 oitavas. Assim, obteremos como resultado um som de frequência aproximadamente 55,75 Hz. Isto é,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} . \left(\frac{1}{2}\right)^{7} \approx 55{,}75$$

Essa diferença é conhecida como a vírgula pitagórica que é uma pequena diferença de afinação que surge quando se constrói uma escala musical utilizando apenas intervalos de quintas justas.

O temperamento igual, ajusta o fator da quinta $\left(\frac{3}{2}\right)$ para que 12 quintas resultem em uma oitava. Isso sacrifica a precisão da quinta pela simetria. Então, qual fator define a quinta? A matemática ainda ajuda na sistematização musical. Considere o fator "a" que define a quinta e uma frequência inicial "f". Devemos determinar "a" de modo que:

$$f.a^{12} = 2\,.f,$$

logo,

$$a^{12} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[12]{2}.$$

Assim, o fator que uniformiza o intervalo entre notas na escala cromática é $\sqrt[12]{2}$, distribuindo igualmente a diferença de 0,75 que causa o desencontro dos ciclos. Isso caracteriza o temperamento igual.

3.6.4 A música e a progressão geométrica

A música, além de ser uma forma de expressão artística, contém em sua estrutura conceitos matemáticos que elucidam a organização dos sons. Um exemplo claro disso é a ligação entre a escala musical temperada e a progressão geométrica, uma vez que as frequências das notas não crescem de maneira linear, mas sim multiplicando-se por uma razão constante. Essa relação evidencia como a matemática apoia a música, possibilitando a compreensão da lógica envolvida na criação das escalas, na afinação dos instrumentos e na harmonia dos sons.

As escalas musicais surgiram na música grega antiga. O progresso foi notável no século XVII, com os desafios de harmonia, transposição e modulação das escalas justas, derivadas das consonâncias perfeitas estabelecidas por Pitágoras, resultando no desenvolvimento de uma escala musical cujos intervalos eram igualmente espaçados, conhecida como escala temperada (Roederer, 1998, cap. 5.5). Esse progresso resultou num novo modelo de intervalos na música, impulsionado, entre outros, pelo proeminente músico clássico alemão Johann Sebastian Bach (1685-1750) (Carpeaux, 1999, p. De 86-104). Bach compôs várias obras (prelúdios e fugas) explorando as novas oportunidades proporcionadas pelo temperamento, como as infinitas possibilidades de modulação tonal.

Mas o que a escala temperada e Bach têm a ver com a Matemática? A conexão é que a escala se baseia na sequência das doze notas musicais, criando intervalos igualmente espaçados entre elas, até atingir a oitava. Portanto, elaborou-se uma sequência geométrica de doze intervalos, que se tornou a fundação da Música ocidental contemporânea, de onde surgiram todas as escalas musicais comumente utilizadas.

É conhecido que a diferenciação de sons, percebida pelo ouvido, acontece porque notas distintas têm alturas (frequências) distintas. Portanto, o que define a qualidade de uma nota pura como "alta" ou "baixa" é a sua frequência vibratória maior ou menor. Assim, podemos definir o intervalo entre duas notas como a razão entre suas frequências. Logo, temos $\mathrm{I} = \frac{f_1}{f_2}$, de onde obtemos, por exemplo, $\mathrm{I} = \frac{3}{2}$, $\mathrm{I} = \frac{4}{3}$ e $\mathrm{I} = 2$ para os respectivos intervalos de quinta, quarta e oitava justas.

Toda escala musical inicia e encerra na mesma nota musical, separada por um intervalo de oitava. Isso significa que começa com uma nota de frequência "f" e termina com a mesma nota, agora com frequência "$2f$". podemos, então, afirmar que a estrutura harmônica contemporânea é fundamentada neste padrão de intervalos, chamado de escala temperada ou escala cromática. A oitava é a distância entre duas notas onde uma delas tem o dobro de frequência em relação à outra. Portanto, para elaborarmos a escala cromática, partimos o intervalo de oitava em 12 segmentos, resultando em doze intervalos idênticos, conhecidos como semitons. Assim, como já havíamos falado anteriormente, a frequência de cada nota da escala cromática será $\sqrt[12]{2}$ (raiz duodécima de dois) vezes maior que a sua anterior, definindo, como dissemos acima, uma progressão de razão igual a $\sqrt[12]{2}$. No Quadro 13, montamos a escala cromática do Lá$_3$ ($f = 220$ Hz), associando a termos de uma progressão geométrica.

Quadro 13 – Escala cromática de La$_3$ e a progressão geométrica

NOTA	**SÍMBOLO**	**TERMOS DA PROGRESSÃO GEOMETRICA** $\boldsymbol{a_n = 220(\sqrt[12]{2})^{n-1}}$	**FREQUÊNCIA (Hz)**
Lá$_3$	A_3	$\boldsymbol{a_1 = 220}$	220
Lá$_3^{\#}$/Si$_3^{b}$	$A_3^{\#}/B_3^{b}$	$\boldsymbol{a_2 = 220(\sqrt[12]{2})^1 = 233,081880}$	233
Si$_3$	B_3	$\boldsymbol{a_3 = 220(\sqrt[12]{2})^2 = 246,941650}$ ...	247
Dó$_4$	C_4	$\boldsymbol{a_4 = 220(\sqrt[12]{2})^3 = 261,625565}$ ...	261
Dó$_4^{\#}$/Ré$_4^{b}$	$C_4^{\#}/D_4^{b}$	$\boldsymbol{a_5 = 220(\sqrt[12]{2})^4 = 277,182630}$ ...	277
Ré$_4$	D_4	$\boldsymbol{a_6 = 220(\sqrt[12]{2})^5 = 293,664767}$ ...	293
Ré$_4^{\#}$/Mi$_4^{b}$	$D_4^{\#}/E_4^{b}$	$\boldsymbol{a_7 = 220(\sqrt[12]{2})^6 = 311,126983}$ ...	311
Mi$_4$	E_4	$\boldsymbol{a_8 = 220(\sqrt[12]{2})^7 = 329,627556...}$	330
Fá$_4$	F_4	$\boldsymbol{a_9 = 220(\sqrt[12]{2})^8 = 349,228231}$ ...	349
Fá$_4^{\#}$/Sol$_4^{b}$	$F_4^{\#}/G_4^{b}$	$\boldsymbol{a_{10} = 220(\sqrt[12]{2})^9 = 369,994422}$ ...	370
Sol$_4$	G_4	$\boldsymbol{a_{11} = 220(\sqrt[12]{2})^{10} = 391,995435}$ ...	392
Sol$_4^{\#}$/Lá$_4^{b}$	$G_4^{\#}/A_4^{b}$	$\boldsymbol{a_{12} = 220(\sqrt[12]{2})^{11} = 415,304697}$ ...	415
Lá$_4$	A_4	$\boldsymbol{a_{13} = 220(\sqrt[12]{2})^{12} = 440}$	440

Fonte: Elaborado pelo autor

Sendo a frequência da tônica (Lá$_3$) igual a 220 Hz e da sua oitava (Lá$_4$), 440 Hz, a razão entre estas duas frequências é exatamente 2. Sendo assim, o Lá$_5$ terá frequência 880 Hz, o Lá$_6$ terá frequência 1760 Hz, e assim por diante, até o limite da audição humana.

Assim, ao investigar as frequências das notas musicais, podemos descobrir uma progressão geométrica que fundamenta a compreensão de conceitos matemáticos, como razão, lei de formação e termo geral de uma sequência. Com base nesse conceito, sugerimos, como parte da sequência didática, uma atividade prática que relaciona as frequências de notas produzidas por um instrumento musical em intervalos que formam uma progressão geométrica.

3.7 SÍNTESE TEÓRICA INTEGRADORA

O presente capítulo apresentou os principais referenciais teóricos e conceituais que sustentam a proposta de uma sequência didática interdisciplinar para o ensino de Progressão Geométrica (PG), articulando matemática e música como campos complementares de conhecimento. A integração desses referenciais não ocorre de forma fragmentada, mas converge para uma base teórica coesa que fundamenta tanto a concepção quanto a organização pedagógica da sequência didática desenvolvida neste trabalho.

O pensamento analógico, conforme proposto por Abdounur (2006), constitui o eixo epistemológico central da proposta. Esse tipo de raciocínio possibilita a construção de significados a partir da identificação de semelhanças estruturais entre objetos de naturezas distintas, ainda que pertencentes a domínios diferentes do saber. Ao relacionar conceitos matemáticos, como sequências numéricas e progressões geométricas, a conceitos musicais e sonoros, como escalas, frequências e intervalos, a sequência didática promove a criação de pontes cognitivas que favorecem a compreensão conceitual. Nesse sentido, a analogia atua como um mediador didático, permitindo que os estudantes interpretem a Progressão Geométrica não apenas como uma estrutura algébrica abstrata, mas como um fenômeno presente na organização da música e dos sons.

Essa perspectiva se articula diretamente com a interdisciplinaridade, entendida como um processo de integração entre áreas do conhecimento, fundamentado no diálogo, na complementaridade e na contextualização dos saberes (FAZENDA, 1995). Ao aproximar matemática e música, a proposta rompe com a fragmentação curricular tradicional e oferece aos estudantes uma visão mais integrada do conhecimento, conforme defendido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pelas diretrizes educacionais brasileiras. A sequência didática se ancora nessa concepção interdisciplinar ao explorar conteúdos matemáticos a partir de situações musicais concretas, favorecendo a aprendizagem significativa e a atribuição de sentido aos conceitos estudados.

Os conceitos musicais apresentados — como notas, escalas, intervalos, compassos e figuras musicais — cumprem um papel fundamental na operacionalização dessa interdisciplinaridade. Eles fornecem o contexto simbólico e estrutural necessário para estabelecer relações com a Progressão Geométrica, especialmente quando se analisam as razões entre frequências sonoras, a organização das escalas musicais e os processos de transposição. Ao serem incorporados às atividades da sequência didática, esses conceitos deixam de ser apenas elementos teóricos e passam a funcionar como instrumentos pedagógicos que favorecem a visualização e a compreensão dos padrões matemáticos.

De forma complementar, os conceitos sonoros, como frequência, altura, intensidade e timbre, reforçam a dimensão física e perceptiva da música, ampliando as possibilidades de exploração didática. A relação entre frequência sonora e altura musical, por exemplo, evidencia uma estrutura multiplicativa que pode ser modelada matematicamente por uma Progressão Geométrica. Assim, o estudo dos fenômenos sonoros permite que os alunos percebam a matemática como uma ferramenta para descrever e compreender fenômenos naturais e artísticos, fortalecendo o vínculo entre teoria e prática.

Por fim, os conceitos de sequências numéricas e de Progressão Geométrica constituem o núcleo matemático da proposta. Ao serem abordados em diálogo com a música, esses conceitos deixam de ser apresentados apenas por meio de fórmulas e procedimentos algébricos, passando a ser explorados por meio de padrões, regularidades e relações proporcionais observáveis em contextos musicais. A Progressão Geométrica, nesse sentido, emerge como um modelo matemático capaz de explicar a organização das escalas, a relação entre notas e a construção histórica de sistemas de afinação, como a escala pitagórica e a escala temperada.

Dessa forma, a sequência didática proposta neste trabalho se apoia em uma base teórica integrada, na qual o pensamento analógico orienta a construção de significados, a interdisciplinaridade organiza a prática pedagógica, e os conceitos musicais, sonoros e matemáticos atuam de maneira articulada. Essa integração sustenta uma abordagem metodológica que valoriza a contextualização, a participação ativa dos estudantes e a aprendizagem significativa, contribuindo para um ensino de Progressão Geométrica mais dinâmico, motivador e conceitualmente consistente.

4 METODOLOGIA

Este capítulo descreve os procedimentos metodológicos adotados no desenvolvimento da pesquisa, apresentando o tipo e a abordagem do estudo, o contexto e os participantes, os instrumentos e procedimentos de coleta de dados, as etapas de aplicação da sequência didática e os critérios utilizados para a análise dos dados. A metodologia foi definida de modo a garantir coerência com os objetivos propostos e com os referenciais teóricos que fundamentam este trabalho.

4.1 TIPO E ABORDAGEM DA PESQUISA

A presente pesquisa caracteriza-se como qualitativa, de natureza aplicada, uma vez que busca compreender fenômenos educacionais a partir da interpretação dos sujeitos envolvidos, ao mesmo tempo em que propõe e implementa uma intervenção pedagógica concreta no contexto escolar.

Segundo Denzin e Lincoln (2006), a pesquisa qualitativa permite analisar os fenômenos em seus contextos naturais, considerando os significados atribuídos pelos participantes às experiências vivenciadas. Nesse sentido, este estudo não se limita à mensuração de resultados, mas prioriza a compreensão do processo de ensino-aprendizagem da Progressão Geométrica mediado pela integração entre matemática e música.

Além disso, trata-se de uma pesquisa aplicada, pois resulta na elaboração e implementação de uma sequência didática com potencial de utilização por outros docentes, característica comum às investigações desenvolvidas no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). A proposta visa contribuir diretamente para a prática pedagógica, buscando soluções para dificuldades observadas no ensino desse conteúdo matemático.

A escolha pela abordagem qualitativa justifica-se pela natureza do problema investigado e pelos objetivos deste estudo, que se concentram na compreensão do processo de ensino-aprendizagem da Progressão Geométrica mediado por uma proposta interdisciplinar entre matemática e música. Diferentemente de abordagens quantitativas, que priorizam a mensuração de resultados, a pesquisa qualitativa permite analisar os significados atribuídos pelos estudantes às experiências vivenciadas, bem como as interações, estratégias cognitivas e percepções construídas ao longo da aplicação da sequência didática.

Segundo Gibbs (2009), uma característica fundamental dos dados qualitativos é que eles surgem de praticamente todas as formas de comunicação humana, seja ela escrita, auditiva ou visual, sendo o texto escrito um dos métodos empregados na seleção de dados qualitativos.

Portanto, a transcrição de entrevistas, anotações de campo de pesquisa etnográfica, relatórios de observações, respostas a perguntas abertas e fechadas de um questionário, entre outros tipos de documentos, podem ser empregados para análise.

Essa abordagem mostra-se particularmente adequada ao contexto educacional, uma vez que possibilita investigar fenômenos em seu ambiente natural, considerando a complexidade da sala de aula e a singularidade dos sujeitos envolvidos. Assim, o método qualitativo permite captar aspectos do processo educativo que não seriam plenamente apreendidos apenas por meio de dados numéricos, tais como o engajamento dos alunos, a construção de analogias e a compreensão conceitual emergente.

No que se refere à validade da pesquisa, foram adotadas diferentes estratégias com o intuito de conferir maior rigor metodológico ao estudo. Destaca-se, inicialmente, a triangulação de instrumentos, por meio do uso combinado de questionários, atividades práticas, registros escritos dos alunos e observações do professor-pesquisador, o que possibilitou a análise do fenômeno sob múltiplas perspectivas. Além disso, a coleta de dados ocorreu ao longo de todo o processo de aplicação da sequência didática, permitindo uma análise contínua e contextualizada das aprendizagens e das dificuldades apresentadas pelos estudantes.

Outro aspecto relevante para a validade do estudo foi a coerência interna entre os referenciais teóricos, a metodologia adotada e a proposta pedagógica, assegurando que os procedimentos de coleta e análise dos dados estivessem alinhados aos objetivos da pesquisa. Por fim, a descrição detalhada do contexto, dos participantes, dos instrumentos e das etapas da sequência didática contribui para a transparência do estudo e possibilita que outros pesquisadores ou professores compreendam, avaliem e, eventualmente, adaptem a proposta a realidades semelhantes.

4.2 CONTEXTO E PARTICIPANTES

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública da rede estadual de ensino, localizada no município de Mocajuba, no estado do Pará. A instituição atende alunos do Ensino Médio, provenientes majoritariamente de contextos socioeconômicos diversos, característica comum às escolas públicas da região.

A aplicação da sequência didática ocorreu em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, escolhida por contemplar, em seu currículo, o estudo das Progressões Geométricas, conteúdo central desta pesquisa. Participaram do estudo 19 alunos que estavam regularmente matriculados e frequentes no período da aplicação da proposta.

Os estudantes apresentavam níveis variados de desempenho em Matemática, com dificuldades recorrentes relacionadas a conteúdos algébricos, especialmente no que se refere à compreensão de sequências numéricas, razões e padrões multiplicativos, conforme observado e relatado pelo professor-colaborador ao longo do ano letivo. Tais dificuldades reforçaram a necessidade de uma abordagem pedagógica diferenciada, capaz de promover maior engajamento e compreensão conceitual.

O professor-colaborador, responsável pela disciplina de Matemática da turma, atuou diretamente na aplicação e na observação da sequência didática, assumindo o papel de mediador do processo de ensino-aprendizagem. Essa atuação possibilitou um acompanhamento contínuo das interações, das estratégias utilizadas pelos alunos e das dificuldades emergentes durante as atividades propostas.

A participação dos estudantes ocorreu de forma voluntária e coletiva, respeitando os princípios éticos da pesquisa em educação. Os dados obtidos foram utilizados exclusivamente para fins acadêmicos, preservando-se o anonimato dos participantes.

A escolha desse contexto escolar mostrou-se pertinente aos objetivos da pesquisa, uma vez que permitiu investigar, em situação real de sala de aula, as contribuições de uma sequência didática interdisciplinar que articula Matemática e Música para o ensino de Progressão Geométrica, alinhando-se à natureza aplicada e profissional do estudo.

4.3 INSTRUMENTOS E PROCEDIMENTOS

A coleta de dados desta pesquisa foi realizada por meio de diferentes instrumentos, selecionados de modo a possibilitar uma compreensão ampla do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido ao longo da aplicação da sequência didática. A utilização de múltiplos instrumentos permitiu não apenas acompanhar a evolução conceitual dos estudantes, mas também analisar suas percepções, interações e estratégias de resolução, fortalecendo a consistência das análises realizadas.

Inicialmente, foi aplicado um questionário diagnóstico, com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios dos alunos acerca dos conceitos de Progressão Geométrica, conceitos sonoros e noções básicas de música. Esse instrumento possibilitou ao professor-pesquisador mapear dificuldades iniciais, concepções prévias e expectativas dos estudantes, subsidiando ajustes no planejamento e na condução das atividades da sequência didática.

Ao longo da aplicação da sequência didática, foram desenvolvidas atividades práticas e investigativas, planejadas para promover a integração entre conceitos matemáticos e musicais. Essas atividades envolveram a exploração de instrumentos musicais, a análise de frequências sonoras, a construção e utilização do monocórdio e a resolução de problemas contextualizados. Os registros produzidos pelos alunos durante essas atividades constituíram uma fonte relevante de dados, uma vez que evidenciaram estratégias de pensamento, níveis de compreensão conceitual e a capacidade de estabelecer relações entre diferentes áreas do conhecimento.

Paralelamente, foram realizadas observações sistemáticas pelo professor-pesquisador durante as aulas, com foco na participação dos alunos, no engajamento nas atividades propostas, nas interações em grupo e nas dificuldades apresentadas ao longo do processo. Essas observações foram registradas em anotações de campo, permitindo a análise de aspectos qualitativos do desenvolvimento da sequência didática que não seriam plenamente captados apenas por instrumentos escritos.

Ao término da aplicação da sequência didática, foi aplicado um questionário final, com o objetivo de avaliar possíveis avanços na compreensão dos conceitos de Progressão Geométrica, bem como analisar a percepção dos estudantes em relação à metodologia adotada e ao uso da música como recurso pedagógico. A comparação entre os resultados do questionário diagnóstico e do questionário final possibilitou identificar indícios de aprendizagem conceitual e mudanças na postura dos alunos frente ao conteúdo estudado.

Dessa forma, os instrumentos e procedimentos adotados foram utilizados de maneira articulada e complementar, permitindo uma análise qualitativa consistente do processo de ensino-aprendizagem e das contribuições da sequência didática interdisciplinar proposta neste trabalho.

4.4 ETAPAS DE APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática foi composta por dez aulas, organizadas de forma progressiva, articulando conceitos matemáticos e musicais conforme os pressupostos do pensamento analógico e da interdisciplinaridade discutidos no Capítulo 3.

