Sociedade Brasileira de Matemática - **SBM**
Universidade Federal do Acre - **UFAC**
Mestrado Profissional em Matemática - **PROFMAT**

Quase homomorfismos

JOACEMI DA SILVA CAVALCANTE RODRIGUES

RIO BRANCO – AC
2025

Joacemi da Silva Cavalcante Rodrigues

QUASE HOMOMORFISMOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na cidade de Rio Branco, Acre, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos

RIO BRANCO – ACRE
2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

R696q Rodrigues, Joacemi da Silva Cavalcante, 1979 -
Quase homomorfismos / Joacemi da Silva Cavalcante Rodrigues; orientador: Dr. José Ivan da Silva Ramos. – 2025.
66 f.: il.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Rio Branco, 2025.
Inclui referências bibliográficas e apêndice.

1. Funções. 2. Conjuntos. 3. Homomorfismo. I. Ramos, José Ivan da Silva (orientador). II. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Nádia Batista Vieira CRB-11º/882.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título da Dissertação: Quase Homomorfismos

Autor: Joacemi da Silva Cavalcante Rodrigues

Orientador: José Ivan da Silva Ramos

Dissertação aprovada como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Banca Examinadora:

- Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos (UFAC)
- Prof. Dr. Cleber Pereira (UFAC)
- Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez (UNIR)

DATA DA APROVAÇÃO: 4 de fevereiro de 2025.

BANCA EXAMINADORA:

Assinado Eletronicamente
Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos
Orientador
Universidade Federal do Acre (UFAC)

Assinado Eletronicamente
Prof. Dr. Cleber Pereira
Membro Interno
Universidade Federal do Acre (UFAC)

Assinado Eletronicamente
Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez
Membro Externo
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)

Documento assinado eletronicamente por **Tomás Daniel Menendez Rodriguez**, **Usuário Externo**, em 11/02/2025, às 18:49, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jose Ivan da Silva Ramos**, **Professor do Magisterio Superior**, em 14/02/2025, às 10:53, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Cleber Pereira**, **Professor do Magisterio Superior**, em 17/02/2025, às 07:13, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.ufac.br/sei/valida_documento ou click no link Verificar Autenticidade informando o código verificador **1553547** e o código CRC **EBBB413F**.

Referência: Processo nº 23107.004011/2025-32 SEI nº 1553547

AGRADECIMENTOS

Expresso minha mais profunda gratidão ao meu orientador, **Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos**, cuja paciência, dedicação e orientação foram indispensáveis ao desenvolvimento deste trabalho. Sua sabedoria, disponibilidade e apoio constante foram pilares fundamentais para a realização deste estudo.

Estendo meus sinceros agradecimentos à minha esposa, **Adriana Rodrigues**, por seu apoio incansável e por estar sempre ao meu lado, especialmente nos momentos em que pensei em desistir. Sua força e incentivo me deram coragem para seguir em frente e superar os desafios deste projeto.

Agradeço também ao **Me. Douglas Wilson**, meu companheiro de curso e parceiro de estudos, pela valiosa colaboração e amizade ao longo de toda a jornada acadêmica. Sua parceria e troca de conhecimentos foram fundamentais para o sucesso deste trabalho.

Todo trabalho intelectual é uma jornada sem fim, onde cada conclusão é apenas um ponto de reflexão, abrindo caminho para novos questionamentos e uma contínua busca pelo conhecimento.

RESUMO

Algumas questões envolvidas em Matemática podem ser respondidas por meio de funções especiais, agindo entre conjuntos não vazios. Nosso objetivo é estabelecer a definição de um *quase homomorfismo*, motivado pelos vários casos em que determinadas funções, úteis ao desenvolvimento de uma teoria, não estão distantes de um homomorfismo.

Palavras chave: Funções, conjuntos, operações e propriedades e homomorfismo.

ABSTRACT

Some questions involved in Mathematics can be answered through special functions, acting between non-empty sets. Our objective is to establish the definition of an almost homomorphism, motivated by the various cases in which certain functions, useful for the development of a theory, are not far from a homomorphism.

Keywords: Functions, sets, operations and properties and homomorphism.

Lista de Símbolos

$<$: menor do que.

$>$: maior do que.

$\leq$: menor do que ou igual a.

$\geq$: maior do que ou igual a.

$=$: igual a.

$\neq$: diferente.

$\forall$: para todo, qualquer que seja.

$\Rightarrow$: então, implica.

$\Leftrightarrow$: equivalente, se e somente se, se e só se.

∞: infinito (não é um número).

/: tal que.

$\exists$: existe.

$\nexists$: não existe.

$\in$: pertence a.

$\notin$: não pertence a.

$\subset$ e $\supset$: está contido e contém

$\subseteq$: subconjunto de ou igual a.

$\subsetneq$: subconjunto de e diferente de ou subconjunto próprio de.

$\not\subset$: não está contido.

$\cup$: união.

$\cap$: interseção.

#X: número de elementos do conjunto X.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$: conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, respectivamente.

$n\mathbb{Z} = \{nk \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$: conjunto dos múltiplos do número inteiro n.

$M_{mxn}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes de ordem mxn com entradas no corpo dos reais.

$M_n(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas em $\mathbb{R}$.

$\mathbb{F}_B^A$: conjunto de todas as funções que agem de A para B.

$\mathbb{F}(X)$: conjunto de todas as funções que agem de X em si mesmo.

Sumário

INTRODUÇÃO

A teoria dos conjuntos é um campo fundamental na matemática que desempenha um papel central em diversas áreas. Ela fornece as bases para a compreensão das relações e propriedades de grupos, números, espaços vetoriais e muitos outros objetos matemáticos. Uma das questões intrigantes que surgem no estudo de conjuntos é a noção de homomorfismo entre conjuntos. O conceito de homomorfismo implica em uma correspondência estrutural entre conjuntos, que pode ser fundamental para entender a relação entre diferentes coleções de elementos.

No entanto, é interessante observar que, embora dois conjuntos possam não ser homomórficos entre si, é possível que eles contenham subconjuntos que compartilhem essa característica. Esta observação levanta uma série de questões interessantes e desafia nossa compreensão da estrutura e da relação entre os conjuntos. Este trabalho busca explorar essa temática, analisando a ideia de conjuntos, homomorfismo e seus subconjuntos, aprofundando-se em exemplos, teoremas e aplicações.

O objetivo principal deste trabalho é examinar como a noção de homomorfismo pode ser aplicada na análise, identificando casos em que conjuntos não são homomórficos, mas possuem subconjuntos que compartilham essa propriedade. Além disso, investigaremos as implicações e aplicações desse fenômeno em diversas áreas da matemática. Por meio de exemplos concretos e teoremas relevantes, pretendemos ilustrar a importância e a aplicabilidade desse conceito, bem como sua relevância para a teoria dos conjuntos e áreas afins.

Ao final deste estudo, esperamos fornecer uma visão aprofundada e uma compreensão mais clara das relações entre conjuntos, homomorfismo e subconjuntos, destacando a riqueza e a complexidade inerentes a este campo da matemática, e suas aplicações para a resolução de problemas práticos.

O TCC que elaboramos está dividido em 2 capítulos. No primeiro momento descrevemos brevemente alguns conjuntos e relacionamos suas operações e propriedades. Incluímos, um parágrafo sobre determinantes e funções. Depois descrevemos brevemente o que é um *homomorfismo*.

No capítulo 2 tentaremos induzir a definição de *quase homomorfismo* que o leitor pode, juntamente com as nossas ideias, estabelecer efetivamente esse conceito.

Nossas considerações finais mostram que terminamos por estabelecer alguns caminhos para a definição de um quase homomorfismo que, rotineiramente aparece nos temas abordados pela Matemática básica.

CAPÍTULO 1: NOÇÕES PRELIMINARES

1.1 ALGUNS CONCEITOS LIGADOS À TEORIA DOS CONJUNTOS

A teoria dos conjuntos é um ramo da matemática que estuda os conjuntos, que são coleções de objetos. Ela foi desenvolvida no início do século XX por Georg Cantor e se tornou uma base fundamental da matemática moderna. Aqui estão algumas definições e conceitos-chave da teoria dos conjuntos para o desenvolvimento de nosso trabalho:

i) Conjunto: é uma coleção de objetos distintos, chamados de elementos. Os conjuntos são geralmente representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto.

ii) Elemento: é um objeto que faz parte de um conjunto. Se um elemento x *pertence* a um conjunto A, escrevemos $x \in A$. Caso contrário, se x *não pertence* ao conjunto A, escrevemos $x \notin A$.

iii) Igualdade de conjuntos: os conjuntos A e B não vazios são iguais se, e somente se, possuem exatamente os mesmos elementos. Isso é denotado por $A = B$.

iv) Subconjunto: um conjunto A é um *subconjunto* de um conjunto B (ou A está contido em um conjunto B) se todos os elementos de A também são elementos de B. Isso é denotado por $A \subset B$. Caso exista ao menos um elemento de A fora de B, anotamos $A \not\subset B$ que significa que A não está contido em B.

v) Conjunto vazio: o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$, é um conjunto que não possui elementos.

Observemos que não podemos afirmar que $\emptyset \not\subset B$, independentemente dos objetos que definem o conjunto B. Isso porque não temos como argumentar o contrário.

Podemos definir, ainda, a partir de dois conjuntos A e B, os seguintes conjuntos:

vi) União: a união de A com B é o conjunto que contém todos os elementos de A e todos os elementos de B. Isso é denotado por $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

vii) Interseção: a interseção de A com B é o conjunto que contém todos os elementos que são comuns a A e B. Isso é denotado por $A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}$.

viii) Diferença de conjunto: a diferença entre dois conjuntos A e B (nessa ordem) é o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B. Isso é denotado por $A\backslash B = \{x/x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Nessa ordem porque, em geral, $A\backslash B$ e $B\backslash A$ são distintos.

ix) Conjunto complementar: o complementar de um conjunto A em relação a um conjunto universo U (conjunto em que estão contidos todos os imagináveis conjuntos) é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a U e não pertencem a A. Isso é denotado por $A' = \{x/x \in U \text{ e } x \notin A\}$. Notemos que, se $A \subset B$, então $B\backslash A = A' = \{x/x \in B \text{ e } x \notin A\}$ que é o complementar de A em relação a B.

x) Conjunto das partes: $P(A) = \{X/X \subset A\}$, é o *conjunto das partes* de A, formado por todos os subconjuntos de A.

xi) Produto cartesiano: $A \times B = \{(a, b)/a \in A \text{ e } b \in B\}$, é o *produto cartesiano* entre A e B, formado pelos pares de elementos de A e B, nessa ordem.

Por fim, definimos:

xii) Conjuntos disjuntos: termo usado para dois conjuntos A e B tais que $A \cap B = \emptyset$.

Além dessas definições básicas dessa teoria, que serão úteis para as nossas argumentações, queremos considerar as operações definidas em um conjunto não vazio e as propriedades gerais que delas decorrem.

1.2 OPERAÇÕES DEFINIDAS EM CONJUNTOS E SUAS PROPRIEDADES

Relacionaremos algumas propriedades que usualmente são consideradas para uma operação que define a estrutura de um conjunto.

Definição 01: Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que uma operação $*$ está (*bem*) *definida* em A se, e somente se, $\forall\, x, y \in A$, vale que $x * y \in A$.

São exemplos de operações bem definidas em um conjunto não vazio: a operação de adição $+$ em $\mathbb{N}$, a união $\cup$ em $P(A)$, sendo A um conjunto não vazio; e a operação de multiplicação " $\cdot$ " em $\mathbb{Z}$.

Geralmente quando é definida uma regra de operacionalização em um conjunto não vazio A, surgem propriedades que terminam por definir a estrutura desse conjunto.

Daremos destaque para as propriedades que julgamos mais importantes na fundamentação do nosso trabalho.

Definição 02: Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Seja $*$ uma operação definida em A.

a) Dizemos que esta operação tem a *propriedade associativa* se, e somente se, $\forall\, x, y, z \in A$, valer que $x * (y * z) = (x * y) * z$.

b) Dizemos que esta operação tem a *propriedade comutativa* se, e só se, $\forall\, x, y \in A$, valer que $x * y = y * x$.

c) Dizemos que $e \in A$ é *elemento neutro* para a operação $*$ se, e somente se, $\forall\, x \in A$, valer que $x * e = e * x = x$.

d) Se a operação $*$ admite elemento neutro e, dizemos que um elemento a é *inversível* (ou *possui inverso*) em A com respeito a operação $*$ se, e somente se, $\exists\, a^{-1} \in A$, de modo que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Definição 03: Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Seja $*$ uma operação definida em A. Dizemos que, para essa operação, vale (m)

a) a *lei do cancelamento à esquerda* se, e somente se, $a * b = a * c \Longrightarrow b = c$.

b) a *lei do cancelamento à direita* se, e somente se, $b * a = c * a \Longrightarrow b = c$.

c) as *leis do cancelamento,* se, e somente se, valem as leis do cancelamento à esquerda e à direita.

Exemplo 01:

Considerando a operação de adição $+$, temos que 0 é o elemento neutro e todo elemento possui inverso (aditivo) no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Particularmente, temos $2^{-1} = -2$.

Considerando a operação de multiplicação $\cdot$, temos que 1 é elemento neutro e todo elemento não nulo possui inverso, no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Particularmente, temos $2^{-1} = -\frac{1}{2} \neq -2$.

Seja A um conjunto não vazio e $P(A)$ o conjunto das partes de A. É fácil ver que as operações ∩ (interseção) e ∪ (união) estão definidas em $P(A)$. Além disso, A e Φ são, respectivamente, o elemento neutro para as operações ∩ e ∪.

