



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**FRANCISCO NAIRON MARQUES**

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS ÀS BIOCÊNCIAS**

**FORTALEZA**

**2025**

FRANCISCO NAIRON MARQUES

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS ÀS BIOCÊNCIAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- M317c Marques, Francisco Nairon.  
Equações diferenciais aplicadas às biociências / Francisco Nairon Marques. – 2025.  
111 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2025.  
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.
1. Equações diferenciais. 2. Modelagem matemática. 3. Biociências. I. Título.

CDD 510

---

FRANCISCO NAIRON MARQUES

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS ÀS BIOCÊNCIAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em: 08/08/2025.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro  
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPAr)

A Deus.

Aos meus pais, Antônio e Eliane, à minha esposa Elinete e ao meu filho Heitor, motivos de toda a minha dedicação.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por ter concedido força e saúde, ajudando a superar todos os desafios que me levaram a concluir o curso de mestrado.

Agradeço à minha esposa Elinete, por todo suporte e incentivo aos estudos que me permitiram concluir este curso e a toda minha família por sempre acreditarem no meu potencial.

Aos colegas de turma, por todo o apoio, parcerias e colaboração para que todos viessem a concluir o curso de mestrado.

Aos excelentes professores do PROFMAT da UFC, em especial ao Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, pela orientação na construção deste trabalho científico.

Aos participantes da banca examinadora, Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro e Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo, pelo tempo dedicado à leitura e avaliação deste trabalho.

“Talvez a aplicação mais importante do cálculo sejam as equações diferenciais. Quando cientistas físicos ou cientistas sociais usam cálculo, muitas vezes o fazem para analisar uma equação diferencial que tenha surgido no processo de modelagem de algum fenômeno que eles estejam estudando” (Stewart, 2013, p. 555).

## RESUMO

Este trabalho tem como finalidade investigar o uso de equações diferenciais como instrumentos de modelagem matemática aplicados a fenômenos biológicos, com foco na elaboração de propostas didáticas para o Ensino Médio. A justificativa reside na necessidade de um ensino de matemática mais contextualizado e significativo, em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que incentiva a articulação entre diferentes áreas do conhecimento. A metodologia adotada parte de um estudo teórico aprofundado sobre equações diferenciais e sua aplicação em biociências, bem como dos fundamentos pedagógicos da Modelagem Matemática. Como resultado, este estudo culmina na elaboração de um produto educacional composto por três sequências didáticas detalhadas, abordando os temas de concentração de medicamentos, crescimento populacional e o sistema predador-presa. Tais sequências utilizam tecnologias digitais como o Geogebra e planilhas eletrônicas para promover uma abordagem investigativa e visual. Conclui-se que a introdução de tópicos do cálculo diferencial no Ensino Médio, por meio da modelagem, é uma abordagem viável e produtiva, que atende às demandas da BNCC por um ensino interdisciplinar. A metodologia permite que os estudantes assumam um papel ativo na construção do conhecimento, desenvolvendo competências essenciais ao transformar dados em modelos e analisar criticamente a plausibilidade dos resultados.

**Palavras-chave:** equações diferenciais; modelagem matemática; biociências.

## ABSTRACT

This work aims to investigate the use of differential equations and systems of differential equations as mathematical modeling tools applied to biological phenomena, with a focus on developing didactic proposals for High School. The justification lies in the need for a more contextualized and meaningful mathematics education, in line with the guidelines of the National Common Curricular Base (BNCC), which encourages the articulation between different areas of knowledge. The adopted methodology is based on an in-depth theoretical study of differential equations and their application in biosciences, as well as the pedagogical foundations of Mathematical Modeling. As a result, this study culminates in the development of an educational product composed of three detailed didactic sequences, addressing the topics of drug concentration, population growth, and the predator-prey system. These sequences use digital technologies such as GeoGebra and electronic spreadsheets to promote an investigative and visual approach. It is concluded that introducing topics from differential calculus in High School, through modeling, is a viable and productive approach that meets the demands of the BNCC for an interdisciplinary education. The methodology allows students to take an active role in the construction of knowledge, developing essential competencies by transforming data into models and critically analyzing the plausibility of the results.

**Keywords:** differential equations; mathematical modeling; biosciences.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Dispersão de dados da Tabela 1.....	20
Figura 2	– Construção do gráfico de uma função exponencial utilizando controles deslizantes no Geogebra.....	22
Figura 3	– Gráfico de regressão logística para a população de leveduras.....	24
Figura 4	– Família de funções do tipo $y(t) = Ce^t - 2, C \in \mathbb{R}$ .....	28
Figura 5	– Densidade populacional ao longo de um riacho.....	31
Figura 6	– Família de soluções da equação $\frac{dL}{dt} = k(50 - L)$ .....	33
Figura 7	– Família de soluções da equação $\frac{dy}{dt} = 1 + \sin t - y$ .....	34
Figura 8	– Representação gráfica de $L(t) = 50 - Ae^{-t}$ .....	37
Figura 9	– Comparação gráfica das soluções analíticas e por regressão.....	40
Figura 10	– Gráfico de fases.....	41
Figura 11	– Gráfico de fases da equação $\frac{dp}{dt} = r(p - a) \left(1 - \frac{p}{k}\right) p$ .....	42
Figura 12	– Um gráfico de fases.....	44
Figura 13	– Gráfico de fases de $F(t)$ para $s = 1$ .....	47
Figura 14	– Gráfico de fases de $F(t)$ para $s = -1$ .....	48
Figura 15	– Gráfico de fazes para frequência da cepa 1 da população de bactérias.....	50
Figura 16	– Início da construção de um campo de direções.....	51
Figura 17	– Campo de direções de $\frac{dy}{dt} = t + y$ .....	51
Figura 18	– Campo de direções e solução de EDO's no Geogebra.....	52
Figura 19	– Campo de direções de $y' = y - 2x$ .....	53
Figura 20	– Solução da EDO $y' = y - 2x$ que passa por $(0,1)$ .....	53
Figura 21	– Campo de direções de $\frac{dF}{dt} = F(1 - F)(1 - 3F)$ .....	54
Figura 22	– Curva de solução de $\frac{dF}{dt} = F(1 - F)(1 - 3F)$ .....	55
Figura 23	– Método de Euler.....	56
Figura 24	– Método de Euler com $h = 0,25$ .....	57
Figura 25	– Método de Euler com $h = 0,125$ .....	57
Figura 26	– Campo de direções de $\frac{dp}{dt} = (0,55 - 0,0026p)p$ .....	58
Figura 27	– Comparação: campo de direções, método de Euler e curva de solução....	59

Figura 28 – Campo de direções no plano $CR$ .....	62
Figura 29 – Curva de solução do problema de valor inicial no plano $CR$ .....	63
Figura 30 – Populações de coelhos e raposas ao longo do tempo.....	64
Figura 31 – Populações de coelhos e raposas ao longo do tempo, em escalas diferentes.....	64
Figura 32 – Campo de direções: Modelo predador-presa com capacidade de suporte.	66
Figura 33 – Retrato de fases: Curvas de solução sobre o campo de direções.....	67
Figura 34 – Curva de solução do problema de valor inicial no plano $CR$ , com capacidade de suporte.....	67
Figura 35 – Populações de coelhos e raposas ao longo do tempo, com capacidade de suporte.....	68
Figura 36 – Populações de coelhos e raposas ao longo do tempo, com capacidade de suporte e em escalas diferentes.....	68
Figura 37 – Linhas nulas $C$ .....	69
Figura 38 – Linhas nulas $R$ .....	70
Figura 39 – Interação das linhas nulas.....	70
Figura 40 – Crescimento de $C(t)$ .....	71
Figura 41 – Crescimento de $R(t)$ .....	72
Figura 42 – Análise do plano de fases por regiões.....	72
Figura 43 – Análise do plano de fases das equações de Kermack-McKendrick.....	74
Figura 44 – Análise do plano de fases das equações de Kermack-McKendrick: caso genérico.....	74
Figura 45 – Plano de fases das equações de Kermack-McKendrick.....	75
Figura 46 – Planilha de Cálculos no Geogebra.....	92
Figura 47 – Plotagem de pontos no Geogebra.....	92
Figura 48 – Dispersão de dados da Tabela 3.....	96
Figura 49 – Lista de pontos no Geogebra.....	97
Figura 50 – Representa exponencial da população inicial de leveduras.....	98
Figura 51 – Dispersão da taxa de variação per capita.....	99
Figura 52 – Mortes por Covid-19 no Brasil de fevereiro de 2020 a dezembro de 2021.....	101
Figura 53 – Linhas nulas do sistema predador-presa.....	104