As etapas de aplicação da sequência didática podem ser sintetizadas da seguinte forma:

1. **Apresentação da proposta e aplicação do questionário diagnóstico**, visando identificar conhecimentos prévios e expectativas dos alunos;
2. **Introdução aos conceitos básicos de música e som**, abordando noções como notas musicais, escalas, frequência e altura sonora;
3. **Estudo das sequências numéricas e da Progressão Geométrica**, inicialmente em linguagem informal e contextualizada;
4. **Atividades práticas interdisciplinares**, relacionando frequências sonoras, intervalos musicais e razões constantes características das PG;

5. **Construção e exploração do monocórdio**, como recurso histórico e pedagógico para visualizar as relações matemáticas presentes na música;
6. **Sistematização dos conceitos matemáticos**, formalizando a Progressão Geométrica por meio de definições, propriedades e aplicações;
7. **Aplicação do questionário final** e realização de discussões coletivas sobre a experiência vivenciada.

Essas etapas foram planejadas de modo a favorecer a aprendizagem significativa, a participação ativa dos estudantes e a consolidação dos conceitos trabalhados.

4.5 ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos dados deste trabalho foi orientada pelos referenciais teóricos que sustentam a proposta da sequência didática, especialmente as contribuições de Zabala (1998) acerca das sequências didáticas, bem como pelos pressupostos do pensamento analógico e da interdisciplinaridade, discutidos nos capítulos anteriores. Dessa forma, buscou-se garantir coerência entre a fundamentação teórica, a metodologia adotada e a interpretação dos dados obtidos.

Segundo Zabala (1998), uma sequência didática caracteriza-se por um conjunto articulado de atividades planejadas com objetivos claros, no qual a aprendizagem deve ser analisada a partir do processo e não apenas dos resultados finais. Nesse sentido, a análise dos dados realizada neste trabalho considerou não somente as respostas finais dos estudantes, mas também o desenvolvimento das atividades ao longo das etapas da sequência didática, os registros produzidos e as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas propostas.

A partir dessa perspectiva, os dados foram interpretados considerando os quatro tipos de conteúdos de aprendizagem propostos por Zabala (1998): conceituais, procedimentais, atitudinais e factuais. Assim, buscou-se identificar evidências de aprendizagem conceitual relacionadas à compreensão da Progressão Geométrica; aprendizagens procedimentais, observadas nas estratégias utilizadas para resolver problemas e estabelecer relações matemáticas; aprendizagens atitudinais, percebidas no engajamento, na participação e na postura dos alunos frente às atividades; e aprendizagens factuais, relacionadas ao reconhecimento de termos, definições e elementos básicos tanto da matemática quanto da música.

O pensamento analógico, conforme discutido na dissertação, constituiu outro eixo central para a análise dos dados. A interpretação das produções dos estudantes buscou identificar situações em que os alunos estabeleceram correspondências entre conceitos musicais, sonoros e matemáticos, utilizando analogias para explicar relações, justificar respostas ou compreender a Progressão Geométrica. Esses momentos foram compreendidos como indícios de construção de significados, uma vez que a analogia possibilita a transferência de estruturas cognitivas entre domínios distintos do conhecimento.

A interdisciplinaridade, também fundamentada nos referenciais adotados no trabalho, orientou a análise no sentido de verificar de que forma os alunos conseguiram articular conhecimentos provenientes da matemática e da música. A capacidade de transitar entre esses campos, reconhecendo regularidades, padrões e relações proporcionais, foi interpretada como um indicador de aprendizagem integrada, conforme os objetivos da sequência didática.

Por fim, a análise dos dados procurou evidenciar se a sequência didática, enquanto proposta metodológica, cumpriu sua função formativa, conforme defendido por Zabala (1998), ao favorecer a participação ativa dos estudantes, a contextualização dos conteúdos e a construção progressiva do conhecimento. Dessa maneira, os resultados apresentados não se limitam à descrição das respostas dos alunos, mas buscam interpretar como o conjunto de atividades contribuiu para a aprendizagem da Progressão Geométrica em uma perspectiva interdisciplinar.

A análise dos dados foi realizada a partir de uma abordagem qualitativa, considerando as respostas aos questionários, os registros escritos dos alunos, as observações do professor-pesquisador e o desempenho nas atividades práticas.

Os dados foram organizados e analisados com base em categorias emergentes, tais como:

- compreensão dos conceitos de Progressão Geométrica;
- capacidade de estabelecer relações entre matemática e música;
- interesse e motivação dos estudantes;
- percepção dos alunos sobre a metodologia adotada.

A interpretação dos resultados buscou identificar indícios de aprendizagem conceitual, mudanças na postura dos estudantes em relação à matemática e contribuições da abordagem interdisciplinar para o processo de ensino-aprendizagem. Os resultados dessa análise são apresentados e discutidos no Capítulo 6.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA (SD)

A melhoria da aprendizagem dos estudantes da educação básica é um foco central das pesquisas educacionais. Isso tem levado à criação de inovações pedagógicas e a busca no desenvolvimento de métodos de ensino mais eficazes. A sequência didática (SD) se destaca nesse contexto, e é definida por Zabala (1998, p.18) como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos". Ele descreve as quatro fases de aplicação, a saber: comunicação da lição, estudo individual do conteúdo, repetição do conteúdo e avaliação do professor. Zabala considera que o principal objetivo dessa metodologia é:

> [...] introduzir nas diferentes formas de intervenção aquelas atividades que possibilitem uma melhora de nossa atuação nas aulas, como resultado de um conhecimento mais profundo das variáveis que intervêm e do papel que cada uma delas tem no processo de aprendizagem dos meninos e meninas. (Zabala, 1998, p.54)

Nessa perspectiva, ao planejar uma sequência didática, é essencial considerar os diálogos e interações entre professor/aluno e aluno/aluno. Deve-se observar a influência dos temas nessas relações e o papel de todos nas atividades, conteúdos, tempo, espaço, recursos didáticos e avaliação. Tudo deve ser bem planejado e organizado para garantir o sucesso das atividades. De acordo com Zabala (1998), as relações entre professores, alunos e conteúdo no processo de ensino e aprendizagem possuem valores que podem ser mais importantes do que as sequências didáticas. A participação de professores e alunos nesse processo difere do ensino tradicional, que é caracterizado pela transmissão/recepção e reprodução de conhecimentos. Analisa ainda, sob a perspectiva construtivista, a natureza dos diferentes conteúdos, o papel dos professores e dos alunos, bem como a relação entre eles no processo, destacando que o professor deve diversificar as estratégias, propor desafios, realizar comparações, orientar e estar atento à diversidade dos alunos, estabelecendo uma interação direta com cada um deles.

O professor deve planejar e adaptar-se às necessidades dos alunos, considerar suas contribuições, comunicar objetivos e estabelecer metas alcançáveis. Ele oferece suporte na construção do conhecimento, promove conexões com novos conteúdos e exige análise e avaliação dos trabalhos. Além disso, cria um ambiente que favorece a autoestima, facilita a comunicação entre todos e incentiva a autonomia e a metacognição, avaliando os alunos conforme sua capacidade e esforço.

Ao optar por essa metodologia, o docente precisa levar em conta com atenção os conteúdos a serem abordados, os recursos pedagógicos disponíveis e as técnicas de avaliação. É essencial que os alunos entendam os objetivos de cada etapa, para que saibam o propósito de cada uma. Antes de começar a sequência, é aconselhável fazer um diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos, o que permite um planejamento mais adequado às suas realidades.

Com a compreensão da importância e da definição da SD, iremos agora propor explorá-la utilizando a interdisciplinaridade entre as disciplinas de arte, física e matemática, sendo a música um recurso pedagógico para o ensino do tema progressão geométrica em uma turma do 2° ano do Ensino Médio. Visto que a utilização da música como recurso didático corrobora com o que foi sugerido por Zabala (1998), pois a música potencializa o aprendizado ao formar lembranças, deixar impressões e estabelecer vínculos com experiências vividas. Através da música, o professor tem a possibilidade de estabelecer um ambiente de aprendizado dinâmico, interativo, agradável e inovador. De acordo com Cavalcanti e Lins (2010), a música pode ser uma ferramenta de desenvolvimento do raciocínio e da criatividade, o que é importante para aprender conceitos matemáticos.

Com base na proposta de Zabala (1998), a sequência didática a seguir foi elaborada de acordo com os seguintes objetivos:

- **Conceitual**: Compreender conceitos musicais, sonoros e envolvidos na sequência numérica com ênfase em progressão geométrica, como: termos, classificação quanto a quantidade de elementos (finita ou infinita) e quanto ao comportamento (crescente, constante, decrescente ou oscilante), lei de formação, termo geral e soma dos termos, através da relação música/matemática.
- **Procedimental:** Realizar atividades práticas que relacionam sequência numérica (PG) à conceitos musicais e sonoros.
- **Atitudinal:** Possibilitar uma reflexão sobre a importância da utilização da música como recurso pedagógico no ensino/aprendizagem de conteúdos matemáticos e verificar a opinião e o desempenho dos estudantes com relação a SD.

A análise dos resultados de uma sequência didática deve ser entendida como um processo que vai além da mera identificação de acertos e erros ao término das atividades. Zabala (1998) afirma que a avaliação é essencialmente formativa e deve focar na compreensão do processo de aprendizagem, possibilitando que tanto professores quanto alunos identifiquem progressos, obstáculos e oportunidades de superação.

Nesse contexto, a análise deve começar revisitando os objetivos estabelecidos, os conteúdos escolhidos e as metodologias implementadas, a fim de verificar a consistência entre o planejamento e a execução. Acompanhar o progresso da sequência é essencial, considerando fatores como o grau de envolvimento dos alunos, o interesse mostrado, as maneiras de interação entre os colegas, além das estratégias de raciocínio empregadas ao enfrentar os desafios propostos.

Zabala (1998) afirma que os resultados não devem ser avaliados somente em termos quantitativos, mas também levando em conta o significado pedagógico dos erros e acertos. Os erros, especialmente, servem como indicadores significativos das hipóteses formuladas pelos estudantes e representam oportunidades para a reestruturação do ensino. Assim, é possível reconhecer progressos tanto individuais quanto coletivos, respeitando os variados ritmos e estilos de aprendizagem.

A dimensão formativa da avaliação também requer que os resultados sejam analisados considerando a prática pedagógica do docente. A análise deve oferecer suporte para ajustar as estratégias de ensino, revisar conteúdos que não foram totalmente compreendidos e propor atividades de aprofundamento, sempre que necessário. Além disso, quando integrada, a autoavaliação dos alunos ajuda-os a desenvolver uma consciência crítica sobre seu processo de aprendizagem, identificando conquistas e desafios.

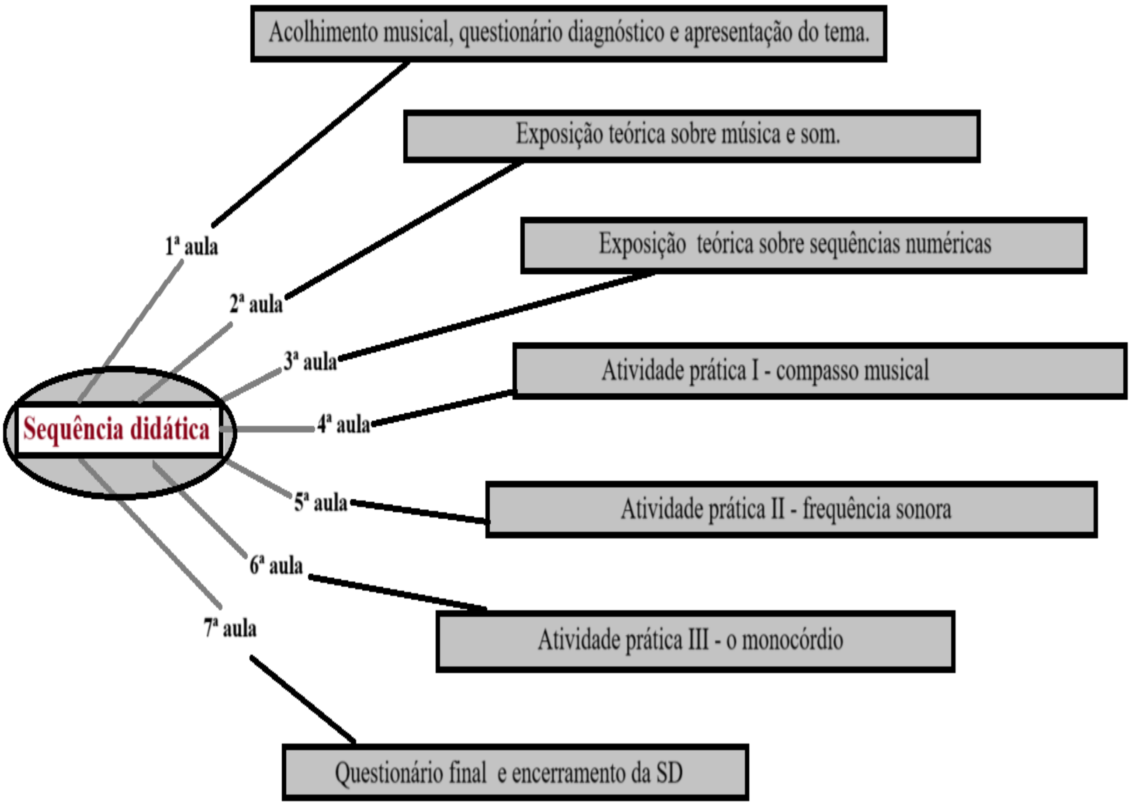
Em síntese, a análise dos resultados de uma sequência didática, à luz de Zabala (1998), deve assumir um caráter reflexivo e regulador, servindo como instrumento de transformação tanto do ensino quanto da aprendizagem. Mais do que verificar produtos, trata-se de compreender processos e de orientar os próximos passos do trabalho pedagógico.

5.1 ETAPAS DA SD

A SD começará com a aplicação de um questionário diagnóstico, acolhimento musical e apresentação dos conceitos que serão abordados. Em outra ocasião, haverá aulas expositivas sobre conceitos musicais, sonoros e de progressão numérica (PG). Em seguida, serão realizadas as atividades práticas I, II e III. Por fim, os alunos responderão a um questionário final.

Na Figura 24 apresentamos um esquema da SD através de um mapa conceitual e da descrição das atividades desenvolvidas.

Figura 24 – Esquema da sequência didática



Fonte: Elaborado pelo autor

5.2 DESCRIÇÃO DAS AULAS PROPOSTAS PARA A SD

A música é um recurso pedagógico valioso que pode ser utilizado para ensinar conteúdos estudados no ensino básico de forma criativa e eficaz. Ao utilizar a música como recurso pedagógico, os professores podem tornar o aprendizado mais divertido e engajador para os alunos, melhorar a memória e estimular a criatividade. Nessa perspectiva, a fim de trabalhar o conteúdo de sequência numérica, em especial a Progressão Geométrica, elaboramos um planejamento em que o professor e os alunos poderão utilizar qualquer dos espaços escolares: sala de aula, laboratório de informática, auditório etc. A seguir apresentamos a organização didática.

Quadro 14 – Organização didática

Organização didática	
Título	MATEMÁTICA E MÚSICA: Uma proposta interdisciplinar para o ensino de Progressão Geométrica.
Disciplinas	Matemática, Física e Arte (Música)
Público-alvo	2° ano do Ensino Médio

Competências para o desenvolvimento integral (BNCC)	Competência geral 1 – Conhecimento Competência geral 2 – Pensamento científico, crítico e criativo Competência geral 3 – Repertório cultural Competência geral 9 – Empatia e cooperação
Competências específicas (BNCC)	**MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO** 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. **CIÊNCIAS DA NATUREZA SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO** 3. Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC). **MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL** 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. **ARTE PARA O ENSINO FUNDAMENTAL** 2. Compreender as relações entre as linguagens da Arte e suas práticas integradas, inclusive aquelas possibilitadas pelo uso das novas tecnologias de informação e comunicação, pelo cinema e pelo audiovisual, nas condições particulares de produção, na prática de cada linguagem e nas suas articulações. 4. Experienciar a ludicidade, a percepção, a expressividade e a imaginação, ressignificando espaços da escola e de fora dela no âmbito da Arte. 5. Mobilizar recursos tecnológicos como formas de registro, pesquisa e criação artística
Habilidades específicas (BNCC)	**MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO** • (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

	• (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. • (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. • (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. • (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **CIÊNCIAS DA NATUREZA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO** • (EM13CNT301) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica. **MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL** • (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. • (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. • (EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. **ARTE PARA O ENSINO FUNDAMENTAL** • (EF69AR20) Explorar e analisar elementos constitutivos da música (altura, intensidade, timbre, melodia, ritmo etc.), por meio de recursos tecnológicos (games e plataformas digitais), jogos, canções e práticas diversas de composição/criação, execução e apreciação musicais. • (EF69AR21) Explorar e analisar fontes e materiais sonoros em práticas de composição/criação, execução e apreciação musical, reconhecendo timbres e características de instrumentos musicais diversos. • (EF69AR22) Explorar e identificar diferentes formas de registro musical (notação musical tradicional, partituras criativas e procedimentos da música contemporânea), bem como procedimentos e técnicas de registro em áudio e audiovisual. • (EF69AR23) Explorar e criar improvisações, composições, arranjos, jingles, trilhas sonoras, entre outros, utilizando vozes, sons corporais e/ou instrumentos acústicos ou eletrônicos, convencionais ou não convencionais, expressando ideias musicais de maneira individual, coletiva e colaborativa.
Objeto do conhecimento	• Características sonoras (Altura, Intensidade, Timbre) • Elementos constitutivos da música (Melodia, Harmonia, Contraponto, Ritmo), compassos, figuras musicais, notas e intervalos musicais. • Sequência numérica (Progressão Aritmética e Progressão Geométrica)
Objetivo geral	• Compreender conceitos básicos da música: Melodia, harmonia, ritmo e contraponto. • Conhecer compassos e figuras musicais. • Conhecer algumas escalas e os intervalos justos, maiores e menores. • Conhecer e entender as propriedades físicas do som como: Altura (frequência), Intensidade (amplitude), timbre e duração.

	• Identificar padrões numéricos e algumas sequências. • Definir Progressão Geométrica. • Classificar a PG quanto ao comportamento. • Escrever sequências a partir de relações com conceitos musicais. • Calcular a razão e termos específicos de uma progressão geométrica. • Conhecer e aplicar o termo geral da PG. • Conhecer e aplicar a fórmula da soma dos termos de uma PG finita e infinita • Utilizar conhecimentos de progressões geométricas para resolver problemas.
Duração da SD	10 horas/aulas de 50 minutos cada.
Materiais utilizados	• Caneta • Quadro branco • Projetor de imagens • Folhas de partitura • Celular com aplicativo de afinação instalado • Monocórdio de Pitágoras • Instrumentos musicais (teclado, piano, violão)

Fonte: Elaborado pelo autor

O Quadro 14 apresenta uma proposta interdisciplinar para o ensino de Progressão Geométrica, integrando as disciplinas de Matemática, Física e Arte (Música). Destinada ao 2° ano do ensino médio, a sequência didática aborda conteúdos como características sonoras, elementos constitutivos da música e sequências numéricas. As habilidades e competências visam a compreensão de conceitos musicais e matemáticos, além da aplicação prática desses conhecimentos. A duração total da sequência é de 10 horas/aulas, utilizando diversos materiais, incluindo instrumentos musicais e recursos tecnológicos. No quadro 15 apresentamos a descrição detalhada da sequência didática proposta de cordo com o esquema apresentado na Figura 24.

