



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –
PROFMAT**

IGLESSON MENEZES DOS REIS

**CONSTRUÇÕES DOS NÚMEROS REAIS: A TEORIA DOS CORTES DE
DEDEKIND E AS CONTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO COMO
FERRAMENTAS DE ENSINO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA**

Rio Branco, AC
2025

IGLESSON MENEZES DOS REIS

**CONSTRUÇÕES DOS NÚMEROS REAIS: A TEORIA DOS CORTES DE
DEDEKIND E AS CONTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO COMO
FERRAMENTAS DE ENSINO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal do Acre - UFAC, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Aurélio de Alcântara

Coorientador: Prof. Dr. Sandro Ricardo Pinto da Silva

Rio Branco, AC
2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

R375c Reis, Iglesson Menezes dos, 2000 -
Construções dos números reais: a teoria dos cortes de dedekind e as construções com régua e compasso como ferramentas de ensino para a educação básica / Iglesson Menezes dos Reis; orientador: Prof. Dr. Sandro Ricardo Pinto da Silva – 2025.
79 f.; il.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) apresentada ao Programa de Mestrado em Rede Nacional – PROFMAT, DA Sociedade Brasileira de Matemática – SBM e Universidade Federal do Acre, como requisito para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

1. Construções geométricas. 2. Números reais. 3. Régua e compasso. 4. Cortes de Dedekind. 5. Sequência didática. I. Silva, Sandro Ricardo Pinto da (Orientador). II. Título.

CDD: 516



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA**

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título da dissertação

Construções dos Números Reais: a Teoria dos Cortes Dedekind e as construções com régua e compasso como ferramentas de ensino para a Educação Básica

Autor: Iglesson Menezes dos Reis

Orientador: Prof. Dr. Marcos Aurélio de Alcântara

Coorientador: Prof. Dr. Sandro Ricardo Pinto da Silva

Dissertação aprovada como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Banca Examinadora:

DATA DA APROVAÇÃO: 12 de agosto de 2025.

BANCA EXAMINADORA:

**Prof. Dr. Marcos Aurélio de
Alcântara**

Orientador

Universidade Federal do Acre (UFAC)

**Prof. Dr. Sandro Ricardo Pinto
da Silva**

Coorientador

Universidade Federal do Acre (UFAC)

Prof. Dr. Ricardo Lima Alves

**Prof. Dr. Marcus Antônio
Mendonça Marrocos**



Documento assinado eletronicamente por **Marcos Aurelio de Alcantara, Professor do Magisterio Superior**, em 13/08/2025, às 07:23, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Lima Alves, Professor do Magisterio Superior**, em 13/08/2025, às 08:59, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sandro Ricardo Pinto da Silva, Professor do Magisterio Superior**, em 13/08/2025, às 11:44, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS, Usuário Externo**, em 14/08/2025, às 20:04, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.ufac.br/sei/valida_documento ou click no link [Verificar Autenticidade](#) informando o código verificador **1759999** e o código CRC **319C0844**.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Claudia Menezes de Freitas e Ilmo Torres dos Reis, por desde sempre me guiarem rumo ao caminho dos estudos, do trabalho, da honestidade e do compromisso de buscar ser melhor a cada dia.

À Gabriely Castro Silva, minha companheira, por me apoiar durante este período e por ter transformado em lindas palavras todas as ideias que concebemos ao longo desta escrita.

Aos meus orientadores, prof. Dr. Marcos Aurélio de Alcântara e prof. Dr. Sandro Ricardo Pinto da Silva, por toda a instrução, conselhos e ensinamentos que em muito contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos meus amigos e familiares, por todo apoio e por terem tornado essa jornada uma experiência memorável.

Por fim, agradeço à Universidade Federal do Acre, por ter transformado minha vida e a de tantos outros jovens do interior do nosso amado estado.

*“A Matemática é a linguagem com a qual
Deus escreveu o universo.”*

- Galileu Galilei

RESUMO

Neste trabalho foi realizada uma breve síntese da história dos números reais, desde a Grécia antiga até as teorias mais recentes sobre esse conjunto numérico. Em seguida, são detalhadas duas construções de \mathbb{R} : na primeira utiliza-se régua, compasso e uma porção de resultados e propriedades da geometria plana; na segunda utiliza-se a abordagem dos cortes de Dedekind fazendo uso de diversas propriedades algébricas para definir o corpo ordenado completo dos números reais. Em consequência disto, é apresentado um produto educacional, em que constam duas sequências didáticas e o material de apoio, para auxiliar a aplicação dessas construções em sala de aula. Espera-se, com essas sequências didáticas, que seja possível transmitir conceitos matemáticos tidos como abstratos para crianças do ensino básico, com fundamentações extremamente ligadas ao aspecto visual. Por fim, são discutidos os resultados das aplicações dessas sequências didáticas em salas de aula do 9º ano do ensino fundamental anos finais.

Palavras-chave: construções geométricas; números reais; régua e compasso; cortes de Dedekind; sequência didática.

ABSTRACT

In this work, a brief synthesis of the history of real numbers was carried out, from ancient Greece to the most recent theories about this number set. Next, two constructions of \mathbb{R} are detailed: in the first, a ruler, compass and a lot of results and properties of plane geometry are used; in the second, the Dedekind cuts approach is used, making use of several algebraic properties to define the complete ordered field of the real numbers. As a result, an educational product is presented, which includes two didactic sequences and support material, to assist the application of these constructions in the classroom. It is expected, with these didactic sequences, that it will be possible to transmit mathematical concepts considered abstract to elementary school children, with foundations extremely linked to the visual aspect. Finally, the results of the applications of these didactic sequences in classrooms of the 9th grade of elementary school final years are discussed.

Keywords: geometric constructions; real numbers; ruler and compass; Dedekind cuts; didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Segmentos comensuráveis	17
Figura 2: Segmentos incomensuráveis I	18
Figura 3: Segmentos incomensuráveis II	19
Figura 4: Segmentos incomensuráveis III	20
Figura 5: Segmentos incomensuráveis IV	20
Figura 6: Segmentos incomensuráveis V	21
Figura 7: Proporção I	22
Figura 8: Proporção II	23
Figura 9: Proporção III	23
Figura 10: Números naturais	28
Figura 11: Números inteiros	29
Figura 12: Ponto médio de um segmento	37
Figura 13: Segmento perpendicular por um ponto dado.....	38
Figura 14: Segmento perpendicular pela extremidade	38
Figura 15: Reta paralela por um ponto dado.....	39
Figura 16: Divisão de um segmento em n partes congruentes.....	40
Figura 17: Unidade	41
Figura 18: Reta suporte r	41
Figura 19: Unidade na reta suporte r.....	41
Figura 20: Números naturais na reta suporte r.....	42
Figura 21: Números inteiros na reta suporte r.....	42
Figura 22: Número racional a reta suporte r.....	43
Figura 23: Soma geométrica de dois números racionais.....	44
Figura 24: Produto geométrico de dois números racionais.....	45
Figura 25: Raízes quadradas de números primos I	47
Figura 26: Raízes quadradas de números primos II	48
Figura 27: Raízes quadradas de números primos na reta suporte r.....	48
Figura 28: Construção do número de ouro.....	49
Figura 29: Construção de uma aproximação de π	51
Figura 30: A reta real	52
Figura 31: Corte de Dedekind sem elemento separador	55
Figura 32: Ordenação de cortes.....	56

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
1.1. JUSTIFICATIVA E METODOLOGIA	15
2. PRELIMINARES	17
2.1. SEGMENTOS COMENSURÁVEIS E INCOMENSURÁVEIS	17
2.2. CONJUNTOS NUMÉRICOS	27
2.3. INTERVALOS	33
2.4. CONCEITOS BÁSICOS DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	36
3. A RETA REAL \mathbb{R}	41
3.1. CONSTRUÇÃO DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS	41
3.2. OPERAÇÕES	43
3.3. CONSTRUÇÃO DE ALGUNS IRRACIONAIS	47
4. O CORPO ORDENADO COMPLETO \mathbb{R}	53
4.1. RICHARD DEDEKIND	53
4.2. CORTES DE NÚMEROS RACIONAIS	55
4.3. OPERAÇÕES COM CORTES	56
4.4. PROPRIEDADES DE ORDEM	66
4.5. O CORPO ORDENADO COMPLETO	68
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	75
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76

1. INTRODUÇÃO

Ao longo da história da Matemática, a definição de número real levou quase 2500 anos para ser formalizada. Durante esse tempo, vários foram os estudiosos que motivaram e contribuíram para essa construção, de forma direta ou indireta. Nesse tópico, iremos acompanhar essa construção desde o seu início na Grécia antiga até sua conclusão com os trabalhos de Dedekind (1831 – 1916) e Cantor¹ (1845 – 1918).

Estima-se que em meados do século V a.C., os matemáticos gregos tenham descoberto a existência de segmentos incomensuráveis, provavelmente ao tentar medir a diagonal de um quadrado e seu lado com a mesma unidade. Entretanto, após uma série de construções e argumentos, foi encontrada uma contradição na hipótese de que tais segmentos eram comensuráveis. Tal descoberta colocou em xeque a concepção dos pitagóricos de que “tudo é número”, pois mostrou a existência de grandezas que não poderiam ser representadas por números inteiros, ou por razões de números inteiros (mais tarde conhecidas como números racionais). Ao contrário do que se acredita, essa descoberta não gerou uma crise nos fundamentos matemáticos da época, e hoje sabemos que foi o pontapé inicial para a construção de uma ideia mais abrangente de número.

Passados muitos séculos, obras como *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica* (1572), do engenheiro hidráulico Rafael Bombelli² (1526 – 1572), trouxeram à tona os números complexos, valendo citar as contribuições de Girolamo Cardano³ (1501 – 1576) e Nicoló Fontana⁴ (1499 – 1557) para tal. Com essa descoberta, tornou-se ainda mais evidente a necessidade de expandir o conceito de número, pois até então a noção que se tinha destes era a de quantidade, fazendo com que fossem usadas designações como “números ‘surdos’ ou ‘inexprimíveis’ para os

¹ Matemático nascido na Rússia e criado na Alemanha, responsável por desenvolver, dentre outras teorias, a teoria dos conjuntos como a conhecemos hoje. Disponível em: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2024/09/13/georg-cantor-1845-1918/>. Acesso em 17 de jan. de 2025.

² Matemático e engenheiro italiano responsável por dar o pontapé inicial no estudo dos números complexos. Disponível em: <https://fredlopes.com.br/matematica/historia-da-matematica/bombelli-e-os-numeros-complexos/>. Acesso em: 17 de jan. de 2025.

³ Matemático, físico e médico italiano, responsável por contribuições nas áreas de hidrodinâmica, mecânica, geologia e álgebra. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/b_girolamo-cardano/. Acesso em: 17 de jan. de 2025.

⁴ Mais conhecido por “Tartaglia”, foi um matemático italiano que fez, entre outras, grandes contribuições para a resolução de equações polinomiais cúbicas. Disponível em: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/renascenca/tartaglia.htm>. Acesso em: 17 de jan. de 2025.

irracionais, quantidades ‘falsas’, ‘fictícias’, ‘impossíveis’ ou ‘imaginárias’ para os números negativos e complexos” (ROQUE, PITOMBEIRA, 2015, p. 239). Foi René Descartes⁵ (1596 – 1650) que cunhou a expressão “número real” em seu livro *La Géométrie* (1637) ao falar sobre as raízes complexas de equações, fazendo distinção entre as raízes reais e as imaginárias.

Já no final do século XVII, Isaac Newton⁶ (1642 – 1727) e Gottfried Leibniz⁷ (1646 – 1716) desenvolveram de forma simultânea, porém independente, o que seria a maior realização matemática do período: a concepção do Cálculo. As ferramentas fornecidas pelo Cálculo eram de tamanha utilidade e aplicabilidade, especialmente em mecânica, que as imprecisões em seus fundamentos e a fragilidade dos argumentos de ambos os estudiosos chegaram a passar despercebidas até certo ponto. Por isso, alguns autores escreveram obras que criticaram e questionaram os métodos infinitesimais. Dentre essas obras, vale citar *The Analyst* (1734), de George Berkeley⁸ (1685 – 1753), que segundo Lopes e Sá (2016, p. 84) “revelou um grande número de argumentos frouxos, afirmações vagas e contradições claras na doutrina dos infinitesimais”.

O próximo passo na direção de uma concepção do que seria de fato um número real foi dado por Joseph-Louis Lagrange⁹ (1736 – 1813), ao publicar dois livros sobre funções que buscavam dar legitimidade aos fundamentos do Cálculo. Nesses livros, ele assumiu que toda função contínua poderia ser escrita na forma de uma série de Taylor, o que, por sua vez, foi questionado no início do século XIX por estudiosos, e dúvidas sobre o que se entendia por função e, em especial, por função contínua, surgiram. Esse fato levou à busca por um certo rigor nas definições propostas.

⁵ Matemático e filósofo francês, famoso por desenvolver o sistema de coordenadas cartesianas e por suas contribuições para a filosofia. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Rene-Descartes/Physics-physiology-and-morals>. Acesso em: 17 de jan. de 2025.

⁶ Matemático, astrônomo e físico inglês, com enormes contribuições para ambas as áreas, tido como um dos maiores cientistas da história. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~sandra/CCA/history/newton/newton.html>. Acesso em: 18 de jan. de 2025.

⁷ Matemático e filósofo alemão, conhecido por ser um coautor do Cálculo diferencial e integral. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~sandra/CCA/history/leibniz/leibniz.html>. Acesso em: 18 de jan. de 2025.

⁸ Filósofo irlandês, famoso por defender o idealismo e por criticar seus antecessores. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/berkeley/>. Acesso em 18 de jan. de 2025.

⁹ Matemático e astrônomo italiano, responsável por contribuições para o Cálculo e para a criação do sistema métrico. Disponível em: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2018/03/12/joseph-louis-lagrange1736-1813/>. Acesso em 17 de jan. de 2025.

Durante boa parte do século XIX, aconteceu um processo denominado por Felix Klein¹⁰ (1849 – 1925) de aritmetização da análise. Esse movimento contou com vários nomes importantes para o cenário matemático, e várias definições conhecidas foram concebidas nessa época, valendo citar o trabalho de Augustin-Louis Cauchy¹¹ (1789 – 1857) que, em seu livro *Cours d'Analyse* (1821), desenvolveu uma teoria sólida de limites e definiu continuidade, derivação e integral em termos de limite. Já em 1822, ficou clara a necessidade de se compreender de maneira lógica o que vem a ser número. Os trabalhos de Joseph Fourier¹² (1768 – 1830), em particular sua teoria de calor, tiveram vital importância, pois foi na busca por dar consistência a essas teorias que Lejeune Dirichlet¹³ (1805 – 1859) atrelou sua compreensão de função à forma como os racionais e os irracionais se distribuem no eixo das abscissas. Em outras palavras, como os números reais estão dispostos na reta numérica.

Nesse ponto da história, a atenção de vários matemáticos se voltou para a elaboração da definição efetiva de número real e para a distribuição dos racionais e irracionais na reta. As contribuições definitivas nesse sentido foram as de Charles Méray¹⁴ (1835 – 1911) que, cronologicamente, foi o primeiro a dar uma definição satisfatória de número irracional, e as de Karl Weierstrass¹⁵ (1815 – 1897), que além de contribuir para a definição de número real, colaborou para uma formulação aperfeiçoada de limite. Por fim, Richard Dedekind, que já havia voltado sua atenção para os números racionais desde 1858, publicou dois pequenos livros: *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) e *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888), onde definiu os números reais através de partições de segmentos da reta numérica em duas classes: um conjunto à esquerda e outro à direita. Cada número pertenceria a um, e

¹⁰ Matemático alemão, com trabalhos nas áreas da geometria não-euclidiana e teoria dos grupos. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/b_fklein/. Acesso em: 17 de jan. de 2025.

¹¹ Matemático e físico francês com contribuições importantes para a análise matemática e para a teoria da elasticidade. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~sandra/CCA/history/cauchy/cauchy.html>. Acesso em: 18 de jan. de 2025.

¹² Matemático francês famoso por seus trabalhos com séries matemáticas. Disponível em: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2018/06/29/joseph-fourier-1768-1830/>. Acesso em 17 de jan. de 2025.

¹³ Matemático alemão com significativas contribuições para a teoria dos números, análise matemática e mecânica. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/b_dirichlet/. Acesso em: 17 de jan. de 2025.

¹⁴ Matemático francês pioneiro em publicações a respeito dos números irracionais. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Meray/>. Acesso em: 18 de jan. de 2025.

¹⁵ Matemático alemão responsável por grandes obras sobre funções complexas. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Weierstrass/>. Acesso em: 18 de jan. de 2025.

somente um desses conjuntos, sendo cada elemento da classe da esquerda menor que todo elemento da classe da direita.

Nessa configuração, existiria um e só um elemento separador. Essa formalização ficou conhecida como “Cortes de Dedekind”, que é a definição de número real utilizada atualmente. Não poderíamos deixar de lado os trabalhos de George Cantor, responsável por demonstrar a não-enumerabilidade dos números reais, o que o levou a uma bifurcação no conceito de “infinito”, provando que existem infinitos diferentes. Foi esse resultado que serviu de base para a elaboração da teoria dos conjuntos como conhecemos hoje.

Diante da complexa história da construção dos números reais, dos conceitos concebidos ou desenvolvidos ao longo do processo, e da importância desse conjunto numérico para as demais estruturas matemáticas, é de vital importância que sua abordagem durante as etapas da educação básica seja feita de maneira eficiente e abrangente, de modo a aproximar a Matemática vista a nível de ensino superior com a que é vista nas escolas.

Dito isto, no presente trabalho iremos apresentar duas construções dos números reais: a geométrica, onde iremos tentar determinar com régua e compasso cada número real, de modo a preencher toda a reta real, e a algébrica, onde usaremos a noção dos cortes de Dedekind para construir o corpo ordenado completo dos números reais.

Em seguida, serão feitas adaptações de tal linguagem técnica do ensino superior para o nível dos alunos do 9º ano do ensino fundamental, de uma maneira menos formal, porém, matematicamente compreensível, que serão aplicadas em salas de aula da rede pública estadual em escolas da cidade de Rio Branco, Acre.

A conclusão deste trabalho será composta pelos resultados obtidos após as aplicações sugeridas anteriormente, que vão gerar novos caminhos de como apresentar os números reais e tentar identificar os pontos negativos e positivos de cada uma das abordagens: algébrica e geométrica. Neste sentido, iremos apresentar o produto educacional com o objetivo de direcionar o leitor a novas sugestões dos caminhos que se deve tomar ao apresentar o conjunto dos números reais no ensino básico.

1.1. JUSTIFICATIVA E METODOLOGIA

O ensino da matemática sempre encontrou desafios ao longo do tempo, quer seja na dificuldade de se compreender e ensinar conceitos abstratos, ou de relacionar o conhecimento teórico com a prática do dia a dia. Nas salas de aula do ensino básico, a matemática é, na maioria das vezes, abordada como um amontoado de fórmulas, números e símbolos que são apresentados de maneira direta e abrupta, muitas vezes sem passarem por uma construção lógica ou se relacionarem com algo concreto.

Essa abordagem gera tanto um desestímulo para o estudo dessa ciência quanto déficits de aprendizagem, pois a matemática, quando abordada de maneira direta e abrupta, pode revelar-se irrelevante aos alunos. Além do mais, a disparidade entre a matemática ensinada no ensino básico e a ensinada no ensino superior é muito perceptível. Enquanto no ensino básico os alunos são apresentados a fórmulas e regras que devem aplicar em situações trazidas pelo professor, (muitas delas irreais e elaboradas somente para que o aluno exercite, de maneira “semi-mecânica”, sua habilidade de fazer contas) no ensino superior, o graduando é levado a participar da construção do conhecimento, pois, juntamente com o professor, ele desenvolve as fórmulas, conhece e demonstra teoremas e corolários, além de ser apresentado a postulados e axiomas que dão base a tudo que surge dali em diante.

Essa disparidade entre a forma que a matemática é apresentada nos diferentes níveis de ensino gera um enorme choque aos alunos que ingressam nos cursos de licenciatura. A forma como as contas feitas no ensino básico são substituídas por demonstrações que usam apenas termos genéricos e não “números” escancara a fraca abstração que é cultivada ao longo das etapas de ensino anteriores, o que resulta em uma enorme dificuldade de adaptação do pensamento, e em uma lenta aprendizagem, dificultando seu progresso nos estudos.