Definição (Potências inteiras) 04: Sejam A um conjunto não vazio, $*$ uma operação bem definida em A e e o elemento neutro para essa operação. Então, definimos as *potências inteiras* para um elemento $a \in A$, da seguinte maneira:

$$a^0 = e$$

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a * a$$

$$a^3 = a * a * a$$

.....

$$a^n = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n\ vezes};\ \forall\ 4 \leq n \in \mathbb{Z};\ \text{e}$$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * a^{-1} \dots * a^{-1}}_{n\ vezes};\ \forall\ 4 \leq n \in \mathbb{Z}$$

Exemplificando, calculemos algumas potências do número 4 com respeito à operação de adição em $\mathbb{Z}$, obtemos: $4^0 = 0$, $4^1 = 4 \cdot 1 = 4$, $4^2 = 4 + 4 = 4 \cdot 2 = 8$ e para todo inteiro $3 \leq n \in \mathbb{Z}$, temos $4^n = \underbrace{4 + 4 + \dots + 4}_{n\ vezes} = 4n$.

O "valor" da expressão a^n está diretamente ligado à operação $*$ e, no caso de seu expoente ser $n = 0$, por definição, temos $a^0 = e$; onde e é o elemento neutro para essa operação (caso ele exista).

Definição 05: Se A é um conjunto não vazio, $*$ uma operação bem definida em A, e essa operação admite e como elemento neutro, definimos que:

a) $a \in A$ é um elemento *idempotente* se, e somente se, $a^2 = a * a = a$.

b) $e \neq a$ é um elemento *nilpotente* se, e somente se, existe um primeiro número inteiro positivo c tal que $a^c = e$.

O conceito de idempotência será explorado em nosso capítulo 2. A nilpotência pode ser perceptível no conjunto das matrizes como mostra o Exemplo 01, em 1.3.3.

1.3 BREVES DESCRIÇÕES DE ALGUNS CONJUNTOS

Este parágrafo relaciona alguns conjuntos que comumente aparecem como assuntos da Matemática básica. Isso nos permitirá justificar as observações que faremos mais em frente.

1.3.1 conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais

A partir do conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -z, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, z, \dots\}$ dos números inteiros podemos construir um primeiro exemplo de um conjunto "mais completo", o conjunto das frações de $\mathbb{Z}$. Comumente denotado por $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \ / \ m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\right\}$, esse conjunto é denominado de conjunto dos *números racionais*.

Existem, no entanto, outros números que não podem ser expressos por meio de um quociente entre dois números inteiros. Se pensarmos um pouco sobre $\sqrt{2}$ podemos facilmente verificar que esse não é um número racional. Para fazer esta verificação, ou seja, que $\sqrt{2}$ é um número irracional, vamos usar o método da contradição (reductio ad absurdum). A ideia é supor o oposto, ou seja, que a raiz quadrada de 2 é um número racional e, em seguida, mostrar que essa suposição leva a uma contradição.

Portanto, suponha que $\sqrt{2}$ é um número racional. Isso significa que podemos escrever $\sqrt{2}$ na forma de uma fração irredutível, ou seja, na forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos sem fatores primos em comum, exceto 1.

Então, temos que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ e, elevando ambos os lados dessa igualdade ao quadrado, obtemos $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}$.

Multiplicando ambos os lados por n^2, temos $2 \cdot n^2 = \frac{m^2}{n^2} \cdot n^2 \Rightarrow 2 \cdot n^2 = m^2$.

Agora, podemos ver que m^2 é par e, se m^2 é par, então m também é par (o leitor pode facilmente verificar esse fato, também por contradição). Então, escrevendo $m = 2k$, onde k é um número inteiro positivo, temos que $2 \cdot n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Fazendo uma simples simplificação, temos que $n^2 = 2k^2$ também é par. Consequentemente, n é par e isso contradiz o fato de que m e n não têm fatores comuns além de 1.

Com isso, nossa suposição inicial de que $\sqrt{2}$ é um número racional está incorreta e resta que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Em geral, se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ não pode ser escrito como um quociente entre números inteiros. Portanto, o conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\}$, onde p é um número primo, é "maior" que o conjunto $\mathbb{Q}$.

Escolhendo p e p' dois números primos distintos (e pares desse tipo de número existem aos montes), os conjuntos $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ e $\mathbb{Q}[\sqrt{p'}]$ são também distintos. Claramente, maiores que $\mathbb{Q}$. Esse conjunto por sua vez é maior que $\mathbb{Z}$, que é maior que $\mathbb{N}$.

Com relação às operações usuais de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{Q}$, podemos listar uma quantidade satisfatória de propriedades. Valem quase todas as propriedades listadas na Definição 02, em 1.2, é que, com relação à multiplicação, o número 0 não possui inverso.

Pense em como definir em $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p}/a, b \in \mathbb{Q}\}$ operações de adição e multiplicação e que propriedades essas operações possuem.

O conjunto $\mathbb{R}$, denominado de *conjunto dos números* (*reais*) é a união do conjunto $\mathbb{Q}$ com o conjunto de todos os números irracionais. Comumente escrevemos o conjunto (diferença) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ para indicar o conjunto dos números irracionais.

Observação 01: As operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{R}$ gozam das propriedades listadas na Definição 02, em 1.2. Sendo que 0, o elemento neutro da adição não possui inverso multiplicativo.

Essas operações se ligam da seguinte forma: (**Distributividade da multiplicação em relação à adição**): $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, vale que $x(y + z) = xy + xz = yx + zx = (y + z)x$.

A abundância de inverso multiplicativo tem por

Consequência 01: Em $\mathbb{R}$, se x, y são tais que $xy = 0$, então vale que $x = 0$ ou $y = 0$.

Claro é que, se $0 \neq x \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$; então, existe x^{-1} e, desta forma, seguem as equivalências $xy = 0 \Leftrightarrow\ x^{-1}(xy) = x^{-1}0\ \Leftrightarrow (x^{-1}x)y = 0 \Leftrightarrow 1\ y = 0\ \Leftrightarrow y = 0$. Supondo que $y \neq 0$, os mesmos argumentos mostram que $x = 0$.

Em geral, se temos definidas uma operação de adição com elemento neutro 0 (zero) e uma operação de multiplicação em um dado conjunto não vazio A, dizemos que A *não possui divisores de zero* se, e somente se, dados elementos a e b em A, se $ab = 0$ então, $a = 0$ ou $b = 0$. Portanto, não existem divisores de zero em $\mathbb{R}$. Essa propriedade também é herdada pelos (sub) conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$.

Consequência 02: as únicas soluções da equação $x^2 = x$; no universo $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$, são 0 e 1.

De fato, temos $x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0$. E, claro, $x = 0$ é uma solução dessa equação. Além disso, se $x \neq 0$, em $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, existe o número x^{-1}, inverso multiplicativo de x e, podemos argumentar que,

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^{-1}x^2 = x^{-1}x \Leftrightarrow x^{2-1} = x^0 \Leftrightarrow x^1 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Várias outras propriedades e teorias estão relacionadas com conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Podemos encerrar essa descrição, incluindo o ordenamento dos números:

Observação 02: Vale que $\mathbb{R}$ contém $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\}$ e,

i) se $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, então $x + y \in \mathbb{R}_+^*$ e $xy \in \mathbb{R}_+^*$,

ii) se $x \in \mathbb{R}$, exatamente uma das possibilidades ocorre: $x \in \mathbb{R}_+^*$, $-x \in \mathbb{R}_+^*$ ou $x = 0$.

1.3.2 O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos

Os números complexos, historicamente, existem por duas razões principais, a saber: uma de natureza algébrica com a resolução da equação $x^2 + 1 = 0$, quando na Europa discutiam-se as "soluções impossíveis" de uma equação em torno dos números negativos e irracionais. Outra, com o desejo de criar um análogo aritmético do conceito de vetor, que surgiu dentro da Geometria e da Física, onde os números complexos aparecem como candidatos perfeitos para representar e permitir operar com vetores no plano.

Em $\mathbb{C} = \{z = x + yi; x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}, \text{onde } i^2 = -1\}$, estão bem definidas as operações de adição e multiplicação, de acordo com as regras abaixo.

Para todos $z = a + bi$ e $h = c + di$ em $\mathbb{C}$; definimos:

$+: z + h = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$

$\cdot : zh = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$

Definição 01: Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ elementos em $\mathbb{C}$. Então:

a) dizemos que o número complexo $i = 0 + i$ é a *unidade imaginária*;

b) os números reais $a = \text{Re}(z_1)$ e $b = \text{Im}(z_1)$ são, respectivamente, a *parte real* e a *parte imaginária* do número complexo z_1. A parte imaginária é a que acompanha a unidade imaginária i;

c) definimos $\bar{z_1} = a - bi$ como sendo o *conjugado* do número complexo z_1;

d) Diremos que os números complexos z_1 e z_2 são iguais, se e somente se, valer que $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ e $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$.

Observação 01: Seja $0 \neq z = a + bi \in \mathbb{C}$. Então, vale que $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ é o inverso multiplicativo de z.

Isso pode ser verificado da seguinte forma: seja $z^{-1} = x + yi$. Então, vale a condição $z^{-1}z = 1 = 1 + 0i$. Usando a definição de multiplicação em $\mathbb{C}$, obtemos $z^{-1}z = (x + yi)(a + bi) = (ax - by) + (bx + ay)i = 1 = 1 + 0i$. Pela igualdade definida no item d) da definição anterior, temos o pequeno sistema linear

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0' \end{cases}$$

nas variáveis x e y. Esse sistema é equivalente a

$$\begin{cases} a^2x - aby = a \\ b^2x + bay = 0. \end{cases}$$

Somando essas equações e usando que $0 \neq z = a + bi \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0$, obtemos que $(a^2 + b^2)x = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{a^2+b^2}$. Substituindo esse valor na 2ª equação, verificamos que $\frac{b^2a}{a^2+b^2} + bay = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{b^2a}{a^2+b^2}\frac{1}{ba} = \frac{-b}{a^2+b^2}$. Portanto, vale que, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$.

Exemplo 01: O inverso multiplicativo do número complexo $w = 4 - 7i$ é $w^{-1} = \frac{4}{65} + \frac{7}{65}i$.

Claro que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, já que para todo $r \in \mathbb{R}$, podemos escrever $r = r + 0i$. A ideia é a mesma de estender o conjunto dos números pela *unidade imaginária* $i = \sqrt{-1}$, obtendo $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$.

Observação 02: As operações de adição e multiplicação, definidas em $\mathbb{C}$, gozam das propriedades listadas na Definição 02, em 1.2. Sendo que 0, o elemento neutro da adição não possui inverso multiplicativo.

Essas operações se ligam da seguinte forma: (**Distributividade da multiplicação em relação à adição**): $\forall\, z, w, h \in \mathbb{C}$, vale que $z(w+h) = zw + zh = wz + hz = (w+h)z$.

A abundância de inverso multiplicativo, conforme a Observação 01 deste parágrafo, tem por

Consequência 01: Em $\mathbb{C}$, se z, w são tais que $zw = 0$; então, vale que z= 0 ou w= 0.

Claro é que, se $0 \neq z \in \mathbb{C}$, então, existe z^{-1} e, desta forma, seguem as equivalências $zw = 0 \Leftrightarrow\ z^{-1}(zw) = z^{-1}0\ \Leftrightarrow (z^{-1}z)w = 0 \Leftrightarrow 1\ w = 0\ \Leftrightarrow w = 0$. Supondo que $w \neq 0$, os mesmos argumentos mostram que $z = 0$.

Consequência 02: temos que as únicas soluções da equação $z^2 = z$, no universo $\mathfrak{U} = \mathbb{C}$, são $0 = 0 + 0i$ e $1 = 1 + 0i$.

De fato, temos $z^2 = z \Leftrightarrow z(z-1) = 0$. E, claro, $z = 0 + 0i$ é uma solução dessa equação. Além disso, se $z \neq 0 + 0i$, existe o número z^{-1}, inverso multiplicativo de z e, podemos argumentar que, $z^2 = z \Leftrightarrow\ z^{-1}\, z^2 =\ z^{-1}z \Leftrightarrow z = 1 + 0i$.

Uma forma concreta de estudarmos esses "números abstratos" é identificarmos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$. Claro, alguns fatos geométricos surgem imediatamente. Como nosso objetivo está centrado nos elementos idempotentes, definidos, neste capítulo, em 1.2, encerramos este parágrafo neste ponto.

1.3.3 O conjunto $\boldsymbol{M_{m\times n}(\mathbb{R})}$ das matrizes de ordem $\boldsymbol{m \times n}$ com entradas em $\mathbb{R}$

O presente parágrafo será dedicado a uma breve descrição do conjunto das matrizes reais. Seguiremos destacando algumas características de seus elementos, operações e propriedades que têm vínculo com as discussões que faremos. Começamos relembrando a seguinte

Definição 01: Digamos que m e n sejam dois números naturais não nulos. Definimos, assim, *matriz* de ordem m por n $(m \times n)$, a qualquer tabela de m linhas e n colunas, formada por números, os quais se chamam de *entradas da matriz.*

Usualmente, representamos uma matriz de ordem $m \times n$ por uma letra maiúscula de nosso alfabeto, da seguinte forma $A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$.

Toda matriz de ordem $m \times n$ é dita matriz retangular. Particularmente, as matrizes retangulares de ordens $1 \times n$ e $m \times 1$, são chamadas de *matriz linha* e *matriz coluna*, respectivamente.

Quando $m = n$, temos o caso de uma *matriz quadrada*, de ordem n (ou m). Denotaremos por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes retangulares sobre $\mathbb{R}$ e por $M_n(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes quadradas.

Algumas matrizes quadradas merecem destaque. Por exemplo, costumamos relacionar os tipos:

a) Matriz diagonal: é toda matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, cujas entradas a_{ij}'s são nulas para $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq n$.

b) Matriz triangular inferior: é toda matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, cujas entradas a_{ij}'s são nulas para $i < j$.

c) Matriz triangular superior: é toda matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, cujas entradas a_{ij}'s são nulas para $i > j$.

Definição 02: diremos que duas *matrizes* são *iguais* se, e somente se, elas possuem a mesma ordem e entradas correspondentes iguais.

