UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTONIO AIRTON DE MELO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS REAIS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES: UMA ABORDAGEM ELEMENTAR VIA DERIVADAS

FORTALEZA
2025

ANTONIO AIRTON DE MELO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS REAIS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES: UMA ABORDAGEM ELEMENTAR VIA DERIVADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

FORTALEZA
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M485e Melo, Antonio Airton de.
Equações diferenciais ordinárias reais lineares com coeficientes constantes : uma abordagem elementar via derivadas / Antonio Airton de Melo. – 2025.
69 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Matemática - Programas de atividades. I. Título.

CDD 510

ANTONIO AIRTON DE MELO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS REAIS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES: UMA ABORDAGEM ELEMENTAR VIA DERIVADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em: 08/08/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPar)

À minha esposa Graziely, meus pais e meus irmãos, por sempre acreditarem em mim e serem meu constante apoio.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado força, coragem e saúde para seguir em frente nessa caminhada, apesar de todas dificuldades surgidas.

À minha esposa Graziely, que de uma maneira especial me auxiliou bastante, obrigado pelo carinho, pelo incentivo, pela paciência e compreensão nas muitas vezes que não pude ser atencioso por razões acadêmicas, e principalmente, obrigado pela sua maneira de me acalmar, mesmo diante da rotina pesada, com você tudo se tornou mais fácil, sou e serei eternamente grato.

Aos meus pais, por apesar de tantas dificuldades, sempre terem investido na minha educação, e tanto terem batalhado ao sol para que a mim restasse a sombra. Seus ensinamentos e sacrifício são alicerces que carrego para sempre.

Aos meus irmãos, que deram um pouco de si para que eu pudesse ir sempre além e realizar sonhos que não tiveram a oportunidade de alcançar. Cada conquista minha carrega um pedaço de vocês.

Ao Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo e Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos meus colegas de mestrado, por todo o companheirismo e pelos valiosos ensinamentos. Com vocês, esta jornada se tornou mais leve e enriquecedora.

“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse, mas o ato de chegar lá, que concede o maior prazer” (Gauss, 1820, p. 58).

RESUMO

Esta dissertação propõe uma alternativa didática para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Reais Lineares com Coeficientes Constantes. O estudo visa desmistificar a complexidade inerente a essas equações, tornando-as acessíveis a estudantes com um conhecimento mais elementar de cálculo. A metodologia desenvolvida fundamenta-se exclusivamente na propriedade de que uma função derivável em um intervalo aberto é constante se, e somente se, sua derivada é nula. Este método foi detalhado e aplicado a EDOs de primeira, segunda e terceira ordens, cobrindo os casos de raízes reais distintas, raízes reais múltiplas e o tratamento de raízes complexas conjugadas sem o uso explícito de números complexos no processo de derivação. Além disso, uma breve generalização do método para EDOs de ordem n foi abordada. A eficácia e a versatilidade da abordagem foram corroboradas por meio de aplicações em problemas de modelagem da física, como sistemas massa-mola e circuitos elétricos. Como contribuição pedagógica, foi elaborada uma sequência didática para alunos do ensino médio em turmas olímpicas de matemática, consolidando um recurso prático para a implementação desta metodologia em sala de aula e fomentando o ensino de matemática de forma mais ampla.

Palavras-chave: equações diferenciais ordinárias; matemática - estudo e ensino; matemática - programas de atividades.

ABSTRACT

This dissertation proposes an alternative didactic approach for solving Real Linear Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients. The study aims to demystify the inherent complexity of these equations, making them accessible to students with a more elementary knowledge of calculus. The developed methodology is exclusively founded on the property that a differentiable function on an open interval is constant if, and only if, its derivative is zero. This method was detailed and applied to ODEs of first, second, and third orders, covering cases with distinct real roots, multiple real roots, and the treatment of complex conjugate roots without the explicit use of complex numbers in the derivation process. Furthermore, a brief generalization of the method for ODEs of order n was addressed. The efficacy and versatility of the approach were corroborated through applications in physics modeling problems, such as mass-spring systems, and electrical circuits. As a pedagogical contribution, a didactic sequence was developed for high school students in mathematics olympiad classes, consolidating a practical resource for the implementation of this methodology in the classroom and fostering mathematics education more broadly.

Keywords: ordinary differential equations; mathematics - study and teaching; mathematics - activity programs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustrações do Teorema de Rolle. (a) Função constante, (b) Função com máximo, (c) Função com máximo e mínimo e (d) Função com mínimo 14
Figura 2 – Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio 15
Figura 3 – Construção da função auxiliar $h(x)$ para a demonstração do Teorema do Valor Médio 16

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	10
2	**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS**	13
2.1	**Derivadas e funções constantes**	13
2.2	**Teorema do Valor Médio e propriedades de funções constantes**	14
3	**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: FUNDAMENTOS**	19
3.1	**Definições e classificações**	19
3.1.1	***Classificação pelo tipo***	19
3.1.2	***Classificação pela ordem***	20
3.1.3	***Classificação como linear ou não-linear***	20
3.2	**Problemas de Valor Inicial**	21
3.3	**Teoria básica das EDOs lineares**	21
3.3.1	***EDOs lineares homogêneas e não homogêneas***	21
3.3.2	***Solução geral de uma EDO linear***	22
3.3.3	***EDOs lineares com coeficientes constantes***	22
4	**MÉTODO ELEMENTAR VIA DERIVADAS**	24
4.1	**Motivação: casos particulares**	24
4.2	**Desenvolvimento geral do método**	29
4.2.1	***EDOs homogêneas de primeira ordem***	29
4.2.2	***EDOs homogêneas de segunda ordem***	30
4.2.3	***EDOs homogêneas de terceira ordem***	33
4.2.4	***Generalização para ordem*** n	39
4.2.5	***Tratamento de raízes complexas***	41
5	**APLICAÇÕES**	46
5.1	**Sistemas massa-mola**	46
5.2	**Circuitos elétricos**	52
5.3	**Sistemas análogos e modelos abstratos**	56
6	**CONCLUSÃO**	62
	REFERÊNCIAS	63
	APÊNDICE A – RECURSO EDUCACIONAL: SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE EDOS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES PARA TURMAS OLÍMPICAS DO ENSINO MÉDIO	64

1 INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) representam uma ferramenta essencial na matemática aplicada, oferecendo uma linguagem universal para a modelagem de fenômenos dinâmicos em diversas áreas do conhecimento. Sua relevância estende-se a campos como a física, engenharia, biologia e economia. Um exemplo clássico é o sistema massa mola, combinando a lei de Hooke, $F(x) = -kx$, com a segunda lei de Newton, $F(x) = mx''(t)$, conclui-se que o movimento de um corpo de massa m atrelado à mola, na ausência de atrito, é descrito pela equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

onde k representa a constante da mola.

No contexto dos circuitos elétricos, as leis de Ohm e Kirchhoff revelam que, para um circuito RLC, a relação entre indutância (L), resistência (R), capacitância (C), carga ($Q(t)$) e tensão ($E(t)$) é dada por

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t).$$

Casos específicos, como como circuitos RL, RC e LC, são descritos, respectivamente, por

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t),\ \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t) \text{ e } L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

onde $I = dQ/dt$.

Diante de tais modelos e de tantos outros que podem ser encontrados na literatura torna-se evidente o grande interesse na obtenção de soluções para EDOs lineares da forma:

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x).$$

Tradicionalmente, a abordagem e a resolução das EDOs, em particular as lineares com coeficientes constantes, exigem o domínio de ferramentas e pré-requisitos avançados do cálculo. O estudo dessas equações implica o emprego de técnicas de integração, séries de potências e o teorema clássico de existência e unicidade de soluções. Essa dependência, embora fundamental para a robustez teórica, acaba por restringir o estudo dessas equações a estágios mais avançados da formação acadêmica, limitando sua introdução a estudantes que já possuem uma bagagem matemática consolidada.

Neste trabalho, inspirado na metodologia proposta por Melo (2020)[1] para o plano complexo, apresentamos e desenvolvemos um método elementar para obter a solução geral de Equações Diferenciais Ordinárias Reais Lineares com Coeficientes Constantes sem o uso explícito das técnicas de integração como em (Guidorizzi, 2013; Muniz Neto, 2022), de séries de potências como em (Apostol, 1979) ou do teorema clássico de existência e unicidade como em (Sotomayor, 1979).

A fundamentação dessa abordagem reside de maneira exclusiva em um resultado elementar do cálculo diferencial: a propriedade de que uma função derivável em um intervalo aberto é constante se, e somente se, sua derivada é nula. Essa perspectiva simplificada busca tornar o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias Reais Lineares com Coeficientes Constantes acessível a um público mais amplo e em fases mais iniciais do aprendizado do cálculo. Isso inclui tanto alunos de cursos de graduação quanto estudantes do ensino médio em turmas olímpicas de matemática, para os quais o conceito de derivada já é familiar.

Esta dissertação tem como objetivo central apresentar um método alternativo para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Reais Lineares com Coeficientes Constantes. Para tal fim, busca-se revisar e formalizar os fundamentos do cálculo diferencial, com ênfase na propriedade das funções constantes a partir de suas derivadas nulas, que servem como pilar para a metodologia proposta. Subsequentemente, o trabalho dedica-se a desenvolver o método elementar para EDOs de primeira, segunda e terceira ordens, incluindo casos com raízes reais distintas, raízes reais múltiplas e o tratamento de raízes complexas conjugadas, além de discutir a potencial generalização para EDOs de ordem n.

Adicionalmente, o estudo visa a ilustrar a aplicabilidade e a eficácia do método por meio de exemplos práticos e problemas de modelagem em diversas áreas, como física (sistemas massa-mola) e circuitos elétricos, e, finalmente, elaborar um produto educacional, sob a forma de uma sequência didática, concebido para a introdução das Equações Diferenciais Ordinárias Reais Lineares com Coeficientes Constantes a alunos do ensino médio participantes de turmas olímpicas de matemática.

A relevância deste trabalho manifesta-se em diversas frentes. Do ponto de vista acadêmico, a proposição de um método que dispensa pré-requisitos tradicionalmente complexos contribui para a literatura em EDOs, oferecendo uma perspectiva didática inovadora. No âmbito pedagógico, a dissertação, especialmente através de seu produto

---

[1] Submetido à publicação em 2020. MELO, Marcos Ferreira. EDOs lineares complexas com coeficientes constantes: teoria geral com um mínimo de pré-requisitos. Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.

educacional, preenche uma lacuna ao possibilitar que um tópico usualmente restrito ao ensino superior seja explorado em etapas anteriores.

A presente dissertação está estruturada em seis capítulos e um apêndice. O Capítulo 2 estabelece os conceitos essenciais do cálculo diferencial. O Capítulo 3 introduz as definições e classificações das EDOs. O cerne do trabalho, o "Método Elementar Via Derivadas", é detalhado no Capítulo 4, abrangendo o desenvolvimento da metodologia para diferentes ordens e naturezas das raízes da equação característica. As aplicações do método em problemas reais e abstratos são exploradas no Capítulo 5. Finalmente, o Capítulo 6 apresenta as "Conclusões" do estudo. Adicionalmente, o Apêndice A detalha o recurso educacional desenvolvido, uma sequência didática focada no ensino das EDOs Reais Lineares com Coeficientes Constantes para o ensino médio.

2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Este capítulo estabelece os fundamentos essenciais do cálculo diferencial sobre os quais o método elementar para resolver Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes se apoia. O fundamento de nossa abordagem reside em uma propriedade fundamental das funções deriváveis: a relação intrínseca entre uma função ter derivada nula em um intervalo e ser constante nesse intervalo. Serão revisados teoremas clássicos do cálculo que formalizam essa propriedade, bem como suas consequências diretas, indispensáveis para a construção das funções auxiliares que permitem a determinação das soluções das EDOs sem o recurso a técnicas de integração.

2.1 Derivadas e funções constantes

Para compreender a relação entre a derivada de uma função e sua constância, é fundamental primeiramente estabelecer a definição formal de derivada.

Definição 2.1: A derivada de uma função f, denotada por f', é uma função cujo valor em qualquer ponto x do domínio da f é dado por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{2.1}$$

se este limite existe e é um número finito. Dizemos que a função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos do seu domínio.

Um dos resultados mais básicos do cálculo diferencial, e de grande relevância para esta dissertação, estabelece que a derivada de uma função constante é sempre nula.

Teorema 2.1: Se $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada por $f(x) = k$, onde k é uma constante, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Demonstração:

Da definição de derivada, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

como $f(x) = k$ para todo $x \in I$, segue que $f(x+h) = k$ para todo $x \in I$ e para todo h tal que $x + h \in I$. assim

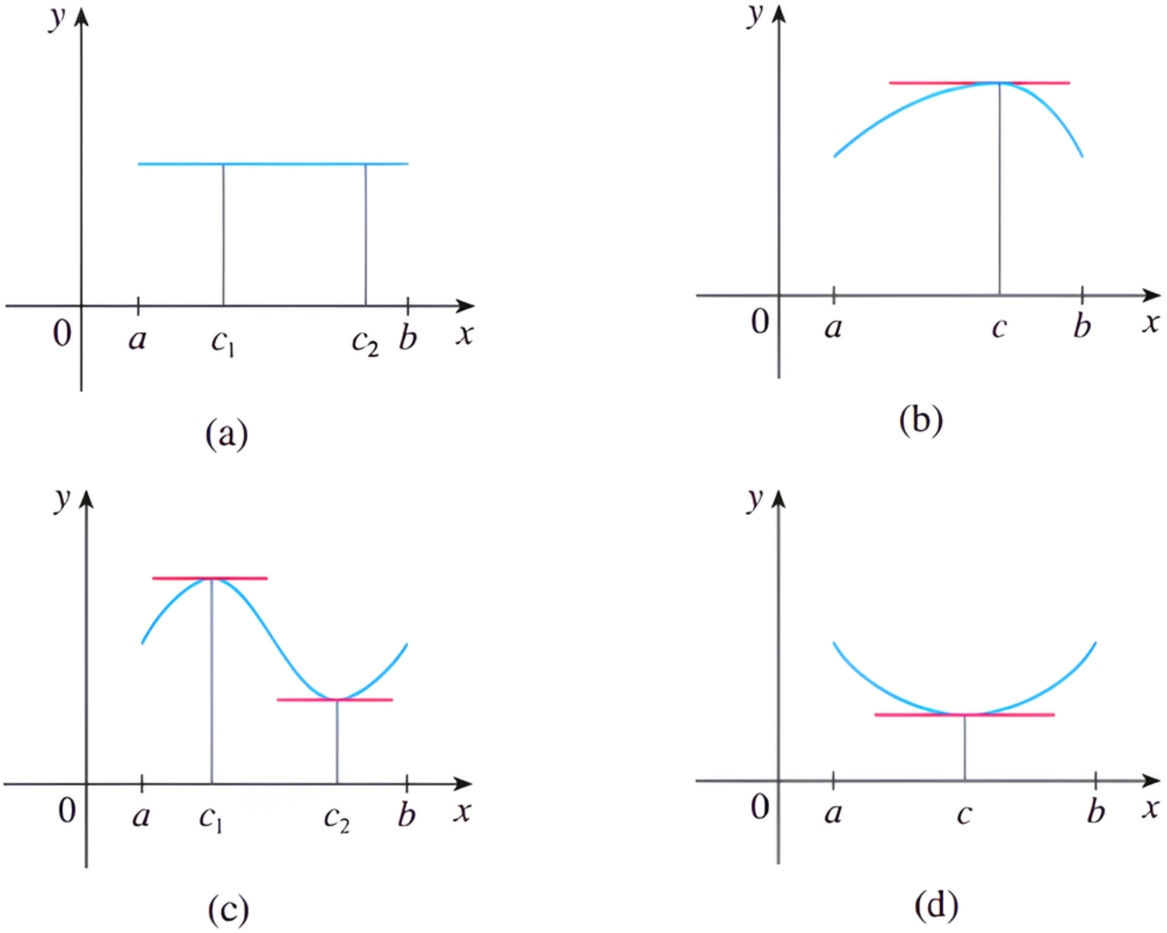
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

■

2.2 Teorema do Valor Médio e propriedades de funções constantes

O Teorema do Valor Médio (TVM) é um dos resultados mais importantes do Cálculo Diferencial, com vastas aplicações e consequências. Ele fornece a base formal para a propriedade de que uma função com derivada nula em um intervalo é necessariamente constante nesse intervalo, um pilar fundamental do método elementar desenvolvido nesta dissertação. Antes de enunciar e demonstrar o TVM, apresentaremos um de seus precursores, o Teorema de Rolle. As situações em que o Teorema de Rolle se aplica são ilustradas na Figura 1.

