Universidade Federal do Acre
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

JOSÉ ARTEIRO DA FROTA NETO

UM MÉTODO ALTERNATIVO PARA O CÁLCULO DE DETERMINANTE DE MATRIZES DE ORDEM 4

RIO BRANCO - AC
2025

JOSÉ ARTEIRO DA FROTA NETO

UM MÉTODO ALTERNATIVO PARA O CÁLCULO DE DETERMINANTE DE MATRIZES DE ORDEM 4

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Acre, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior

Ficha catalográfica elabora da pela Biblioteca Central da UFAC

N384u Neto, José Arteiro da Frota, 1994 –
Um método alternativo para o cálculo de determinante de matrizes de ordem 4 / José Arteiro da Frota Neto: Dr. Sergio Brazil Junior. - 2025.
73 f.: il.; 30cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Rio Branco, 2025.
Inclui referências bibliográficas e anexos.

1. Determinantes. 2. Método alternativo. 3. Ensino Médio. I. Junior, Sergio Brazil (orientador). II. Título.

CDD:621

Bibliotecário: Uéliton Nascimento Torres CRB-11º/1074.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título da dissertação: Um método alternativo para o cálculo de determinante de matrizes de ordem 4

Autor: José Arteiro da Frota Neto
Orientador: Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior

Dissertação aprovada como parte das exigências para obtenção do título de **Mestre em Matemática**, pela Banca Examinadora:

DATA DA APROVAÇÃO: 19 de dezembro de 2025.

<table>
<tr><th colspan="2">BANCA EXAMINADORA:</th></tr>
<tr><td colspan="2">Assinado Eletronicamente
Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior
Orientador
Universidade Federal do Acre (UFAC)</td></tr>
<tr><td>Assinado Eletronicamente
Prof. Dr. Josean da Silva Alves
Membro interno
Universidade Federal do Acre (UFAC)</td><td>Assinado Eletronicamente
Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Membro externo
Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT)</td></tr>
</table>

Documento assinado eletronicamente por **Josean da Silva Alves**, **Professor do Magisterio Superior**, em 19/01/2026, às 18:27, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Carlos Rodrigues da Silva**, **Usuário Externo**, em 22/01/2026, às 10:53, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Sergio Brazil Junior**, **Professor do Magisterio Superior**, em 26/01/2026,às 17:19, conforme horário de RioBranco - AC, com fundamento no art.6º, §1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.ufac.br/sei/valida_documento ou click no link Verificar Autenticidade informando o código verificador **1952066** e o código CRC **F87C741D**.

Referência: Processo nº 23107.000109/2026-00 SEI nº 1952066

Dedico a todos os professores, familiares e amigos que me apoiaram até a conclusão deste mestrado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar, a Deus, pela força, pela saúde e pela sabedoria concedidas para superar os desafios e alcançar a conclusão deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior, pela inestimável orientação, pela confiança, pela paciência e pela dedicação exemplar. Seus conhecimentos e incentivos foram fundamentais para a execução desta pesquisa e para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

À Universidade Federal do Acre - UFAC e ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT por terem oferecido a estrutura e o ambiente acadêmico necessários para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores do corpo docente do Programa, em especial aos membros da banca examinadora pela disponibilidade, pelas contribuições e pelas valiosas sugestões que enriqueceram significativamente este estudo.

Por fim, à minha família e amigos, por todo o apoio emocional, pela compreensão da minha ausência e por servirem de alicerce em toda esta jornada. A vitória é compartilhada.

.

RESUMO

O cálculo de determinantes 4×4 pelo método canônico de expansão por cofatores (Laplace) impõe uma complexidade operacional excessiva no Ensino Médio, devido à manipulação recursiva dos $4! = 24$ produtos elementares. Esta dissertação justifica a busca por métodos alternativos ao resgatar o histórico do conceito, desde as soluções algorítmicas de sistemas lineares na Antiguidade e a formalização por Leibniz e Cramer, até o rigor de Laplace e Cauchy. A relevância da aplicação reside na sua utilidade na resolução de sistemas lineares, cálculo de áreas, volumes, equações de curvas e superfícies que são abordados no Ensino Médio. A pesquisa propôs e avaliou um método alternativo de expansão para o determinante de ordem 4 (o método das flechas) como uma solução didática. O estudo qualitativo-quantitativo, baseado na Aprendizagem Significativa, envolveu uma intervenção pedagógica com 30 alunos, demonstrando que o método alternativo é matematicamente válido e altamente motivacional (86,7% mais confiança). No entanto, o custo de memorização da sequência de repetição das 13 colunas neutralizou os ganhos de clareza, levando 46,7% da turma a preferir o método tradicional. Conclui-se que o novo método que será apresentado é um recurso promissor que exige refinamento pedagógico em sua interface mnemônica (memorização visual) para maximizar sua eficácia didática e consolidar-se como ferramenta superior no ensino de Álgebra Linear.

Palavras-chave: Determinantes; Método alternativo; Ensino Médio; Teorema de Laplace; Álgebra Linear.

ABSTRACT

The calculation of 4×4 determinants using the canonical cofactor expansion method (Laplace) imposes an excessive operational complexity in High School education, due to the recursive manipulation of the $4! = 24$ elementary products. This dissertation justifies the search for alternative methods by retrieving the historical context of the concept, from the algorithmic solutions of linear systems in antiquity and the formalization by Leibniz and Cramer, to the rigor of Laplace and Cauchy. The relevance of the application lies in its utility in solving linear systems, calculating areas, volumes, equations of curves, and surfaces addressed in High School. The research proposed and evaluated an alternative expansion method for the order 4 determinant (the "Arrows" Method) as a didactic solution. The qualitative-quantitative study, based on Significant Learning, involved a pedagogical intervention with 30 students, demonstrating that the alternative method is mathematically valid and highly motivational (86.7% reported higher confidence). However, the memorization cost of the 13-column repetition sequence neutralized the gains in clarity, leading 46.7% of the class to prefer the traditional method. It is concluded that the method is a promising resource that requires pedagogical refinement in its mnemonic interface (visual memorization) to maximize its didactic effectiveness and consolidate itself as a superior tool in the teaching of Linear Algebra.

Keywords: Determinants; Alternative method; High School Education; Laplace's Theorem; Linear Algebra.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos determinantes ocupa papel central na Matemática, especialmente na resolução de sistemas lineares, na compreensão das transformações lineares e em diversas aplicações geométricas e algébricas. Embora seu conceito formal seja consolidado desde o século XVIII, o ensino desse conteúdo no Ensino Médio ainda apresenta desafios, sobretudo quando se trata do cálculo de determinantes de ordem superior a 3.

Historicamente, a necessidade de resolver sistemas lineares remonta às civilizações antigas, como babilônios, chineses e egípcios, que desenvolviam soluções algorítmicas e retóricas para problemas práticos. Dessa maneira, a evolução para uma abordagem simbólica e estruturada ocorreu gradualmente, com contribuições significativas de matemáticos como Seki Kōwa, Cardano, Leibniz, Cramer, Laplace e Cauchy, cujas formulações deram forma ao conceito moderno de determinante. Assim, este percurso histórico revela um processo de crescente formalização, que resulta no método de expansão por cofatores, amplamente difundido nos currículos atuais.

No entanto, apesar de seu rigor matemático, o método canônico de Laplace é operacionalmente complexo para estudantes do Ensino Médio, sobretudo no cálculo de determinantes de ordem 4, que exige múltiplas etapas recursivas e um número elevado de operações. Tal dificuldade motivou a presente pesquisa, que busca investigar alternativas didáticas mais eficientes para o ensino desse conteúdo.

Dado isto, esta presente dissertação propõe analisar e aplicar um procedimento mnemônico inspirado na Regra de Sarrus, porém adaptado ao cálculo de determinantes de ordem 4. Logo, o objetivo é avaliar se esse método alternativo pode facilitar a aprendizagem, reduzir erros operatórios, aumentar a clareza visual e promover uma compreensão mais significativa dos determinantes.

Para isso, apresenta-se inicialmente um panorama histórico da evolução do conceito de determinante, seguido de uma fundamentação teórica que contempla permutações, produtos elementares e propriedades estruturais do determinante. Na sequência, discute-se o papel conceitual e aplicado desse objeto matemático em diferentes áreas, como álgebra linear, geometria analítica e física. Por fim, descreve-se a intervenção pedagógica realizada com alunos da 2ª série do Ensino Médio, bem como a análise dos resultados obtidos.

Dessa forma, busca-se contribuir para o ensino de Matemática, oferecendo uma abordagem que concilia rigor conceitual e acessibilidade pedagógica; ampliando, por fim, as possibilidades de compreensão dos estudantes em um tema fundamental para sua formação acadêmica.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS

O presente capítulo tem por objetivo introduzir o tema central desta dissertação: o cálculo de determinantes e a busca por métodos de ensino mais eficazes para o Ensino Médio. Para isso, será apresentado uma contextualização histórica que demonstrará a evolução da necessidade de resolver sistemas de equações lineares, até a formalização do conceito de determinante tal como o utilizamos hoje.

A relevância dos determinantes está intrinsecamente ligada à resolução de sistemas de equações lineares, cuja necessidade é observada desde a Antiguidade (século III a.C.), em registros da Babilônia e da China (BOYER, 1974; EVES, 2011). Nesses períodos, a resolução era realizada através de algoritmos e retórica aplicados a casos específicos.

Posteriormente, a formalização do conceito ganhou impulso com o desenvolvimento da álgebra simbólica. Nesse contexto, a ideia de associar uma expressão aos coeficientes de um sistema para determinar sua solução foi desenvolvida de forma independente por figuras como o japonês Seki Kõwa e o europeu Gerolamo Cardano (1545).

Com o avanço dos estudos, o conceito moderno foi consolidado por Gottfried Wilhelm Leibniz (1693), que estabeleceu a noção de "resultante", e por Gabriel Cramer (1750), cuja regra para a solução de sistemas lineares popularizou a aplicação do que hoje chamamos de determinante. Além disso, Pierre-Simon Laplace (1772) e Augustin-Louis Cauchy (1812) proveram o rigor formal, definindo a teoria das funções alternadas e a expansão por cofatores.

Por fim, é importante ressaltar que a abordagem histórica aqui apresentada não é exaustiva. Embora figuras como Lagrange e Gauss tenham feito contribuições essenciais para a teoria e a nomenclatura, optou-se por selecionar os matemáticos diretamente envolvidos no desenvolvimento das regras operacionais e de eliminação que culminam no método canônico utilizado em sala de aula, que é o foco principal desta pesquisa.

2.1 PRECEDENTES HISTÓRICOS

A necessidade de resolver sistemas de equações lineares, centrais para o uso de determinantes, não é recente. Desde épocas muito antigas, por volta do século III a.C, já se encontram registros de problemas envolvendo sistemas lineares no Egito e na Mesopotâmia. Embora os papiros egípcios tenham sofrido forte degradação ao longo do tempo, as escritas em argila da Mesopotâmia se mantiveram mais preservadas e, por isso, nos oferecem detalhes mais nítidos sobre a prática matemática daquele período. Esse panorama pode ser observado no livro "*História da Matemática"*:

> A álgebra egípcia tratara muito de equações lineares, mas os babilônicos evidentemente as acharam demasiado elementares para merecer muita atenção. Um problema pede o peso x de uma pedra se $(x + \frac{x}{7}) + \frac{1}{11}(x + \frac{x}{7})$ é uma mina; a resposta é dada simplesmente como 48; 7,30 gin, onde 60 gin formam uma mina. Em outro problema num texto da Babilônia antiga, achamos duas equações lineares simultâneas em duas incógnitas, chamadas respectivamente "primeiro anel de prata" e "segundo anel de prata". Se as denotarmos por x e y, em nossa notação as equações são $\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = 1$ e $\frac{6x}{7} = \frac{10y}{11}$. A resposta é dada laconicamente em termos da regra $\frac{x}{7} = \frac{11}{7+11} + \frac{1}{72}$ e $\frac{y}{11} = \frac{7}{7+11} - \frac{1}{72}$ (Boyer, 1974, p. 23).

Enquanto isso, na China, por volta do século I d.C., que data do período Han[1] mas que muito provavelmente contém material bem mais antigo – o livro intitulado "*K'ui-ch'angSuan-shu*", também intitulado como "*Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*", já apresentava problemas que envolvem sistemas lineares. Um exemplo adaptado do capítulo 8 apresenta:

> Temos três tipos de cereais: o superior, o médio e o inferior. Três cestos do superior, dois do médio e um do inferior pesam 39 unidades. Dois cestos do superior, três do médio e um do inferior pesam 34 unidades. Um cesto do superior, dois do médio e três do inferior pesam 26 unidades. Quanto pesa cada cesto de cereal?

Esses exemplos ilustram que a matemática antiga se desenvolveu a partir de problemas essencialmente práticos, numa época em que ainda não existiam fórmulas algébricas capazes de generalizar suas resoluções. Em vez disso, recorriam-se a algoritmos que orientavam um passo a passo de como chegar a

[1]A Dinastia Han foi a segunda dinastia imperial da China, que governou desde 206 a.C. até 220 d.C.

determinado resultado, muitas vezes utilizando retórica, lógica ou geometria. Esse aspecto é ressaltado por Eves (2011):

> Deve-se notar, contudo, que nenhum exemplo do que hoje chamamos demonstração pode ser encontrado na matemática oriental antiga. Em vez de um argumento encontra-se meramente a descrição de um processo. Instrui-se: “Faça assim e assim”. Além disso, exceto possivelmente em alguns casos, essas instruções não eram dadas na forma de regras gerais, mas simplesmente aplicadas a sequências de casos específicos (Eves, 2011, p. 58).

Entre os gregos, por sua vez, um método para formalizar a resolução de sistemas lineares não teve grande relevância. No entanto, eles abordavam problemas que eram equivalentes a esses sistemas usando geometria, a teoria das proporções e o raciocínio aritmético. A álgebra simbólica e os métodos sistemáticos para resolver sistemas lineares se desenvolveu mais tarde, sobretudo com as contribuições dos matemáticos islâmicos e, depois, na Europa renascentista.

Nesse percurso, destaca-se o matemático islâmico Al-Khawarizmi (780-850) foi o pioneiro na utilização da álgebra simbólica. Em sua obra*“Al-Kitab al muhtasarfihisabal-jabrwal-muqabala”* ou *“O livro sobre o cálculo de álgebra e almuqabala*”, é apresentado duas operações: *al-jabr,* que consistia em remover termos negativos de uma equação adicionando a mesma quantidade a ambos os lados;e *al-muqabala*, que tratava da simplificação pela remoção de termos iguais de ambos os lados. Sua abordagem metódica para resolver equações, suas justificações geométricas e suas aplicações práticas tiveram um impacto duradouro no desenvolvimento da matemática e nas ciências em geral.

Com o Renascimento, após o fim da hegemonia católica e a renovação intelectual que o período proporciou, vários matemáticos passaram a contribuir para a criação dos determinantes, suas propriedades e aplicações. Entre os primeiros nomes a se destacar está Gerolamo Cardano (1501-1576) que, nasceu em Pavia, e, na época, fazia parte do Ducado de Milão, na Itália, no ano de 1501. Ele foi matemático, médico e astrólogo renascentista. Sua vida foi marcada por eventos extraordinários e sua obra abrangeu diversas áreas do conhecimento. No contexto da criação dos determinantes, sua principal contribuição reside em seu livro "*Ars Magna" (A Grande Arte*), publicado em 1545.

Em sua obra "*Ars Magna*", Cardano apresentou uma regra para resolver sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas. Embora o autor não utilizasse o termo "determinante" e sua abordagem fosse expressa de forma retórica, a essência de seu método envolvia uma expressão que é fundamental para o conceito de determinante de ordem 2. Em outras palavras, Cardano identificou um padrão nos coeficientes que determinava a solução do sistema, mesmo que não o isolasse ou o nomeasse como uma entidade matemática separada (o determinante). Sua regra era um passo precursor importante para o desenvolvimento formal dos determinantes nos séculos seguintes.