Definição 03: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ elementos de $M_{m\text{x}n}(\mathbb{R})$. Então, podemos definir a seguinte operação de adição: $+: A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Observação 01: A operação de adição definida em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ goza das propriedades listadas na Definição 02, em 1.2. Sendo que $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$ é o elemento neutro da adição e $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ é o inverso aditivo da matriz A.

Definição 04: Consideremos as matrizes $A \in M_{m\times l}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{l\times n}(\mathbb{R})$. Podemos definir a seguinte operação de multiplicação:

$\cdot: AB = C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$; onde para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$, cada entrada de C é dada por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{il}b_{lj}$$

É preciso entender que essa operação de multiplicação é feita, em geral, tomando matrizes em conjuntos distintos e a matriz produto cai fora desses conjuntos. Claro, em $M_n(\mathbb{R})$ tudo fica acomodado.

Observação 02: Sejam A, B e C matrizes com entradas em $\mathbb{R}$ tais que os produtos indicados abaixo são possíveis de serem calculados. Então, valem:

$\mathbf{M_1}$: $A(B + C) = AB + AC$ (Distributiva à esquerda em relação à adição);

$\mathbf{M_2}$: $(A + B)C = AC + BC$ (Distributiva à direita em relação à adição);

$\boldsymbol{M_3}$: $A(BC) = (AB)C$ (Associatividade da multiplicação);

$\mathbf{M_4}$: *se* $A \in M_n(\mathbb{R})$, então $AI_n = I_nA = A$; onde $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$ (Existe elemento neutro).

Essa é uma matriz diagonal: $I_n = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$; onde, para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos $a_{ij} = 1$, se $i = j$ e $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Ela é denominada de *identidade* de ordem n.

Essa multiplicação, em geral não comutativa, exige que, se A e B são matrizes que comutam, ou seja, se $AB = BA$, então A e B são matrizes quadradas (de mesma ordem).

Observação 03: Diferentemente das propriedades da operação de multiplicação definida em $\mathbb{C}$, temos em $M_n(\mathbb{R})$ que:

a) se A e B são matrizes tais que $AB = 0$; então, em geral não vale que $A = 0$ ou $B = 0$.

b) as soluções da equação $X^2 = X$; em geral, não são somente O e I_n.

Para as matrizes não nulas $A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$; $\forall\, p, q \in \mathbb{R}$, e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, o produto que obtemos é $AB = 0$. Isso mostra que existem muitos divisores de zero em $M_2(\mathbb{R})$.

Agora, a matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$; $\forall\, s \in \mathbb{R}$, que não é a matriz nula e nem a matriz I_3, é tal que $E^2 = E$ e isso mostra que existem infinitos elementos idempotentes em $M_3(\mathbb{R})$.

Exemplo 01: A matriz $O \neq N = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ é tal que $O \neq N^2$ e $N^3 = 0$; ou seja, N é uma matriz nilpotente.

Definição 05: Uma matriz quadrada A de ordem n é *inversível* se, e somente se, existe uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Nesse caso, denotamos por $B = A^{-1}$, a inversa de A. Claro que a ordem de B é a mesma de A. Além disso, $B^{-1} = A$.

Exemplo 02: As matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ são tais que $AB = BA = I_{2\times 2}$. Ou seja, $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$. Então, a matriz B é a inversa de A, e vice-versa.

Encerraremos esse assunto listando algumas propriedades comumente relacionadas à existência da inversa (multiplicativa) de uma matriz. Isso merece destaque devido ao fato de que existem infinitas matrizes quadradas que não são inversíveis.

Observação 04: Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$; onde $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Então:

a) se existir A^{-1}, a inversa da matriz A, ela é única.

b) se A é inversível, A^{-1} é também inversível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) se A e B são inversíveis, AB também é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Inicialmente, se A é uma matriz inversível, com inversas B e C, então, vale que $AB = BA = AC = CA = I_n$ e, assim, $AC = I_n \Leftrightarrow BAC = BI_n \Leftrightarrow I_nC = B \Leftrightarrow C = B$.

Agora, se A^{-1} é inversível, existe uma matriz X para a qual $A^{-1}X = XA^{-1} = I_n$. Porém, temos que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ e o item a) diz que $(A^{-1})^{-1} = A$.

Usando a associatividade, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ e $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$. Então, AB é inversível com (única) inversa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definição 06: Seja $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ qualquer elemento em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. A *transposta* da matriz A é a matriz $A^t = \left[a_{ji}\right]_{m\times n}$ cujas linhas são as colunas de A.

Exemplo 02: A transposta de uma matriz coluna é uma matriz linha e, vice-versa. Matrizes diagonais são invariantes pela ação da transposta.

Encerramos este parágrafo listando propriedades que comumente são observadas quando aplicamos a transposta em matrizes.

Observação 05: Sejam A e B matrizes com entradas em $\mathbb{R}$ tais que as somas e os produtos indicados abaixo são possíveis de serem calculados. Então, valem e são de fácil verificação as seguintes propriedades:

P_1: $(A^t)^t = A$;

P_2: se $k \in K$, $(kA)^t = kA^t$;

P_3: $(A + B)^t = A^t + B^t$;

P_4: $(AB)^t = B^tA^t$.

1.3.4 O conjunto $\mathbb{Z}_n$ das classes residuais módulo n

Fixado um inteiro $2 \leq n \in \mathbb{Z}$, podemos definir uma *relação de equivalência*, denominada *congruência módulo* n, da seguinte forma:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y (\text{mod } n) \Leftrightarrow x - y = kn; \text{ onde } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}.$$

Como toda relação de equivalência, o *conjunto quociente* (de todas as classes de equivalência) $\mathbb{Z}/_{\equiv (\text{mod } n)} = \mathbb{Z}_n = \{\bar{x} \,/\, x \in \mathbb{Z}\}$ é uma partição do conjunto $\mathbb{Z}$.

Para ver os detalhes da construção da álgebra que esse conjunto oferece, o leitor pode consultar a referência bibliográfica [4], parágrafo 2.6 do capítulo 2; págs. 30, 31 e 32. Todas as afirmações que vamos incluir aqui são de fácil verificação.

Observação 01: O conjunto das classes determinadas pela relação $\equiv (\mathrm{mod}\, n)$ possui n elementos. Precisamente, temos $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{n-1}\}$ e podemos definir as seguintes operações de adição e multiplicação, de acordo com as regras abaixo.

Para todos $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_n$; definimos:

$+: \bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$.

$\cdot : \bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$.

Observação 02: A operação de adição definida em $\mathbb{Z}_n$ goza das propriedades listadas na Definição 02, em 1.2. Sendo que $\bar{0}$ é o elemento neutro da adição e $\overline{-x}$ é o inverso aditivo da classe $\bar{x}$.

Com relação à operação de multiplicação, valem as propriedades listadas na

Observação 03: Sejam $\bar{x}, \bar{y}$ e $\bar{z}$ elementos quaisquer em $\mathbb{Z}_n$. Então, valem:

$\boldsymbol{M_1}$: $\bar{x}(\bar{y}\bar{z}) = (\bar{x}\bar{y})\bar{z}$ (Associatividade);

$\boldsymbol{M_2}$: $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$ (Comutatividade);

$\mathbf{M_3}$: $\bar{1}\bar{x} = \bar{x}\bar{1} = \bar{x}$ (Existe elemento neutro).

Essas operações se ligam da seguinte forma: (**Distributividade da multiplicação em relação à adição**): $\forall\, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_n$, vale que $\bar{x}(\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} = \bar{y}\bar{x} + \bar{z}\bar{x} = (\bar{y} + \bar{z})\bar{x}$.

Observação 04: Diferentemente das propriedades da operação de multiplicação definida em $\mathbb{C}$, em $\mathbb{Z}_n$ podemos ter que:

a) se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são classes tais que $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$; em geral não valha que $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{y} = \bar{0}$.

b) as soluções da equação $\bar{x}^2 = \bar{x}$; em geral, não sejam somente $\bar{0}$ e $\bar{1}$.

Primeiramente, para as classes não nulas $\bar{2}$ e $\bar{3}$, em $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, o produto que obtemos é $\bar{2}\bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$. Isso mostra que existem divisores de zero em $\mathbb{Z}_6$.

Agora, a classe $\bar{3}$, que não é a classe $\bar{0}$ e nem a classe $\bar{1}$, é tal que $\bar{3}^2 = \bar{9} = \bar{3}$ e isso mostra que existem mais elementos idempotentes em $\mathbb{Z}_6$ do que em $\mathbb{C}$, por exemplo.

Observação 05: Quando é que em $\mathbb{Z}_n$ um elemento $\bar{x}$ é idempotente? É quando $x^2 = qn + x$; já que, passando a barra, temos $\bar{x}^2 = \overline{x^2} = \overline{qn + x} = \overline{qn} + \bar{x} = \bar{q}\bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$.

Exemplo 01: Em $\mathbb{Z}_{72}$ temos que $x^2 - x = 72q \Leftrightarrow x(x-1) = 72q$. Então, dado que $9(9-1) = 72 \cdot 1$ e $64(64-1) = 72 \cdot 56$, temos que, além $\bar{0}$ e $\bar{1}$, também são idempotentes os elementos $\bar{9}$ e $\overline{64}$ de $\mathbb{Z}_{72}$.

Encerramos as discussões deste parágrafo acreditando que o leitor também vai perceber que elas já são suficientes para justificar as observações do Capítulo 2, que envolve os elementos idempotentes de $\mathbb{Z}_n$.

1.3.5 O conjunto $P(\Omega) = \{X \,/\, X \subset \Omega\}$ e as operações união e interseção

Quando pensamos em escrever sobre os elementos idempotentes de um conjunto, quase deixamos de fora aqueles conjuntos mais gerais em que os divisores de zero existem em grandes quantidades ou aqueles conjuntos em que esse conceito não influencia na abordagem que queremos fazer logo em frente.

A equação $X^2 = X$, já no conjunto das matrizes, como mostramos no item b) da Observação 03, no parágrafo 1.3.3, pode possuir infinitas soluções, mostrando a abundância de elementos idempotentes em $M_2(\mathbb{R})$. O que também vai acontecer no conjunto que vamos definir a seguir.

Observação 01: Em $P(\Omega) = \{X \,/\, X \subset \Omega\}$ estão bem definidas as operações $\cup$ (união) e $\cap$ (interseção) (ver definições em vi) e vii), em 1.1, na pág. 13 deste Capítulo) e, além disso, vale a seguinte

Observação 02: As operações de união e interseção definidas em $P(\Omega)$ gozam das propriedades listadas na Definição 02, em 1.2. Sendo que Φ é o elemento neutro da união e Ω é o elemento neutro da interseção.

Essas operações se ligam da seguinte forma: (**Distributividade da união em relação à interseção**): $\forall\, X, Y, Z \in P(\Omega)$, vale que $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. Também vale que $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

Observação 03: Em $P(\Omega) = \{X \,/\, X \subset \Omega\}$ temos que:

a) se A e B são conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$); então, em geral não vale que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. E, por uma aceitável analogia, podemos ter divisores de zero em $P(\Omega)$.

b) as soluções das equações (1): $X^2 = X \cup X = X$ e (2): $X^2 = X \cap X = X$, não são somente $\emptyset$ e Ω. E temos, mais uma vez, abundância de elementos idempotentes, independentemente da escolha de uma dessas operações.

Primeiro, se $\Omega = \{a, b, c\}$, temos $P(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$ e para os conjuntos não vazios $A = \{b\}$ e $B = \{a, c\}$, a interseção é o conjunto $A \cap B = \emptyset$. Isso mostra que existem divisores de zero em $P(\Omega)$.

Agora, $\forall\, E \in P(\Omega)$, vale que $E^2 = E \cup E = E$ e $E^2 = E \cap E = E$ e isso mostra que existem muitos elementos idempotentes em $P(\Omega)$. Na verdade, independente da operação, seja união ou interseção, todos os elementos de $P(\Omega)$ são idempotentes.

1.4 DETERMINANTES

Não faremos um longo debate sobre esse assunto. A ideia é que seja compreendido o conceito e, diante de uma situação em que tenhamos que calcular o determinante de uma matriz quadrada, se possa decidir imediatamente como proceder para executar esse cálculo. Nesse sentido, relacionamos algumas propriedades essenciais e que podem encurtar os cálculos necessários para a obtenção desse número.

1.4.1 Formalização do conceito

O conceito de determinante envolve somas de produtos cujos fatores são as entradas da matriz. Isso significa que a ordem da matriz influi diretamente nesses cálculos.

Seja A uma matriz quadrada de ordem $1 \leq n \in \mathbb{N}$, com entradas em $\mathbb{R}$. Então, vale que:

i) se $n = 1$ e $A = [a_{11}]_{1x1}$, $\det(A) = \det([a_{11}]_{1x1}) = a_{11}$, é o determinante de A.

ii) se $n = 2$ e $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2}$, $\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ é o determinante de A.

Nesse caso, $\det(A)$ é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária de A.

iii) se $n = 3$ e $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{13} \end{bmatrix}_{3\times3}$, devido à regra de *Sarrus*, temos que

$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Esse número pode ser obtido através do seguinte esquema: *repetimos, à direita, as colunas 1 e 2 de A, somamos ao produto dos elementos da diagonal principal, os produtos dos cada três elementos que, em linha, ficam paralelos a essa diagonal e subtraímos desta soma, o produto dos elementos da diagonal secundária e os produtos dos cada três elementos que, em linha, ficam paralelos a essa diagonal.*

As afirmações feitas acima e o funcionamento de outras regras de cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem n, originalmente, se baseia nas *permutações* (sequências ou ordenações) que se pode obter com os n símbolos $1, 2, \cdots, n$.