Figura 1 – Ilustrações do Teorema de Rolle. (a) Função constante, (b) Função com máximo, (c) Função com máximo e mínimo e (d) Função com mínimo



Fonte: Stewart (2013).

Teorema 2.2: *(Teorema de Rolle)*: Seja f uma função diferenciável no intervalo aberto (a, b) e contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a) = f(b)$, então há pelo menos um ponto c em (a, b), tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração:

Sendo contínua no intervalo fechado $[a, b]$, a função f assume seu máximo absoluto e seu mínimo absoluto nesse intervalo. Isso pode ocorrer em pontos interiores onde f' é zero, em pontos interiores onde f' não existe, ou nas extremidades do intervalo.

Como f é diferenciável no intervalo aberto (a, b) a possibilidade de f' não existir em pontos interiores é excluída.

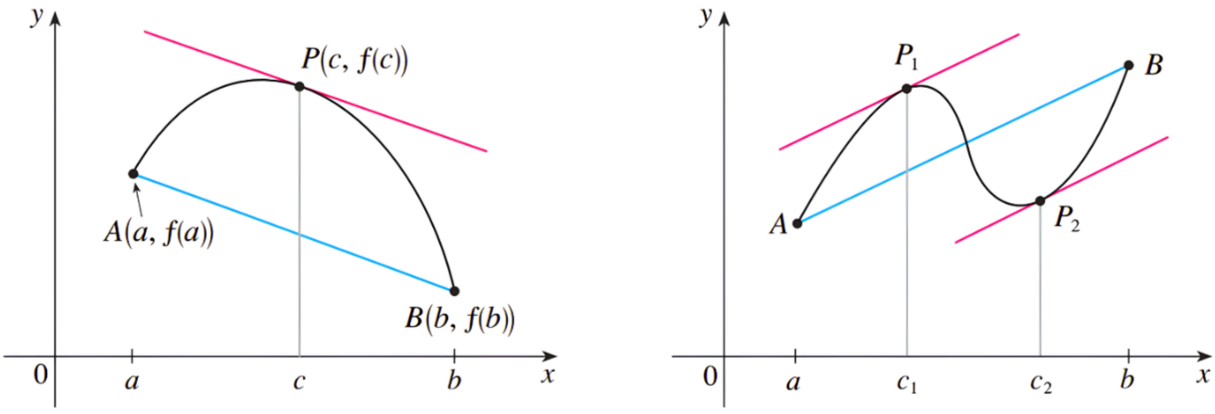
Se o máximo ou o mínimo ocorrem num ponto c entre a e b, então, $f'(c) = 0$ e encontramos um ponto para o teorema de Rolle.

Se tanto o máximo como o mínimo absoluto estão nas extremidades, então, como $f(a) = f(b)$, f deve necessariamente ser uma função constante com $f(x) = f(a) = f(b)$ para qualquer $x \in [a, b]$. Assim $f'(x) = 0$ e o ponto c pode ser tomado em qualquer lugar no interior (a, b).

■

Uma das principais aplicações do Teorema de Rolle é a demonstração do Teorema do Valor Médio, que pode ser interpretado como uma versão inclinada do Teorema de Rolle. Geometricamente, esse teorema afirma que, entre dois pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ quaisquer do gráfico de uma função diferenciável f, existe pelo menos um ponto $P(c, f(c))$ sobre o gráfico onde a reta tangente é paralela à reta secante que passa por A e B, como visualizado na Figura 2 (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007).

Figura 2 – Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio



Fonte: Stewart (2013).

O Teorema do Valor Médio pode ser enunciado precisamente como segue:

Teorema 2.3: *(Teorema do Valor Médio)*: Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então existe pelo menos um c em (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.2}$$

Demonstração:

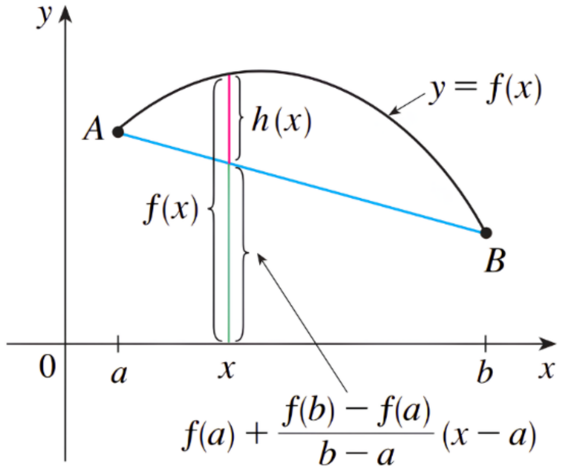
Consideremos a reta secante que passa pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. A equação dessa reta é dada por:

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Definimos uma função auxiliar $h(x)$ como a diferença entre a altura do gráfico de f e a altura da reta secante em cada ponto x. Conforme ilustrado na Figura 3, essa função é dada por:

$$h(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right].$$

Figura 3 – Construção da função auxiliar $h(x)$ para a demonstração do Teorema do Valor Médio



Fonte: Stewart (2013).

Como $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b), a função $h(x)$ também possui essas propriedades. Além disso, avaliando $h(x)$ nas extremidades do intervalo:

$$h(a) = f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a)\right] = f(a) - f(a) = 0$$

e

$$h(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)\right] = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0,$$

assim, $h(a) = h(b) = 0$. Portanto, $h(x)$ satisfaz todas as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo $[a, b]$.

Pelo Teorema de Rolle (Teorema 2.2), existe um ponto c em (a, b) tal que $h'(c) = 0$. Calculando a derivada de $h(x)$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

substituindo $x = c$ na expressão da derivada e utilizando $h'(c) = 0$:

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

isolando $f'(c)$, temos:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Como consequência fundamental do Teorema do Valor Médio (Teorema 2.3), podemos formalizar a propriedade inversa do Teorema 2.1, que é fundamental para nosso método elementar.

Teorema 2.4: Seja f contínua no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se $f'(x) = 0$ em todo x interior a I, então existirá uma constante k tal que $f(x) = k$ para todo x em I.

Demonstração:

Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em I, com $x_1 < x_2$. Como f é derivável em I, ela é derivável em (x_1, x_2) e contínua em $[x_1, x_2]$. Aplicando o Teorema do Valor Médio (Teorema 2.3) a f no intervalo $[x_1, x_2]$, obtemos um número c tal que $x_1 < c < x_2$ e

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ou de maneira equivalente

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Por hipótese, $f'(x) = 0$ para todo x interior a I, o que implica $f'(c) = 0$. Logo

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0,$$

ou ainda

$$f(x_2) = f(x_1).$$

Portanto, f tem o mesmo valor em quaisquer dois números x_1 e x_2 em I. Tomando k igual a esse valor, temos que $f(x) = k$ para todo x em I.

■

Como consequência deste teorema (Teorema 2.4), provaremos que se duas funções tiverem derivadas iguais num intervalo, então, neste intervalo, elas diferirão por uma constante.

Corolário 2.1: Sejam f e g funções contínuas no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se $f'(x) = g'(x)$ em todo x interior a I, então existirá uma constante k tal que $g(x) = f(x) + k$ para todo x em I.

Demonstração:

A função $h(x) = f(x) - g(x)$ é contínua em I e, para todo x interior a I,

$$h'(x) = f'(x) - g'(x),$$

uma vez que $f'(x) = g'(x)$ por hipótese, temos $h'(x) = 0$ para todo x interior a I.

Assim, pelo teorema anterior, existe uma constante k tal que $h(x) = k$ logo

$$g(x) - f(x) = k,$$

ou ainda

$$g(x) = f(x) + k$$

para todo x em I.

■

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: FUNDAMENTOS

Este capítulo estabelece os conceitos e as propriedades fundamentais das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) que servem de alicerce para a compreensão do método elementar via derivadas, desenvolvido nos capítulos subsequentes. Serão apresentadas as definições essenciais, as classificações das EDOs e a teoria básica das EDOs lineares, preparando o leitor para o aprofundamento na resolução por meio da abordagem proposta.

3.1 Definições e classificações

Definição 3.1. Uma equação que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamado de equação diferencial (ED).

Segundo Zill e Cullen (2001), as equações diferenciais podem ser classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

3.1.1 Classificação pelo tipo

Definição 3.2. Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária (EDO).

Exemplo 3.1. As equações abaixo são EDOs, pois possuem apenas uma variável independente:

- $\dfrac{dy}{dt} - 5y = 1;$
- $\dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx} = x;$
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0.$

Definição 3.3. Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamado de equação diferencial parcial (EDP).

Exemplo 3.2. As equações diferencias a seguir são EDPs, pois possuem mais de uma variável independente.

- $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x};$
- $\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u;$

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y}.$

3.1.2 Classificação pela ordem

Definição 3.4. A ordem de uma equação diferencial é a ordem da maior derivada que aparece na equação.

Exemplo 3.3. A EDO abaixo é de segunda ordem (ou ordem 2), pois sua maior derivada é de segunda ordem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x.$$

Exemplo 3.4. A EDP a seguir é de quarta ordem, pois sua maior derivada é de quarta ordem.

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Uma equação diferencial ordinária geral de n-ésima ordem é frequentemente representada pelo simbolismo:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \tag{3.1}$$

3.1.3 Classificação como linear ou não-linear

Definição 3.5. Uma equação diferencial é chamada de linear quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{3.2}$$

Desse modo, uma equação diferencial é linear, se a variável dependente e todas as suas derivadas forem do primeiro grau e cada coeficiente depender apenas da variável independente. Caso a equação diferencial não seja linear, ela é chamada de não-linear.

Exemplo 3.5. A equação abaixo é uma EDO linear de ordem 3:

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x.$$

Exemplo 3.6. As equações abaixo são EDO não-lineares de segunda ordem:

- $y\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = x$ (não linear devido ao produto $y\frac{d^2y}{dx^2}$)
- $\frac{d^3y}{dx^3} - y^2 = 0$ (não linear devido ao termo y^2).

3.2 Problemas de Valor Inicial

Esta subseção foca na importância das condições iniciais para determinar soluções únicas para as EDOs. Para uma EDO de ordem n, são necessárias n condições para que uma solução particular seja determinada.

Definição 3.6. Um Problema de Valor Inicial (PVI) consiste em uma EDO combinada com condições que especificam o valor da função incógnita e/ou de suas derivadas em um único ponto.

Para uma EDO de ordem n, um PVI geralmente assume a forma:

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ \dfrac{dy}{dx}(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ são constantes arbitrárias. Os valores específicos $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ são chamadaos de condições iniciais.

3.3 Teoria básica das EDOs lineares

Esta subseção aprofunda as propriedades das EDOs lineares, que são fundamentais para o desenvolvimento do método elementar.

3.3.1 EDOs lineares homogêneas e não homogêneas

Definição 3.7. Uma EDO linear é dita homogênea se pode ser escrita da forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \tag{3.4}$$

isto é, ela é homogênea se na Definição 3.5 o termo $g(x)$ for identicamente nulo.

Exemplo 3.7. A EDO abaixo é homogênea:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{dy}{dx} - e^x y = 0$$

Exemplo 3.8. A EDO abaixo é não homogênea, pois $g(x) = xe^x \neq 0$:

$$x^7\frac{d^3y}{dx^3}+3x^4\frac{d^2y}{dx^2}+11x\frac{dy}{dx}-3y=xe^x.$$

3.3.2 Solução geral de uma EDO linear

A solução geral de uma EDO linear é fundamental para a compreensão de todas as suas possíveis soluções.

Teorema 3.1. Considere a EDO linear, não homogênea

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x). \tag{3.5}$$

Seja y_p uma solução particular da EDO e y_h a solução da homogênea associada. Então a solução geral de (3.5) é dada por $y=y_p+y_h$.

Demonstração:

Seja y_p uma solução particular da EDO (3.5), então:

$$a_n(x)\frac{d^ny_p}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_p}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy_p}{dx}+a_0(x)y_p=g(x). \tag{3.6}$$

Por outro lado, se y_h é a solução da EDO homogênea associada (3.4), então:

$$a_n(x)\frac{d^ny_h}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_h}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy_h}{dx}+a_0(x)y_h=0. \tag{3.7}$$

Somando as equações (3.6) e (3.7) temos que

$$a_n(x)\left[\frac{d^ny_p}{dx^n}+\frac{d^ny_h}{dx^n}\right]+\cdots+a_1(x)\left[\frac{dy_p}{dx}+\frac{dy_h}{dx}\right]+a_0(x)\left[y_p+y_h\right]=g(x)$$

ou, de maneira equivalente

$$a_n(x)\frac{d^n\left(y_p+y_h\right)}{dx^n}+\cdots+a_1(x)\frac{d\left(y_p+y_h\right)}{dx}+a_0(x)\left(y_p+y_h\right)=g(x)$$

Assim, $y=y_p+y_h$ é de fato solução geral da EDO (3.5).