Quadro 15 – descrição das aulas na SD

1ª Aula: Questionário de diagnóstico, Acolhimento musical e apresentação do tema.	
Duração	01 hora/aula de 50 minutos.
Objetivos da aula	• Coletar informações sobre os conhecimentos prévios dos alunos com relação a conceitos musicais, sonoros e sequência numérica (PG). Além de verificar as suas opiniões pessoas sobre o interesse e gosto por música e como veem a relação música/matemática. • Acolher os alunos por meio de apresentações musicais. • Apresentar os temas e os objetivos de cada etapa da sequência didática.
Descrição geral	Inicialmente, será aplicado um questionário diagnóstico (disponível no APÊNDICE A) para coletar informações sobre os conhecimentos prévios que os educandos possuem sobre conceitos musicais, sonoros e de progressão geométrica. Em seguida, os alunos se reunirão em grupos de 4 ou 5 e cada grupo escolherá uma canção que será apresentada (cantada e tocada) com auxílio de instrumentos musicais (piano, teclado e/ou violão). Os instrumentos poderão ser executados pelo professor, aluno ou um profissional da música. Após esse momento de acolhimento, interação e descontração, será apresentado aos

	estudantes os temas e atividades que serão trabalhados em cada etapa da SD juntamente com os objetivos.
Avaliação	Ao final, os alunos serão avaliados segundo a interação, participação e as respostas do questionário de diagnóstico. A experiência será registrada por meio de fotos e registros escritos para a análise do envolvimento e motivação dos educandos.
2ª Aula – Exposição teórica sobre música e som	
Duração	01 hora/aula de 50 minutos.
Objetivos da aula	• Compreender conceitos básicos relacionados a música e ao som. • Discutir a relação entre a música e a matemática.
Descrição geral	Nesta aula, docentes de física e arte, juntamente com o professor de matemática, poderão se envolver na exploração interdisciplinar dos princípios musicais e sonoros. Em seguida, recomenda-se exibir um vídeo (cf. O MONOCORDIO..., 2021) que resume como Pitágoras analisou sons consoantes em batidas de martelos, como utilizou o monocórdio para estudar essas relações e que também introduz conceitos musicais, como os intervalos entre notas e outros aspectos. Este vídeo atuará como um estímulo para o debate acerca da conexão entre a matemática e os conceitos estudados. Ao término da aula, será proposto que cada grupo de 5 a 6 estudantes construa um monocórdio de Pitágoras em horário e local fora do horário escolar para uso na atividade prática III.
Avaliação	Ao final, os alunos serão avaliados segundo a interação, participação e através de uma atividade sobre os conceitos trabalhados.
3ª Aula – Exposição teórica sobre sequências numéricas	
Duração	01 hora/aula de 50 minutos.
Objetivos da aula	• Compreender o que é uma sequência numérica e seus elementos. • Reconhecer algumas sequências importantes. • Classificar as sequências quanto ao comportamento e a quantidade de termos. • Apresentar as leis de formação (fórmula de recorrência) e os termos geral da progressão aritmética e geométrica. • Apresentar a fórmula da soma dos termos de uma PG finita e infinita.
Descrição geral	O professor utilizará projeção em tela, pincel e quadro branco para expor conceitos importantes sobre sequência numérica. Nesta aula será apresentada a definição de sequência numérica; quais os elementos que a compõe (termo, posição e lei de formação); sua classificação quanto a quantidade de termos (finita ou infinita) e quanto ao seu comportamento (crescente, decrescente, constante ou oscilante), termo geral e a fórmula da soma dos termos de uma PG finita e infinita.
Avaliação	Ao final, os alunos serão avaliados segundo a interação, participação e através da resolução de exercícios sobre os conceitos estudados.
4ª Aula – **Atividade prática I**: Compasso musical	
Duração	02 horas/aulas de 50 minutos cada.
Objetivos da aula	• Compreender conceitos básicos sobre leitura rítmica.

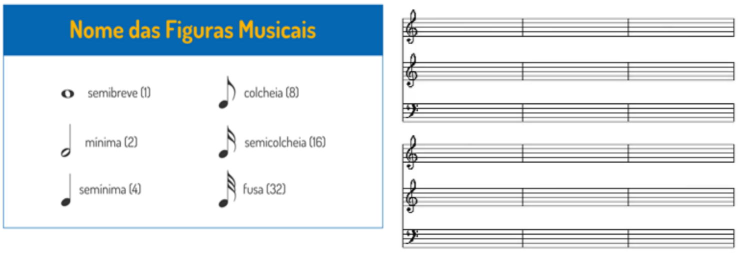
<table>
<tr><td></td><td>

- Reconhecer figuras musicais.
- Escrever e analisar sequências numéricas utilizando compassos musicais.

</td></tr>
<tr><td>Descrição geral</td><td>

Nesta aula, os alunos deverão construir sequências numéricas através da analogia com a quantidade de notas tocadas por compasso do tipo 4/4. A turma será dividida em grupos de 4 ou 5 alunos, que receberão uma atividade contendo folhas de partitura (pentagrama) para serem preenchidas por figuras musicais (Figura 25). Notas serão tocadas por compasso e os alunos deverão preencher a partitura com as figuras que juguem corretas, por exemplo, se em um compasso for tocado 2 notas, então os alunos terão que preencher o compasso com duas mínimas, pois cada mínima vale dois tempos, se 8 notas forem tocadas no compasso, então os alunos preencherão com 8 colcheias, pois cada uma vale 1/2 tempo, e assim sucessivamente.

Figura 25 – Figuras musicais e folha de partitura (pentagrama)



Fonte: <https://wimelo.com/geniomusical/teoria-musical/apostila-de-teoria-musical-basica-1/duracao-do-som-e-figuras-musicais/>

A seguir descrevemos como se dará a atividade:

1- Com auxílio de um metrônomo ou palmas será marcado o ritmo no compasso 4/4. Observação: cada compasso 4/4 representa um ciclo de 4 palmas ou 4 batidas no metrônomo.
2- Durante a marcação do ritmo (compasso 4/4) o professor tocará notas no instrumento (teclado, piano, violão e/ou monocórdio).
3- Os alunos serão instruídos a observar a quantidade de notas tocada por compasso e após suas conclusões preencherão o primeiro compasso da partitura utilizando as figuras musicais que jugam correta. Observação: nesse momento não será levado em conta quais notas foram tocadas, pois estaremos interessados apenas na leitura rítmica.
4- O processo anterior será repedido outras vezes, porém com quantidades diferentes de notas tocadas por compasso. O grupo observa, toma nota da quantidade de notas tocadas e preenche o compasso com a figura musical que julga correta.

Após o preenchimento dos compassos, o professor solicitará que os grupos escrevam uma sequência numérica que represente a quantidade de notas por compasso, ou seja, cada compasso representará um termo da sequência e cada termo representará a quantidade de notas tocadas naquele compasso. Em seguida, os alunos analisarão a sequência numérica respondendo algumas perguntas como: Qual o comportamento da sequência escrita? Ela possui algum padrão? Que tipo de sequência é essa? Qual a razão? Por fim, os alunos responderão a uma questão elaborada pelo professor orientador (APÊNDICE G) que relaciona os conceitos da PG com os compassos e as figuras musicais.

</td></tr>
<tr><td>Avaliação</td><td>Os alunos serão avaliados segundo a interação, a participação, o desempenho na realização da atividade e a resolução da questão (APÊNDICE G). A experiência será analisada por meio de registros escrito/descritivo e fotográfico.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">5ª Aula – Atividade prática II: Frequência sonora</td></tr>
<tr><td>Duração</td><td>02 horas/aulas de 50 minutos cada.</td></tr>
<tr><td>Objetivos da aula</td><td>

- Conhecer as notas musicais e os intervalos entre elas.
- Conhecer os intervalos justos.

</td></tr>
</table>

- Coletar as frequências sonoras geradas por uma escala de notas executadas em intervalos justos, maiores ou menores.
- Escrever e analisar as sequências numéricas geradas a partir das frequências sonoras de notas executadas em intervalos justos, maiores.

Descrição geral

Inicialmente, o docente realizará uma revisão sucinta sobre as notas musicais e os intervalos entre elas (intervalos justos, maiores e menores), abordando como Pitágoras construiu sua escala através do intervalo de quintas justa, conhecido como ciclo de quintas. Após este período, a turma será dividida em equipes, conforme nas aulas anteriores. Cada equipe estará equipada com ao menos um celular contendo um aplicativo de afinação capaz de capturar a frequência das notas musicais, que será utilizado na atividade. A seguir descrevemos como se dará a atividade:

1- Uma sequência de notas musicais será executada em um instrumento musical (teclado, piano e/ou violão).
2- Cada nota tocada emitirá um som, e cada som produzirá uma frequência que será coletada com o auxílio do aplicativo e registrado pelos alunos em um quadro (Quadro 16).

Tabela 16 – Notas e frequências

Notas tocadas							
Frequência (Hz)							

Fonte: Elaborado pelo autor

Por exemplo, considere um intervalo de oitavas justas da nota Lá, tocada em todas as frequências crescentes de um piano. O Quadro 17 seria preenchida com as seguintes frequências:

Tabela 17 – Quadro 16 preenchida

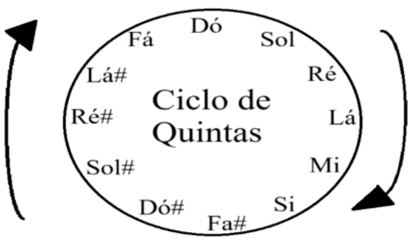
Notas tocadas	Lá$_0$	Lá$_1$	Lá$_2$	Lá$_3$	Lá$_4$	Lá$_5$	Lá$_6$
Frequência (Hz)	27,5	55,0	110,0	220,0	440,0	880,0	1.760,0

Fonte: Elaborado pelo autor

Observação: Os índices 0, 1, 2, 3, ..., 6 representam as oitavas de um piano, onde 0 representa a oitava mais grave e 6 a mais aguda.

3- Com a mesma dinâmica as sequências de notas serão tocadas como: o ciclo de quintas, a escala hexafônica (escala de um tom inteiro), a escala cromática e outras dependendo da escolha do professor orientador. Por exemplo, Veja na Figura 26 a sequência de notas que representa o ciclo de quintas do "DÓ".

Figura 26 - ciclo de quintas da nota Dó



Fonte: Elaborado pelo autor

4- Após as coletas e preenchimento de todas as tabelas propostas, os alunos serão orientados a escrever sequências numéricas a partir das frequências sonoras registradas nas tabelas.
5- Após escreverem as sequências numéricas, os alunos irão analisá-las como feito na atividade prática II.

Avaliação

Ao final da aula, será avaliada a interação e participação dos alunos durante todo o desenvolvimento da atividade. Além disso, será analisado o desempenho dos alunos na montagem dos quadros e em suas análises sobre as sequências escritas. A experiência será analisada por meio de registros escrito/descritivo e fotográfico.

6ª Aula: Atividade prática III: O monocórdio	
Duração	02 horas/aulas de 50 minutos cada.
Objetivos da aula	• Explorar e aplicar os conceitos de PG e teoria musical em um monocórdio de Pitágoras.
Descrição geral	Nesta aula, os alunos estarão em equipes com um aplicativo de afinação e um monocórdio de Pitágoras. O professor pedirá que realizem a seguinte atividade (APÊNDICE E): **Atividade** Use seu conhecimento de progressão geométrica e música para encontrar 4 notas separadas por um intervalo de quarta justa em um monocórdio de Pitágoras. Procedimento: 1. Construir um monocórdio. Sugere-se assistir um vídeo do Youtube (cf. O QUE É..., 2020), que ensina passo a passo como construir um monocórdio. 2. Com o monocórdio em mãos, movimente o cavalete móvel do monocórdio até encontrar uma nota através do aplicativo de afinação. 3. Marque no monocórdio essa primeira nota (1° termo) que servirá de referência. 4. Sabido a frequência da primeira nota, utilize o termo geral da PG para encontrar as próximas notas que estão separadas em intervalo de quartas justas. (use $q = \frac{4}{3}$ que é a razão das frequências referente ao intervalo de quartas). Se possível marque essas posições no monocórdio e escreva quais são as 4 notas da sequência.
Avaliação	Será avaliada a interação, participação e o desempenho no desenvolvimento da atividade. A experiência será analisada por meio de registros escrito/descritivo e fotográfico.
7ª Aula: Questionário final e encerramento da SD	
Duração	01 hora/aula de 50 minutos.
Objetivos da aula	• Aplicar questionário final para analisar o desempenho dos educandos em relação aos conteúdos abordados na sequência didática.
Descrição geral	Na última aula, os alunos responderão o questionário final (disponível no APÊNDICE F). Em seguida, ocorrerá o encerramento da SD.
Avaliação	Serão analisados tanto as opiniões quanto ao desempenho dos alunos no questionário final.

Fonte: Elaborado pelo autor

A sequência didática proposta no Quadro 15 visa integrar música e matemática para ensinar Progressão Geométrica a alunos do 2º ano do ensino médio. A abordagem interdisciplinar envolve atividades práticas que relacionam conceitos musicais e matemáticos, utilizando instrumentos musicais e recursos tecnológicos. A sequência é composta por dez aulas, incluindo questionários diagnósticos e finais, exposições teóricas e atividades práticas, como construção de monocórdios e análise de frequências sonoras. O objetivo é promover uma aprendizagem significativa e interativa, despertando o interesse dos alunos e facilitando a compreensão dos conceitos matemáticos através da música.

6 RESULTADOS

Este capítulo apresenta o relato da experiência com a sequência didática, detalhando a participação dos alunos, a execução das atividades, os desafios enfrentados e como o professor orientador conduziu os alunos no processo.

A sequência didática descrita na seção **5.2** foi aplicada junto aos alunos do segundo ano do Ensino Médio, do turno vespertino, da Escola Estadual Professora Isaura Bahía localizada na cidade de Mocajuba-Pá no período de 02 a 13 de junho de 2025. A atividade envolveu 19 alunos e contou com a colaboração do professor de matemática da turma, José Alberto Mendes Bacha, que prontamente aceitou participar e contribuiu grandemente para o desenvolvimento da SD. Durante a descrição da SD o professor que realiza essa pesquisa será citado como professor orientador e o professor de matemática da turma como professor colaborador.

O primeiro encontro (1ª aula) ocorreu no auditório da escola. Os alunos inicialmente responderam a um questionário de diagnóstico para avaliar seus conhecimentos prévios sobre música, som, sequência numérica (PG) e a conexão entre música e matemática. O resultado do questionário proporcionou uma perspectiva mais clara para o planejamento e desenvolvimento da SD.

Em seguida, os alunos foram divididos em grupos de quatro ou cinco pessoas, e cada grupo escolheu uma música para cantar. As músicas escolhidas foram: "Arde Outra Vez" (Thalles Roberto), "Tempo Perdido" (Legião Urbana), "A Casa é Sua" (Casa Worship e Julliany Souza), "Graveto" (Marília Mendonça) e "Escolho Deus" (Thalles Roberto). Conhecido as músicas, o professor orientador, também músico, deu início às apresentações, nas quais cada grupo se apresentava à frente e cantava com o acompanhamento de um teclado e um violão. A Figura 27 mostra um dos grupos em apresentação, com o professor orientador tocando em um teclado e um aluno tocando um violão.

Figura 27 – Alunos realizando apresentação musical

Fonte: Elaborado pelo autor

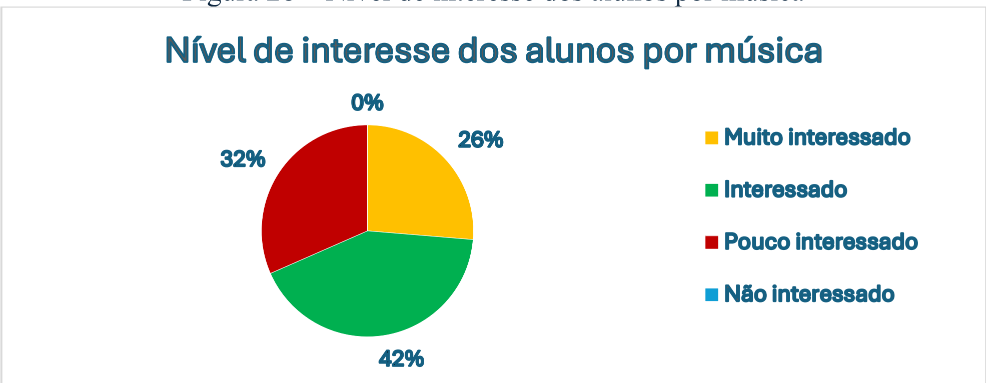
Esse momento inicial de apresentações revelou-se particularmente significativo à luz da fundamentação teórica que sustenta a sequência didática. Conforme a concepção de sequência didática adotada neste trabalho, inspirada em Zabala, a etapa inicial desempenha papel fundamental na criação de condições favoráveis à aprendizagem, especialmente no que se refere aos aspectos atitudinais. Ao representar o primeiro contato dos estudantes com a música no contexto da proposta interdisciplinar, a atividade possibilitou um ambiente de acolhimento e descontração, favorecendo a interação entre os alunos e entre estes e o professor-pesquisador.

Essa dinâmica inicial contribuiu para o estabelecimento de uma prática didático-pedagógica de caráter afetivo, elemento essencial para a participação ativa dos estudantes ao longo das atividades subsequentes. Além disso, ao apresentar o tema, a proposta da sequência didática e seus objetivos, e ao promover uma breve discussão sobre as relações entre música e matemática, a aula possibilitou a mobilização de conhecimentos prévios e a introdução do pensamento analógico, criando condições para que os alunos começassem a estabelecer correspondências entre domínios distintos do conhecimento, conforme os pressupostos da interdisciplinaridade discutidos na fundamentação teórica.

A seguir, abriremos um parêntese para apresentar uma breve análise dos resultados do questionário diagnóstico, que avaliou os conhecimentos prévios dos estudantes sobre conceitos musicais, sonoros, progressão geométrica e a possível relação entre matemática e música.

Os estudantes foram questionados sobre seu grau de interesse em música. Dos 19 participantes, 5 afirmaram ser muito interessados, 8 interessados, 6 pouco interessados e nenhum desinteressado. O gráfico da Figura 28 ilustra o resultado em termos percentuais. O resultado mostrou que não há desinteresse quando o assunto é música. Apesar de 32% dos participantes demonstrarem pouco interesse, a soma dos que estão interessados e muito interessados atinge 68%.

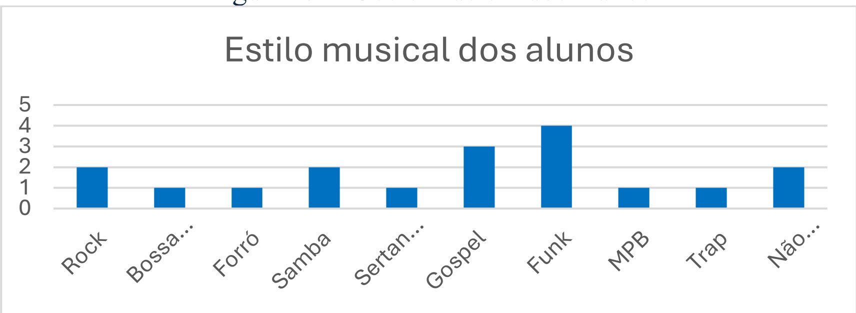
Figura 28 – Nível de interesse dos alunos por música



Fonte: Elaborado pelo autor

Outra pergunta foi sobre o estilo musical preferido, e o gráfico da Figura 29 ilustra o gosto musical dos estudantes. Foi possível notar que a turma tem um estilo musical muito variado, com os gêneros funk e gospel se destacando.

Figura 29 – Gosto musical dos alunos



Fonte: elaborado pelo autor

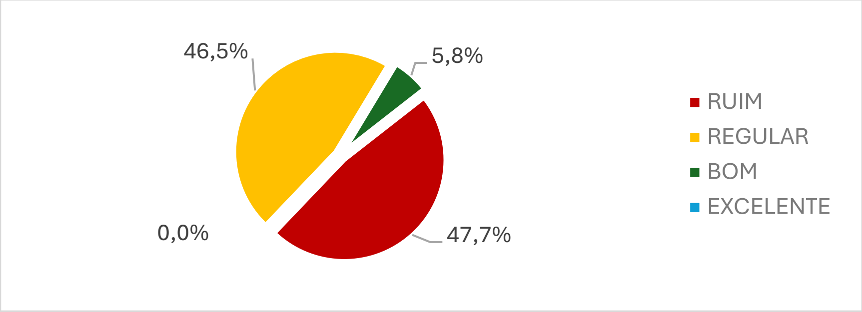
O questionário diagnóstico também possibilitou saber que dois dos 19 alunos toca pelo menos um instrumento musical. Essa descoberta foi interessante porque esses alunos puderam participar de forma efetiva na execução das músicas no acolhimento musical e em outras atividades, conforme ilustrado na Figura 27.