Por exemplo, se $n = 2$, temos: $\delta_1 = (1\ 2)$, $\delta_2 = (2\ 1)$, que são as $2! = 2 \cdot 1 = 2$ permutações possíveis dos símbolos 1 e 2. Se $n = 3$, os símbolos $1, 2$ e 3 podem ser colocados nas seguintes $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ disposições: $\delta_1 = (1\ \ 2\ \ 3)$, $\delta_2 = (1\ \ 3\ \ 2)$, $\delta_3 = (3\ \ 2\ \ 1)$, $\delta_4 = (2\ \ 1\ \ 3)$, $\delta_5 = (3\ \ 1\ \ 2)$, $\delta_1 = (2\ \ 3\ \ 1)$.

Se n aumenta, o número de permutação a serem consideradas é muito grande e o cálculo do determinante da matriz fica cada vez mais penoso.

Se $n = 5$, já teremos $5! = 5.4.3.2.1 = 120$ permutações dos símbolos 1, 2 ,3, 4 e 5.

Imaginando que cada entrada da matriz participa no cálculo do seu determinante, esse cálculo fica cada vez mais penoso quando a ordem da matriz aumenta.

Antes de formalizarmos o conceito de determinante vamos definir alguns termos que podem ajudar a compreendermos melhor esse conceito.

Definição 01: Seja $\delta = (a_1 a_2 \cdots a_n)$ uma permutação de n símbolos. Então, definimos:

a) que uma *inversão* (ou *transposição*) é uma permutação de n símbolos na qual somente dois símbolos estão permutados.

b) que, estabelecida uma ordem para os símbolos $a_1, a_2, \cdots, a_n$, o *sinal* da permutação $\delta = (a_1 a_2 \cdots a_n)$ é dado por $\text{sin}(\delta) = (-1)^l$; onde l é o número de inversões observáveis na ordem dos símbolos $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Definição 02: Seja A uma matriz quadrada de ordem $1 \leq n \in \mathbb{N}$ com entradas em $\mathbb{R}$. Então, o determinante de A é dado por

$$\det(A) = \det\left(\left[a_{ij}\right]_{nxn}\right) = \sum_{\rho=1}^{n!} (-1)^l \, a_{1t_1} a_{2t_2} \cdots a_{nt_n} = \sum_{\rho=1}^{n!} (-1)^l \, a_{t_1 1} a_{t_2 2} \cdots a_{t_n n}.$$

Nessa formidável invenção destacamos que:

1) Em cada parcela, cada linha e cada coluna contribuem com um único fator.

2) l é o número de inversões observáveis na ordem dos índices de coluna.

3) O sinal de cada parcela depende do ‘‘número l de inversões’’ na ordem dos índices de coluna (ou do sinal de cada permutação desses índices).

4) ρ varia de 1 até $n!$ indicando que somamos as $n!$ parcelas, cada uma correspondente a uma permutação de n objetos índices das colunas de A.

Vamos voltar aos casos dos determinantes das matrizes de ordem 1, 2 ou, já mencionados anteriormente. No caso em que A tem ordem $n = 1$, temos

$$\det(A) = \det([a_{11}]_{1x1}) = \sum_{\rho=1}^{1!} (-1)^l \, a_{1t_1} = (-1)^0 a_{11} = a_{11}.$$

Se A tem ordem $n = 2$, os cálculos são $\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{1x1}\right) =$

$$\sum_{\rho=1}^{2!} (-1)^l \, a_{1t_1} a_{2t_2} = (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

A conhecida regra de Sarrus agora pode ser vista como uma forma de economizar os esforços que fazemos para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem $n = 3$, usando a definição. Os cálculos são:

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3}\right) = \sum_{\rho=1}^{3!} (-1)^{l} a_{1t_1} a_{2t_2} a_{2t_3} = \sum_{\rho=1}^{6} (-1)^{l} a_{1t_1} a_{2t_2} a_{2t_3} =$$

$$(-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} +$$

$$(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

1.4.2 Propriedades dos determinantes

Apresentaremos somente algumas propriedades que comumente são estudadas, mas que são suficientes para desenvolvermos cálculos com determinantes. Algumas são de imediata verificação quando olhamos para a definição 2, em 1.4.1.

Observação 01: Sejam A e B elementos em $M_n(\mathbb{R})$, com $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Então, valem as seguintes propriedades:

P_1: Se $a_{ij} = 0$, para algum $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ ou algum $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos $\det(A) = 0$.

P_2: Se A^t é a transposta de A, vale que $\det(A^t) = \det(A)$.

P_3: Se $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{1(i-1)2} & \cdots & a_{1(i-1)n} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$ é uma matriz obtida da matriz A ao multiplicarmos uma das linhas de A por um k em $\mathbb{R}$, vale que $\det(B) = k\det(A)$.

Isso também vale se multiplicarmos os elementos de uma coluna dessa matriz por um escalar.

P_4: Se B é obtida de A permutando duas de suas linhas, vale que $\det(B) = -\det(A)$.

Uma consequência dessa propriedade é que, se A possui duas linhas iguais, vale que $\det(A) = 0$.

P_5: Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{1(i-1)2} & \cdots & a_{1(i-1)n} \\ k_1 + l_1 & k_2 + l_2 & \cdots & k_n + l_n \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$, com k_r e l_s em $\mathbb{R}$ e r e s variando em $\{1, 2, \cdots, n\}$, vale que $\det(A) = \det(M) + \det(N)$; onde as matrizes são exatamente

$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{1(i-1)2} & \cdots & a_{1(i-1)n} \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$ e $N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{1(i-1)2} & \cdots & a_{1(i-1)n} \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_n \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

P_6: Vale que $= \det(AB) = \det(A)\det(B)$. Particularmente, "det" pode ser visto como um homomorfismo que age de $M_n(\mathbb{R})$ para $\mathbb{R}$, $\forall\ 1 \leq n \in \mathbb{N}$.

P_7: Se $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{1(i-1)2} & \cdots & a_{1(i-1)n} \\ ka_{h1} + a_{i1} & ka_{h2} + a_{i2} & \cdots & ka_{hn} + a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$, onde $k \in \mathbb{R}$ e h e i variam em $\{1, 2, \cdots, n\}$, com $h \neq i$, vale que $\det(B) = \det(A)$.

Essas propriedades são de imediata verificação! Note que em cada parcela da soma definida em 1.4.1 aparece um elemento de cada linha i e um elemento de cada coluna da matriz. Então, podemos justificar facilmente a validade de P_1 e P_3. Como na transposta de A suas próprias linhas viram colunas, A e A^t possuem o mesmo determinante. Ao trocarmos a posição entre duas linhas os índices de linha sofrem uma alteração e isso mexe uma vez no sinal de cada parcela que define o determinante da matriz. Isso prova P_4. Veja como os cálculos se desenvolvem quando a matriz tem ordem 3 para perceber a validade de P_5 e investigue como demonstrar a validade de P_6.

Que propriedades são suficientes para demonstrar a validade de P_7? O leitor pode ver que P_4 e P_5 são suficientes.

Reescrevendo, a partir da soma de Sarrus, o determinante de uma matriz A de ordem 3, pode ser colocado em função dos elementos de qualquer fila (linha ou coluna) dessa matriz. Por exemplo, temos, usando os elementos da linha 1,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Assim,

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}\det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{33} \end{bmatrix}_{2\times 2}\right) + a_{12}(-1)^{1+2}\det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{33} \end{bmatrix}_{2\times 2}\right)$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3}\det\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{2\times 2}\right).$$

Isso mostra também que os cálculos podem ser reduzidos para cálculos de determinantes de matrizes de ordem 2.

Olhando com cuidado você poderá perceber que, a partir da linha 2,

$$\det(A) = a_{21}(-1)^{2+1}\det\left(\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{2\times 2}\right) + a_{22}(-1)^{2+2}\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}_{2\times 2}\right)$$

$$+ a_{23}(-1)^{2+3}\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{2\times 2}\right).$$

E, se olhar novamente, você percebe que esse determinante também pode ser calculado se isolarmos os elementos das linhas 3 ou de qualquer coluna de A.

Exemplo 01: O determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ pode ser calculado imediatamente se usarmos a 3ª linha dessa matriz. Temos que

$$\det(M) = 1.(-1)^{3+3}\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2x2}\right) = 1.1.(1.4 - (-1).3) = 7.$$

Devido ao Matemático francês Pierre Simon Laplace, temos a seguinte

Observação 02: Seja A uma Matriz de ordem $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Então, vale que:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}),$$

para um qualquer i ou j no conjunto de índices $\{1, 2, \cdots, n\}$ e onde A_{ij} é a matriz obtida de A ao suprimirmos a linha i e a coluna j.

Se $n = 2$ ou $n = 3$ a demonstração pode ser obtida de forma direta por meio de pequenos cálculos. O leitor interessado na prova do caso geral poderá fazer uma consulta aos livros que tratam dessa teoria.

1.4.3 Determinante e a inversa de uma matriz

Com relação à operação de multiplicação de matrizes podemos considerar duas problemáticas. A primeira, de saber quando que uma matriz é inversível. A segunda, de saber qual é a inversa dessa matriz, caso ela seja inversível.

Observação 01: Seja S uma matriz de ordem n sobre o conjunto $\mathbb{R}$. Então:

a) se S é inversível, vale que $\det(S) \neq 0$.

b) se S é inversível com inversa S^{-1}, vale que $\det(S^{-1}) = \frac{1}{\det(S)}$.

Isso decorre imediatamente da equação $S^{-1}S = SS^{-1} = I_n$ e da propriedade P_6.

Definição 01: Consideremos o conjunto $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem n sobre $\mathbb{R}$.

a) Para cada par de índices $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, o escalar $\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$; onde A_{ij} é a matriz obtida de A ao suprimirmos a linha i e a coluna j, é chamado de *cofator* do elemento a_{ij}.

b) A matriz $\text{cof}(A_{ij}) = \begin{bmatrix} \text{cof}(a_{11}) & \text{cof}(a_{12}) & \cdots & \text{cof}(a_{1n}) \\ \text{cof}(a_{21}) & \text{cof}(a_{22}) & \cdots & \text{cof}(a_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{cof}(a_{n1}) & \text{cof}(a_{n2}) & \cdots & \text{cof}(a_{nn}) \end{bmatrix}_{n\times n}$ é denominada de *matriz cofatora* (ou matriz dos cofatores de A).

c) A matriz $\big(\text{cof}(A)\big)^t = \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} \text{cof}(a_{11}) & \text{cof}(a_{21}) & \cdots & \text{cof}(a_{n1}) \\ \text{cof}(a_{12}) & \text{cof}(a_{22}) & \cdots & \text{cof}(a_{n2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{cof}(a_{1n}) & \text{cof}(a_{2n}) & \cdots & \text{cof}(a_{nn}) \end{bmatrix}_{n\times n}$, transposta da matriz cofatora de A, é denominada de *matriz adjunta* de A.

Para os casos em que a ordem da matriz é pequena, relacionamos a seguir um método de obtenção da inversa de uma matriz que depende diretamente do seu determinante.

Observação 02: Seja A uma matriz quadrada de ordem $2 \leq n \in \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{R}$. Então, $\forall\, i, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ com $i \neq k$, vale que: $a_{i1}\text{cof}(a_{k1}) + a_{i2}\text{cof}(a_{k2}) + \cdots + a_{in}\text{cof}(a_{kn}) = 0$. Ou seja, a soma dos produtos dos elementos de uma linha pelos cofatores dos correspondentes elementos de outra linha de A é igual a zero.

A soma $a_{i1}\text{cof}(a_{k1}) + a_{i2}\text{cof}(a_{k2}) + \cdots + a_{in}\text{cof}(a_{kn})$ pode ser entendida como o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$, se, e somente se, $a_{ij} = a_{kj};\ \forall\, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Nesse caso, veja a propriedade P_4, vale que $\det(A) = a_{i1}\text{cof}(a_{k1}) + a_{i2}\text{cof}(a_{k2}) + \cdots + a_{in}\text{cof}(a_{kn}) = 0$.

Como consequência desse resultado, temos o seguinte método para a obtenção da inversa de uma matriz

Observação 03: Seja A uma matriz quadrada de ordem $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Então, se $\det(A) \neq 0$, vale que $\frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A) = \frac{1}{\det(A)}\big(\text{cof}(A)\big)^t = A^{-1}$.

$$\text{De } A\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \text{cof}(a_{11}) & \text{cof}(a_{21}) & \cdots & \text{cof}(a_{n1}) \\ \text{cof}(a_{12}) & \text{cof}(a_{22}) & \cdots & \text{cof}(a_{n2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{cof}(a_{1n}) & \text{cof}(a_{2n}) & \cdots & \text{cof}(a_{nn}) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix}_{n\times n} = \det(A) I_{\text{n}}, \text{ vemos que}$$

$A\text{Adj}(A) = \det(A)\, I_{\text{n}} \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A)\right) = I_{\text{n}}$ e concluímos que $\frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A)$ é a inversa da matriz A.

Desses resultados podemos concluir que A é inversível se, e somente se, valer que $\det(A) \neq 0$.

1.5 FUNÇÕES

As funções podem ser utilizadas para descrever fenômenos da natureza e relacionar objetos que formam as mais variadas estruturas estudadas pela Matemática.

Nossa abordagem neste parágrafo mostra algumas ideias gerais e indispensáveis à compreensão dos conceitos que estudaremos nos parágrafos seguintes.

Definição 01: Sejam X e Y conjuntos não vazios. Uma *função* (ou *transformação* ou *aplicação*) f de X em Y é uma lei que associa a cada elemento do conjunto X um único elemento do conjunto Y. Comumente escrevemos

$$f: X \longrightarrow Y$$

$$x \rightsquigarrow f(x)$$

para denotar uma função f de X em Y.

Na definição acima $X = D(f)$ é o *domínio* e $Y = CD(f)$ é o *contradomínio* da função f. Por $Im(f) = f(X) = \{f(x) \,/ x \in X\}$ denotamos o *conjunto imagem direta*, da função f, formada pelas transformadas de f.

Algumas funções recebem nomes especiais ou pela forma com que atuam nos elementos de seus domínios ou devido à estrutura algébrica que esses domínios apresentam.