■

3.3.3 EDOs lineares com coeficientes constantes

Definição 3.8. Uma equação diferencial linear real com coeficientes constantes, é uma equação da forma:

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=0 \tag{3.8}$$

onde $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$.

A equação

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{3.9}$$

é denominada Equação Característica associado à EDO (3.8).

Teorema 3.2. Se λ_1 for uma raiz da equação característica (3.9) então $y = e^{\lambda_1 x}$ será uma solução da EDO (3.8).

Demonstração:

De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:

$$\frac{d^n(e^{\lambda_1 x})}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}(e^{\lambda_1 x})}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d(e^{\lambda_1 x})}{dx} + a_0(e^{\lambda_1 x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1^n e^{\lambda_1 x} + a_{n-1}\lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 x} + \cdots + a_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a_0 e^{\lambda_1 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1^n e^{\lambda_1 x} + a_{n-1}\lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 x} + \cdots + a_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a_0 e^{\lambda_1 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda_1 x}(\lambda_1^n + a_{n-1}\lambda_1^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_1 + a_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1^n + a_{n-1}\lambda_1^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_1 + a_0 = 0.$$

■

4 MÉTODO ELEMENTAR VIA DERIVADAS

4.1 Motivação: casos particulares

Antes de desenvolver o método geral para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) lineares com coeficientes constantes, é fundamental analisar exemplos introdutórios que ilustram a ideia central desta pesquisa: utilizar a propriedade de que uma função derivável em um intervalo é constante se, e somente se, sua derivada é nula. Os exemplos a seguir, baseados em Guidorizzi (2013), correspondem a casos particulares de EDOs lineares reais com coeficientes constantes, demonstrando de forma prática a construção de funções auxiliares e a determinação das soluções.

Exemplo 4.1. Seja f definida e derivável e tal que, para todo x, $f'(x) = f(x)$. Prove que existe uma constante k tal que, para todo x, tem-se $f(x) = ke^x$.

Solução:

Para demonstrar o resultado, consideremos a função auxiliar $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x},$$

calculando a derivada de g e utilizando a equação diferencial dada, obtemos:

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x\big(f'(x) - f(x)\big)}{e^{2x}} = \frac{0}{e^x} = 0$$

para todo x em $\mathbb{R}$. Portanto, existe uma constante k tal que, para todo x,

$$g(x) = k \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} = k \Leftrightarrow f(x) = ke^x.$$

■

Este exemplo ilustra perfeitamente a estratégia central do método: a construção de uma função auxiliar cuja derivada se anula devido à EDO dada, permitindo a imediata determinação da forma da solução geral

Exemplo 4.2. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivável e tal que para todo x, $f'(x) = af(x)$, a constante não nula. Prove que existe uma constante k, tal que, para todo x, $f(x) = ke^{ax}$.

Solução:

Igualmente o exemplo anterior, consideremos a função auxiliar $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{ax}},$$

calculando sua derivada e utilizando a hipótese de que $f'(x) = af(x)$, obtemos:

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^{ax}}\right)' = \frac{f'(x)e^{ax} - af(x)e^{ax}}{(e^{ax})^2} = \frac{e^{ax}\big(f'(x) - af(x)\big)}{e^{2ax}} = \frac{0}{e^{ax}} = 0.$$

Como $g'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, concluímos que g é constante em $\mathbb{R}$. Logo, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$g(x) = k \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{ax}} = k \Leftrightarrow f(x) = ke^{ax}.$$

■

Este resultado generaliza o padrão observado no Exemplo 4.1, revelando que toda EDO linear homogênea de primeira ordem com coeficiente constante ($a \neq 0$) admite soluções exponenciais da forma $f(x) = ke^{ax}$. O expoente a corresponde à raíz da equação característica $\lambda - a = 0$ (ou $\lambda + a_0 = 0$ com $a_0 = -a$), que é a chave para determinar a solução.

A partir destes exemplos de primeira ordem, observa-se que a construção de funções auxiliares é a peça fundamental do método. Essa mesma estratégia é aplicável a EDOs de ordem superior. Os próximos exemplos abordarão EDOs de segunda ordem, revelando como as soluções podem assumir formas exponenciais ou trigonométricas, dependendo da natureza das raízes da equação característica.

Exemplo 4.3. Seja $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, derivável até a 2ª ordem e tal que, para todo x, $f''(x) + f(x) = 0$. Seja g dada por $g(x) = f'(x)\operatorname{sen} x - f(x)\cos x$. Prove que g é constante.

Solução:

Para mostrar que g é constante, calcularemos sua derivada:

$$\begin{aligned} g'(x) &= [f'(x)\operatorname{sen} x - f(x)\cos x]' \\ &= f''(x)\operatorname{sen} x + f'(x)\cos x - f'(x)\cos x + f(x)\operatorname{sen} x \\ &= f''(x)\operatorname{sen} x + f(x)\operatorname{sen} x \\ &= [f''(x) + f(x)]\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Utilizando a equação diferencial original $f''(x) + f(x) = 0$, obtemos que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = 0 \cdot \operatorname{sen} x = 0.$$

Como g é derivável e $g'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, concluímos que g é constante em $\mathbb{R}$. Logo, existe uma constante k tal que $f'(x)\operatorname{sen} x - f(x)\cos x = k$, para todo x.

■

A constância de $g(x)$ não é acidental e será fundamental na obtenção da solução geral da EDO no Exemplo 4.4, onde mostraremos que $f(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$.

Exemplo 4.4. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até a 2ª ordem e tal que, para todo x, $f''(x) + f(x) = 0$. Prove que existe uma constante A tal que

$$\left[\frac{f(x) - A\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]' = 0$$

para todo x em $(0, \pi)$. Conclua que exista outra constante B tal que, para todo x em $(0, \pi)$, $f(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$.

Solução:

Do Exemplo 4.3, sabemos que a função $g(x) = f'(x)\operatorname{sen} x - f(x)\cos x$ é constante em $\mathbb{R}$. Denote esta constante por k, isto é, $f'(x)\operatorname{sen} x - f(x)\cos x = k$ e tome $A = -k$.

Considere agora a função

$$h(x) = \frac{f(x) - A\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

definida em $(0, \pi)$. Calculando sua derivada, obtemos:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left[\frac{f(x) - A\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]' \\
&= \frac{(f'(x) + A\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x - (f(x) - A\cos x)\cos x}{(\operatorname{sen} x)^2} \\
&= \frac{f'(x)\operatorname{sen} x + A\operatorname{sen}^2 x - f(x)\cos x + A\cos^2 x}{(\operatorname{sen} x)^2} \\
&= \frac{f'(x)\operatorname{sen} x - f(x)\cos x + A(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\operatorname{sen} x)^2} \\
&= \frac{[f'(x)\operatorname{sen} x - f(x)\cos x] + A}{(\operatorname{sen} x)^2} \\
&= \frac{k - k}{(\operatorname{sen} x)^2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

portanto, h é constante em $(0, \pi)$. Seja B essa constante. Segue que:

$$\frac{f(x) - A\cos x}{\operatorname{sen} x} = B \Leftrightarrow f(x) - A\cos x = B\operatorname{sen} x \Leftrightarrow f(x) = A\cos x + B\sin x.$$

■

Este resultado mostra que a solução geral da EDO $f''(x) + f(x) = 0$ em $(0, \pi)$ é uma combinação linear das funções trigonométricas básicas. A equação característica associada, $\lambda^2 + 1 = 0$, possui raízes complexas puras $\lambda = \pm i$. Este exemplo mostra como o método elementar lida com tais casos, sem recorrer a números complexos explícitos no processo de derivação, mas gerando as soluções trigonométricas correspondentes.

Exemplo 4.5. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até a 2ª ordem e tal que, para todo x, $f''(x) - f(x) = 0$.

a) Prove que $g(x) = e^x[f'(x) - f(x)]$, $x \in \mathbb{R}$, é constante.

Solução:

Para provar que $g(x)$ é constante, basta verificar que sua derivada é nula para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[e^x[f'(x) - f(x)]\right]' \\ &= e^x[f'(x) - f(x)] + e^x[f''(x) - f'(x)] \\ &= e^x[f'(x) - f(x) + f''(x) - f'(x)] \\ &= e^x[f''(x) - f(x)]. \end{aligned}$$

Pela EDO original, $f''(x) - f(x) = 0$, temos:

$$g'(x) = e^x \cdot 0 = 0,$$

portanto, g é constante em $\mathbb{R}$. Seja $k \in \mathbb{R}$ essa constante. Assim $e^x[f'(x) - f(x)] = k$ o que implica $f'(x) - f(x) = ke^{-x}$.

■

b) Prove que existe uma constante A tal que, para todo x,

$$\left[\frac{f(x) - Ae^{-x}}{e^x}\right]' = 0.$$

Solução:

Calculando a derivada, temos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x) - Ae^{-x}}{e^x}\right]' &= \frac{(f'(x) + Ae^{-x})e^x - (f(x) - Ae^{-x})e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^x[f'(x) + Ae^{-x} - f(x) + Ae^{-x}]}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^x[f'(x) - f(x) + 2Ae^{-x}]}{e^{2x}} \\ &= \frac{f'(x) - f(x) + 2Ae^{-x}}{e^x}. \end{aligned}$$

Do item (a), sabemos que $f'(x) - f(x) = ke^{-x}$. Substituindo esta relação na expressão acima

$$\left[\frac{f(x) - Ae^{-x}}{e^x}\right]' = \frac{ke^{-x} + 2Ae^{-x}}{e^x} = \frac{(k + 2A)e^{-x}}{e^x} = (k + 2A)e^{-2x}.$$

Para que essa derivada seja 0 para todo x, devemos ter $k + 2A = 0$, o que implica

$$A = -\frac{k}{2}.$$

Dessa forma, existe uma constante $A = -\frac{k}{2}$ (onde k é a constante obtida no item (a)) para o qual

$$\left[\frac{f(x) - Ae^{-x}}{e^x}\right]' = 0.$$

■

c) Conclua de (b) que existe uma outra constante B tal que $f(x) = Ae^{-x} + Be^x$, para todo x.

Solução:

Do item (b), sabemos que, com $A = -\frac{k}{2}$, a função

$$\frac{f(x) - Ae^{-x}}{e^x}$$

tem derivada nula. Portanto, essa função deve ser uma constante. Seja B essa constante:

$$\frac{f(x) - Ae^{-x}}{e^x} = B,$$

multiplicando ambos os lados por e^x:

$$f(x) - Ae^{-x} = Be^x.$$

Finalmente, isolando $f(x)$:

$$f(x) = Ae^{-x} + Be^x$$

■

Este último resultado mostra que a solução geral da EDO $f'' - f = 0$ é uma combinação das exponenciais e^x e e^{-x}, que correspondem às soluções fundamentais associadas às raízes $\lambda = \pm 1$ da equação característica $\lambda^2 - 1 = 0$.

Os exemplos analisados nesta seção serviram como motivação prática e demonstração inicial do método proposto, revelando sua eficácia e aplicabilidade. Através desses casos particulares, observamos que a forma da solução geral, seja exponencial, trigonométrica ou combinações lineares, é determinada diretamente pelas raízes da equação característica correspondente.

O método se mostra versátil, mantendo a mesma estratégia central: transformar a equação diferencial em um problema sobre a constância de funções mediante a construção de funções auxiliares adequadas. A elegância desta abordagem reside em sua economia conceitual, visto que dispensa técnicas de integração, utilizando-se unicamente de propriedades fundamentais das derivadas.

Os exemplos aqui apresentados não apenas validaram a eficácia do método em casos particulares, mas também estabeleceram os fundamentos conceituais essenciais para sua subsequente generalização. Conforme será detalhado na Seção 4.2, essa abordagem será expandida para equações diferenciais de ordem superior, contemplando cenários com raízes reais distintas, raízes reais múltiplas e raízes complexas conjugadas. Tal expansão evidenciará como princípios diferenciais elementares são suficientes para abordar problemas matemáticos tradicionalmente considerados mais complexos.

4.2 Desenvolvimento geral do método

Com base nos casos particulares da seção anterior, passamos agora a desenvolver o método em sua formulação geral. A estratégia consiste na construção de funções auxiliares cuja derivada se anula, permitindo a redução do problema à verificação da constância dessas expressões. Essa abordagem será aplicada a equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas com coeficientes reais constantes, abrangendo os casos de primeira, segunda e terceira ordens. Em seguida, será feita a generalização para equações de ordem arbitrária, incluindo situações com raízes reais distintas, múltiplas e, por fim, raízes complexas conjugadas.

4.2.1 EDOs homogêneas de primeira ordem

Considere a EDO homogênea de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \tag{4.1}$$

onde $a_0 \in \mathbb{R}$. A equação característica associada é dada por

$$\lambda + a_0 = 0, \tag{4.2}$$

cuja raiz é $\lambda_1 = -a_0$. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma solução de (4.1). Definimos a função auxiliar $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = e^{-\lambda_1 x} f(x). \tag{4.3}$$

A função (4.3) é construída para cancelar o comportamento exponencial da solução, convertendo o problema em verificação de constância, como já ilustrado nos Exemplos 4.1 e 4.2.

Calculando sua derivada, obtemos:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda_1 x} f(x)\right] \\
&= -\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} f(x) + e^{-\lambda_1 x} f'(x) \\
&= e^{-\lambda_1 x}[f'(x) - \lambda_1 f(x)],
\end{aligned}
$$

como f satisfaz (4.1), temos $f'(x) = -a_0 f(x) = \lambda_1 f(x)$, o que implica:

$$g'(x) = e^{-\lambda_1 x} \cdot 0 = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, g é constante em $\mathbb{R}$, e existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = c_1 \Longrightarrow e^{-\lambda_1 x} f(x) = c_1$, ou ainda:

$$f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}, \tag{4.4}$$

que representa a solução geral da EDO (4.1).

Corolário 4.1. Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \lambda_1 x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

admite como única solução:

$$y(x) = y_0 e^{\lambda_1 (x - x_0)}. \tag{4.6}$$

Demonstração:

Da solução geral $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}$, aplicando a condição inicial $y(x_0) = y_0$, obtemos $c_1 e^{\lambda_1 x_0} = y_0$, ou ainda, $c_1 = y_0 e^{-\lambda_1 x_0}$, o que nos leva a solução particular:

$$y(x) = y_0 e^{-\lambda_1 x_0} \cdot e^{\lambda_1 x} = y_0 e^{\lambda_1 (x - x_0)}.$$

■

4.2.2 EDOs homogêneas de segunda ordem

Após explorar as EDOs de primeira ordem e estabelecer o princípio do método elementar, expandimos nossa análise para as Equações Diferenciais Ordinárias homogêneas de segunda ordem. Essas equações são de fundamental importância, pois suas soluções introduzem as duas principais formas de funções que compõem a solução geral: exponenciais (para raízes reais) e trigonométricas (para raízes complexas conjugadas), além de tratarem o caso de raízes múltiplas.