As questões 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 15 do questionário de diagnóstico abordaram conceitos musicais e sonoros. O gráfico da Figura 30 apresenta em termos de porcentagem o desempenho dos alunos, que foi categorizado da seguinte maneira:

- De 0 a 1 acertos: Ruim
- De 2 a 3 acertos: Regular
- De 4 a 5 acertos: Bom
- De 6 a 7 acertos: excelente

Assim, entre os 19 alunos, 10 apresentaram desempenho Ruim, 8 Regular, 1 Bom e nenhum Excelente. Assim, o gráfico da Figura 30 revela que os alunos demonstraram um conhecimento limitado sobre conceitos musicais e sonoros, uma vez que apenas 5,8% dos participantes obtiveram um desempenho Bom e nenhum obteve uma classificação Excelente. Por outro lado, a soma dos desempenhos considerados Ruim ou Regular alcançou 94,2% dos estudantes.

Figura 30 – Desempenho dos alunos sobre conceitos musicais e sonoros



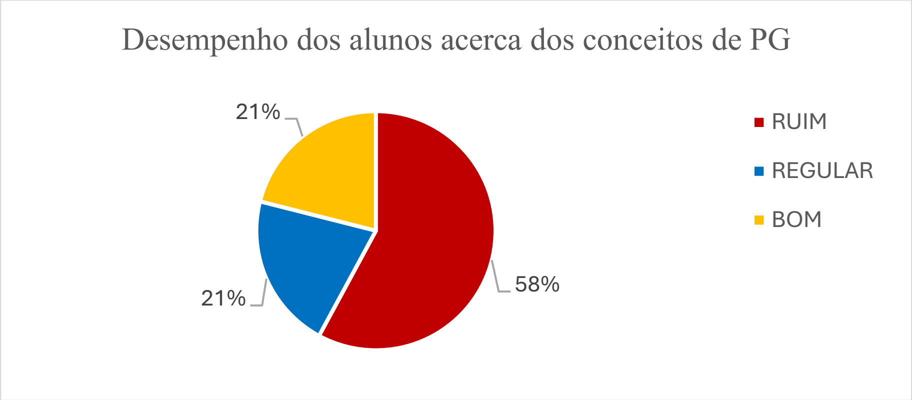
Fonte: Elaborada pelo autor

As questões 10, 11, 12, 13 e 14 trataram sobre conceitos básicos de progressão geométrica. O gráfico da Figura 31 apresenta em termos de porcentagem o desempenho dos alunos, que foi categorizado da seguinte maneira:

- De 0 a 1 acertos: Ruim
- De 2 a 3 acertos: Regular
- De 4 a 5 acertos: Bom

Assim, entre os 19 estudantes, 11 tiveram desempenho ruim, 4 regular e 4 bom. O gráfico da Figura 31 indica que mais da metade dos participantes tiveram um desempenho Ruim, representando 58% do total. Por outro lado, aqueles que alcançaram um desempenho Regular ou Bom corresponderam a 21% para cada categoria. Segundo o professor colaborador, os alunos haviam estudado o conteúdo de PG meses antes da aplicação do questionário. No entanto, os resultados apresentados acima indicam que eles ainda não haviam consolidado esse conhecimento.

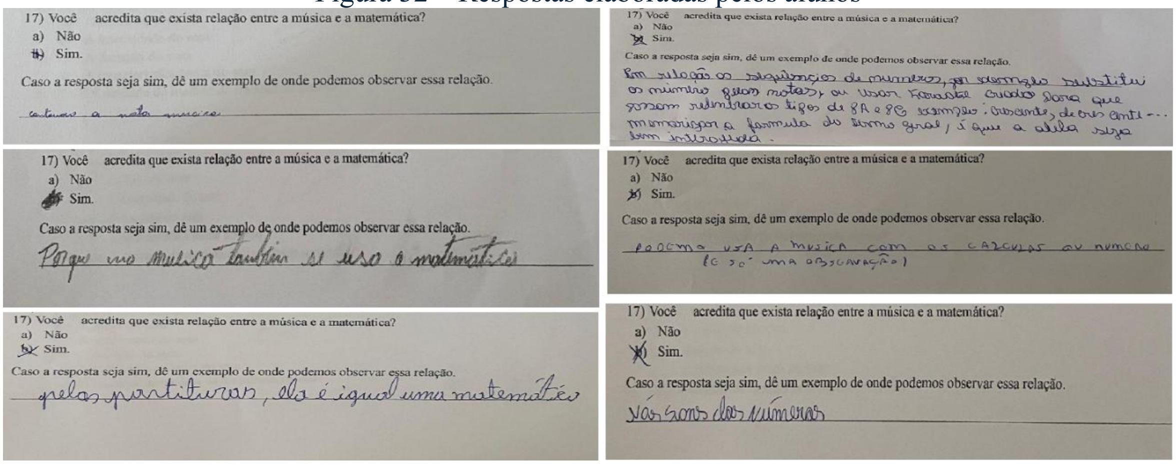
Figura 31 – Desempenho dos alunos sobre Progressão Geométrica



Fonte: Elaborada pelo autor

Para concluir a análise do questionário de diagnóstico, os estudantes foram interrogados sobre a possibilidade de uma conexão entre música e matemática. Dos participantes, 5 não veem essa relação, enquanto 14 acreditam na conexão entre matemática e música. Quando solicitados que fornecessem um exemplo de um fato que demonstrasse essa relação, dos 14 que afirmaram existir a conexão, 9 não souberam exemplificar e apenas 6 elaboraram uma resposta. Na figura 32, podemos ver nas respostas dadas pelos alunos e, reforçado, por aqueles que não souberam responder, que, embora acreditem na conexão entre música e matemática, ainda não conseguem comprovar essa ligação na prática.

Figura 32 – Respostas elaboradas pelos alunos



Fonte: Elaborado pelo autor

A análise dos resultados do questionário diagnóstico evidenciou dificuldades iniciais dos estudantes relacionadas à compreensão de sequências numéricas e, em particular, das Progressões Geométricas, bem como um conhecimento limitado acerca de conceitos musicais e sonoros. Esses resultados corroboram a necessidade de uma abordagem pedagógica que vá além da apresentação formal dos conteúdos matemáticos, conforme discutido na fundamentação teórica deste trabalho.

À luz da concepção de sequência didática proposta por Zabala, os dados do questionário diagnóstico assumem papel central no planejamento e na condução das atividades, uma vez que permitem identificar os conhecimentos prévios e as lacunas conceituais dos estudantes. Conforme esse referencial, a aprendizagem deve ser analisada como um processo progressivo, no qual os conteúdos são retomados e aprofundados ao longo das atividades, respeitando o ritmo e as experiências dos alunos. Nesse sentido, os resultados do diagnóstico justificam a organização da sequência didática em etapas que privilegiam a contextualização, a experimentação e a construção gradual dos conceitos de Progressão Geométrica.

Além disso, os resultados do diagnóstico indicaram que a maioria dos alunos não percebia, inicialmente, conexões entre matemática e música, evidenciando uma visão fragmentada do conhecimento. Tal percepção está em consonância com as discussões teóricas sobre a necessidade de práticas interdisciplinares que promovam a integração entre diferentes áreas do saber. A partir desse diagnóstico, a sequência didática foi planejada de modo a criar situações em que os estudantes pudessem vivenciar e reconhecer essas conexões, superando a compartimentalização dos conteúdos escolares.

Dessa forma, os resultados do questionário diagnóstico não apenas forneceram subsídios para o planejamento da sequência didática, mas também confirmaram a pertinência dos referenciais teóricos adotados neste trabalho. A partir da identificação das dificuldades, concepções e atitudes iniciais dos estudantes, foi possível estruturar uma proposta metodológica coerente com os pressupostos do pensamento analógico, da interdisciplinaridade e da concepção de sequência didática defendida por Zabala, orientando tanto a intervenção pedagógica quanto a análise dos dados subsequentes. Assim, ao final desta análise, obtivemos informações valiosas que apoiaram o planejamento e a execução da SD, as quais também serão usadas como referência no término das atividades.

Na segunda aula, utilizou-se a projeção em tela para apresentar conceitos básicos de som e música. Os alunos estudaram a definição de som e suas características fundamentais, como altura, intensidade e timbre. Além disso, foram abordados os fenômenos sonoros, incluindo reflexão, reverberação, refração, difração, efeito Doppler e interferência. A definição de música também foi discutida, juntamente com a composição musical, que envolve melodia, harmonia, contraponto e ritmo. Por fim, os alunos aprenderam sobre compassos musicais, como semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia e fusa, e intervalos musicais, que podem ser justos, maiores ou menores. O professor orientador, que tem formação em matemática, graduação em física e conhecimentos básicos em música, explicou esses conceitos. No entanto, o ideal seria convidar outros docentes para que diferentes perspectivas fossem apresentadas, promovendo a interdisciplinaridade e construindo um aprendizado significativo para os alunos.

Um teclado (instrumento musical) foi usado durante a explicação para ajudar a compreender esses conceitos. Notas graves e agudas foram tocadas para ilustrar a altura do som, o volume do teclado foi ajustado para demonstrar a intensidade do som, e diferentes sons de instrumentos como saxofone, piano, flauta, órgão e guitarra foram reproduzidos para explicar os timbres. Ademais, o instrumento desempenhou um papel crucial na compreensão de conceitos como melodia, harmonia, contraponto e ritmo.

Alguns conceitos equivocados foram observados no momento da explicação. Quando perguntados sobre o que caracteriza um som alto, alguns estudantes responderam:

- "É um som que dói o ouvido"
- "É um som forte"
- "É um som igual dessas aparelhagens grande"

Sabe-se que essas respostas estão fisicamente ligadas à intensidade do som, e não à sua altura, uma vez que um som alto é um som mais agudo, com elevada frequência sonora. No entanto, ao demonstrarmos a diferença desses conceitos na prática com o uso do instrumento musical, conseguimos intervir e retificar o equívoco apresentado. Notamos que o uso do instrumento em sala de aula foi de grande relevância, uma vez que conseguiu atrair a atenção do estudante e auxiliou no aprimoramento da compreensão do que havia sido planejado.

Para finalizar essa aula, foi exibido um vídeo de cerca de 7 minutos, disponível no YouTube (cf. O MONOCORDIO..., 2021). Esse vídeo que resume como Pitágoras analisou sons consonantes em batidas de martelos, como utilizou o monocórdio para estudar essas relações e que também introduz conceitos musicais, como os intervalos entre notas e outros aspectos, serviu como ponto de partida para a discussão sobre a conexão entre matemática e música. Surgiram algumas discussões sobre essa relação, nas quais os estudantes se mostraram impressionados e curiosos diante das diversas possibilidades de conexões que se demonstrou entre a matemática e a música, eles foram incentivados a pensar e investigar mais sobre o tema. Além disso, foram desafiados a construir um monocórdio de Pitágoras em um horário fora da aula e a levar o instrumento para a escola na 6° aula, dia em que seria realizado a atividade prática III. Durante toda a aula os alunos se mostraram atentos, participativos e receptíveis ao que estava sendo estudado. Para a construção do monocórdio foi sugerido aos alunos um vídeo (cf. O QUE É..., 2020), e que buscassem outras fontes através de pesquisas.

Na 3ª aula, o professor colaborador, utilizando um pincel e um quadro branco, fez uma breve recapitulação dos conceitos fundamentais de sequência numérica, definindo PA e PG, com ênfase maior na última, uma vez que é o ponto central da SD. Como esse tema já havia sido discutido meses antes do início da SD, o professor focou em verificar a compreensão dos estudantes por meio de exercícios escritos no quadro. Esses exercícios avaliavam habilidades como: identificar uma sequência (PA, PG ou outras), determinar a razão, analisar o comportamento (crescente, decrescente, constante ou oscilante), escrever a lei de formação, termo geral e soma dos termos. Durante a aula, notamos que alguns estudantes tinham dificuldades para resolver os exercícios. No entanto, com algumas intervenções do professor e ajuda dos colegas, eles conseguiram alcançar o objetivo.

Na quarta aula, foi aplicado a Atividade Prática I cujo objetivo principal foi escrever uma sequência numérica (PG) usando a analogia com figuras musicais em compassos 4/4. Primeiramente, foi exibido aos alunos um vídeo do YouTube (cf. COMO LER..., 2016), no qual os estudantes puderam retomar os conceitos de leitura rítmica estudado na segunda aula da SD. Eles puderam recapitular sobre as figuras musicais (semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia e fusa) e o tempo de duração que cada uma representa, além de alguns tipos de compasso, focando no compasso quaternário simples (4/4).

Após o estudo teórico, a turma foi dividida em grupos de quatro ou cinco alunos para realizar a Atividade Prática I. Com o auxílio de um teclado, o professor orientador tocava notas, e os alunos observavam como as notas eram tocadas em um compasso 4/4 para preencher uma partitura com as figuras musicais adequadas. Depois de completar os compassos, os alunos criaram uma sequência numérica usando a analogia entre as figuras musicais de cada compasso e os termos da sequência. Eles precisavam escrever e identificar a sequência numérica. A seguir, descreveremos como a atividade foi realizada, dividindo-a em duas etapas: preparação e execução:

I) Preparação

- Cada grupo recebeu folhas contendo instruções e pautas de partitura para a realização da tarefa, conforme pode ser observado no Apêndice C.
- Depois de ler as instruções detalhadamente, o professor orientador propôs que a classe marcasse o compasso 4/4 com palmas (cada compasso 4/4 equivale a um ciclo de quatro palmas).
- Cada grupo selecionou os que bateriam as palmas e os que observariam os tempos em que as notas eram tocadas.

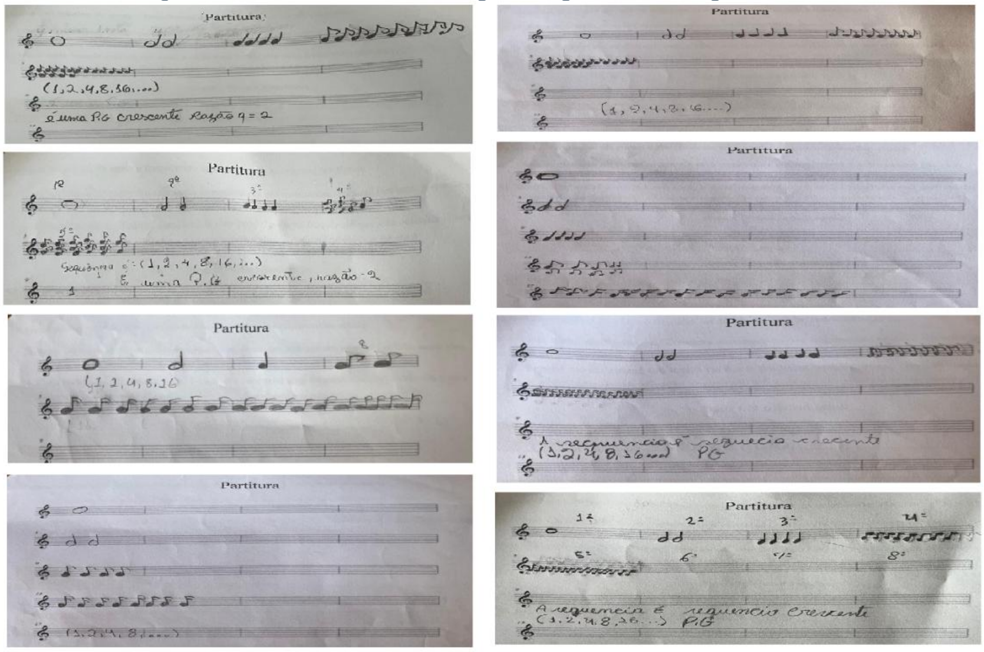
II) Execução

- Os discentes selecionados batiam palmas contando de 1 a 4, em que cada palma representava 1 tempo do compasso 4/4.
- No primeiro compasso o professor orientador tocou apenas uma nota simultânea a palma 1 do compasso.
- No segundo compasso o professor orientador tocou duas notas simultâneas a palma 1 e a palma 3 do compasso.
- No terceiro compasso foram tocadas quatro notas, sendo uma para cada palma do compasso.
- No quarto compasso foram tocadas oito notas, sendo duas para cada palma do compasso.

- No quinto compasso foram tocadas dezesseis notas, sendo quatro para cada palma do compasso.

Em cada compasso, os alunos observavam a quantidade de notas tocadas e usavam a figura musical que completava adequadamente aquele compasso. Na Figura 33 podemos ver as anotações e os compassos preenchidos pelos estudantes. Ao longo da atividade I, os alunos foram instruídos a desconsiderar as notas tocadas ao preencher a partitura, uma vez que apenas o aspecto rítmico era essencial para a tarefa.

Figura 33 – Anotações e compassos preenchidos pelos alunos



Fonte: Elaborado pelo autor

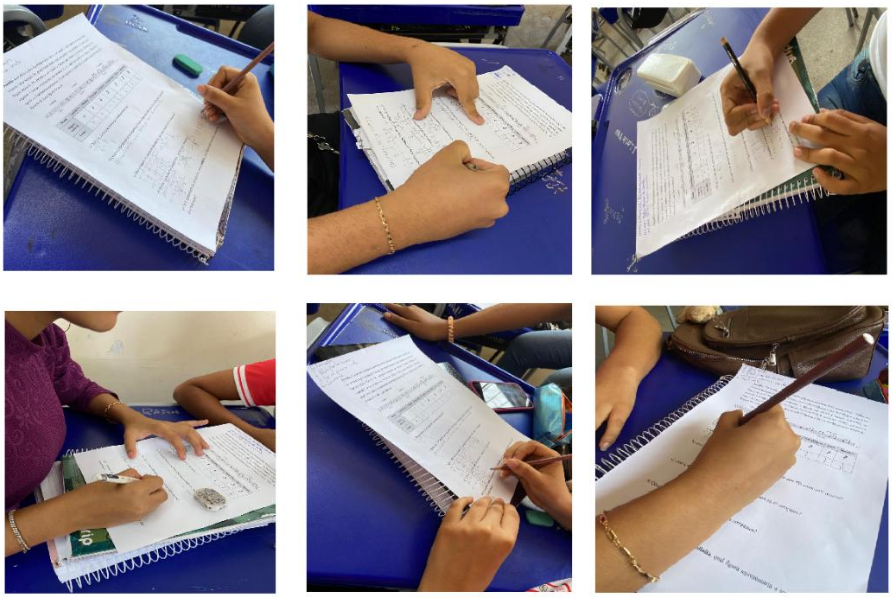
Na Figura 33, observamos que os estudantes foram capazes de usar adequadamente as figuras musicais para preencher a partitura. No entanto, observamos alguns erros nas representações e colocações das figuras musicais nos compassos. Isso, porém, não afetou a construção da sequência numérica (PG), conforme evidenciado nas anotações dos alunos. Além disso, as observações em sala e as imagens da Figura 33 revelam que foram poucos os alunos que não conseguiu identificar o tipo de sequência numérica presente nas notas dos compassos, mesmo tendo a escrito. Em contrapartida, a maioria deles conseguiu não apenas escrever a sequência, mas também identificar o tipo e encontrar a razão.

Durante a realização da Atividade Prática I, algumas dificuldades foram notadas. Uma das dificuldades surgiu durante o momento das palmas, quando alguns alunos não conseguiam se sincronizar com o restante da turma. O professor orientador, então, interveio usando um metrônomo (aparelho que produz um som ou sinal em intervalos regulares), que ajudou os alunos a bater palmas mantendo o ritmo. Outra dificuldade surgiu ao chegar no quinto compasso, pois foi necessário diminuir a velocidade dos pulsos do metrônomo de 80 bpm para 50 bpm, já que, em 80 bpm, a execução das 16 notas e a percepção dos alunos se mostraram bastante desafiadoras. Em algumas situações, foi necessário repetir várias vezes a maneira como as notas eram tocadas em um certo compasso, pois os alunos não conseguiam entender de imediato.

Ao longo de toda a atividade, os estudantes demonstraram interesse e envolvimento. Além disso, a interação entre eles foi notável, uma vez que constantemente se consultavam e se auxiliavam na execução das tarefas. Esta atividade proporcionou bons momentos de troca de conhecimentos entre os alunos.