Dito isto, este trabalho busca, de certa forma, aproximar essas duas matemáticas, trazendo duas abordagens diferentes de como ensinar o conjunto dos números reais aos alunos do 9º ano do ensino fundamental anos finais. Nelas, o aluno poderá ter contato com ferramentas e estruturas que não fazem parte do seu cotidiano escolar. Dessa forma, espera-se despertar a curiosidade dos alunos para aprender matemática.

Este trabalho iniciou com uma pesquisa bibliográfica sobre a história da construção dos números reais. Essa pesquisa teve como objetivo levantar

informações a respeito dos motivos que levaram os matemáticos da antiguidade a desenvolver o conceito de número, e quais foram as ferramentas matemáticas que surgiram ao longo desse processo.

Em seguida, o foco se voltou ao aspecto geométrico dos números reais, onde, utilizando apenas as ferramentas de desenho aperfeiçoadas pelos antigos (régua e compasso), buscamos construções que nos permitissem determinar seguimentos cujas medidas pudessem ser expressas com números inteiros, racionais e irracionais, em relação a uma mesma unidade de medida. Separadas as construções, estas foram organizadas em tópicos onde para cada conjunto numérico é desenvolvido de maneira puramente geométrica.

O próximo passo foi uma pesquisa a respeito da história e do trabalho de Richard Dedekind, que em seu trabalho a respeito dos números reais, concebeu o conceito de corte de números reais. A seguir, no tópico 4 deste trabalho foi feita a construção do corpo ordenado completo \mathbb{R} sob a ótica dos cortes mencionados, as operações foram descritas e as propriedades demonstradas.

Seguidamente, foram feitas adaptações na linguagem e na simbologia de cada uma das formas de construir os números reais descritas nesse trabalho, e estas foram base para duas sequências didáticas voltadas para turmas do 9º ano do ensino fundamental, que foram aplicadas em salas de aula da rede pública estadual. Por fim, didáticas, os detalhes das aplicações, a avaliação e os resultados obtidos foram apresentados no produto educacional.

2. PRELIMINARES

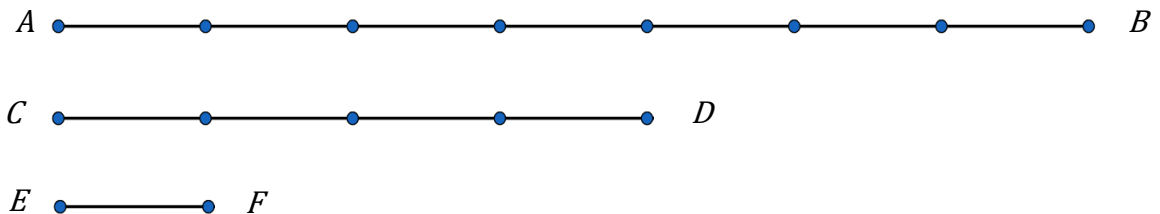
Neste t3pico trataremos de alguns assuntos que ser3o de fundamental import3ncia para a compreens3o dos temas abordados nessa disserta3o.

2.1. SEGMENTOS COMENSUR3VEIS E INCOMENSUR3VEIS

Dados dois segmentos retil3neos AB e CD , esses segmentos ser3o comensur3veis quando for poss3vel medi-los ao mesmo tempo, isto 3, quando pudermos encontrar um terceiro segmento EF que caiba um n3mero inteiro m de vezes em AB e outro n3mero inteiro n de vezes em CD .

Em todo este trabalho, quando escrevermos \overline{AB} , estaremos nos referindo ao tamanho do segmento AB .

Figura 1: Segmentos comensur3veis



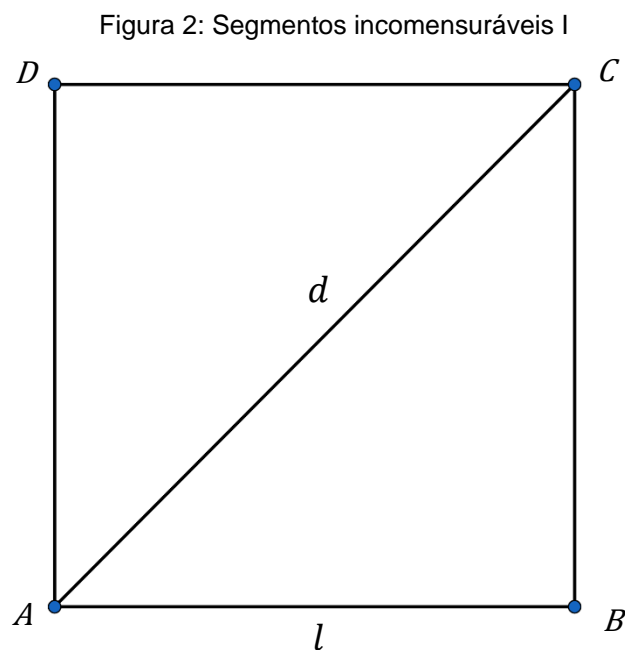
Fonte: O autor

No exemplo acima, o segmento EF cabe 7 vezes em AB e 4 vezes em CD . Podemos escrever ent3o que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{7}{4}$, ou at3 $\overline{AB}:\overline{CD} = 7:4$ e lemos “ \overline{AB} est3 para \overline{CD} da mesma forma que 7 est3 para 4”.

Era a partir destes conceitos que os matem3ticos da antiguidade (anteriores a Eudoxo de Cnido) definiam a propor3o, e alguns teoremas importantes como o de Tales eram demonstrados considerando que todos os segmentos em quest3o fossem comensur3veis, visto que se supunha que todos os segmentos o fossem. Por3m, existem casos onde n3o 3 poss3vel encontrar um segmento com o qual possamos medir AB e CD simultaneamente, dizemos que esses segmentos s3o incomensur3veis. O exemplo mais antigo que temos de segmentos desse tipo s3o o lado e a diagonal de um quadrado, como mostraremos a seguir.

Proposição 1. Dado um quadrado $ABCD$, a medida do seu lado e da sua diagonal não podem ser expressos como múltiplos inteiros de uma unidade comum u .

Considere o quadrado $ABCD$ de lado com medida l e diagonal com medida d abaixo. Vamos supor por absurdo que l e d sejam comensuráveis, isto significa que deve existir um segmento de medida u com o qual possamos medir l e d ao mesmo tempo.

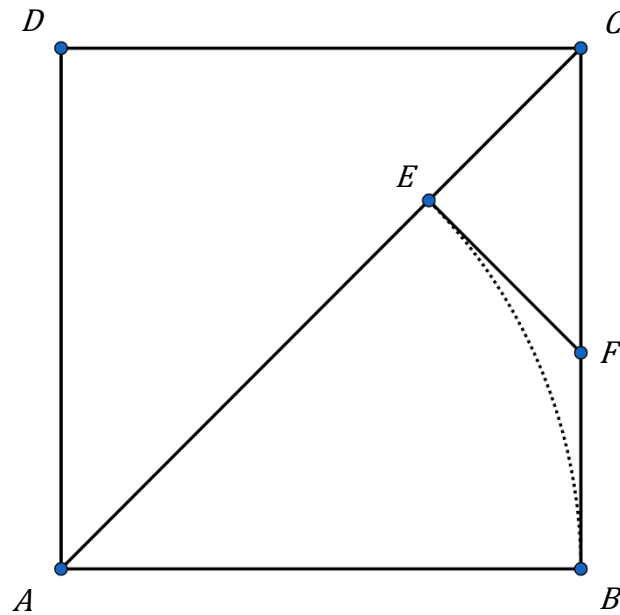


Fonte: O autor

Observação: de agora em diante, usaremos a notação \overline{AB} para indicar o comprimento de um segmento AB .

A partir do quadrado $ABCD$, com o compasso e centro em A , podemos traçar um arco de raio \overline{AB} que intersecte a diagonal AC em E , de modo que $\overline{AE} = \overline{AB}$. Por E , traçamos a perpendicular a AC que corte o lado BC do quadrado em F , obtendo a seguinte figura.

Figura 3: Segmentos incomensuráveis II



Fonte: O autor

Por construção, as mediadoras de AB e AE são iguais e, pelo caso LLA_0 , os triângulos AEF e ABF são congruentes, ou seja, $\overline{EF} = \overline{FB}$. Veja que o ângulo $\widehat{C\hat{E}F}$ foi construído reto, enquanto o ângulo $\widehat{E\hat{C}F}$ mede 45° , o que nos leva a concluir que $\widehat{E\hat{F}C}$ também mede 45° . Portanto, o triângulo CEF é isósceles e $\overline{EF} = \overline{CE}$. Daí, vem

$$\begin{aligned} d = \overline{AC} &\Rightarrow d = \overline{AE} + \overline{EC} \\ &\Rightarrow d = l + \overline{EC} \\ &\Rightarrow \overline{EC} = d - l. \end{aligned}$$

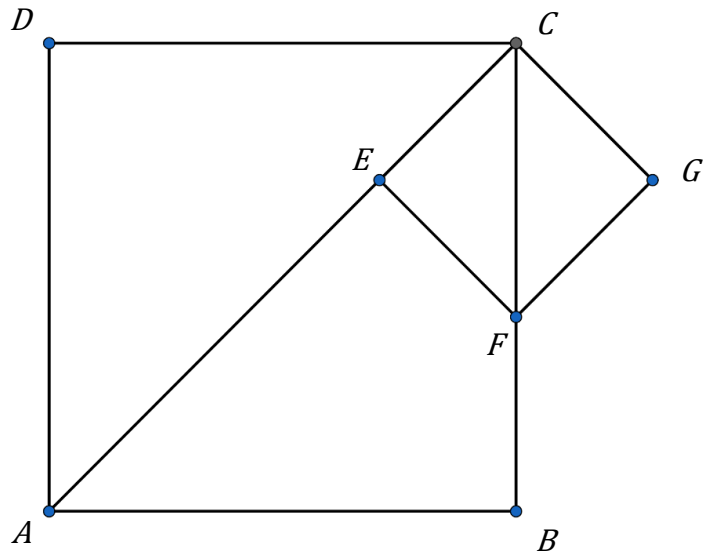
Também

$$\begin{aligned} l = \overline{BC} &\Rightarrow l = \overline{CF} + \overline{FB} \\ &\Rightarrow l = \overline{CF} + \overline{EC} \\ &\Rightarrow l = \overline{CF} + (d - l) \\ &\Rightarrow \overline{CF} = 2l - d \end{aligned}$$

Em outras palavras, tanto o segmento CF quanto o segmento EC podem ser escritos em função de l e d . Mas, se l e d podem ser medidos simultaneamente por u (podemos dizer também que l e d são múltiplos inteiros de u), então EC e CF também podem. Agora, como os segmentos EC e EF são perpendiculares e possuem

a mesma medida, podemos, a partir deles, construir o quadrado $CEFG$ cuja diagonal é CF ilustrada abaixo.

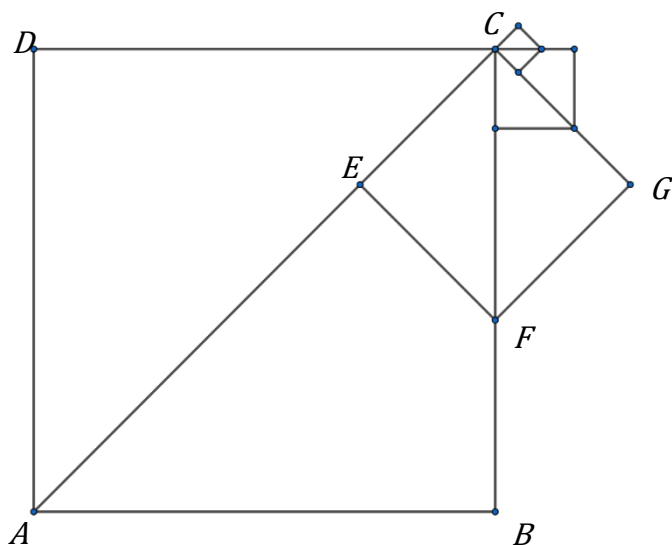
Figura 4: Segmentos incomensuráveis III



Fonte: O autor

A partir do quadrado $CEFG$, podemos fazer uma construção totalmente análoga e obter outro quadrado construído sobre a diagonal CF . Com uma demonstração também análoga, podemos mostrar que tanto o lado quanto a diagonal deste novo quadrado devem ser medidos pela unidade x . Repetindo a construção e a demonstração, obteremos tantos quadrados quanto quisermos, cada um menor que o anterior, conforme a figura:

Figura 5: Segmentos incomensuráveis IV

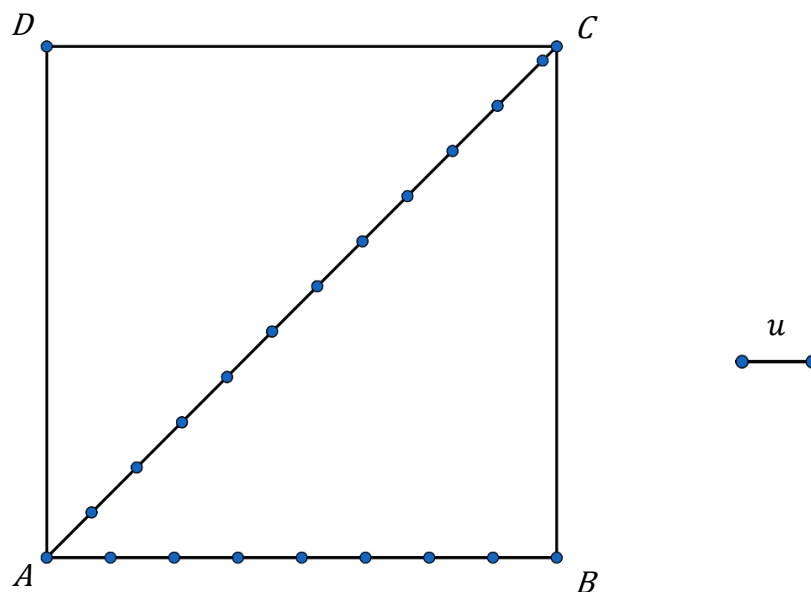


Fonte: O autor

Repetindo o processo um número suficiente de vezes, chegaremos a quadrados tão pequenos que suas dimensões serão menores que u , o que nos levaria a uma contradição, já que u deveria medir o lado e a diagonal de todos os quadrados construídos dessa forma.

Portanto, concluímos que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são segmentos incomensuráveis.

Figura 6: Segmentos incomensuráveis V



Fonte: O autor

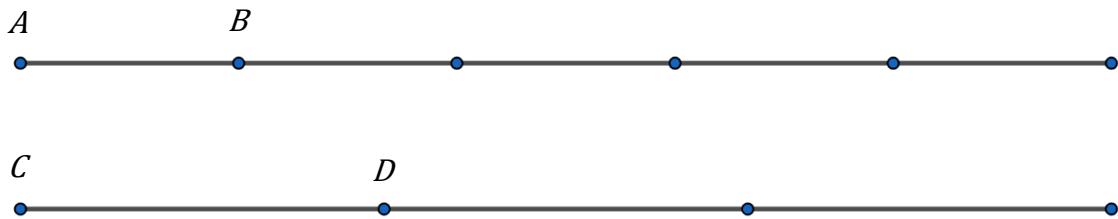
Na figura acima temos um exemplo com um x arbitrário, veja que u cabe 8 vezes em AB e cabe 11 vezes na diagonal AC . Porém, veja que a diagonal não fica completamente preenchida, e isso ocorrerá independentemente de quão pequeno tomemos u .

Com a descoberta de segmentos com essas características, tornou-se necessária uma reformulação da definição de proporção para que esta englobasse também os incomensuráveis, visto que quando se define proporção admitindo que existam $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow n \cdot \overline{AB} = m \cdot \overline{CD}$$

implicitamente assumimos que AB e CD são comensuráveis.

Figura 7: Proporção I



Fonte: O autor

Vale dizer que, embora não houvesse uma descrição formal dos conjuntos numéricos naquela época, dois segmentos comensuráveis como os ilustrados acima determinavam um número racional $\left(\frac{m}{n}\right)$.

A partir da ideia dos incomensuráveis, Eudoxo elaborou uma definição de proporção no século V a.C. que abrangeu as grandezas com essa característica. Segundo sua definição, dadas quatro grandezas (que representam medidas) a, b, c e d não necessariamente todas da mesma espécie, mas sim a da mesma espécie que c e b da mesma espécie que d , dizemos que a está para b assim como c está para d quando existem $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, tais que

$$m \cdot b = n \cdot a \Leftrightarrow m \cdot d = n \cdot c.$$

Isto é

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$$

Observe que essa é uma definição totalmente análoga à proporção com grandezas comensuráveis já existente. Além disso, Eudoxo determinou que no caso de a e b , e c e d incomensuráveis, dizemos que essas quatro grandezas estão em proporção se, para quaisquer m e n definidos como anteriormente, uma das afirmações abaixo é verdadeira:

- $n \cdot a < m \cdot b \Leftrightarrow n \cdot c < m \cdot d$;
- $n \cdot a > m \cdot b \Leftrightarrow n \cdot c > m \cdot d$.

De maneira ilustrativa, temos o seguinte

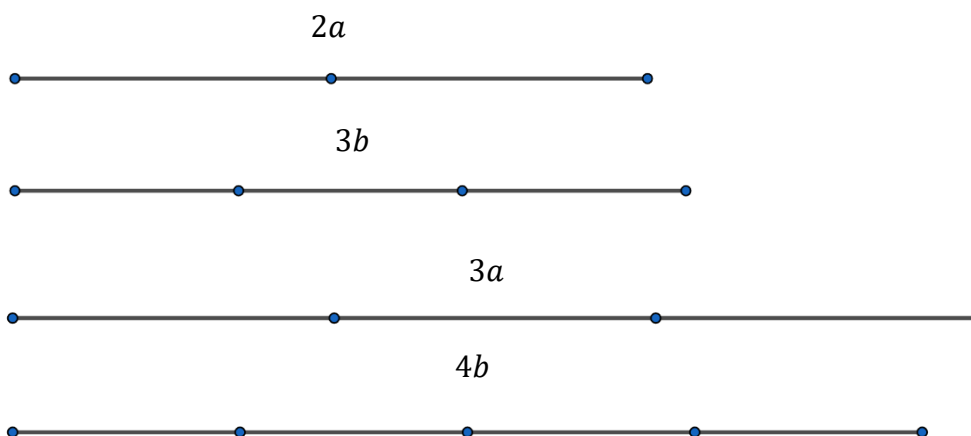
Figura 8: Proporção II



Fonte: O autor

É interessante observar que na definição de Eudoxo de proporção para as grandezas incomensuráveis que, para um mesmo conjunto de grandezas, podemos encontrar pares de inteiros não nulos m e n que satisfaçam a primeira afirmação, e também pares de inteiros que satisfaçam a segunda. Foi baseado nessa ideia que Richard Dedekind, séculos mais tarde, desenvolveu a ideia de cortes dos números racionais. De forma ilustrativa, temos as comparações abaixo:

Figura 9: Proporção III



Fonte: O autor

Algumas das “regras” que aprendemos desde o ensino básico tem suas origens na relação que os números tem com a geometria. Vimos que dados dois segmentos comensuráveis de tamanhos a e b , podemos determinar um racional $\frac{m}{n}$ tal

que $m \cdot b = n \cdot a$. Interpretamos essa igualdade como sendo “se tomarmos n vezes o tamanho a , este preencherá completamente o tamanho $m \cdot b$ ”.

Analisando essa interpretação, podemos nos questionar se tem sentido afirmar que ou $m = 0$, ou $n = 0$, ou ambos podem ser iguais a 0.

Ora, se o número m for nulo, isto indicaria que o segmento de tamanho $m \cdot b$ não possui comprimento ou magnitude, podendo até mesmo ser interpretado como apenas um ponto. Nessas circunstâncias, a única escolha possível para n de modo que $n \cdot a$ tenha esse mesmo significado seria $n = 0$. Entretanto, isso nos levaria a uma indeterminação do tipo “zero sobre zero”.