Considere a EDO homogênea de segunda ordem:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \tag{4.7}$$

onde $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Sua equação característica associada é dada por:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{4.8}$$

As raízes λ_1 e λ_2 da equação característica (4.8) determinam a natureza da solução. Analisaremos os casos em que as raízes são reais distintas e reais múltiplas.

Consideraremos primeiro o caso em quem as raízes sãos reais distintas, com isso, temos:

Teorema 4.1. Sejam λ_1 e λ_2 raízes distintas da equação característica (4.8) e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma solução da EDO (4.7), então existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}\,, \tag{4.9}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Primeiramente, observemos que é constante a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 x}[f'(x) - \lambda_2 f(x)]. \tag{4.10}$$

De fato, calculando a derivada temos

$$g'(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\{-\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}[f'(x) - \lambda_2 f(x)] + e^{-\lambda_1 x}[f''(x) - \lambda_2 f'(x)]\}.$$

Da EDO (4.7) temos que $f''(x) = -a_1 f'(x) - a_0 f(x)$, além disso, utilizando as relações de Girard para o polinômio característico obtemos $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1$ e $\lambda_1\lambda_2 = a_0$, logo:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}\{-\lambda_1[f'(x) - \lambda_2 f(x)] + [f''(x) - \lambda_2 f'(x)]\} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}[-\lambda_1 f'(x) + \lambda_1\lambda_2 f(x) + f''(x) - \lambda_2 f'(x)] \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}[-\lambda_1 f'(x) + \lambda_1\lambda_2 f(x) + -a_1 f'(x) - a_0 f(x) - \lambda_2 f'(x)] \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}[(\lambda_1\lambda_2 - a_0) f(x) - (\lambda_1 + \lambda_2 + a_1) f'(x)] \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}[(a_0 - a_0) f(x) - (-a_1 + a_1) f'(x)] \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}[0 \cdot f(x) - 0 \cdot f'(x)] \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Este resultado mostra que a expressão (4.10) é uma constante. Denotemos esta constante por $c_1 \in \mathbb{R}$. Assim, $f'(x) - \lambda_2 f(x) = c_1(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_1 x}$

A seguir, mostraremos que também é constante a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h(x) = e^{-\lambda_2 x}\left[f(x) - c_1 e^{\lambda_1 x}\right]. \qquad (4.11)$$

De fato, calculando a derivada temos

$$\begin{aligned}
h'(x) &= -\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\left[f(x) - c_1 e^{\lambda_1 x}\right] + e^{-\lambda_2 x}\left[f'(x) - c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x}\right] \\
&= -\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} f(x) + \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} c_1 e^{\lambda_1 x} + e^{-\lambda_2 x} f'(x) - e^{-\lambda_2 x} c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \\
&= -\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} f(x) + c_1\lambda_2 e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} + e^{-\lambda_2 x} f'(x) - c_1\lambda_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \\
&= e^{-\lambda_2 x}[f'(x) - \lambda_2 f(x)] - c_1(\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)x},
\end{aligned}$$

utilizando a identidade obtida anteriormente para c_1, que $f'(x) - \lambda_2 f(x) = c_1(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_1 x}$, vemos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= e^{-\lambda_2 x}\left[c_1(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_1 x}\right] - c_1(\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \\
&= c_1(\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} - c_1(\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Isto mostra que a expressão em (4.11) é uma constante que, quando denotada por $c_2 \in \mathbb{R}$, resulta na identidade $e^{-\lambda_2 x}\left[f(x) - c_1 e^{\lambda_1 x}\right] = c_2$, onde isolando $f(x)$, obtemos:

$$f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

■

Considerando agora o caso em que a equação característica (4.8) admite uma raiz real dupla, ou seja, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 = \lambda_2$, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.2. Se λ_1 é raiz dupla da equação característica (4.8) e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma solução da EDO (4.7), então existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = e^{\lambda_1 x}(c_1 x + c_2), \qquad (4.12)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Primeiramente, observemos que é constante a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = e^{-\lambda_1 x}[f'(x) - \lambda_1 f(x)]. \qquad (4.13)$$

De fato, calculando a derivada temos

$$g'(x) = -\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}[f'(x) - \lambda_1 f(x)] + e^{-\lambda_1 x}[f''(x) - \lambda_1 f'(x)].$$

Da EDO (4.7) temos que $f''(x) = -a_1 f'(x) - a_0 f(x)$, além disso, utilizando as relações de Girard para o polinômio característico obtemos $2\lambda_1 = -a_1$ e $\lambda_1^2 = a_0$, logo:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= e^{-\lambda_1 x}\{-\lambda_1[f'(x) - \lambda_1 f(x)] + [f''(x) - \lambda_1 f'(x)]\} \\
&= e^{-\lambda_1 x}[-\lambda_1 f'(x) + \lambda_1^2 f(x) + f''(x) - \lambda_1 f'(x)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\lambda_1 x}[-\lambda_1 f'(x) + \lambda_1^2 f(x) - a_1 f'(x) - a_0 f(x) \; - \lambda_1 f'(x)] \\
&= e^{-\lambda_1 x}[(\lambda_1^2 - a_0) f(x) - (2\lambda_1 + a_1) f'(x)] \\
&= e^{-\lambda_1 x}[(a_0 - a_0) f(x) - (-a_1 + a_1) f'(x)] \\
&= e^{-\lambda_1 x}[0 \cdot f(x) - 0 \cdot f'(x)] \\
&= e^{-\lambda_1 x} \cdot 0 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Este resultado mostra que a expressão (4.13) é uma constante. Denotemos essa constante por $c_1 \in \mathbb{R}$. Assim, $e^{-\lambda_1 x}[f'(x) - \lambda_1 f(x)] = c_1$.

Por fim, mostremos que também é constante a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = e^{-\lambda_1 x}\left[f(x) - c_1 x e^{\lambda_1 x}\right]. \tag{4.14}$$

De fato, calculando a derivada temos

$$
\begin{aligned}
h'(x) \quad &= -\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\left[f(x) - c_1 x e^{\lambda_1 x}\right] + e^{-\lambda_1 x}\left[f'(x) - c_1 e^{\lambda_1 x} - c_1 x \lambda_1 e^{\lambda_1 x}\right] \\
&= -\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} f(x) + \lambda_1 c_1 x + e^{-\lambda_1 x} f'(x) - c_1 - \lambda_1 c_1 x \\
&= e^{-\lambda_1 x}[f'(x) - \lambda_1 f(x)] - c_1,
\end{aligned}
$$

usando a identidade

$$c_1 = e^{-\lambda_1 x}[f'(x) - \lambda_1 f(x)],$$

vemos que

$$h'(x) = c_1 - c_1 = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Isto mostra que a expressão em (4.14) é uma constante. Denotando-a por $c_2 \in \mathbb{R}$, resulta na identidade $e^{-\lambda_1 x}\left[f(x) - c_1 x e^{\lambda_1 x}\right] = c_2$, onde isolando $f(x)$, obtemos:

$$f(x) = e^{\lambda_1 x}(c_1 x + c_2).$$

■

Corolário 4.2. Fixados $(x_0, y_0), (x_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, existe uma única solução para o PVI

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \dfrac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \\
y(x_0) = y_0 \\
\dfrac{dy}{dx}(x_0) = y_0'.
\end{cases} \tag{4.15}
$$

4.2.3 EDOs homogêneas de terceira ordem

Considere a EDO homogênea de terceira ordem

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = 0, \tag{4.16}$$

onde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Sua equação característica associada

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4.17}$$

tem três raízes reais λ_1, λ_2 e λ_3, que podem ser todas distintas, todas iguais ou tais que há duas distintas.

Considerando, inicialmente, o caso em que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3. Se λ_1, λ_2 e λ_3 são as raízes distintas da equação (4.17) e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma solução da EDO (4.16), então existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + c_3e^{\lambda_3 x}, \tag{4.18}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Da EDO (4.16) temos que $f'''(x) + a_2f''(x) + a_1f'(x) + a_0f(x) = 0$, além disso, utilizando as relações de Girard para o polinômio característico (4.17) obtemos $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_2, \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = a_1$ e $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -a_0$, logo podemos escrever a EDO na forma fatorada de operadores diferencias

$$\begin{aligned} &f'''(x) + a_2f''(x) + a_1f'(x) + a_0f(x) \\ &= \frac{d^3}{dx^3}f(x) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\frac{d^2}{dx^2}f(x) + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\frac{d}{dx}f(x) - (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)f(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_3\right)f(x), \end{aligned}$$

assim

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_3\right)f(x) = 0. \tag{4.19}$$

Considere a função auxiliar

$$g(x) = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_3\right)f(x). \tag{4.20}$$

A EDO (4.16) pode então ser expressa como

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}g(x) - \lambda_1g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}g(x) = \lambda_1g(x).$$

Esta é uma e EDO de primeira ordem em $g(x)$, cuja solução conforme demonstrado na Seção 4.2.1, é $g(x) = ke^{\lambda_1 x}$, onde $k \in \mathbb{R}$. Substituindo a expressão $g(x)$, obtemos uma EDO de segunda ordem não homogênea:

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_3\right)f(x)=ke^{\lambda_1 x},$$

ou expandindo:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x)-(\lambda_2+\lambda_3)\frac{d}{dx}f(x)+\lambda_2\lambda_3 f(x)=ke^{\lambda_1 x},$$

ou ainda

$$f''(x)-(\lambda_2+\lambda_3)f'(x)+\lambda_2\lambda_3 f(x)=ke^{\lambda_1 x}. \tag{4.21}$$

Visto que a equação (4.21) é uma EDO linear não homogênea de segunda ordem. A solução geral é dada por $f(x)=f_h(x)+f_p(x)$, em que $f_h(x)$ é uma solução da EDO homogênea associada, cuja equação característica é $(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0$, com $\lambda_2\neq\lambda_3$, logo pelo Teorema 4.1, existem constantes $c_2,c_3\in\mathbb{R}$ de modo que $f_h(x)=c_2e^{\lambda_2 x}+c_3e^{\lambda_3 x}$ e $f_p(x)$ uma solução particular, que buscamos ser da forma $f_p(x)=c_1e^{\lambda_1 x}$, onde λ_1 é distinta de λ_2 e λ_3. Para verificar e determinar a constate c_1, substituímos $f_p(x)$ em (4.21), assim:

$$f''(x)-(\lambda_2+\lambda_3)f'(x)+\lambda_2\lambda_3 f(x)=ke^{\lambda_1 x}$$
$$\Leftrightarrow \left(c_1e^{\lambda_1 x}\right)''-(\lambda_2+\lambda_3)\left(c_1e^{\lambda_1 x}\right)'+\lambda_2\lambda_3c_1e^{\lambda_1 x}=ke^{\lambda_1 x}$$
$$\Leftrightarrow c_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x}-(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_1c_1e^{\lambda_1 x}+\lambda_2\lambda_3c_1e^{\lambda_1 x}=ke^{\lambda_1 x}$$
$$\Leftrightarrow c_1e^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)=ke^{\lambda_1 x}$$
$$\Leftrightarrow c_1e^{\lambda_1 x}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)=ke^{\lambda_1 x}$$

como $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1$, temos:

$$\Leftrightarrow c_1=\frac{ke^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_1 x}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$$
$$\Leftrightarrow c_1=\frac{k}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}.$$

Finalmente, a solução geral é dada por:

$$f(x)=f_h(x)+f_p(x)=c_2e^{\lambda_2 x}+c_3e^{\lambda_3 x}+c_1e^{\lambda_1 x},$$

rearranjando os termos, obtemos a identidade (4.18):

$$f(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+c_3e^{\lambda_3 x}.$$

■

Considerando agora o caso em que a equação (4.17) admite uma raiz real simples e uma raiz real com multiplicidade dois, estabelecemos o seguinte:

Teorema 4.4. Se λ_1, λ_2 e λ_3 são as raízes da equação característica (4.17), com $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3$, e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma solução da EDO (4.16), então existem constantes $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ de modo que

$$f(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+(c_2x+c_3)e^{\lambda_2 x}, \tag{4.22}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Da EDO (4.16) temos que $f'''(x) + a_2 f''(x) + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0$, além disso, utilizando as relações de Girard para o polinômio característico (4.17) obtemos

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2 = -a_2, \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_2 = a_1 \text{ e } \lambda_1\lambda_2\lambda_2 = -a_0$$

ou ainda

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = -a_2, 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = a_1 \text{ e } \lambda_1\lambda_2^2 = -a_0,$$

logo podemos escrever a EDO na forma fatorada de operadores diferencias

$$\begin{aligned}
&f'''(x) + a_2 f''(x) + a_1 f'(x) + a_0 f(x) \\
&= \frac{d^3}{dx^3} f(x) - (\lambda_1 + 2\lambda_2)\frac{d^2}{dx^2} f(x) + (2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)\frac{d}{dx} f(x) - (\lambda_1\lambda_2^2) f(x) \\
&= \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) f(x), \\
&= \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)^2 f(x),
\end{aligned}$$

assim

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)^2 f(x) = 0. \tag{4.23}$$

Considere a função auxiliar

$$g(x) = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)^2 f(x). \tag{4.24}$$

A EDO (4.16) pode então ser expressa como

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} g(x) - \lambda_1 g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} g(x) = \lambda_1 g(x).$$

Esta é uma e EDO de primeira ordem em $g(x)$, cuja solução conforme demonstrado na Seção 4.2.1, é $g(x) = ke^{\lambda_1 x}$, onde $k \in \mathbb{R}$. Substituindo a expressão $g(x)$, obtemos uma EDO de segunda ordem não homogênea:

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)^2 f(x) = ke^{\lambda_1 x},$$

ou expandindo:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - 2\lambda_2 \frac{d}{dx} f(x) + \lambda_2^2 f(x) = ke^{\lambda_1 x},$$

ou ainda

$$f''(x) - 2\lambda_2 f'(x) + \lambda_2^2(x) = ke^{\lambda_1 x}. \tag{4.25}$$

Visto que a equação (4.21) é uma EDO linear não homogênea de segunda ordem. A solução geral é dada por $f(x) = f_h(x) + f_p(x)$, em que $f_h(x)$ é uma solução da EDO homogênea associada, cuja equação característica é $(\lambda - \lambda_2)^2 = 0$, logo pelo Teorema 4.2, existem constantes $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ de modo que $f_h(x) = (c_2x + c_3)e^{\lambda_2 x}$, e $f_p(x)$ uma solução particular, que buscamos ser da forma $f_p(x) = c_1e^{\lambda_1 x}$, onde λ_1 é distinta de λ_2. Para verificar e determinar a constate c_1, substituímos $f_p(x)$ em (4.25), assim

$$f''(x) - 2\lambda_2 f'(x) + \lambda_2^2(x) = ke^{\lambda_1 x}$$

$$\Leftrightarrow \left(c_1e^{\lambda_1 x}\right)'' - 2\lambda_2\left(c_1e^{\lambda_1 x}\right)' + \lambda_2^2 c_1e^{\lambda_1 x} = ke^{\lambda_1 x}$$

$$\Leftrightarrow c_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x} - 2\lambda_2\lambda_1c_1e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2c_1e^{\lambda_1 x} = ke^{\lambda_1 x}$$

$$\Leftrightarrow c_1e^{\lambda_1 x}\,(\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) = ke^{\lambda_1 x}$$

$$\Leftrightarrow c_1e^{\lambda_1 x}\,(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = ke^{\lambda_1 x}$$

como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos:

$$\Leftrightarrow c_1 = \frac{ke^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_1 x}\,(\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow c_1 = \frac{k}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

logo, a solução geral é dada por:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = (c_2x + c_3)e^{\lambda_2 x} + c_1e^{\lambda_1 x}.$$

Rearranjando os termos, obtemos a identidade (4.22):

$$f(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + (c_2x + c_3)e^{\lambda_2 x}.$$

■

Considerando, finalmente, o caso em que a equação (4.17) admite uma raiz com multiplicidade três, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.5. Se λ_1 é uma raiz tripla da equação característica (4.17) e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma solução da EDO (4.16), então existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = (c_1x^2 + c_2x + c_3)e^{\lambda_1 x}, \tag{4.26}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Da EDO (4.16) temos que $f'''(x) + a_2f''(x) + a_1f'(x) + a_0f(x) = 0$, além disso, utilizando as relações de Girard para o polinômio característico (4.17) obtemos

$$3\lambda_1 = -a_2,\, 3\lambda_1^2 = a_1 \text{ e } \lambda_1^2 = -a_0,$$

logo podemos escrever a EDO na forma fatorada de operadores diferencias

$$
\begin{aligned}
&f'''(x)+a_2f''(x)+a_1f'(x)+a_0f(x)\\
&=\frac{d^3}{dx^3}f(x)-3\lambda_1\frac{d^2}{dx^2}f(x)+3\lambda_1^2\frac{d}{dx}f(x)-\lambda_1^2f(x)\\
&=\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)f(x),\\
&=\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)^3f(x),
\end{aligned}
$$

assim

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)^3f(x)=0. \tag{4.27}$$

Considere a função auxiliar

$$g(x)=\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)^2f(x). \tag{4.28}$$

A EDO (4.16) pode então ser expressa como

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}g(x)-\lambda_1g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}g(x)=\lambda_1g(x)$$

Esta é uma e EDO de primeira ordem em $g(x)$, cuja solução conforme demonstrado na Seção 4.2.1, é $g(x)=ke^{\lambda_1x}$, onde $k\in\mathbb{R}$. Substituindo a expressão $g(x)$, obtemos uma EDO de segunda ordem não homogênea:

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)^2f(x)=ke^{\lambda_1x}$$

ou expandindo:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x)-2\lambda_1\frac{d}{dx}f(x)+\lambda_1^2f(x)=ke^{\lambda_1x}$$

ou ainda

$$f''(x)-2\lambda_1f'(x)+\lambda_1^2(x)=ke^{\lambda_1x}. \tag{4.29}$$

Visto que a equação (4.29) é uma EDO linear não homogênea de segunda ordem. A solução geral é dada por $f(x)=f_h(x)+f_p(x)$, em que $f_h(x)$ é uma solução da EDO homogênea associada, cuja equação característica é $(\lambda-\lambda_1)^2=0$, logo pelo Teorema 4.2, existem constantes $c_2,c_3\in\mathbb{R}$ de modo que $f_h(x)=(c_2x+c_3)e^{\lambda_1x}$, e $f_p(x)$ uma solução particular, que buscamos ser da forma $f_p(x)=c_1x^2e^{\lambda_1x}$. Para verificar e determinar a constate c_1, substituímos $f_p(x)$ em (4.29), assim:

$$
\begin{aligned}
&f''(x)-2\lambda_1f'(x)+\lambda_1^2(x)=ke^{\lambda_1x}\\
&\Leftrightarrow \left(c_1x^2e^{\lambda_1x}\right)''-2\lambda_1\left(c_1x^2e^{\lambda_1x}\right)'+\lambda_1^2c_1x^2e^{\lambda_1x}=ke^{\lambda_1x}\\
&\Leftrightarrow c_1\left(2xe^{\lambda_1x}+\lambda_1x^2e^{\lambda_1x}\right)'-2\lambda_1c_1\left(2xe^{\lambda_1x}+\lambda_1x^2e^{\lambda_1x}\right)+c_1\lambda_1^2x^2e^{\lambda_1x}=ke^{\lambda_1x}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow c_1\left(2e^{\lambda_1 x} + 4\lambda_1 x e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x^2 e^{\lambda_1 x}\right) + c_1 e^{\lambda_1 x}(-4\lambda_1 x - 2\lambda_1^2 x^2 + \lambda_1^2 x^2) = ke^{\lambda_1 x}$$
$$\Leftrightarrow c_1 e^{\lambda_1 x}(2 + 4\lambda_1 x + \lambda_1^2 x^2 - 4\lambda_1 x - 2\lambda_1^2 x^2 + \lambda_1^2 x^2) = ke^{\lambda_1 x}$$
$$\Leftrightarrow 2c_1 e^{\lambda_1 x} = ke^{\lambda_1 x}$$
$$\Leftrightarrow c_1 = \frac{ke^{\lambda_1 x}}{2e^{\lambda_1 x}}$$
$$\Leftrightarrow c_1 = \frac{k}{2}$$

logo, a solução geral é dada por:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = (c_2 x + c_3)e^{\lambda_1 x} + c_1 x^2 e^{\lambda_1 x}.$$

Rearranjando os termos, obtemos a identidade (4.26) temos:

$$f(x) = (c_1 x^2 + c_2 x + c_3)e^{\lambda_1 x}.$$

■

Fazendo uso dos três últimos teoremas acima, concluímos o seguinte resultado.

Corolário 4.3. Fixados $(x_0, y_0), (x_0, y_0'), (x_0, y_0'') \in \mathbb{R}^2$, existe uma única solução para o PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{d^3y}{dx^3} + a_2\dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1\dfrac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ \dfrac{dy}{dx}(x_0) = y_0' \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}(x_0) = y_0''. \end{cases} \tag{4.29}$$

4.2.4 Generalização para ordem n

Considere a EDO linear homogênea com coeficientes reais constantes de ordem n

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0. \tag{4.30}$$

A equação característica associada é dada por:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{4.31}$$

A generalização para ordem n pode ser compreendida através da fatoração do operador diferencial e da aplicação sequencial da técnica de redução de ordem, uma extensão direta dos procedimentos já detalhados.

Se o polinômio característico (4.31) possui raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, então a EDO (4.30) pode ser reescrita em termos do operador diferencial como:

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)\dots\left(\frac{d}{dx} - \lambda_n\right)f(x) = 0. \tag{4.32}$$

O princípio fundamental para a obtenção da solução geral em ordem n consiste em definimos uma função auxiliar

$$g(x) = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) \dots \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n\right) f(x). \tag{4.33}$$

Com isso, a EDO original (4.30) se transforma em uma EDO de primeira ordem em $g(x)$:

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} g(x) - \lambda_1 g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} g(x) = \lambda_1 g(x).$$

Conforme demonstrado na Seção 4.2.1, a solução para esta EDO de primeira ordem é $g(x) = k_1 e^{\lambda_1 x}$, onde $k_1 \in \mathbb{R}$.

Substituindo $g(x)$ de volta na sua definição, obtemos uma EDO de ordem $n - 1$:

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) \dots \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n\right) f(x) = k_1 e^{\lambda_1 x}.$$

Esta é uma EDO linear não homogênea de ordem $n - 1$. A solução geral para esta EDO será a soma da solução homogênea (determinada pelas raízes $\lambda_2, \dots, \lambda_n$) e de uma solução particular.

A solução geral para as EDOs não homogêneas resultantes será a soma da solução homogênea (encontrada com a aplicação sequencial da nossa técnica de redução de ordem) e de uma solução particular. Essa solução particular pode ser obtida por métodos convencionais, como o método dos Coeficientes a Determinar, dependendo da forma do termo não homogêneo.

A aplicação iterativa desse processo de redução de ordem e determinação de soluções particulares permite construir as seguintes formas para a solução geral $f(x)$, dependendo da natureza das raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ do polinômio característico (4.31). Assim, temos os seguintes casos:

- Se todas as n raízes λ_k são reais e distintas entre si, a solução geral é uma combinação linear simples de funções exponenciais:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}\,; \tag{4.34}$$

- Se uma raiz λ possui multiplicidade m, sua contribuição para a solução geral será da forma $p(x)e^{\lambda x}$, onde $p(x)$ é um polinômio de grau $m - 1$. Em termos mais gerais, se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j$ são as raízes distintas do polinômio característico, com λ_k de multiplicidade m_k, e $p_k(x)$ é um polinômio de grau $m_k - 1$, a solução geral é:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{j} p_k(x) e^{\lambda_k x}. \tag{4.35}$$

Como exemplos específicos para o caso em que há raízes múltiplas, temos:

- Para uma única raiz dupla ($\lambda_1 = \lambda_2$) e as demais simples:

$$f(x) = (c_1 x + c_2) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=3}^{n} c_k e^{\lambda_k x}; \tag{4.36}$$

- Para uma única raiz tripla ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) e as demais simples:

$$f(x) = (c_1 x^2 + c_2 x + c_3) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=4}^{n} c_k e^{\lambda_k x}. \tag{4.37}$$

4.2.5 Tratamento de raízes complexas

Ao resolver a equação característica associada a uma EDO linear homogênea real com coeficientes constantes, é comum que surjam raízes complexas. Para uma equação polinomial com coeficientes reais, as raízes complexas sempre aparecem em pares conjugados. Ou seja, se $a + bi$ é uma raíz (com $b \neq 0$), então $a - bi$ também é uma raiz. Nesta seção, demonstraremos como o método elementar via derivadas permite obter as soluções reais correspondentes a esses pares de raízes complexas conjugadas, sem a necessidade de recorrer diretamente às exponenciais complexas na derivação.

Considere a EDO linear com coeficientes constantes

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = \phi(x), \tag{4.38}$$

em que $n \geq 1$ é inteiro, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ são constantes reais. Quando a equação característica associada,

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \tag{4.39}$$

possui raízes complexas, temos duas opões a considerar.

Primeiro, para cada par de raízes complexas $a \pm bi$, usamos a exponencial complexa

$$e^{(a \pm bi)x} = e^{ax} (\cos bx \pm i \operatorname{sen} bx) \tag{4.40}$$

para obter um par de soluções reais

$$e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{2} \left(e^{ibx} + e^{-ibx} \right) \tag{4.41}$$

e

$$e^{ax}\operatorname{sen} bx = \frac{e^{ax}}{2i}\left(e^{ibx} - e^{-ibx}\right) \tag{4.42}$$

que geram a solução geral da EDO.

A outra opção seria, ao invés de usar a exponencial complexa, verificamos que as funções reais $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\operatorname{sen} bx$ geram a solução da EDO. Com isso, destacamos o seguinte resultado:

Teorema 4.6. Se $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$, com $b \neq 0$, são raízes da equação característica

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4.43}$$

e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é solução da EDO

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \tag{4.44}$$

então existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\operatorname{sen} bx), \tag{4.45}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Inicialmente, observemos que é constante a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{b}e^{-ax}[f(x)(a\operatorname{sen} bx + b\cos bx) - f'(x)\operatorname{sen} bx]. \tag{4.46}$$

De fato, calculando a derivada temos

$$\begin{aligned}
g'(x) = \quad & -\frac{a}{b}e^{-ax}[f(x)(a\operatorname{sen} bx + b\cos bx) - f'(x)\operatorname{sen} bx] \\
& +\frac{1}{b}e^{-ax}[f'(x)(a\operatorname{sen} bx + b\cos bx) + f(x)(ab\cos bx - b^2\operatorname{sen} bx)] \\
& -\frac{1}{b}e^{-ax}[f''(x)\operatorname{sen} bx + bf'(x)\cos bx], \\
= \quad & -\frac{a^2}{b}e^{-ax}f(x)\operatorname{sen} bx - ae^{-ax}f(x)\cos bx + \frac{a}{b}e^{-ax}f'(x)\operatorname{sen} bx \\
& +\frac{a}{b}e^{-ax}f'(x)\operatorname{sen} bx + e^{-ax}f'(x)\cos bx + ae^{-ax}f(x)\cos bx \\
& -be^{-ax}\,f(x)\operatorname{sen} bx - \frac{1}{b}e^{-ax}f''(x)\operatorname{sen} bx - e^{-ax}f'(x)\cos bx \\
= \quad & -\frac{a^2}{b}e^{-ax}f(x)\operatorname{sen} bx + \frac{a}{b}e^{-ax}f'(x)\operatorname{sen} bx + \frac{a}{b}e^{-ax}f'(x)\operatorname{sen} bx \\
& -be^{-ax}\,f(x)\operatorname{sen} bx - \frac{1}{b}e^{-ax}f''(x)\operatorname{sen} bx.
\end{aligned}$$