Para concluir a Atividade Prática I, os alunos receberam uma questão (APÊNDICE G) criada pelo professor orientador com a finalidade de avaliar os estudantes e encorajá-los a utilizar os conhecimentos adquiridos até aquele ponto. A questão conecta os princípios da PG à teoria musical, incluindo compasso e figuras musicais. A Figura 34 exibe imagens quando os alunos realizavam a resolução da questão proposta. Os itens a), b) e c) da questão não trouxeram grandes desafios para os alunos. No entanto, nos itens d) e e), foi necessário que os professores orientador e colaborador interviessem, já que alguns estudantes tiveram problemas ao aplicar a fórmula da soma dos termos da PG finita e infinita. Esses alunos apresentaram dificuldades com operações básicas, como potenciação e adição e divisão com frações. Na questão, a razão da PG é $q = \frac{1}{2}$, o que dificultou a execução dos cálculos. Foi preciso revisar esses conceitos fundamentais, que foram explicados através de exemplos no quadro branco. Depois disso, os alunos foram capazes de responder ao item d) e, consequentemente, ao item e), uma vez que os cálculos foram mais fáceis de realizar após a intervenção. A interpretação do conceito de soma infinita, conforme o item e), também causou confusão entre os alunos, pois acharam curioso que a soma de infinitos termos resultasse em um número, o quatro. Para eles, essa ideia de infinito se revelou bastante abstrata. contudo, os alunos foram capazes de resolver a questão como podemos verificar em uma das anotações dos alunos no APÊNDICE H.

Figura 34 - Alunos resolvendo a questão na Atividade Prática I



Fonte: Elaborado pelo autor

As dificuldades de alguns alunos ao realizar cálculos básicos, conforme evidenciado anteriormente, destacam um dos principais desafios enfrentados pelos professores de matemática no ensino médio. Muitos alunos chegam ao ensino médio sem a base necessária para avançar nos novos conteúdos, o que leva os professores a interromperem as aulas para revisar conceitos que os alunos já deveriam ter aprendido. É impossível construir o telhado de uma casa sem antes colocar o piso e as colunas de sustentação. Essa é uma analogia que uso para refletirmos sobre uma situação vivida por centenas e milhares de professores diariamente. O cerne desse problema pode estar nas práticas de ensino tradicionais, que ainda são muito presentes na educação atual. Nesse contexto, propostas como a apresentada neste estudo são essenciais para alterar essa situação, uma vez que abordagens inovadoras no ensino são, de fato, o caminho para uma educação mais envolvente e eficiente.

Na quinta aula, foi aplicado a atividade prática II, em que o objetivo central envolveu a criação e análise de sequências numéricas (PG) originadas das frequências sonoras de notas musicais tocadas em intervalos justos, maiores e menores. Primeiramente, o professor orientador fez uma rápida apresentação sobre tom e semitom, as notas musicais e os intervalos entre elas (justos, maiores e menores), retomando alguns pontos estudados na segunda aula da SD. Além disso, explicou-se como Pitágoras criou sua escala usando o intervalo de quintas justas, também conhecido como ciclo de quintas. Para melhorar a compreensão dos alunos, foi apresentado um vídeo de aproximadamente 7 minutos no YouTube (cf. HISTÓRIA..., 2017). Neste vídeo, é apresentada uma breve visão geral da história da música e da escala pitagórica.

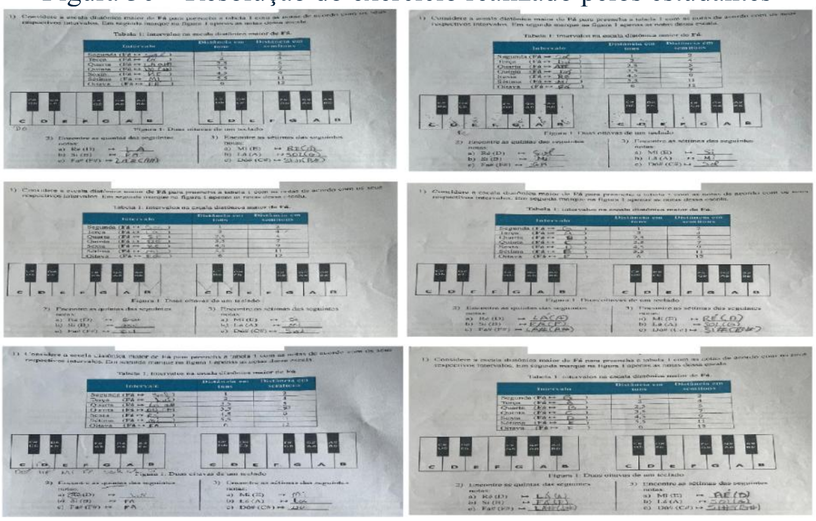
Depois de estudarem sobre as notas musicais e intervalos, os alunos reunidos em grupos foram submetidos a um exercício para avaliar seu aprendizado e prepará-los para a atividade prática II. O exercício ao qual os alunos foram submetidos, e que trata sobre intervalos entre notas musicais está disponível no APÊNDICE B, e a Figura 35 contém algumas imagens obtidas durante a sua resolução.

Figura 35 – alunos durante exercício

Fonte: Elaborado pelo autor

O exercício tinha como principal objetivo treinar os alunos a encontrar notas separadas por diferentes intervalos. As imagens da Figura 35 e as observações feitas em sala de aula revelam que os alunos interagiram de forma eficaz e mostraram interesse na realização do exercício. Na imagem da Figura 36 estão algumas das resoluções realizadas pelos educandos. Ao avaliar as respostas dos alunos, observou-se que havia alguns equívocos, particularmente nas questões 2 e 3. Havia equívocos na contagem dos intervalos e uma confusão na escrita de símbolos de notas naturais e sustenidos. Essas dificuldades foram mitigadas por meio de intervenções realizadas logo após a entrega do exercício.

Figura 36 – Resolução do exercício realizado pelos estudantes

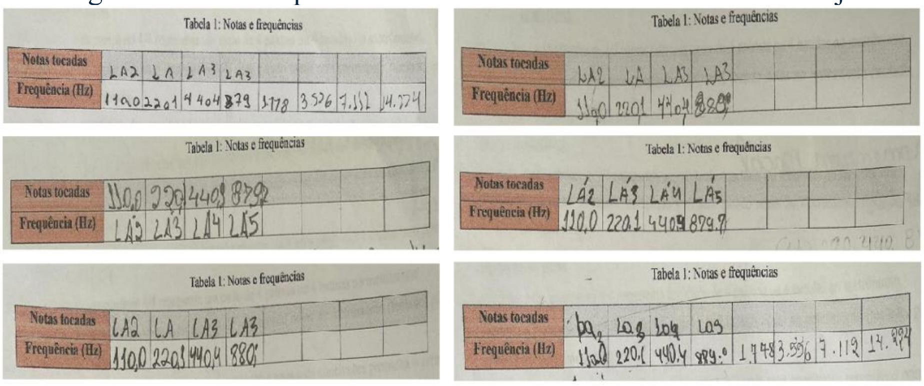


Fonte: Elaborado pelo autor

Após a resolução do exercício, teve início a Atividade Prática II, na qual os estudantes utilizaram um aplicativo afinador (Figura 43) para registrar as frequências sonoras de notas tocadas em diversos intervalos musicais. Com essas frequências, foram geradas sequências numéricas que foram analisadas pelos alunos. Um teclado foi utilizado para tocar as notas, enquanto os alunos as visualizavam no aplicativo e as registravam em quadros. O processo da Atividade Prática II, é descrito minuciosamente como segue:

- Primeiramente a turma foi dividida em grupos de 4 ou 5, que receberam a tarefa impressa, a qual pode ser encontrada no apêndice D. Além das tabelas a serem preenchidas, o documento também incluía instruções para a realização da tarefa.
- Foi realizado a leitura e explicação de como se daria a atividade.
- A atividade iniciou com o professor orientador tocando notas em intervalos de oitavas justas. A nota "Lá$_2$" foi utilizada como referência.
- A sequência de notas (Lá$_2$, Lá$_3$, Lá$_4$ e Lá$_5$) foi executada e os estudantes completaram a primeira tabela. Na Figura 37 podemos observar a tabela preenchida pelos estudantes.

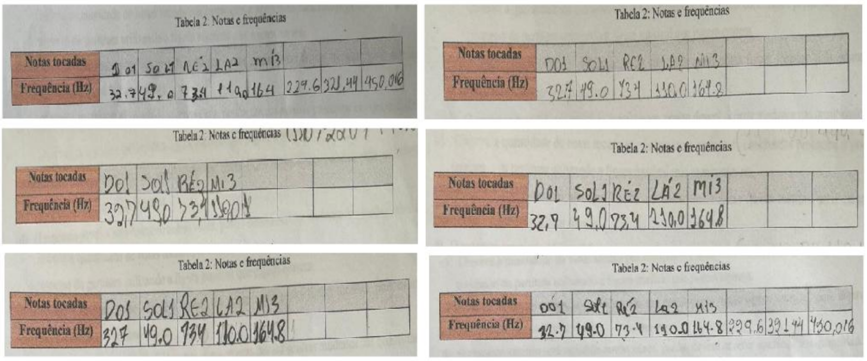
Figura 37 – Tabela preenchida com notas em intervalos de oitava justa



Fonte: Elaborada pelo autor

- Após o preenchimento da primeira tabela, foi tocada uma série de notas em intervalos de quintas justas a partir do Dó$_1$. Na Figura 38 podemos observas a tabela preenchida pelos estudantes.

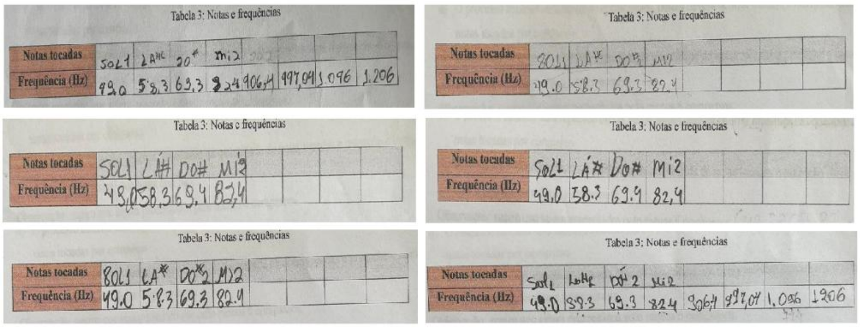
Figura 38 – Tabela preenchida com notas em intervalos de quinta justa



Fonte: Elaborada pelo autor

- Após o preenchimento da segunda tabela, foi realizada uma série de notas em intervalos separados por um tom e meio (intervalo de terça menor) a partir do Sol$_1$. Na figura 39 podemos observas a tabela preenchida pelos estudantes.

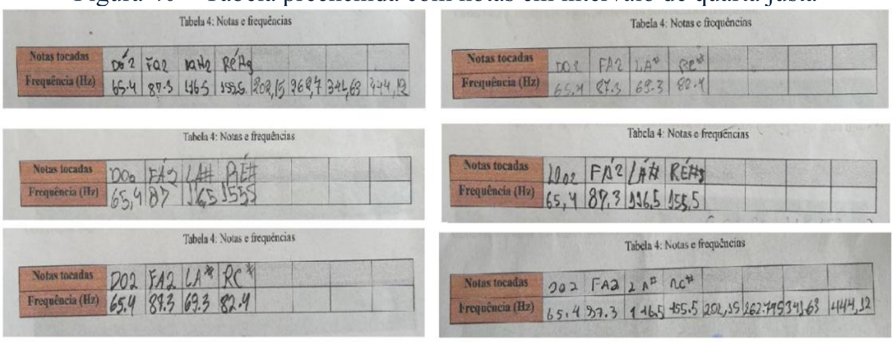
Figura 39 – Tabela Preenchida com notas em intervalo de terça menor



Fonte: Elaborada pelo autor

- Para finalizar, a quarta e última tabela foi preenchida com a execução de uma sequência de notas em intervalos de quartas justas, utilizando a nota Dó$_2$ como ponto de partida. Na Figura 40 podemos observas a tabela preenchida pelos estudantes.
-

Figura 40 – Tabela preenchida com notas em intervalo de quarta justa



Fonte: Elaborada pelo autor

A Figura 41 mostra alguns momentos em que os alunos observavam o aplicativo e registravam nas tabelas as notas e frequências sonoras que o professor orientador tocava no teclado.

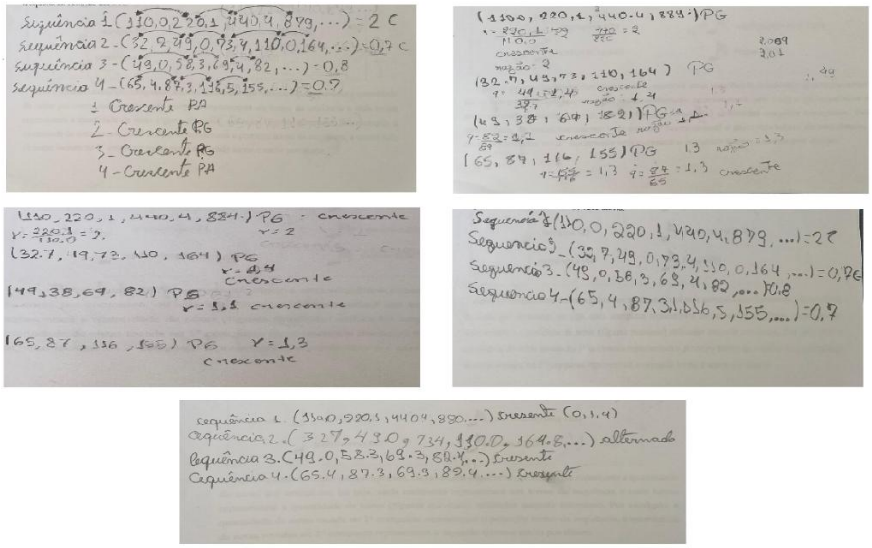
Figura 41 – Turma usando o aplicativo e registrando as frequências na atividade prática II

Fonte: Elaborada pelo autor

Uma das imagens exibidas na Figura 41 mostra o diretor e a coordenadora da escola observando atentamente os alunos envolvidos na atividade. O diretor e a coordenadora se certificaram de participar de toda a atividade prática II, afirmando que esse tipo de atividade é muito importante, pois permite que os alunos vejam na prática como a música, que está presente no cotidiano das pessoas, se relaciona com os conceitos matemáticos, físicos e artísticos estudados em sala de aula.

Depois de preencherem as tabelas, os alunos escreveram as sequências numéricas a partir dos registros das frequências sonoras. Em seguida, analisaram-nas, identificando o tipo, a razão e o comportamento de cada sequência. Observa-se em geral nas anotações dos alunos (Figura 42) que estes foram capazes de registrar as sequências numéricas a partir das frequências sonoras, identificar a progressão geométrica, descrever o comportamento e calcular as razões das sequências realizando a divisão entre termos consecutivos. Os equívocos que surgiram das análises dos alunos presente nas anotações como: na identificação de sequência; na classificação do comportamento e no cálculo da razão foram mitigadas por intervenções feitas durante e após o término da atividade por meio explicações do professor orientador e de interações entre os próprios alunos.

Figura 42 – Anotações dos alunos na atividade Prática II



Fonte: Elaborada pelo autor

Algumas dificuldades surgiram durante a execução da atividade prática II, dentre elas o uso do aplicativo afinador. Como há muitos aplicativos afinadores, alguns deles não exibem a frequência sonora das notas, e esses foram os que as equipes baixaram, o que acabou atrasando o início da atividade. No entanto, o professor orientador usou o aplicativo já baixado no seu celular (n-Track Tuner) para conduzir a atividade, em que um ou dois alunos de cada grupo observavam e registravam as informações do aplicativo, conforme ilustrado na Figura 41. A Figura 43 mostra imagens do aplicativo usado no celular do professor orientador.

Figura 43 – Imagens do aplicativo afinador

Fonte: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.ntrack.tuner&hl=pt_BR

Outra dificuldade que os alunos apresentaram ocorreu ao calcular a razão das progressões geométricas. Os termos das sequências numéricas continham números com uma casa decimal, o que tornou as divisões desafiadoras para os estudantes. Além disso, os valores resultantes das divisões entre termos consecutivos de uma mesma sequência raramente eram iguais, sendo geralmente aproximados devido a não precisão do aplicativo afinador, o que gerava dúvidas nos alunos. Tudo isso foi corrigido com a permissão do uso da calculadora e a consideração de números aproximados.

Na 6° aula foi aplicado a Atividade Prática III que objetivou explorar os conceitos de progressão geométrica em um monocórdio de Pitágoras. Nesta aula os alunos estavam de posse de um monocórdio de Pitágoras construído por eles próprio e um celular com um aplicativo afinador devidamente baixado. Com isso, os educandos precisariam encontrar 4 notas no monocórdio separadas por intervalos de quartas justas como proposto no exercício do apêndice E. O processo da Atividade Prática III, é descrito minuciosamente como segue:

1. Os estudantes movimentaram no monocórdio o cavalete móvel produzindo som até encontrar uma nota qualquer no aplicativo de afinação.
2. A posição da nota encontrada foi marcada no monocórdio e registrada em tabela com sua respectiva frequência.
3. Os alunos usaram conhecimentos de PG e música para descobrir as outras três notas separadas por intervalos de quartas justas, conhecendo apenas a primeira nota com sua frequência e a fração $q = \frac{4}{3}$ que define esse intervalo.

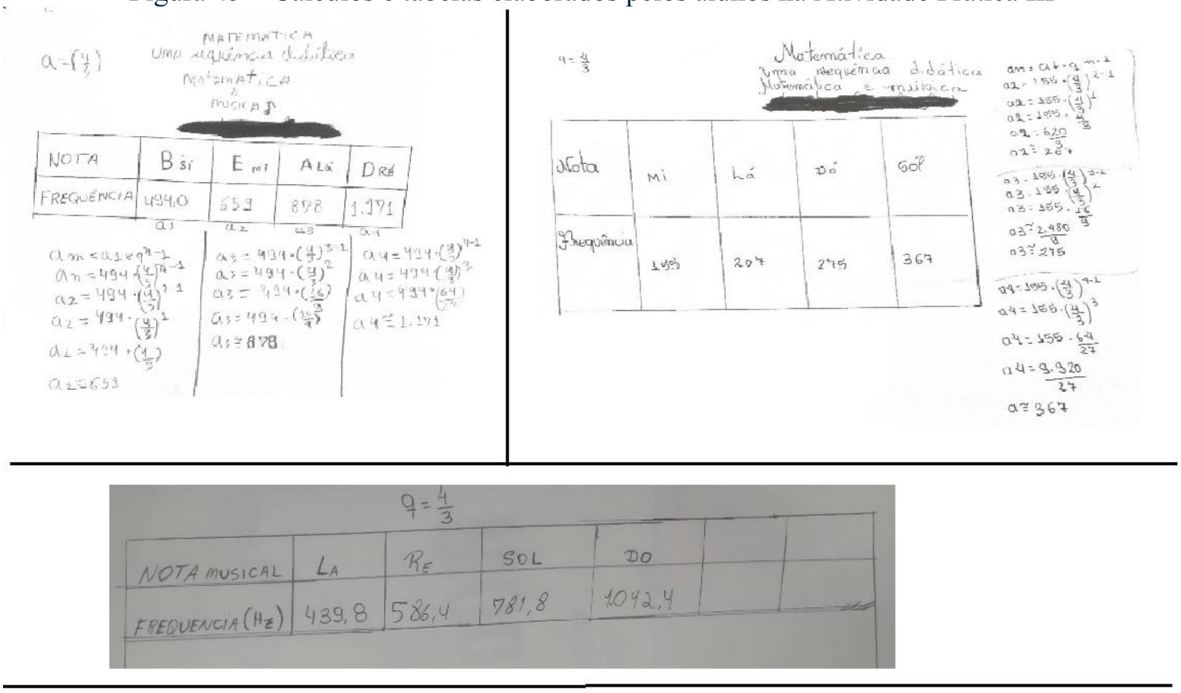
Figura 44 – Alunos tocando o monocórdio para encontrar e registrar a nota de referência

Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 44 apresenta imagens capturadas durante a atividade prática III, nas quais se pode notar a interação, a concentração e o empenho dos estudantes ao executar a tarefa. Essas imagens mostram momentos significativos no processo de aprendizagem, já que os estudantes se tornaram protagonistas na busca por soluções para o desafio apresentado e vivenciaram na prática a conexão entre a música e a matemática.