Definição 02: Seja f uma função de X em Y. Dizemos que:

a) f é *sobrejetiva* se, e somente se, $f(X) = CD(f)$.

b) f é *injetiva* se, e somente se, $f(x) \neq f(y)$, sempre que $x, y \in X$ e $x \neq y$ se, e somente se, $f(x) = f(y)$ para $x, y \in X$, implicar em $x = y$.

Nos casos em que f é, ao mesmo tempo, sobrejetiva e injetiva, dizemos que f é *bijetiva*.

c) f é *igual a* g, sendo g uma função de Z em W se, e somente se, temos as seguintes igualdades: $X = Z, Y = W$ e $f(x) = g(x);\ \forall\, x \in X = Z$.

d) f é *par* se, e somente se, em X está definida uma operação de adição e $\exists - x \in X$, tal que, $f(x) = f(-x); \forall\, x \in X$.

e) f é *ímpar* se, e somente se, em X e Y estão definidas operações de adição e $\exists - x \in X$ e $-f(-x) \in Y$, tal que, $f(x) = -f(-x);\ \forall\, x \in X$.

f) f é *crescente* se, e somente se, X é ordenado por uma relação R_1, Y é ordenado por uma relação R_2 e $f(x)R_2f(y)$, sempre que $x, y \in X$ e xR_1y.

g) f é *decrescente* se, e somente se, X é ordenado por uma relação R_1, Y é ordenado por uma relação R_2 e $f(y)R_2f(x)$, sempre que $x, y \in X$ e xR_1y.

As definições de função par e função ímpar apresentadas acima dependem diretamente de uma operação de adição e da existência de inversos aditivos em seus domínios. Esses conceitos foram generalizados (ver [1]). Se X e Y não são conjuntos ordenados, então não servem como domínio ou contradomínio de uma função crescente ou decrescente.

Recomendamos que o leitor exercite sua experiência para relacionar alguns exemplos de funções que se encaixem nas definições que mencionamos acima.

Definição 03: Consideremos a função f definida de A para B e a função g definida de C para D. Suponhamos que $f(A) \subset C$ e que $g(C) \subset A$. Então, é natural construirmos, a partir das funções f e g, as funções

$$\begin{array}{rcl} g \circ f: A & \to & D \\ a & \rightsquigarrow & (g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} f \circ g: C & \to & B \\ c & \rightsquigarrow & (f \circ g)(c) = f\big(g(c)\big) \end{array}$$

respectivamente, *composta* da função g com a função f (nessa ordem) e a composta da função f com a função g (nessa ordem).

É essencial notar que as "exigências" de $Im(f) \subset C$ e $Im(g) \subset A$ evita dúvidas sobre a possibilidade de calcularmos $g(f(a))$ e $f(g(c))$.

Exemplo 01: Suponhamos $\mathbb{R} = A = B = C = D$ na definição acima. Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x + 1$, a função $g \circ f$ pode ser construída e sua lei de formação é dada por $g\big(f(x)\big) = -x^2 + 1$. Noutra ordem, $f\big(g(x)\big) = x^2 - 2x + 1$ é a lei de formação de $f \circ g$.

Esse exemplo mostra que, em geral, não podemos esperar que $g \circ f$ e $f \circ g$ coincidam. Nesse caso, a comparação $g\big(f(2)\big) = -3 \neq 1 = f\big(g(2)\big)$ é suficiente para mostrar que $g \circ f \neq f \circ g$.

Observação 01: Sejam f e g funções tais que podemos construir a composta $f \circ g$. Então vale que:

a) Se f e g são funções injetivas, então $f \circ g$ é uma função injetiva.

b) Se f e g são funções sobrejetivas e $D(f) = CD(g)$, então $f \circ g$ é uma função sobrejetiva.

Para o leitor, acreditamos que é imediato concluir a afirmação do item a). Para mostrarmos que $f \circ g$ é sobrejetiva, vamos considerar que $D(f) = A = CD(g) = D$. Sendo f sobrejetiva e $CD(f) = B = CD(f \circ g)$, vale que $\forall\, b \in B, \exists\, a \in A$ tal que $f(a) = b$. Mas, para algum d em D, temos $a = d$. Pela sobrejetividade de g, sendo $C = D(g)$, existe c em C, tal que $g(c) = d$. Segue, por transitividade da igualdade, que $(f \circ g)(c) = f\big(g(c)\big) = f(d) = f(a) = b$. Isso prova a sobrejetividade de $f \circ g$.

Definição 04: Seja f uma função bijetiva de X em Y. Então, podemos definir a função

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: Y & \to & X \\ y & \rightsquigarrow & f^{-1}(y) = x \end{array}$$

onde x é o único elemento em X tal que $f(x) = y$.

A função f^{-1} é a *inversa* f, no sentido de que $f \circ f^{-1} = i_Y$ é a identidade em Y e $f^{-1} \circ f = i_X$ é a identidade em X. Nesse caso, dizemos que f é *inversível* (ou *invertível*) sendo f^{-1} a sua inversa. Claro que, assim, f^{-1} é inversível com inversa $(f^{-1})^{-1} = f$.

As funções inversíveis fazem parte de uma classe especial de funções que, em muitos casos, podem nos auxiliar a entender uma dada estrutura algébrica a partir de outra. Mas nem tudo é imediato. Garantir a existência da inversa de uma função pode ser, em muitos casos, menos trabalhoso que exibir a lei de formação dessa função.

É natural pensarmos em fixar dois conjuntos X e Y, não vazios e considerar o conjunto $\mathcal{F}_Y^X = \{f: X \longrightarrow Y / \ f$ é uma função de X em $Y\}$, de todas as funções que atuam de X para Y.

Se valer a inclusão $Y \subset X$, então $\circ$, a operação composição de função, está definida em $\mathcal{F}_Y^X$, ou seja, $\forall\, f, g \in \mathcal{F}_Y^X$, podemos calcular $f\big(g(x)\big)$ e $g\big(f(x)\big)$ e, ambas, $f \circ g$ e $g \circ f$ atuam de X para Y.

Se $*$ é uma operação definida em Y, então ela induz uma operação $*$ no conjunto $\mathcal{F}_Y^X = \{f: X \longrightarrow Y / \ f$ é uma função de X em $Y\}$ e as propriedades dessa operação também vale para a operação induzida em $\mathcal{F}_Y^X$.

Exemplo 02: Em geral, não valem as leis do cancelamento (ver Definição 03, em 1.2) para a operação composição de função. Pondo $X = Y = \mathbb{R}$, podemos considerar, em $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}$, as funções f, g e h, definidas por $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x$ e $h(x) = -x$. Assim, além de $D(f \circ g) = D(f \circ h) = \mathbb{R}$ e $CD(f \circ g) = CD(f \circ h) = \mathbb{R}$, temos que $f\big(g(x)\big) = x^2 - 1 = f\big(h(x)\big), \forall\, x \in \mathbb{R}$. Portanto, temos $f \circ g = f \circ h$, mas, claro, g não coincide com h.

Exemplo 03: Suponhamos agora que $A \subset C$, $B \subset D$, na definição 3, aqui em 1.5, e que em D está definida uma operação $+$ de adição e uma operação $\cdot$ de multiplicação. Então, é bastante natural definirmos as funções

$$\begin{array}{rcl} g + f\colon A & \to & D \\ a & \rightsquigarrow & (g+f)(a) = g(a) + f(a) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} f \cdot g\colon A & \to & D \\ a & \rightsquigarrow & (f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a) \end{array}$$

respectivamente, a função *soma* e a função *produto* das funções f e g (nessa ordem).

Claro que, se a adição e a multiplicação definidas em D são comutativas, valem as igualdades $g + f = f + g$ e $f \cdot g = g \cdot f$, agora, em $\mathcal{F}_D^A$.

Exemplo 04: Também podemos construir o conjunto $\mathbb{R}\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}$, definimos a função

$$\begin{array}{rcl} \lambda f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{array}$$

Em geral, desde que possamos multiplicar um número por um objeto de Y, podemos definir o conjunto $\mathbb{R}\mathcal{F}_Y^X = \{\lambda f \,/\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } f \in \mathcal{F}_Y^X\}$.

1.5.1 Homomorfismos

O conceito de homomorfismo é bastante usado na Álgebra abstrata para descrever uma relação entre duas estruturas algébricas. Portanto, é comum que esse tipo de função aparece quando desenvolvemos estudos sobre grupos, anéis ou espaços vetoriais.

A palavra homomorfismo é de origem grega. É um combinado das palavras “homos” que significa "mesmo" e “morphe” que significa "formato". Os homomorfismos são funções especiais que nos permitem comparar dois conjuntos nos quais operações como a adição e a multiplicação estão definidas. Vamos exemplificar isso, mostrando que, de fato, $\mathbb{C}$ e o plano $\mathbb{R}^2$ possuem a mesma estrutura algébrica.

Definição 01: Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que $*$ é uma operação bem definida em X e $\square$ é uma operação bem definida em Y.

Dizemos que uma função

$$\begin{aligned} \varphi: X &\longrightarrow Y \\ x &\rightsquigarrow \varphi(x) \end{aligned}$$

é um homomorfismo se, e somente se, $\forall\, a, b \in X$, vale que $\varphi(a * b) = \varphi(a) \square \varphi(b)$.

Se as operações $*$ e $\square$ forem operações de adição é comum dizer que φ é um homomorfismo aditivo e que φ é um homomorfismo multiplicativo, se $*$ e $\square$ forem operações de multiplicação. Contudo, existem homomorfismos que agem transformando somas em produtos e, vice-versa. Exemplos conhecidos são as funções elementares

$$exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \quad \text{e} \quad ln: \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$r \rightsquigarrow exp(r) \qquad\qquad r \rightsquigarrow ln(r)$$

Um homomorfismo injetivo é denominado de *monomorfismo*. Se for sobrejetivo é denominado *epimorfismo*. Se for bijetivo é denominado *isomorfismo*.

Observação 1: Se φ é um isomorfismo de X em Y, valem as seguintes propriedades:

a) Se e é o elemento neutro para uma operação $*$ definida em X, e' o elemento neutro para uma operação $\square$ definida em Y para a qual valem as leis do cancelamento, conforme a definição 3 em 2.1, então $\varphi(e) = e$'.

b) Se x^{-1} é o inverso de um elemento x em X, então $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

Podemos escrever $e * e = e$. Daí vem que $e' \square \varphi(e) = \varphi(e) = \varphi(e * e) = \varphi(e) \square \varphi(e)$; já que φ é um homomorfismo. Cancelando $\varphi(e)$ em ambos os membros da igualdade, vemos que $\varphi(e) = e$'.

Agora, sendo $x * x^{-1} = e$, vale que $\varphi(x * x^{-1}) = \varphi(e)$. Como φ é um homomorfismo, conforme o que provamos anteriormente, $\varphi(e) = e$', vem que $\varphi(x) \square \varphi(x^{-1}) = e$'. Isto mostra que $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

Exemplo 01: Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b)\ /\, a, b \in \mathbb{R}\}$, munido das seguintes operações: $\forall\, (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$,

$+: (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$\therefore (a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

É fácil ver que para essas operações definidas em $\mathbb{R}^2$, valem as mesmas propriedades das operações da adição e da multiplicação definidas em $\mathbb{C}$. Além disso, a função $\begin{matrix}\delta: \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ z=a+bi & \rightsquigarrow & \delta(z=a+bi)=(a,b)\end{matrix}$ é um isomorfismo.

Primeiramente, $\forall\, a+bi, c+di \in \mathbb{C}=D(\delta)$, se $\delta(a+bi)=\delta(c+di)$, vale que $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c$ e $b=d$. Isso mostra que $a+bi=c+di$ e, assim, δ é injetiva.

Para toda dupla (a,b) em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=CD(\delta)$, $\exists$ um número complexo $z=a+bi$ em $\mathbb{C}=\mathrm{D}(\delta)$, tal que $\delta(z=a+bi)=(a,b)$. Portanto, δ é sobrejetiva.

Por fim, temos $\delta\big((a+bi)+(c+di)\big)=\delta\big((a+c)+(b+d)i\big)=(a+c,b+d)=(a,b)+(c,d)=\delta(a+bi)+\delta(c+di); \forall\, a+bi, c+di \in \mathbb{C}=D(\delta)$; ou seja, δ é um homomorfismo aditivo. E, com relação a operação de multiplicação, temos também que $\delta\big((a+bi)(c+di)\big)=\delta\big((ac+bd).(ad+bc)i\big)=(ac-bd,ad+bc)=(a,b)(c,d)=\delta(a+bi)\delta(c+di)$, para quaisquer $a+bi, c+di$ em $\mathbb{C}=D(\delta)$. Daí, δ é também um homomorfismo multiplicativo. Isso mostra que $\mathbb{C}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$, o que indicamos por $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$.

Nessas argumentações admitimos conhecida a definição de igualdade entre os vetores de $\mathbb{R}^2$. Elas mostram que os objetos de $\mathbb{C}$ têm uma forma mais concreta, vistos exatamente como vetores do plano.

No capítulo seguinte vamos relacionar vários homomorfismos com o intuito de explicar quão próximos eles podem estar de determinadas funções.

CAPÍTULO 2: QUASE HOMOMORFISMOS

Este capítulo está organizado de maneira que mostra a lógica de nossa decisão em tentar registrar a definição dessas funções, que beiram as ações de várias funções especiais, os homomorfismos.

Primeiramente, listamos alguns homomorfismos que comumente aparecem nos textos importantes, alguns que vão além da Matemática em nível intermediário. O passo seguinte foi listar algumas funções que, a menos de alguns ajustes, são também homomorfismos. Por fim, sugerimos uma definição de um quase homomorfismo, esperando que isso seja estabelecido de maneira efetiva.

2.1 EXEMPLOS DE HOMOMORFISMOS

Para efeito ilustrativo, aproveitando as descrições feitas no capítulo anterior, apresentaremos exemplos de homomorfismos que agem naqueles conjuntos que foram minimamente descritos.