Observemos que do polinômio característico (4.43), temos

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad = \big(\lambda - (a + bi)\big)\big(\lambda - (a - bi)\big)$$

$$= (\lambda - a - bi)(\lambda - a + bi)$$
$$= \lambda^2 - a\lambda + bi\lambda - a\lambda + a^2 - abi - bi\lambda + abi - b^2 i^2$$
$$= \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$$

assim, obtemos as relações $a_1 = -2a$ e $a_0 = a^2 + b^2$. Além disso, da EDO (4.44) temos $f''(x) = -a_1 f'(x) - a_0 f(x)$. Com isso:

$$\begin{aligned}
g'(x) = \; & -\frac{a^2}{b} e^{-ax} f(x) \operatorname{sen} bx + \frac{a}{b} e^{-ax} f'(x) \operatorname{sen} bx + \frac{a}{b} e^{-ax} f'(x) \operatorname{sen} bx \\
& -b e^{-ax} f(x) \operatorname{sen} bx - \frac{1}{b} e^{-ax} (-a_1 f'(x) - a_0 f(x)) \operatorname{sen} bx \\
g'(x) = \; & -\frac{a^2}{b} e^{-ax} f(x) \operatorname{sen} bx + \frac{2a}{b} e^{-ax} f'(x) \operatorname{sen} bx - \frac{b^2}{b} e^{-ax} f(x) \operatorname{sen} bx \\
& + \frac{a_1}{b} e^{-ax} f'(x) \operatorname{sen} bx + \frac{a_0}{b} e^{-ax} f(x) \operatorname{sen} bx \\
= \; & \frac{1}{b} e^{-ax} \operatorname{sen} bx \, [(a_0 - a^2 - b^2) f(x) + (a_1 + 2a) f'(x)] \\
= \; & \frac{1}{b} e^{-ax} \operatorname{sen} bx \, [(a^2 + b^2 - a^2 - b^2) f(x) + (-2a + 2a) f'(x)] \\
= \; & \frac{1}{b} e^{-ax} \operatorname{sen} bx \, [0 \cdot f(x) + 0 \cdot f'(x)] \\
= \; & \frac{1}{b} e^{-ax} \operatorname{sen} bx \cdot 0 \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Este resultado mostra que a expressão em (4.46) é constante. Denotemos esta constante por $c_1 \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\frac{1}{b} e^{-ax} [f(x)(a \operatorname{sen} bx + b \cos bx) - f'(x) \operatorname{sen} bx] = c_1$$

o que implica

$$f(x)(a \operatorname{sen} bx + b \cos bx) - f'(x) \operatorname{sen} bx = b c_1 e^{ax} \tag{4.47}$$

A seguir, mostraremos que também é constante a função $h: (0, \pi/|b|) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{e^{-ax} f(x) - c_1 \cos bx}{\operatorname{sen} bx}. \tag{4.48}$$

De fato, calculando a derivada utilizando a regra do quociente, temos:

$$\begin{aligned}
h'(x) = \; & \left[\frac{e^{-ax} f(x) - c_1 \cos bx}{\operatorname{sen} bx} \right]' \\
= \; & \left[\frac{e^{-ax} f(x)}{\operatorname{sen} bx} - \frac{c_1 \cos bx}{\operatorname{sen} bx} \right]'
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left[\left(-ae^{-ax}f(x) + e^{-ax}f'(x)\right)\operatorname{sen} bx - e^{-ax}f(x)(b\cos bx)\right]}{\operatorname{sen}^2 bx}$$
$$- \frac{[c_1(-b)\operatorname{sen} bx \cdot \operatorname{sen} bx - c_1 \cos bx\,(b\cos bx)]}{\operatorname{sen}^2 bx}$$
$$= \frac{\left[e^{-ax}\left(-af(x) + f'(x)\right)\operatorname{sen} bx - be^{-ax}f(x)\cos bx\right]}{\operatorname{sen}^2 bx}$$
$$- \frac{[-bc_1 \operatorname{sen}^2 bx - bc_1 \cos^2 bx]}{\operatorname{sen}^2 bx}$$
$$= \frac{e^{-ax}[-af(x) + f'(x)]\operatorname{sen} bx + bc_1 \operatorname{sen}^2 bx - be^{-ax}f(x)\cos bx + bc_1 \cos^2 bx}{\operatorname{sen}^2 bx}$$
$$= \frac{e^{-ax}[-af(x)\operatorname{sen} bx + f'(x)\operatorname{sen} bx - bf(x)\cos bx] + bc_1(\operatorname{sen}^2 bx + \cos^2 bx)}{\operatorname{sen}^2 bx}$$
$$= \frac{e^{-ax}[-f(x)(a\operatorname{sen} bx + b\cos bx) + f'(x)\operatorname{sen} bx] + bc_1 \cdot 1}{\operatorname{sen}^2 bx}$$
$$= \frac{-e^{-ax}[f(x)(a\operatorname{sen} bx + b\cos bx) - f'(x)\operatorname{sen} bx] + bc_1}{\operatorname{sen}^2 bx}.$$

Agora usando a identidade (4.47), temos:

$$h'(x) = \frac{-e^{-ax}[bc_1e^{-ax}] + bc_1}{\operatorname{sen}^2 bx} = \frac{-bc_1 + bc_1}{\operatorname{sen}^2 bx} = \frac{0}{\operatorname{sen}^2 bx} = 0$$

para todo $x \in (0, \pi/|b|)$. Isso mostra que a expressão em (4.48) é uma constante nesse intervalo. Denotando-a por $c_2 \in \mathbb{R}$, resulta na identidade:

$$\frac{e^{-ax}f(x) - c_1 \cos bx}{\operatorname{sen} bx} = c_2,$$

multiplicando ambos os lados por $\operatorname{sen} bx$:

$$e^{-ax}f(x) - c_1 \cos bx = c_2 \operatorname{sen} bx,$$

isolando o termo que contém $f(x)$:

$$e^{-ax}f(x) = c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx,$$

finalmente, multiplicando por e^{-ax}, obtemos a solução geral da EDO (4.44).

$$f(x) = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx).$$

A identidade (4.44) foi demonstrada para o intervalo $(0, \pi/|b|)$, onde $\operatorname{sen} bx \neq 0$. No entanto, as funções fundamentais $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\operatorname{sen} bx$ são contínuas e definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, as constantes c_1 e c_2 podem ser univocamente determinadas a partir de quaisquer condições iniciais.

Para ilustrarmos a determinação dessas constantes, considere as condições iniciais em $x = 0$, isto é, $f(0) = y_0$ e $f'(0) = y_0'$.

Aplicando a primeira condição a solução geral (4.45), temos:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= e^{a\cdot 0}(c_1 \cos b\cdot 0 + c_2 \operatorname{sen} b \cdot 0)\\
&= e^{0}(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0)\\
&= 1\cdot(c_1\cdot 1 + c_2\cdot 0)\\
&= c_1
\end{aligned}
$$

assim,

$$
c_1 = f(0). \tag{4.49}
$$

Para a segunda constante, calculamos a primeira derivada de $f(x)$, assim

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= [f(x) = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx)]'\\
&= ae^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx) + e^{ax}(c_1(-b)\operatorname{sen} bx + c_2 b \cos bx)\\
&= e^{ax}[a(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx) + b(-c_1 \operatorname{sen} bx + c_2 \cos bx)].
\end{aligned}
$$

Aplicando a segunda condição, temos:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= e^{a\cdot 0}[a(c_1 \cos b\cdot 0 + c_2 \operatorname{sen} b\cdot 0) + b(-c_1 \operatorname{sen} b\cdot 0 + c_2 \cos b\cdot 0)]\\
&= e^{0}[a(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0) + b(-c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0)]\\
&= 1\cdot[a(c_1\cdot 1 + c_2\cdot 0) + b(-c_1\cdot 0 + c_2\cdot 1)]\\
&= ac_1 + bc_2.
\end{aligned}
$$

substituindo $c_1 = f(0)$, teremos:

$$
af(0) + bc_2 = f'(0)
$$

Isolando c_2, temos

$$
c_2 = \frac{1}{b}[f'(0) - af(0)] \tag{4.50}
$$

Dessa forma, c_1e c_2 são univocamente determinadas para $b \neq 0$. A validade da solução em todo $x \in \mathbb{R}$ é garantida pela continuidade das funções envolvidas e pelo fato de que a EDO (4.44) é linear e tem coeficientes constantes em $\mathbb{R}$. Este argumento em conjunto com a periodicidade das funções seno e cosseno, assegura que a identidade (4.45) é válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

■

5. APLICAÇÕES

Este capítulo demonstra a aplicabilidade do método elementar via derivadas para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes em diversos contextos práticos. As aplicações apresentadas foram retiradas de Stewart (2013) e Guidorizzi (2013). Serão explorados problemas de física (sistemas massa-mola e circuitos elétricos) e de funções.

5.1 Sistemas massa-mola

Esta seção aborda problemas clássicos da física que descrevem o movimento de partículas, frequentemente sob a influência de forças elásticas e de amortecimento. As Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem são fundamentais para modelar esses sistemas vibratórios

Problema 5.1.1: Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo x sob a ação da força elástica $-4x\vec{i}$. Supondo $x(0) = 1$ e $x'(0) = -1$, determine a velocidade no instante t.

Solução:

Pela segunda lei de Newton, temos que a equação do movimento é:

$$1 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -4x.$$

Reorganizando, obtemos a EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0,$$

cuja equação característica é dada por

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Determinando as raízes dessa equação, temos:

$$\lambda^2 = 4 \Longrightarrow \lambda^2 = -4 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-4} \Longrightarrow \lambda = \pm 2i \ \Longrightarrow \lambda_1 = 2i \text{ e } \lambda_2 = -2i,$$

assim, temos raízes complexas conjugadas da forma $a \pm bi$, onde $a = 0$ e $b = 2$. Logo pelo Teorema 4.6, temos que a solução geral da EDO é dada por

$$x(t) = e^{0\cdot t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t.$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aplicando as condições iniciais $x(0) = 1$, temos:

$$x(0) \quad = c_1 \cos(2 \cdot 0) + c_2 \operatorname{sen}(2 \cdot 0)$$

$$
\begin{aligned}
&= c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0\\
&= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0\\
&= c_1
\end{aligned}
$$

assim,

$$x(0) = 1 \Longrightarrow c_1 = 1.$$

desse modo, substituindo c_1 em $x(t)$, obtemos:

$$x(t) = \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$$

Para aplicar a segunda condição, $x'(0) = -1$, primeiro calculamos a derivada de $x(t)$ em relação a t:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= (\cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)'\\
&= 2 \cdot (-\operatorname{sen} 2t) + c_2 \cdot 2 \cdot \cos 2t\\
&= -2 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t
\end{aligned}
$$

e assim, temos:

$$
\begin{aligned}
x'(0) &= -2 \cdot \operatorname{sen} 0 + 2c_2 \cos 0\\
&= -2 \operatorname{sen} 0 + 2c_2 \cos 0\\
&= -2 \cdot 0 + 2c_2 \cdot 1\\
&= 2c_2
\end{aligned}
$$

logo,

$$x'(0) = -1 \Longrightarrow 2c_2 = -1 \Longrightarrow c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Por fim, substituindo o valor de c_2, obtemos a equação horária da posição

$$x(t) = \cos 2t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$$

e a equação da velocidade

$$x'(t) = -2 \operatorname{sen} 2t - \cos 2t.$$

Problema 5.1.2: Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo Ox sob a ação da força elástica $-x\vec{\imath}$ e de uma força de amortecimento proporcional a velocidade dada por $-2x'\vec{\imath}$. Determine a posição $x = x(t)$, $t \geq 0$, supondo $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$.

Solução:

Uma vez que a força elástica é $F_{\text{elástica}} = -x$ e a força de amortecimento é $F_{\text{amortecimento}} = -2x'$, temos pela Segunda Lei de Newton ($F = ma$), que a equação do movimento é:

$$1 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -x - 2\frac{dx}{dt}.$$

Reorganizando, obtemos a EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

cuja equação característica é dada por

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Determinando as raízes dessa equação, temos:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Este é um caso de raiz real dupla. Logo por Teorema 4.2, temos que a solução geral da EDO é dada por

$$x(t) = e^{-t}(c_1t + c_2)$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aplicando as condições iniciais $x(0) = 1$, temos:

$$\begin{aligned} x(0) &= e^{-0}(c_1 \cdot 0 + c_2) \\ &= e^0(0 + c_2) \\ &= 1 \cdot c_2 \\ &= c_2 \end{aligned}$$

assim,

$$x(0) = 1 \Longrightarrow c_2 = 1.$$

desse modo, substituindo c_2 em $x(t)$, temos:

$$x(t) = e^{-t}(c_1t + 1)$$

Para aplicar a segunda condição, $x'(0) = 0$, primeiro calculamos a derivada de $x(t)$ em relação a t:

$$\begin{aligned} x'(t) &= [e^{-t}(c_1t + 1)]' \\ &= -1 \cdot e^{-t}(c_1t + 1) + e^{-t}(c_1) \\ &= -e^{-t}(c_1t + 1 - c_1) \end{aligned}$$

e assim, temos:

$$\begin{aligned} x'(0) &= -e^{-0}(c_1 \cdot 0 + 1 - c_1) \\ &= -e^0(0 + 1 - c_1) \\ &= -1 \cdot (1 - c_1) \\ &= c_1 - 1 \end{aligned}$$

logo,

$$x'(0) = 0 \Longrightarrow c_1 - 1 = 0 \Longrightarrow c_1 = 1.$$

Por fim, substituindo o valor de c_1, obtemos a equação:

$$x(t) = e^{-t}(t+1).$$

Problema 5.1.3: Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo Ox sob a ação da força elástica $-2x\vec{\imath}$ e de uma força de amortecimento proporcional à velocidade dada por $-2x'\vec{\imath}$. Suponha $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$. Determine a posição $x = x(t)$, $t \geq 0$.

Solução:

Do enunciado temos que a força elástica é $F_{\text{elástica}} = -2x$ e a força de amortecimento é $F_{\text{amortecimento}} = -2x'$. Assim, pela Segunda Lei de Newton ($F = ma$), temos que a equação de movimento é:

$$1 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -2x - 2\frac{dx}{dt}.$$

Reorganizando, obtemos a EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0,$$

cuja equação característica é dada por

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Determinando as raízes dessa equação usado a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

assim, temos $\lambda_1 = -1 + i$ e $\lambda_2 = -1 - i$, raízes complexas conjugadas da forma $a \pm bi$, onde $a = -1$ e $b = 1$. Logo pelo Teorema 4.6, temos que a solução geral da EDO é dada por

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t).$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aplicando a condição inicial, $x(0) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} x(0) &= e^{-0}(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0) \\ &= e^{0}(c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) \\ &= 1 \cdot (c_1 + 0) \\ &= c_1 \end{aligned}$$

assim,

$$x(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0.$$

desse modo, substituindo c_1 em $x(t)$, temos:

$$x(t) = e^{-t}(0 \cdot \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) = e^{-t}(0 + c_2 \operatorname{sen} t) = c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t.$$

Para aplicar a segunda condição, $x'(0) = 1$, primeiro calculamos a derivada de $x(t)$ em relação a t:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t)' \\ &= c_2(-1 \cdot e^{-t} \operatorname{sen} t + e^{-t} \cos t) \\ &= c_2(-e^{-t} \operatorname{sen} t + e^{-t} \cos t) \\ &= c_2 e^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

e assim, temos:

$$\begin{aligned} x'(0) &= c_2 e^{-0}(\cos 0 - \operatorname{sen} 0) \\ &= c_2 \cdot 1 \cdot (1 - 0) \\ &= c_2 \end{aligned}$$

logo,

$$x'(0) = 1 \Longrightarrow c_2 = 1.$$

Por fim, substituindo o valor de c_2, obtemos a equação horária da posição

$$x(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t.$$

Problema 5.1.4. Uma mola presa a uma massa de 2 kg tem uma constante de amortecimento 14 e uma força de 6 N é necessária para manter a mola esticada 0,5 m além de seu comprimento natural. A mola é esticada 1 m além de seu comprimento natural e então é solta com velocidade 0. Localize a posição da massa em qualquer momento t.