No século seguinte, merece destaque o pensador SekiKõwa (1642-1708). Ele foi um matemático japonês do período Edo[2], considerado como uma das figuras mais importantes na história da matemática japonesa, foi aclamado como o “Newton do Japão” por suas contribuições independentes ao cálculo, mas também teve contribuições significativas para a teoria dos determinantes, mesmo antes de sua formalização no Ocidente. Em manuscritos que não foram publicados em vida, SekiKõwa desenvolveu um conceito que é equivalente ao determinante de uma matriz que chamou de *“Ketsuretsu-shiki”*[3] pelo qual se poderia indicar se um sistema de equações tinha uma única solução e como encontrá-la. Apesar disso, seu trabalho permaneceu desconhecido pelos matemáticos ocidentais durante muito tempo.

2.2 LEIBNIZ (1693)

Em uma carta escrita para L’Hôpital, em 28 de abril de 1693, Leibniz menciona usar números em vez de letras em suas investigações algébricas. Ele pretendia, com isto, a formação de uma regra para escrever a resultante (que é o determinante zero para um sistema homogêneo) de um sistema de equações lineares.

Quando o problema consiste em eliminar as incógnitas x e y das equações:

$$a + bx + cy = 0$$
$$d + ex + fy = 0$$
$$g + hx + ky = 0$$

[2]O Período Edo (1603-1868) no Japão foi um período de paz e estabilidade, marcado por um governo central forte e um forte isolacionismo político-econômico.
[3]É uma "fórmula essencial para eliminação" ou "expressão chave para resolução" de sistemas de equações lineares.

Leibniz diz que prefere escrever 10 para a, 11 para b e 12 para c, na primeira equação, 20 para d, e assim sucessivamente, obtendo:

$$10 + 11x + 12y = 0$$

$$20 + 21x + 22y = 0$$

$$30 + 31x + 32y = 0$$

Ele, então, propõe formar todos os produtos possíveis cujos fatores são um coeficiente de cada equação, não repetindo os números que tivessem a mesma unidade, sendo o resultado:

10.21.32, 10.22.31, 11.20.32,

11.22.30, 12.20.31, 12.21.30.

Sendo o número de incógnitas menor em uma unidade que o número de equações, ele torna esses termos que tem um fator comum com sinais opostos:

+10.21.32 − 10.22.31 − 11.20.32 + 11.22.30 + 12.20.31 − 12.21.30 = 0.

As contribuições que Leibniz fez a álgebra com o seu Cânon Geral (MUIR, 1841, p. 8 - 9), foram:

- Nova notação numérica: Isso se refere ao uso de números como 10, 11 e 12 para representar coeficientes, onde o primeiro dígito indica a equação e segundo a posição do coeficiente, análogo as coordenadas cartesianas;
- Regra para formar termos: Uma regra para formar termos da expressão, igualada a zero, representa o resultado da eliminação das incógnitas de um sistema de equações simples. Isso é a própria construção dos determinantes;
- Regra para determinar sinais: Uma regra para determinar os sinais dos termos no resultado obtido.

Em suma, Leibniz formulou originalmente e de forma bruta os termos de um determinante e como seus sinais devem ser atribuídos. Ele estava certo, mas a notação e a descrição dos sinais seriam refinadas por matemáticos posteriores para se tornarem a forma mais clara e concisa que conhecemos hoje.

2.3 CRAMER (1750)

Segundo Cramer (1750, p. 59), uma curva de n-ésimo grau é determinável quando $\frac{n(n+3)}{2}$ pontos da curva são conhecidos. Em ilustração deste teorema, ele trata do caso de encontrar a equação da curva de segundo grau que passa por cinco pontos dados. A equação é tomada na forma

$$A + By + Cx + Dyy + Exy + xx = 0;$$

As cinco equações para determinar A, B, C, D, E são escritas e é apontado que tudo que é necessário é a solução do sistema de cinco equações, e a substituição dos valores de A, B, C, D, E assim encontrados.

"O cálculo verdadeiramente seria bastante longo" diz ele; mas em uma nota de rodapé há a observação de que é na álgebra que devemos procurar os meios para encurtar o processo, e somos direcionados ao apêndice para uma regra geral conveniente que ele havia descoberto para a obtenção da solução de um conjunto de equações deste tipo. O que segue é o que chamamos de regra de Cramer:

> Sejam várias incógnitas $z, y, x, v, \ldots$ e tantas equações
>
> $$A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \cdots$$
> $$A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \cdots$$
> $$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \cdots$$
> $$A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \cdots$$
>
> onde as letras $A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots$ não são potência de A, mas sim o primeiro membro conhecido da primeira, segunda, terceira, quarta, ... equação. Do mesmo $Z^1, Z^2, \ldots$ são os coeficientes de z; $Y^1, Y^2, \ldots$ os coeficientes de y; $X^1, X^2, \ldots$ os coeficientes de x; $V^1, V^2, \ldots$ os de v, ... na primeira, na segunda, ... equação.
>
> Com essa notação, se houver uma equação e uma incógnita z; teremos $z = \frac{A^1}{Z^1}$. Se houver duas equações e duas incógnitas z e y; encontra-se $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$ e $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. Se houver três equações e três incógnitas z, y e x; encontra-se
>
> $$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 + A^2Y^3X^1 - A^2Y^1X^3 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + Z^2Y^3X^1 - Z^2Y^1X^3 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
> $$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 + Z^2A^3X^1 - Z^2A^1X^3 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + Z^2Y^3X^1 - Z^2Y^1X^3 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
> $$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 + Z^2Y^3A^1 - Z^2Y^1A^3 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + Z^2Y^3X^1 - Z^2Y^1X^3 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
>
> (Cramer, 1750, p.656).

Cramer definiu o número de permutações entre as incógnitas como "*desarranjos".* Segundo ele, que se conte, para cada termo, o número de desarranjos: se ele é par ou nulo, o termo terá o sinal +; se ele é ímpar, o termo terá o sinal –. Por exemplo, no termo $Z^1Y^2X^3$ não há nenhum desarranjo; este termo terá então o sinal +. O termo $Z^3Y^1X^2$ tem também o sinal +, porque ele tem dois desarranjos, 3 antes de 1 e 3 antes de 2. Mas o termo $Z^3Y^2X^1$, que tem três desarranjos, 3 antes de 2, 3 antes de 1, e 2 antes de 1, terá o sinal –.

O denominador comum estando assim formado, se terá o valor de z ao se dar a este denominador o numerador que se forma mudando, em todos os seus termos, Z para A. E o valor de y é a fração que tem o mesmo denominador e por numerador a quantidade que resulta quando se muda Y para A, em todos os termos do denominador. E se encontra de uma maneira semelhante o valor das outras incógnitas.

É evidente de imediato que os novos resultados aqui apresentados são:

- Uma regra para formar os termos do denominador comum das frações que expressam os valores das incógnitas em um conjunto de equações lineares;
- Uma regra para determinar o sinal de qualquer termo individual no referido denominador comum (e, incluída na regra, a noção de um "desarranjo");
- Uma regra para obter os numeradores a partir da expressão para o denominador comum.

O problema que Cramer se propôs neste ponto em seu livro foi exatamente aquele que Leibniz havia resolvido, a eliminação de n quantidades de um conjunto de $n+1$ equações lineares. A solução que Cramer obteve, e que, seja dito de passagem, foi a solução mais bem adaptada para o seu propósito, era bastante distinta em caráter daquela de Leibniz. Leibniz deu uma regra para escrever o resultado final da eliminação; o que Cramer dá é uma regra para escrever os valores das n incógnitas como determinados a partir de n das $n+1$ equações, depois de termos de substituir esses valores na $(n+1)$-ésima equação restante.

O resultado de eliminar w, x, y, z as equações $a_r w + b_r x + c_r y + d_r z = e_r$, $(r = 1,2,3,4,5)$ é, de acordo com Leibniz, se incorporarmos sua regra em uma simbologia posterior,

$$|a_1 b_2 c_3 d_4 e_5| = 0.$$

Enquanto, de acordo com Cramer, é

$$a_1 \left|\frac{e_2 b_3 c_4 d_5}{a_2 b_3 c_4 d_5}\right| + b_1 \left|\frac{a_2 e_3 c_4 d_5}{a_2 b_3 c_4 d_5}\right| + c_1 \left|\frac{a_2 b_3 e_4 d_5}{a_2 b_3 c_4 d_5}\right| + d_1 \left|\frac{a_2 b_3 c_4 e_5}{a_2 b_3 c_4 d_5}\right| = e_1.$$

O destino da regra de Cramer foi muito diferente daquele de Leibniz. Ela foi rapidamente adotada e, depois de um tempo, encontrou seu caminho nas escolas, onde continuou por muitos anos a ser ensinada como a forma concisa da teoria da solução de equações lineares simultâneas.

2.4 LAPLACE (1772)

Em suas obras, Laplace chega a um conjunto de equações lineares das quais n quantidades devem ser eliminadas. Isto, ele diz, pode ser realizado por meio de regras que os matemáticos deram:

> Mas como elas não me parecem ter sido demonstradas até agora a não ser por indução, e que além disso são impraticáveis, por pouco que o número de equações seja considerável; vou retomar de novo esta matéria, e dar alguns processos mais simples que os que já são conhecidos, para eliminar entre um número qualquer de equações do primeiro grau. (Laplace, 1772, p. 267).

Para n equações lineares homogêneas com os coeficientes

$$\begin{cases} a_1, b_1, c_1, \ldots \\ a_2, b_2, c_2, \ldots \\ \quad\ldots \end{cases}$$

ele primeiro apresenta a regra de Cramer para escrever o que ele, Laplace, chama de "resultante", usando no decorrer da regra o termo "*variação"* em vez do termo "desarranjo" de Cramer.

O teorema a respeito do efeito de transpor duas letras é então enunciado:

"Se, em vez de agrupar as letras a e b primeiro, e depois essas duas com a letra c, e assim por diante – ou seja, se, em vez de organizar as letras $a, b, c, d, e,$ etc., na ordem a, b, c, d, e, etc., as tivéssemos organizado em outra sequência como a, c, b, d, e, etc., ou a, d, b, c, e, etc., ou $a, e, b, c, d,$ etc., ou qualquer outra –, eu afirmo que o resultado final seria sempre o mesmo, exceto por uma possível mudança de sinal (positivo ou negativo)."

A demonstração feita por Laplace pode ser encontrada nas páginas 25 e 26 do livro History of the theory of Determinants, Muir, 1841.

É feita então uma aplicação ao problema da eliminação, supondo que se tenha três equações:

$$\begin{cases} 0 = a_1.x + b_1.x' + c_1.x'' \\ 0 = a_2.x + b_2.x' + c_2.x'' \\ 0 = a_3.x + b_3.x' + c_3.x'' \end{cases}$$

Primeiramente, forma-se a resultante das três letras $a, b, c,$ nessa ordem, que nos dá

$$a_1.b_2.c_3 - a_1.c_2.b_3 + c_1.a_2.b_3 - b_1.a_2.c_3 + b_1.c_2.a_3 - c_1.b_2.a_3$$

ou,

$$a_1.(b_2.c_3 - c_2.b_3) + a_2.(c_1.b_3 - b_1.c_3) + a_3.(b_1.c_2 - c_1.b_2)$$

Agora, multiplicando a primeira equação por $b_2.c_3 - c_2.b_3$, a segunda por $c_1.b_3 - b_1.c_3$ e a terceira por $b_1.c_2 - c_1.b_2$, em seguida, somando as três equações, obtêm-se:

$$\begin{aligned} 0 = x.[a_1.(b_2.c_3 - c_2.b_3) + a_2.(c_1.b_3 - b_1.c_3) + a_3.(b_1.c_2 - c_1.b_2)] \\ + x'.[b_1.(b_2.c_3 - c_2.b_3) + b_2.(c_1.b_3 - b_1.c_3) + b_3.(b_1.c_2 - c_1.b_2)] \\ + x''.[c_1.(b_2.c_3 - c_2.b_3) + c_2.(c_1.b_3 - b_1.c_3) + c_3.(b_1.c_2 - c_1.b_2)] \end{aligned}$$

Consequentemente, pelo que acabamos de observar, os coeficientes de x' e x'' são identicamente nulos, pois representam a resultante das três as letras $a, b, c,$onde substituímos a por b ou c; então, obteremos a equação de condição desejada,

$$0 = a_1.(b_2.c_3 - c_2.b_3) + a_2.(c_1.b_3 - b_1.c_3) + a_3.(b_1.c_2 - c_1.b_2).$$

Ou seja, a resultante da combinação das três letras a, b, c é igual a zero. O mesmo princípio seria demonstrado independentemente do número de equações envolvidas.

Para mostrar analogia de matéria com a eliminação das equações do primeiro grau, Laplace supôs que tenhas as três equações,

$$\begin{cases} p_1 = a_1.x + b_1.x' + c_1.x'' \\ p_2 = a_2.x + b_2.x' + c_2.x'' \\ p_3 = a_3.x + b_3.x' + c_3.x'' \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $(b_2.c_3 - c_2.b_3)$, a segunda por $(c_1.b_3 - b_1.c_3)$, e a terceira por $(b_1.c_2 - c_1.b_2)$, depois somando as três equações, observa-se que os coeficientes de x' e x'' são identicamente nulos na equação, que resulta em

$$x = \frac{p_1.(b_2.c_3 - c_2.b_3) + p_2.(c_1.b_3 - b_1.c_3) + p_3.(b_1.c_2 - c_1.b_2)}{a_1.(b_2.c_3 - c_2.b_3) + a_2.(c_1.b_3 - b_1.c_3) + a_3.(b_1.c_2 - c_1.b_2)}$$

Vê-se, portanto, que o numerador da expressão de x, se forma do denominador, trocando a por p.

Analogamente,

$$x' = \frac{a_1.(p_2.c_3 - c_2.p_3) + a_2.(c_1.p_3 - p_1.c_3) + a_3.(p_1.c_2 - c_1.p_2)}{a_1.(b_2.c_3 - c_2.b_3) + a_2.(c_1.b_3 - b_1.c_3) + a_3.(b_1.c_2 - c_1.b_2)}$$

e

$$x'' = \frac{a_1.(b_2.p_3 - p_2.b_3) + a_2.(p_1.b_3 - b_1.p_3) + a_3.(b_1.p_2 - p_1.b_2)}{a_1.(b_2.c_3 - c_2.b_3) + a_2.(c_1.b_3 - b_1.c_3) + a_3.(b_1.c_2 - c_1.b_2)}$$

Esse modo de tratamento não deixa nada a desejar. É o que mais é comumente empregado nos livros didáticos da atualidade.

As contribuições de Laplace para a teoria dos resultantes podem ser resumidas da seguinte forma:

- Forneceu uma prova do teorema sobre o efeito da transposição de duas letras adjacentes em qualquer uma das novas funções;
- Provou o teorema sobre o efeito de igualar duas das letras;
- Apresentou um modo de chegar à solução conhecida de um conjunto de equações lineares simultâneas;
- Ele deu o nome "resultante" para as novas funções;
- Introduziu uma notação para um resultante, por exemplo, $(a_1.b_2.c_3)$. Ele define (abc) como a quantidade $abc - acb + cab - bac + bca - cba$, e (ab) como $ab - ba$;
- Estabeleceu uma regra para expressar um resultante com um agregado de termos composto de fatores que são eles próprios resultantes. O teorema pode ser descrito como a expansão de um resultante na forma de um agregado de termos, cada um dos quais é um produto de resultantes de grau inferior.