Analogamente, se escolhermos m não nulo, teríamos um segmento de tamanho $m \cdot b$ não nulo e, nesse caso, não faria sentido o número n ser igual a zero já que não poderíamos preencher um tamanho não nulo com segmentos nulos, não importa quantos destes tomemos. Portanto, é possível enxergar geometricamente que, em um número racional $\frac{m}{n}$, onde $m \neq 0$, não podemos ter $n = 0$. Desta forma, na definição de proporção de Eudoxo, não podemos ter nenhum dos inteiros m e n nulos, porém, sabemos que quando se trata de números racionais, há sentido em termos o “numerador” (no caso m) nulo, já que o número zero nos racionais é da forma $\frac{0}{n}$, onde n é um inteiro não nulo qualquer, o que nos leva a perguntar: a partir de que momento na construção do conceito de número racional o fato $m = 0$ deixou implicar em uma indeterminação?

A concepção dessa ideia começou a ser desenvolvida quando as razões entre dois números começaram a ganhar significados e utilidades diversos. Nas sociedades antigas como a babilônia, a hindu, a grega e a chinesa, as razões já eram usadas para representar partes de um objeto “quebrado” ou “dividido” em pedaços menores, ou seja, um uso semelhante ao das nossas frações atuais (daí a origem da palavra “fração”, que tem a mesma raiz de “fratura” e “fragmento”).

Nessa época, as frações ainda não eram consideradas números, mas relações entre números inteiros, e as regras para trabalhar com elas ainda não estavam estabelecidas. É importante dizer que, nessas sociedades, as frações estavam limitadas às frações unitárias, pois estas facilitavam a representação das partes de um objeto ou quantidade, salvo algumas exceções como os egípcios que

também conheciam as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, porém, todas as outras eram escritas como somas destas.

Nesse contexto, fazia sentido ter uma fração cujo numerador é 0, já que há mais de 3000 anos antes de Cristo, diversos povos já simbolizavam quantidades ou casas decimais vazias em sistemas de numeração posicional, como eram os casos dos fenícios e dos habitantes do Vale do Indo. Representar uma quantidade vazia com o “zero” não significa que os antigos tinham a noção de número racional ou que entendiam aquele zero com sendo “zero partes de um objeto que foi dividido em n partes” ($\frac{0}{n}$ na linguagem atual). Em contrapartida, não havia sentido discutir se 0 poderia ser tomado como denominador de uma fração durante aquele período da história humana. Essa reflexão não tinha um uso prático no dia a dia dos povos antigos, e é importante ter em mente que os números até então eram associados a coisas visível e palpável, que fazia parte do cotidiano das pessoas, e ainda não havia a abstração dos mesmos que temos hoje.

Os avanços nesse sentido começam a aparecer alguns milênios depois, quando o conceito de número já havia evoluído e, na Índia, se tentava descobrir como os números negativos e o zero interagem com respeito às quatro operações aritméticas. O matemático indiano Brahmagupta¹⁶ (598-670), em sua obra “Brahma Sphuṭa Siddhânta”, descreve o comportamento do 0 com relação à soma, a subtração e a multiplicação, definições essas análogas às que tempos hoje. Mas na divisão, ele afirma que

“Números positivos ou negativos quando divididos por zero são uma fração, com o zero como denominador. Zero dividido por negativo ou positivo escreva a expressão como uma fração com zero como numerador e a quantidade finita como denominador. Zero dividido por zero é zero” (BRAHMAGUPTA, 628, *apud* PINEDO, 2004, p. 27).

O que mostra que já havia uma preocupação em entender o que um “denominador zero” significaria. As ideias de Brahmagupta não vingaram, sua afirmação de que “números positivos ou negativos quando divididos por zero são uma fração, com o zero como denominador” gera uma das mais conhecidas

¹⁶ Astrônomo indiano responsável por grandes obras sobre os números inteiros, em especial o número zero. Disponível em: <https://www.britannica.com/science/Indian-mathematics/The-school-of-Madhava-in-Kerala>. Acesso em 18 de jan. de 2025.

indeterminações matemáticas. Essa indeterminação se dá pelo algoritmo da divisão de Euclides, que afirma que dados $a, b \in \mathbb{N}$ (com $b \neq 0$, porém aqui afrouxaremos essa hipótese para se encaixar no nosso problema), existem únicos $q, r \in \mathbb{N}$, onde $0 \leq r < b$, tais que $a = b \cdot q + r$. Por esse algoritmo, temos

$$\frac{1}{0} = n \Rightarrow 1 = n \cdot 0$$

O que não é possível, já que não existe n inteiro com essas características. Poderíamos tentar contornar essa indeterminação definindo

$$\frac{1}{0} = \infty$$

(assim como vemos no Cálculo diferencial), porém essa definição requer muitas ressalvas. Em primeiro lugar, ∞ não é um número, portanto não suporta as operações aritméticas que conhecemos. Uma das propriedades das operações que não é aplicada para ∞ é

$$b \cdot \frac{a}{b} = a$$

onde $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, já que, caso contrário, teríamos

$$0 \cdot \frac{1}{0} = 1 \Rightarrow 0 \cdot \infty = 1,$$

o que implicaria em afirmações do tipo

$$1 = 0 \cdot \infty = (2 \cdot 0) \cdot \infty = 2 \cdot (0 \cdot \infty) = 2 \cdot 1 = 2$$

que é logicamente um absurdo. Portanto, não é possível definir um significado numérico para um denominador zero.

Já a afirmação “zero dividido por zero é zero” também não faz sentido pois, por definição, temos que um número inteiro dividido por ele mesmo é igual a 1, logo zero dividido por zero deveria ser igual a 1, e não a zero. Entretanto, também definimos que

$$\frac{0}{n} = 0$$

com $n \neq 0$, o que contradiz a conclusão anterior. Além disso, ao afirmar que “zero dividido pra zero é igual a 1”, teríamos

$$\frac{0}{0} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{0}{0} = 2 \cdot 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot 0}{0} = 2 \Rightarrow \frac{0}{0} = 2.$$

Veja que a última afirmação contradiz a primeira, pois não é 2, e com operações totalmente análogas poderíamos chegar a

$$\frac{0}{0} = 3, \frac{0}{0} = 4, \frac{0}{0} = 5, \dots, \frac{0}{0} = n, \dots .$$

Essas afirmações mostram que esta definição gera infinitas contradições. Desta forma fica claro que, independente do numerador ser zero ou não, não é possível dar sentido numérico a uma fração com denominador zero.

2.2. Conjuntos numéricos

2.2.1. Números naturais

Os números naturais surgiram da necessidade humana de quantificar objetos. Para representa-los, utilizamos o símbolo \mathbb{N} e, atualmente, usamos a notável síntese do matemático italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932) que, a partir de 1880, descreveu os naturais através de quatro axiomas:

- i) Todo número natural tem um único sucessor;
- ii) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- iii) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
- iv) Seja X um conjunto de números naturais, isto é, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X , então $X = \mathbb{N}$.

Sendo esse último o axioma da indução, uma importante ferramenta de demonstração matemática. Definidos dessa forma, os números naturais suportam duas operações ambas definidas por indução. A soma $n + p$ consiste em tomar o sucessor de n uma quantidade p de vezes. Já a multiplicação tem $n \cdot 1 = n$ por

definição e, quando $p \neq 1$, $n \cdot p$ é a soma de p parcelas iguais a n . Dados $n, m, p \in \mathbb{N}$, as operações de soma e multiplicação nos naturais admitem as seguintes propriedades:

Comutatividade: $n + p = p + n$ e $n \cdot p = p \cdot n$.

Associatividade: $(n + p) + m = n + (p + m)$ e $(n \cdot p) \cdot m = n \cdot (p \cdot m)$.

Distributiva: $n \cdot (p + m) = n \cdot p + n \cdot m$.

Os números naturais também admitem a relação de ordem $m < n$, lemos “ m é menor ou igual do que n ”, que indica que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Por fim, esse conjunto numérico não possui uma interpretação geométrica, ou seja, não há um objeto geométrico associado a ele, porém, podemos, por exemplo, ilustra-lo como sendo um conjunto infinito de pontos igualmente espaçados dispostos em linha reta, de modo que o primeiro ponto (a esquerda) represente o número 1, a direita dele o 2, ainda mais a direita o 3, o 4, o 5, e assim sucessivamente. Veja:

Figura 10: Números naturais



Fonte: O autor

2.2.2. Números inteiros

Os números inteiros foram sendo desenvolvidos ao longo da história da Matemática motivados pela necessidade do ser humano de representar numericamente ideias como “falta”, “ausência” ou “dívida”, além de quantidades vazias ou nulas. Para este segundo propósito foi criado o número zero, representado por 0, e para o primeiro, foram desenvolvidos os números negativos.

Para cada número natural $n \neq 0$, consideramos o número $-n$ (leamos “menos n ”), que representa a falta da quantidade n . O conjunto de todos os números $-n$ é chamado de conjunto dos números negativos (os naturais são chamados de positivos), e a união deste conjunto com os naturais e o zero forma o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Os inteiros herdam as operações de soma e multiplicação dos naturais, assim como suas propriedades e a relação de ordem. Além dessas, as operações agora possuem mais algumas propriedades:

- i) **Elemento neutro aditivo:** Existe o número $0 \in \mathbb{Z}$ tal que, dado $n \in \mathbb{Z}$,

$$n + 0 = 0 + n = n.$$

- ii) **Inverso aditivo (ou oposto):** Dado $n \in \mathbb{Z}$, existe o número $-n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n + (-n) = (-n) + n = 0.$$

- iii) **Elemento neutro multiplicativo:** Existe o número $1 \in \mathbb{Z}$ tal que, dado $n \in \mathbb{Z}$,

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n.$$

De forma análoga aos naturais, podemos ilustrar os inteiros como um conjunto de pontos alinhados e igualmente espaçados, onde no centro temos o ponto que representa o 0, a esquerda os pontos que representam os números negativos e a direita os positivos.

Figura 11: Números inteiros



Fonte: O autor

Além disso, em \mathbb{Z} podemos definir as relações de ordem “<” (menor que) e “≤” (menor ou igual que). Essas relações estabelecem, respectivamente, que, se $n < m$, então existe um inteiro positivo k tal que $m = n + k$ e, se $n \leq m$, então existe um inteiro não negativo k tal que $m = n + k$. Assim, dados $n, m, p \in \mathbb{Z}$, as relações < e ≤ satisfazem as seguintes propriedades:

- i) Reflexiva:

$$n \leq n.$$

- ii) Antissimétrica:

$$n \leq m \text{ e } m \leq n \Rightarrow n = m.$$

- iii) Transitiva:

$$n \leq m \text{ e } m \leq p \Rightarrow n \leq p.$$

iv) Boa definição: para todo inteiro vale uma, e apenas uma, das seguintes afirmações:

a. $n < m$;

b. $m < n$;

c. $n = m$.

v) Compatibilidade com a adição:

Para todo $p \in \mathbb{Z}$,

$$n \leq m \Rightarrow n + p \leq m + p.$$

vi) Compatibilidade com a multiplicação: Se p é não negativo, então

$$n \leq m \Rightarrow n \cdot p \leq m \cdot p.$$

Demonstração:

i) Da definição de \leq , existe k inteiro não negativo tal que

$$n \leq n \Rightarrow n = n + k.$$

Ora, mas

$$k = k + 0$$

e 0 é um inteiro não negativo. Logo, a propriedade é válida.

ii) Também da definição de \leq , temos que

$$n \leq m \Rightarrow m = n + k_1$$

e

$$m \leq n \Rightarrow n = m + k_2,$$

onde k_1 e k_2 são ambos inteiros não negativos. Somando as duas igualdades, temos que

$$n + m = n + m + k_1 + k_2 \Rightarrow 0 = k_1 + k_2$$

e, como nenhum dos números k_1 e k_2 é negativo, nos resta afirmar que $k_1 = k_2 = 0$, isto é, que

$$n = m.$$

iii) Sabemos que

$$n \leq m \Rightarrow m = n + k_1$$

e

$$m \leq p \Rightarrow p = m + k_2.$$

Somando ambas as igualdades, temos

$$p + m = n + m + k_1 + k_2 \Rightarrow p = n + (k_1 + k_2).$$

Note que $k_1 + k_2$ é um inteiro não negativo, ou seja, pela definição de \leq , vale que

$$n \leq p.$$

iv) Se a. e b. ocorrem simultaneamente, então

$$n < m \Rightarrow m = n + k_1$$

e

$$m < n \Rightarrow n = m + k_2,$$

onde k_1 e k_2 são inteiros estritamente positivos. Porém, somando as igualdades, temos

$$n + m = m + n + k_1 + k_2 \Rightarrow 0 = k_1 + k_2,$$

o que é um absurdo. Portanto, não existe k_1 e k_2 que satisfaçam a. e b. ao mesmo tempo. Se ocorrerem a. e c. simultaneamente, então, de a., temos que existe k positivo tal que $m = n + k$, porém, c. afirma que $m = n$, o que é uma contradição, já que k é não nulo. Pela mesma justificativa, b. e c. não podem ocorrer ao mesmo tempo. Logo, apenas uma das três afirmações a., b. ou c. ocorre por vez.

v) Vale que

$$n \leq m \Rightarrow m = n + k.$$

Somando p a ambos os lados da igualdade, temos

$$m + p = n + k + p \Rightarrow (m + p) = (n + p) + k,$$

que, pela definição de \leq , implica que

$$n + p \leq m + p.$$

vi) Do enunciado, vem

$$n \leq m \Rightarrow m = n + k.$$

Multiplicando por $p > 0$ em ambos os lados, temos

$$m \cdot p = (n + k) \cdot p \Rightarrow m \cdot p = n \cdot p + k \cdot p.$$

Note que $k \cdot p$ é um número não negativo, já que tanto k quanto p o são. Portanto, pela definição de \leq , podemos concluir que

$$n \leq m \Rightarrow n \cdot p \leq m \cdot p.$$

Estas relações de ordem munidas das propriedades demonstradas tornam o conjunto dos números inteiros um conjunto ordenado.

2.2.3. Números racionais

Ao longo da história, especialmente na Grécia antiga, as medições eram feitas com números inteiros ou com razões entre estes. Até então, essas razões não eram tidas como números propriamente ditos, eram usadas apenas para determinar se uma medida era comensurável ou não, isto é, se algo não pudesse ser medido por um número inteiro mas o pudesse por uma razão entre inteiros, este era dito um tamanho comensurável. Mais tarde, as grandezas comensuráveis ganharam significado numérico, e foram batizadas de números racionais (do latim *ratio*, que significa "divisão"), representados por \mathbb{Q} , da palavra inglesa "quotient", que significa "quociente".

Sejam $n, m \in \mathbb{Z}$ com $m \neq 0$, um número da forma $\frac{n}{m}$ é chamado racional.

Dentre os racionais temos os inteiros (subconjunto de \mathbb{Q}), os decimais finitos e os decimais infinitos e periódicos. É de fácil verificação que as operações de adição e multiplicação em \mathbb{Q} possuem as mesmas propriedades herdadas do conjunto dos inteiros, com o acréscimo do **elemento inverso multiplicativo**, que a cada $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^*$

associa um único racional $\left(\frac{n}{m}\right)^{-1}$ tal que

$$\frac{n}{m} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{-1} = \left(\frac{n}{m}\right)^{-1} \cdot \frac{n}{m} = 1.$$

Por possuir todas essas propriedades, o conjunto dos racionais, munido das operações de adição e multiplicação, tem a estrutura de corpo. Não apenas isso, em \mathbb{Q} também podemos estabelecer as relações de ordem $<$ e \leq , e estas herdam as propriedades enunciadas para os números inteiros, cujas demonstrações são inteiramente análogas.

Dessa forma, a quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ é chamada de corpo ordenado. Por fim, os racionais possuem uma característica que até então os conjuntos numéricos não apresentam, a densidade.

Proposição 2. Entre dois números racionais $\frac{n}{m}$ e $\frac{p}{q}$, tais que $\frac{n}{m} \leq \frac{p}{q}$, sempre existe outro racional.

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} \leq \frac{p}{q} &\Rightarrow 2 \cdot \frac{n}{m} \leq \frac{n}{m} + \frac{p}{q} \\ &\Rightarrow \frac{n}{m} \leq \frac{\left(\frac{n}{m} + \frac{p}{q}\right)}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Também,

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} \leq \frac{p}{q} &\Rightarrow \frac{n}{m} + \frac{p}{q} \leq 2 \cdot \frac{p}{q} \\ &\Rightarrow \frac{\left(\frac{n}{m} + \frac{p}{q}\right)}{2} \leq \frac{p}{q}. \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) e (2), concluímos que

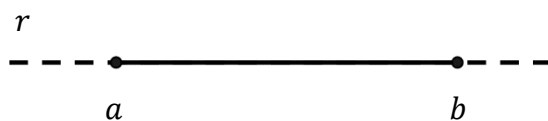
$$\frac{n}{m} \leq \frac{\left(\frac{n}{m} + \frac{p}{q}\right)}{2} \leq \frac{p}{q},$$

isto é, que a média aritmética entre dois racionais está entre esses mesmos racionais, o que prova nossa proposição.

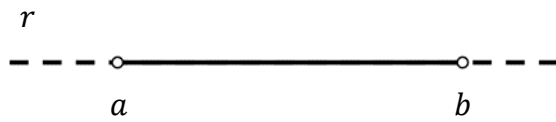
2.3. Intervalos

Sejam a e b dois números racionais tais que $a < b$. Chamamos de intervalo os subconjuntos de \mathbb{Q} descritos e ilustrados abaixo:

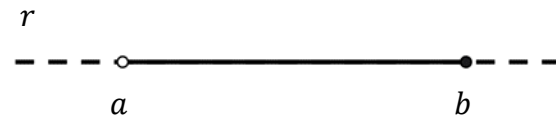
i) $[a, b] = \{x \in \mathbb{Q}; a \leq x \leq b\}$



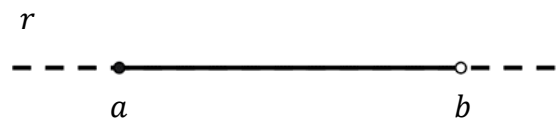
ii) $(a, b) = \{x \in \mathbb{Q}; a < x < b\}$



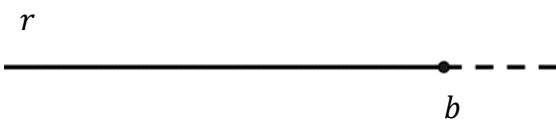
iii) $(a, b] = \{x \in \mathbb{Q}; a \leq x \leq b\}$



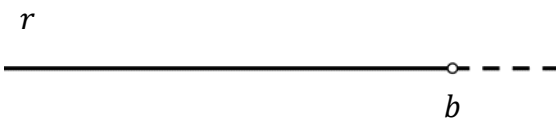
iv) $[a, b) = \{x \in \mathbb{Q}; a \leq x, b\}$



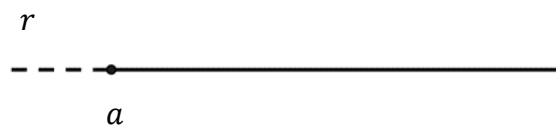
v) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq b\}$



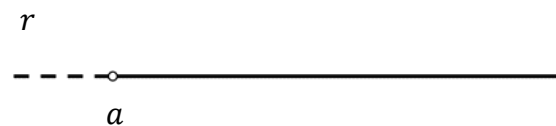
vi) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{Q}; x < b\}$



vii) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{Q}; a \leq x\}$



viii) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{Q}; a < x\}$

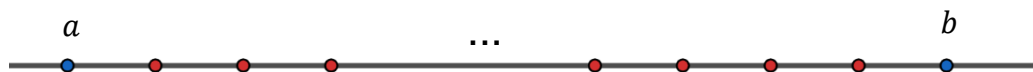


ix) $(-\infty, +\infty)$



Onde os quatro primeiros são chamados intervalos limitados, $[a, b]$ é fechado, (a, b) é aberto, $(a, b]$ é fechado à direita, $[a, b)$ é fechado à esquerda. Os cinco últimos são chamados intervalos ilimitados.

Observe que, como definimos intervalos se baseando apenas na propriedade de ordenação de \mathbb{Q} , é interessante pensar se faz sentido falar de intervalos em outros conjuntos numéricos ordenados, como por exemplo \mathbb{Z} , por mais que este não seja denso. Ora, dados $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $a < b$, podemos definir de maneira análoga os nove intervalos acima, porém, eles serão formados apenas por uma quantidade finita de números inteiros.