Exemplo 01: São homomorfismos as funções definidas a seguir.

i) Seja t um número fixo em $\mathbb{N}$. A função

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \rightsquigarrow & f(n)=t^n \end{array}$$

é tal que, $\forall\, a,b\in\mathbb{N}$, temos $f(a+b)=t^{a+b}=t^a\cdot t^b=f(a)\cdot f(b)$

ii) Seja t um número fixo em $\mathbb{Z}$. A função

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ z & \rightsquigarrow & f(z)=tz \end{array}$$

é tal que, $\forall\, a,b\in\mathbb{Z}$, temos $f(a+b)=t(a+b)=ta+tb=f(a)+f(b)$

iii) A função "inclusão"

$$\begin{array}{rcl} \phi:\mathbb{R} & \to & \mathcal{R}=\{z=x+yi/\ x\,,y\in\mathbb{R}\ e\ y=0\in\mathbb{R}\ \ i=\sqrt{-1},\text{com } i^2=-1\}\subset\mathbb{C} \\ r & \rightsquigarrow & \phi(r)=r+0i \end{array}$$

é tal que $\phi(a+b)=(a+b)+0i=(a+0i)+(b+0i)=\phi(a)+\phi(b)$ e $\phi(a\cdot b)=(a\cdot b)+0i=(a+0i)\cdot(b+0i)=\phi(a)\cdot\phi(b)$, $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$.

Nos exemplos a seguir, incluiremos mais uma forma concreta de olharmos para o conjunto dos números complexos, apresentaremos um isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e um subconjunto de matrizes quadradas de ordem 2. Em 1.5.1, no exemplo 1 já mencionamos que $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ são isomorfos.

Exemplo 02: Mais homomorfismos vemos nas funções definidas a seguir.

i) As funções

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1\colon \mathbb{R} & \to & \mathcal{R}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} / x \in \mathbb{R} \right\} \\ x & \rightsquigarrow & \varphi_1(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcl} \varphi_2\colon \mathbb{R} & \to & \mathcal{R}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}_{2\times 2} / x \in \mathbb{R} \right\} \\ x & \rightsquigarrow & \varphi_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}_{2\times 2} \end{array} \quad \text{e}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_3\colon \mathbb{R} & \to & \mathcal{R}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}_{2\times 2} / x \in \mathbb{R} \right\} \\ x & \rightsquigarrow & \varphi_3(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}_{2\times 2} \end{array}$$ são homomorfismos aditivos e multiplicativos.

Explicando, φ_3 é tal que $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, vale que

$$\varphi_3(a+b) = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}_{2\times 2} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}_{2\times 2} = \varphi_3(a) + \varphi_3(b).$$

Além disso, vale também que

$$\varphi_3(ab) = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}_{2x2} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}_{2x2} = \varphi_3(a)\varphi_3(b).$$

Que essas funções são bijetivas, também é claro, elas são isomorfismos e, portanto, existem 3 cópias de $\mathbb{R}$ dentro de $M_2(\mathbb{R})$.

ii) Existe um isomorfismo entre $\mathbb{C}$ e um subconjunto $\mathcal{C}$ de $M_2(\mathbb{R})$. Obviamente, temos que ter $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{C}$, para algum $i = 1,2,3$, uma das cópias de $\mathbb{R}$, definidas no item anterior. A função, neste exemplo, é

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon \mathbb{C} & \to & \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2\times 2} / a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ z = a + bi & \rightsquigarrow & \psi(z = a + bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2\times 2} \end{array}$$

Isso mostra, por composição de funções, que $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C}$ também são isomorfos.

iii) Fixando $1 < n \in \mathbb{N}$ e $\bar{k}$ em $\mathbb{Z}_n$, a função

$$\begin{array}{rcl} l\colon \mathbb{Z}_n & \to & \mathbb{Z}_n \\ m & \rightsquigarrow & l(m) = \bar{k}m \end{array}$$

é um homomorfismo aditivo: $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}_n$, vale que

$$l(m+n) = \bar{k}(m+n) = \bar{k}m + \bar{k}n = l(m) + l(n).$$

Além disso, se $\bar{k}$ é idempotente, conforme definição 5, em 1.2, l também é um homomorfismo multiplicativo: $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}_n$, vale que

$$l(mn) = \bar{k}(mn) = \bar{k}^2(mn) = \bar{k}\bar{k}(mn) = \bar{k}\bar{k}mn = \bar{k}m\bar{k}n = \left(\bar{k}m\right)\left(\bar{k}n\right) = l(m)l(n).$$

Veja [2], caso interesse conhecer mais exemplos em que os elementos idempotentes de um conjunto permitem a construção desses tipos de homomorfismos.

iv) Consideremos as operações $\cup$ (união) e $\cap$ (interseção) em $P(\Omega) = \{X \,/\, X \subset \Omega\}$, mesmo sendo Ω um conjunto muito "pequeno". Fixemos um elemento M em $P(\Omega)$. Então, as funções

$$\begin{array}{rcl} \xi\colon P(\Omega) & \to & P(\Omega) \\ X & \rightsquigarrow & \xi(X) = M \cup X \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \delta\colon P(\Omega) & \to & P(\Omega) \\ X & \rightsquigarrow & \delta(X) = M \cap X \end{array}$$

são homomorfismos. A escolha de M é livre, pois todos os elementos em $P(\Omega)$ são idempotentes. Assim, $\xi(A \cup B) = M \cup (A \cup B) = M^2 \cup (A \cup B) = M \cup M \cup (A \cup B) = M \cup M \cup A \cup B = M \cup A \cup M \cup B = (M \cup A) \cup (M \cup B) = \xi(A) \cup \xi(B), \forall\, A, B \in P(\Omega)$.

Também, temos $\delta(A \cap B) = M \cap (A \cap B) = M^2 \cap (A \cap B) = M \cap M \cap (A \cap B) = M \cap M \cap A \cap B = M \cap A \cap M \cap B = (M \cap A) \cap (M \cap B) = \delta(A) \cap \delta(B), \forall\, A, B \in P(\Omega)$.

Devido a Alfred Binet (1857-1911), temos um importante homomorfismo multiplicativo para o estudo do determinante de uma matriz. Vamos inclui-lo aqui!

v) Consideremos o conjunto $M_n(\mathbb{R})$, com $1 \leq n \in \mathbb{N}$, descrito em 1.3.3. Então, a função

$$\begin{array}{rcl} det\colon M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ X & \rightsquigarrow & det(X) = \displaystyle\sum_{\rho=1}^{n!} (-1)^l\, x_{1t_1} x_{2t_2} \cdots x_{nt_n} \end{array}$$

conforme a Definição 02, em 1.4.1, é tal que, $det(AB) = det(A)det(B), \forall\, A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Um bom exercício é mostrar que essa relação é verdadeira. Principalmente pela sua importância para o estudo das matrizes e pelo fato curioso dela ter sido estabelecida

por um pedagogo que firmou carreira numa área da Medicina. O caso $n = 2$ deve ser o primeiro a ser investigado.

Esse foi o último homomorfismo relacionado para este parágrafo. O leitor, certamente, até esta parte do trabalho, usando de suas habilidades e experiências em Matemática básica, já pode fazer uma própria lista de outros tantos exemplos de homomorfismos.

2.2 FUNÇÕES QUE NÃO SÃO HOMOMORFISMOS

Uma função pode não ser um homomorfismo por pouca coisa. Isso pode ficar claro depois dos exemplos que vamos relacionar neste parágrafo.

Exemplos: Não são homomorfismos as funções listadas nos itens abaixo.

i) Relembremos a definição de módulo de um número real a, dada por

$$|a| = \begin{cases} a, \text{se } a \geq 0 \\ \\ -a, \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

Temos que

$$\begin{array}{rccc} |\ \ |: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & |x| \end{array}$$

não é um homomorfismo aditivo: em geral, se $a, b \in \mathbb{R}$, vale que $|a + b| \neq |a| + |b|$. Pense, por exemplo, no caso em que $a = -5$ e $b = 8$.

ii) Se Ω é um conjunto finito, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \#: P(\Omega) & \to & \mathbb{N} \\ X & \rightsquigarrow & \#X \coloneqq \text{cardilalidade de } X \end{array}$$

Em geral, se $A, B \in P(\Omega)$, temos que $\#(A \cup B) \neq \#A + \#B$. Então, olhando para as operações $\cup$ e $+$, definidas, respectivamente, em $P(\Omega)$ e $\mathbb{N}$, # não é um homomorfismo.

iii) Considerando que E é o espaço amostral de algum evento aleatório, a função de probabilidade

$$\begin{array}{rccc} p: E & \to & \mathbb{R} \\ X & \rightsquigarrow & p(X) \coloneqq \text{probabilidade de } X \text{ ocorrer} \end{array}$$

não é um homomorfismo: em geral, se $A, B \in E$, temos que $p(A \cup B) \neq p(A) + p(B)$. Então, olhando para as operações $\cup$ e $+$, definidas, respectivamente, em E e $\mathbb{R}$, p não é um homomorfismo.

iv) A função

$$\begin{array}{rcl} t: M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ X & \rightsquigarrow & t(X) = X^t \coloneqq \text{transposta da matriz } X \end{array}$$

não é um homomorfismo: em geral, se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, temos $t(AB) = (AB)^t \neq A^t B^t = t(A)t(B)$. Portanto, t não é um homomorfismo multiplicativo.

Encerramos esta lista com mais um exemplo que relaciona as matrizes quadradas e, que chamou a nossa atenção para a definição que queremos estabelecer.

v) Consideremos o conjunto $M_n(\mathbb{R})$, com $1 \leq n \in \mathbb{N}$, descrito em 1.3.3. Então, a função

$$\begin{array}{rcl} det: M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ X & \rightsquigarrow & det(X) = \sum_{\rho=1}^{n!} (-1)^l \, x_{1t_1} x_{2t_2} \cdots x_{nt_n} \end{array}$$

é tal que, em geral, se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$; ou seja, det não é um homomorfismo aditivo.

Mais uma vez, comentamos que, o leitor, certamente, já pode fazer uma própria lista de outros tantos exemplos de não homomorfismos.

O próximo parágrafo, então será onde faremos o nosso julgamento de como poderia ser definido um quase homomorfismo.

2.3 QUASE HOMOMORFISMOS

Vamos comentar os exemplos do parágrafo anterior, propondo ajustes para que as funções, então, sejam homomorfismos.

Comentando o item i).

Se considerarmos o conjunto $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ ou $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$, vemos que as funções restrições

$$\begin{array}{rccc} |\ |_{/_{\mathcal{P}}}: & \mathcal{P} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & |x|_{/_{\mathcal{P}}} = |x| \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} |\ |_{/_{\mathcal{N}}}: & \mathcal{N} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & |x|_{/_{\mathcal{N}}} = |x| \end{array}$$

são homomorfismos aditivos.

Essencialmente, **reduzimos o domínio da função módulo**, de duas maneiras, de forma que a partir de sua definição obtivéssemos dois homomorfismos aditivos.

Podemos dizer que temos na função módulo um ***quase homomorfismo*** aditivo?

Existe outra maneira de, a partir dessa função, definirmos um "novo" homomorfismo? Sim! Um fato conhecido é que

$$\begin{array}{rccc} |\ |: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & |x| \end{array}$$

é um homomorfismo multiplicativo. Então, basta mudar a operação de adição para a multiplicação definida em $\mathbb{R}$.

Seria isso, então, um ***quase homomorfismo***? Uma função que com a **troca das operações definidas em seus domínios e contradomínios** passa a ser um homomorfismo?

Comentando o item iii).

Basta trocar $P(\Omega)$ por E, no conjunto $L = \{M \in P(\Omega) / \forall\, Y \in P(\Omega), M \cap Y = \emptyset\}$ do comentário anterior. Temos que

$$\begin{array}{rccc} \#_{/_J}: & L & \to & \mathbb{N} \\ & X & \rightsquigarrow & \#_{/_J}(X) = \#(X) \end{array}$$

é um homomorfismo em que $J = \{M \in E / \forall\, Y \in E, M \cap Y = \emptyset\}$.

Os mesmos comentários feitos com relação ao item ii) podem ser lembrados para esse caso em iii).

Comentando o item iv).

Em $M_n(\mathbb{R})$, também temos uma operação de adição definida. Em 1.3.3, a propriedade P_3, na Observação 05, mostra que se fizermos a **troca das operações definidas no domínio e contradomínio** da função t, teremos um homomorfismo.

Mas, além disso, se considerarmos a função restrição

$$t_{/_A}: A \rightarrow M_n(\mathbb{R})$$
$$X \rightsquigarrow t_{/_A}(X) = t(X) = X^t \coloneqq \text{transposta da matriz } X$$

onde, $A = \{T \in M_n(\mathbb{R}) / \forall\, D \in M_n(\mathbb{R}), TD = DT\}$, a multiplicação de matrizes está definida em A. Claro que $A \neq \emptyset$, temos $D_n(\mathbb{R}) = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}) / x_{ij} = 0, \text{se } i \neq j\right\} \subset M_n(\mathbb{R})$.

Agora, a função $t_{/_A}$ é um homomorfismo multiplicativo, devido o **ajuste feito no domínio** de t.

Comentando o item v).

Pelo Item v), no Exemplo 02 deste parágrafo, devido a Binet, det é um homomorfismo multiplicativo. Agora, ao invés de **trocarmos as operações de adição em $\boldsymbol{M_n}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$**, pelas respectivas operações de multiplicação, podemos convenientemente **ajustar o domínio** no nosso exemplo de não homomorfismo, no item v).