Solução:

Pela Lei de Hooke ($F_{\text{elástica}} = -ks$), a força necessária para estendar a mola é

$$k \cdot 0{,}5 = 6$$

e, dessa forma,

$$k = \frac{6}{0{,}5} = 12.$$

Usando $k = 12$ N/m e $m = 2$ kg, temos pela segunda lei de Newton:

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = -12x - 14\frac{dx}{dt}.$$

Reorganizando temos

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 14\frac{dx}{dt} + 12x = 0$$

ou ainda,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt} + 6x = 0.$$

Determinando as raízes dessa equação usado a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\lambda = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

portanto

$$\lambda_1 = \frac{-7+5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ e } \lambda_2 = \frac{-7-5}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Este é um caso de raízes reais distintas. Logo por Teorema 4.1, temos que a solução geral da EDO é dada por

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aplicando as condições iniciais $x(0) = 1$, temos:

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 e^{-0} + c_2 e^{-6\cdot 0} \\ &= c_1 e^0 + c_2 e^0 \\ &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 \\ &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

assim, temos

$$c_1 + c_2 = 1. \qquad (*)$$

Para aplicar a segunda condição, $x'(0) = 0$, primeiro calculamos a derivada de $x(t)$ em relação a t:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t})' \\ &= c_1 \cdot (-1) \cdot e^{-t} + c_2 \cdot (-6) \cdot e^{-6t} \\ &= -c_1 e^{-t} - 6c_2 e^{-6t} \end{aligned}$$

e assim, temos:

$$\begin{aligned} x'(0) &= -c_1 e^{-0} - 6c_2 e^{-6\cdot 0} \\ &= -c_1 e^0 - 6c_2 e^0 \\ &= -c_1 \cdot 1 - 6c_2 \cdot 1 \\ &= -c_1 - 6c_2 \end{aligned}$$

logo,

$$-c_1 - 6c_2 = 0. \qquad (**)$$

Somando membro a membro $(*)$ e $(**)$, temos

$$c_1 + c_2 - c_1 - 6c_2 = 1 + 0 \Rightarrow -5c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{5}$$

Substituindo o valor encontrado de c_2 em $(**)$, temos:

$$-c_1 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow -c_1 + \frac{6}{5} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{6}{5}$$

Por fim, substituindo os valores de c_1 e c_2, obtemos a equação:

$$x(t) = \frac{6}{5}e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-6t}.$$

5.2 Circuitos elétricos

Equações diferenciais são fundamentais na análise de circuitos elétricos, como os circuitos RLC, RL e RC, que modelam o comportamento de carga, corrente e tensão ao longo do tempo. As leis de Kirchhoff e Ohm frequentemente levam à formulação de EDOs lineares com coeficientes constantes.

Problema 5.2.1. Um circuito em série contém uma força eletromotriz constante de 60 V, um capacitor com $C = 0{,}05$ F e um resistor com $R = 5\ \Omega$ e carga inicial $Q(0) = 0$ C. . Encontre a carga e a corrente no instante t.

Solução:

Para um circuito RC em série, a lei de voltagem de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão é igual a voltagem fornecida. Assim, temos

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t).$$

Uma vez que $I = dQ/dt$, essa equação se torna

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t).$$

Substituindo os valores dados de R, C e $E(t)$, obtemos:

$$5\frac{dQ}{dt} + 20Q = 60$$

ou ainda

$$\frac{dQ}{dt} + 4Q = 12.$$

A EDO homogênea associada é dada por:

$$\frac{dQ}{dt} + 4Q = 0$$

cuja equação característica é

$$\lambda + 4 = 0$$

e raiz

$$\lambda_1 = -4$$

Assim, a solução da homogênea associada é dada por

$$Q_h(t) = c_1 e^{-4t}.$$

Como o termo não homogêneo é uma constante, tentamos uma solução particular da forma $Q_p(t) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Substituindo na EDO, temos

$$\frac{dk}{dt} + 4k = 12 \Longrightarrow 0 + 4k = 12 \Longrightarrow 4k = 12 \Longrightarrow k = \frac{12}{4} \Longrightarrow k = 3.$$

Assim, a solução particular é:

$$Q_p(t) = 3.$$

E dessa forma, a solução geral é dada por:

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t) = c_1 e^{-4t} + 3.$$

Aplicando a condição inicial, $Q(0) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} Q(0) &= c_1 e^{-4\cdot 0} + 3 \\ &= c_1 e^0 + 3 \\ &= c_1 \cdot 1 + 3 \\ &= c_1 + 3 \end{aligned}$$

assim,

$$Q(0) = 0 \Longrightarrow c_1 + 3 = 0 \Longrightarrow c_1 = -3.$$

Por fim, substituindo o valor de c_1, obtemos a carga no instante t:

$$Q(t) = -3e^{-4t} + 3.$$

e a corrente no instante t

$$I(t) = Q'(t) = (-3e^{-4t} + 3)' = -3 \cdot (-4)e^{-4t} + 0 = 12e^{-4t}.$$

Problema 5.2.2. Um circuito em série consiste em um resistor com $R = 20\ \Omega$, um indutor com $L = 1$ H, um capacitor com $C = 0{,}002$ F e um pilha de 12 V. Se a carga inicial e a corrente inicial forem 0, encontre a carga e a corrente no instante t.

Solução:

Para um circuito RLC em série, a lei de voltagem de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão é igual a voltagem fornecida. Assim, temos

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t).$$

Uma vez que $I = dQ/dt$, essa equação se torna

$$L\frac{d^2Q}{dt} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t).$$

Substituindo os valores dados de L, R, C e $E(t)$, obtemos:

$$1\frac{d^2Q}{dt} + 20\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{0{,}002}Q = 12$$

ou ainda

$$\frac{d^2Q}{dt} + 20\frac{dQ}{dt} + 500Q = 12$$

A EDO homogênea associada é dada por:

$$\frac{d^2Q}{dt} + 20\frac{dQ}{dt} + 500Q = 0$$

cuja equação característica é dada por

$$\lambda^2 + 20\lambda + 500 = 0.$$

Determinando as raízes dessa equação usado a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\lambda = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 1 \cdot 500}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 2000}}{2} = \frac{-20 \pm \sqrt{-1600}}{2} = \frac{-20 \pm 40i}{2}$$

portanto

$$\lambda = -10 \pm 20i$$

assim, temos $\lambda_1 = -10 + 20i$ e $\lambda_2 = -10 - 20i$, raízes complexas conjugadas da forma $a \pm bi$, onde $a = -1,$ e $b = 20$. Logo pelo Teorema 4.6, temos que a solução da homogênea associada é dada por

$$Q_h(t) = e^{-10t}(c_1 \cos 20t + c_2 \operatorname{sen} 20t).$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Como o termo não homogêneo é uma constante, tentamos uma solução particular da forma $Q_p(t) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Substituindo na EDO, temos

$$\frac{d^2k}{dt} + 20\frac{dk}{dt} + 500k = 12 \Longrightarrow 0 + 20 \cdot 0 + 500k = 12 \Longrightarrow 500k = 12 \Longrightarrow k = \frac{12}{500}$$

portanto,

$$k = \frac{3}{125}.$$

Assim, a solução particular é:

$$Q_p(t) = \frac{3}{125}.$$

E dessa forma, a solução geral é dada por:

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t) = e^{-10t}(c_1 \cos 20t + c_2 \operatorname{sen} 20t) + \frac{3}{125}.$$

As condições iniciais são que a carga e a corrente são 0 no instante $t = 0$, isto é, $Q(0) = 0$ e $I(0) = Q'(0) = 0$. Usando inicialmente $Q(0) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} Q(0) \quad &= e^{-10\cdot 0}(c_1 \cos(20 \cdot 0) + c_2 \operatorname{sen}(20 \cdot 0)) + \frac{3}{125} \\ &= e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0) + \frac{3}{125} \end{aligned}$$

$$= 1 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) + \frac{3}{125}$$

$$= c_1 + \frac{3}{125}$$

assim,

$$Q(0) = 0 \Rightarrow c_1 + \frac{3}{125} = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{125}$$

desse modo, substituindo c_1 em $Q(t)$, obtemos:

$$Q(t) = e^{-10t}\left(-\frac{3}{125}\cos 20t + c_2 \operatorname{sen} 20t\right) + \frac{3}{125}.$$

Para aplicar a segunda condição, $I(0) = Q'(0) = 0$, primeiro calculamos a derivada de $Q(t)$ em relação a t:

$$\begin{aligned}
Q'(t) = {} & \left[e^{-10t}\left(-\frac{3}{125}\cos 20t + c_2 \operatorname{sen} 20t\right) + \frac{3}{125}\right]' \\
= {} & -10e^{-10t}\left(-\frac{3}{125}\cos 20t + c_2 \operatorname{sen} 20t\right) \\
& + e^{-10t}\left(-\frac{3}{125} \cdot 20 \cdot (-\operatorname{sen} 20t) + c_2 \cdot 20 \cdot \cos 20t\right) + 0 \\
Q'(t) = {} & e^{-10t}\left[\frac{30}{125}\cos 20t - 10c_2 \operatorname{sen} 20t + \frac{60}{125}\operatorname{sen} 20t + 20c_2 \cos 20t\right] \\
= {} & e^{-10t}\left[\left(\frac{6}{25} + 20c_2\right)\cos 20t + \left(\frac{12}{25} - 10c_2\right)\operatorname{sen} 20t\right]
\end{aligned}$$

e assim, temos:

$$\begin{aligned}
Q'(0) & = e^{-10\cdot 0}\left[\left(\frac{6}{25} + 20c_2\right)\cos(20 \cdot 0) + \left(\frac{12}{25} - 10c_2\right)\operatorname{sen}(20 \cdot 0)\right] \\
& = e^{0}\left[\left(\frac{6}{25} + 20c_2\right)\cos 0 + \left(\frac{12}{25} - 10c_2\right)\operatorname{sen} 0\right] \\
& = 1 \cdot \left[\left(\frac{6}{25} + 20c_2\right) \cdot 1 + \left(\frac{12}{25} - 10c_2\right) \cdot 0\right] \\
& = \frac{6}{25} + 20c_2
\end{aligned}$$

logo,

$$Q'(0) = 0 \Rightarrow \frac{6}{25} + 20c_2 = 0 \Rightarrow 20c_2 = -\frac{6}{25} \Rightarrow c_2 = -\frac{6}{500} = -\frac{3}{250}.$$

Por fim, substituindo o valor de c_2, temos que a carga no instante t é

$$Q(t) = e^{-10t}\left(-\frac{3}{125}\cos 20t - \frac{3}{250}\operatorname{sen} 20t\right) + \frac{3}{125}$$

e a corrente no instante t é

$$\begin{aligned}
I(t) &= Q'(t) \\
&= e^{-10t}\left[\left(\frac{6}{25} + 20 \cdot \left(-\frac{3}{250}\right)\right)\cos 20t + \left(\frac{12}{25} - 10 \cdot \left(-\frac{3}{250}\right)\right)\operatorname{sen} 20t\right] \\
&= e^{-10t}\left[\left(\frac{6}{25} - \frac{60}{250}\right)\cos 20t + \left(\frac{12}{25} + \frac{30}{250}\right)\operatorname{sen} 20t\right] \\
&= e^{-10t}\left[\left(\frac{6}{25} - \frac{6}{25}\right)\cos 20t + \left(\frac{12}{25} + \frac{3}{25}\right)\operatorname{sen} 20t\right] \\
&= e^{-10t}\left(0 \cdot \cos 20t + \frac{15}{25}\operatorname{sen} 20t\right) \\
&= e^{-10t}\left(0 + \frac{3}{5}\operatorname{sen} 20t\right) \\
&= \frac{3}{5}e^{-10t}\operatorname{sen} 20t.
\end{aligned}$$

5.3 Sistemas análogos e modelos abstratos

Esta seção explora problemas que, embora possam não ser explicitamente de sistemas massa-mola ou circuitos elétricos, são descritos por Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes e, portanto, podem ser resolvidos pelo método elementar. Incluem-se modelos de movimento com resistência do meio e problemas funcionais abstratos.

Problema 5.3.1. Uma bola de massa m é lançada verticalmente para cima a partir da superfície da Terra com uma velocidade inicial positiva v_0. Assumimos que as forças agindo na bola sejam a força da gravidade e a força de resistência do ar com sentido oposto ao sentido do movimento e com módulo $p|v(t)|$, onde p é uma constante positiva e $v(t)$ é a velocidade da bola no instante t. Tanto na subida quanto na descida, a força total agindo na bola é $-pv - mg$. (Durante a subida, $v(t)$ é positiva e a resistência age para baixo; durante a descida, $v(t)$ é negativa e a resistência age para cima.) Determine a velocidade no instante t.