A exposição da regra de Laplace é a seguinte:

Para três equações, a equação de condição é $(a_1.b_2.c_3) = 0$.

Para quatro equações, ele sugere combinar $+abc$ com a letra d, mudando o sinal quando d muda de lugar, o que resulta $+abcd - abdc + adbc - dabc$. Após anexar índices, o termo $+a_1.b_2.c_3.d$ é substituído por $+(a_1.b_2.c_3).d_4$, e assim por diante, levando à equação de condição $(a_1.b_2.c_3).d_4 - (a_1.b_2.c_4).d_3 + (a_1.b_3.c_4).d_2 - (a_2.b_3.c_4).d_1 = 0$.

Para cinco equações, ele instrui combinar os termos resultantes de quatro equações com a letra e, observando que os termos onde d precede e não são admitidos e o sinal muda quando e muda de lugar. Após a indexação, o termo $+a_1.b_2.c_3.d_{4.}e$ é substituído por $+(a_1.b_2.c_3).(d_4.e_5)$, e outros termos são transformados de forma semelhante para formar a equação de condição.

Ele também estabeleceu um modo de encontrar o número de termo neste agregado. Assim, Laplace chega a um conjunto de equações lineares a partir das quais n quantidades devem ser eliminadas. Embora ele demonstre com resolver equações simultâneas, é importante, dessa maneira, notar que Cramer havia dado uma regra geral para expressar os resultantes, mas Laplace observou que, embora Cramer fosse simples em relação às letras, não era tão simples em relação aos sinais quando se tinha um certo de número de incógnitas a calcular.

2.5 LAGRANGE (1773)

A posição de Lagrange em relação ao avanço do assunto é bastante diferente da de qualquer um dos matemáticos procedentes. Todos eles lidavam explicitamente com o problema da eliminação, e portanto diretamente com as funções posteriormente conhecidas como determinantes.

O trabalho de Lagrange, por outro lado, consiste em uma série de identidades algébricas obtidas inicialmente, que hoje reconhecemos como relações entre funções do tipo referido. Inicialmente, o próprio Lagrange não as via sob essa luz e, consequentemente, as deixou como instâncias isoladas.

Em sua obra *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires*, de 1773, as variáveis x, y, z e x', y', z' e x'', y'', z'' ocorrem principalmente como coordenadas de pontos no espaço, e não como coeficientes em uma tríade de equações lineares. Assim, a expressão $(xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'')$, quando aparece, representa seis vezes o volume de uma pirâmide triangular e não o resultado de uma eliminação.

Nesta primeira memória, as identidades algébricas são reunidas e apresentadas no início da seguinte forma:

Lema:

Sejam nove quantidades quaisquer

$$x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$$

Teremos a seguinte equação idêntica

$$(xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'')^2 =$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)\left(x''^2 + y''^2 + z''^2\right)$$
$$+2(xx' + yy' + zz')(xx'' + yy'' + zz'')(x'x'' + y'y'' + z'z'')$$
$$-(x^2 + y^2 + z^2)(x'x'' + y'y'' + z'z'')^2$$
$$-(x'^2 + y'^2 + z'^2)(xx'' + yy'' + zz'')^2$$
$$-(x''^2 + y''^2 + z''^2)(xx' + yy' + zz')^2$$

Esta é uma identidade bastante complexa. O termo no lado esquerdo da equação $(xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'')$ é o determinante de uma matriz 3x3 formada pelos vetores $(x, y, z), (x', y', z')$ e , (x'', y'', z'').

Essa é uma forma de *identidade de Lagrange* para produtos vetoriais em três dimensões, generalizada ou aplicada a determinantes e produtos internos. Ela relaciona o quadrado do determinante de uma matriz 3x3 com produtos internos dos vetores que formam suas linhas (ou colunas). É um importante resultado em geometria analítica e álgebra linear.

2.6 GAUSS (1801)

A conexão de Gauss com a teoria dos determinantes foi muito semelhante à de Lagrange, e, sem dúvidas, deveu-se ao fato de que Lagrange o havia precedido. O quinto capítulo de sua famosa obra, *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), que é o único capítulo que nos interessa, leva o título "*De formis equationibusque indeterminatis secundi gradus"* (sobre as formas e equações indeterminadas do segundo grau), Gauss escreve a sua forma do segundo grau dessa forma:

$$axx + 2bxy + cyy$$

e, para simplificar, refere-se a ela como a forma (a, b, c). A função dos coeficientes a, b, c ele chama de *"determinante da forma",* sendo as palavras exatas de sua definição as seguintes: "Chamaremos o número $bb - ac$, de cuja natureza ensinaremos nas páginas seguintes que depende principalmente as propriedade da forma (a, b, c), de determinante desta forma" (Gauss, 1801, Art. 153).

Aqui, então, temos o primeito uso do termo que, com um significado estendido, tornou-se tão familiar em nossos dias. Deve-se notar cuidadosamente que as funções mais gerais, às quais o nome veio a ser dado posteriormente, também ocorrem repetidamente no curso da obra de Gauss.

Mas, ele não se limitou a formas de duas variáveis. Uma digressão é feita com o propósito de considerar a forma quadrática ternária,

$axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx''$,

ou, como ele a denota abreviadamente,

$$\begin{pmatrix} a\, a'\, a'' \\ b\, b'\, b'' \end{pmatrix}$$

fazendo,

$bb - a'a'' = A$ e $ab - b'b'' = B$

$b'b' - aa'' = A'$ e $a'b' - bb'' = B'$

$b''b'' - aa' = A''$ e $a''b'' - bb' = B''$,

Surge alguma forma

$$\begin{pmatrix} A\,A'\,A'' \\ B\,B'\,B'' \end{pmatrix} \ldots F$$

que foi chamada de *forma adjunta.* Daqui novamente se encontra, denotada por D, para abreviar, o número

$$abb + a'b'b' + a''b''b'' - aa'a'' - 2bb'b''.$$

E ainda

$$BB - A'A'' = aD, \qquad B'B' - AA'' = a'D, \qquad B''B'' - AA' = a''D$$

$$AB - B'B'' = bD, \qquad A'B' - BB'' = b'D, \qquad A''B'' - BB' = b''D,$$

de onde e evidente que a forma F é a forma adjunta de

$$\begin{pmatrix} aD\,a'D\,a''D \\ bD\,b'D\,b''D \end{pmatrix}.$$

O número D, cujo natureza depende principalmente as propriedades da forma ternária f, é chamado de determinante desta forma; dessa maneira, o determinante da forma de F é igual a DD, ou seja, igual ao quadrado do determinante da forma f, à qual é adjunta.

Nisto não há avanço no que diz respeito à teoria dos determinantes modernos, no entanto, na mesma página é dado uma extensão de um dos teoremas de Lagrange, referente ao determinante da nova forma obtida ao efetua uma substituição linear em uma dada forma.

Segundo Gauss, uma forma ternária f de determinante D, cujas indeterminadas são x, x', x'' , é transformada em uma forma ternária g de determinante E, cujas indeterminadas são y, y', y'', por tal substituição

$$x = \alpha y + \beta y'' + \gamma y''$$

$$x' = \alpha' y + \beta'^{y''} + \gamma' y''$$

$$x'' = \alpha'' y + \beta'' y'' + \gamma'' y''$$

Onde os nove coeficientes são todos supostos serem números inteiros, por brevidade, negligenciando as indeterminadas, diz-se que f se transforma em g pela substituição (S)

$$\alpha, \beta, \gamma$$

$$\alpha', \beta', \gamma'$$

$$\alpha'', \beta'', \gamma''$$

e que f implica g, ou seja, g está contida em f. De tal suposição, portanto, seguem-se espontaneamente seis equações para os seis coeficientes em g, as quais não são necessários acrescentar: daqui, porém, por um cálculo fácil, a seguinte conclusão se desenvolve:

Designado por k, para abreviar, o número

$$\alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'' - \alpha\gamma'\beta'' - \beta\alpha'\gamma''$$

encontra-se após as devidas deduções

$$E = kkD.$$

Em essência, Gauss foi fundamental na cunhagem do termo "determinante" e no desenvolvimento inicial de sua teoria, aplicando-o a formas quadráticas e estabelecendo relações importantes entre os determinantes de formas transformadas. Ele lançou as bases para o conceito mais amplo e generalizado de determinantes que usamos hoje em álgebra linear.

2.7 CAUCHY (1812)

O início do trabalho de Cauchy sobre determinantes é as contrastando com funções que não sofrem alteração alguma por permutações de variáveis, ou seja, funções simétricas; e, notando o fato, posteriormente verificado, de que as novas funções consistem em termos alternadamente + e -, e que se não fosse por essa alternância de sinal elas seriam funções simétricas, ele decide estender o termo “simétrica” a elas, e, tendo feito isso, procurou distingui-las das funções simétricas comuns chamando-as de “funções simétricas alternadas”, e chamando as outras de “funções simétricas permanentes”. A visão de Cauchy sobre determinantes pode, portanto, ser descrita agora dizendo que ele as considerava como uma classe especial de funções simétricas alternadas.

No entanto, para incluí-las, é necessário a adoção de uma convenção, ou deve ser feita uma extensão da definição. Por exemplo, $a_1b_2 - a_2b_1$ não é uma função alternante, a menos que os elementos estejam relacionados de tal forma que a troca de a_1 por a_2 necessite da troca de b_1 por b_2 ao mesmo tempo; ou a menos que a definição seja redigida de forma que a troca se refira para os índices, não as letras. Cauchy seleciona o primeiro caminho, sendo suas palavras:

> Concebemos as diversas sequências de quantidades
>
> $$a_1, a_2, \dots, a_n$$
> $$b_1, b_2, \dots, b_n$$
> $$c_1, c_2, \dots, c_n$$

...
tão ligados entre si, que a transposição de dois índices tomados em uma das sequências, necessita da mesma transposição em todas as outras; então, as quantidades

$$b_1c_1, \dots, b_2, c_2, \dots, b_3, c_3, \dots$$

poderão ser consideradas como funções semelhantes de

$$a_1, a_2, a_3, \dots;$$

e por conseguinte, as funções de

$$a_1, b_1, c_1, \dots, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n, \dots$$

que não mudarão de valor, mas no máximo de sinal, em virtude de transposições operadas entre os índices $1,2,3, \dots, n$, deverão ser classificados entre funções simétricas de $a_1, a_2, \dots, a_n$, ou o que equivale ao mesmo, dos índices $1,2,3, \dots, n$. Assim
$a_1^2 + a_2^2 + 4a_1a_2$,
$a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_2b_1 + a_1b_3$,
$\cos(a_1 - a_2)\cos(a_1 - a_3)\cos(a_2 - a_3)$,
são as funções simétricas permanentes, a primeira de segunda ordem e as outras de terceira; e ao contrário,
$a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - a_2b_1 - a_1b_3 - a_3b_2$,
$\operatorname{sen}(a_1 - a_2)\operatorname{sen}(a_1 - a_3)\operatorname{sen}(a_2 - a_3)$,
são funções simétricas alternadas de terceira ondem (Cauchy, 1812, p. 30).

Resolvida e questão de nomeclatura, surge em seguida a questão de notação. Esta também é decidida com base na semelhança das funções com as funções simétricas. Sendo sabido que qualquer função simétrica é representável por um termo típico precedido por um símbolo indicando a permutação das variáveis, por exemplo,

$S(a_1b_2)$ ou $S^2(a_1b_2)$ representando $a_1b_2 + a_2b_1$

e

$S^3(a_1b_2)$ representando $a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_2b_1 + a_3b_2 + a_1b_3$.

Agora, faz-se necessário examinar particularmente uma certa função simétrica que se oferecem a si mesmas em um grande número de pesquisas analíticas. É sobretudo por meio dessas funções que se exprime os valores gerais das incógnitas que contém muitas equações de primeiro grau. Elas representam muitas vezes o que se tem a formar, assim como na teoria geral da eliminação.

Cauchy intitulou "Sobre as funções simétricas alternadas designadas sob o nome de determinantes" e faz a seguinte definição explicativa:

Sejam $a_1, a_2, \dots a_n$ várias quantidades diferentes em número igual a n. Ao multiplicar, o produto dessas quantidades, ou

$$a_1a_2a_3 \dots a_n,$$

pelo produto de suas respectivas diferenças, ou por

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}),$$

obtém-se por resultado a função simétrica alternada

$$S(\pm {a_1}^1 {a_2}^2 {a_3}^3 \dots {a_n}^n),$$

que por conseguinte se encontra sempre igual ao produto

$a_1a_2a_3 \ldots a_n \times (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})$.
Suponha agora que se desenvolva este último produto, e que em cada termo do desenvolvimento se substitua o expoente de cada letra por um segundo índice igual ao expoente que a acompanha; escrevendo, por exemplo, $a_{r.s}$no lugar de $a_r{}^s$, e $a_{s.r}$ no lugar de $a_s{}^r$, obter-se-ia por resultado uma nova função simétrica alternada, que, em vez de ser representada por

$$S(\pm a_1{}^1 a_2{}^2 a_3{}^3 \ldots a_n{}^n)$$

será representada por

$$S(\pm a_{1.1} a_{2.2} a_{3.3} \ldots a_{n.n}),$$

o sinal$S$ referindo-se aos primeiros índices de cada letra. Tal é a forma mais geral das funções que se designarão sob o nome de determinantes. Se supormos sucessivamente $n = 1, n = 2, \ldots$
encontraremos
$S(\pm a_{1.1} a_{2.2}) = a_{1.1}a_{2.2} - a_{2.1}a_{1.2}$,
$S(\pm a_{1.1} a_{2.2} a_{3.3}) = a_{1.1}a_{2.2}a_{3.3} + a_{2.1}a_{3.2}a_{1.3} + a_{3.1}a_{1.2}a_{2.3}$
$-a_{1.1}a_{3.2}a_{2.3} - a_{3.1}a_{2.2}a_{1.3} - a_{2.1}a_{1.2}a_{3.3}$,
...
para determinantes de segunda ordem, terceira ordem, ...(Cauchy, 1812, p. 51).

Essa definição de determinantes como funções alternadas (ou "simétricas alternadas", como o texto descreve, para enfatizar a natureza permutacional de seus termos) foi um avanço conceitual que permitiu a Cauchy desenvolver e provar as diversas propriedades dos determinantes de maneira sistemática e rigorosa, consolidando-os como uma ferramenta essencial na álgebra linear.

2.8 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO E RELAÇÃO COM O PROBLEMA DA PESQUISA

O panorama histórico apresentado demonstra que o conceito de determinante evoluiu de soluções algorítmicas para problemas práticos na antiguidade, passando pela simbolização retórica do Renascimento, até atingir o rigor formal da Álgebra Linear clássica (Leibniz, Cramer, Laplace e Cauchy). Essa formalização, especialmente com o Teorema de Laplace, proveu a base teórica para o cálculo de determinantes de qualquer ordem n. No entanto, é exatamente a complexidade inerente ao método canônico de expansão por cofatores para ordens 4 que justifica o problema didático central desta pesquisa: a dificuldade de sua aplicação no Ensino Médio. Assim, o próximo capítulo se dedicará a estabelecer as definições matemáticas formais — como a classe de uma permutação e os produtos elementares — que sustentam a validade do método canônico e, por contraste, validarão a necessidade da proposta mnemônica alternativa a ser apresentada.

3 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, serão apresentadas as principais definições e propriedades que fundamentam o cálculo dos determinantes e que dão suporte teórico à intervenção pedagógica deste trabalho. Sendo assim, seu objetivo é estabelecer o formalismo matemático necessário para a compreensão da complexidade do método canônico dos cofatores e, por contraste, justificar a proposta de um procedimento alternativo para a ordem 4.

O arcabouço conceitual do determinante, que inclui a classe de uma permutação e a estrutura dos produtos elementares, será estabelecido a partir de referências clássicas de Álgebra Linear (Steinbruch, et al.). Em contraste, livros didáticos de Matemática do Ensino Médio (Paiva, et al.), garantindo a adequação do tema ao nível de ensino da intervenção.