Os alunos elaboraram os cálculos e tabelas mostrados na Figura 45, que contêm informações que evidenciam o sucesso na execução da atividade. Isso foi possível ao empregar conceitos musicais e da progressão geométrica (PG). O termo geral da PG foi utilizado com base em conceitos musicais, como a relação de frequências sonoras no intervalo de quartas justas, o que resultou nos valores das frequências das notas desejadas.

Figura 45 – Cálculos e tabelas elaborados pelos alunos na Atividade Prática III



Fonte: Elaborado pelo autor

As notas escritas nas tabelas dos alunos na Figura 45 indicam que foram encontradas diferentes notas separadas pelo intervalo proposto. No primeiro monocórdio, registraram-se a seguinte sequência de notas: Si, Mi, Lá e Ré; no segundo, as notas Lá, Ré, Sol e Dó; e no terceiro, as notas Mi, Lá, Dó e Sol. Note que, de fato, as notas do primeiro e do segundo estão separadas por quartas justas. Entretanto, no terceiro, a distância entre as notas Lá e Dó é uma terça menor, o que leva, consequentemente, a uma distância de quinta justa entre Dó e Sol. Esse erro poderia ser corrigido ao trocar a nota DÓ por Ré. Isso nos faz pensar que, ao calcular a frequência da nota Ré, os alunos podem ter usado uma aproximação que resultou em uma frequência semelhante à do Dó. Essa situação pode ter sido agravada pela má captação da frequência no aplicativo causado pelo barulho na escola, vindo de outras salas ou até mesmo da própria sala onde a atividade aconteceu.

Ao término da atividade, com as notas registradas no monocórdio, foi permitido que os estudantes criassem e executassem melodias consonantes, fomentando um ambiente divertido e interativo. Logo, notou-se que os alunos foram capazes de executar a tarefa utilizando os conceitos estudados, sempre fazendo conexões entre a música e a matemática, resultando em um aprendizado significativo que despertou a curiosidade, desenvolveu o raciocínio e, principalmente, gerou motivação aos estudantes.

As atividades práticas desenvolvidas constituíram elementos centrais da proposta pedagógica, uma vez que operacionalizaram, em sala de aula, os pressupostos teóricos que fundamentam este trabalho. Conforme a concepção de sequência didática defendida por Zabala, as atividades foram organizadas de forma articulada e progressiva, com objetivos claros e interdependentes, permitindo que a aprendizagem fosse construída ao longo do processo e não apenas avaliada por meio de resultados. Nesse sentido, as práticas realizadas possibilitaram observar a evolução dos estudantes em diferentes dimensões da aprendizagem.

Sob a perspectiva do pensamento analógico, as atividades práticas favoreceram o estabelecimento de correspondências estruturais entre os domínios da música e da matemática. Ao explorar instrumentos musicais, relações entre frequências sonoras, intervalos e padrões rítmicos, os alunos foram conduzidos a identificar regularidades e relações proporcionais que se aproximam das estruturas matemáticas das sequências numéricas e das Progressões Geométricas. Esse processo permitiu que os estudantes construíssem significados a partir de experiências sensoriais e concretas, o que contribuiu para a compreensão dos conceitos matemáticos de forma menos abstrata e mais contextualizada.

A interdisciplinaridade manifestou-se de maneira efetiva nas atividades práticas ao integrar conhecimentos musicais, sonoros e matemáticos em situações de aprendizagem significativas. Essa integração possibilitou aos alunos perceberem a matemática como uma ferramenta para compreender fenômenos artísticos e sonoros, rompendo com a visão fragmentada dos conteúdos escolares. De acordo com o embasamento teórico do trabalho, essa abordagem favorece a atribuição de sentido aos conceitos matemáticos, uma vez que os estudantes passam a reconhecer sua aplicação em contextos diversos.

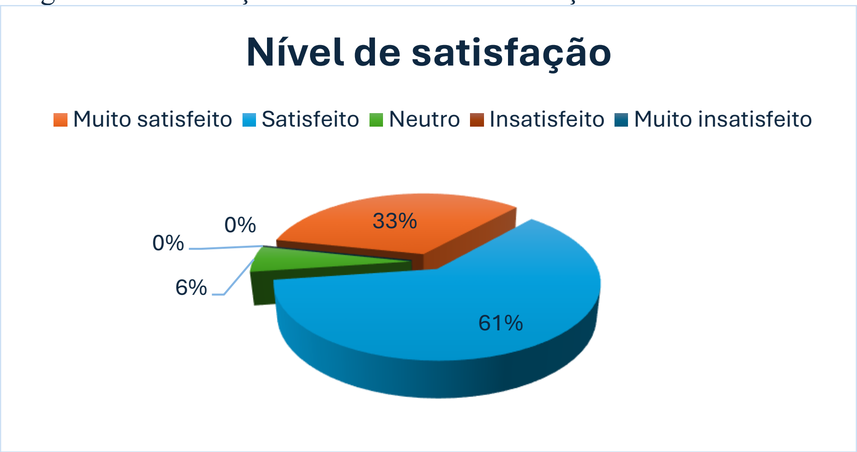
Do ponto de vista dos conteúdos de aprendizagem, conforme a classificação proposta por Zabala, as atividades práticas contemplaram simultaneamente conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais. Os conteúdos conceituais estiveram relacionados à compreensão das Progressões Geométricas e das sequências numéricas; os conteúdos procedimentais foram evidenciados nas estratégias utilizadas para explorar os instrumentos, registrar observações e resolver problemas; e os conteúdos atitudinais manifestaram-se no engajamento, na participação ativa e na colaboração entre os estudantes durante a realização das atividades. Essa articulação entre diferentes tipos de conteúdo reforça o caráter formativo da sequência didática.

Dessa forma, a análise das atividades práticas evidencia que a proposta pedagógica adotada está em consonância com o embasamento teórico do trabalho. A integração entre música e matemática, mediada pelo pensamento analógico e organizada segundo a lógica de uma sequência didática, mostrou-se um caminho promissor para promover a aprendizagem significativa da Progressão Geométrica. Os resultados observados ao longo das atividades práticas indicam que a abordagem interdisciplinar contribuiu para a construção de significados, para o envolvimento dos estudantes e para uma compreensão mais ampla e integrada dos conceitos matemáticos trabalhados.

Por fim, na 7ª e última aula, foi aplicado um questionário final com as mesmas questões específicas do questionário diagnóstico, além de perguntas pessoais sobre as atividades realizadas. Depois do questionário, a aula foi finalizada com bastante música e um banquete preparado pelos estudantes para celebrar o término da SD.

A seguir, apresentaremos uma breve análise do questionário final respondido pelos 18 alunos presentes no dia. Isso significa que apenas um dos que participou do questionário diagnóstico não compareceu para responder ao final. Os alunos foram indagados acerca do seu nível de satisfação em relação às atividades desenvolvidas na SD. Dos 18 participantes, 6 disseram estar muito satisfeitos, 11 satisfeitos, 1 neutro e nenhum insatisfeito ou muito insatisfeito. A Figura 46 apresenta um gráfico que mostra o resultado em porcentagens.

Figura 46 – Satisfação dos estudantes com relação as atividades da SD

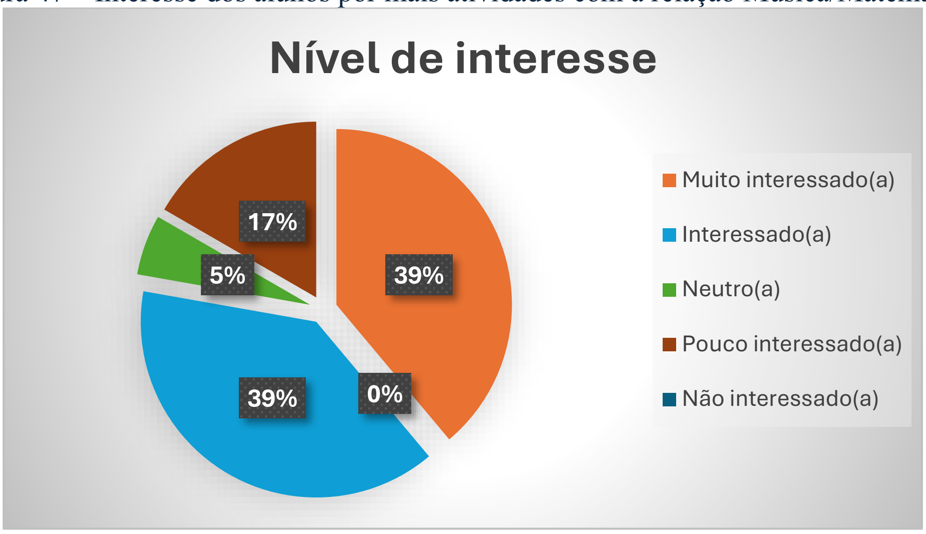


Fonte: Elaborado pelo autor

O resultado indicou que não houve insatisfação com as atividades sugeridas na SD, uma vez que a soma dos percentuais dos que ficaram muito satisfeitos ou satisfeitos alcançou 94% do total. Apenas 6% das respostas optaram pela neutralidade, sem expressar seu nível de satisfação.

Em uma outra questão, que buscou avaliar o nível de interesse dos alunos em participar de mais atividades que utilizem a música como recurso para o ensino de matemática, obtivemos os seguintes resultados: 7 estudantes demonstraram grande interesse, 7 mostraram interesse, 1 foi neutro, 3 apresentaram pouco interesse e nenhum desinteressado. O gráfico apresentado na Figura 47 mostra as respostas dos estudantes em termos percentuais. Ele indica que a soma dos participantes que se mostraram muito interessados ou apenas interessados representou 78% das respostas. Cinco por cento dos participantes optaram pela neutralidade, ao passo que 17% mostraram pouco interesse e 0% manifestou desinteresse.

Figura 47 – Interesse dos alunos por mais atividades com a relação Música/Matemática



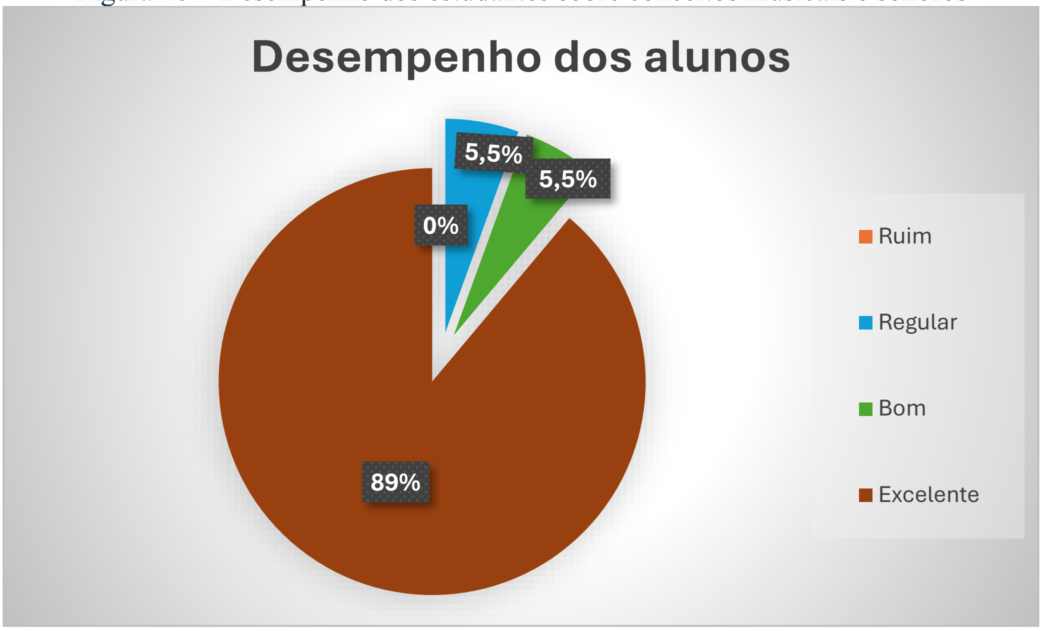
Fonte: Elaborado pelo autor

As questões 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 14 do questionário final abordaram conceitos musicais e sonoros. O gráfico da Figura 48 apresenta em termos de porcentagem o desempenho dos alunos, que foi categorizado da seguinte maneira:

- De 0 a 1 acertos: Ruim
- De 2 a 3 acertos: Regular
- De 4 a 5 acertos: Bom
- De 6 a 7 acertos: excelente

Entre os 18 alunos participantes, nenhum apresentou desempenho Ruim. Houve 1 Regular, 1 Bom e 16 Excelentes. Assim, o gráfico da Figura 48 indica que 89% dos alunos obtiveram desempenho excelente, 5,5% desempenho regular e 5,5% desempenho bom. Nenhum aluno apresentou desempenho ruim.

Figura 48 – Desempenho dos estudantes sobre conceitos musicais e sonoros



Fonte: Elaborado pelo autor

As questões 9, 10, 11, 12 e 13 trataram sobre conceitos de progressão geométrica. O desempenho dos alunos foi categorizado da seguinte maneira:

- De 0 a 1 acertos: Ruim
- De 2 a 3 acertos: Regular
- De 4 a 5 acertos: Bom

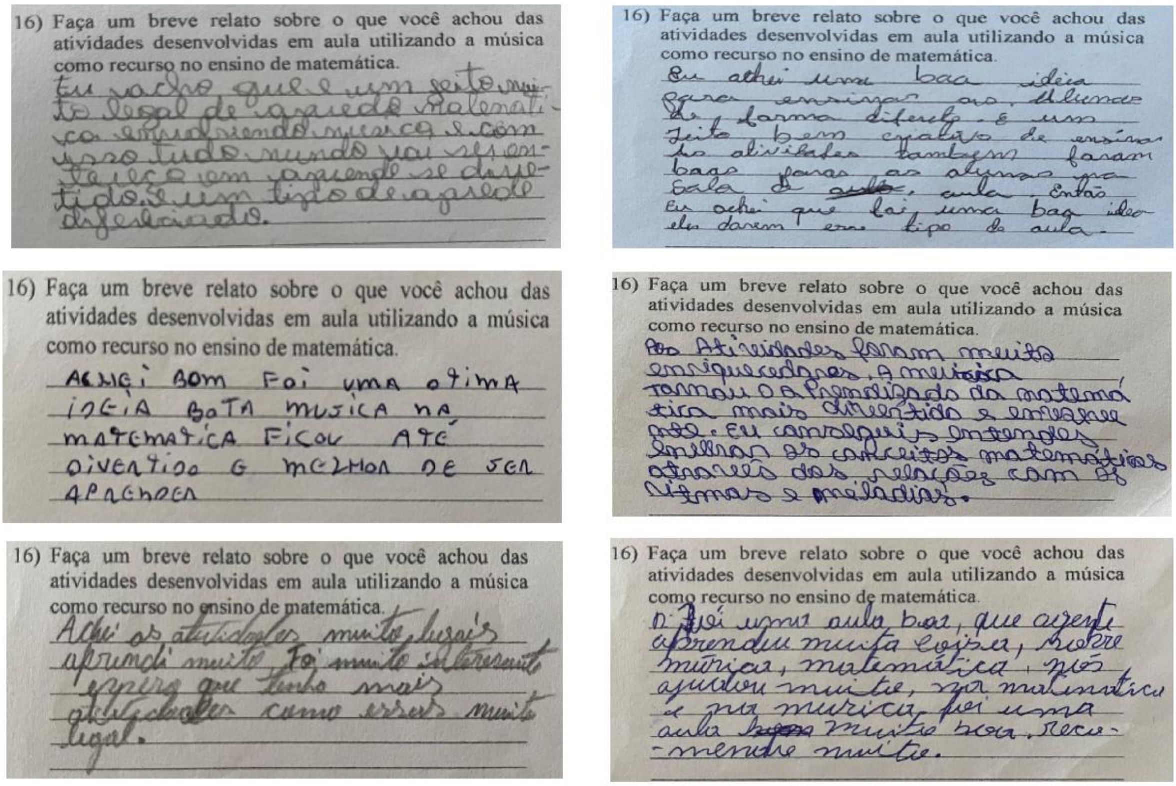
Dos 18 estudantes que responderam ao questionário, cinco acertaram 4 questões e treze acertaram 5, resultando em desempenho classificado como Bom. Isso significa que todos os alunos atingiram o desempenho máximo.

Por fim, na pergunta 16 do questionário final, os estudantes expressaram suas perspectivas sobre a utilização da música nas atividades de matemática em sala de aula. A seguir, serão exibidas algumas imagens das opiniões manifestadas pelos estudantes, acompanhadas de comentários descritivos.

Nas imagens da Figura 49, os alunos destacaram que aprender matemática envolvendo música foi um jeito muito legal e diferenciado de estudar, permitindo aprender se divertindo.

Eles consideraram as atividades muito enriquecedoras, pois conseguiram entender melhor os conceitos matemáticos através da relação com os ritmos e melodias. Além disso, expressaram o desejo de ter mais atividades como essas, considerando-as muito legais. Muitos alunos mencionaram que aprenderam bastante sobre música e matemática, e recomendaram essas aulas, afirmando que foram muito boas.

Figura 49 – Opinião dos estudantes sobre as atividades desenvolvidas na SD


16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

Eu acho que é um jeito muito legal de aprende Matemática envolvendo musica e com isso tudo mundo vai se emteressa em aprende se divertido e um tipo de aprede diferenciado.

16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

Eu achei uma boa ideia para ensinar os alunos de forma diferente. E um jeito bem criativo de ensinar as atividades também foram boas para os alunos na sala de ~~aula~~, aula. Então Eu achei que foi uma boa ideia eles darem esse tipo de aula.

16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

ACHEI BOM FOI UMA OTIMA IDEIA BOTA MUSICA NA MATEMATICA FICOU ATÉ DIVERTIDO E MELHOR DE SER APRENDER

16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

As Atividades foram muito enriquecedoras, A música tornou o aprendizado da matemática mais divertido e envolvente. Eu consegui entender melhor os conceitos matemáticos através das relações com os ritmos e melodias.

16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

Achei as atividades muito legais aprendi muito. Foi muito interessante espero que tenha mais atividades como essas muito legal.

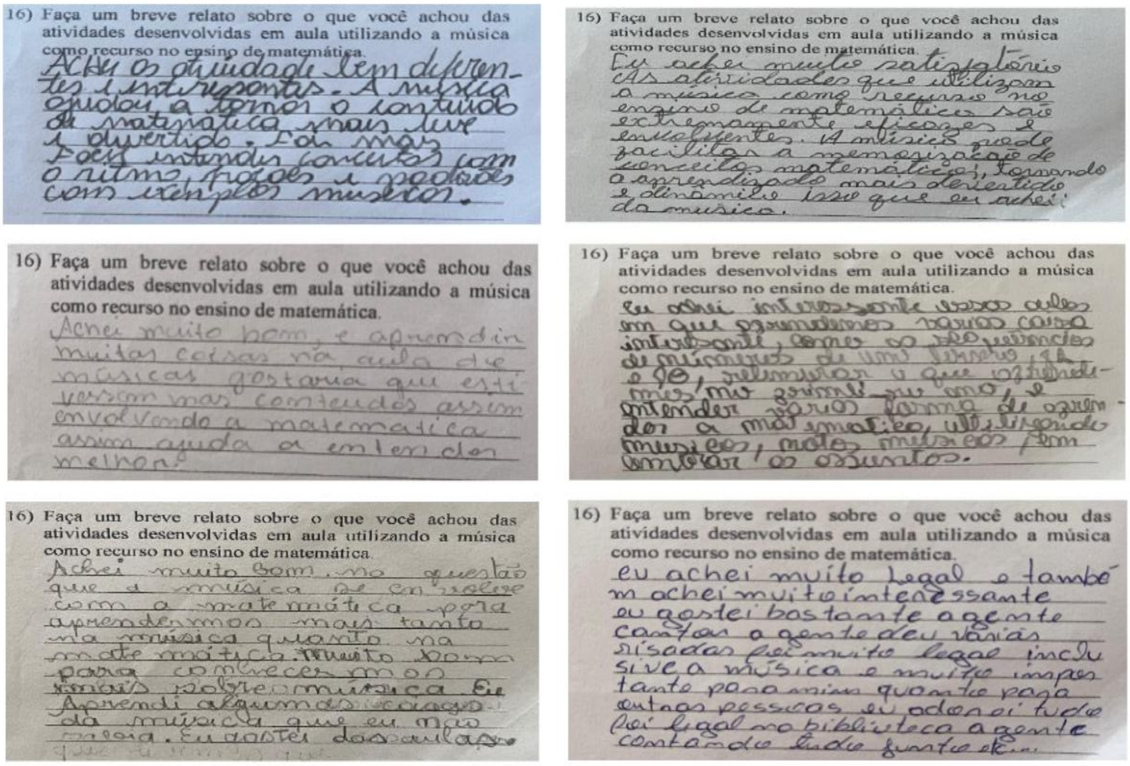
16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

Foi uma aula boa, que agente aprendeu muita coisa, sobre música, matemática, nos ajudou muito, na matemática e na música, foi uma aula ~~boa~~ muito boa. Recomendo muito.