Solução:

De acordo com a Segunda Lei de Newton, a equação de movimento é

$$m\frac{dv}{dt} = -pv - mg.$$

Reorganizando, obtemos a EDO linear de primeira ordem com coeficientes constantes:

$$m\frac{dv}{dt} + pv = -mg.$$

Dividindo por m temos:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{p}{m}v = -g.$$

A EDO homogênea associada é dada por:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{p}{m}v = 0$$

cuja equação característica é

$$\lambda + \frac{p}{m} = 0$$

e raiz

$$\lambda_1 = -\frac{p}{m}$$

Assim, a solução da homogênea associada é dada por

$$v_h(t) = c_1 e^{-\frac{p}{m}t}.$$

Como o termo não homogêneo é uma constante $(-g)$, tentamos uma solução particular da forma $v_p(t) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Substituindo na EDO, temos

$$\frac{dk}{dt} + \frac{p}{m}k = -g \Longrightarrow 0 + \frac{p}{m}k = -g \Longrightarrow \frac{p}{m}k = -g \Longrightarrow k = -\frac{mg}{p}.$$

Assim, a solução particular é:

$$v_p(t) = -\frac{mg}{p}.$$

E dessa forma, a solução geral é dada por:

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = c_1 e^{-\frac{p}{m}t} - \frac{mg}{p}.$$

Aplicando a condição inicial, $v(0) = v_0$, temos:

$$\begin{aligned} v(0) &= c_1 e^{-\frac{p}{m}\cdot 0} - \frac{mg}{p} \\ &= c_1 e^{0} - \frac{mg}{p} \\ &= c_1 \cdot 1 - \frac{mg}{p} \\ &= c_1 - \frac{mg}{p} \end{aligned}$$

assim,

$$v(0) = v_0 \Longrightarrow c_1 - \frac{mg}{p} = v_0 \Longrightarrow c_1 = v_0 + \frac{mg}{p}.$$

Por fim, substituindo o valor de c_1, obtemos a equação horária da velocidade

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right) e^{-\frac{p}{m}t} - \frac{mg}{p}.$$

Problema 5.3.2. f é uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que sua derivada segunda é igual à diferença entre sua derivada primeira e ela própria. Determine f, sabendo ainda que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

Solução:

A condição do enunciado pode ser expressa como:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{df}{dx} - f.$$

Reorganizando, obtemos a EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{df}{dx} + f = 0$$

cuja equação característica é dada por

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Determinando as raízes dessa equação usando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

assim, temos raízes complexas conjugadas da forma $a \pm bi$, onde

$$a = \frac{1}{2} \text{ e } b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo pelo Teorema 4.6, temos que a solução geral da EDO é dada por

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aplicando a condição inicial, $f(0) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} f(0) &= e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\right)\right) \\ &= e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0) \\ &= 1 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) \\ &= c_1 \end{aligned}$$

assim,

$$f(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0.$$

desse modo, substituindo c_1 em $f(x)$, temos:

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left(0 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) = c_2 e^{\frac{1}{2}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Para aplicar a segunda condição, $f'(0) = 1$, primeiro calculamos a derivada de f em relação a x:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[c_2 e^{\frac{1}{2}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]' \\ &= c_2\left[\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}c_2 e^{\frac{1}{2}x}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \end{aligned}$$

e assim, temos:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{2}c_2 e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}c_2 e^{0}\left(\operatorname{sen} 0 + \sqrt{3}\cos 0\right) \\ &= \frac{1}{2}c_2\cdot 1\cdot\left(0+\sqrt{3}\cdot 1\right) \\ &= \frac{1}{2}c_2\cdot\sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 \end{aligned}$$

logo,

$$f'(0) = 1 \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 1 \Longrightarrow c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \Longrightarrow c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Por fim, substituindo o valor de c_2, obtemos a equação horária da posição

$$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Problema 5.3.3. Um móvel desloca-se sobre o eixo x com aceleração proporcional à diferença entre a velocidade e a posição. Determine a posição $x = x(t)$ do móvel, supondo $x''(0) = 2$, $x'(0) = 1$ e $x(0) = 0$

Solução:

A informação do enunciado pode ser expressa como:

$$x''(t) = k[x'(t) - x(t)]$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é a constante de proporcionalidade. Podemos determinar k a partir das condições inicias fornecidas: $x''(0) = 2$, $x'(0) = 1$ e $x(0) = 0$. De fato, para $t = 0$ temos:

$$x''(0) = k[x'(0) - x(0)] \Longrightarrow 2 = k(1-0) \Longrightarrow k = 2.$$

Assim a EDO que descreve o movimento é

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\left(\frac{dx}{dt} - x\right)$$

Reorganizando, obtemos a EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

cuja equação característica é dada por

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Determinando as raízes dessa equação usado a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

assim, temos $\lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = 1 - i$, raízes complexas conjugadas da forma $a \pm bi$, onde $a = 1$ e $b = 1$. Logo pelo Teorema 4.6, temos que a solução geral da EDO é dada por

$$x(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t).$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aplicando a condição inicial, $x(0) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} x(0) &= e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0) \\ &= 1 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) \\ &= c_1 \end{aligned}$$

assim,

$$x(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0.$$

desse modo, substituindo c_1 em $x(t)$, temos:

$$x(t) = e^t(0 \cdot \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) = e^t(0 + c_2 \operatorname{sen} t) = c_2 e^t \operatorname{sen} t.$$

Para aplicar a segunda condição, $x'(0) = 1$, primeiro calculamos a derivada de $x(t)$ em relação a t:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (c_2 e^t \operatorname{sen} t)' \\ &= c_2(e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t) \\ &= c_2 e^t(\operatorname{sen} t + \cos t) \end{aligned}$$

e assim, temos:

$$\begin{aligned} x'(0) &= c_2 e^0(\operatorname{sen} 0 + \cos 0) \\ &= c_2 \cdot 1 \cdot (0 + 1) \\ &= c_2 \end{aligned}$$

logo,

$$x'(0) = 1 \Longrightarrow c_2 = 1.$$

Por fim, substituindo o valor de c_2, obtemos a equação horária da posição

$$x(t) = e^t \operatorname{sen} t.$$

6 CONCLUSÃO

Esta dissertação dedicou-se a explorar e validar um método alternativo para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes, rompendo com a dependência tradicional de pré-requisitos avançados do cálculo, como integração e séries de potências. O problema central abordado foi a busca por uma abordagem que permitisse o estudo dessas equações em etapas mais iniciais do aprendizado matemático, ampliando o acesso a um campo de estudo de fundamental importância.

Ao longo deste trabalho, demonstramos que a solução geral das Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes pode ser obtida utilizando-se exclusivamente de um resultado elementar do cálculo diferencial: a propriedade de que uma função derivável em um intervalo aberto é constante se, e somente se, sua derivada é nula. Esta metodologia foi desenvolvida para EDOs de primeira, segunda e terceira ordens, abrangendo casos com raízes reais distintas, raízes reais múltiplas e o tratamento de raízes complexas conjugadas sem o uso explícito de números complexos no processo de derivação. A aplicabilidade do método para ordens superiores, até a ordem n, foi também brevemente discutida. A eficácia e a versatilidade do método foram evidenciadas por meio de diversas aplicações em problemas de modelagem da física como sistemas massa-mola e de circuitos elétricos.

A principal contribuição deste estudo reside, portanto, na proposição de uma alternativa didática para o ensino de Equações Diferenciais. Ao desmistificar a complexidade própria do tema e torná-lo acessível a alunos com uma base de cálculo mais elementar, este trabalho busca contribuir para a formação de professores de matemática e para o ensino de matemática em geral. A elaboração da sequência didática para alunos do ensino médio em turmas olímpicas de matemática, apresentada no Apêndice A, corrobora essa contribuição pedagógica, oferecendo um recurso concreto para a implementação dessa abordagem em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. Tradução Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

APOSTOL, Tom M. **Cálculo I**. Barcelona: Reverté, 1979.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo, v. 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo, v. 2**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo, v. 4**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Fundamentos de cálculo**. SBM, 2022.

SOTOMAYOR, Jorge. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. (Projeto Euclides).

STEWART, James. **Cálculo, v. 1**. Tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STEWART, James. **Cálculo, v. 2**. Tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais, v. 1**. Tradução Antonio Zumpano; revisão técnica Antonio Pertence Jr. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

APÊNDICE A - RECURSO EDUCACIONAL: SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE EDOS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES PARA TURMAS OLÍMPICAS DO ENSINO MÉDIO

1 INTRODUÇÃO AO PRODUTO EDUCACIONAL

Este apêndice apresenta uma sequência didática desenvolvida especificamente para introduzir o conceito e a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes para alunos do ensino médio que participam de turmas olímpicas de matemática. Essas turmas, por sua natureza e foco em aprofundamento, frequentemente já possuem contato com o conceito de derivadas, o que as torna o público ideal para esta proposta.

Contrariando a abordagem tradicional, que exige vastos pré-requisitos de cálculo como integração, sequências e séries, esta sequência didática baseia-se exclusivamente em um resultado básico sobre derivadas: o fato de que uma função derivável em um intervalo aberto é constante se, e somente se, sua derivada é nula.

Essa premissa permite o acesso a um tópico avançado de forma acessível e intuitiva, rompendo com a necessidade de abordar as EDOs apenas em semestres mais avançados do currículo universitário. O objetivo é demonstrar a aplicabilidade do método elementar via derivadas e estimular o raciocínio matemático para além do currículo padrão, mostrando que é possível resolver completamente as EDOs em questão antes mesmo de estudar integração ou o famoso teorema de Picard sobre existência e unicidade.

Público-alvo: Alunos do ensino médio com conhecimentos sólidos em cálculo de derivadas (incluindo regras básicas de derivação) e álgebra fundamental, que demonstrem interesse em aprofundar seus conhecimentos em matemática ou estejam em preparação para olimpíadas de matemática.

Duração Sugerida: A sequência pode ser adaptada, mas sugere-se a distribuição do conteúdo em 4 a 6 aulas, ou módulos flexíveis, dependendo do ritmo de aprendizado da turma e da profundidade desejada.

2 ESTRUTURA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA:

Módulo 1: Revisando Derivadas e a Propriedade Fundamental

1.1. O Conceito de Derivada: Uma breve retomada intuitiva da derivada como taxa de variação instantânea e inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função. Revisão das notações:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{e} \quad y'.$$

1.2. Regras de Derivação Essenciais: Abordagem das regras de derivação de funções potência (x^n), soma, produto, quociente e cadeia, focando nas que serão aplicadas às funções exponenciais e trigonométricas.

1.3. A Propriedade da Função Constante: Apresentação detalhada da propriedade central do método: "Seja $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em um intervalo I. Se $f'(x) = 0$ para todo x interior a I, então $f(x) = k$ (uma constante) para todo x em I.". Esta propriedade será o alicerce para a construção das soluções da EDOs.

1.4. Atividades Propostas: Exercícios práticos para consolidar a compreensão da relação entre a derivada nula e a constância de uma função.

Módulo 2: EDOs de Primeira Ordem: A Base do Método Elementar

2.1. O que são Equações Diferenciais Ordinárias?

Introdução com exemplos simplificados de problemas do mundo real que podem ser modelados por EDOs, como o crescimento populacional ou o decaimento radioativo, para contextualizar a importância do tema.

2.2. Resolvendo a EDO Homogênea de Primeira Ordem

$$\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

- Apresentação da EDO e sua equação característica.
- A Função Auxiliar: Construção da função auxiliar $g(x) = e^{-\lambda_1 x} f(x)$, onde λ_1 é a raiz da equação característica. Demonstrando que $g'(x) = 0$.
- Determinação da Solução Geral: Derivação da solução $f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}$ a partir da constância de $g(x)$.

2.3. Exemplos e Aplicações Iniciais: Problemas simples que ilustram o método, como os Exemplos 4.1 e 4.2 da dissertação, focando na lógica de construção da função auxiliar.

2.4. Atividades Propostas: Exercícios de resolução de EDOs de primeira ordem utilizando a metodologia da função auxiliar.

Módulo 3: EDOs de Segunda Ordem: Raízes Reais

3.1. Introdução às EDOs de Segunda Ordem: Exploração de modelos físicos como o sistema massa-mola sem atrito

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

3.2. A Equação Característica e suas Raízes: Explicação de como a equação característica ($\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$) surge e como a natureza de suas raízes (reais, complexas) determina a forma das soluções da EDO.

3.3. Caso de Raízes Reais Distintas ($\lambda_1 \neq \lambda_2$):

- Apresentação da EDO homogênea de segunda ordem.
- Construção das Funções Auxiliares: Introdução didática das funções auxiliares (conforme o Teorema 4.1 da dissertação) que levam à constância. Demonstração passo a passo de como cada função auxiliar resulta em uma constante e, subsequentemente, à solução geral
$$f(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}.$$
- Exemplo Prático: Aplicação do método ao Exemplo 4.5 da dissertação ($f''(x) - f(x) = 0$), detalhando a construção e o uso de $g(x)$ e $h(x)$.

3.4. Caso de Raízes Reais Múltiplas ($\lambda_1 = \lambda_2$):

- Apresentação da EDO com raiz dupla.
- Discussão da forma da solução
$$f(x) = (c_1x + c_2)e^{\lambda_1 x}$$
e a ideia por trás das funções auxiliares utilizadas (Teorema 4.2 da dissertação), adaptada para o nível do ensino médio.

3.5. Atividades Propostas: Exercícios de resolução de EDOs de segunda ordem com raízes reais (distintas e múltiplas), incentivando os alunos a reproduzir o processo de construção das funções auxiliares.

Módulo 4: EDOs de Segunda Ordem: Raízes Complexas (Abordagem Real)

4.1. Raízes Complexas Conjugadas em EDOs Reais

- Explicação que, para EDOs com coeficientes reais, raízes complexas da equação característica sempre aparecem em pares conjugados ($a \pm bi$).

4.2. Obtendo Soluções Trigonométricas

- Demonstração de como as funções auxiliares podem ser construídas para resultar nas soluções reais
$$e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx)$$
diretamente, sem a necessidade de recorrer explicitamente a números complexos no processo de derivação.

4.3. Exemplo Chave: Aplicação do método aos Exemplos 4.3 e 4.4 da dissertação $(f''(x) + f(x) = 0)$, mostrando a derivação das soluções trigonométricas.
4.4. Atividades Propostas: Resolução de EDOs de segunda ordem que geram raízes complexas conjugadas, com foco na aplicação do método para obter as soluções trigonométricas correspondentes.

Módulo 5: Desafios e Aplicações para Olimpíadas

5.1. Problemas de Modelagem Simplificados: Exercícios que envolvem a tradução de cenários físicos ou de outras áreas (por exemplo, sistemas elétricos RLC simplificados) em EDOs lineares, com o foco na formulação da EDO e na subsequente aplicação do método elementar para encontrar a solução.
5.2. Problemas Desafio (Estilo Olimpíada): Seleção de problemas que, embora possam não ser explicitamente de EDOs em sua formulação original, podem ser resolvidos de forma elegante utilizando os princípios do método elementar, exigindo um raciocínio criativo na identificação ou construção de funções auxiliares.
5.3. Discussão e Generalização Qualitativa: Uma breve discussão sobre como a lógica do método pode ser estendida para EDOs de ordem superior, reforçando a unificação e sistematicidade da abordagem.

3 ORIENTAÇÕES PEDAGÓGICAS PARA O PROFESSOR:

- Linguagem Acessível e Rigor: Priorizar uma linguagem didática e objetiva, adaptada ao nível dos alunos de turmas olímpicas, sem comprometer o rigor matemático essencial.
- Ênfase na Intuição: Incentivar a compreensão intuitiva por trás da construção das funções auxiliares e da propriedade da derivada nula.
- Visualizações: Recomenda-se o uso de recursos visuais (gráficos, simulações simples) para ilustrar o comportamento das soluções e os conceitos subjacentes.
- Atividades Práticas: Aulas expositivas devem ser complementadas com a resolução de diversos exemplos e a proposição de exercícios para que os alunos apliquem ativamente o método.
- Estímulo à Curiosidade: Promover discussões que conectem as EDOs com fenômenos do cotidiano ou problemas.