Figura 54 – Campo de direções – População de coelhos e raposas..... 105

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – População de leveduras no decorrer do tempo.....	19
Tabela 2 – População de leveduras e sua taxa de crescimento per capita.....	23
Tabela 3 – População leveduras no decorrer do tempo.....	96
Tabela 4 – População de leveduras e sua taxa de crescimento per capita.....	99

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EDO	Equação Diferencial Ordinária

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $\in$  Pertencente
- $\mathbb{R}$  Conjunto dos números reais
- $\infty$  Infinito
- $\approx$  Aproximadamente igual

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	15
2	MODELAGEM MATEMÁTICA E INTERDISCIPLINARIDADE NO ENSINO MÉDIO.....	17
2.1	Matemática e a descrição de crescimentos populacionais.....	18
3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	26
3.1	Solução de uma Equação Diferencial.....	27
3.2	Classificações de uma equação linear.....	28
3.2.1	<i>Equações diferenciais de Tempo Puro.....</i>	30
3.2.2	<i>Equações Diferenciais Autônomas.....</i>	31
3.2.3	<i>Equações diferenciais Não Autônomas.....</i>	33
3.3	Equações separáveis.....	34
3.4	Gráficos de fase.....	41
3.5	Equilíbrio e estabilidade.....	43
3.6	Campos de direção.....	50
3.7	Método de Euler.....	55
4	SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	60
4.1	Modelo predador-presa.....	60
4.2	Análise do plano de fases.....	68
4.3	Sistemas de equações diferenciais lineares.....	75
4.3.1	<i>Resolução de sistemas de equações diferenciais lineares.....</i>	77
5	PROPOSTA METODOLÓGICA NO ENSINO MÉDIO.....	89
5.1	Sequência didática 1: Concentração de medicamentos na corrente sanguínea.....	89
5.2	Sequência didática 2: Crescimento populacional.....	94
5.3	Sequência didática 3: Modelo predador-presa.....	101
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	108
	REFERÊNCIAS .....	110

## 1 INTRODUÇÃO

A Matemática, em sua essência, é uma linguagem poderosa para descrever, modelar e prever a dinâmica do mundo natural. Dentre suas mais ricas ferramentas, as equações diferenciais destacam-se pela capacidade de representar fenômenos que envolvem taxas de variação, sendo fundamentais para as biociências. As equações diferenciais podem ser empregadas em modelos que representam o crescimento populacional, a disseminação de doenças infecciosas, a interação entre espécies e diversos outros fenômenos biológicos. Sobre aplicação da matemática na biologia e biociências no geral Stewart e Day (2015) afirmam que

a biologia matemática teve um desenvolvimento lento, provavelmente devido à complexidade das estruturas de processos biológicos. Nas últimas décadas, porém, o campo floresceu. [...] O escopo das aplicações matemáticas à biologia já é enorme, tendo levado a importantes insights que revolucionaram nossa compreensão dos processos biológicos e geraram novos campos de estudo (Stewart e Day, 2015, p. 34).

Apesar de sua vasta aplicabilidade, conceitos sobre equações diferenciais são tradicionalmente abordados apenas no Ensino Superior, criando uma lacuna entre a matemática escolar e suas mais impactantes aplicações, entre elas as aplicações às biociências. Levando o estudo de equações diferenciais a educação básica os estudantes podem reconhecer a matemática como uma linguagem científica capaz de representar situações reais de maneira quantitativa e dinâmica.

A justificativa para a escolha deste tema reside na crescente necessidade de um ensino de matemática mais contextualizado e significativo, em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A BNCC incentiva a articulação entre diferentes áreas do conhecimento e o desenvolvimento de competências como a construção e interpretação de modelos matemáticos para analisar criticamente fenômenos naturais e sociais. Ao explorar temas como crescimento populacional, farmacocinética e interações ecológicas, esta dissertação responde a essa demanda, buscando transformar a percepção da matemática de uma disciplina puramente abstrata para uma ferramenta viva e essencial para a compreensão da biologia.

Diante disso, o objetivo geral deste trabalho é investigar o uso de equações diferenciais e sistemas de equações diferenciais como instrumentos de modelagem matemática aplicados a fenômenos biológicos, com foco em práticas didáticas que favoreçam a aprendizagem no Ensino Médio. Busca-se, com isso, elaborar e apresentar propostas

metodológicas que favoreçam a compreensão desses conteúdos, por meio de sequências didáticas que envolvam o uso de tecnologias digitais, a análise de dados reais e a construção de modelos matemáticos contextualizados. Assim, os estudantes poderão explorar com profundidade e significado, conceitos matemáticos complexos em contextos biológicos relevantes.

Para alcançar este fim, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Analisar os fundamentos pedagógicos da Modelagem Matemática e da interdisciplinaridade no contexto da educação básica brasileira;
- Estudar os conceitos teóricos de equações diferenciais e sistemas de equações diferenciais, com foco nos modelos mais relevantes para as biociências;
- Resolver EDO's por métodos analíticos e numéricos, com ou sem apoio de softwares;
- Elaborar um produto educacional, na forma de sequências didáticas, que traduza a teoria matemática estudada em atividades práticas, investigativas e acessíveis para estudantes do Ensino Médio.

Portanto, o objeto de pesquisa desta dissertação é o processo de transposição didática de tópicos do cálculo diferencial para a educação básica, utilizando a modelagem de fenômenos biológicos como elemento mediador. Para isso, o trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 estabelece a fundamentação pedagógica que ancora a proposta. Os Capítulos 3 e 4 se dedicam ao desenvolvimento do arcabouço matemático sobre equações diferenciais e sistemas, respectivamente. O Capítulo 5 apresenta o produto educacional, detalhando três sequências didáticas. Por fim, o Capítulo 6 tece as considerações finais, sintetizando os resultados e apontando caminhos para futuras pesquisas.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA E INTERDISCIPLINARIDADE NO ENSINO MÉDIO

A educação matemática contemporânea busca, cada vez mais, romper com a abordagem tradicional baseada exclusivamente na resolução mecânica de exercícios, buscando o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa, onde o estudante é capaz de agir de maneira crítica a partir de estímulos da realidade e interferir positivamente nesta realidade. Sobre aprendizagem significativa, Almeida (2013, p. 36) diferencia de outras, afirmando que

A aprendizagem significativa ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado, e quando o aluno adota uma estratégia correspondente para assim proceder (Ausubel *et al.*, 1980 *apud* Almeida *et al.*, 2013, p. 36).