Fonte: Elaborado pelo autor

Ademais, nas imagens da Figura 50, os estudantes consideraram a atividade bastante diferente e interessante, ressaltando que a música contribuiu para tornar o conteúdo matemático mais acessível. Eles acharam excelente a integração da música com a matemática, pois dessa forma aprenderam tanto matemática quanto música. Alguns estudantes disseram que gostaram das aulas e aprenderam algumas coisas com a música. Segundo eles, foi interessante aprender sequência numérica, progressão aritmética e geométrica, usando notas musicais. Além do mais, eles se divertiram muito com as atividades, relatando que cantaram e deram muitas risadas.

Figura 50 – Opinião dos estudantes sobre as atividades desenvolvidas na SD


16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

Achei as atividades bem diferentes e interessantes. A música ajudou a tornar o conteúdo de matemática mais leve e divertido. Foi mais fácil entender conceitos com o ritmo, frases e padrões com exemplos musicais.

16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

Eu achei muito satisfatório. As atividades que utilizam a música como recurso no ensino de matemática são extremamente eficazes e envolventes. A música pode facilitar a memorização de conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais divertido e dinâmico isso que eu achei da música.

16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

Achei muito bom, e aprendi muitas coisas na aula de músicas gostaria que estivessem mais conteudos assim envolvendo a matematica assim ajuda a entender melhor.

16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

Eu achei interessante essas aulas em que aprendemos varias coisas interessante, como as frequências de números de um [illegible] [illegible] e [illegible], relembrar o que estudamos no [illegible] e entender varias forma de aprender a matematica, utilizando musicas, notas musicais para [illegible] os assuntos.

16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

Achei muito bom, na questão que a música se envolve com a matemática para aprendermos mais tanto na música quanto na matemática. Muito bom para conhecermos mais sobre música. Eu Aprendi algumas [illegible] da música que eu não sabia. Eu gostei das aulas [illegible]

16) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

eu achei muito Legal e também achei muito interessante eu gostei bastante a gente cantar a gente deu várias risadas foi muito legal inclusive a música e muito importante para mim quanto para outras pessoas eu adorei tudo foi legal na biblioteca a gente cantando tudo junto etc...

Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto, os alunos expressaram opiniões favoráveis ao uso da música como ferramenta de aprendizagem no ensino de matemática. Eles destacaram que a música torna as aulas mais dinâmicas, atraentes e reflexivas. Além disso, os estudantes mencionaram que a integração da música nas atividades de matemática ajudou a despertar curiosidade e a construir significados para os conceitos matemáticos. A motivação foi apontada como um elemento crucial para o sucesso das atividades, evidenciando que a combinação entre música e matemática pode ser uma abordagem inovadora e eficaz no processo de ensino-aprendizagem.

7 CONCLUSÃO

Este estudo teve como propósito examinar de que maneira a união entre Matemática e Música pode auxiliar no aprendizado de Progressão Geométrica por estudantes do segundo ano do Ensino Médio. A ideia da sequência didática, baseada em tarefas práticas e analogias com a música, almejou, acima de tudo, fazer com que as ideias matemáticas se tornassem mais fáceis de entender e relevantes, incentivando a curiosidade dos alunos e diminuindo os problemas geralmente ligados à matéria.

Após examinar os dados reunidos, ficou claro que os estudantes, ao associarem aspectos da música, como notas, ritmos e escalas, com os conceitos matemáticos da Progressão Geométrica, foram capazes de criar laços que impulsionaram o entendimento e o uso prático do tema. Tal vivência mostrou que o aprendizado se deu de maneira integrada, dentro de um cenário ativo, onde a união entre o conhecimento teórico e a aplicação prática auxiliou na criação de interpretações mais consistentes.

A análise revelou que a conexão entre música e matemática não só aprimorou o entendimento dos temas matemáticos, como também incentivou uma participação maior dos estudantes nas aulas. As experiências e opiniões reunidas demonstraram que a ideia gerou interesse, estímulo e uma atitude mais ativa. Ademais, os alunos ressaltaram que a música serviu como uma forma de expressão próxima da sua realidade, fazendo com que o aprendizado se tornasse mais interessante e divertido.

Um ponto relevante que emergiu do debate foi a ampliação de habilidades além do domínio da matemática pura. A proposta incentivou o trabalho em equipe, o pensamento lógico e a criatividade, demonstrando que métodos que combinam diversas áreas podem auxiliar na formação completa dos estudantes. Essa visão reforça a ideia de que práticas pedagógicas inovadoras ampliam as oportunidades de ensino e aprendizagem, ligando a matemática à vida cotidiana dos alunos.

A análise comparativa dos resultados dos questionários diagnóstico e final indicou uma melhoria significativa no desempenho dos alunos em relação à precisão dos conceitos musicais, sonoros e de progressão geométrica. Em relação às questões que envolviam conceitos musicais e sonoros, os estudantes passaram de 0% na categoria de desempenho excelente, conforme registrado na prova diagnóstica, para 89% no questionário final. Ademais, o desempenho considerado ruim, que correspondia a 46,5% dos alunos no questionário diagnóstico, reduziu-se a 0% na avaliação final. Por outro lado, no que diz respeito às questões sobre progressão geométrica, 21% dos que obtiveram desempenho Bom no questionário diagnóstico aumentaram para 100% no questionário final, ou seja, todos os alunos alcançaram o desempenho máximo.

Dessa forma, a conexão entre Matemática e Música demonstrou ser uma estratégia eficiente no processo de ensino-aprendizagem, tornando-o significativo e contextualizado. A experiência realizada indica a necessidade de ampliar a utilização de abordagens interdisciplinares nas escolas, incentivando métodos de ensino e aprendizagem inovadores. Dessa forma, este estudo enfatiza a relevância de procurar continuamente opções criativas e integradoras que possam converter a sala de aula em um ambiente para experimentação, diálogo e construção coletiva do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música: o pensamento analógico na construção de significados**. 2. ed. São Paulo: Escrituras, 2002.

ABDOUNUR, Oscar João**. Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras, 2003. (Coleção Ensaios Transversais).

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música: pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras, 2006.

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música: O pensamento analógico na construção de significados** /Oscar João Abdounur – 3ª edição. São Paulo: Escrituras Editora, 2003. – (Coleção ensaios transversais)

ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. **Introdução à análise matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1999.

AZEVEDO, Richardson. 7 SIMPLES PASSOS PARA VOCÊ APRENDER COMO LER PARTITURA. *In*: AZEVEDO, Richardson. **TABLATURAS E CIFRAS**. [*S. l.*], 23 mar. 2017. Disponível em: https://tablaturasecifras.com.br/como-ler-partitura/. Acesso em: 11 set. 2025.

BIBBY, Neil. Tuning and temperament: closing the spiral: The Pythagorean scale. In: FAUVEL, J.; FLOOD, R.; WILSON, R. (ed.). **Music and Mathematics**: From Pythagoras to Fractals. Oxford: Oxford University Press, 2003. cap. 1, p. 13-19.

BOYER, C. B. **Matemática e Música - O pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996. Citado 5 vezes nas páginas 26, 29, 33, 35 e 92.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica: Ministério da Educação e Cultura; 1999.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica: Ministério da Educação e Cultura; 2000.

BRITO, Teca Alencar de Almeida. **Música na Educação Infantil**. São Paulo: Peirópolis, 2003.

CAMARGOS, C. B. R. **Música e matemática**: a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2010.

CAMPAÑA, Javier. Unidad 2-1: El pentagrama integral. *In*: CAMPAÑA, Javier. **Clase de Lenguaje Musical.** [*S. l.*], 30 set. 2017. Disponível em: https://www.clasedelenguajemusical.com/2-1/. Acesso em: 11 set. 2025.

CAMPOS, G. P. S. **Matemática e música: práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares**. 2009. 146 f. Dissertação (mestrado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2009.

CARPEAUX, O. M. **Uma nova história da música**. Rio de Janeiro: Ediouro,1999.

CAVALCANTI, V. de S; LINS, A. F. Ensino e aprendizagem da matemática através da música no ensino médio. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, X., 2010, Salvador. **Educação Matemática, Cultura e Diversidade**, 2010.

COHEN, H. F. **Quantifying music**: the science of music at the first stage of the scientific revolution. Boston: D. Reidel Publishing, 1984. Citado na página 26.

COMO LER o Ritmo na Partitura em 3 Minutos. Vídeo. 03min39s. publicado pelo canal Alexandre di paoli. 22 ago. 2016. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=czhtQGNzzQM. Acesso em: 17 mar. 2025.

CUNHA, João Francisco Everton. **Sequências e Séries**: abordagem e aplicações no ensino médio. São Luís, 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=985&id2=771. Acesso: 06 set. 2025

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Org.). **O planejamento da pesquisa qualitativa**: teorias e abordagens. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 15-41.

DOLZ, Joaquim et al. Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. **Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado de Letras**, p. 95-128, 2004.

ensinolab, **DIAPASÃO DE 440 HZ COM MARTELO - EQ127A**. c2025. 1 Figura. Disponível em: https://www.ensinolab.com.br/diapasao-de-440-hz-com-martelo?srsltid=AfmBOooywZi47Tyw6xIzhgtw_-2k_t9TnCYFw6koKCNNNPJcH2iRPIIh. Acesso em: 14 set. 2025.

FAZENDA, I. C.A. **Interdisciplinaridade**: um projeto em parceria. 3. ed. São Paulo: Loyola, 1995.

FERREIRA, Martins. **Como usar a música na sala de aula**. 7. ed. São Paulo: Contexto, 2010.

FIORENTINI, Dario. **A pesquisa e as práticas de formação de professores de Matemática em face das políticas públicas no Brasil**. *Bolema*, Rio Claro, ano 21, nº 29, p. 43-70, 2008. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221870004.pdf. Acesso em: 16 abr. 2025.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza, CE: UEC. Apostila, 2002.

FREIRE, P. R. N. **Pedagogia da autonomia**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1997.

FREIRE, P. R. N. **Pedagogia da esperança**. São Paulo: Cortez, 1991.

FREIRE, P. R. N. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1970.

FREIRE, P. **Pedagogia da esperança**: um encontro com a Pedagogia do Oprimido. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1997.

FREIRE, Paulo Régis Neves. **Ação cultural para a liberdade**. 6. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1982.

GARDNER, H. **Inteligências múltiplas**: a teoria na prática. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1995.

GIBBS, G. **Análise de dados qualitativos**. Porto Alegre: Editora Artmed, 2008.

GODOI, L. R. **A importância da música na educação infantil**. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Pedagogia) Universidade Estadual de Londrina, Paraná, 2011.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, v. 35, n. 2, p. 57-63, mar./abr. 1995.

GOMES, C. A. V.; MELLO, S. A. Educação escolar e a constituição do afetivo: algumas considerações a partir da Psicologia Histórico-Cultural. **Perspectiva**, v. 28, n. 2, p. 677-694, jul./dez, 2010.

GONÇALVES, H. J. L.; SANTOS, E. F. S. Discussões curriculares sobre a interface arte e matemática a partir de uma perspectiva crítica e criativa. In: SILVA, R. S. R. (Org.). **Artes em educação matemática**. Porto Alegre: Fi, 2019. p. 81-106.

HALLAM, S. The power of music. **International Journal of Music Education**, v. 28, n. 1, p. 5-15, 2010.

HANNA-PLADDY, B.; MACKAY, A. The relation between instrumental musical activity and cognitive aging. **Neuropsychology**, v. 49, n. 3, p. 322-333, 2011.

HEWITT, Paul G. **Física Conceitual**. 9. ed. Porto Alegre: Bookman, 2002.

HISTÓRIA da Música, Pitágoras e a escala musical. Vídeo. 06min.52s. Publicado pelo canal Canal do Zaleski. 17 mai. 2017. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=JWwtVDjm3Ws. Acesso em: 22 abr. 2025.

KILPATRICK, J. The problem of teaching mathematics. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 32, n. 2, p. 147-155, 2013.

LACERDA, O. **Compêndio de teoria elementar da música**. 3° ed. São Paulo: Ricordi Brasileira, 1967.

LEAL, L. H. B.; MARTINS, A. J.; SILVA, G. L. M. Ensino e aprendizagem musical: uma revisão de literatura. **Revista O Mosaico**, Curitiba, n. 17, p. 1-231, jan./jun. 2019. Disponível em: http://periodicos.unespar.edu.br/index.php/mosaico/ article/view/2537. Acesso em: 11 nov. 2019.

LEONTIEV, A. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. (Org.). **Linguagem, desenvolvimento e**

aprendizagem. Trad. Maria da Penha Villalobos. São Paulo: Ícone: Ed. da Universidade de São Paulo, 1994, p. 59-83.

LÉVY, P. **Tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. Traduzido por Carlos Irineu da Costa. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993. 127 p.

LIMA, C. S.; MARA, L. M. A importância da música no processo de aprendizagem. **Ciência Atual**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 97-10, 2013.

LOPES, Luís. **Manual de Progressões**. Rio de Janeiro: Interciência, 1998.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2010. Coleção Formação de Professores.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 7. ed. São Paulo: Cortez, 2011, 303 p.

MAYER, J. D.; SALOVEY, P. What is emotional intelligence? In: SALOVEY, P.; SLUYTER, D. J. (Org.). **Emotional development and emotional intelligence: Implications for Educators**. New York: Basic Books, 1997. p. 3-31.

MED, B. **Teoria da Música**. 4° ed. Brasília: Musicmed, 1996.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, ano II, n. 12, 1996.

NETTO, Luiz. **O Intervalo Musical "Coma" na Escala Temperada**. [*S. l.*], 4 jul. 2012. Disponível em: https://musicaeadoracao.com.br/25365/o-intervalo-musical-coma-na-escala-temperada/. Acesso em: 13 set. 2025.

NICOLAU, Marieta Lúcia Machado. **A educação pré-escolar**: fundamentos e didática. São Paulo: Ática, 1997.

NUNES, E. O uso da música como recurso pedagógico no ensino de matemática, 2012.

NUNES, R. M. **Relação entre matemática e música: uma proposta para o ensino de frações equivalentes e proporções no sétimo ano**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Centro Universitário La Salle, Canoas, Rio Grande do Sul, 2012.

O MONOCORDIO de pitagoras matematica e musica. Vídeo. 7min09s. Publicado pelo canal Prof. Sezimar. 01 mar. 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=OY-kED_OQ8s&t=17s. Acesso em: 15 mar. 2025.

O QUE É um monocórdio? Aprenda a fazer o seu.... Vídeo. 13min43s. Publicado pelo canal Musical Mente. 10 dez. 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=XWFsNvGByh4. Acesso em: 17 Mar. 2025.

OCDE. (2023). PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education. OECD.

OLIVEIRA, A. P. de S.; SABBA, C. G. **Utilizando frações da música à matemática**. Anais do VII CBEM, Montevideo, Uruguai, 2013. Citado na página 26.

ORTIZ, Wagner. Acidentes Musicais. In: ORTIZ, Wagner. **Sociedade Homolliteras**. [*S. l.*], 23 maio 2011. Disponível em: https://homolitteras.blogspot.com/2011/05/acidentes-musicais.html. Acesso em: 11 set. 2025.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** 1. ed. v.2 São Paulo: Moderna, 1995.

PERETTI, Lisiane; TONIN DA COSTA, Gisele Maria. **Sequência Didática na Matemática**. Revista de Educação do Ideau, Rio Grande do Sul, v. 8, n. 17, 2013.

PETTICREW, M.; ROBERTS, H. (Ed.). **Systematic reviews in the social sciences**: A practical guide. Padstow: Blackwell Publishing, 2006.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança**: imitação, jogo e sonho, imagem e representação. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia**. 25. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2021.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

PRAÇA, F. S. G. Metodologia da pesquisa científica: organização estrutural e os desafios para redigir o trabalho de conclusão. **Revista Eletrônica Diálogos Acadêmicos**, n.1, p. 72-87, jan./jul., 2015. Disponível em: http://uniesp.edu.br/sites/_biblioteca/revistas/20170627112856.pdf. Acesso em: 21 maio. 2020.

RATTON, M. **A relação harmoniosa entre sons e números**. Programa 5: Música e Matemática. TV E Brasil, 2003. Disponível em: https://web.archive.org/web/20090502215418/http://www.tvebrasil.com.br/salto/cronograma2003/ame/ametxt5.htm. Acesso em: 07 abr. 2025.

ROEDERER, Juan G**. Introdução a física e psicofísica da música**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1998.

SALOMON, D. V. **Como fazer uma monografa**. 13. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2014.

SALOMON, Délcio Vieira. **Como fazer uma monografa**. 13. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2014.

SAMPAIO, R. F.; MANCINI, M.C. Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. **Revista Brasileira de Fisioterapia**, v. 11, n. 1, p. 83-89, 2007.

SCHOENFELD, A. H. How we think: A theory of mathematics education. **Mathematics Education Library**, 2014.

SILVA, Josué. Um Pouco de Tudo Sobre Música: Teoria Musical - Aula 2. *In*: SILVA, Josué. **Música Ciência e Arte**. [*S. l.*], 18 jan. 2015. Disponível em: https://musicienciarte.blogspot.com/2015/01/teoria-musical-aula-2.html. Acesso em: 11 set. 2025.

Stewart, J. (2016). **Cálculo: Vol. 1**. Cengage Learning.

URTADO, Miguel. **Duração do som e Figuras musicais**. [*S. l.*], 25 abr. 2018. Disponível em: https://wimelo.com/geniomusical/teoria-musical/apostila-de-teoria-musical-basica-1/duracao-do-som-e-figuras-musicais/. Acesso em: 14 set. 2025.

VIEIRA, M. M. F.; ZOUAIN, D. M. **Pesquisa qualitativa em administração**: teoria e prática. Rio de Janeiro: FGV, 2005.

VIGOTSKY, L. S. et al. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, 1988.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 6 ed. São Paulo: Martins Fontes,1998.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

VYGOTSKY, L. S. **Uma perspectiva histórico-cultural da educação**. São Paulo: Vozes, 1995.

WAGNER, Leonardo. **O hino a São João Batista que deu nome às notas musicais**. [*S. l.*], 24 jun. 2025. Disponível em: https://www.padreleonardo.com/artigos/hino-sao-joao-batista-nome-notas-musicais. Acesso em: 11 set. 2025.

ZABALA, A. **A prática educativa, como ensinar.** Artmed: Porto Alegre. Ed. 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A – **Questionário diagnóstico**

Escola: ____
Data: _____/_____/______ Série: _________ Turma: _____________
Aluno(a): ____ Idade: _________

Este questionário visa coletar e avaliar informações sobre conhecimentos prévios em música, som, progressão geométrica (PG) e a relação entre música e matemática.

1) Qual o seu nível de interesse por música?
   a) Muito interessado(a)
   b) Interessado(a)
   c) Pouco interessado(a)
   d) Não estou interessado(a)
2) Qual o estilo musical que você mais gosta?
   a) Rock
   b) MPB
   c) Samba
   d) Outros. Especifique: ______________
3) Você toca algum instrumento musical?
   a) Não
   b) Sim. Especifique: _______________
4) Você conhece as notas musicais?
   a) Não
   b) Sim.

   Se a resposta for sim, escreva as notas musicais a seguir.