Em particular, o intervalo de números inteiros $[a, b)$ é o conjunto

$$\{a, a + 1, a + 2, a + 3, \dots, b - 2, b - 1\}.$$

Além disso, se tomarmos $b = a + 1$, o intervalo (a, b) será vazio, já que não há nenhum número inteiro entre a e seu sucessor. Já o intervalo $(a, b]$ terá b como seu único elemento. Um fato importante a ser observado é o de que qualquer intervalo não vazio de números inteiros com extremos a, b , pertencentes ou não a tal intervalo, possui maior elemento, e um menor elemento. Uma característica parecida pode ser observada no conjunto dos números naturais, que pode ser interpretado como o intervalo $[1, +\infty)$ de números inteiros. Nesse conjunto, conforme afirma o Princípio da Boa Ordenação, qualquer subconjunto não vazio de \mathbb{N} tem menor elemento.

Ainda a respeito de intervalos limitados, dado que um intervalo de números racionais é um subconjunto de \mathbb{Q} , dizemos que um subconjunto A não vazio de números racionais é limitado inferiormente se existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que $a \leq q$, para todo q em A , nesse caso, a é chamado de cota inferior de A . De maneira semelhante, dizemos que A é limitado superiormente se existir $b \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq b$, para todo q em A , nessas condições, b é chamado de cota superior de A .

É fácil notar que para um conjunto limitado inferiormente, existirão infinitas cotas inferiores, e para um conjunto limitado superiormente, existirão infinitas cotas superiores. A partir disso, podemos estabelecer duas definições:

Definição 2.1. (Ínfimo) Dado um subconjunto não vazio A de \mathbb{Q} , um número $a \in \mathbb{Q}$ chama-se ínfimo de A se é a maior de suas cotas inferiores. Em outras palavras:

- i) Para todo $q \in A$, tem-se $a \leq q$;
- ii) Se existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \leq q$, para todo $q \in A$, então $r \leq a$.

Definição 2.2. (Supremo) Dado um subconjunto não vazio A de \mathbb{Q} , um número $b \in \mathbb{Q}$ chama-se supremo de A se é a menor de suas cotas superiores. Isto é:

- i) Para todo $q \in A$, tem-se $q \leq b$;
- ii) Se existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq r$, para todo $q \in A$, então $b \leq r$.

Proposição 3. O supremo de um conjunto A , quando existe, é único.

Demonstração: Seja $A \subset \mathbb{Q}$ um conjunto limitado superiormente, e sejam a_1 e a_2 supremos de A . Pelo item i) definição, a_1 é cota superior de A , isto é, se $q \in A$ então $q \leq a_1$. Da mesma forma, por i), se $q \in A$ então $q \leq a_2$. Porém, pelo item ii), temos que $a_1 \leq a_2$ e, ao mesmo tempo, $a_2 \leq a_1$, o que implica em $a_1 = a_2$.

Logo, o supremo, quando existe, é único. ■

Uma argumentação análoga pode ser feita para provar que o ínfimo de um conjunto, quando existe, também é único.

2.4. CONCEITOS BÁSICOS DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Ao apresentarmos a construção dos números reais através de régua e compasso a estudantes do ensino básico, o primeiro ponto que devemos considerar é que as construções geométricas básicas que utilizaremos não compõe a grade curricular normal desse nível do ensino. Portanto, é importante trabalhá-las previamente com os estudantes.

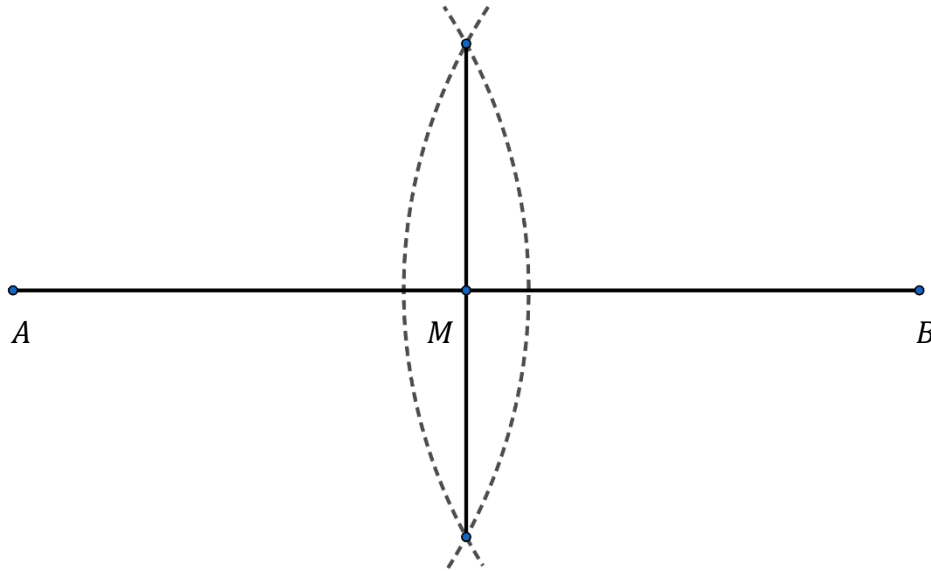
As construções que usaremos são:

Ponto médio de um segmento AB dado

1º Com a ponta seca em A e raio um pouco maior que a metade do segmento AB , traçamos um arco que corte AB conforme a figura. Em seguida, traçamos outro arco com mesmo raio, porém com a ponta seca em B ;

2º Trace um segmento que passe pelos dois pontos de intersecção dos arcos criados. Esse novo segmento intersectará AB em seu ponto médio M .

Figura 12: Ponto médio de um segmento



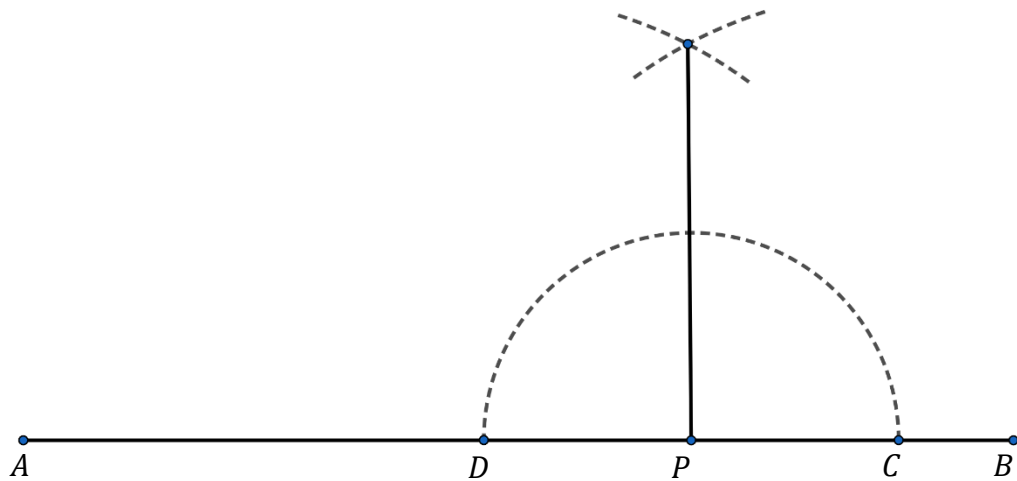
Fonte: O autor

Segmento perpendicular a um segmento AB passando por $P \in AB$ dado

1º Se P for ponto médio de AB , a construção anterior é suficiente, visto que o segmento traçado para encontrar o ponto médio é perpendicular a AB . Caso P não seja ponto médio de AB , coloque a ponta seca em P e trace um semicírculo que intersecte AB nos pontos C e D ;

2º Com a ponta seca em C e raio ligeiramente maior que \overline{CD} , trace um arco conforme o da figura abaixo. Em seguida faça o mesmo processo, porém com a ponta seca em D . O segmento que passa por P e pelo ponto de intersecção dos dois arcos traçados é perpendicular a AB .

Figura 13: Segmento perpendicular por um ponto dado

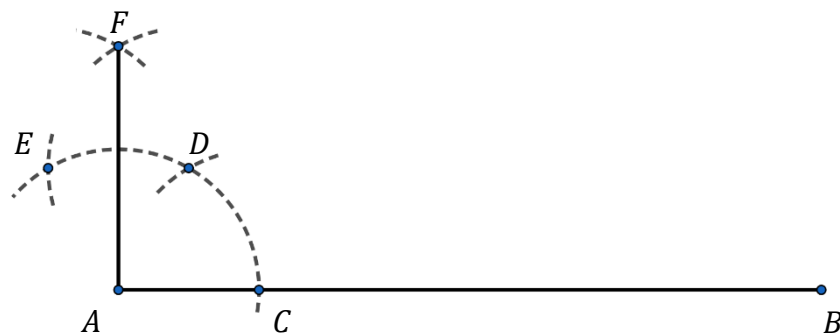


Fonte: O autor

Segmento perpendicular a um segmento AB passando por A

- 1º Com a ponta seca em A e raio qualquer, trace um arco que intersecte AB no ponto C ;
- 2º Com a ponta seca em C e mesmo raio, trace um arco que corte o primeiro arco no ponto D .
- 3º Da mesma forma, com a ponta seca em D e mesmo raio, trace um arco que intersecte o primeiro no ponto E .
- 4º Com a ponta seca em D e depois em E , e mesma abertura, trace dois arcos que se cruzem no ponto F . O segmento AF é perpendicular a AB .

Figura 14: Segmento perpendicular pela extremidade



Fonte: O autor

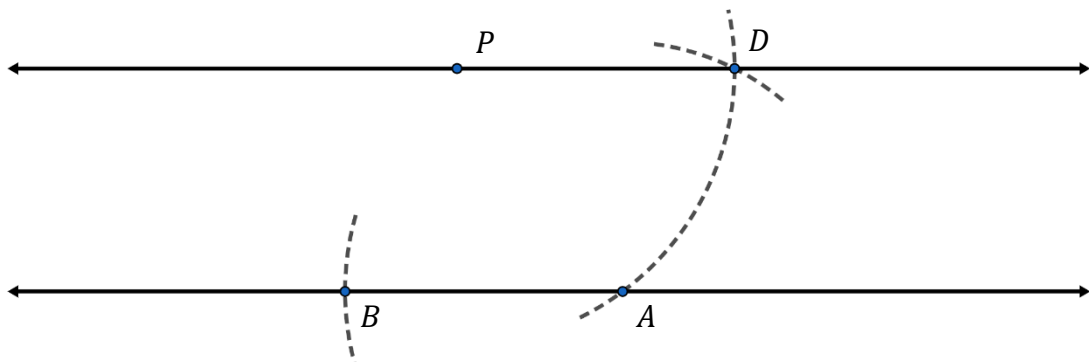
Reta paralela a uma reta r passando por um ponto $P \notin r$ dado

1º Com a ponta seca em P e raio maior que a distância de P a r , trace um arco que intersecte r no ponto A ;

2º Com a ponta seca em A e raio \overline{AP} , trace um arco que corte r no ponto B .

3º Com o centro em A e raio \overline{BP} , trace um arco que intersecte o arco construído no passo 1º, e marque o ponto D nessa intersecção. A reta PD será a paralela a r que passa por P .

Figura 15: Reta paralela por um ponto dado



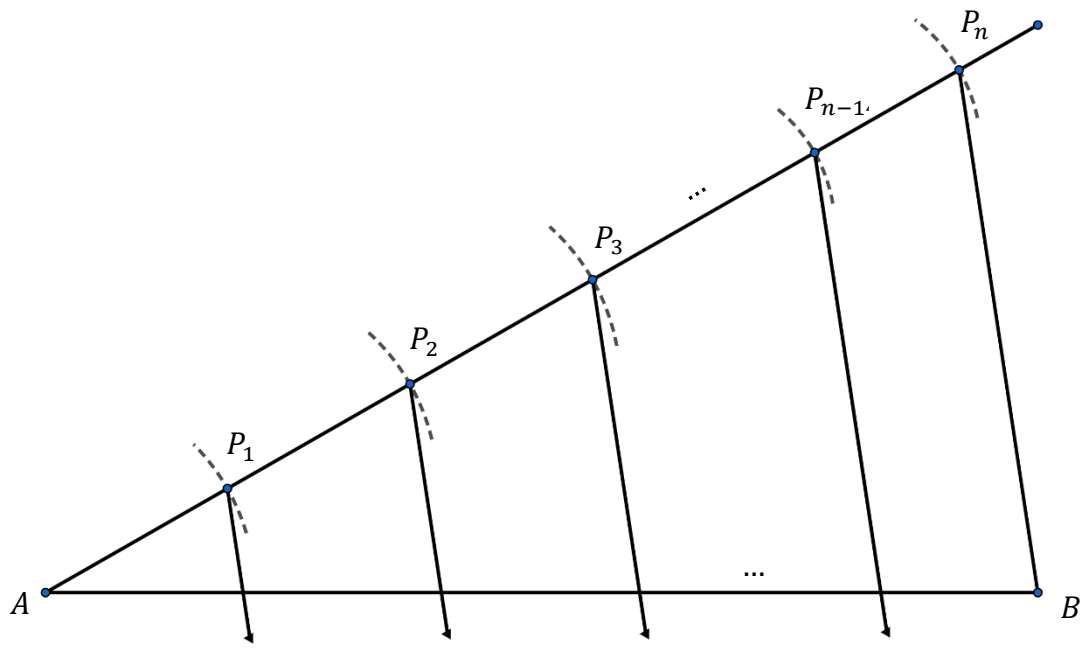
Fonte: O autor

Dividir um segmento AB dado em n partes congruentes

1º Por A (ou por B), traçamos a semirreta \overrightarrow{AC} com inclinação qualquer em relação a AB . Em seguida, com uma abertura qualquer no compasso e ponta seca em A , marcamos os pontos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ igualmente espaçados em \overrightarrow{AC} ;

2º Traçamos o segmento BP_n ;

3º Por cada um dos pontos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ traçamos semirretas paralelas a BP_n que intersectem o segmento AB . Estas semirretas o dividirão em n partes congruentes.

Figura 16: Divisão de um segmento em n partes congruentes

Fonte: O autor

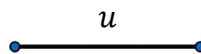
3. A RETA REAL \mathbb{R}

Neste t3pico, iremos desenvolver um m3todo totalmente geom3trico da constru3o do conjunto dos n3meros reais.

3.1. CONSTRU3O DOS CONJUNTOS NUM3RICOS

De maneira l3gica, iniciaremos a constru3o com os n3meros inteiros, j3 que sua ilustra3o segue a mesma ideia que o conjunto dos naturais, onde a diferen3a entre \mathbb{Z} e \mathbb{N} 3 que este (\mathbb{Z}) se estende infinitamente em ambos os sentidos (direita e esquerda). O primeiro passo que daremos em nossa constru3o ser3 definir uma unidade de medida u , representada pelo seguimento abaixo:

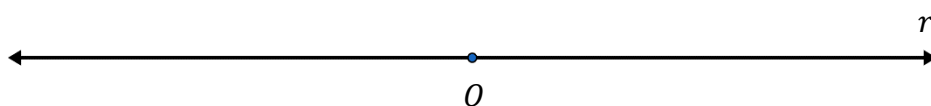
Figura 17: Unidade



Fonte: O autor

Traçamos uma reta r auxiliar (que possuir3 fun3o meramente ilustrativa, servindo apenas de suporte para os pontos que marcaremos), e nela o ponto O que representar3 o n3mero 0.

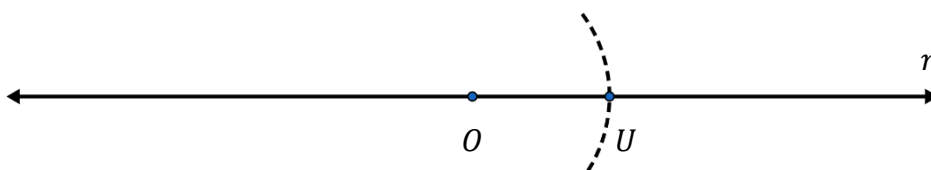
Figura 18: Reta suporte r



Fonte: O autor

Com a ponta seca do compasso no ponto O e abertura igual a u , traçamos à direita de O um ponto U na reta r , este representar3 o n3mero 1.

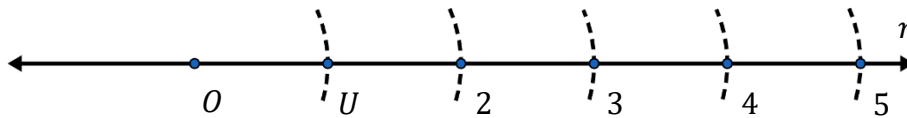
Figura 19: Unidade na reta suporte r



Fonte: O autor

Dessa vez com a ponta seca em U , e mesmo raio, marcamos em r o ponto que simbolizará o número 2. Seguindo o mesmo padrão, podemos marcar todos os números positivos. Veja:

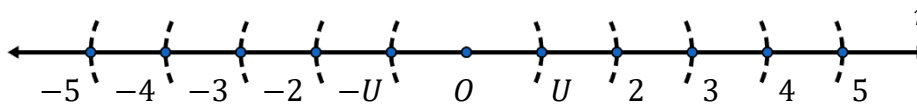
Figura 20: Números naturais na reta suporte r



Fonte: O autor

Fazendo uma construção totalmente análoga, podemos traçar os pontos que representam os números negativos. Basta traçar agora os arcos à esquerda de 0 .

Figura 21: Números inteiros na reta suporte r



Fonte: O autor

Dessa forma, construímos os números inteiros de um modo geométrico. Lembrando que \mathbb{Z} é ilustrado apenas como um conjunto de pontos conforme descrito anteriormente, ou seja, em nenhum momento durante nossas construções com números inteiros encontraremos pontos que não representem um número inteiro. Nosso próximo passo será construir os números racionais.

Observe que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, e como já construímos os inteiros, esta construção servirá como base para a discussão a seguir.

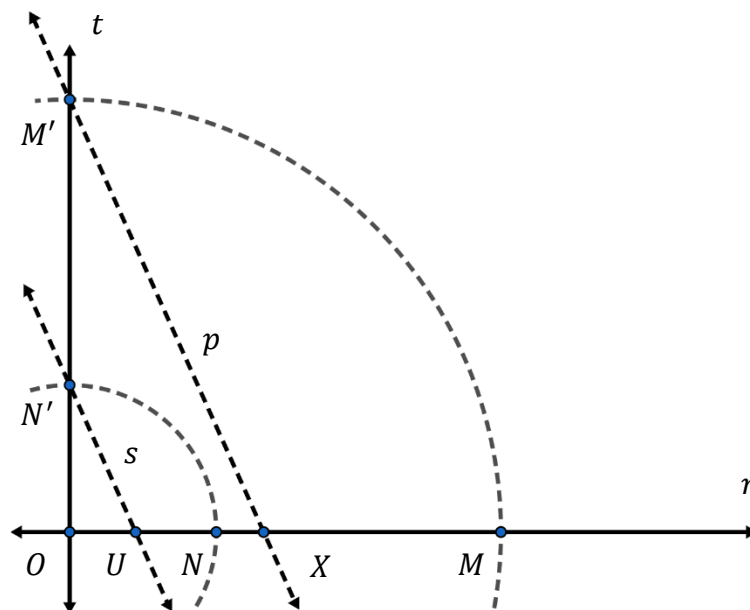
Dados dois números inteiros quaisquer n e m , com $m \neq 0$, vamos marcar o ponto que representa o racional qualquer $\frac{n}{m}$.

Definição 3.3 (Quociente entre dois inteiros)

- i) Sejam N e M pontos tais que $\overline{ON} = n$ e $\overline{OM} = m$. Traçamos uma reta t perpendicular à reta r e com origem no ponto O ;

- ii) Em t , marcamos os pontos N' , a uma distância n de O , e M' , a uma distância m de O ;
- iii) Por U e pelo ponto $M' \in t$ traçamos uma reta s ;
- iv) Por $N' \in t$, traçamos a reta p , paralela a s . A intersecção de p com r será o ponto X tal que $\overline{OX} = \frac{m}{n}$.