Nesse contexto, a interdisciplinaridade surge como uma estratégia pedagógica fundamental para promover essa aprendizagem significativa, conectando o conhecimento matemático a outras áreas do saber e ao cotidiano dos estudantes. O conceito de interdisciplinaridade é bastante difuso no meio educacional, entretanto apresenta diferentes conceitos e acepções, inclusive com confusões no que diferencia interdisciplinaridade, transdisciplinaridade e multidisciplinaridade. Como nosso foco não está em estudar estas abordagens metodológicas a fundo, ficaremos com concepção ampla trazida por Tomaz e David (2021) que entende interdisciplinaridade escolar como qualquer forma de combinação entre duas ou mais disciplinas com vista à compreensão de um objeto a partir da confluência de pontos de vista diferentes e tendo como objetivo final a elaboração de uma síntese relativamente ao objeto comum (Pombo, 1994 *apud* Tomaz; David, 2021, p. 14).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça a importância de práticas pedagógicas que valorizem a interdisciplinaridade e o uso da matemática em contextos reais. A BNCC traz como uma das competências a serem desenvolvidas: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral (Competência Específica 1 de Matemática para o Ensino Médio).

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para fazer julgamentos bem fundamentados (Brasil, 2017, p. 532).

Entre as possibilidades de articulação da matemática com outras disciplinas, destacam-se as ciências biológicas, que possibilita uma abordagem integrada de conceitos fundamentais de ambas as áreas. Ao explorar temas como o crescimento populacional, a propagação de epidemias e a dinâmica dos ecossistemas, os educadores podem utilizar modelos matemáticos para simular e prever fenômenos biológicos, promovendo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada.

Sobre os modelos matemáticos a BNCC aborda o tema na competência específica 3 de matemática do ensino médio, que diz que os estudantes devem “Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.” Assim a BNCC estimula a utilização de Modelagem Matemática em sala de aula. Sobre Modelagem Matemática, Almeida *et al*, entende que

uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (Almeida *et al*, 2013, p. 12).

Essa abordagem não apenas fornece uma oportunidade para os estudantes aplicarem conceitos matemáticos a problemas reais, mas também os incentiva a pensar criticamente e a desenvolver soluções criativas e fundamentadas. Ao delinear uma atividade de modelagem como composta por uma situação inicial problemática, uma situação final desejada e os procedimentos para conectar ambas, enfatiza-se a importância de uma aprendizagem ativa e participativa. Este processo reflete a própria essência da interdisciplinaridade, integrando conhecimentos matemáticos com outras áreas e promovendo uma visão mais ampla e contextualizada do mundo.

## **2.1 Matemática e a descrição de crescimentos populacionais**

No ensino de Funções, por exemplo, em que há necessidade de compreender o comportamento de variáveis ao longo do tempo, é possível combinar Matemática e as biociências, ao incorporar temas como crescimento populacional, propagação de epidemias, dinâmica de ecossistemas e metabolismo celular, entre outros. Assim, o professor pode utilizar a modelagem como estratégia para tornar os conteúdos mais acessíveis e contextualizados.

Exemplificando, podemos considerar a evolução no tamanho da população de bactérias. As bactérias normalmente se reproduzem por bipartição, um processo no qual uma célula se divide em duas idênticas, resultando em um crescimento exponencial da população em condições ideais. Esse fenômeno pode ser modelado matematicamente para descrever o comportamento populacional ao longo do tempo. Por meio desse tipo de modelagem, é possível compreender como fatores ambientais, como disponibilidade de nutrientes, temperatura e presença de inibidores, influenciam o crescimento bacteriano. Tais modelos podem fornecer percepções valiosas não apenas para prever o comportamento da população, mas também para tomar decisões em contextos práticos, como na indústria alimentícia, no controle de infecções e na biotecnologia.

Como exemplo prático a ser desenvolvido em sala de aula considere a seguinte situação. Se determinada colônia de bactérias, com população inicial  $p_0$ , dobra seu tamanho a cada hora, então a sua população  $p(t)$  é determinada pela expressão  $p(t) = p_0 \cdot 2^t$ , onde  $t$  é medido em horas, e  $t = 0$  representa o instante em que a população é  $p_0$ .

O exemplo dado é bem simples e traz dados fictícios para facilitar a montagem do modelo. Em uma situação mais elaborada, considere o crescimento de uma população de leveduras, organismos unicelulares usados na produção de álcool e panificação. Pesquisadores coletaram dados da Tabela 1, medindo o tamanho da população de leveduras cultivada em cultura líquida (indivíduos por ml de cultura) em diferentes momentos (horas).

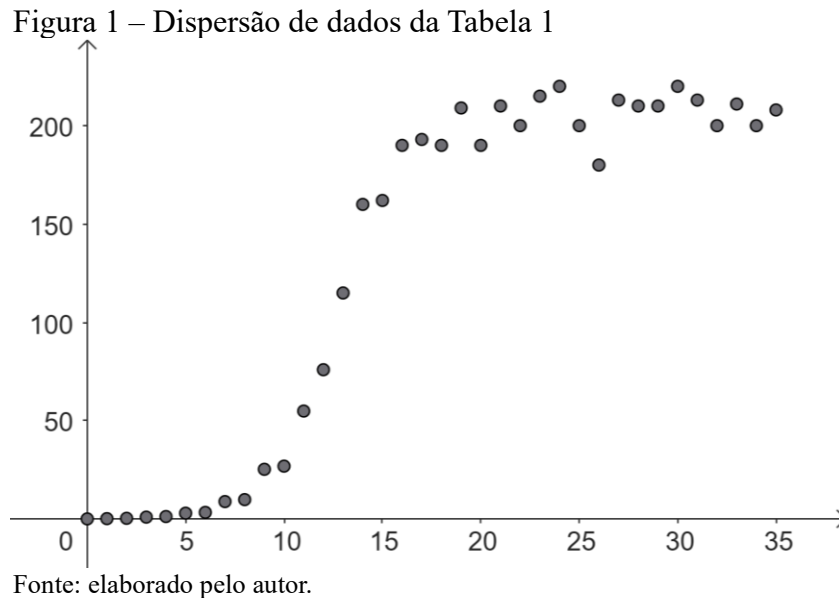
Tabela 1 – População de leveduras no decorrer do tempo

Tempo (h)	Tamanho da Pop. ( $\times 10^6/ml$ )	Tempo (h)	Tamanho da Pop. ( $\times 10^6/ml$ )	Tempo (h)	Tamanho da Pop. ( $\times 10^6/ml$ )
0	0,20	12	76,00	24	220,00
1	0,33	13	115,00	25	200,00
2	0,50	14	160,00	26	180,00
3	1,10	15	162,00	27	213,00
4	1,40	16	190,00	28	210,00
5	3,10	17	193,00	29	210,00
6	3,50	18	190,00	30	220,00
7	9,00	19	209,00	31	213,00
8	10,00	20	190,00	32	200,00
9	25,40	21	210,00	33	211,00
10	27,00	22	200,00	34	200,00
11	55,00	23	215,00	35	208,00

Fonte: Stewart e Day (2015, p. 420).

Observe que embora as medições tenham sido realizadas em intervalos de 1 hora, as leveduras se reproduzem quase continuamente. Outro ponto é que diferentemente do

primeiro exemplo apresentado, não se pode inferir uma taxa de crescimento constante apenas observando a tabela, pois variação no número de leveduras em cada intervalo de tempo não é constante. O gráfico a seguir mostra a dispersão dos dados nos momentos iniciais.



Neste exemplo, determinar a lei de formação de um modelo matemático que descreva a população de leveduras em função do tempo se tornou complexo. Algebricamente pode ser resolvido assumindo que cada célula de levedura individual produz descendentes a uma taxa constante  $\beta$ . Assim, a taxa total de produção de descendentes (isto é, a taxa total de natalidade) no tempo  $t$  é  $\beta p(t)$ , onde  $p(t)$  é o número de células de levedura presentes em hora  $t$ . Da mesma forma, suponha que a taxa total de perda de células de levedura por morte no tempo  $t$  seja  $\mu p(t)$ , onde  $\mu$  é uma taxa de mortalidade constante por célula individual.