3.1 DEFINIÇÕES

3.1.1 Permutação

Uma permutação do conjunto de inteiros $\{1,2,3,\ldots,n\}$ é um rearranjo desses inteiros em alguma ordem, sem omissões ou repetições. Denotaremos por $(1\ 2\ 3 \ldots n)$.

3.1.2 Classe de uma permutação

Consideremos uma permutação

$$(acb)$$

dos três elementos a, b, c e tomemos para permutação principal a permutação:

$$(abc)$$

na qual os elementos estão em ordem alfabética.

Diz-se que dois elementos de uma permutação formam uma inversão se estão em ordem inversa à da permutação principal.

Assim, na permutação dada (acb), os elementos c e b formam uma inversão.

Uma permutação é de classe *par* ou de classe *ímpar*, conforme apresenta um número par ou ímpar de inversões.

A permutação (acb) é de classe ímpar.

3.1.3 Termo principal

Dada a matriz quadrada A, de ordem n, ao produto dos elementos da diagonal principal dá-se o nome de *termo principal*:

$$a_{11}.a_{22}.a_{33}. \cdots .a_{nn}$$

3.1.4 Termo secundário

Dada a matriz quadrada A, de ordem n, ao produto dos elementos da diagonal secundária dá-se o nome *termo secundário*:

$$a_{1n}.a_{2(n-1)}.a_{3(n-2)}. \cdots .a_{n1}$$

3.1.5 Produtos elementares

Dada a matriz quadrada A, de ordem n, um *produto elementar* de A é definido como o produto de n elementos da matriz, de tal forma que nenhum par desses elementos pertença à mesma linha ou à mesma coluna.

3.1.6 Determinante de uma matriz

Chama-se *determinante de uma matriz quadrada* à soma algébrica dos produtos elementares que se obtém efetuando todas as permutações dos seguintes índices do termo principal, fixados os primeiros índices, fazendo-se preceder os produtos do sinal + ou -, conforme a permutação dos segundos índices seja de classe par ou de classe ímpar.

3.1.7 Ordem de um determinante

Chama-se *ordem* de um determinante a ordem da matriz a que o mesmo corresponde.

3.1.8 Representação de um determinante

A representação do determinante de uma matriz A, que é designado por $detA$, faz-se de maneira análoga à da matriz A, colocada entre dois traços verticais.

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Apesar de o determinante de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n, ser um número real, costuma-se, por comodidade, uma vez que aquele número é calculado a partir dos elementos das linhas e das colunas da matriz, falar nas linhas e nas colunas do determinante.

3.2 PRELIMINARES PARA O CÁCLULO DOS DETERMINANTES DE ORDEM 2 E 3

O total de permutações dos números 1 e 2 é:

$$P_2 = 2! = 1 \times 2 = 2$$

Na Tabela 1 está apresentada as duas permuntações, número de inversões, a classe de permutação de cada uma delas e seus respectivos sinais, positivo ou negativo.

Tabela 1 – As permutações (1 2)

Permutação principal	Permutação	Número de inversões	Classe da permutação	Sinal que precede o produto
(1 2)	(1 2)	0	par	+
(1 2)	(2 1)	1	ímpar	–

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

O total de permutações dos números 1, 2 e 3 é:

$$P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

Na Tabela 2 está apresentada as seis permuntações, número de inversões, a classe de permutação de cada uma delas e seus respectivos sinais, positivo ou negativo.

Tabela 2 – As permutações (1 2 3)

Permutação principal	Permutação	Número de inversões	Classe da permutação	Sinal que precede o produto
(1 2 3)	(1 2 3)	0	par	+
(1 2 3)	(1 3 2)	1	ímpar	–
(1 2 3)	(3 1 2)	2	par	+
(1 2 3)	(2 1 3)	1	ímpar	–
(1 2 3)	(2 3 1)	2	par	+
(1 2 3)	(3 2 1)	3	ímpar	–

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Utilizando o *Princípio Fundamental da contagem*, é fácil ver que o total de permutações de n elementos é dado por $P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$ (n fatorial). Portanto, o número de produtos elementares em uma matriz de ordem n é $n!$. Conforme ilustrado, uma matriz 2×2 tem $2! = 2$ produtos (Tabela 1) e uma 3×3 tem $3! = 6$ produtos (Tabela 2). Consequentemente, uma matriz de ordem 4×4 possui $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ produtos elementares, o que multiplica a complexidade do cálculo, justificando a necessidade de métodos simplificados.

3.3 CÁCULO DO DETERMINANTE DE ORDEM 2

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

para calcular o determinante dessa matriz

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

deve-se, de acordo com a definição, proceder da seguinte maneira:

1º) Escrever os elementos que compõem o termo principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundo índices), tantas vezes quantas forem as permutação dos número 1 e 2 (no caso, duas vezes):

$$a_1a_2 \qquad a_1a_2$$

2º) Colocar nas duas expressões anteriores, como segundos índices, as permutações (1 2) e (2 1), uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem:

$$a_{11}a_{22} \qquad a_{12}a_{21}$$

3º) Fazer preceder para cada um dos dois produtos assim formados dos sinas + ou –, conforme a permutação dos seguintes índices for de classe par ou de classe ímpar. No caso, se pode ver na Tabela 1 que o sinal que precede o 1º produto é +, porque a permutação (1 2) é de classe par, e que o sinal que precede o 2º produto é –, porque a permutação (2 1) é de classe ímpar.

$$+a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4º) Efetua a soma algébrica dos produtos elementares obtidos, com o que se terá:

$$detA = +a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

isto é:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Por comodidade, costuma-se dizer que o determinante de 2º ordem é igual ao termo principal menos o termo secundário.

3.4 CÁLCULO DO DETERMINANTE DE ORDEM 3

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

para calcular o determinante dessa matriz

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

deve-se, de acordo com a definição, proceder do seguinte modo

1º) Escrever os elementos que compõem o termo principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundos índices), tantas vezes quantas forem as permutações dos números 1, 2 e 3 (no caso, seis vezes):

$$a_1a_2a_3 \quad a_1a_2a_3 \quad a_1a_2a_3$$
$$a_1a_2a_3 \quad a_1a_2a_3 \quad a_1a_2a_3$$

2º) Colocar, as seis expressões anteriores, como segundos índices, as permutações (1 2 3), (1 3 2), (3 1 2), (2 1 3), (2 3 1) e (3 2 1), uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem:

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad a_{11}a_{23}a_{32} \quad a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$a_{12}a_{21}a_{33} \quad a_{12}a_{23}a_{31} \quad a_{13}a_{22}a_{31}$$

3º) Fazer preceder cada um dos produtos assim formados dos sinais + ou –, conforme a permutação dos segundos índices for de classe par ou de classe ímpar. No caso, como se pode ver na Tabela 2:

a) o sinal que precede o 1º produto é +, porque a permutação (1 2 3) é de classe par;

b) o sinal que precede o 2º produto é –, porque a permutação (1 3 2) é de classe ímpar;

c) o sinal que precede o 3º produto é +, porque a permutação (3 1 2) é de classe par;

d) o sinal que precede o 4º produto é –, porque a permutação (2 1 3) é de classe ímpar;

e) o sinal que precede o 5º produto é +, porque a permutação (2 3 1) é de classe par;

f) o sinal que precede o 2º produto é –, porque a permutação (3 2 1) é de classe ímpar:

$$+a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

4º) Efetuar a soma algébrica dos produtos elementares assim obtidos, com o que se terá:

$$detA = a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$
$$-a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$$

Essa fórmula pode ser transformada na seguinte:

$$detA = a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}) - a_{12}.(a_{21}.a_{33} - 0a_{23}.a_{31})$$
$$+ a_{13}.(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31}),$$

ou

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

3.5 REGRA DE SARRUS

Sabe-se que

$$detA = a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}) - a_{12}.(a_{21}.a_{33} - 0a_{23}.a_{31})$$
$$+ a_{13}.(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31}),$$

então

$$detA = a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$
$$-a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{13}.a_{22}.a_{31}.$$

Separando os produtos elementares positivos dos negativos através da comutatividade da adição, teremos

$$detA = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$
$$-a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33},$$

Então,

$$detA = (a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32})$$
$$-(a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33}),$$

o que equivale a realizar o seguinte procedimento:

1) O primeiro passo consiste em expandir a matriz original. Para isso, as duas primeiras colunas da matriz são reescritas na mesma ordem, posicionadas à direita da matriz original. Esta ação cria um arranjo retangular com três colunas iniciais e duas colunas repetidas.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{matrix}$$

2) Com a matriz expandida, o cálculo é feito através da soma e subtração de produtos formados por diagonais:

Produtos Positivos (Diagonais Principais): São identificadas e multiplicadas as três diagonais que se estendem no sentido da principal (da esquerda para a direita, de cima para baixo). O resultado da soma destes três produtos é mantido com sinal positivo.

Produtos Negativos (Diagonais Secundárias): São identificadas e multiplicadas as três diagonais que se estendem no sentido da secundária (da direita para a esquerda, de cima para baixo). O resultado da soma destes três produtos é invertido (subtraído) no cálculo final.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{matrix}$$

3) O determinante da matriz de ordem 3 é, então, dado pela soma algébrica dos produtos positivos e dos produtos negativos (ou seja, a soma dos produtos das diagonais principais menos a soma dos produtos das diagonais secundárias).

A Regra de Sarrus fornece, assim, uma ferramenta rápida para o cálculo de determinantes de terceira ordem, embora sua aplicação seja estritamente limitada a este tipo de matriz.

3.6 DESENVOLVIMENTO DO DETERMINANTE PELA PRIMEIRA LINHA

É possível escrever o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

efetuando as seguintes operação:

- Multiplicar o elemento a_{11} da 1ª linha pelo determinante menor da submatriz de A, que se obtém eliminando a 1ª linha e a 1ª coluna:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};\ a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32})$$

- Multiplicando o elemento a_{12} da 1ª linha pelo determinante menor da submatriz de A, que se obtém a 1ª linha e a 2ª coluna:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};\ a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31})$$

- Multiplicando o elemento a_{13} da 1ª linha pelo determinante menor da submatriz de A, que se obtém a 1ª linha e a 3ª coluna:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};\ a_{32}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}.(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31})$$

- Fazer os três produtos obtidos anteriormente serem precedidos alternadamente pelos sinais + e −, iniciando pelo sinal +:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}) - a_{12}.(a_{21}.a_{33} - 0a_{23}.a_{31})$$

$$+ a_{13}.(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31})$$

ou, simplesmente:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Essa maneira de escrever a fórmula para calcular o determinante de uma matriz de 3ª ordem é comumente denominada *desenvolvimento do determinante pela 1ª linha.*

3.7 COFATORES

Se A é uma matriz quadrada, então o *determinante menor* da entrada a_{ij}, ou simplesmente o *menor* de a_{ij}, é denotado por M_{ij} e definido como o *determinante da submatriz*, obtido ao suprimirmos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. O número $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ é chamado de *cofator de* a_{ij}.

3.8 EXPANSÃO EM COFATORES (TEOREMA DE LAPLACE)

O determinante de uma matriz A, de tamanho $n \times n$ pode ser calculado multiplicando-se as entradas de qualquer linha (ou coluna) pelos seus cofatores e somando os produtos resultantes, ou seja, para quaisquer $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$, vale que:

1) $\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$, que é uma expansão em cofatores, ao longo da j-ésima coluna da matriz A;

2) $\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$, que é uma expansão em cofatores, ao longo da i-ésima linha da matriz A.

3.9 CÁLCULO DO DETERMINANTE DE ORDEM 4

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

para calcular o determinante dessa matriz

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

pela expansão do cofatores, ao longo da primeira linha, teremos:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14}(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

3.10 PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

3.10.1 Propriedade 1: Determinante de uma matriz transposta[4]

O determinante de uma matriz quadrada A qualquer é igual ao determinante de sua matriz transposta, ou seja:

$$detA = det(A^t)$$

3.10.2 Propriedade 2: Fila (linha ou coluna) nula

Se os elementos de uma fila de uma matriz quadrada A forem todos nulos, então $detA = 0$.

3.10.3 Propriedade 3: Permutação de filas paralelas

Permutando entre si duas filas paralelas de uma matriz quadrada A, obtemos uma nova matriz B tal que $detB = -detA$.

3.10.4 Propriedade 4: Produto de um número por um determinante

Multiplicando uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada A por um número real k, obtemos uma nova matriz B tal que $detB = k.detA$.

3.10.5 Propriedade 5: Filas paralelas iguais

Se uma matriz quadrada A tem duas filas paralelas iguais, então $detA = 0$.

3.10.6 Propriedade 6: Filas paralelas múltiplas

Se, em uma matriz quadrada A, uma fila é múltipla de outra fila paralela, então $detA = 0$.

[4] **Matriz transposta** é fundamental na álgebra linear e consiste, basicamente, na reorganização dos elementos de uma matriz A original, trocando-se as suas linhas pelas suas colunas; é denotada por A^t.

3.10.7 Propriedade 7: Determinante de uma matriz triangular

O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

3.10.8 Propriedade 8: Soma de determinantes

Sejam A, B e C matrizes quadradas de mesma ordem tais que:

- cada elemento de uma fila r de A seja igual à soma de seus correspondentes em B e C;
- excetuando-se os elementos da fila r de A, todos os demais elementos correspondentes nas três matrizes sejam iguais.

Nessas condições, temos:

$$detA = detB + detC$$

De modo geral,

$$detA \neq detB + detC$$

3.10.9 Propriedade 9: Combinação linear[5]

Se uma fila de uma matriz quadrada A é combinação linear de outra duas ou mais filas paralelas, então $detA = 0$.

3.10.10 Propriedade 10: Teorema de Jacobi

Se a uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada A for adicionada uma múltipla de outra fila paralela, obtemos uma matriz B tal que $detA = detB$.

3.10.11 Propriedade 11: Teorema de Cauchy

Em toda matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$, a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos cofatores dos elementos correspondentes da outra fila paralela é igual a zero.

[5] expressão matemática que resulta da soma de um conjunto de termos, onde cada termo é multiplicado por um coeficiente (um número constante).

3.10.12 Propriedade 12: Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadrada de mesma ordem, então:

$$\det(A.B) = detA\,.\,detB$$

4 ALGUMAS APLICAÇÕES

Este capítulo visa demonstrar a relevância prática e conceitual do cálculo de determinantes ao longo do currículo de Matemática, reforçando a importância do domínio operacional e teórico do tema. O determinante é apresentado não apenas como um valor numérico associado a uma matriz, mas como uma ferramenta unificadora em diversas áreas da Matemática, da Física e da Engenharia.

O embasamento teórico para as aplicações do determinante é vasto e transversal a diferentes níveis de ensino. Nesse sentido, o estudo da inversão de matrizes, utilizando o conceito de matriz adjunta e área de triângulos dados três pontos, é abordado conforme o material de Matemática do Ensino Médio (PAIVA, et al.). Além disso, referências de Álgebra Linear (ANTON; RORRES, et al.) fundamentam a relação entre determinantes, a solução de sistemas lineares e a determinação de equações de curvas e superfícies (planas e espaciais). Por fim, o aspecto geométrico, que inclui o cálculo do Produto Vetorial e a área do paralelogramo, é detalhado por (REIS; SILVA, et al.), consolidando o determinante como uma ferramenta unificadora entre Álgebra e Geometria.

4.1 UM MÉTDO PARA INVERSÃO DE MATRIZES

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem n e $AB = I_n$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n, então A e B são inversas entre si.