Figura 22: Número racional a reta suporte r



Fonte: O autor

Veja que os triângulos OUM' e OXN' são semelhantes, já que compartilham um ângulo reto em O e, como UM' é paralela a XN' , os demais ângulos desses triângulos também são congruentes. Da semelhança de triângulos, vem

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{ON'}}$$

mas, $\overline{OU} = 1$, ou seja,

$$\overline{OX} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{ON'}} = \frac{m}{n}$$

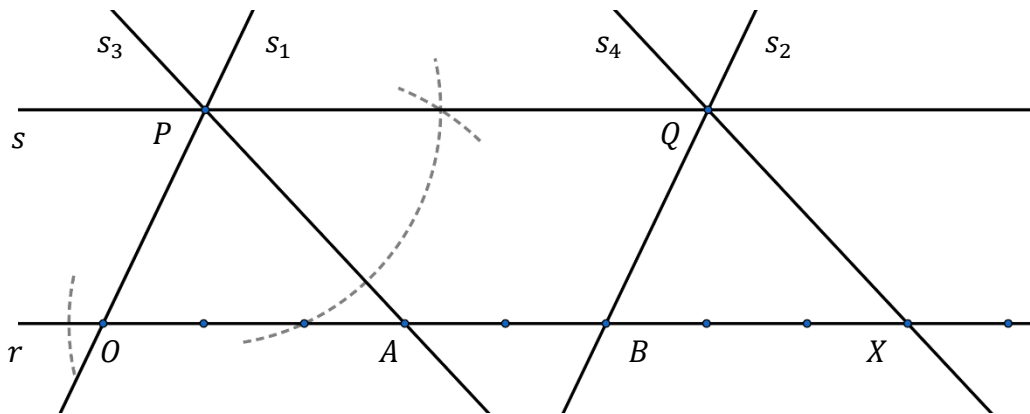
3.2 Operações

Após identificar os racionais de uma maneira geométrica, podemos definir as mesmas operações que descrevemos em 2.2. Dados $a, b \in \mathbb{Q}$ quaisquer, definimos a seguir a soma e o produto.

Definição 3.1 (Soma)

- i) Sejam A e B pontos tais que $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$. Trace uma reta s qualquer paralela à reta suporte r ilustrada junto aos pontos que representam os números inteiros. Nessa paralela, marque o ponto arbitrário P ;
- ii) Trace uma reta s_1 que passa por O e P . Por B , trace a paralela a s_1 , que chamaremos de s_2 , e chame de Q a intersecção de s e s_2 ;
- iii) Trace a reta s_3 que passa por A e P ;
- iv) Por Q , trace a reta s_4 , paralela a s_3 . A intersecção das retas s_4 e s é o ponto X tal que $\overline{OX} = a + b$.

Figura 23: Soma geométrica de dois números racionais



Fonte: O autor

Pelo Teorema de Tales e por construção, $OPQB$ e $PQXA$ são paralelogramos, logo os segmentos OA , XB e PQ são congruentes. Daí,

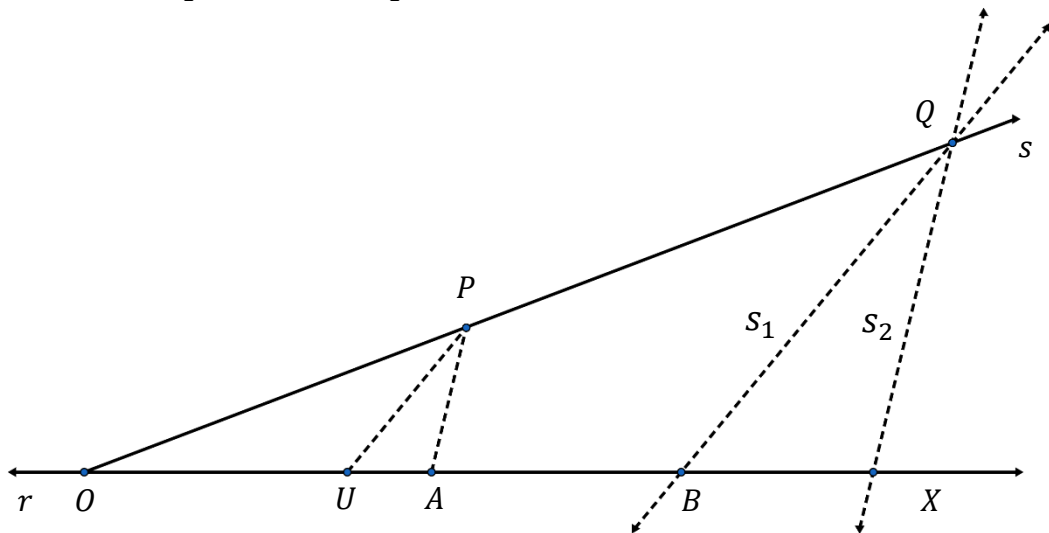
$$\overline{OX} = \overline{OA} + \overline{XA} \Rightarrow \overline{OX} = \overline{OA} + \overline{OB}$$

o que justifica nossa construção.

Definição 3.2 (Produto)

- i) Sejam A e B pontos tais que $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$. Por um ponto P qualquer não colinear aos pontos que representam os racionais, traçamos uma semirreta com origem em O ;
- ii) Traçamos um segmento que vai do ponto U a P ;
- iii) Por B , trace a reta s_1 , paralela ao segmento UP , e chamaremos de Q a intersecção de s com s_1 ;
- iv) Trace o segmento que sai do ponto que representa A e chega em P ;
- v) Por Q , trace s_2 , a paralela ao segmento AP . A intersecção de s_2 e r será o ponto X tal que $\overline{OX} = a \cdot b$.

Figura 24: Produto geométrico de dois números racionais



Fonte: O autor

Por construção, $UP \parallel QB$ e $PA \parallel X$. Veja que, pelo Teorema de Tales, os triângulos OPU e OQB são semelhantes, já que possuem seus ângulos correspondentes congruentes, assim como os triângulos OPA e OQX . Daí,

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$$

e, também

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OX}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$$

ou seja,

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OX}}$$

como $\overline{OU} = 1$, concluímos que

$$\frac{1}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OX}} \Rightarrow \overline{OX} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = a \cdot b.$$

Em virtude de \mathbb{N} e \mathbb{Z} serem subconjuntos de \mathbb{Q} as operações descritas acima se aplicam de forma análoga a esses dois conjuntos.

O fato de \mathbb{Q} ser um conjunto denso, como já provamos na seção 2.2, nos faz acreditar intuitivamente que ele preencha toda a reta r (reta suporte), isto é, se tomarmos todos os números a e b inteiros possíveis, com $b \neq 0$, poderemos criar números racionais $\frac{a}{b}$ suficientes para preencher uma reta, de modo que cada ponto da reta represente um número racional, sem exceção. Porém, isso não ocorre, e podemos provar esse fato com uma construção bem simples: sobre o segmento da OU construímos um quadrado de lado u e traçamos a sua diagonal, em seguida, com a ponta seca do compasso em O e abertura igual ao tamanho da diagonal do quadrado, marcamos em r um ponto P .

O segmento OP terá comprimento igual a $\sqrt{2}$ unidades, o que significa que o ponto P representa esse número na reta r . Porém, como vimos na seção 2.1, esse número não é racional, e o fato de haver um número não racional na reta em que estávamos dispondo os racionais já é o suficiente para mostrar que \mathbb{Q} não preenche toda a reta r . Além disso, se com centro em O e abertura igual a $\sqrt{2}$ marcamos mais um ponto à esquerda de O , que chamaremos de P' , este também representará um número não racional na reta, visto que $\overline{OP} = \overline{OP}'$.

Observe agora que dado qualquer racional $\frac{a}{b}$ não nulo, o tamanho do segmento que parte de P e chega no ponto que representa $\frac{a}{b}$, representado por $\frac{a}{b}P$, também não é um número racional. Caso contrário, usando o fato de \mathbb{Q} ser um corpo, o número $\left(\frac{a}{b} \cdot \overline{OP}\right) \cdot \frac{b}{a} = \overline{OP}$, com $a \neq 0$, também seria racional, o que é uma contradição. Repetindo esse processo para todos os racionais, já teríamos infinitos pontos que não representam nenhum número racional. Portanto, concluímos que apesar de ser denso, o corpo dos racionais não possui a propriedade que chamaremos de completude. A fim de “preencher essas lacunas” na reta suporte r e

criar um conjunto com a propriedade de completude, a partir de agora vamos trabalhar com a construção de alguns números que não são racionais.

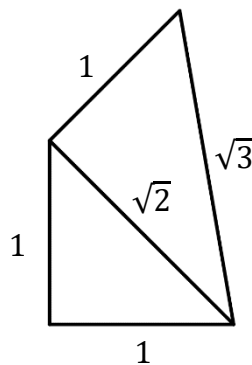
3.3 Construção de alguns irracionais

3.3.1. Números do tipo $a + b \cdot \sqrt{p}$

A grande dificuldade de lidar com os irracionais está no fato de que não se pode dar uma descrição geral do que é um número irracional, que não dependa do próprio conceito de número racional. Podemos, no máximo, formular descrições, que não dependam dos racionais, para alguns tipos de irracionais, como por exemplo $a + b \cdot \sqrt{p}$, onde $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ e $b \neq \sqrt{p}$, com $p \in \mathbb{N}$ primo. Um irracional desse tipo pode ser representado com exatidão na reta r através da seguinte construção:

- i) Em um espaço a parte, construímos um triângulo retângulo de catetos medindo u , e pelo que já mostramos, a hipotenusa será $\sqrt{2}$;
- ii) Usando essa hipotenusa como um cateto, construímos mais um triângulo retângulo cujo outro cateto também mede u . Pelo teorema de Pitágoras, a hipotenusa desse novo triângulo medirá $\sqrt{3}$;

Figura 25: Raízes quadradas de números primos I

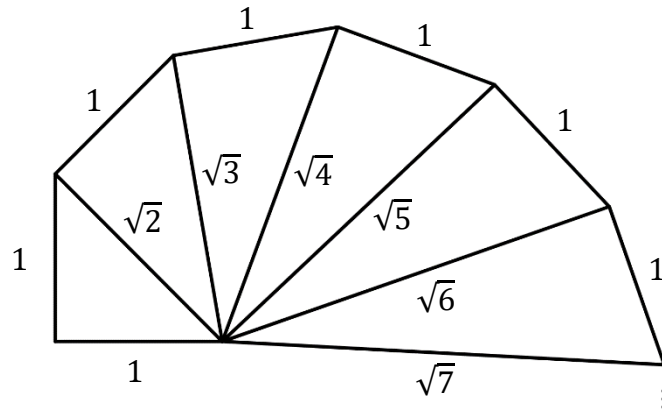


Fonte: O autor

- iii) Se repetirmos essa construção várias vezes, sempre construindo novos triângulos sobre a hipotenusa dos anteriores, usando esta como cateto, e o outro cateto medindo u , conseguiremos novas hipotenusas cujos

comprimentos serão $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ..., e assim por diante, construindo assim segmentos que tenham medida igual a todas as raízes de números naturais maiores que 1, incluindo os números primos.

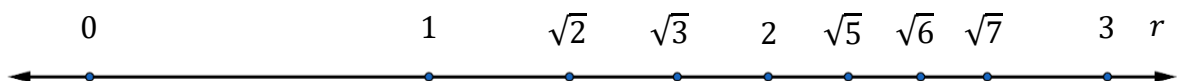
Figura 26: Raízes quadradas de números primos II



Fonte: O autor

Por fim, basta marcar na reta os pontos que representem os números irracionais acima, isto é, cuja distância até O seja igual ao comprimento dos segmentos construídos.

Figura 27: Raízes quadradas de números primos na reta suporte r



Fonte: O autor

Essa construção nos dá a localização precisa na reta dos números da forma \sqrt{p} , a partir deles, usando as Definições 3.1 e 3.2 podemos tomar b vezes qualquer um desses tamanhos e soma-los com a , o que nos daria todos os números da forma $a + b \cdot \sqrt{p}$ conforme especificamos anteriormente.

Um caso especial destes números é o número de ouro, cujo valor é dado por

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398875 \dots$$

Sua construção geométrica obtém-se dividindo um segmento AB em média e extrema razão. Para tal, devemos dividir AB em duas partes por um ponto C de tal modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

quando $\overline{AC} > \overline{CB}$, ou

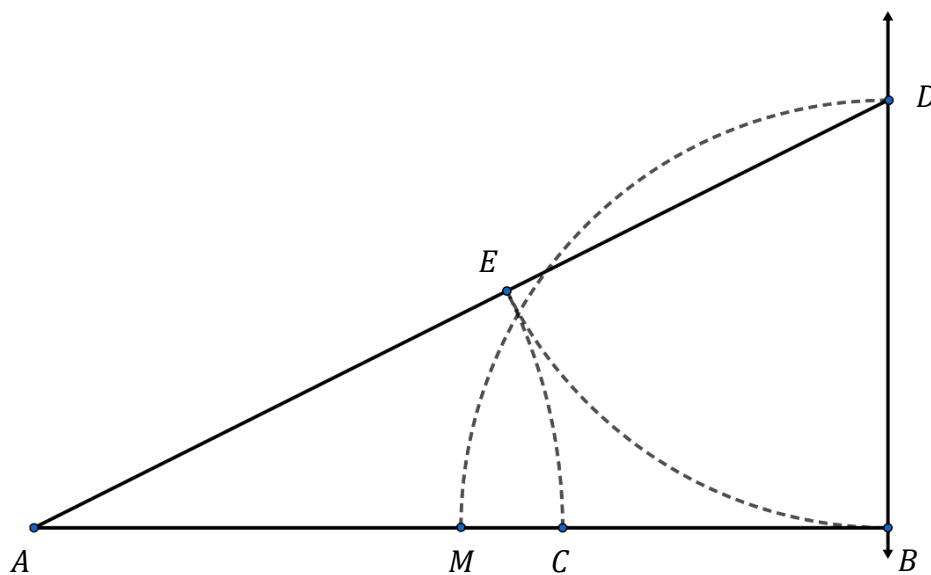
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

se $\overline{CB} > \overline{AC}$.

Vamos tratar do caso em que $\overline{AC} > \overline{CB}$. Veja a construção abaixo:

- i) Determine o ponto médio M do segmento AB ;
- ii) Por B , trace a reta s perpendicular a AB ;
- iii) Com a ponta seca em B e raio \overline{BM} , marque o ponto D em s ;
- iv) Trace AD e, em seguida, com a ponta seca em D e raio \overline{BD} , marque o ponto E em AD ;
- v) Com a ponta seca em A e raio \overline{AE} , marque C em AB .

Figura 28: Construção do número de ouro



Fonte: O autor

Podemos supor, sem perda de generalidade, que AC é um segmento unitário.

Se $\overline{AB} = x$, por construção, $\overline{BD} = \frac{x}{2}$ e, como $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED}$, então $\overline{AD} = 1 + \frac{x}{2}$, pelo

Teorema de Pitágoras, temos

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Daí,

$$1 + x + \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{4} \Rightarrow 4 + 4x + x^2 = 5x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0,$$

cujas raízes são

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

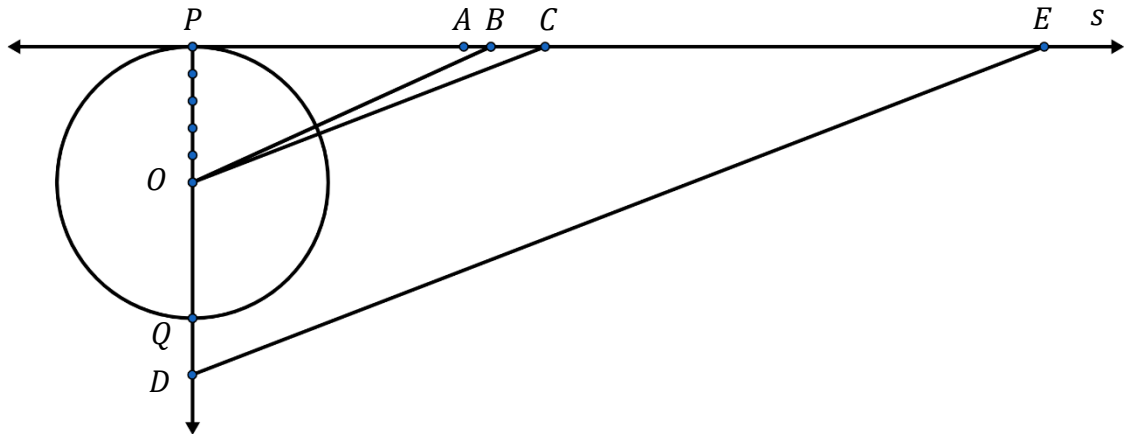
Desconsiderando a raiz negativa, temos então que x é o número de ouro.

3.3.2. Uma construção aproximada de π

Outro número irracional que podemos marcar com uma aproximação satisfatória é π . Sabemos que π nasce do quociente entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, isto é, o comprimento da circunferência pode ser expresso como $2 \cdot \pi \cdot R$, onde R é o raio da circunferência. Se construirmos uma circunferência de raio igual a $R = \frac{u}{2}$, seu comprimento será igual a π , e retificando essa circunferência poderemos tomar o segmento cujo tamanho é uma ótima aproximação de π .

A seguir apresentaremos a retificação de Wilhelm Otto Ludwing Specht (1907-1985), que nos permite encontrar uma aproximação de π com o erro relativo menor que $3 \cdot 10^{-7}$. Veja:

- i) Dada uma circunferência de centro O e raio $R = \frac{u}{2}$, traçamos a semirreta \overrightarrow{PQ} , onde P e Q são pontos diametralmente opostos da circunferência;
- ii) Por P , traçamos uma reta s , perpendicular à \overrightarrow{PQ} ;
- iii) Dividimos o raio OP em cinco partes congruentes;
- iv) Marcamos o ponto A na reta s de modo que $\overline{PA} = \overline{PQ}$. Depois marcamos B e C na mesma reta, tais que $\overline{AB} = \frac{1}{5} \cdot OP$ e $\overline{BC} = \frac{2}{5} \cdot OP$;
- v) Traçamos o segmento OB e, em seguida, determinamos o ponto D na semirreta \overrightarrow{PQ} , tal que $\overline{PD} = \overline{OB}$;
- vi) Traçamos o segmento OC e, por fim, traçamos DE paralelo a OC , onde E é um ponto de r .

Figura 29: Construção de uma aproximação de π 

Fonte: O autor

Construído dessa forma, o segmento PE medirá, aproximadamente, 3,1415920, o que aproxima π com precisão até a sexta casa decimal.

Note que, como $OC \parallel DE$, os triângulos OCP e DEP são semelhantes, ou seja,

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{PD}}$$

Ora, mas $\overline{PO} = R$ é o raio da circunferência, $\overline{PC} = 2R + \frac{3R}{5}$ e, pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{aligned} \overline{OB}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{PB}^2 \Rightarrow \overline{OB}^2 = R^2 + \left(2R + \frac{R}{5}\right)^2 \\ &\Rightarrow \overline{OB}^2 = R^2 + \left(\frac{11R}{5}\right)^2 \\ &\Rightarrow \overline{OB}^2 = R^2 + \frac{121R^2}{25} \\ &\Rightarrow \overline{OB}^2 = R^2 + \frac{121R^2}{25} \\ &\Rightarrow \overline{OB}^2 = \frac{146R^2}{25} \\ &\Rightarrow \overline{OB} = \frac{\sqrt{146}R}{5}. \end{aligned}$$

Por fim, como $\overline{PD} = \overline{OB}$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{PD}} &\Rightarrow \frac{2R + \frac{3R}{5}}{\overline{PE}} = \frac{R}{\frac{\sqrt{146}R}{5}} \\ \Rightarrow \overline{PE} &= \frac{\left(\frac{2\sqrt{146}}{5} + \frac{3\sqrt{146}}{25}\right)R^2}{R} \\ \Rightarrow \overline{PE} &= \frac{13\sqrt{146}}{25}R. \end{aligned}$$

Como $R = \frac{u}{2}$, o diâmetro da circunferência será $d = u$. Portanto,

$$\overline{PE} = \frac{13\sqrt{146}}{50}u \approx 3,1415920$$

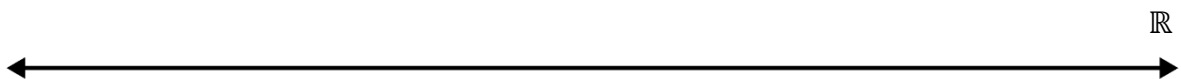
que é a aproximação desejada.

Desta forma, vemos que é possível marcar números irracionais na reta suporte r , alguns com precisão e outros com aproximações que variam conforme a construção geométrica. Os demais irracionais exigem construções muito particulares, as quais não trataremos por motivos óbvios.