Assim, a taxa de variação do número de células de levedura no tempo  $t$  é dada por  $\beta p(t) - \mu p(t)$ . E como a taxa de variação de  $p(t)$  é dada por sua derivada com relação a  $t$ , temos que:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \beta p(t) - \mu p(t) = (\beta - \mu)p(t)$$

Fazendo  $r = \beta - \mu$ , obtemos

$$\frac{dp(t)}{dt} = rp(t) \quad (2.1)$$

Da equação (2.1) temos que  $r = \frac{dp(t)}{dt} \cdot \frac{1}{p(t)}$  ou seja,  $r$  é a taxa de crescimento per capita, pois, essa constante é a taxa de crescimento da população  $\left(\frac{dp(t)}{dt}\right)$  dividida pelo tamanho da população  $(p(t))$ .

A equação (2.1) envolve a função desconhecida  $p(t)$  juntamente com sua primeira derivada, configurando assim uma equação diferencial. Neste contexto, o tamanho da população é a variável dependente  $p$ , enquanto o tempo é a variável independente  $t$ . Esta equação diferencial indica que a taxa de variação do tamanho da população de leveduras, em qualquer momento, é proporcional ao próprio tamanho da população naquele instante. Em síntese, a taxa de reprodução de cada indivíduo na população é constante e corresponde ao valor de  $r$ .

Biologicamente, se a taxa de natalidade é maior que a taxa de mortalidade então a população de leveduras aumentará, logo  $r > 0$ . Por outro lado, se a taxa de natalidade é menor que a taxa de mortalidade, teremos  $r < 0$ .

Para resolvermos o problema de encontrar o modelo matemático que represente a população das leveduras precisamos resolver a equação 1, explicitando a função  $p(t)$ , que será a solução da equação diferencial. Assim, devemos encontrar uma função cuja derivada é igual a própria função, multiplicada por uma constante,  $r$ . Essa característica é própria das funções exponenciais, assim podemos ver que  $p(t) = c \cdot e^{rt}$  satisfaz a equação (2.1), onde  $c$  é uma constante real. Para mostrar que de fato isto ocorre veja que, pela regra da cadeia,

$$p'(t) = c(r \cdot e^{rt})$$

$$p'(t) = r(c \cdot e^{rt})$$

$$p'(t) = r \cdot p(t)$$

Para obter o valor de  $c$ , façamos  $t = 0$ . Daí

$$p(0) = c \cdot e^0 = 0,2$$

$$c = 0,2$$

Uma maneira de determinar um valor adequado para  $r$  é analisar o fator de crescimento da população de leveduras durante um período fixo. Por exemplo, na primeira hora, a população de leveduras aumentou por um fator de

$$\frac{0,33}{0,2} = 1,65$$

Por outro lado, de acordo com o modelo, o fator pelo qual se prevê que esta população terá crescido é

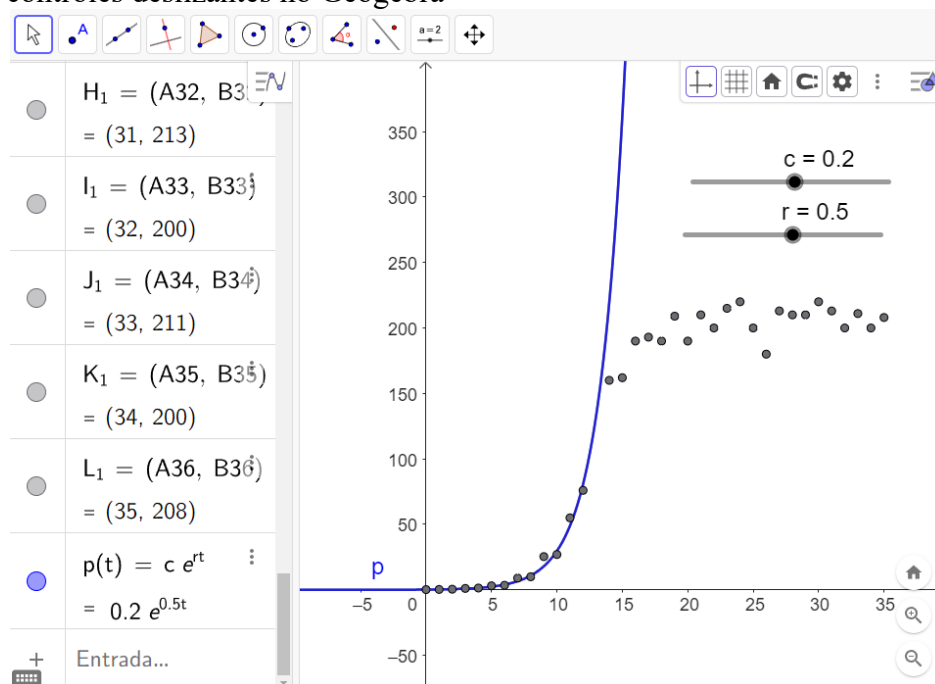
$$\frac{p(1)}{p(0)} = \frac{c \cdot e^{r \cdot 1}}{c \cdot e^{r \cdot 0}} = e^r$$

Assim, uma escolha razoável para seria a solução da equação  $e^r = 1,65$ . Ou seja,  $r = \ln 1,65 \approx 0,5$ . Assim, nosso modelo é

$$p(t) = 0,2 \cdot e^{0,5t}$$

Em um trabalho em aulas no ensino médio a ferramenta Geogebra<sup>1</sup> pode ser utilizada para a resolução do problema, iniciando pela plotagem dos pontos que relacionam tempo e população de leveduras em um sistema cartesiano (Figura 2). De fato, os dados das medições iniciais sugerem que a população de leveduras apresenta um crescimento exponencial, como pode ser visto nas figuras 1 e 2. Assim, usando uma função do tipo  $p(t) = c \cdot e^{rt}$ , podemos determinar uma função que represente bem os dados inicialmente, ajustando os valores das constantes  $c$  e  $r$ , conforme a imagem a seguir.

Figura 2 – Construção do gráfico de uma função exponencial utilizando controles deslizantes no Geogebra



Fonte: elaborado pelo autor.

O gráfico da função  $p(t) = 0,2 \cdot e^{0,5t}$  representa bem os pontos iniciais do gráfico de dispersão, nas primeiras 13 horas. Entretanto uma função exponencial tem crescimento constante, o que não condiz com evolução da população de leveduras apresentadas. Isso ocorre por questões biológicas, pois à medida que a população aumenta, podemos esperar que a aglomeração e o esgotamento dos recursos façam com que a taxa de crescimento per capita diminua. Assim, a taxa de crescimento da população de leveduras neste experimento varia de acordo com o tamanho da população. Podemos calcular a taxa de crescimento em cada instante utilizando o método de diferença finita centrada, temos que

<sup>1</sup> Software de matemática dinâmica que combina geometria, álgebra, estatística, cálculo e gráficos em uma única plataforma.

$$\frac{dp(t)}{dt} \approx \frac{p(t+1) - p(t-1)}{2}$$

Logo, a taxa de crescimento per capita da população de leveduras será dada por

$$R = \frac{dp(t)}{dt} \cdot \frac{1}{p(t)} \approx \frac{p(t+1) - p(t-1)}{2p(t)}$$

A tabela a seguir apresenta a taxa de crescimento per capita para cada tamanho da população.

Tabela 2 – População de leveduras e sua taxa de crescimento per capita.