Será mostrado a seguir, um método ágil para obtenção de tal inversa. Para isso, necessitamos do conceito de matriz adjunta:

Matriz adjunta: Dada a matriz quadrada de ordem n, $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, consideremos a matriz $cofA = \left[C_{ij}\right]_{n\times n}$, em que cada C_{ij} é o cofator do elemento a_{ij}. A transposta da matriz $cofA$ é chamada de *matriz adjunta de A,* que indicamos por $\bar{A} = (cofA)^t$.

Teorema 1: Sendo A uma matriz quadrada qualquer de ordem n, temos:

$$A.\bar{A} = (detA).I_n$$

Cálculo da inversa de uma matriz: Se A é uma matriz quadrada com $detA \neq 0$, então $A.(\frac{1}{detA}.\bar{A}) = I_n$, e portanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.\bar{A}$$

4.2 ÁREA DO TRIÂNGULO DADO TRÊS PONTOS

A Topografia, uma ciência fundamentada na Geometria e na Trigonometria, tem como objetivo descrever e representar graficamente pequenas partes da superfície terrestre, sem levar em consideração a curvatura da Terra. O levantamento topográfico de uma região é um conjunto de informações que dizem respeito à área, às dimensões lineares e angulares, à forma do contorno, à representação gráfica e à posição da região em relação a um plano tomado como referência. Esse levantamento é um dos primeiros procedimentos que antecedem pequenas ou grandes obras de engenharia, desde um simples loteamento até a construção de aeroportos, barragens, estradas etc. Há diversos processos para o cálculo de áreas em um levantamento topográfico; um deles, chamado de processo analítico, tem estreita ligação com o cálculo de determinantes. Nesse processo, utiliza-se a fórmula apresentada a seguir, que é estudada em Geometria analítica.

Se, em relação a um plano cartesiano, os vértices de um triângulo ABC são dados por (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), então a área A desse triângulo é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2},$$

em que

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.3 CONSTRUINDO CURVAS E SUPERFÍCIES POR PONTOS ESPECÍFICOS

Teorema 2: Um sistema linear homogêneo com o mesmo número de equações e de incógnitas tem uma solução não trivial se, e somente se, o determinante da matriz de coeficientes é zero.

Será mostrado a seguir, como esse resultado pode ser usado para determinar as equações de várias curvas e superfícies por pontos especificados.

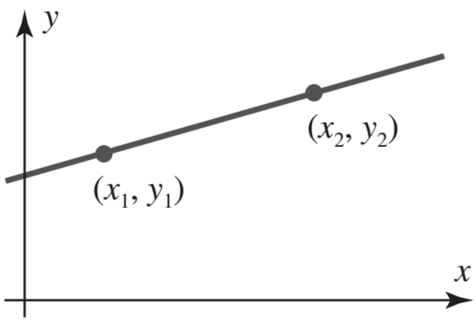
4.3.1 Uma reta por dois pontos

Suponha que (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sejam dois pontos distintos no plano cartesiano. Existe uma única reta

$$c_1x + c_2y + c_3 = 0$$

que passa por esses dois pontos de acordo com a Figura 1.

Figura 1



Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 520).

Observe que c_1, c_2 e c não são todos nulos e que esses são únicos a menos de uma constante multiplicativa. Como (x_1, y_1) e (x_2, y_2) estão na reta, substituindo-os na equação acima, obtemos as equações

$$c_1x_1 + c_2y_1 + c_3 = 0$$

$$c_1x_2 + c_2y_2 + c_3 = 0.$$

As três equações podem ser agrupadas e reescritas como

$$xc_1 + yc_2 + c_3 = 0$$

$$x_1c_1 + y_1c_2 + c_3 = 0$$

$$x_2c_1 + y_2c_2 + c_3 = 0$$

que é um sistema homogêneo de três equações e três incógnitas c_1, c_2 e c. Como c_1, c_2 e c não são todos nulos, o sistema tem uma solução não trivial, de modo que o determinante do sistema deve ser zero. Ou seja,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Consequentemente, cada ponto (x, y) da reta satisfaz a igualdade acima; reciprocamente, pode ser mostrado ponto (x, y) que satisfaz a igualdade, está na reta.

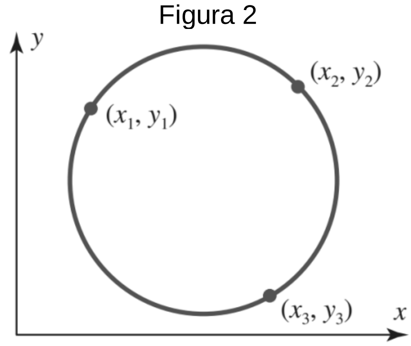
4.3.2 Uma circunferência por três pontos

Suponha que (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) sejam três pontos não colineares do plano cartesiano. Da Geometria Analítica sabemos que existe uma única circunferência,

$$c_1(x^2 + y^2) + c_2 x + c_3 y + c_4 = 0$$

que passa por estes três pontos, conforma a Figura 2.

Figura 2



Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 521).

A substituição das coordenadas dos três pontos nessa equação fornece,

$$c_1({x_1}^2 + {y_1}^2) + c_2 x_1 + c_3 y_1 + c_4 = 0$$
$$c_1({x_2}^2 + {y_2}^2) + c_2 x_2 + c_3 y_2 + c_4 = 0$$
$$c_1({x_3}^2 + {y_3}^2) + c_2 x_3 + c_3 y_3 + c_4 = 0$$

Como antes, as quatro equações acima formam um sistema linear homogêneo com uma solução não trivial em c_1, c_2, c_3 e c_4. Assim, o determinante da matriz dos coeficientes é zero.

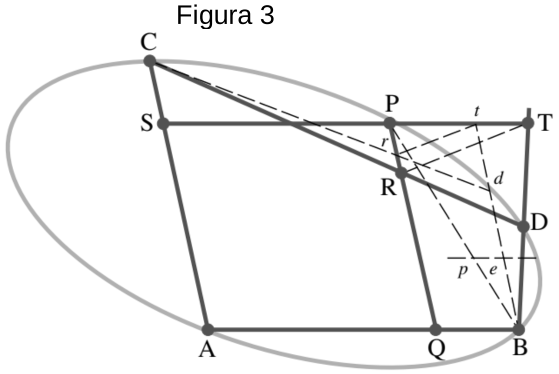
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Essa é a equação do círculo em forma de determinante.

4.3.3 Uma cônica arbitrária por cinco pontos

Em seu trabalho monumental *Principia Mathematica,* Isaac Newton propôs resolver o seguinte problema (Livro I, Proposição 22, Problema 14): “Descrever uma cônica que deve passar por cinco pontos dados”. Newton resolveu esse problema geometricamente, conforme a Figura 3, em que traçou uma elipse pelos pontos A, B, D, P e C. Entretanto, também pode ser aplicados os métodos desta seção.

Figura 3



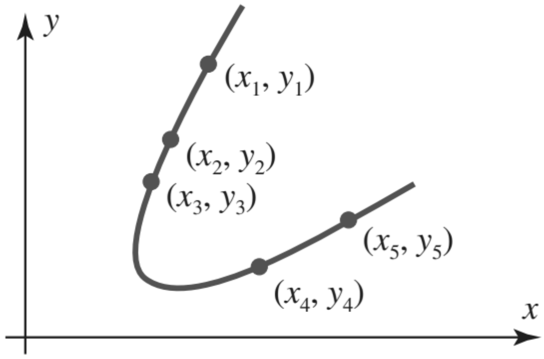
Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 522).

A equação geral de uma cônica arbitrária no plano cartesiano (uma parábola, hipérbole ou elipse, ou formar degeneradas dessas) é dada por

$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0.$$

Essa equação contém seis coeficientes, mas pode-se reduzir para cinco dividindo toda a equação por um dos coeficientes que não seja nulo. Assim, basta determinar cinco coeficientes e, portanto, cinco pontos distintos do plano cartesiano são suficientes para determinar a equação da cônica de acordo com a Figura 4.

Figura 4



Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 522).

Como antes, a equação pode ser posta na forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplo 1: A equação de uma órbita

Um astrônomo que deseja determinar a órbita de um asteróide em torno do Sol monta um sistema de coordenadas cartesianas no plano da órbita, com o Sol na origem. Ao longo dos eixos, são usadas unidades astronômicas (UA), que representam a distância média entre a Terra e o Sol, onde 1UA = 149,5 milhões de quilômetros.

Pela primeira de lei de Kepler, a órbita deve ser uma elipse, de modo que o astrônomo faz cinco observações do asteróide em cinco tempos distintos e encontra cinco pontos ao longo da órbita, a saber,

$$(8{,}025; 8{,}310), (10{,}170; 6{,}355), (11{,}202; 3{,}212), (10{,}736; 0{,}375), (9{,}092; -2{,}267)$$

Encontre sua órbita.

Solução: Substituindo as coordenadas dos cinco pontos dados no determinante acima e arredondando até a terceira casa decimal, obtém-se

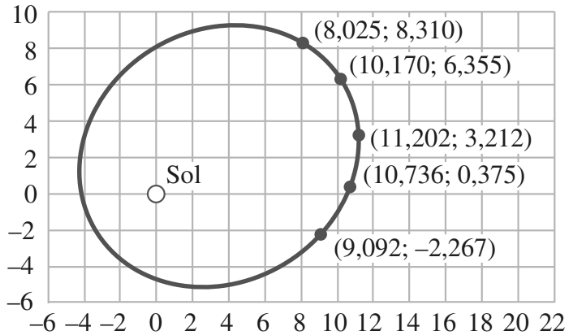
$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 64{,}401 & 66{,}688 & 8{,}025 & 8{,}025 & 8{,}310 & 1 \\ 103{,}429 & 64{,}630 & 11{,}170 & 10{,}170 & 6{,}355 & 1 \\ 125{,}485 & 35{,}981 & 11{,}202 & 11{,}202 & 3{,}212 & 1 \\ 115{,}262 & 4{,}026 & 10{,}736 & 10{,}736 & 0{,}375 & 1 \\ 82{,}664 & -20{,}612 & 9{,}092 & 9{,}092 & -2{,}267 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A expansão desse determinante em cofatores ao longo da primeira linha fornece

$$386{,}802x^2 - 102{,}895xy + 446{,}029y^2 - 2\,476{,}443x - 1427{,}998y - 17109{,}375 = 0.$$

A Figura 5 é um diagrama da órbita, junto com os cinco pontos dados.

Figura 5



Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 523).

4.3.4 Um plano por três pontos

O plano tridimensional de equação

$$c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0$$

que passa por três pontos não colineares $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ e (x_3, y_3, z_3) é dada pela equação em forma de determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4.3.5 Uma esfera por quatro pontos

A esfera no espaço tridimensional de equação

$$\boldsymbol{c}_1(x^2 + y^2 + z^2) + c_2x + c_3y + c_4z + c_5 = 0$$

que passa por quatro pontos não-coplanares $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ e (x_4, y_4, z_4) é dada pela equação em formato de determinante

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4.4 PRODUTO VETORIAL

Uma das aplicações mais importantes do cálculo de determinantes é a do produto vetorial, que é umas das bases da Geometria Analítica e tem diversas aplicações na Álgebra Linear, no Cálculo, na Física e em outras áreas. Serão apresentados alguns resultados que podem ser encontrados facilmente no livro de Geometria Analítica dos autores Reis e Silva.

Para determinar um vetor $w = (x, y, z)$ que seja simultaneamente perpendicular a dois vetores dados, $u = (a, b, c)$ e $v = (a_1, b_1, c_1)$, deve-se ter simultaneamente $u.w = 0$ e $v.w = 0$, o que resulta no sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z = 0. \end{cases}$$

Este sistema admite infinitas soluções. Umas delas é

$$x = bc_1 - b_1c$$

$$y = a_1c - ac_1$$

$$z = ab_1 - a_1c,$$

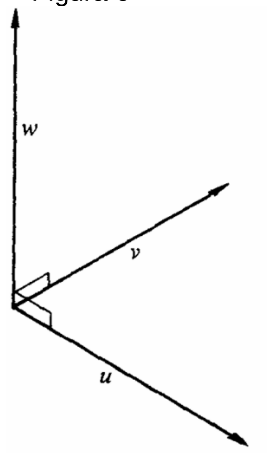
como pode ser verificado por substituição. Portanto, o vetor

$$w = (bc_1 - b_1c\ , a_1c - ac_1\ , ab_1 - a_1c)$$

é simultaneamente perpendicular a $u = (a, b, c)$ e $v = (a_1, b_1, c_1)$. Veja a figura 6.

O vetor w é chamado de $produtovetorial$ de u por v e é indicado por $u \times v$ou $u \wedge v$.

Figura 6



Fonte: Reis e Silva (1995, p. 99).

Um método para calcular o produto vetorial sem esforço de memória é

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix},$$

onde $\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$, de modo que $(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

É fácil verificar que o produto vetorial não é comutativo, já que $u \wedge v = -v \wedge u$. Portanto, os produtos vetoriais $u \wedge v$ e $v \wedge u$ são ambos perpendiculares a u e v mas possuem sentidos opostos, por conta das propriedades dos determinantes.

Em relação a adição, a operação produto vetorial é distributiva tanto à direita quanto à esquerda, tem-se

$$(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$$

$$w \wedge (u + v) = w \wedge u + w \wedge v,$$

quaisquer que sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

A multiplicação de um vetor por escalar satisfaz

$$(ku) \wedge v = u \wedge (kv) = k(u \wedge v),$$

quaisquer que sejam os vetores u e v e o número k real.

As propriedades acima podem ser facilmente demonstradas utilizando a definição de produto vetorial, já a propriedade associativa não se verifica, de modo geral

$$u \wedge (v \wedge w) \neq (u \wedge v) \wedge w.$$

Na demonstração da proposição seguinte será utilizado a seguinte igualdade

$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u.v)^2,$$

cuja prova pode ser obtida desenvolvendo ambos os membros da igualdade em termos de coordenadas de u e v e comparando-as.

Proposição 1: Quaisquer que sejam os vetores não-nulos u e v de $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\| sen\theta,$$

onde θ é o ângulo entre u e v.

Prova:

$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u.v)^2$$
$$= \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 cos^2\theta$$
$$= \|u\|^2\|v\|^2(1 - cos^2\theta)$$
$$= \|u\|^2\|v\|^2 sen^2\theta.$$

De

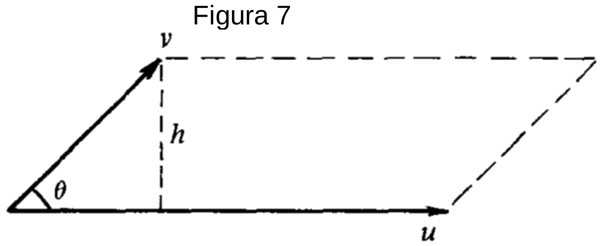
$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 sen^2\theta,$$

temos

$$\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\| sen\theta \blacksquare$$

Na figura 7 está representado o paralelogramo definido pelos vetores u e v, isto é, o paralelogramo cujos lados são as setas que representam u e v.

Figura 7



Fonte: Reis e Silva(1995, p. 103).

A área deste paralelogramo, como se aprende em Geometria Elementar, é dada por

$$Área = base \times altura.$$

No caso, a base é $\|u\|$ e altura h é

$$h = \|v\| sen\theta.$$

Logo, a área A é

$$A = \|u\|\|v\| sen\theta = \|u \wedge v\|.$$

Assim, o vetor $u \wedge v$ é tal que seu módulo é numericamente igual à área do paralelogramo definido por u e v.

5 UMA ALTERNATIVA PARA CALCULAR O DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE ORDEM 4

Agora, será apresentada uma forma alternativa para calcular o determinante de uma matriz de ordem 4×4, como resposta a um questionamento que surgiu em uma aula de introdução à Álgebra Linear, no curso de licenciatura em Matemática: “existe um procedimento para calcular o determinante de uma matriz de ordem 4, análogo ao do cálculo de determinante de ordem 3 pela regra de Sarrus?”