Consideremos o conjunto $G = \{X \in M_n(\mathbb{R}) / det(X) = 0\} \subset M_n(\mathbb{R})$. É fácil ver que a adição usual de matrizes não está definida em G. Mas, dentro de G, **podemos escolher o subconjunto** de $M_n(\mathbb{R})$,

$$G_k = \left\{X \in G / x_{ij} = k x_{fj}, \text{com } i, f \in \{1,2,\cdots,n\}, i \neq f, j \in \{1,2,\cdots,n\} \text{ e } k \text{ fixo em } \mathbb{R}\right\}$$

É de fácil verificação que a adição usual de matrizes não está definida em G_k. Além disso, a função

$$det_{/_{G_k}}: G_k \rightarrow \mathbb{R}$$
$$X \rightsquigarrow det_{/_{G_k}}(X) = det(X) \sum_{\rho=1}^{n!} (-1)^l\, x_{1t_1} x_{2t_2} \cdots x_{nt_n}$$

é tal que, $\forall\, A, B \in G_k, det(A + B) = 0 = 0 + 0 = det(A) + det(B)$; ou seja $det_{/_{G_k}}$ é um homomorfismo aditivo. Aqui, $det_{/_{G_k}}$ é uma espécie de função nula.

Por tudo que discutimos e se pode perceber, sugerimos a seguinte

Definição: Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que $*$ é uma operação bem definida em X e $\square$ é uma operação bem definida em Y.

Dizemos que uma função

$$\eta : M \longrightarrow Y$$
$$m \rightsquigarrow \eta(m)$$

é um ***quase homomorfismo*** se, e somente se, uma das condições são satisfeitas $\eta = \varphi_{/_M}$ é um homomorfismo, quando fazemos a restrição de uma função

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$
$$x \rightsquigarrow \varphi(x),$$

que não é um homomorfismo, ao subconjunto M, conveniente escolhido em $D(\varphi) = X$, no qual a operação $*$ também está (bem) definida.

$\eta = \varphi$ passa a ser um homomorfismo, quando substituímos as operações $*$ ou $\square$, respectivamente, definidas em X ou em Y.

Perceba que nas funções já mencionadas, a **função exponencial não é um homomorfismo** aditivo: se $a, b \in \mathbb{R}$, em geral, $exp(a + b) \neq exp(a) + exp(b)$ Mas, será homomorfismo, se considerarmos a multiplicação em $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$. Pelo item ii) da nossa definição acima, temos que, aditivamente,

$$exp\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$$
$$r \rightsquigarrow exp(r)$$

é um ***quase homomorfismo***.

A **função logaritmo não é um homomorfismo** multiplicativo: se $a, b \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, em geral, $ln(ab) \neq ln(a)ln(b)$ Mas, será homomorfismo, se considerarmos a adição em $\mathbb{R}$. Pelo item ii) da nossa definição acima, temos que, multiplicativamente,

$$ln\colon \mathbb{R}_+\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$r \rightsquigarrow ln(r)$$

é um ***quase homomorfismo***.

Esses exemplos justificam o "ou" colocado no item ii) da definição acima. Você já é capaz de relacionar outros exemplos?

Considere Ω um conjunto finito e pense nas funções

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}\colon P(\Omega),\cup & \to & P(\Omega),\cup \\ X & \rightsquigarrow & \mathcal{C}_\Omega(X) \coloneqq \text{complementar de } X \text{ em } \Omega. \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{C}\colon P(\Omega),\cap & \to & P(\Omega),\cap \\ X & \rightsquigarrow & \mathcal{C}_\Omega(X) \end{array}$$

Esses são dois ***quase homomorfismos***. Faça os ajustes e obtenha dois homomorfismos para comprovar isso.

As abordagens que fizemos serão comentadas mais uma vez nas discussões feitas na próxima seção deste trabalho. Muitas coisas podem ser sugeridas a posteriori. Mas, acreditamos que a ideia de se estabelecer a definição de um ***quase homomorfismo*** já tem a nossa contribuição.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossas abordagens, os ajustes feitos garantem a manutenção das leis de formação das funções. Adotamos "diminuição" de seus domínios e a troca das operações definidas em seus domínios ou contradomínios para que se perceba um ***quase homomorfismo*** em uma dada função.

Existem outras maneiras de uma lei de formação de uma função participar na construção de um homomorfismo. Compondo, somando e multiplicando funções podemos obter "outras" funções que podem ser especiais, que sejam um homomorfismo.

Você pode tentar compor, somar e multiplicar duas funções que não são homomorfismos e obter homomorfismos. Assim, ser levado a concluir que ***ser quase homomorfismo*** é uma propriedade de funções dois testável.

No universo $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}$ de todas as funções reais, se f e g poderiam ser denominados ***quase homomorfismo*** se, e somente se, uma das funções $f \circ g$, $f + g$ ou fg é homomorfismo. Claro que você escolhe de saída que f e g não são simultaneamente homomorfismo ou f e g não são homomorfismo. Não deve ser uma escolha difícil.

Mais geral, seria definir da seguinte forma: Sejam $\Phi \neq \mathrm{S}$ um conjunto e $*$ uma operação definida em S, que induz uma operação $\circledast$ em $\mathcal{F}_S^S = \{f: S \longrightarrow S/$ f é uma função$\}$. Então, para não homomorfismos simultâneos ou não homomorfismos $f, g \in \mathcal{F}_S^S$, eles serão ***quase homomorfismos*** se, e somente se,

$$f \circledast g: \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{S}$$

$$x \rightsquigarrow f \circledast g(x) = f(x) * g(x)$$

é um homomorfismo.

Exemplo: As funções (constantes)

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r \rightsquigarrow f(r) = 4 \qquad \text{e} \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r \rightsquigarrow g(r) = -4$$

são tais que f e g não são homomorfismos e

$$f + g = \mathcal{O}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r \rightsquigarrow \mathcal{O}(r) = f(r) + g(r) = 4 + (-4) = 0$$

é o homomorfismo identicamente nulo.

Tentamos considerar um exemplo de contagem através da função

$$\begin{array}{rcl} \#: P(C) & \to & \mathbb{N} \\ X & \rightsquigarrow & \#X \coloneqq \text{cardilalidade de } X \end{array}$$

e até fizemos uma atividade prática de contagem mas não podemos incluí-la na lista dos homomorfismos, tão pouco na lista dos quase homomorfismos. Para funcionar como um homomorfismo, restringimos essa função a contagem dos elementos de uma união de conjuntos disjuntos. Como um quase homomorfismo, construímos

$$L = \{M \in P(\Omega) / \forall\, Y \in P(\Omega), M \cap Y = \emptyset\}$$

porém, ele não é fechado para a operação $\cup$: se X e $Y \in L$, claro que $(X \cup Y) \cap M = (X \cap M) \cup (Y \cap M) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$. Porém, ao relacionarmos X ou Y com $X \cup Y$, temos $(X \cup Y) \cap X = X$ ou $(X \cup Y) \cap Y = Y$.

Dessa forma, não podemos considerar $\#_{/_L}$ para definir um quase homomorfismo conforme o item ii) 2.3.

Uma ideia que não levamos em diante foi a de mudar a lei de formação de uma função, no intuito de obter um homomorfismo, isso não teria esforço algum.

Encerramos este TCC anexando uma sequência didática que foi usada na rotina de algumas aulas de Matemática, na Escola estadual EJORB -Escola José Ribamar Batista, na cidade de Rio Branco, no estado do Acre.

Pudemos observar que o entendimento do conceito de ***quase homomorfismo***, também por parte dos alunos, segue a lógica de sabermos reconhecer as propriedades que faltam na caracterização de um homomorfismo e a habilidade de se fazer ajustes convenientes. A contagem dos elementos da união de dois conjuntos finitos e a probabilidade da união de eventos, nossos exemplos em ii) e iii), no parágrafo 2.2, foram compreendidos quase que de imediato. Outros ***quase homomorfismos*** não puderam ser relacionados sem uma prévia descrição de alguns dos conjuntos, o que antecipadamente prevemos e fizemos em nosso capítulo inicial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Bezerra, Marcos V. A.; Funções Pares e Ímpares (Generalização de Conceitos); TCC - PROFMAT (Mestrado em Mestrado em Rede Nacional em Matemática); SBM; 2016;

[2] Courant, R.; Cálculo Diferencial e Integral; Editora Globo; RS; 1970.

[3] Domingues, Hygino H. e Iezzi, G. Álgebra Moderna; Ed. Atual; 2003.

[4] Gonçalves, A.; Introdução à Álgebra; Projeto Euclides; IMPA; RJ; 2001.

[5] Silva, Carlos A. Dantas da; Homomorfismos e Elementos Idempotentes de um Conjunto; TCC - PROFMAT (Mestrado em Mestrado em Rede Nacional em Matemática); SBM; 2023;

APÊNDICE

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: QUASE HOMOMORFISMO

UM EXEMPLO PARA DISCUTIR O CONCEITO DE QUASE HOMOMORFISMO

Recurso Educacional orientado pelo prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos e apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Acre (UFAC), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre

Joacemi da Silva Cavalcante Rodrigues
José Ivan da Silva Ramos

Apresentação

Este trabalho visa facilitar a compreensão e dar destaque aos conceitos de homomorfismo e quase homomorfismo que aparecem no estudo dos temas da Matemática básica do Ensino Médio. Ele é vinculado a dissertação de mestrado intitulada "QUASE HOMOMORFISMO", apresentada como requisito para a conclusão do curso de mestrado em rede nacional (PROFMAT).

A proposta é tornar esses conceitos mais acessíveis e compreensíveis para estudantes do Ensino Médio, promovendo uma integração entre a prática e a teoria no currículo escolar. A introdução desses tópicos visa, não apenas aprimorar o conhecimento dos alunos, mas também, estimular o pensamento crítico e analítico, melhorando suas habilidades para estudos futuros em Matemática e áreas afins.

No contexto do Ensino Médio, a abordagem de temas como homomorfismo e quase homomorfismo pode ser feita por meio de uma sequência didática cuidadosamente planejada, para promover um aprendizado significativo e, portanto, uma ferramenta que o professor poderá utilizar na apresentação desses conceitos.

A sequência didática aqui desenvolvida se inicia com os conceitos mais básicos, depois avança para exemplos mais elaborados, associados com atividades práticas, buscando facilitar a compreensão, promover o desenvolvimento de habilidades e do raciocínio lógico e abstrato.

Além disso, a reflexão contínua, integrada a este recurso educacional, pode permitir que o professor adapte sua abordagem conforme o progresso individual do estudante, garantindo um melhor índice do aprendizado. Assim, a aplicação desses conceitos pode ser incentivada ao longo do processo.

Por fim, este recurso educacional, não apenas visa socializar os conceitos de homomorfismo e quase homomorfismo com os alunos do Ensino Médio, mas também, busca estimular o interesse dos estudantes por temas mais complexos, que, com certeza, fazem parte de sua formação, direta ou indiretamente.

Ao professor

Caro professor,

Para utilizar este recurso educacional de maneira eficaz é essencial realizar uma revisão minuciosa de todos os conceitos envolvidos nesta sequência, principalmente o conceito de homomorfismo. Além disso, é importante considerar o nível de conhecimento da turma, planejar estratégias e o momento certo para introduzir o novo conceito de QUASE HOMOMORFISMO, envolvendo os alunos com atividades práticas e exemplos que facilitem a compreensão dele.

Antes de iniciar esse processo, você pode realizar uma avaliação diagnóstica, o que pode ajudar a definir a melhor abordagem a ser feita.

Estabelecer expectativas claras, antecipar dificuldades potenciais e incentivar o engajamento dos alunos, desde o início, são ações fundamentais para uma implementação eficaz desta sequência didática.

Objetivos:

Compreender o conceito de homomorfismo de maneira significativa.

Compreender o conceito de quase homomorfismo.

Reconhecer funções que sejam quase homomorfismos.

Adquirir habilidades para ajustar funções para quase homomorfismos.

Introdução

Sejam todos muito bem-vindos!

Hoje, teremos uma aula especial e única, onde vamos explorar dois conceitos matemáticos que, apesar parecerem mais avançados, podem ser compreendidos neste nível de ensino: homomorfismo e quase homomorfismo, o segundo tipo de função, pode significar uma novidade.

Nosso objetivo é apresentar esses conceitos de maneira que estudantes do Ensino Médio possam entendê-los claramente e ver como eles podem aparecer em aplicações da Matemática.

Começaremos com uma breve revisão de conceitos fundamentais, como funções e operações básicas, para garantir que todos estejam prontos para entender o que vem a seguir. No segundo momento, abordaremos a definição de quase homomorfismo, utilizando exemplos simples e práticos, de como ajustar as funções de modo que tenhamos um homomorfismo.

Essa aula foi cuidadosamente planejada para que todos os estudantes pudessem adquirir e construir conhecimentos sólidos acerca desse novo conceito. Será um momento de aprendizado valioso e esperamos que todos aproveitem ao máximo.

Vamos iniciar nossa jornada no mundo dos homomorfismos!

Revisando conceitos básicos

Como já foi dito, antes de falar sobre homomorfismos, se faz necessário que todos os estudantes estejam confortáveis com os conceitos de funções e operações básicas definidas em um conjunto não vazio. Iniciaremos, então, com uma breve revisão sobre esses conteúdos para avaliar o nível de entendimento dos alunos e esclarecer algumas dúvidas que ainda possam existir. Isso será importante para que o aluno entenda que um homomorfismo é uma função que age de maneira especial entre dois conjuntos.

O conceito de função:

Uma função f é uma relação entre dois conjuntos não vazios, A e B, em que cada elemento do conjunto A, está associado a exatamente um elemento do conjunto B.

Representamos uma função pela expressão

$$\begin{array}{rcl} f: A & \to & B \\ x & \rightsquigarrow & f(x) = y \end{array}$$

e temos que:

i) o *domínio* de f, representado por $D(f) = A$, é o conjunto onde a função age, transformando cada $x \in A$ em um elemento $y \in B$.

ii) o *contradomínio* de f, representado por $CD(f) = B$, é o conjunto que contém todas as transformadas de f.

iii) O conjunto imagem de f, representado por $Im(f) = f(A)$, é o subconjunto do contradomínio que contém todos os valores transformados pela função. Em símbolos, temos $Im(f) = f(A) = \{f(x) \,/\, x \in A\}$

Exemplo 01: Tomaremos os conjuntos $A = B = \mathbb{N}$ e a função

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \rightsquigarrow & f(x) = 2x \end{array}$$

que relaciona cada número natural a um número natural par. Nesse caso, temos $D(f) = CD(f) = \mathbb{N}$ e $Im(f) = f(\mathbb{N}) = \{0, 2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$, respectivamente, o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função f.