Tamanho da Pop. ( $\times 10^6/ml$ )	R	Tamanho da Pop. ( $\times 10^6/ml$ )	R	Tamanho da Pop. ( $\times 10^6/ml$ )	R
0,20	–	76,00	0,395	220,00	-0,034
0,33	0,455	115,00	0,365	200,00	-0,100
0,50	0,770	160,00	0,147	180,00	0,036
1,10	0,409	162,00	0,093	213,00	0,070
1,40	0,714	190,00	0,082	210,00	-0,007
3,10	0,339	193,00	0	210,00	0,023
3,50	0,843	190,00	0,042	220,00	0,006
9,00	0,361	209,00	0	213,00	-0,047
10,00	0,820	190,00	0,003	200,00	-0,005
25,40	0,335	210,00	0,024	211,00	0
27,00	0,548	200,00	0,013	200,00	-0,008
55,00	0,445	215,00	0,047	208,00	–

Fonte: elaborado pelo autor.

Observe que de fato a taxa de crescimento decai à medida que a população cresce. Utilizando regressão linear, a partir dos dados da tabela 2 é possível mostrar que a taxa de crescimento per capita da população de leveduras ( $R$ ) varia em função do tamanho da população de acordo com a equação

$$R \approx 0,59 - 0,0028p$$

Daí,

$$\frac{dp(t)}{dt} \cdot \frac{1}{p(t)} = 0,59 - 0,0028p(t)$$

Logo,

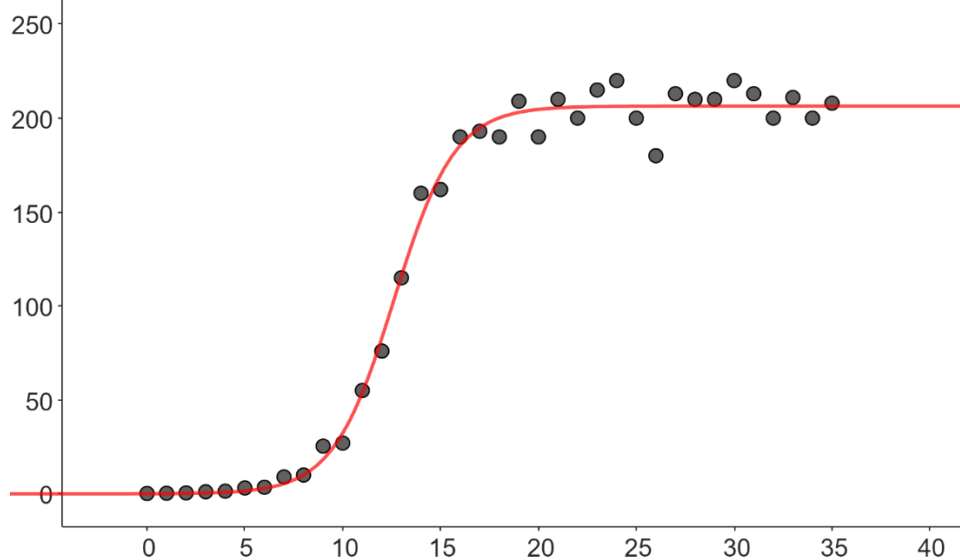
$$\frac{dp}{dt} = (0,59 - 0,0028p)p \quad (2.2)$$

Esse tipo de crescimento populacional é conhecido como crescimento logístico. E na educação básica pode ser modelado utilizando as ferramentas de regressão disponíveis em *softwares*, como no caso do Geogebra. O gráfico a seguir foi construído utilizando regressão logística nesta ferramenta, onde encontramos que a função

$$p(t) = \frac{206,3883}{1 + 3408,4769e^{-0,6447t}} \quad (2.3)$$

descreve a variação populacional das leveduras.

Figura 3 – Gráfico de regressão logística para a população de leveduras



Fonte: elaborado pelo autor.

Nos modelos de crescimento logístico a taxa de crescimento é dada em função de  $p$  por  $R(p) = r - ap$ ,  $a < 0$ , onde  $r$  é a taxa de crescimento quando  $p = 0$ . Assim, seguindo a equação (2.1), temos que

$$\frac{dp}{dt} = (r - ap)p$$

Pondo  $r$  evidência e fazendo  $k = \frac{r}{a}$

$$\frac{dp}{dt} = r\left(1 - \frac{a}{r}p\right)p$$

$$\frac{dp}{dt} = rp\left(1 - \frac{p}{k}\right) \quad (2.4)$$

Observe que quando  $p = k$  a derivada será nula, indicando que a população para de crescer a partir desse valor. Biologicamente, a constante  $k$  representa a capacidade de suporte do ambiente, a população máxima.

Deste último exemplo de modelagem vemos que as equações diferenciais são muito úteis na descrição de problemas reais, permitindo descrever matematicamente a taxa de variação de certas quantidades em função do tempo.

As equações diferenciais, ao serem aplicadas a fenômenos biológicos, possibilitam que o aluno compreenda não apenas o comportamento pontual de um sistema, mas também sua

evolução ao longo do tempo. Essa abordagem não apenas contribui para a formação científica do aluno, mas também desenvolve a sua capacidade de analisar criticamente informações, especialmente em tempos de disseminação rápida de dados, como no caso da pandemia de COVID-19. Nas seções seguintes estudaremos mais sobre equações diferenciais, como no caso da equação (2.4).

### 3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais são ferramentas fundamentais na modelagem de fenômenos dinâmicos, ou seja, de processos que evoluem no tempo ou em relação a alguma outra variável independente. De modo geral, uma equação diferencial é uma equação que relaciona uma função desconhecida com suas derivadas, ou seja, a incógnita é uma função. Esse tipo de equação expressa, portanto, como uma quantidade varia em relação a outra — frequentemente o tempo — permitindo prever o comportamento futuro de sistemas a partir de suas condições iniciais. A equação  $\frac{dp(t)}{dt} = rp(t)$ , é um exemplo de equação diferencial comumente usada para modelar crescimento populacional em situações ideais (com recursos naturais ilimitados).

Formalmente, uma equação diferencial pode ser representada na forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

em que  $y(t)$  é a função desconhecida,  $t$  é a variável independente (em geral o tempo), e  $f(t, y)$  é uma função dada que descreve a taxa de variação de  $y$ . Quando a equação envolve apenas derivadas ordinárias (e não derivadas parciais), diz-se que se trata de uma equação diferencial ordinária (EDO).

O estudo de equações diferenciais é essencial em diversas áreas do conhecimento, sobretudo nas ciências biológicas e da saúde, pois muitos processos naturais envolvem mudanças ao longo do tempo. Entre os exemplos mais relevantes destacam-se:

- Crescimento populacional: o modelo de Malthus, que considera a taxa de crescimento proporcional à população atual e pode ser descrito pela equação  $\frac{dp}{dt} = rp$ , cuja solução apresenta crescimento exponencial. Já o modelo logístico incorpora o conceito de capacidade de suporte ambiental e é representado por  $\frac{dp}{dt} = rp \left(1 - \frac{p}{k}\right)$ , onde  $k$  é a capacidade máxima do ambiente. Ambos os modelos foram vistos na seção anterior.
- Propagação de doenças infecciosas: modelos epidemiológicos como os descritos equações de Kermack-McKendrick (Exemplo 4.3) utilizam sistemas de equações diferenciais para descrever como uma doença se espalha e diminui ao longo do tempo em uma população.
- Reações bioquímicas: a cinética de reações enzimáticas também pode ser modelada por equações diferenciais, fornecendo informações sobre a velocidade das reações e as concentrações de substâncias.