Após alguns momentos de reflexão sobre a questão proposta e de alguns experimentos realizados com matrizes de ordem 4, verificamos que podemos realizar o cálculo de tal determinante da seguinte forma:

Acrescentamos à direita da matriz a primeira coluna, a segunda coluna e a terceira coluna, nessa ordem, logo em seguida, acrescentamos a primeira coluna novamente, depois acrescentamos a quarta coluna, a segunda, a terceira e a primeira coluna, nessa ordem, e então repetimos a segunda coluna; em sequência, acrescentamos a quarta, a terceira, a primeira e a segunda, como mostra a Figura 8:

Figura 8

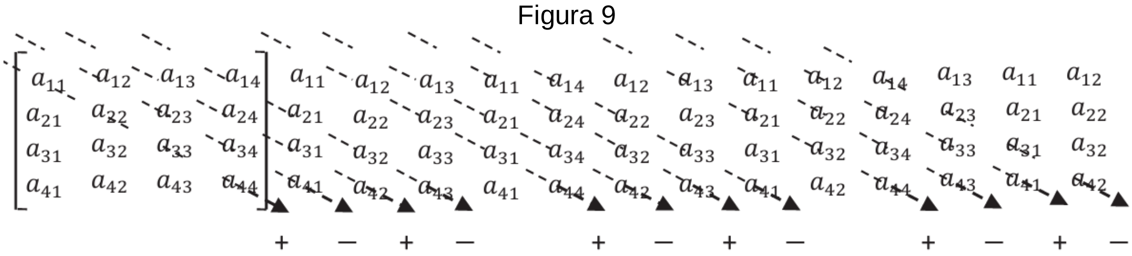
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{43} & a_{41} & a_{42} \end{matrix}$$

Fonte: Brazil Júnior e Silva (2014, p. 29).

Observamos, na Figura 8, que o índice j em cada coluna é ordem em que as mesmas foram acrescentadas.

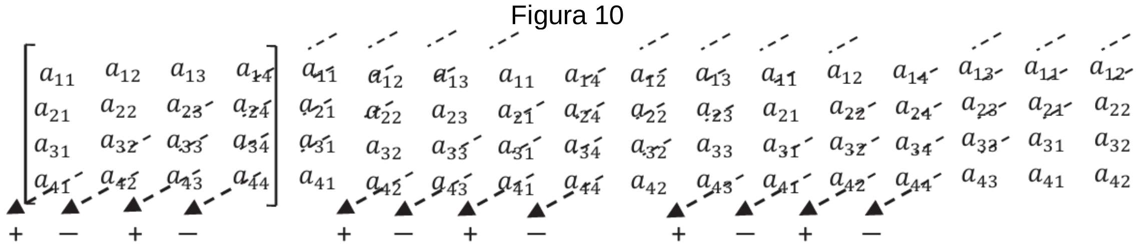
Depois de termos realizado a ação de acrescentar as colunas na sequência descrita acima, verificamos que os produtos elementares, com sinal, aparecem naturalmente, como podemos verificar olhando as “flechas” direcionadas para a direita, conforme a Figura 9, e as “flechas” direcionadas para a esquerda, de acordo com a Figura 10.

Figura 9



Fonte: Brazil Júnior e Silva (2014, p. 30).

Figura 10



Fonte: Brazil Júnior e Silva (2014, p. 30).

Observe, entretanto, que a disposição das “flechas” (diagonais) não é contínua, mas sim intercalada para coincidir com os doze termos necessários para o cálculo completo. Colocamos uma sequência de quatro flechas e pulamos mais uma diagonal e, por fim, uma sequência de mais quatro flechas. Não só isso, pode-se observar que a paridade das permutações aparece de forma alternada, facilitando com isso os cálculos.

Agora, realizamos a soma dos produtos das entradas das flechas direcionadas para direita e direcionadas para esquerda, obedecendo a paridade de cada produto, como vemos na Figura 9 e na Figura 10, temos o determinante da matriz de ordem 4×4.

Observamos que para realizamos esse procedimento, basta que o leitor memorize a seguinte sequência para alocar as colunas à direita da matriz: 1ª, 2ª, 3ª, 1ª, 4ª, 2ª, 3ª, 1ª, 2ª, 4ª, 3ª, 1ª e 2ª.

5.1 DESENVOLVIMENTO DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

A intervenção pedagógica foi realizada com 30 (trinta) alunos regularmente matriculados na 2ª série do Ensino Médio de uma instituição escolar da rede privada localizada no município de Rio Branco, Acre. A escolha deste nível de ensino se justifica pelo estudo das matrizes e determinantes se darem nessa série e pela adequação do tema de determinantes à Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Além da adequação à BNCC, a escolha da 2ª série do Ensino Médio deve-se ao fato de que, neste estágio, os alunos já consolidaram os conceitos de Matrizes de ordem 2×2 e 3×3, incluindo o método direto de Sarrus, o que garante a base cognitiva e procedimental necessária para a introdução do cálculo de determinantes de ordem superior (4×4). À vista disso, a intervenção funcionou como uma extensão e aprofundamento do conteúdo de matrizes e determinantes, frequentemente abordado na parte final do currículo de Matemática do Ensino Médio, preparando os estudantes para conceitos mais avançados de Álgebra.

Conforme a teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget (1973), a 2ª série do Ensino Médio representa um período de transição cognitiva, o qual os estudantes demonstram maior capacidade para o pensamento abstrato e formal. Sendo assim, esse nível de maturidade permite que eles não apenas executem os procedimentos (método dos cofatores e método das "flechas"), mas também comparem criticamente a complexidade e a eficiência operacional entre eles. Consequentemente, o grupo está em um estágio ideal para engajar-se em uma análise metacognitiva sobre a eficácia das diferentes abordagens matemáticas, o que é central para os objetivos desta pesquisa didática.

A intervenção pedagógica utilizou como princípio didático a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (2003). Partiu-se do pressuposto de que o conhecimento do cálculo de determinantes 3×3 (Regra de Sarrus) atuaria como um organizador prévio para a introdução do novo procedimento. A sequência da aula, que incluiu a comparação crítica entre o registro formal (cofatores) e o registro visual/operacional (diagrama de flechas), buscou atender à necessidade de conversão de registros de representação semiótica, conforme preconiza Duval (2003), visando uma compreensão mais robusta dos determinantes por parte dos estudantes do Ensino Médio.

A atividade de intervenção buscou comparar a eficiência e a percepção dos estudantes sobre o método tradicional e a proposta alternativa das flechas. A aplicação foi conduzida em um único encontro, com duração total de aproximadamente 70 (setenta) minutos, e seguiu o seguinte protocolo didático:

5.1.1 Momento 1 - Revisão do conceito de determinantes e o cálculo para determinantes de ordem 2 e de ordem 3 (15 minutos):

Esta etapa inicial da intervenção pedagógica teve como objetivo fundamental revisar e consolidar o conhecimento prévio dos estudantes sobre o conceito e o cálculo de determinantes de ordens 2 e ordem 3. Essa revisão atuou como o organizador prévio, estabelecendo a base cognitiva necessária para a introdução do método análogo à Regra de Sarrus para matrizes de ordem 4.

Inicialmente, o conceito de determinante foi reforçado como um número escalar único associado a qualquer matriz quadrada. Foi crucial discutir brevemente a utilidade matemática desse valor, mencionando seu papel na verificação de inversibilidade de matrizes e na resolução de sistemas de equações lineares. Este foco assegurou que a aula se concentrasse no conceito e não apenas no procedimento.

Em seguida, a revisão se concentrou no cálculo de ordem 2. O determinante é obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Este cálculo foi elementar e serviu para introduzir a ideia das diagonais e do sinal alternado na soma dos produtos, que são princípios centrais para o novo método que foi apresentado.

O ponto focal da revisão foi a Regra de Sarrus. O procedimento é detalhado em três fases:

1º **Repetição de Colunas:** A matriz é estendida com a repetição das duas primeiras colunas à sua direita.

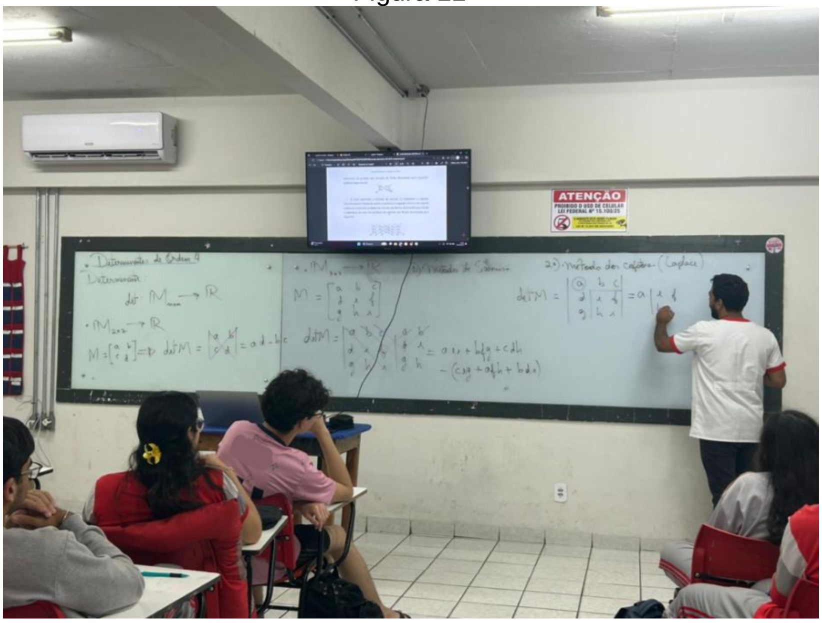
2º **Cálculo dos Produtos:** São identificadas as três diagonais principais (produtos positivos) e as três diagonais secundárias (produtos negativos).

3º **Soma Algébrica:** O determinante é o resultado da soma algébrica dos seis produtos elementares.

Em seguida, foi realizada a resolução de um determinante 3×3 pelo método dos cofatores. Esta etapa foi crucial, pois mostrou aos alunos ao método formal que é obrigatório para ordens superiores, permitindo que eles comparassem a complexidade e a extensão do cálculo com o de Sarrus, mesmo para uma matriz de ordem 3. A observação de que o método de cofatores exige o cálculo de três determinantes de ordem 2 (e respectivas paridades) serviu como uma introdução direta à dificuldade que seria enfrentado no cálculo do determinante de ordem 4 .

Esses procedimentos foram feitos de forma dinâmica, conforme pode ser visto na Figura 11.

Figura 11



Fonte: Acervo pessoal, 2025

5.1.2 Momento 2 - Cálculo do determinante de ordem 4 pelo método dos cofatores (10 minutos)

Finalmente, foi feita a transição para a matriz 4×4 ao identificar a limitação da Regra de Sarrus (que só funciona para ordem 3). Apresentou-se, então, o método dos cofatores como a resposta canônica e formal para ordens superiores. Essa complexidade do método dos cofatores justificou a necessidade didática de introduzir um procedimento alternativo que simplificasse a operacionalização para o cálculo de determinantes de ordem 4.

5.1.3 Momento 3 - Apresentação do procedimento alternativo - método das “flechas” (15 minutos)

Após a revisão dos métodos para determinantes de ordens 2 e 3 (Sarrus e cofatores) e a exploração do método formal dos cofatores para matrizes 4×4, a intervenção pedagógica avançou para a apresentação da proposta central desta pesquisa: o procedimento alternativo das "flechas". Este método foi introduzido como uma alternativa didática e operacionalmente mais acessível para o cálculo de determinantes de ordem 4.

A apresentação aos estudantes seguiu os seguintes passos:

1º Contextualização da Necessidade:

Inicialmente, foi reforçada a elevada complexidade e o tempo de execução demandados pelo método dos cofatores para matrizes 4×4, que exige a resolução de quatro determinantes de ordem 3. Esta contextualização visou legitimar a busca por um método mais simplificado.

2º Analogia com a Regra de Sarrus:

O procedimento foi introduzido por meio de uma analogia direta com a Regra de Sarrus, familiar aos alunos para o cálculo de determinantes 3×3. Explicou-se que, assim como Sarrus, o novo método baseia-se na repetição de colunas e na soma algébrica de produtos elementares obtidos por diagonais.

3º Explicação Detalhada da Expansão da Matriz:

Foi demonstrado como expandir a matriz original de ordem 4. Diferentemente de Sarrus, que repete duas colunas, o método das "flechas" requer a repetição das colunas em uma sequência específica: 1ª, 2ª, 3ª, 1ª, 4ª, 2ª, 3ª, 1ª, 2ª, 4ª, 3ª, 1ª e 2ª.

A sequência de colunas adicionadas à direita da matriz original foi apresentada e visualizada, conforme ilustrado na Figura 1. Esta etapa é crucial para a correta identificação dos produtos elementares.

4º Identificação dos Produtos Elementares (Diagonais):

Após a expansão da matriz com as colunas auxiliares, a etapa mais crítica foi a leitura e a soma dos produtos elementares. Os alunos foram orientados sobre o padrão preciso de identificação e paridade: positivo ou negativo.

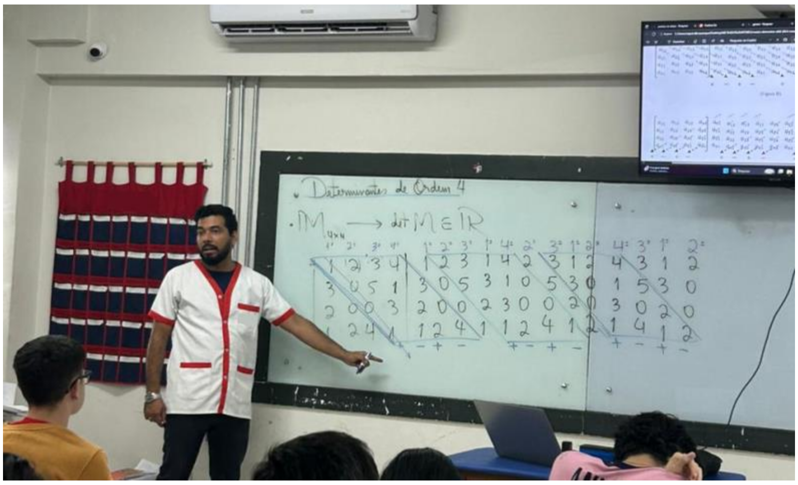
5º Identificação dos Produtos:

Os produtos elementares foram identificados seguindo as "flechas" direcionadas para a direita e para a esquerda.

6º Padrão de Paridade e Pulo:

Foi explicitado que, a cada quatro produtos lidos consecutivamente, ocorre uma interrupção (o "pulo" de uma diagonal, conforme a Figura 12), e o sinal de paridade dos produtos se alterna a cada diagonal lida.

Figura 12



Fonte: Acervo pessoal, 2025.

O procedimento, deste modo, exige uma leitura sequencial e intercalada das diagonais, onde a disposição não contínua das "flechas" é essencial para abranger os 24 termos elementares 4! do determinante de ordem 4, garantindo a correta alternância de paridade e evitando termos excedentes.

O cálculo do determinante da matriz de ordem 4 é obtido, finalmente, pela soma algébrica de todos os produtos das entradas das "flechas" positivas e negativas, confirmando-se que este padrão de leitura reproduz o resultado do determinante.

5.1.4 Momento 4 - Aplicação prática do novo método pelos alunos (25 minutos)

Nesta fase, os alunos passaram da observação passiva para a aplicação ativa, requisito central para o desenvolvimento do pensamento formal e dedutivo (Piaget).

Teste Individual: Cada um dos 30 alunos foi desafiado a utilizar o recém-apresentado procedimento para calcular o determinante de uma matriz de ordem 4 inédita.