Baseado nas construções geométricas apresentadas, podemos estabelecer a proposição a seguir.

Proposição 4. A todo número real se pode associar um ponto da reta real \mathbb{R} , e a todo ponto da reta real \mathbb{R} se pode associar um número real.

Figura 30: A reta real



Fonte: O autor

4. O CORPO ORDENADO COMPLETO \mathbb{R}

Neste tópico, iremos construir o conjunto dos números reais utilizando um dos métodos algébricos, assim como fez Dedekind em sua teoria de cortes.

4.1. RICHARD DEDEKIND

Julius Wilhelm Richard Dedekind foi um matemático alemão que nasceu em Braunschweig, atual Alemanha. Durante sua vida, estudou na universidade de Göttingen e, sob orientação de Gauss, recebeu seu título de doutor em 1852. A partir de 1854, começou a lecionar probabilidade e geometria em Göttingen, onde se formara, e já em 1858 durante uma aula de Cálculo teve a ideia que o levaria a conceber o que hoje conhecemos como os corte de Dedekind, publicando em 1872 seu maior trabalho, o já citado *Stetigkeit und irrationale Zahlen* cuja ideia principal eram justamente os cortes.

A discussão sobre a teoria dos cortes de Dedekind iniciou a partir da necessidade de se distinguir as grandezas representadas pelos números racionais do contínuo que viria a ser a reta real. Para tal argumentação, Dedekind não usou da propriedade da densidade ou da ideia de ligação mútua, muito pelo contrário, ele observou a possibilidade de dividir um segmento em duas partes por um ponto sobre o próprio segmento. Esse “elemento separador” foi a melhor descrição feita até então do que viria a ser um número real.

Em seu trabalho, Dedekind cita que uma das principais motivações que o levou a se dedicar a essa construção foi a necessidade que ele sentia de dar uma base completamente aritmética à ideia de “continuidade” tão utilizada no cálculo diferencial, embora não possuísse uma explicação formal. Para ele, o sentimento de insatisfação com a dependência que os conceitos apresentados no cálculo diferencial tinham para com as intuições geométricas era avassalador e essa forma de introdução nem sequer poderia ser considerada científica.

Ao julgar se uma magnitude variável se aproxima ou não de um limite fixo, ou seja, se o valor de uma função ou uma sequência se aproxima de um número real específico a medida que x (ou n , no caso das sequências) cresce indefinidamente, ou provar o teorema que afirma que uma magnitude que cresce continuamente, porém não além de todos os limites, deve certamente se aproximar de algum valor, a ideia dos infinitesimais era essencial. Entretanto, até aquele momento não havia uma base

sólida para a ideia dos infinitesimais, sem essa base, não haviam garantias de que um número, ao se aproximar muito de outro ou crescer além de todos os limites, estará sempre assumindo valores reais, sem nunca dar saltos ou ter intervalos de descontinuidade. Foi o trabalho de Dedekind que, por fim, formulou essa base tão necessária para o cálculo diferencial.

Na concepção de sua teoria, ele se baseou na definição de proporção feita por Eudoxo que, de certo ponto de vista, a cada par de segmentos a e b associa dois conjuntos de pares de números inteiros (m, n) , o conjunto que chamaremos de E (“esquerda”) dos pares onde $n \cdot a < m \cdot b$ e o conjunto que chamaremos de D (“direita”), dos pares onde $n \cdot a > m \cdot b$.

A partir daí, ele percebeu que esse mesmo procedimento poderia ser feito se, dado um racional $\frac{a}{b}$ qualquer, que agora denotaremos apenas por q por conveniência, definirmos o conjunto E dos números racionais menores que q , e o conjunto D dos racionais maiores que q , onde o próprio racional em questão pode ser inserido tanto como maior elemento de E quanto como menor elemento de D , dessa forma, q é chamado de elemento separador do corte (E, D) . A ideia de cortes se torna ainda mais interessante quando estudamos pares de conjuntos (E, D) que não possuem elemento separador, como é o caso de

$$E = \{q \in \mathbb{Q}: q < \sqrt{p}, \text{ com } p \in \mathbb{N} \text{ primo}\} \text{ e } D = \{q \in \mathbb{Q}: \sqrt{p} < q, \text{ com } p \in \mathbb{N} \text{ primo}\}.$$

Observe que, no conjunto E ,

$$q < \sqrt{p} \Rightarrow q^2 < p$$

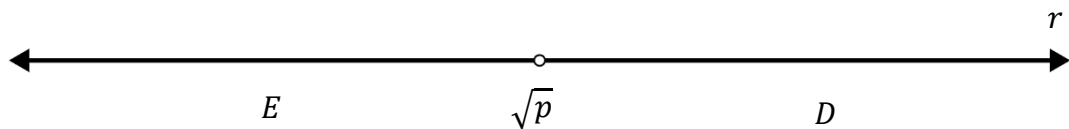
o que significa que E é um conjunto de número racionais tais que seus quadrados são menores que p . Esse conjunto é limitado superiormente por \sqrt{p} , porém não possui maior elemento, visto que não há um racional tal que $q^2 = p$ (afirmar essa igualdade seria dizer que um número primo p pode ser escrito como combinação de dois fatores, o que é um absurdo). Um fato semelhante ocorre com D , já que

$$q > \sqrt{p} \Rightarrow q^2 > p$$

isto é, D é formado pelos racionais cujo quadrado é maior que p . Desta vez, o conjunto em questão é limitado inferiormente, porém não possui menor elemento (pelo mesmo motivo que E não possui maior elemento).

Unindo o fato de que E não possui maior elemento com o fato de que D não possui menor elemento, concluímos que entre estes conjuntos há uma “lacuna em branco”, onde não há nenhum número racional que sirva de elemento separador.

Figura 31: Corte de Dedekind sem elemento separador



Fonte: O autor

A falta de elementos de separação em cortes desse tipo é o suficiente para provar que o conjunto \mathbb{Q} não é completo. Sendo assim, novos números tiveram que ser considerados para “preencher essas lacunas”. Vamos fazer essa construção da reta conforme Dedekind, primeiro definindo formalmente o que viria a ser “corte” no conjunto \mathbb{Q} dos números racionais.

4.2. CORTES DE NÚMEROS RACIONAIS

Definição 4.1. Chamaremos de “corte de números racionais” todo par de conjuntos (E, D) não vazios tais que a união $E \cup D$ seja igual a \mathbb{Q} e todo elemento de E seja estritamente menor que todo elemento de D .

O passo seguinte é postular a existência de um elemento de separação $q \in \mathbb{Q}$ que pode ser inserido como maior elemento de E ou como menor elemento de D . Assim, todo racional q determina um corte de números racionais.

Essa construção deve apresentar as mesmas características que um corpo ordenado deve ter, isto é, ter suas operações bem definidas e a propriedade de ordenação, conforme já estava estabelecida no conjunto dos racionais. Vamos tratar dessas propriedades:

Definição 4.2. (Ordenação): sejam q_1 e q_2 dois números racionais caracterizados pelos cortes que definem em \mathbb{Q} , isto é, $q_1 = (E_1, D_1)$ e $q_2 = (E_2, D_2)$. Dizemos que:

- $q_1 = q_2$ se $(E_1, D_1) = (E_2, D_2)$;

- $q_1 < q_2$ se E_1 está contido, mas não é igual a E_2 , ou seja, E_1 é subconjunto próprio de E_2 .

Veja que essa definição não fere a ordenação dos números racionais, já que se $q_1 < q_2$ então todos os valores menores que q_1 (ou seja, os elementos de E_1) também são menores que q_2 (logo são elementos de E_2), portanto $E_1 \subset E_2$. Porém, existem números menores que q_2 e maiores que q_1 , já que \mathbb{Q} é um corpo denso, logo há elementos de E_2 que não pertencem a E_1 , o que justifica nossa definição de ordenação. Veja que, da forma que foi definida, a relação de ordem está em função apenas dos cortes que q_1 e q_2 determinam, o que a torna uma definição satisfatória para nossa proposta de construção.

Figura 32: Ordenação de cortes



Fonte: O autor

4.3. OPERAÇÕES COM CORTES

Definição 4.3. (Soma) Sejam dois racionais q_1 e q_2 que definem os cortes (E_1, D_1) e (E_2, D_2) , respectivamente. Definimos a soma $q_1 + q_2$ como o corte (E, D) onde

$$E = \{x + y : x \in E_1 \text{ e } y \in E_2\}$$

e D é o conjunto dos demais números racionais.

Para justificarmos essa definição, devemos primeiro provar que (E, D) é um corte nos números racionais, isto é, que ambos são não vazios e que todo elemento de E é menor do que todo elemento de D .

Ora, se E_1 e E_2 são conjuntos não vazios, então haverá algum $x + y \in E$. Logo E é não vazio. O fato de D ser não vazio segue de maneira totalmente análoga à anterior, basta observar que se $x \in D_1$ e $y \in D_2$, então $x + y \in D$ já que será maior que qualquer elemento de E .

Por fim, vamos provar que todo elemento de E é menor que todo elemento de D . Suponha por absurdo que existam $x \in E$ e $y \in D$ tais que $y < x$, isto significa que existe um racional positivo a tal que $x = y + a$. Como $x \in E$, existem $x_1 \in E_1$ e $y_1 \in E_2$ tais que $x = x_1 + y_1$. Daí,

$$y + a = x_1 + y_1 \Rightarrow y = x_1 + y_1 - a \Rightarrow y = (x_1 - a) + y_1.$$

Veja que $(x_1 - a) < x_1$, logo $x_1 - a$ está em E_1 , e como $y_1 \in E_2$ isto significa que a soma de ambos $(x_1 - a)$ e y_1 está em E , o que é uma contradição. Portanto, $x < y$, e (E, D) determina um corte de racionais.

Propriedades da soma:

Para efeito de demonstrações, a operação soma sempre será efetuada conforme a Definição 4.3, operando apenas com os elementos dos conjuntos à esquerda do elemento separador de cada corte.

Dados os cortes (E_1, D_1) , (E_2, D_2) , (E_3, D_3) e (E, D) de números reais, valem as seguintes propriedades:

$$A_1) (E_1, D_1) + (E_2, D_2) = (E_2, D_2) + (E_1, D_1).$$

Demonstração: de acordo com a definição 4.3, sabemos que $(E_1, D_1) + (E_2, D_2) = (E, D)$, onde

$$E = \{x + y: x \in E_1 \text{ e } y \in E_2\}$$

e D é o conjunto dos demais números racionais.
Por outro lado, temos

$$E = \{x + y: x \in E_1 \text{ e } y \in E_2\} = \{y + x: y \in E_2 \text{ e } x \in E_1\} = E_2 + E_1.$$

Mas como $E_2 + E_1 = E$, então $(E_2, D_2) + (E_1, D_1) = (E, D)$. ■

$$A_2) [(E_1, D_1) + (E_2, D_2)] + (E_3, D_3) = (E_1, D_1) + [(E_2, D_2) + (E_3, D_3)].$$

Demonstração: de fato, a soma $[(E_1, D_1) + (E_2, D_2)] + (E_3, D_3) = (E, D)$ onde

$$\begin{aligned} [E_1 + E_2] + E_3 &= E = \{[x + y] + z: x \in E_1, y \in E_2 \text{ e } z \in E_3\} \\ &= \{x + [y + z]: x \in E_1, y \in E_2 \text{ e } z \in E_3\} \\ &= E_1 + [E_2 + E_3] \end{aligned}$$

Logo $(E_1, D_1) + [(E_2, D_2) + (E_3, D_3)] = (E, D)$, conforme enunciamos. ■

$A_3)$ Existe o corte $(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+)$, definido pelo número racional 0, tal que

$$(E, D) + (\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+) = (\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+) + (E, D) = (E, D)$$

Demonstração: nos interessa provar que

$$E + \mathbb{R}_-^* = E$$

Note que ambos são conjuntos, e para provar a igualdade entre conjunto basta mostrar que um está contido no outro e vice versa. Daí, temos que

$$q \in (E + \mathbb{R}_-^*) \Rightarrow q = x + y, x \in E \text{ e } y \in \mathbb{R}_-^*.$$

Ora,

$$\begin{aligned} y \in \mathbb{R}_-^* &\Rightarrow y < 0 \\ &\Rightarrow x + y < x. \end{aligned}$$

E como (E, D) é um corte, temos que

$$\begin{aligned} q = x + y < x &\Rightarrow q \in E \\ &\Rightarrow (E + \mathbb{R}_-^*) \subset E. \end{aligned} \quad (1)$$

Por outro lado, se $q \in E$ e (E, D) é um corte, então existe $x \in E$ tal que $q < x$. A partir disso, temos

$$\begin{aligned} q < x &\Rightarrow q - x < 0 \\ &\Rightarrow q - x \in \mathbb{R}_-^*. \end{aligned}$$

Mas como $x \in E$ e $(q - x) \in \mathbb{R}_-^*$, então

$$x + (q - x) = q \in (E + \mathbb{R}_-^*).$$

Isto nos leva a concluir que $E \subset (E + \mathbb{R}_-^*)$. (2)

De (1) e (2), podemos concluir que $E_1 + \mathbb{R}_-^* = E_1$ e, como consequência, que

$$(E, D) + (\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*) = (E, D).$$

■

Obs.: o argumento para justificar que $(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*) + (E, D) = (E, D)$ decorre da propriedade comutativa da soma que já demonstramos.

A₄) Dado o corte (E, D) , existe o corte $(-E, -D)$ tal que

$$(E, D) + (-E, -D) = (-E, -D) + (E, D) = (\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*)$$

Demonstração: precisamos encontrar $-E$ de tal sorte que a soma dos elementos de E e $-E$ resulte em \mathbb{R}_-^* .

Sendo assim, vamos defini-lo da seguinte forma:

$$-E = \{q \in \mathbb{Q} : \exists x \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x > q \text{ e } -x \notin E\}.$$

Vamos a partir de agora provar que $(E, D) + (-E, -D) = (\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*)$. Ainda observando apenas dos conjuntos da esquerda de cada corte, da igualdade acima temos que

$$E + (-E) = \mathbb{R}_-^*,$$

que é uma igualdade de conjunto. Daí, vamos provar que um contém o outro e vice versa. Veja:

$$\begin{aligned} E + (-E) &= \{p + q : p \in -E \text{ e } q \in E\} \\ \Rightarrow E + (-E) &= \{p + q : \exists x \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x > p \text{ e } -x \notin E \text{ e } q \in E\}. \end{aligned}$$

A partir daí, vem

$$-x \notin E \text{ e } q \in E \Rightarrow q < -x.$$

Como $x > p$, e pela tricotomia dos números racionais, temos

$$\begin{aligned} p + q < x + (-x) &\Rightarrow p + q < 0 \\ &\Rightarrow p + q \in \mathbb{R}_-^* \\ &\Rightarrow E + (-E) \subset \mathbb{R}_-^*. \end{aligned}$$

Além disso, se tomarmos $r \in \mathbb{R}_-^*$, temos que $-r > 0$. Definindo um corte (E, D) tal que $r \notin E$, podemos escolher $p \in E$ suficientemente grande tal que

$$\frac{2p - r}{2} \notin E$$

(isso decorre do fato de que E não possui maior elemento). Em seguida, fazendo

$$\frac{2p - r}{2} = -x$$

temos que

$$-x < \frac{2p - r - r}{2} = p - r$$

já que $-r > 0$. Além disso,

$$-x \notin E \text{ e } x > r - p \Rightarrow r - p \in (-E).$$

Para finalizar essa demonstração, basta observar que r pode ser escrito como soma de $r - p$ e p , onde $r - p \in (-E)$ e $p \in E$, por definição. Daí

$$\begin{aligned} r &= r - p + p \Rightarrow r \in E + (-E) \\ &\Rightarrow \mathbb{R}_-^* \subset E + (-E). \end{aligned}$$

Portanto, $E + (-E) = \mathbb{R}_-^*$, e, como consequência, $(E, D) + (-E, -D) = (\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*)$, como queríamos demonstrar. ■

Obs.: já o caso $(-E, -D) + (E, D) = (\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*)$ decorre da propriedade comutativa da soma.

A partir de agora iremos definir a multiplicação entre dois cortes de Dedekind. Mas, para isso é necessário entender o que vem a ser o módulo de um corte.

Definição 4.4. (Módulo) Dado um corte (E, D) , diremos que $E < 0$ sempre que E possuir apenas elementos negativos, ou seja,

$$q \in E \Leftrightarrow q < 0.$$

Agora, diremos que $E \geq 0$ se em E houver algum elemento não negativo em E , isto é,

$$\exists q \in E \text{ tal que } q \geq 0.$$

Por fim, definimos o módulo de E como sendo o conjunto

$$|E| = \begin{cases} E, & \text{se } E \geq 0 \\ -E, & \text{se } E < 0 \end{cases}.$$

Definição 4.4. (Produto) Dados dois números racionais q_1 e q_2 que definem os cortes (E_1, D_1) e (E_2, D_2) , respectivamente. Definimos o produto $q_1 \cdot q_2$ como o corte (E, D) , onde E é dado sob uma das seguintes formas:

i) Quando $E_1 \geq 0$ e $E_2 \geq 0$, temos

$$E = E_1 \cdot E_2 = \{p \cdot q : 0 \leq p \in E_1 \text{ e } 0 \leq q \in E_2\} \cup \mathbb{Q}_-^*.$$

ii) Quando $E_1 \geq 0$ e $E_2 < 0$, temos

$$E = E_1 \cdot E_2 = -(E_1 \cdot |E_2|) = \{p \cdot q : 0 \leq p \in E_1 \text{ e } 0 \leq q \in (-E_2)\}.$$

iii) Quando $E_1 < 0$ e $E_2 \geq 0$, temos

$$E = E_1 \cdot E_2 = -(|E_1| \cdot E_2) = \{p \cdot q : 0 \leq p \in (-E_1) \text{ e } 0 \leq q \in E_2\}.$$

iv) Quando $E_1 < 0$ e $E_2 < 0$,

$$E = E_1 \cdot E_2 = |E_1| \cdot |E_2| = \{p \cdot q : 0 \leq p \in (-E_1) \text{ e } 0 \leq q \in (-E_2)\} \cup \mathbb{Q}_-^*$$

e D é o conjunto dos demais números racionais.

Obs.: para que (E, D) seja um corte de Dedekind, o conjunto E deve conter todo os números menores que $q_1 \cdot q_2$, ou seja, todos os números negativos à esquerda de seu elemento separador. Como o produto foi definido apenas nos elementos positivos de E_1 e E_2 , ou de seus respectivos opostos, se for o caso (para evitar que haja multiplicação entre dois elementos negativos arbitrariamente pequenos desses dois conjuntos), devemos ao fim da definição unir o conjunto resultante ao conjunto \mathbb{Q}_-^* .

A justificativa para essa definição é totalmente análoga à feita pra a soma de cortes, devemos provar que E e D são não vazios e que todo elemento de E é menor

que qualquer elemento de D . Vamos considerar, sem perda de generalidade, que $E_1 \geq 0$ e $E_2 \geq 0$. Obviamente E é não vazio, pois E_1 e E_2 são não vazios, visto que existem $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$ não negativos tais que $x_1 \cdot x_2 \in E$. O conjunto D é não vazio pelo mesmo motivo, pois como D_1 e D_2 são não vazios, existem $y_1 \in D_1$ e $y_2 \in D_2$ positivos tais que $y_1 \cdot y_2 \in D$.

Agora, para verificarmos que todo elemento de E é menor que qualquer elemento de D , vamos considerar dois casos: quando ambos os conjuntos E_1 e E_2 são “maiores ou iguais a zero” ou ambos “menores que zero”, e em seguida que um deles seja “menor que zero” enquanto o outro é “maior ou igual a zero”. Para quaisquer $x \in E$ e $y \in D$, vamos mostrar que as afirmações abaixo são verdadeiras.

i) Considere $E_1 \geq 0$ e $E_2 \geq 0$. Como $x \in E$, sabemos pela tricotomia que ou $x < 0$, ou $x = 0$ ou $x > 0$.

Suponhamos por absurdo que $x > y$. Em seguida, mostraremos que isso só ocorre se y for, na verdade, elemento de E .

Sendo x e y negativos, note que E foi definido como a união de um conjunto “maior ou igual a zero” com \mathbb{Q}_-^* , ou seja, se $y < 0$ então $y \in E$, o que é uma contradição. O mesmo ocorre se $x = 0$, dado que supomos $x > y$, o que implica em y negativo e chegaríamos a mesma conclusão.