Sobre equações diferenciais, Stewart e Day (2015), afirmam que

uma das aplicações mais importantes do cálculo é para equações diferenciais. Uma grande variedade de processos biológicos pode ser modelada usando equações diferenciais, e tais equações forneceram enorme percepção sobre nossa compreensão da dinâmica dos organismos vivos — como indivíduos e populações mudam ao longo do tempo (Stewart; Day, 2015, p. 420)

Assim, as equações diferenciais fornecem um elo entre teoria e observação”. Esse elo é o que torna esse tema tão relevante no contexto educacional, sobretudo quando se busca contextualizar o ensino de matemática no ensino médio por meio de situações reais e interdisciplinaridade.

A compreensão dos conceitos iniciais de equações diferenciais pode ser facilitada com o uso de recursos tecnológicos, como simuladores e *softwares* matemáticos, que permitem a visualização gráfica do comportamento das soluções em tempo real. Essa abordagem contribui significativamente para o desenvolvimento da intuição matemática dos alunos e para o fortalecimento do raciocínio lógico.

Dessa forma, o estudo das equações diferenciais no ensino básico, quando abordado de forma contextualizada e interdisciplinar, pode não apenas enriquecer a formação dos estudantes, como também promover um ensino mais envolvente e alinhado às demandas contemporâneas da educação científica.

### 3.1 Solução de uma Equação Diferencial

A solução de uma equação diferencial é uma função que, quando substituída na equação, produz uma igualdade. Por exemplo,  $y(t) = e^t - 2$  é uma das soluções da equação  $\frac{dy}{dt} = 2 + y(t)$ . Para verificarmos isso, substituímos a função no lado esquerdo da equação, o que nos dá

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(e^t - 2) = e^t$$

Substituindo no lado direito temos

$$2 + (e^t - 2) = e^t$$

Como os lados direito e esquerdo resultam na mesma expressão, temos que a função  $y(t) = e^t - 2$  é solução da equação.

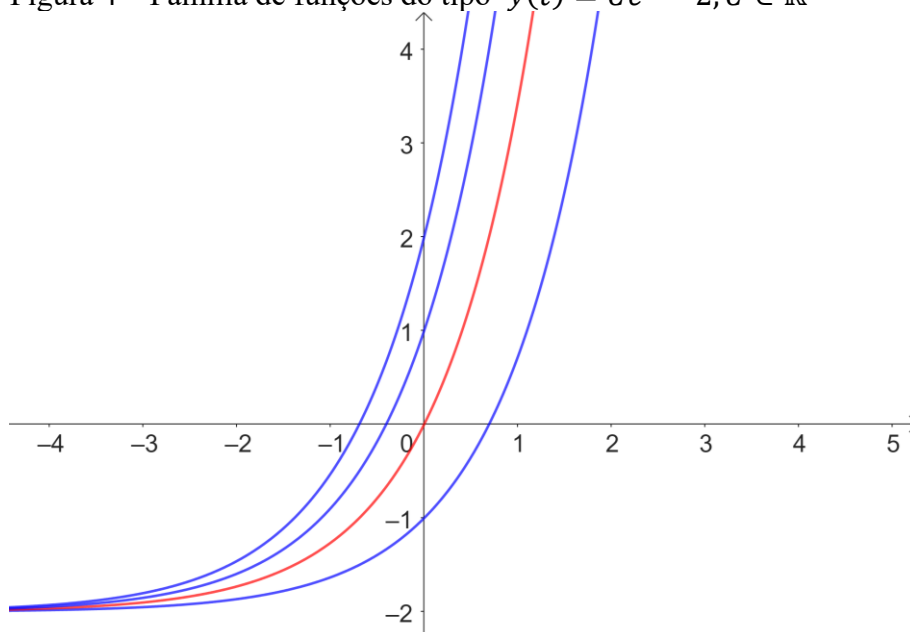
Observe que  $y(t) = Ce^t - 2$ , com  $C \in \mathbb{R}$  também é solução da equação diferencial. Geralmente, há várias soluções para uma equação diferencial. Na maioria dos problemas precisamos encontrar uma solução particular que satisfaça uma condição inicial dada,

$y(t_0) = t_0$ . Tal situação é chamada de problema de valor inicial. Do ponto de vista geométrico, Stewart, 2013, diz que

quando impomos uma condição inicial, olhamos para uma família de curvas solução e escolhemos uma que passe pelo ponto  $(t_0, y_0)$ . Fisicamente, isso corresponde a medir o estado de um sistema no instante  $t_0$  e usar a solução do problema de valor inicial para prever o comportamento futuro do sistema (Stewart, 2013, p. 529).

Assim, se no exemplo dado tivéssemos a condição inicial  $y(0) = 0$ , a solução do nosso problema seria a função  $y(t) = 2e^t - 2$ , conforme pode ser visto no gráfico abaixo.

Figura 4 – Família de funções do tipo  $y(t) = Ce^t - 2, C \in \mathbb{R}$



Fonte: elaborado pelo autor.

Verificar se uma função é solução de uma equação diferencial é relativamente fácil. Entretanto, encontrar uma solução sem um ponto de partida pode ser desafiador, dependendo do tipo de equação. A seguir, estudaremos as classificações de uma equação diferencial.

### 3.2 Classificações de uma equação linear

A compreensão das classificações das equações diferenciais é fundamental para determinar os métodos apropriados para sua resolução, bem como para interpretar o comportamento dos sistemas que elas modelam. Nesta seção, abordamos as principais formas de classificação: quanto ao número de variáveis independentes da função desconhecida, à

ordem, à linearidade, com destaque para os modelos aplicáveis às biociências como as EDO's de primeira ordem.

Quanto ao número de variáveis independentes da função desconhecida, quando a função desconhecida depende de duas ou mais variáveis independentes, as derivadas que aparecem na equação são derivadas parciais, assim, teremos uma Equação Diferencial Parcial. Por exemplo, a equação  $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$ , conhecida como equação de Laplace, é uma equação diferencial parcial onde a incógnita é a função  $u(x, y)$ , sendo  $u$  a variável dependente e  $x$  e  $y$  as variáveis independentes. Esta equação descreve o comportamento do potencial elétrico em pontos onde não há carga elétrica.

Por sua vez, se a função desconhecida depende de uma única variável ela será classificada como Equação Diferencial Ordinária (EDO). A equação  $\frac{dp(t)}{dt} = rp(t)$ , apresentada na seção 2.1 é um exemplo de EDO.

A ordem de uma equação diferencial é determinada pela derivada de maior grau presente. Por exemplo,  $y' + 2y = 3$  é uma EDO de primeira ordem, enquanto  $5y'' - y' = y$  é uma equação diferencial de segunda ordem. Nas biociências, as equações de primeira ordem são mais comuns, pois frequentemente descrevem processos dinâmicos que dependem apenas da taxa de variação em relação ao tempo, como crescimento populacional e propagação de doenças.

Outra classificação importante de uma equação diferencial diz respeito a linearidade. Uma equação diferencial é linear se a função desconhecida e suas derivadas aparecem apenas ao primeiro grau e não estão multiplicadas entre si. Ou seja, se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação. Caso contrário, a equação é não linear. Desta definição temos que uma equação diferencial linear geral de ordem  $n$  é da forma

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} = f(t)$$

Onde  $a_i(t)$ , com  $i = 1, \dots, n$ , é uma função que não depende de  $y$ . Por exemplo,  $\frac{dy}{dt} + a(t) = f(t)$  é uma equação linear e  $\frac{dy}{dt} = y^2 + \text{sen}(t)$  não é linear.

Equações não lineares são comuns em biologia, pois muitos sistemas naturais envolvem interações entre variáveis, como competição entre espécies ou taxas de infecção em epidemias. Por exemplo, no modelo logístico de crescimento populacional:  $\frac{dp}{dt} = rp \left(1 - \frac{p}{k}\right)$  é não linear devido o termo  $p^2$  resultante do produto do lado direito da equação.