Comparação Operacional: Os alunos foram instruídos a realizar a expansão da matriz e a identificar os produtos elementares, seguindo o padrão de intercalação e paridade das diagonais.

Feedback e Consolidação: Durante a execução, o professor pesquisador circulou pela sala, observando as dificuldades procedimentais e fornecendo *feedback* imediato. Esta etapa permitiu que os estudantes comparassem a complexidade operacional do método alternativo com a lembrança do método dos cofatores, reforçando a percepção de eficiência do procedimento alternativo das setas.

Na Figura 13, pode-se observar alguns alunos realizando os seus devidos cálculos.

Figura 13

Fonte: Acervo pessoal, 2025.

O resultado obtido por cada aluno foi confrontado com os cálculos feitos previamente pelo Excel, utilizando a mesma matriz que foi proposta a eles.

5.1.5 Momento 5 - Verificando no Excel (5 minutos)

Para testar a veracidade do método descrito acima, foi usado a seguinte matriz no Excel, conforme a figura 14:

Figura 14

H11

	A	B	C	D	E	F
2						
3			MATRIZ 4X4			
4			Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4
5			1	2	3	4
6			3	0	5	1
7			2	0	0	3
8			1	2	4	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Em seguida, as colunas foram repetidas na seguinte ordem: 1ª, 2ª, 3ª, 1ª, 4ª, 2ª, 3ª, 1ª, 2ª, 4ª, 3ª, 1ª e 2ª, de acordo com a figura 15.

Figura 15

U11

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1																	
2																	
3	MATRIZ 4X4																
4	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 1	Coluna 4	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 4	Coluna 3	Coluna 1	Coluna 2
5	1	2	3	4	1	2	3	1	4	2	3	1	2	4	3	1	2
6	3	0	5	1	3	0	5	3	1	0	5	3	0	1	5	3	0
7	2	0	0	3	2	0	0	2	3	0	0	2	0	3	0	2	0
8	1	2	4	1	1	2	4	1	1	2	4	1	2	1	4	1	2

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Na célula E12 foi inserida a soma dos produtos das entradas das flechas direcionadas para direita, já na célula E13, a soma dos produtos das entradas das flechas direcionadas para esquerda, obedecendo à paridade de cada produto. O determinante da matriz proposta foi inserido na célula E14, com a soma das células E12 e E13, como pode ser observado na Figura 16.

Figura 16

T19

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1																	
2																	
3	MATRIZ 4X4																
4	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 1	Coluna 4	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 4	Coluna 3	Coluna 1	Coluna 2
5	1	2	3	4	1	2	3	1	4	2	3	1	2	4	3	1	2
6	3	0	5	1	3	0	5	3	1	0	5	3	0	1	5	3	0
7	2	0	0	3	2	0	0	2	3	0	0	2	0	3	0	2	0
8	1	2	4	1	1	2	4	1	1	2	4	1	2	1	4	1	2
9																	
10																	
11																	
12		F. direita	-132														
13		F. esquerd	86														
14		Determina	-46														

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Para tirar a prova real, foi utilizada a função determinante disponível no próprio Excel, que foi inserida na célula E16. Abaixo, nota-se na Figura 17, que os resultados foram semelhantes.

Figura 17

T21

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1																	
2																	
3	MATRIZ 4X4																
4	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 1	Coluna 4	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 4	Coluna 3	Coluna 1	Coluna 2
5	1	2	3	4	1	2	3	1	4	2	3	1	2	4	3	1	2
6	3	0	5	1	3	0	5	3	1	0	5	3	0	1	5	3	0
7	2	0	0	3	2	0	0	2	3	0	0	2	0	3	0	2	0
8	1	2	4	1	1	2	4	1	1	2	4	1	2	1	4	1	2
9																	
10																	
11																	
12		F. direita	-132														
13		F. esquerd	86														
14		Determina	-46														
15																	
16		Det	-46														

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Outros valores foram testados e os resultados foram favoráveis, reforçando que o novo método é verdadeiro.

5.2Análise dos resultados

O questionário foi aplicado imediatamente após a fase de aplicação prática do método das "flechas" e a confrontação dos resultados. Seu objetivo principal foi mensurar a opinião subjetiva dos estudantes em relação a quatro aspectos cruciais: clareza e entendimento (aspecto cognitivo), eficiência e desempenho (velocidade e praticidade), impacto conceitual (confiança e aprendizado) e preferência final de uso entre o método dos cofatores e o procedimento mnemônico proposto.

5.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.2.1 Clareza e Entendimento (Aspecto Cognitivo)

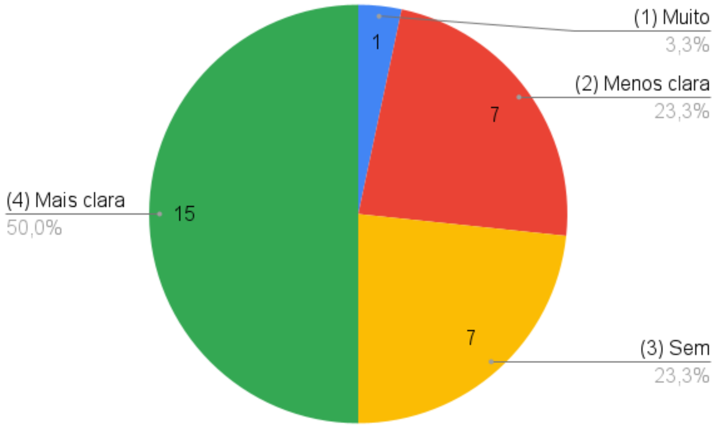
Estas perguntas avaliam o quão fácil foi para o aluno aprender e aplicar as regras do novo método.

Questão 1: A clareza das etapas do novo método comparada ao método tradicional (Sarrus/Laplace) é:

(1) Muito menos clara (2) Menos clara (3) Sem diferença (4) Mais clara (5) Muito mais clara

As respostas dos alunos foram colocados no Gráfico 1:

Gráfico 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Aprovação Majoritária: Metade da turma (50%) classificou o seu novo método como Mais clara (Opção 4). Isso é um dado muito forte que suporta a eficácia didática do procedimento proposto, no que tange à clareza cognitiva. Destarte, comprova-se que a simplificação visual e procedimental foi bem-sucedida para a maioria.

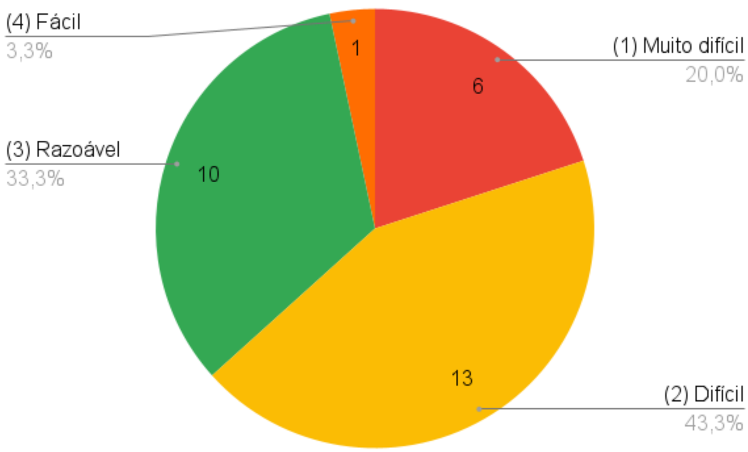
Embora a aprovação seja majoritária (50% no ponto 4), a distribuição mostra uma divisão entre os alunos. O fato de 23,3% acharem o método "Menos claro" (Opção 2) e outros 23,3% acharem que é "Sem diferença" (Opção 3) sugere que, para quase metade da turma, a complexidade da sequência de repetição das colunas ou o padrão de pulo das diagonais pode ter gerado confusão inicial ou não superou a complexidade do método formal.

Questão 2: Quão fácil foi memorizar a regra ou procedimento do novo método?

(1) Muito difícil (2) Difícil (3) Razoável (4) Fácil (5) Muito fácil

Os resultados foram posto no Gráfico 2 a seguir:

Gráfico 2



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

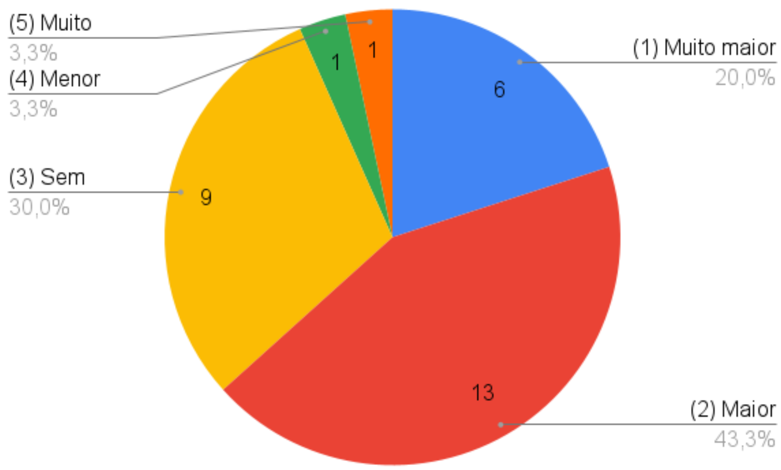
Este dado é crítico e deve ser discutido com cautela. Ele sugere que, embora o método das "flechas" possa ter superado o Cofatores em termos de clareza operacional (como visto na Questão 1), ele introduziu uma nova barreira: a complexidade da regra de expansão, que é difícil de memorizar.

Questão 3: A chance de cometer um erro de sinal (positivo/negativo) é maior ou menor com o novo método?

(1) Muito maior (2) Maior (3) Sem diferença (4) Menor (5) Muito menor

Podemos observar os resultados no Gráfico 3.

Gráfico 3



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Este resultado é consistente com o alto índice de dificuldade na memorização (Questão 2). Se o aluno tem dificuldade em memorizar a longa sequência de repetição de colunas e o padrão de leitura das diagonais com a alternância de sinais, ele naturalmente percebe uma probabilidade maior de errar o sinal durante a execução. O erro de sinal neste método provavelmente está ligado à confusão na aplicação da regra de intercalação e paridade das diagonais.

Questão 4: Qual foi o passo específico do novo método que você considerou mais complicado de executar ou de entender?

Resposta do aluno A: “As sequências das colunas que devem ser repetidas e a questão de pular uma coluna a cada 4 na multiplicação para achar a diagonal principal e secundária”.

Respostado aluno B: “Acredito que o método seja mais prático e eficiente, porém a fase de decorar a sequência se tornou mais complicada no início. Em geral, o método é muito interessante”.

5.2.2 Eficiência e Desempenho (Aspecto da Velocidade e Praticidade)

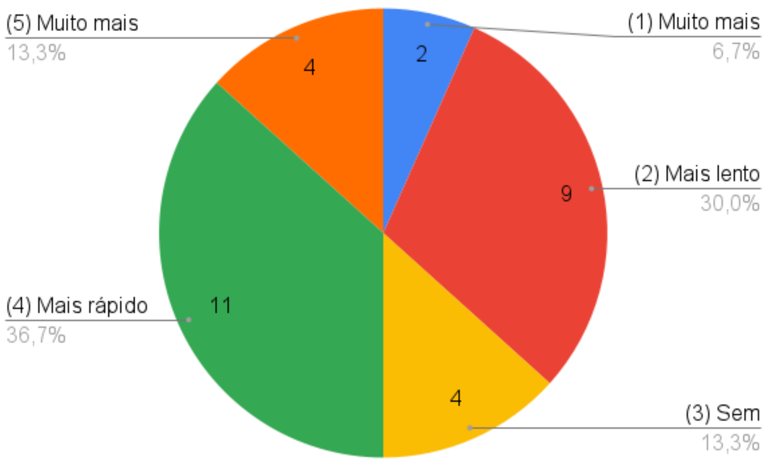
Estas perguntas investigam a percepção do aluno sobre a velocidade e a praticidade na hora de calcular.

Questão 5: Você considera que o novo método é mais rápido do que o método tradicional para calcular determinantes desta ordem 4?

(1) Muito mais lento (2) Mais lento (3) Sem diferença (4) Mais rápido (5) Muito mais rápido

As respostas foram inseridas no Gráfico 4.

Gráfico 4



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

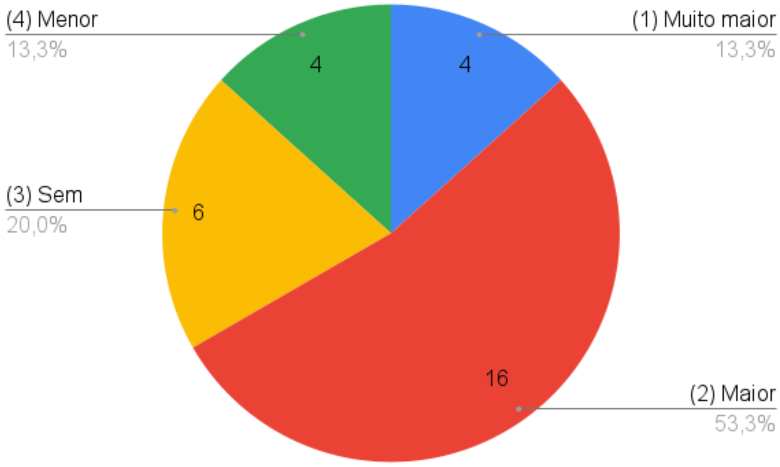
O método das "flechas" demonstrou potencial de ganho de velocidade percebida para metade dos alunos, confirmando o objetivo de simplificação operacional. Contudo, para uma porção considerável da turma, a alta carga cognitiva de memorização (que leva tempo para ser recuperada e aplicada) neutralizou ou até inverteu o ganho de velocidade. Isso reforça a conclusão de que a clareza (Questão 1) e a velocidade (Questão 5) foram percebidas como vantagens, mas a memorização (Questão 2) é a principal falha do procedimento.

Questão 6: O tempo gasto na organização da matriz (reescrever colunas, aplicar transformações) é maior ou menor no novo método?

(1) Muito maior (2) Maior (3) Sem diferença (4) Menor (5) Muito menor

Os resultados estão postos no gráfico 5.

Gráfico 5



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

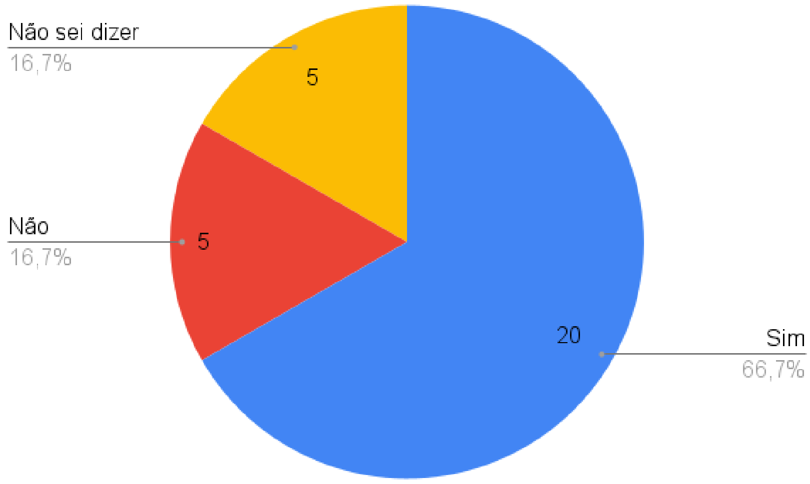
O método das "flechas" introduz uma barreira de entrada (a organização da matriz) que é percebida como mais lenta e laboriosa do que os métodos tradicionais. Apesar da simplificação do cálculo final, a complexidade da fase preparatória compromete o desempenho geral de eficiência e praticidade do método.

Questão 7: O novo método permitiu que você verificasse o resultado final de forma mais fácil?

( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei dizer

Os resultados podem ser conferidos no Gráfico 6.