Se x for positivo, com $x > y$, deve existir um racional positivo a tal que $x = y + a$. Mas como $x \in E$ e é positivo, existem $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$, ambos não nulos, tais que $x_1 \cdot x_2 = x$. Daí,

$$y + a = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow y = x_1 \cdot x_2 - a \Rightarrow y = \left(x_1 - \frac{a}{x_2}\right) \cdot x_2.$$

Observe que, pelo fato de ambos a e x_2 serem positivos, o racional $\frac{a}{x_2}$ é positivo, ou seja, $\left(x_1 - \frac{a}{x_2}\right) < x_1$. Logo, $\left(x_1 - \frac{a}{x_2}\right) \in E_1$, e como $x_2 \in E_2$, concluímos que o produto de ambos

$$\left(x_1 - \frac{a}{x_2}\right) \cdot x_2 = y \in E$$

o que é uma contradição. Desta forma, só resta assumir que $x < y$.

Obs.: o caso onde $E_1 < 0$ e $E_2 < 0$ é totalmente análogo.

ii) Considerando $E_1 \geq 0$ e $E_2 < 0$, vamos supor da mesma forma do item anterior que $y < x$ com $x \in E$ e $y \in D$. É fácil observar que o conjunto E possui apenas elementos não positivos, como justificativa basta verificar que no produto $E_1 \cdot E_2 = -(E_1 \cdot |E_2|)$ temos os opostos dos números não negativos resultantes das multiplicações dos elementos não negativos de E_1 com os elementos não negativos de $|E_2|$. Assim, se $x \in E$, então $y < x \leq 0$, que já foi discutido em i).

Portanto, a multiplicação de cortes está bem definida. ■

Obs.: o caso onde $E_1 < 0$ e $E_2 \geq 0$ é totalmente análogo.

Propriedades do produto:

Dados os cortes (E_1, D_1) , (E_2, D_2) , (E_3, D_3) e (E, D) de números reais, e suponha, sem perda de generalidade, que $E_1, E_2, E_3, E \geq 0$, então valem as seguintes propriedades:

$$M_1) (E_1, D_1) \cdot (E_2, D_2) = (E_2, D_2) \cdot (E_1, D_1).$$

Demonstração: assim como no caso da soma, a comutatividade do produto de dois cortes é herdada da comutatividade dos números racionais (assim como a associatividade enunciada em seguida), já que

$$\begin{aligned} E_1 \cdot E_2 &= \{p \cdot q : 0 \leq p \in E_1 \text{ e } 0 \leq q \in E_2\} \cup \mathbb{R}_-^* \\ &= \{q \cdot p : 0 \leq q \in E_2 \text{ e } 0 \leq p \in E_1\} \cup \mathbb{R}_-^* \\ &= E_2 \cdot E_1. \end{aligned}$$

Portanto, $(E_1, D_1) \cdot (E_2, D_2) = (E_2, D_2) \cdot (E_1, D_1)$. ■

$$M_2) [(E_1, D_1) \cdot (E_2, D_2)] \cdot (E_3, D_3) = (E_1, D_1) \cdot [(E_2, D_2) \cdot (E_3, D_3)].$$

Demonstração: Da definição, temos

$$\begin{aligned} (E_1 \cdot E_2) \cdot E_3 &= \{(p \cdot q) \cdot r : 0 \leq p \in E_1, 0 \leq q \in E_2 \text{ e } 0 \leq r \in E_3\} \cup \mathbb{R}_-^* \\ &= \{p \cdot (q \cdot r) : 0 \leq p \in E_1, 0 \leq q \in E_2 \text{ e } 0 \leq r \in E_3\} \cup \mathbb{R}_-^* \\ &= E_1 \cdot (E_2 \cdot E_3). \end{aligned}$$

Logo, $[(E_1, D_1) \cdot (E_2, D_2)] \cdot (E_3, D_3) = (E_1, D_1) \cdot [(E_2, D_2) \cdot (E_3, D_3)]$. ■

M₃) Existe o corte determinado pelo número real 1, que simbolizaremos por $(1_E, 1_D)$, tal que $1_E = \{p \in \mathbb{Q}: p < 1\}$ e, para todo corte (E, D) ,

$$(1_E, 1_D) \cdot (E, D) = (E, D) \cdot (1_E, 1_D) = (E, D).$$

Demonstração: vamos provar que $1_E \cdot E = E$. Como $E \geq 0$, temos que $1_E, E, (1_E \cdot E) \supset \mathbb{R}_+^*$. Logo, para mostrarmos a igualdade entre esses conjuntos, devemos provar apenas que seus elementos não negativos são os mesmos, isto é, $(1_E \cdot E) - \mathbb{R}_+^* = E - \mathbb{R}_+^*$. Ora, existe $0 \leq q \in (1_E \cdot E)$ tal que $q = x \cdot y$, com $x \in 1_E$ e $y \in E$, ambos não negativos. Mas,

$$\begin{aligned} x \in 1_E &\Rightarrow 0 \leq x < 1 \\ &\Rightarrow x \cdot y < y \\ &\Rightarrow q < y \\ &\Rightarrow q \in E, \text{ já que } (E, D) \text{ é corte} \\ &\Rightarrow (1_E \cdot E) \subset E. \end{aligned} \tag{1}$$

Por outro lado, se $0 \leq q \in E$ e (E, D) é corte, então existe $x \in E$ tal que $q < x$. A partir daí, temos

$$q < x \Rightarrow 0 \leq \frac{q}{x} < 1 \Rightarrow \frac{q}{x} \in 1_E.$$

E como $x \in E$ e $\frac{q}{x} \in 1_E$, temos que

$$q = x \cdot \frac{q}{x} \in (1_E \cdot E) \Rightarrow E \subset (1_E \cdot E). \tag{2}$$

De (1) e (2), podemos concluir que $(1_E \cdot E) = E$ e, por consequência,

$$(1_E, 1_D) \cdot (E, D) = (E, D). \quad \blacksquare$$

Obs.: o argumento para justificar que $(E, D) \cdot (1_E, 1_D) = (E, D)$ decorre da propriedade comutativa da multiplicação já demonstrada.

M₄) Dado o corte (E, D) , existe o corte (E^{-1}, D^{-1}) tal que

$$(E, D) \cdot (E^{-1}, D^{-1}) = (E^{-1}, D^{-1}) \cdot (E, D) = (1_E, 1_D).$$

Demonstração: é fácil observar que o corte (E^{-1}, D^{-1}) deve ser necessariamente diferente de $(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*)$, já que nem $(\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*)$ e nem seu oposto (que é ele próprio) possuem elementos positivos em seu conjunto da esquerda. Dito isto, precisamos

definir E^{-1} de tal forma que os elementos positivos do produto $E \cdot E^{-1}$ sejam todos menores que 1. Logo, usaremos a definição abaixo:

$$E^{-1} = \{q \in \mathbb{Q}_+^* : \exists x > q \text{ tal que } x^{-1} \notin E\} \cup \mathbb{R}_-.$$

Definido dessa forma, se $E > 0$, então $E^{-1} > 0$. Provaremos assim que $E \cdot E^{-1}$ está contido em 1_E e vice e versa. Sabendo que $1_E, E, (1_E \cdot E) \supset \mathbb{R}_+^*$, observaremos apenas que os elementos não negativos de cada conjunto são iguais. Veja:

$$\begin{aligned} E \cdot E^{-1} &= \{p \cdot q : 0 < p \in E \text{ e } 0 < q \in E^{-1}\} \\ \Rightarrow E \cdot E^{-1} &= \{p \cdot q : 0 \leq p \in E \text{ e } \exists x > q \text{ tal que } x^{-1} \notin E\} \end{aligned}$$

e, como $x^{-1} \notin E$ e $p \in E$, então $p < x^{-1}$. Também, como $q < x$, temos, pela tricotomia dos números racionais,

$$\begin{aligned} p \cdot q < x^{-1} \cdot x &\Rightarrow p \cdot q < 1 \\ &\Rightarrow p \cdot q \in 1_E \\ &\Rightarrow (E \cdot E^{-1}) \subset 1_E. \end{aligned} \tag{1}$$

Além disso, se tomarmos r qualquer em 1_E , temos que $r^{-1} > 1$. Se definirmos corte (E, D) tal que $r \notin E$, podemos escolher $p \in E$ suficientemente grande tal que

$$\sqrt{p^2 \cdot r^{-1}} \notin E$$

e, em seguida, fazemos

$$x^{-1} = \sqrt{p^2 \cdot r^{-1}}.$$

Daí,

$$x^{-1} < \sqrt{p^2 \cdot r^{-1}} \cdot \sqrt{r^{-1}} = p \cdot r^{-1}$$

já $r^{-1} > 0$. Além disso,

$$x^{-1} \notin E \text{ e } x^{-1} > r \cdot p^{-1} \Rightarrow r \cdot p^{-1} \in E^{-1}.$$

Para finalizar, basta observar que r pode ser escrito como produto de um elemento de E e um elemento de E^{-1} . Veja:

$$\begin{aligned} r &= (r \cdot p^{-1}) \cdot p \Rightarrow r \in (E \cdot E^{-1}) \\ &\Rightarrow 1_E \subset (E \cdot E^{-1}) \end{aligned} \tag{2}$$

De (1) e (2), concluímos que $(E \cdot E^{-1}) = 1_E$, o que implica que $(E, D) \cdot (E^{-1}, D^{-1}) = (1_E, 1_D)$. Vale dizer que o caso $(E^{-1}, D^{-1}) \cdot (E, D) = (1_E, 1_D)$ segue da comutatividade da multiplicação.

Obs.: os demais casos são análogos.

Propriedade distributiva

Além das oito propriedades já demonstradas, os cortes de Dedekind possuem a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma. Vamos enunciar e demonstrar essa propriedade para cortes “maiores que zero”, os demais casos serão análogos pelo que já demonstramos anteriormente. Dados os cortes $(E, D), (E_1, D_1), (E_2, D_2) > 0$, vale que

$$(E, D) \cdot [(E_1, D_1) + (E_2, D_2)] = (E, D) \cdot (E_1, D_1) + (E, D) \cdot (E_2, D_2).$$

Demonstração: provaremos, por igualdade de conjuntos que

$$E \cdot [E_1 + E_2] = E \cdot E_1 + E \cdot E_2$$

Se $q \in (E \cdot [E_1 + E_2])$, então existem $x \in E$ e $y \in [E_1 + E_2]$ tais que $q = x \cdot y$. Agora, se $y \in [E_1 + E_2]$, então existem $y_1 \in E_1$ e $y_2 \in E_2$ tais que $y = y_1 + y_2$. Daí, fazendo uso da distributividade em \mathbb{Q} , temos

$$\begin{aligned} q = x \cdot y &\Rightarrow q = x \cdot (y_1 + y_2) \\ &\Rightarrow q = x \cdot y_1 + x \cdot y_2 \\ &\Rightarrow q \in (E \cdot E_1 + E \cdot E_2) \\ &\Rightarrow (E \cdot [E_1 + E_2]) \subset (E \cdot E_1 + E \cdot E_2). \end{aligned} \tag{1}$$

De maneira totalmente análoga, se $q \in (E \cdot E_1 + E \cdot E_2)$, então existem $x \in (E \cdot E_1)$ e $y \in (E \cdot E_2)$ tais que $q = x + y$. Agora, se $x \in (E \cdot E_1)$ então existem $x_1 \in E$ e $x_2 \in E_1$ tais que $x = x_1 \cdot x_2$. Também, se $y \in (E \cdot E_2)$, então existem $x_1 \in E$ e $x_3 \in E_2$ tais que $y = x_1 \cdot x_3$. Daí, temos

$$\begin{aligned} q = x + y &\Rightarrow q = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 \\ &\Rightarrow q = x_1 \cdot (x_2 + x_3) \\ &\Rightarrow q \in (E \cdot [E_1 + E_2]) \\ &\Rightarrow (E \cdot E_1 + E \cdot E_2) \subset (E \cdot [E_1 + E_2]). \end{aligned} \tag{2}$$

De (1) e (2), podemos concluir que $(E \cdot [E_1 + E_2]) = (E \cdot E_1 + E \cdot E_2)$ e, como consequência,

$$(E, D) \cdot [(E_1, D_1) + (E_2, D_2)] = (E, D) \cdot (E_1, D_1) + (E, D) \cdot (E_2, D_2) \quad \blacksquare$$

4.4. PROPRIEDADES DE ORDEM

Demonstradas as nove propriedades acima, podemos então afirmar que o conjunto dos cortes de Dedekind em \mathbb{Q} , munido das operações de soma e produto definidas anteriormente, determina um corpo. Porém, sabemos que o conjunto dos números racionais também é um conjunto ordenado, ou seja, dados os cortes (E_1, D_1) , (E_2, D_2) , (E_3, D_3) , a ordenação (conforme a Definição 4.2) deve respeitar as propriedades abaixo:

O₁) Apenas uma das afirmações é verdadeira

- i) $(E_1, D_1) < (E_2, D_2)$
- ii) $(E_2, D_2) < (E_1, D_1)$
- iii) $(E_1, D_1) = (E_2, D_2)$.

Demonstração: suponha que i) e ii) ocorrem simultaneamente. Vimos que, se $(E_1, D_1) < (E_2, D_2)$, então E_1 é subconjunto próprio de E_2 , isto é,

$$x \in E_1 \Rightarrow x \in E_2 \quad (1)$$

$$\text{e } \exists y \in E_2 \text{ tal que } y \notin E_1 \quad (2)$$

Agora, se $(E_2, D_2) < (E_1, D_1)$, então existirá $q \in E_1$ tal que $q \notin E_2$. Ora, mas de (1) temos que se $q \in E_1$ então $q \in E_2$, o que é uma contradição.

Suponha agora que i) e iii) ocorram ao mesmo tempo. De iii), temos que $E_1 = E_2$. Porém, de (2), há pelo menos um elemento de E_2 que não é elemento de E_1 , o que é uma contradição. ■

Para demonstrar que ii) e iii) não podem ocorrer simultaneamente a argumentação é totalmente análoga ao caso em que i) e iii) valem ao mesmo tempo.

O₂) Se $(E_1, D_1) < (E_2, D_2)$ e $(E_2, D_2) < (E_3, D_3)$, então $(E_1, D_1) < (E_3, D_3)$.

Demonstração: deveremos provar que E_1 é subconjunto próprio de E_3 . Sabemos que se $(E_1, D_1) < (E_2, D_2)$ então

$$x \in E_1 \Rightarrow x \in E_2 \text{ e } \exists y \in E_2 \text{ tal que } y \notin E_1. \quad (1)$$

Também, se $(E_2, D_2) < (E_3, D_3)$, então

$$x \in E_2 \Rightarrow x \in E_3 \text{ e } \exists y \in E_3 \text{ tal que } y \notin E_2. \quad (2)$$

Ora, de (1), se $x \in E_1$ então $x \in E_2$, já de (2), se $x \in E_2$ então $x \in E_3$, ou seja, E_1 é subconjunto de E_3 . Além disso, se existe $y \in E_3$ tal que $y \notin E_2$, então $y \notin E_1$, já que, de (1), se y estivesse em E_1 , por consequência, estaria em E_2 . Logo, concluímos que E_1 é subconjunto próprio de E_3 , isto é, $(E_1, D_1) < (E_3, D_3)$. ■

O₃) Se $(E_1, D_1) < (E_2, D_2)$, então $(E_1, D_1) + (E_3, D_3) < (E_2, D_2) + (E_3, D_3)$.

Demonstração: Provaremos que $E_1 + E_3$ é subconjunto próprio de $E_2 + E_3$. Sejam $x \in E_1$ e $y \in E_3$, sabemos que $(x + y) \in (E_1 + E_3)$. Porém, da hipótese que $(E_1, D_1) < (E_2, D_2)$, temos que se $x \in E_1$ então $x \in E_2$, ou seja, o número $x + y$ também pertence a $E_2 + E_3$, ou seja, $E_1 + E_3$ é subconjunto de $E_2 + E_3$. Agora, também da hipótese, existe $q \in E_2$ tal que $q \notin E_1$, o que implica que o número $q + y$ não pertence a $E_1 + E_3$, porém pertence a $E_2 + E_3$. Portanto, concluímos que $E_1 + E_3$ é subconjunto próprio de $E_2 + E_3$, isto é, que $(E_1, D_1) + (E_3, D_3) < (E_2, D_2) + (E_3, D_3)$. ■

O₄) Se $(E_3, D_3) > 0$ e $(E_1, D_1) < (E_2, D_2)$ então $(E_1, D_1) \cdot (E_3, D_3) < (E_2, D_2) \cdot (E_3, D_3)$.

Demonstração: Essa demonstração decorre de uma maneira semelhante à anterior. Sejam $x \in E_1$ e $y \in E_3$, sabemos que $(x \cdot y) \in (E_1 \cdot E_3)$. Das hipóteses, temos que se $x \in E_1$ então $x \in E_2$, e o número $x \cdot y$ pertence a $E_2 \cdot E_3$, ou seja, o conjunto $E_1 \cdot E_3$ está contido em $E_2 \cdot E_3$. Também da hipótese, sabemos que existe $x_1 \in E_2$ tal que $x_1 \notin E_1$, logo o número $x_1 \cdot y$ não pertence a $E_1 \cdot E_3$, mas pertence a $E_2 \cdot E_3$. Portanto, $E_1 \cdot E_3$ é subconjunto próprio de $E_2 \cdot E_3$, e $(E_1, D_1) \cdot (E_3, D_3) < (E_2, D_2) \cdot (E_3, D_3)$. ■

Portanto, o conjunto dos cortes de Dedekind em \mathbb{Q} suporta a estrutura de corpo ordenado.

A partir desse conjunto, podemos começar a tentar “preencher as lacunas” que existem nos números racionais, postulando a existência de elemento separador para todos os cortes de Dedekind determinados por elementos de \mathbb{Q} . Supondo que

exista, por exemplo, um número não racional \sqrt{p} , com $p \in \mathbb{Z}$ primo, que seja elemento separador do corte (E, D) , onde $E = \{q \in \mathbb{Q}: q < \sqrt{p}\}$ e $D = \{q \in \mathbb{Q}: \sqrt{p} < q\}$.

Nesse caso, os “novos elementos” que adicionaríamos ao conjunto \mathbb{Q} seriam aqueles que conhecemos como irracionais (não racionais), e sua inclusão adiciona uma importante propriedade a \mathbb{Q} , a completude.

Definição 4.4. (Completude) seja A um conjunto numérico não vazio qualquer. Dizemos que A é completo se todo subconjunto não vazio limitado superiormente de A possuir supremo, e este for um elemento de A .

Esta definição pode ser feita de maneira totalmente análoga utilizando o conceito de ínfimo.

Suponha que existe um número não racional r , o elemento separador de um corte (E, D) . Podemos fazer uma das duas afirmações:

- i) r é supremo de E , com $r \notin E$;
- ii) r é ínfimo de D , com $r \notin D$.

Para justificar as afirmações, usamos a própria definição de corte. Sabemos que E é o conjunto dos números racionais menores que r , então se $x \in E$, tem-se $x < r$. Agora, supondo que exista $y \in \mathbb{Q}$ tal que $x < y$, para todo $x \in E$. Ora, pela tricotomia, apenas uma das seguintes afirmações é verdadeira: $r < y$ ou $r = y$ ou $y < r$. Se $r = y$ não há nada a provar. Se $y < r$, então $y \in E$ e, pela densidade de \mathbb{Q} , haverá $y_1 \in E$ tal que $y < y_1 < r$, o que contradiz a hipótese de y ser cota superior de E . Portanto, só nos resta concluir que $r < y$ e, como consequência, que r é supremo de E .

(usando uma argumentação semelhante pode-se provar que r é ínfimo de D , porém a demonstração anterior já nos dá base para concluirmos a construção proposta.)

4.5. O CORPO ORDENADO COMPLETO

Ora, postulando a existência de elemento separador para todos os cortes de Dedekind, ou seja, incluindo valores não racionais a \mathbb{Q} , construímos um novo conjunto K onde dado um corte qualquer de elementos de K , o elemento separador desse corte é um elemento do próprio K . Como o conjunto “ E ” de um corte qualquer é um

subconjunto de K , e o elemento separador do corte (supremo de E) pertence a K , então este é dito um corpo ordenado completo. Basta, por fim, concluir que este é o próprio conjunto dos números reais.