Segundo Stewart e Day (2015) outro critério importante na classificação de uma

equação diferencial está relacionado ao papel da variável independente nas EDO's, que geram três tipos de equações diferenciais de primeira ordem: equações diferenciais de tempo puro, equações diferenciais autônomas e não autônomas. Esse tipo de classificação é essencial na análise de sistemas biológicos e estudaremos cada um deles a seguir, com suas respectivas aplicações.

### 3.2.1 Equações diferenciais de Tempo Puro

Equações diferenciais de tempo puro dependem somente da variável independente. Elas envolvem a derivada da função, mas não a própria função. Por exemplo, se a variação do tamanho da população  $y$  depende apenas do tempo, temos uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

Esta é a forma geral de uma equação diferencial de tempo puro e se aplicarmos a integral em relação à  $t$  em ambos os membros da equação obtemos que

$$y(t) = \int f(t) dt$$

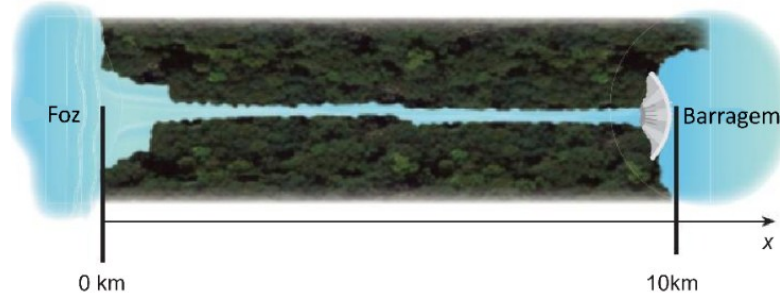
Apesar do nome, a variável independente não precisa ser necessariamente o tempo. A variável independente pode representar outras dimensões relevantes, como espaço, concentração de substâncias químicas ou outras grandezas físicas e biológicas. Veja o exemplo a seguir utilizado por Stewart e Day (2015).

**Exemplo 3.1– Distribuições espaciais de espécies:** À medida que avançamos num riacho desde sua foz até sua nascente, suponha que o tamanho da população  $p$  de uma espécie de inseto em um ponto fixo no tempo muda no espaço de acordo com

$$\frac{dp}{dx} = 1 - 2e^{-x}$$

onde  $0 \leq x \leq 10$  é a localização espacial (em km) entre a foz ( $x = 0$  km) e uma barragem ( $x = 10$  km), conforma a figura 5. Suponha que o tamanho da população na barragem seja  $p(10) = 20$ . Obtenha uma expressão para o tamanho da população em função da distância da foz.

Figura 5 – Densidade populacional ao longo de um riacho



Fonte: Stewart e Day (2015, p. 426)

### **Solução:**

Inicialmente devemos determinar  $p(x)$  de modo a satisfazer a equação diferencial dada. Para isto integramos os dois lados da equação em relação a  $x$ :

$$\frac{dp}{dx} = 1 - 2e^{-x}$$

$$\int \frac{dp}{dx} dx = \int 1 - 2e^{-x} dx$$

$$p(x) = x + 2e^{-x} + C$$

A função  $p(x) = x + 2e^{-x} + C$  representa uma família de soluções. Agora precisamos determinar a constante  $C$  que satisfaz a condição inicial  $p(10) = 20$ . Substituindo  $x = 10$  em  $p(x)$  obtemos

$$10 + 2e^{-10} + C = 20$$

$$C = 10 - 2e^{-10}$$

Portanto, o tamanho da população em função de  $x$  é modelado pela expressão

$$p(x) = x + 2e^{-x} + 10 - 2e^{-10}$$

### **3.2.2 Equações Diferenciais Autônomas**

Nas equações diferenciais autônomas a equação depende apenas da variável dependente. Ou seja, envolve a derivada da função e a própria função, sem dependência da variável independente. Esse tipo de equação tem forma geral

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Onde  $y$  é a função desconhecida da variável independente  $t$ . A equação (2.2) apresentada na seção 2.1 é um exemplo de equação diferencial autônoma. Veja outro exemplo na aplicação a seguir.

**Exemplo 3.2 – Crescimento de peixes:** A equação de Von Bertalanffy afirma que a taxa de crescimento em comprimento de um peixe individual é proporcional à diferença entre o comprimento atual  $L$  e o comprimento assintótico  $L_\infty$  (em cm). Sabendo que uma determinada espécie de peixe tem comprimento máximo de 50 cm, determine uma equação diferencial que expresse essa ideia.

**Solução:**

A frase "a taxa de crescimento [...] é proporcional à diferença entre  $L_\infty$  e  $L$ " nos dá diretamente que

$$\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L)$$

Onde:

- $k$  é a constante de proporcionalidade ( $> 0$ ),
- $L(t)$  é o comprimento do peixe no tempo
- $L_\infty$  é o comprimento máximo assintótico (50 cm)

Substituindo  $L_\infty = 50$  obtemos a equação diferencial

$$\frac{dL}{dt} = k(50 - L) \quad (3.1)$$

Veja que essa equação não depende da variável independente  $t$ , assim é classificada como autônoma. Aprenderemos a resolver este tipo de equação na seção 3.3 deste trabalho. Por enquanto verifique que  $L(t) = 50 - Ce^{-kt}$  satisfaz a equação diferencial acima, onde  $C \in \mathbb{R}$ . Substituindo  $L(t)$  no lado esquerdo da equação temos

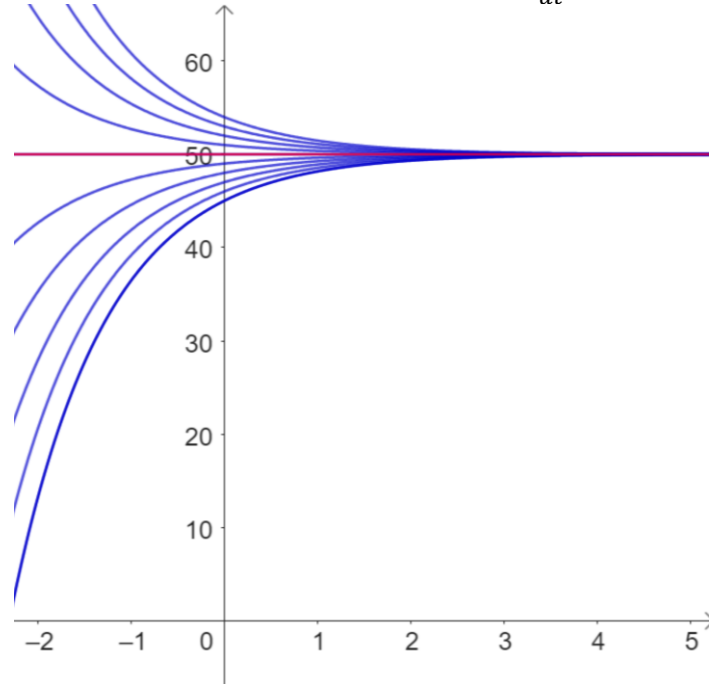
$$\frac{d}{dt}(50 - Ce^{-kt}) = Cke^{-kt}$$

Substituindo  $L(t)$  no lado direito

$$k(50 - L) = k(50 - (50 - Ce^{-kt})) = k(Ce^{-kt}) = Cke^{-kt}$$

Como o resultado das duas substituições são iguais temos que de fato  $L(t) = 50 - Ce^{-kt}$  satisfaz a equação diferencial obtida. O gráfico da Figura 6, construído com o Geogebra, mostra a uma família de soluções para a equação diferencial para  $k > 0$ , onde é possível prever que com o passar do tempo o tamanho dos peixes se aproxima de 50 cm. Além disso, as curvas decrescentes ocorrem quando  $C < 0$ , o que significaria que os peixes estariam diminuindo de tamanho com o passar do tempo, o que é absurdo. Logo,  $C > 0$ .