Gráfico 6



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

O novo método demonstra um alto potencial didático como ferramenta de verificação e correção. A representação visual dos 24 produtos elementares diretamente na matriz expandida confere aos alunos uma sensação de controle e rastreabilidade muito maior do que a abordagem recursiva do Teorema de Laplace. Este fator é um argumento poderoso a favor da utilidade do novo procedimento.

5.2.3 Impacto Conceitual (Aspecto da Aprendizagem)

Estas perguntas são cruciais, pois avaliam se o novo método contribui para a compreensão teórica da Álgebra Linear

Questão 8: O novo método ajudou você a compreender melhor alguma propriedade dos determinantes (por exemplo, a influência de linhas/colunas nulas ou proporcionais)? Se sim, qual propriedade?

Para esta pergunta, 20 alunos responderam que sim, enquanto 10 alunos responderam que não.

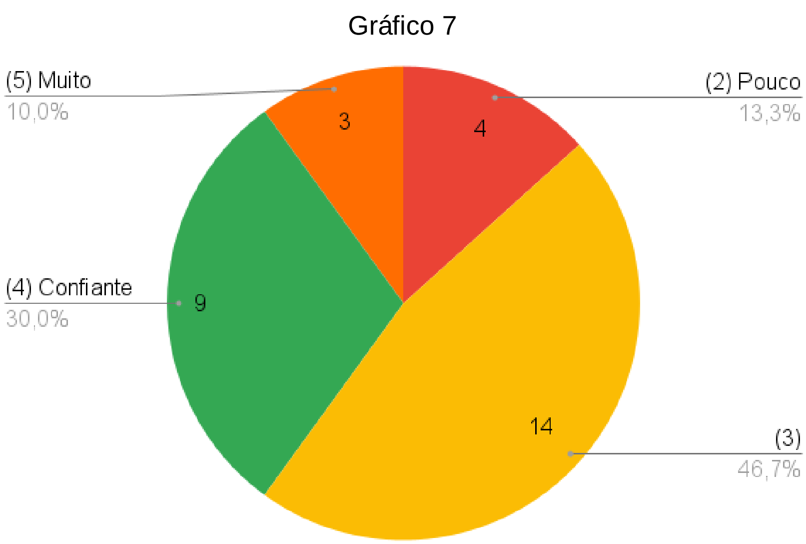
Dos que responderam“sim”, o aluno C, destaca: “Quando uma fila for nula, o determinante será zero”. Já o aluno D,apontou: “Um zero na matriz já facilita o processo de achar o determinante”.

Mais uma vez, compreende-se como tal resultado é extremamente importante, pois permite ao aluno observar porquê o determinante se anula, rastreando a contribuição de cada termo para o resultado final. E, ainda, sugere que embora o método das "flechas" não seja um mnemônico fácil, ele é um recurso didático eficaz para a compreensão conceitual. O alto índice de "Sim" valida o uso da representação visual como um facilitador da aprendizagem significativa (Ausubel), superando a complexidade formal do Teorema de Laplace e permitindo a observação empírica das propriedades dos determinantes.

Questão 9: Após aprender o novo método, você se sente mais confiante em calcular determinantes de matrizes de ordens maiores?

(1) Nada confiante (2) Pouco confiante (3) Razoavelmente confiante (4) Confiante (5) Muito confiante

Os resultados estão presentes no Gráfico 7.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

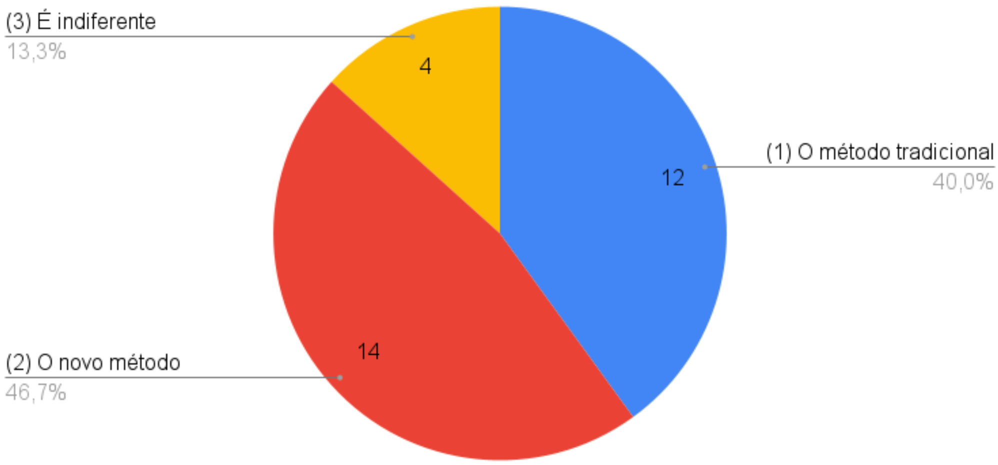
A confiança elevada (86,7%) é um indicador de que o novo método atingiu o objetivo de diminuir a aversão e a percepção de complexidade instransponível dos determinantes de ordem 4. O método atua como uma ponte pedagógica, mostrando que o cálculo de determinantes é um processo de somatório de produtos (o que facilita a compreensão das propriedades, conforme a Questão 8), e não apenas uma “caixa-preta” de expansão recursiva. Assim, o resultado proporciona ganhos motivacionais e psicológicos significativos.

5.2.4 Preferência e Sugestões Finais (Aspecto Qualitativo)

Questão 10: Para futuras aplicações, qual método você prefere utilizar?
( ) O método tradicional ( ) O novo método ( ) É indiferente

Os resultados estão disposto no Gráfico 8.

Gráfico 8



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A opção "O novo método" (46,7%) foi a mais votada. Isso significa que, ao final da intervenção, a experiência de ganho de clareza (Questão 1), velocidade (Questão 5) e confiança/verificação (Questões 7 e 9) superou os custos de memorização (Questão 2) e organização (Questão 6). Os alunos parecem valorizar mais a simplificação do cálculo em si e a *capacidade de conferência* do que o esforço inicial de memorização da regra.

Todavia, uma boa parcela da turma ainda prefere o método tradicional. Dado que, essa resistência é explicada pela alta dificuldade percebida em memorizar e organizar a matriz do novo método. Para esses alunos, o método formal (embora mais longo) é mais seguro e menos propenso a falhas de memória (Questão 2) e erro de sinal (Questão 3).

Portanto, o método das "Flechas" não se estabeleceu como uma solução universalmente superior, mas sim como uma alternativa poderosa e preferida por uma parcela significativa dos estudantes (46,7%). Inferindo-se, então, o objetivo de apresentar uma alternativa didaticamente viável e preferível foi atingido por uma margem.

Questão 11: Se você pudesse sugerir uma melhoria ou alteração no novo método, qual seria?

Para o aluno E respondeu: “Oferecer algum modo de memorizar melhor a ordem das repetições das colunas”.

Já o aluno F argumentou que, “a realização do método novo na vertical é melhor do que na horizontal”.

A sugestão do aluno E valida a necessidade de que futuras versões ou intervenções pedagógicas do método incluam um auxiliar mnemônico secundário (uma frase, uma rima, ou um código) para facilitar a memorização da sequência de 13 colunas, reduzindo a carga cognitiva e aumentando a velocidade. Ao mesmo tempo em que a alternativa proposta pelo aluno F de usar a "vertical", pode indicar que o aluno achou o processo de rastreamento das diagonais (flechas) muito longo no plano horizontal. Na teoria matemática expandir na vertical (repetindo linhas abaixo) é a regra de Sarrus na vertical, ou a expansão de Laplace verticalmente, que pode ser mais intuitiva para alguns alunos. Este relato sugere, então, que o formato horizontal da expansão contribuiu para a dificuldade de rastreio visual e conferência.

5.3 ALGUMAS IMPLICAÇÕES

Para que o Método das “Flechas” se torne uma alternativa mais viável, as futuras pesquisas devem concentrar-se na otimização de sua interface mnemônica, sobretudo porque essa foi a principal sugestão dos alunos. Nesse sentido, destaca-se a necessidade de:

- **Desenvolvimento de um auxiliar mnemônico:** Criar uma frase-chave, rima ou código que simplifique a memorização da sequência de repetição das 13 colunas.
- **Estudo comparativo de desempenho:** Realizar um estudo com um grupo de controle para medir objetivamente o tempo de execução e a taxa de acerto em comparação com o método de Laplace, isolando o fator da *percepção* (dados subjetivos deste estudo) do *desempenho* real.
- **Adaptação do formato visual:** Explorar a sugestão de formatação vertical para ver se ela diminui o custo de rastreamento das diagonais e o risco de erro de sinal.

Dessa forma**,** conclui-se que o “Método das Flechas” é matematicamente válido e didaticamente promissor, embora ainda exija refinamento pedagógico para que o esforço de memorização não neutralize os ganhos de clareza e velocidade que o procedimento oferece.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo apresentado ao longo desta dissertação teve como objetivo investigar alternativas didáticas para o cálculo de determinantes de ordem 4, tema que, embora conceitualmente relevante, apresenta desafios significativos no Ensino Médio devido à complexidade operacional do método tradicional de Laplace. A partir de uma análise histórica, teórica e pedagógica, buscou-se compreender não apenas a evolução do conceito de determinante, mas também as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao lidar com cálculos extensos, múltiplas operações e erros recorrentes de sinal e de organização.

O panorama histórico mostrou que o desenvolvimento dos determinantes esteve intimamente ligado à necessidade de resolver sistemas lineares. Desde os algoritmos práticos das civilizações antigas até as formulações rigorosas de Leibniz, Cramer, Laplace e Cauchy, evidenciou-se que o determinante é fruto de um longo processo de abstração, simbolização e sistematização. Assim, essa trajetória reforça a importância de abordagens pedagógicas que respeitem a natureza conceitual do tema, mas também considerem sua significativa carga operatória.

A fundamentação teórica discutida no Capítulo 2 tornou evidente que, apesar de matematicamente elegante, o método canônico de expansão por cofatores torna-se pouco eficiente e pouco intuitivo para estudantes do Ensino Médio, especialmente quando aplicado a matrizes de ordem 4. Esse cenário, portanto, justificou a investigação de um procedimento alternativo, inspirado na Regra de Sarrus, que pudesse oferecer uma abordagem mais acessível e menos propensa a erros.

A intervenção pedagógica desenvolvida com estudantes da 2ª série do Ensino Médio permitiu avaliar, na prática, a viabilidade e a eficácia do método das “flechas”. Os resultados coletados por meio de observações e do questionário evidenciaram que:

- a maioria dos estudantes percebeu o método como mais claro que o dos cofatores;
- muitos consideraram o procedimento mais rápido e mais intuitivo, especialmente ao visualizar os produtos elementares diretamente na matriz estendida;
- contudo, uma parcela significativa relatou dificuldade inicial em memorizar a sequência de repetição das colunas, indicando que o método exige treinamento prévio para que se torne plenamente eficiente;

- além disso, a visualização simultânea dos 24 produtos elementares, positivos e negativos, foi destacada como um recurso útil para verificação e conferência do resultado**.**

Esses achados permitem concluir que o método das “flechas” não substitui o método formal de Laplace, que permanece matematicamente essencial e conceitualmente formador; no entanto, constitui uma alternativa pedagógica válida, eficiente e promissora para o contexto do Ensino Médio. Seu valor reside, sobretudo, na capacidade de aproximar o estudante do cálculo de determinantes superiores por meio de uma representação visual que reduz a sobrecarga cognitiva associada aos cofatores.

Portanto, os resultados obtidos nesta pesquisa apontam que métodos mnemônicos e visuais, quando bem fundamentados teoricamente, podem ampliar o repertório didático do professor de Matemática, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa, conforme defendido por Ausubel, e favorecendo a transição entre diferentes registros de representação, conforme proposto por Duval.

Sugere-se, para trabalhos futuros:

- a aplicação do método em turmas maiores e em diferentes contextos escolares para ampliar a validade da análise;
- a comparação entre esse procedimento e técnicas de redução matricial, como o escalonamento, quanto ao desempenho e à compreensão conceitual;
- a investigação do impacto do método em estudantes com dificuldades específicas de aprendizagem ou com baixo domínio de operações básicas;
- a elaboração de materiais didáticos e recursos digitais que facilitem a memorização das sequências do método.

Em síntese, esta dissertação reforça que ensinar determinantes é mais do que transmitir algoritmos: é oferecer caminhos para que o aluno perceba a estrutura matemática que sustenta esses cálculos. O método alternativo apresentado não elimina a complexidade inerente aos determinantes de ordem superior, mas oferece ao estudante uma forma mais amigável de acessá-la, contribuindo para um ensino mais consistente, motivador e alinhado às demandas do Ensino Médio contemporâneo.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução de Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

CARDANO, Gerolamo**. Ars Magna or The Rules of Algebra.** Tradução de T. Richard Witmer. New York: Dover, 1993. Disponível em: https://archive.org/details/arsmagnaorruleso0000card/page/n2/mode/1up. Acesso em: 23 abr. 2025.

CARDANO, Gerolamo. **De Vita Propria Liber**. Tradução de Jean Stoner. U.S.A., 1930. Disponível em: https://archive.org/details/GirolamoCardanoTheBookOfMyLifeDeVitaPropriaLiber/mode/2up. Acesso em: 23 abr. 2025.

EVES, Howard**. Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GAUSS, Carl Friedrich**. Disquisitiones Arithmeticae.** Leipzig, 1801. (Obras reunidas, v. 1, 1863, Göttingen).

GERHARDT, C. I. (Org.). **Leibnizens mathematische Schriften.** 1ª Abteilung, v. 2. Berlin, 1850. p. 229–240, 245.

LAPLACE, Pierre-Simon. **Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde.**Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1772, 2e partie, p. 267–376. (Œuvres, v. 8, p. 365–406).

LAPLACE, Pierre-Simon**. Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice**. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, *année* 1773, p. 85–128. (Œuvres, v. 3, p. 577–616).

MUIR, Thomas. **The Theory of Determinants in the Historical Order of Development**. 4 v. bound in 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1906. (Volume One: General and Special Determinants up to 1841; Volume Two: The Period 1841 to 1860). Disponível em: https://dn790009.ca.archive.org/0/items/theoryofdetermin01muiruoft/theoryofdetermin01muiruoft.pdft. Acesso em: 01 de maio de 2025.

MUSA, Mohammed ben**. The Algebra.** Tradução de Frederic Rosen. Londres, 1831. Disponível em: http://www.archive.org/details/algebraofmohammeOOkhuwuoft. Acesso em: 23 abr. 2025.

AUTOR DESCONHECIDO. **Nove capítulos da arte matemática**. Tradução de John Doe. 2. ed. Boston: MIT Press, 2005.

PAIVA, Manoel Rodrigues**. Matemática***: Paiva*. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

REIS, Genésio Lima; SILVA, Valdir Vilmar**. Geometria analítica*.*** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1996.

SILVA, Cristiano de Souza; BRAZIL JÚNIOR, Sérgio. **O método mnemônico das flechas para determinante de matrizes de ordem quatro.** *Elementos – Revista de Ensino e Pesquisa em Classes, Operações e Propriedades de Estruturas Algébricas*, Rio Branco, v. 2, n. 2, p. 21–31, jan./dez. 2014.

SMITH, David Eugene; MIKAMI, Yoshio. **A History of Japanese Mathematics*. Chicago***: Open Court, 1914. Disponível em: https://archive.org/download/historyofjapanes00smituoft/historyofjapanes00smituoft.pdf. Acesso em: 24 abr. 2025.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo**. Álgebra linear*.*** 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

AUSUBEL, David Paul**. Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva.** Tradução de Rafael H. Rodrigues. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 11-33.

PIAGET, Jean. **A construção do real na criança.** Tradução de Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar, 1973.