____

5) O que é o timbre em música?
   a) A altura das notas
   b) A duração das notas
   c) A característica única de um som
   d) A intensidade de um som
6) A sequência de notas musicais que criam uma linha musical é denominada:
   a) Ritmo
   b) Harmonia
   c) Melodia
   d) Dinâmica
7) Se um compasso tem 4/4 de tempo, quantas colcheias cabem nesse compasso?
   a) 2

b) 4
c) 6
d) 8

8) O que é frequência sonora?
a) A altura do som
b) A intensidade do som
c) A duração do som
d) A característica única do som

9) Qual a unidade de medida da frequência sonora?
a) Decibel (dB)
b) Segundo (s)
c) Metro (m)
d) Hertz (Hz)

10) Qual é o nome da constante que é multiplicada pelo termo anterior para obter o próximo termo em uma progressão geométrica?
a) Razão
b) Diferença
c) Termo inicial
d) Não sei

11) Qual das seguintes sequências é uma progressão geométrica?
a) 2, 4, 6, 8, ...
b) 2, 4, 8, 16, ...
c) 2, 5, 8, 11, ...
d) Não sei

12) Se uma sequência tem os seguintes termos: 3, 6, 12, 24, ..., qual é a razão da progressão geométrica?
a) 2
b) 3
c) 4
d) Não sei

13) Qual é a fórmula para calcular o termo geral de uma progressão geométrica?
a) $a_n = a_1 . q^{n-1}$
b) $a_n = a_1 + (n-1) . r$
c) $a_n = a_1 . q$
d) Não sei

14) Qual é o comportamento do gráfico de uma progressão geométrica com razão q > 1?
a) Cresce exponencialmente
b) Decresce exponencialmente
c) É constante
d) Não sei

15) Qual é a relação entre a frequência de uma nota musical e a sua altura?

a) Quanto maior a frequência, mais grave é a nota
b) Quanto maior a frequência, mais aguda é a nota
c) A frequência não afeta a altura da nota
d) Não sei

16) Se um compositor deseja criar uma sequência de notas que aumente em frequência de acordo com uma progressão geométrica, qual é a razão que ele deveria usar para criar uma sequência de quintas?

a) 2
b) 1/2
c) 3/2
d) Não sei

17) Você acredita que exista relação entre a música e a matemática?

a) Não
b) Sim.

Caso a resposta seja sim, dê um exemplo de onde podemos observar essa relação.

____

____

APÊNDICE B – Exercício sobre intervalos musicais

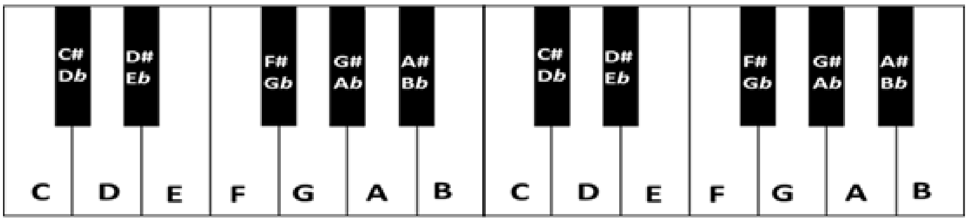
Considere a escala diatônica maior de **Fá** para preencha a tabela A com as notas de acordo com os seus respectivos intervalos. Em seguida marque na figura A apenas as notas dessa escala.

Tabela A: intervalos na escala diatônica maior de **Fá**.

Intervalo	**Distância em tons**	**Distância em semitons**
Segunda (**Fá ↦** _______)	1	2
Terça (**Fá ↦** _______)	2	4
Quarta (**Fá ↦** _______)	2,5	5
Quinta (**Fá ↦** _______)	3,5	7
Sexta (**Fá ↦** _______)	4,5	9
Sétima (**Fá ↦** _______)	5,5	11
Oitava (**Fá ↦** _______)	6	12

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura A: Duas oitavas de um teclado



Fonte: Elaborado pelo autor

1) Encontre as quintas das seguintes notas:
   a) Ré (D) ↦ ___________
   b) Si (B) ↦ ___________
   c) Fa# (F#) ↦ __________

2) Encontre as sétimas das seguintes notas:
   a) Mi (E) ↦ __________
   b) Lá (A) ↦ __________
   c) Dó# (C#) ↦ _________

APÊNDICE C – **Atividade Prática I:** Compasso musical

1- Siga os procedimentos para preencher os compassos com as figuras musicais da Figura X.

a) Com auxílio de um metrônomo ou palmas será marcado o ritmo no compasso 4/4 com andamento médio de 80 BPM.

b) Observação: cada compasso 4/4 representa um ciclo de 4 palmas ou 4 batidas no metrônomo.

c) Durante a marcação do ritmo (compasso 4/4) será tocado notas no instrumento (teclado, piano, violão e/ou monocórdio).

d) Observe a quantidade de notas tocada por compasso e após suas conclusões preencha o primeiro compasso da partitura utilizando a figura musical que jugam correta.

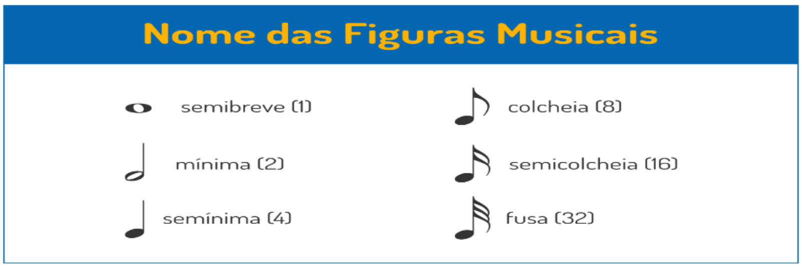
e) Observação: nesse momento não será levado em conta quais notas foram tocadas, pois estaremos interessados apenas na leitura rítmica.

f) O processo anterior será repedido outras vezes, porém deverá ocorrer mudança nas quantidades de notas tocadas por compasso.

Resumindo: O grupo observa, toma nota da quantidade de notas tocadas e preenche o compasso com a figura musical que julga correta.

Observação: sugiro que sejam preenchidos pelo menos 6 compassos.

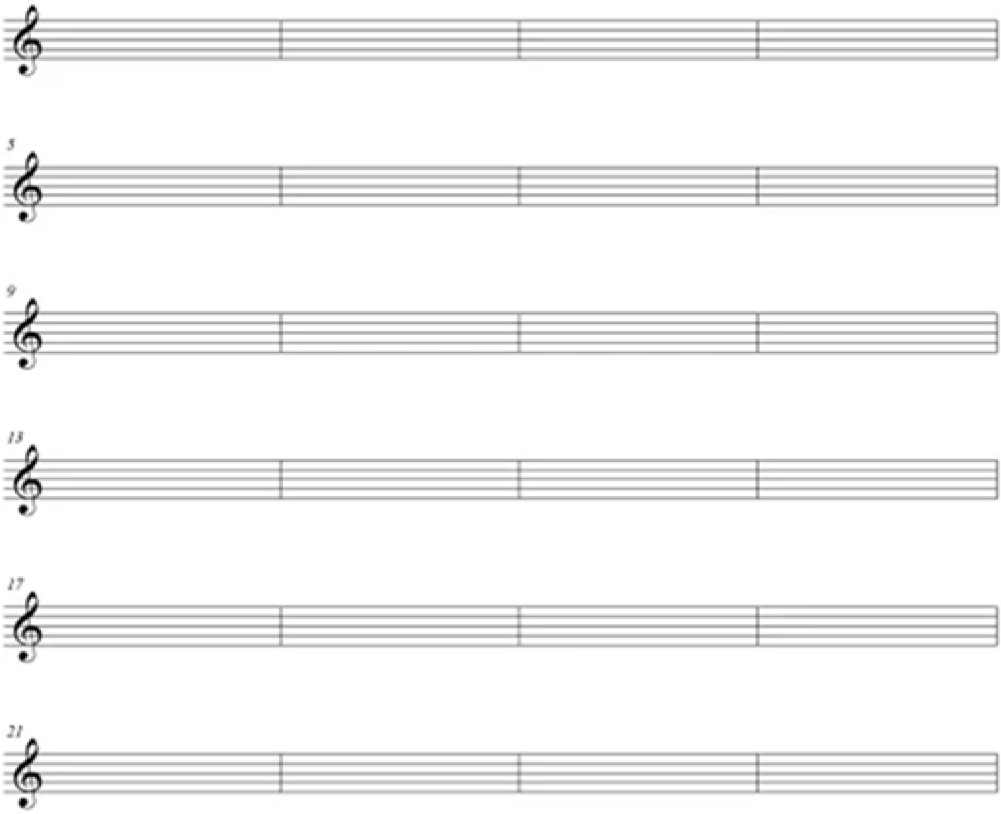
Figura X: Figuras musicais



Fonte: <https://wimelo.com/geniomusical/teoria-musical/apostila-de-teoria-musical-basica-1/duracao-do-som-e-figuras-musicais/>

Após o preenchimento dos compassos, escreva uma sequência numérica que represente a quantidade de notas por compasso, ou seja, cada compasso representará um termo da sequência e cada termo representará a quantidade de notas (figuras musicais) utilizadas naquele compasso. Por exemplo, a quantidade de notas tocada no 1° compasso representará o primeiro termo da sequência, a quantidade de notas tocadas no 2° compasso representará o segundo termo e assim por diante.

Partitura



APÊNDICE D – **Atividade Prática II:** Frequência sonora

1) Preencha as tabelas de notas e frequências de acordo com as orientações abaixo:
   a) Uma sequência de notas musicais será executada em um instrumento musical (teclado, piano e/ou violão).
   b) Cada nota tocada emitirá um som, e cada som produzirá uma frequência que será coletada com o auxílio do aplicativo de afinação e registrado pelos alunos em uma tabela (ver tabela 1).

Tabela 1: Notas e frequências

Notas tocadas										
Frequência (Hz)										

Tabela 2: Notas e frequências

Notas tocadas								
Frequência (Hz)								

Tabela 3: Notas e frequências

Notas tocadas								
Frequência (Hz)								

Tabela 4: Notas e frequências

Notas tocadas								
Frequência (Hz)								

Após as coletas e o preenchimento de todas as tabelas, escreva e analise as sequências numéricas geradas pelas frequências sonoras das notas de cada tabela.

APÊNDICE E – **Atividade Prática III**: O monocórdio

1) Use seu conhecimento de progressão geométrica e música para encontrar 4 notas separadas por um intervalo de quarta justa em um monocórdio de Pitágoras.

   Procedimento:

4. Construir um monocórdio.

   sugestão de vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=XWFsNvGByh4
5. Com o monocórdio em mãos, movimente o cavalete móvel do monocórdio até encontrar uma nota através do aplicativo de afinação.
6. Marque no monocórdio essa primeira nota (1° termo) que servirá de referência.
7. Sabido a frequência da primeira nota, utilize a lei de formação da PG para encontrar as próximas notas que estão separadas em intervalo de quartas justas. (use $q = \frac{4}{3}$ que é a razão das frequências referente ao intervalo de quartas).

   Se possível marque essas posições no monocórdio e escreva quais são as 4 notas da sequência.

APÊNDICE F – Questionário final

Escola:____

Data: ____/____/_____ Série: ____________ Turma: ____________

Aluno(a):____________________________________Idade: __________

Este questionário visa coletar e avaliar informações sobre o nível de satisfação, interesse e conhecimentos adquirido após o processo de aplicação da sequência didática referente a utilização da relação entre matemática e música.

1) Qual é o seu nível de satisfação com as atividades realizadas na sequência didática abordando a relação entre matemática e música?
   a) Muito satisfeito(a)
   b) Satisfeito(a)
   c) Neutro(a)
   d) Insatisfeito(a)
   e) Muito insatisfeito(a)

2) Qual o seu nível de interesse em participar de mais atividades que utilize a música como ferramenta no ensino de conteúdos matemáticos?
   a) Muito interessado(a)
   b) Interessado(a)
   c) Neutro(a)
   d) Pouco interessado(a)
   e) Não interessado(a)

3) Você conhece as notas musicais?
   a) Não
   b) Sim.

   Se a resposta for sim, escreva as notas musicais a seguir.

   ____

4) O que é o timbre em música?
   a) A altura das notas que permite dizer se um som é grave ou agudo.
   b) A duração das notas que organiza a estrutura musical.
   c) A característica única de um som que permite distinguir entre diferentes instrumentos musicais.
   d) A intensidade que se refere ao volume ou amplitude de um som.

5) A sequência de notas musicais que criam uma linha musical é denominada:
   a) Ritmo
   b) Harmonia
   c) Melodia
   d) Dinâmica

6) Se um compasso tem 4/4 de tempo, quantas colcheias cabem nesse compasso?
   a) 2
   b) 4
   c) 6
   d) 8

7) O que é frequência sonora?
   a) A altura do som
   b) A intensidade do som
   c) A duração do som
   d) A característica única do som

8) Qual a unidade de medida da frequência sonora?
   a) Decibel (dB)
   b) Segundo (s)
   c) Metro (m)
   d) Hertz (Hz)

9) Qual é o nome da constante que é multiplicada pelo termo anterior para obter o próximo termo em uma progressão geométrica?
   a) Razão
   b) Diferença
   c) Termo inicial
   d) Não sei

10) Qual das seguintes sequências é uma progressão geométrica?
   a) 2, 4, 6, 8, ...
   b) 2, 4, 8, 16, ...

c) 2, 5, 8, 11, ...
d) Não sei

11) Se uma sequência tem os seguintes termos: 3, 6, 12, 24, ..., qual é a razão da progressão geométrica?
a) 2
b) 3
c) 4
d) Não sei

12) Qual é a fórmula para calcular o termo geral de uma progressão geométrica?
a) $a_n = a_1.q^{n-1}$
b) $a_n = a_1 + (n-1).r$
c) $a_n = a_1.q$
d) Não sei

13) Qual é o comportamento do gráfico de uma progressão geométrica com razão q > 1?
a) Cresce exponencialmente
b) Decresce exponencialmente
c) É constante
d) Não sei

e) Qual é a relação entre a frequência de uma nota musical e a sua altura?
a) Quanto maior a frequência, mais grave é a nota.
b) Quanto maior a frequência, mais aguda é a nota.
c) A frequência não afeta a altura da nota.
d) Não sei

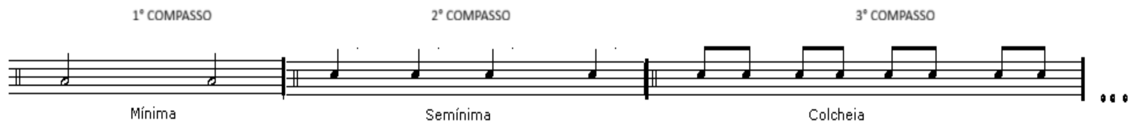
f) Se um compositor deseja criar uma sequência de notas que aumente em frequência de acordo com uma progressão geométrica, qual é a razão que ele deveria usar para criar uma sequência de quintas?
a) 2
b) 1/2
c) 3/2
d) Não sei

g) Faça um breve relato sobre o que você achou das atividades desenvolvidas em aula utilizando a música como recurso no ensino de matemática.

____
____
____

APÊNDICE G – Questão aplicada na atividade prática I

Questão: Um músico decidiu compor utilizando uma sequência rítmica que descreve uma progressão geométrica, onde cada compasso é preenchido por uma única figura musical. No primeiro compasso as figuras que duram 2 tempos (mínima), no segundo 1 tempo (semínima), no terceiro 1/2 (colcheia) e assim por diante. Observe a seguir os 3 primeiros compassos (4/4) do pentagrama preenchido e o quadro com os tempos de duração de cada figura musical.



Nome	Semibreve	Mínima	Semínima	Colcheia	Semicolcheia	Fusa	Semifusa
Figura musical	𝅝	𝅗𝅥	♩	♪	𝅘𝅥𝅯	𝅘𝅥𝅰	𝅘𝅥𝅱
Tempo	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

a) Qual a razão da progressão geométrica descrita?

b) Qual o comportamento da sequência rítmica representada pela PG criada pelo músico?

c) Qual a figura e o tempo de duração da nota que estará no 6° compasso?

d) Quanto é a soma dos tempos dos 5 primeiros compassos?

e) Se a quantidade de compassos fosse **infinita**, qual figura representaria a soma total desses tempos?

Respostas:

a) **Cálculo da razão (q) da PG:** É só fazer a divisão do tempo de duração da nota usada no 2° compasso pelo tempo de duração da nota usada no 1° compasso ou dividir a do 3° compasso pelo do 2° compasso. De qualquer forma temos:

$$q = \frac{1}{2}\,.$$

isso quer dizer que cada compasso tem a metade da duração do compasso anterior.

b) **Comportamento da sequência rítmica:** Como $0 < r < 1$, logo a progressão geométrica é decrescente; a duração de cada compasso é obtida multiplicando a anterior por 1/2. Portanto, a sequência decresce geometricamente e as durações ficam cada vez menores.

c) **Figura e seu tempo de duração no 6º compasso:** utilizando o termo geral da PG:

$$a_{n=}a_1 . q^{n-1}$$

Onde $a_1 = 2$ e $q = \frac{1}{2}$. Logo o tempo de duração da nota do enésimo compasso é dado por:

$$a_{n=}2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Para saber o tempo de duração da figura musical do 6° compasso tomaremos $n = 6$. Pois cada compasso represento um termo da PG. Logo,

$$a_{n=}2.\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 2.\frac{1}{32} = \frac{1}{16}\ \ (tempos).$$

$\frac{1}{16}$ de tempo corresponde, na nomenclatura usual, à **semifusa**.

Portanto: semifusa — duração $\frac{1}{16}$ de tempo.

d) **Soma dos tempos dos 5 primeiros compassos:** Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita

$$S_{n=}a_1 . \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

Onde $a_1 = 2$ e $q = \frac{1}{2}$. assim, tomando $n = 5$, temos

$$S_n = 2.\frac{(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = 2.\frac{\left(-\frac{31}{32}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2.\left(-\frac{31}{32}\right).\left(-\frac{2}{1}\right) = \frac{31}{8}\,.$$

Em valores: $\frac{31}{8} = 3{,}875$ tempos (ou 3 tempos e 7/8 de tempo).

e) Soma total se os compassos fossem infinitos: Como $|q| < 1$, a soma infinita é

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Onde $a_1 = 2$ e $q = \frac{1}{2}$. logo,

$$S_\infty = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4\ tempos.$$

Quatro tempos equivalem a **uma semibreve**. Logo, a soma total (infinita) seria representada por **uma semibreve (𝅝)**.

APÊNDICE H – Anotação com uma resolução feita pelos alunos

Questão: Um músico decidiu compor uma música utilizando uma sequência rítmica que descreve uma progressão geométrica, onde cada compasso é preenchido por uma única figura musical. No primeiro compasso a figuras que duram 2 tempos (mínima), no segundo 1 tempo (semínima), no terceiro 1/2 (colcheia) e assim por diante. Observe a seguir os 3 primeiros compassos do pentagrama preenchido e o quadro com os tempo de duração de cada figura musical.

Nome	Semibreve	Mínima	Semínima	Colcheia	Semicolcheia	Fusa	Semifusa
Figura musical	𝅝	𝅗𝅥	𝅘𝅥	𝅘𝅥𝅮	𝅘𝅥𝅯	𝅘𝅥𝅰	𝅘𝅥𝅱
Tempo	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

a) Qual a razão da progressão geométrica descrita?

$q = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$

b) Qual o comportamento da sequência rítmica representada pela PG criada pelo músico?

R: A sequência decrescente.

c) Qual a figura e o tempo de duração da nota que estará no 6° compasso?

$a_1 = 2$ $\quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$q = \frac{1}{6}$ $\quad a_6 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}$

$a_6 =$ $\quad a_6 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2 \cdot \frac{1}{32} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

A figura é (𝅘𝅥𝅱) semifusa.

d) Quanto é a soma dos tempos dos 5 primeiros compassos?

$S5 = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$S5 = 2 \cdot \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2\left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \left(\frac{-31}{32}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{-62}{32} \cdot \left(\frac{-2}{1}\right) = \frac{124}{32} = 3{,}875$

e) Se a quantidade de compassos fosse **infinita**, qual figura representaria a soma total desses tempos? $S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{2-1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = 4$

A figura é: semibreve (𝅝)