Exemplo 02: Observemos a conhecida função

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & f(x) = x^2 \end{array}$$

Para facilitar o entendimento de como essa função age, observemos a tabela abaixo:

x	$f(x) = x^2$	y
-3	$f(-3) = (-3)^2 = 9$	9
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	4
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	1
$-\frac{1}{2}$	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$f(0) = 0^2 = 0$	0
1	$f(1) = 1^2 = 1$	1
$\sqrt{2}$	$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$	
2	$f(2) = 2^2 = 4$	4
3	$f(3) = 3^2 = 9$	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$f(n) = n^2$	n^2

Podemos observar que para cada um dos elementos x, que escolhemos no domínio de f, há um único elemento correspondente em seu contradomínio. A função, em si. tem como imagem todo conjunto dos números reais não negativos, ou seja,

$$Im(f) = f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}_+.$$

Operações definidas em um conjunto

Definição: Uma operação $*$ é bem definida em um conjunto $S \neq \emptyset$ se, e somente se, vale que $a * b \in S, \forall\, a, b \in S$.

Exemplos comuns de operações (bem) definidas em um conjunto incluem:

Adição em $\mathbb{Z}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$, vale que $a + b \in \mathbb{Z}$.

Multiplicação em $\mathbb{R}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, vale que $a\, b \in \mathbb{R}$.

Queremos destacar os conceitos de

União: a união do conjunto A com o conjunto B é o conjunto que contém todos os elementos de A e B. Isso é denotado por $A \cup B = \{x / x \in A$ ou $x \in B\}$.

Interseção: a interseção de A com B é o conjunto que contém todos os elementos que são comuns a A e B, ou seja, $A \cap B = \{x / x \in A$ e $x \in B\}$.

Agora, vamos incluir em nossos exemplos essas operações.

Seja $\emptyset \neq \Omega$ um conjunto. Em $P(\Omega) = \{X \,/\, X \subset \Omega\}$ estão bem definidas as operações $\cup$ (união) e $\cap$ (interseção).

União em $\boldsymbol{P(\Omega) = \{X / X \subset \Omega\}}$: $\forall\, A, B \in P(\Omega)$, vale que $A \cup B \in P(\Omega)$.

Interseção em $\boldsymbol{P(\Omega) = \{X / X \subset \Omega\}}$: $\forall\, A, B \in P(\Omega)$, vale que $A \cap B \in P(\Omega)$.

As operações de união e interseção definidas em $P(\Omega)$ gozam das propriedades listadas na Definição 02, em 1.2, sendo que $\emptyset$ é o elemento neutro da união e Ω é o elemento neutro da interseção.

Essas operações se ligam da seguinte forma: (**Distributividade da união em relação à interseção**): $\forall\, X, Y, Z \in P(\Omega)$, vale que $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. Também vale que $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Também vale a **Distributividade da interseção em relação à união**.

O Conceito de homomorfismo

A palavra homomorfismo é de origem grega. É um combinado das palavras “homos” que significa "mesmo" e “morphe” que significa "formato". Os homomorfismos são funções especiais que nos permitem comparar dois conjuntos nos quais operações como a adição e a multiplicação estão definidas.

Definição: Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que $*$ é uma operação bem definida em X e $\square$ é uma operação bem definida em Y.

Dizemos que uma função

$$\begin{aligned} \varphi: X &\longrightarrow Y \\ x &\rightsquigarrow \varphi(x) \end{aligned}$$

é um homomorfismo se, e somente se, $\varphi(a * b) = \varphi(a) \square \varphi(b), \forall\, a, b \in X$.

Se as operações $*$ e $\square$ forem operações de adição é comum dizer que φ é um homomorfismo aditivo e que φ é um homomorfismo multiplicativo, se $*$ e $\square$ forem operações de multiplicação. Contudo, existem homomorfismos que agem transformando somas em produtos e, vice-versa. Exemplos conhecidos são as funções elementares

$$exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \quad \text{e} \quad log: \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$r \rightsquigarrow exp(r) \qquad\qquad r \rightsquigarrow log(r)$$

Exemplo 01: A função conhecida

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow f(x) = 2x \end{aligned}$$

é um homomorfismo aditivo: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, vale que

$$f(a + b) = 2(a + b) = 2a + 2b = f(a) + f(b)$$

Exemplo 02: Vamos definir por $\#X :=$ a cardinalidade do conjunto X. Assim, podemos definir a função

$$\begin{aligned} \#: P(\Omega) &\to \mathbb{N} \\ X &\rightsquigarrow \#(X) \end{aligned}$$

e considerar as operações de “união” e “adição” definidas, respectivamente, em $P(\Omega)$ e $\mathbb{N}$.

Agora, $\forall\, A, B \in P(\Omega)$, vale que $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$. E, se tivermos $\#(A \cap B) \neq 0$, a função # não será um homomorfismo.

Exemplo 03: Perceba que nas funções já mencionadas, **a função exponencial não é um homomorfismo aditivo**: se $a, b \in \mathbb{R}$, em geral, temos $exp(a + b) \neq exp(a) + exp(b)$.

Mas, será homomorfismo, se considerarmos a multiplicação em $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$. Esse ajuste também nos convida a dizer que, aditivamente,

$$\begin{array}{rcl} exp\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+\backslash\{0\} \\ r & \rightsquigarrow & \exp(r) \end{array}$$

é um ***quase homomorfismo***.

A **função logaritmo não é um homomorfismo** multiplicativo: para $a, b \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, em geral, $ln(ab) \neq ln(a)ln(b)$ Mas, será homomorfismo, se considerarmos a adição em $\mathbb{R}$. Então queremos dizer que, multiplicativamente,

$$\begin{array}{rcl} ln\colon \mathbb{R}_+\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ r & \rightsquigarrow & \ln(r) \end{array}$$

é um ***quase homomorfismo***.

Esses exemplos justificam o "ou" colocado no item ii) da definição acima. Você já é capaz de relacionar outros exemplos?

Considere Ω um conjunto finito e pense nas funções

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}\colon P(\Omega),\cup & \to & P(\Omega),\cup \\ X & \rightsquigarrow & \mathcal{C}_\Omega(X) \coloneqq \text{complementar de } X \text{ em } \Omega. \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{C}\colon P(\Omega),\cap & \to & P(\Omega),\cap \\ X & \rightsquigarrow & \mathcal{C}_\Omega(X) \end{array}$$

Esses são dois ***quase homomorfismos***. Faça os ajustes e obtenha dois homomorfismos para comprovar isso.

As abordagens que fizemos serão comentadas mais uma vez nas discussões feitas na próxima seção deste trabalho. Muitas coisas podem ser sugeridas a posteriori. Mas, acreditamos que a ideia de se estabelecer a definição de um ***quase homomorfismo*** já tem a nossa contribuição.

Quase homomorfismo

Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que $*$ é uma operação bem definida em X e $\square$ é uma operação bem definida em Y.

Dizemos que uma função

$$\begin{aligned} \eta : M &\longrightarrow Y \\ m &\rightsquigarrow \eta(m) \end{aligned}$$

é um ***quase homomorfismo*** se, e somente se, uma das condições são satisfeitas $\eta = \varphi_{/_M}$ é um homomorfismo, quando fazemos a restrição de uma função

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow Y \\ x &\rightsquigarrow \varphi(x), \end{aligned}$$

que não é um homomorfismo, ao subconjunto M, conveniente escolhido em $D(\varphi) = X$, no qual a operação $*$ também está (bem) definida.

$\eta = \varphi$ passa a ser um homomorfismo, quando substituímos as operações $*$ ou $\square$, respectivamente, definidas em X ou em Y.

O apêndice, anexado neste recurso educacional, contém uma atividade aplicada como forma de validação do conceito a ser estabelecido.

Atividade prática: Reconhecendo um quase homomorfismo

A validação desta sequência didática será feita através de uma atividade que foi desenvolvida em sala de aula, pensada segundo o roteiro abaixo e que trata de contagem de elementos de um conjunto.

Roteiro:

1. Apresentar uma caixa principal contendo um “conjunto” de várias bolinhas coloridas com as cores amarelo e branco. Algumas somente com uma cor e outras com 2 cores, amarelo e branco.

2. Relembrar os conceitos de união e interseção de conjuntos, apelando para o fato de que a “união” dos conjuntos das bolinhas amarelas com o das bolinhas brancas e o das bolinhas que possuem 2 cores, dão a totalidade do que tem na caixa. A “interseção”, explicar, mencionando as bolinhas com as cores amarelo e branco.

3. Disponibilizar, sobre uma mesa, no centro das atenções dos alunos, 2 caixas, cada uma capaz de abrigar um "subconjunto" de bolinhas que será retirado da caixa principal.

4. Fazer 2 retiradas aleatórias, uma por vez, colocando as bolinhas obtidas em cada uma das caixas disponibilizadas, de modo a formar dois "subconjuntos" não vazios (de bolinhas). Digamos, $A = \{\text{Bolinhas que têm a cor amarela}\}$ e um subconjunto $B = \{\text{Bolinhas que têm a cor branca}\}$.

5. Realizar a seguinte contagem: o número de bolinhas que estão em A ou B, que possuem a cor amarela ou a cor branca, ou seja, determinar $\#(A \cup B)$.

6. Voltar as bolinhas para a caixa principal e fazer 2 retiradas, uma por vez, numa escolher somente bolinhas amarelas e na outra escolher somente bolinhas brancas, colocando as bolinhas obtidas em cada uma das caixas disponibilizadas, de modo a formar $M = \{\text{Bolinhas somente na cor amarela}\}$ e $N = \{\text{Bolinhas somente na cor branca}\}$, dois "subconjuntos".

7. Realizar a seguinte contagem: o número de bolinhas que está em M ou N, que possuem somente a cor amarela ou somente a cor branca, ou seja, $\#(M \cup N)$.

8. Retirar da caixa principal todas as bolinhas que possuem duas cores, amarela e branco. Em seguida, nomear a caixa pela letra C e considerar o conjunto $\mathcal{L}$ de todos os possíveis subconjuntos de C, formados por bolinhas de uma cor só. Então, concluir que a função

$$\begin{array}{rcl} \#: L & \to & \mathbb{N} \\ X & \rightsquigarrow & \#X \coloneqq \text{cardilalidade de } X \end{array}$$

que conta o número de bolinhas de cada conjunto X, é tal que $\forall\, A, B \in L$, temos $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) = \#(A) + \#(B) - \#(\emptyset) = \#(A) + \#(B) - 0$.

Noutro sentido, dados $A, B \in L$, se $\#(A \cup B) = 4 = 1 + 3 = 2 + 2$, por exemplo, concluir que $\#(A) = 1$ e $\#(B) = 3$ ou $\#(A) = \#(B) = 2$.

9. Reconhecer que

$$\begin{array}{rcl} \#: P(C) & \to & \mathbb{N} \\ X & \rightsquigarrow & \#X \coloneqq \text{cardilalidade de } X \end{array}$$

é um exemplo que mostra que a função # parece se comportar como um homomorfismo, mas restringimos a contagem somente aos conjuntos disjuntos que formamos com as bolinhas.

Outro problema que aponta que # também não é um quase homomorfismo é que o conjunto $L = \{M \in P(\Omega) / \forall\, Y \in P(\Omega), M \cap Y = \emptyset\}$ não é fechado para a operação $\cup$: se X e $Y \in L$, claro que $(X \cup Y) \cap M = (X \cap M) \cup (Y \cap M) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$. Porém, relacionando X ou Y com $X \cup Y$, temos $(X \cup Y) \cap X = X$ ou $(X \cup Y) \cap Y = Y$.

Dessa forma, não podemos considerar $\#_{/_L}$ para definir um quase homomorfismo conforme o item ii) 2.3.

Considerações finais

O presente trabalho teve como objetivo apresentar os conceitos de homomorfismo e quase homomorfismo de maneira clara e objetiva, destacando algumas funções que comumente aparecem na Matemática do ensino básico, A proposta pedagógica foi materializada em uma sequência didática estruturada, visando a divulgação e o estabelecimento de um novo conceito que foi pensado a partir de algumas de nossas observações.

A atividade de validação juntamente com o roteiro desta sequência didática, a nosso ver, permitiu que os estudantes compreendessem, de forma significativa, o conceito de um quase homomorfismo, conectando os novos conhecimentos à sua base de aprendizagem.

A atividade prática e os debates em sala de aula possibilitaram o desenvolvimento de habilidades cognitivas, como a abstração e a capacidade de modelar um objeto matemático. Isso nos faz crer que o trabalho contribui de forma significativa para a compreensão do conceito de quase homomorfismo e demonstra a importância do uso de metodologias no ensino de Matemática, que termina fazendo com que os alunos se tornem mais críticos e mais capazes, o que é essencial para seu desenvolvimento acadêmico e pessoal.

Referências Bibliográficas

[1] Bezerra, Marcos V. A.; Funções Pares e Ímpares (Generalização de Conceitos); TCC - PROFMAT (Mestrado em Mestrado em Rede Nacional em Matemática); SBM; 2016;

[2] Courant, R.; Cálculo Diferencial e Integral; Editora Globo; RS; 1970.

[3] Domingues, Hygino H. e Iezzi, G. Álgebra Moderna; Ed. Atual; 2003.

[4] Gonçalves, A.; Introdução à Álgebra; Projeto Euclides; IMPA; RJ; 2001.

[5] Silva, Carlos A. Dantas da; Homomorfismos e Elementos Idempotentes de um Conjunto; TCC - PROFMAT (Mestrado em Mestrado em Rede Nacional em Matemática); SBM; 2023;