Proposição 3. A menos de um isomorfismo, existe apenas um corpo ordenado completo, o corpo dos números reais.

Demonstração: seja K um corpo ordenado completo. Sejam $0'$ e $1'$ os elementos neutros da soma e da multiplicação em K , respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $n' = 1' + 1' + \dots + 1'$ (n vezes) e $(-n)' = -n'$. Definimos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow K$ por

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p'}{q'}, \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

e, se x for irracional, $f(x)$ será o supremo do conjunto

$$\left\{\frac{p'}{q'} \in K: \frac{p}{q} < x\right\}$$

que denotaremos por

$$\sup\left\{\frac{p'}{q'} \in K: \frac{p}{q} < x\right\}.$$

Mostraremos que f é um isomorfismo, isto é, um homomorfismo bijetor de \mathbb{R} sobre K . Primeiramente, sejam $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$ dois racionais cujas imagens por f são, respectivamente, $\frac{p'_1}{q'_1}$ e $\frac{p'_2}{q'_2}$. Daí,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p_1}{q_1}\right) + f\left(\frac{p_2}{q_2}\right) &= \frac{p'_1}{q'_1} + \frac{p'_2}{q'_2} \\ &= \frac{p'_1 \cdot q'_2 + p'_2 \cdot q'_1}{q'_1 \cdot q'_2} \\ &= f\left(\frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}\right) \\ &= f\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right). \end{aligned}$$

De forma semelhante,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{p_1}{q_1}\right) \cdot f\left(\frac{p_2}{q_2}\right) &= \frac{p'_1}{q'_1} \cdot \frac{p'_2}{q'_2} \\
&= \frac{p'_1 \cdot p'_2}{q'_1 \cdot q'_2} \\
&= f\left(\frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}\right) \\
&= f\left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2}\right).
\end{aligned}$$

Também, sendo x_1 e x_2 irracionais, temos

$$\begin{aligned}
f(x_1) + f(x_2) &= \sup \left\{ \frac{p'_1}{q'_1} \in K : \frac{p_1}{q_1} < x_1 \right\} + \sup \left\{ \frac{p'_2}{q'_2} \in K : \frac{p_2}{q_2} < x_2 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left(\frac{p'_1}{q'_1} + \frac{p'_2}{q'_2} \right) \in K : \left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \right) < (x_1 + x_2) \right\} \\
&= f(x_1 + x_2).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, vamos mostrar que $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)$. Note que,

$$\begin{aligned}
0 &= f(0) = f(x + (-x)) \\
&= f(x) + f(-x) \\
&\Rightarrow f(x) = -f(-x) \\
&\Rightarrow -f(x) = f(-x)
\end{aligned}$$

A partir disso, devemos analisar dois casos: $x_1 \cdot x_2 < 0$ e $x_1 \cdot x_2 > 0$. Quando x_1 e x_2 são ambos positivos, temos que

$$\begin{aligned}
f(x_1) \cdot f(x_2) &= \sup \left\{ \frac{p'_1}{q'_1} \in K : 0 \leq \frac{p_1}{q_1} < x_1 \right\} \cdot \sup \left\{ \frac{p'_2}{q'_2} \in K : 0 \leq \frac{p_2}{q_2} < x_2 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left(\frac{p'_1}{q'_1} \cdot \frac{p'_2}{q'_2} \right) \in K : 0 \leq \left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \right) < (x_1 \cdot x_2) \right\} \\
&= f(x_1 \cdot x_2).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, se $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$, temos

$$\begin{aligned}
f(x_1) \cdot f(x_2) &= -f(x_1) \cdot (-f(x_2)) \\
&= f(-x_1) \cdot f(-x_2) \\
&= \sup \left\{ \frac{p'_1}{q'_1} \in K : 0 \leq \frac{p_1}{q_1} < -x_1 \right\} \cdot \sup \left\{ \frac{p'_2}{q'_2} \in K : 0 \leq \frac{p_2}{q_2} < -x_2 \right\}
\end{aligned}$$

(e, como $-x_1$ e $-x_2$ são ambos positivos, pelo caso anterior)

$$\begin{aligned}
 &= \sup \left\{ \left(\frac{p'_1}{q'_1} \cdot \frac{p'_2}{q'_2} \right) \in K : 0 \leq \left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \right) < (-x_1 \cdot (-x_2)) \right\} \\
 &= \sup \left\{ \left(\frac{p'_1}{q'_1} \cdot \frac{p'_2}{q'_2} \right) \in K : 0 \leq \left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \right) < x_1 \cdot x_2 \right\} \\
 &= f(x_1 \cdot x_2).
 \end{aligned}$$

Por fim, se $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
 f(x_1) \cdot f(x_2) &= \sup \left\{ \frac{r'}{s'} \in K : \frac{r}{s} < x_1 \right\} \cdot \sup \left\{ \frac{p'_2}{q'_2} \in K : 0 \leq \frac{p_2}{q_2} < x_2 \right\} \\
 \Rightarrow -f(x_1) \cdot f(x_2) &= -\sup \left\{ \frac{r'}{s'} \in K : \frac{r}{s} < x_1 \right\} \cdot \sup \left\{ \frac{p'_2}{q'_2} \in K : 0 \leq \frac{p_2}{q_2} < x_2 \right\} \\
 \Rightarrow -f(x_1) \cdot f(x_2) &= \sup \left\{ \frac{p'_1}{q'_1} \in K : 0 \leq \frac{p_1}{q_1} < -x_1 \right\} \cdot \sup \left\{ \frac{p'_2}{q'_2} \in K : 0 \leq \frac{p_2}{q_2} < x_2 \right\}
 \end{aligned}$$

(e mais uma vez, como $-x_1$ e x_2 são ambos positivos)

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow -f(x_1) \cdot f(x_2) &= \sup \left\{ \left(\frac{p'_1}{q'_1} \cdot \frac{p'_2}{q'_2} \right) \in K : 0 \leq \left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \right) < -x_1 \cdot x_2 \right\} \\
 \Rightarrow -f(x_1) \cdot f(x_2) &= -\sup \left\{ \left(\frac{r}{s} \cdot \frac{p'_2}{q'_2} \right) \in K : \left(\frac{r}{s} \cdot \frac{p_2}{q_2} \right) < x_1 \cdot x_2 \right\} \\
 \Rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) &= \sup \left\{ \left(\frac{r}{s} \cdot \frac{p'_2}{q'_2} \right) \in K : \left(\frac{r}{s} \cdot \frac{p_2}{q_2} \right) < x_1 \cdot x_2 \right\} \\
 \Rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) &= f(x_1 \cdot x_2).
 \end{aligned}$$

Portanto, independente dos sinais de x_1 e x_2 , vale que $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)$.

Além disso, existe um real não negativo r tal que

$$\begin{aligned}
 \frac{p_1}{q_1} \leq \frac{p_2}{q_2} &\Rightarrow \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} + r \\
 &\Rightarrow f\left(\frac{p_2}{q_2}\right) = f\left(\frac{p_1}{q_1} + r\right) \\
 &\Rightarrow f\left(\frac{p_2}{q_2}\right) = f\left(\frac{p_1}{q_1}\right) + f(r)
 \end{aligned}$$

Observe que, se $r > 0$, então

$$f(r) = 1' + 1' + 1' + \dots 1' \text{ (r vezes)} > 0.$$

Logo

$$f\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \leq f\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Ainda,

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 &\Rightarrow x_2 = x_1 + r \\ &\Rightarrow f(x_2) = f(x_1 + r) \\ &\Rightarrow \sup\left\{\frac{p'_2}{q'_2} \in K: \frac{p_2}{q_2} < x_2\right\} = \sup\left\{\frac{p'_1}{q'_1} \in K: \frac{p_1}{q_1} < x_1 + r\right\}. \end{aligned}$$

Veja que os elementos do conjunto da direita são maiores ou iguais aos elementos de

$$\left\{\frac{p'_1}{q'_1} \in K: \frac{p_1}{q_1} < x_1 + r\right\}.$$

Em consequência, seus supremos também respeitarão essa ordem. Logo,

$$\sup\left\{\frac{p'_1}{q'_1} \in K: \frac{p_1}{q_1} < x_1\right\} = \sup\left\{\frac{p'_2}{q'_2} \in K: \frac{p_2}{q_2} < x_2\right\} \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

E, como pela definição $f(1) = 1'$, concluímos que f é um homomorfismo de corpos ordenados. Nos resta provar agora que f é bijetora. Veja:

$$\begin{aligned} p' = 1' + 1' + \dots 1' \text{ (p vezes)} &\Rightarrow p' = f(1) + f(1) + \dots f(1) \\ &\Rightarrow p' = f(1 + 1 + \dots 1) \\ &\Rightarrow p' = f(p), p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

pelo mesmo argumento, podemos afirmar que $q' = f(q)$, para $q \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{p'}{q'} &= p' \cdot \frac{1'}{q'} \Rightarrow \frac{p'}{q'} = f(p) \cdot \frac{1'}{f(q)} \\ &\Rightarrow \frac{p'}{q'} = f(p) \cdot \frac{f(1)}{f(q)} \\ &\Rightarrow \frac{p'}{q'} = f(p) \cdot f\left(\frac{1}{q}\right) \\ &\Rightarrow \frac{p'}{q'} = f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) \\ &\Rightarrow \frac{p'}{q'} = f\left(\frac{p}{q}\right). \end{aligned}$$

Também, se x' está em K , então dado $\frac{p'}{q'} \in K$, existem $\frac{p}{q}$ racional e x irracional tais que

$$x' = \sup \left\{ \frac{p'}{q'} \in K : \frac{p}{q} < x \right\},$$

em outras palavras, $x' = f(x)$. Portanto, f é sobrejetiva. Agora,

$$f\left(\frac{p_1}{q_1}\right) \neq f\left(\frac{p_2}{q_2}\right) \Rightarrow \frac{p'_1}{q'_1} \neq \frac{p'_2}{q'_2}$$

o que significa que ou $p'_1 \neq p'_2$ ou $q'_1 \neq q'_2$. Em todo caso, como $p'_1 = 1' + 1' + \dots + 1'$ (p_1 vezes), e $p'_2 = 1' + 1' + \dots + 1'$ (p_2 vezes), então se $p'_1 \neq p'_2$ então $p_1 \neq p_2$. Pela mesma razão, se $q'_1 \neq q'_2$ então $q_1 \neq q_2$. De qualquer maneira,

$$\frac{p'_1}{q'_1} \neq \frac{p'_2}{q'_2} \Rightarrow \frac{p_1}{q_1} \neq \frac{p_2}{q_2}.$$

Por fim, se x_1 e x_2 forem irracionais, com $f(x_1) = f(x_2)$, temos

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \frac{p'_1}{q'_1} \in K : \frac{p_1}{q_1} < x_1 \right\} &= \sup \left\{ \frac{p'_2}{q'_2} \in K : \frac{p_2}{q_2} < x_2 \right\} \\ \Rightarrow \sup \left\{ \frac{p'_1}{q'_1} \in K : \frac{p_1}{q_1} < x_1 \right\} - \sup \left\{ \frac{p'_2}{q'_2} \in K : \frac{p_2}{q_2} < x_2 \right\} &= 0' \\ \Rightarrow \sup \left\{ \left(\frac{p'_1}{q'_1} - \frac{p'_2}{q'_2} \right) \in K : \left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} \right) < (x_1 - x_2) \right\} &= 0'. \end{aligned}$$

Note que todos os elementos desse conjunto são menores ou iguais a zero, e como f preserva a ordem, podemos afirmar que

$$\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} \right) < 0,$$

isto é,

$$(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

o que nos leva a concluir que f é injetora. Logo, f é bijetora e é um isomorfismo de \mathbb{R} sobre K , o que conclui nossa demonstração. ■

Ora, da proposição que acabamos de demonstrar e da conclusão de que o conjunto de todos os cortes de Dedekind, munidos de seus respectivos elementos separadores, forma um corpo ordenado completo, podemos concluir que este é o próprio conjunto dos números reais, como enuncia o postulado a seguir.

Teorema 4.1. (Postulado de Dedekind) Existe um corpo ordenado \mathbb{R} , chamado corpo dos números reais, com $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, tal que todo corte em \mathbb{R} possui elemento separador.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

É possível apresentar os números reais aos alunos do ensino básico de mais de uma forma? No que foi apresentado neste trabalho de pesquisa, por meio das construções e das sequências didáticas é possível observar que o professor potencializar recursos no sentido de estruturar metodologias e aproximar a matemática que, em geral estuda-se na academia, para a matemática escolar, bem como para a matemática do cotidiano escolar do aluno (MOREIRA; DAVID, 2005).

Ao trabalhar com régua e compasso, ou usar cortes de Dedekind como ferramenta de ensino, pode-se mostrar aos estudantes que a matemática não se limita a regras e operações mecânicas, mas que possui uma grande diversidade de formas de ser estudada, seja com ferramentas concretas, criativas e/ou lógicas, que desafiam cada vez mais a produção de conhecimento matemático (CARRIÃO; POWELL; BORBA; D'AMBROSIO; FONSECA, 2010).

Logo, ao aplicar uma dessas construções (ou ambas) em sala de aula, espera-se que seja possível aproximar a matemática do ensino básico com a que é vista no ensino superior: mais dedutiva, mais descritiva, mais formal e com uma rica simbologia, despertando, assim, a curiosidade para o estudo dos números reais. Ademais, tornará mais simples a adaptação de um futuro estudante de matemática no curso, melhorando seu desempenho acadêmico.

Visando contribuir nesse sentido, este trabalho conta com um produto educacional que tem como objetivo detalhar a aplicação em sala de aula de duas sequências didáticas: uma que traz a construção algébrica e a outra que traz a construção geométrica de \mathbb{R} . Também, deseja-se fornecer nesse produto materiais como as sequências em si, materiais para a impressão e vídeos explicativos para que as aplicações dessas sequências possam ser realizadas em outras salas de aula.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AD INFINITUM. **Adição de cortes de Dedekind: conjuntos numéricos, parte 11.** Youtube, 23 de janeiro de 2024. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=hbclYDhPBI4&t=722s>. Acesso em 21 de mar. 2024.

AD INFINITUM. **Adição de cortes de Dedekind, parte 2: conjuntos numéricos, vídeo 12.** Youtube, 14 de maio de 2024. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=kFTwRYpERo&t=337s>. Acesso em 21 de mar. 2024.

AD INFINITUM. **Multiplicação de cortes de Dedekind: conjuntos numéricos, vídeo 13.** Youtube, 21 de maio de 2024. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gviNtiLbT5c&t=937s>. Acesso em 22 de mar. 2024.

ARAÚJO, Gleison Ricardo Roza de. **Um estudo sobre matemática financeira básica enfatizando a educação financeira de alunos do ensino médio.** PROFMAT, Universidade Federal de Roraima, 2024.

ÁVILA, Geraldo. Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 07. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/7/2.htm>. Acesso em: 21 de ago. 2024.

ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura.** 1ª edição. Editora Blucher, 2001.

AZEDO, Natália de Carvalho de. **O Número de Ouro e Construções Geométricas.** PROFMAT, Universidade Federal de Goiás, 2013.

BOMBELLI E OS NÚMEROS COMPLEXOS. **Fred Lopes**, 2025. Disponível em: <https://fredlopes.com.br/matematica/historia-da-matematica/bombelli-e-os-numeros-complexos/>. Acesso em: 17 de jan. de 2025.

CANTÃO, Renato. Galeria da fama. Biografia Augustin Louis Cauchy. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~sandra/CCA/history/cauchy/cauchy.html>. Acesso em: 18 de jan. de 2025.

CANTÃO, Renato. Galeria da fama. Biografia de Gottfried Wilhelm von Leibniz. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~sandra/CCA/history/leibniz/leibniz.html>. Acesso em: 18 de jan. de 2025.

CANTÃO, Renato. Galeria da fama. Biografia de Sir Isaac Newton . Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~sandra/CCA/history/newton/newton.html>. Acesso em: 18 de jan. de 2025.

CARRIÃO, Airton; POWELL, Arthur; BORBA, Marcelo; D'AMBROSIO, Ubiratan; FONSECA, Maria da Conceição. **Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. **História dos números complexos.** Instituto de Matemática e Estatística da USP. São Paulo, 2001.

DOWNING, lisa. George Berkeley. Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2011. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/berkeley/>. Acesso em 18 de jan. de 2025.

FÉLIX KLEIN. **Clubes de Matemática da OBMEP**, 2025. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/b_fklein/. Acesso em: 17 de jan. de 2025.

GIROLAMO CARDANO. **Clubes de Matemática da OBMEP**, 2025. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/b_girolamo-cardano/. Acesso em: 17 de jan. de 2025.

HEFEZ, Abramo. **Curso de álgebra, volume 1.** 1ª edição. Impa, 1997.

JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET. **Clubes de Matemática da OBMEP**, 2025. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/b_dirichlet/. Acesso em: 17 de jan. de 2025.

KUMÂYAMA, Hideo. Retificação de uma Circunferência e a Determinação Geométrica de π . **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 20. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/20/rpm1.htm>. Acesso em 13 de jan. 2025.

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1: Funções de uma variável**. 1ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise, vol. 1**. 15ª edição. IMPA, 2019.

LOPES, A. C. M.; SÁ, P. F. de. **Números Reais: Aspectos Históricos**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, [S. l.], v. 3, n. 9, p. 79–90, 2018. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/56>. Acesso em: 14 jul. 2024.

MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.S. A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte; Autêntica, 2005.

NICOLO FONTANA DE BRESCIA (TARTAGLIA). **Webpages**, 2025. Disponível em: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/renascenca/tartaglia.htm>. Acesso em: 17 de jan. de 2025.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. **MacTutor**. Biografia de Hugues Charles Robert Méray. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Meray/>. Acesso em: 18 de jan. de 2025.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. **MacTutor**. Biografia de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Weierstrass/>. Acesso em: 18 de jan. de 2025.

OS EDITORES DA ENCICLOPÉDIA BRITÂNICA. **Britannica**. Bibliografia de Brahmagupta. Disponível em: <https://www.britannica.com/science/Indian-mathematics/The-school-of-Madhava-in-Kerala>. Acesso em 18 de jan. de 2025.

PINEDO, Cristian José Quintina. História do número zero. **Tecnologia & humanismo**, Curitiba, v. 18, n. 26, p. 20-33, 2004. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rth/article/view/6206>. Acesso em 14 de mar. 2024.

PROFMAT. **A matemática Grega antes de Euclides**. Youtube, 02 de junho de 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=cjfX1w3rctQ&t=1373s>. Acesso em 02 de mai. de 2024.

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de história da matemática**. 2012.

PRZYGOCKI, Matheus Henry. **UNICENTRO**, 2025. Biografia de Joseph Fourier. Disponível em: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2018/06/29/joseph-fourier-1768-1830/>. Acesso em 17 de jan. de 2025.

PRZYGOCKI, Matheus Henry. **UNICENTRO**, 2025. Biografia de Joseph-Louis Lagrange. Disponível em: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2018/03/12/joseph-louis-lagrange1736-1813/>. Acesso em 17 de jan. de 2025.

SANTOS, Simone de Carvalho et al. **Uma construção geométrica dos números reais**. PROFMAT. Universidade Federal De Sergipe, 2015.

SANTOS, Eliane Coradi dos. **Números Reais e Corpos Ordenados Completos**. PROFMAT, Universidade Federal do Paraná, 2017

USP. Ecalculo, 2024. **História de Richard Dedekind**. Disponível em:

<http://ecalculo.if.usp.br/historia/dedekind.htm>. Acesso em: 04 de mar. de 2025.

NETO, Angelo Zanona. **UNICENTRO**, 2025. Biografia de Georg Cantor. Disponível em:

<https://www3.unicentro.br/petfisica/2024/09/13/georg-cantor-1845-1918/>. Acesso em 17 de jan. de 2025.

RUCKER, Rudy. **Britannica**. Informações científicas. Disponível em:

<https://www.britannica.com/science/infinity-mathematics/Physical-infinities>. Acesso em 17 de jan. de 2025.

WATSON, Richard A. **Britannica**. Bibliografia de René Descartes. Disponível em:

<https://www.britannica.com/biography/Rene-Descartes/Physics-physiology-and-morals>. Acesso em: 17 de jan. de 2025.