Figura 6 – Família de soluções da equação  $\frac{dL}{dt} = k(50 - L)$



Fonte: elaborado pelo autor.

### 3.2.3 Equações diferenciais Não Autônomas

As equações diferenciais não autônomas são equações que dependem tanto da variável independente quanto da dependente. Dito de outra forma, as equações não autônomas envolvem a derivada da função desconhecida, a própria função e a variável independente. Essas equações, quando de 1ª ordem, são da forma

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y)$$

Veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.3 – Administração de medicamentos:** Um medicamento é administrado a um paciente por via intravenosa a uma taxa variável no tempo de  $A(t) = 1 + \sin t$  mg/(ml·hora), e é metabolizado a uma taxa proporcional a  $y(t)$  mg/(ml·hora), onde  $y(t)$  é a concentração no tempo  $t$  (em unidades de mg/ml). Escreva uma equação diferencial que represente variação da concentração  $y(t)$  do medicamento ao longo do tempo.

**Solução:**

O medicamento está sendo administrado por via intravenosa com uma taxa variável no tempo  $A(t)$  e, ao mesmo tempo, o corpo do paciente metaboliza e elimina o medicamento com uma taxa proporcional à quantidade presente no corpo  $y(t)$ . Assim,  $A(t)$  representa a taxa de entrada do medicamento na corrente sanguínea e  $ky(t)$  a taxa de saída deste medicamento,  $k \in \mathbb{R}$ . Logo,

a variação da concentração do medicamento é dada pela diferença  $A(t) - ky(t)$ . Ou seja,  $\frac{dy}{dt}$  é representada pela equação

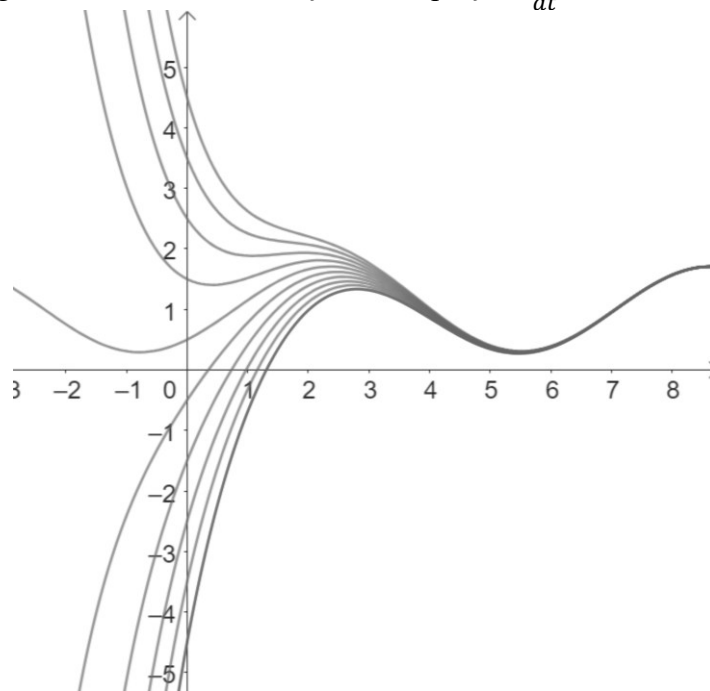
$$\frac{dy}{dt} = 1 + \text{sen } t - ky$$

Veja que esta equação envolve a função desconhecida  $y$ , sua derivada e a variável independente  $t$ , sendo assim classificada como equação não autônoma. Tomando  $k = 1$ , podemos resolver esta EDO utilizando o comando “ResolverEDO” no Geogebra, obtendo como solução

$$y(t) = Ce^{-t} - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \text{sen } t + 1$$

Essa solução pode ser testada conforme foi feito no Exemplo 3.2. A seguir temos o gráfico de uma família de soluções para as variações da constante de integração  $C$ .

Figura 7 – Família de soluções da equação  $\frac{dy}{dt} = 1 + \sin t - y$



Fonte: elaborado pelo autor.

### 3.3 Equações separáveis

Para resolver equações diferenciais de tempo puro de primeira ordem, aplicamos a integral em ambos os lados da equação, o que não pode ser feito em todos os tipos de equações diferenciais. Entretanto há uma classe de equações diferenciais que podem ser resolvidas da mesma maneira que as de tempo puro, após alguns ajustes. Essas equações são chamadas de equações separáveis.

Uma equação diferencial de primeira ordem é chamada separável quando pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot g(y)$$

Ou seja, quando é possível separar as variáveis  $y$  e  $t$  em lados opostos da equação. Reescrevendo, temos:

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(t) dt$$

A partir desse ponto, a equação pode ser resolvida integrando ambos os lados. Fazendo isto temos:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt$$

A equação (2.1) da seção 2.1,  $\frac{dp(t)}{dt} = rp(t)$ , é uma equação separável, pois podemos reescrever esta equação separando as variáveis  $p$  e  $t$ , e aplicar a integral para encontrar a lei a expressão para  $p(t)$  em função de  $t$ . Veja:

$$\frac{dp(t)}{dt} = rp(t)$$

$$\frac{1}{p} dp = r dt$$

$$\int \frac{1}{p} dp = \int r dt$$

$$\ln |p| = rt + C$$

Aplicando a exponencial em ambos os membros:

$$|p| = e^{rt+c}$$

$$|p| = e^c \cdot e^{rt}$$

Logo,

$$p(t) = A \cdot e^{rt}$$

Onde  $A = \pm e^c$  é uma constante arbitrária.

**Exemplo 3.4 – A equação de Von Bertalanffy:** Como visto no Exemplo 3.2, o crescimento, em comprimento, de um peixe pode ser modelado pela equação diferencial

$$\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L)$$

Onde  $L(t)$  é o comprimento (em cm) na idade  $t$  (em anos),  $L_\infty$  é o comprimento assintótico e  $k$  é uma constante positiva cuja unidade é 1/ano.

- a) Determine uma família de soluções para  $L(t)$ .

- b) Encontre a solução que tem um comprimento inicial  $L(0) = 2$ ,  $L(1) = 32,34$  e comprimento assintótico  $L_\infty = 50$ .

**Solução:**

- a) Assumindo que  $L_\infty - L \neq 0$  podemos escrever a equação diferencial como

$$\frac{1}{L_\infty - L} dL = k dt$$

Integrando nos dois lados da igualdade obtemos

$$\int \frac{1}{L_\infty - L} dL = \int k dt$$

$$-\ln|L_\infty - L| = kt + C$$

Multiplicando por (-1) e aplicando a exponencial

$$|L_\infty - L| = e^{-kt-C} = e^{-kt} \cdot e^C$$

Daí,

$$L(t) = L_\infty - Ae^{-kt} \quad (3.2)$$

Onde  $A = \pm e^C$ .

- b) Substituindo  $L_\infty = 50$  e utilizando que  $L(0) = 2$  em (3.2), temos que

$$L(t) = 50 - Ae^{-kt}$$

$$L(0) = 50 - Ae^{-k \cdot 0} = 2$$

$$50 - A = 2$$

$$A = 48$$

Assim,

$$L(t) = 50 - 48e^{-kt} \quad (3.3)$$

Agora resta determinar o valor de  $k$ . Para isto utilizaremos faremos  $L(1) = 32,34$  em (3.3).

$$L(1) = 50 - 48e^{-k} = 32,34$$

$$e^{-k} = \frac{50 - 32,34}{48} \approx 0,3679$$

Aplicando logaritmos em ambos os membros

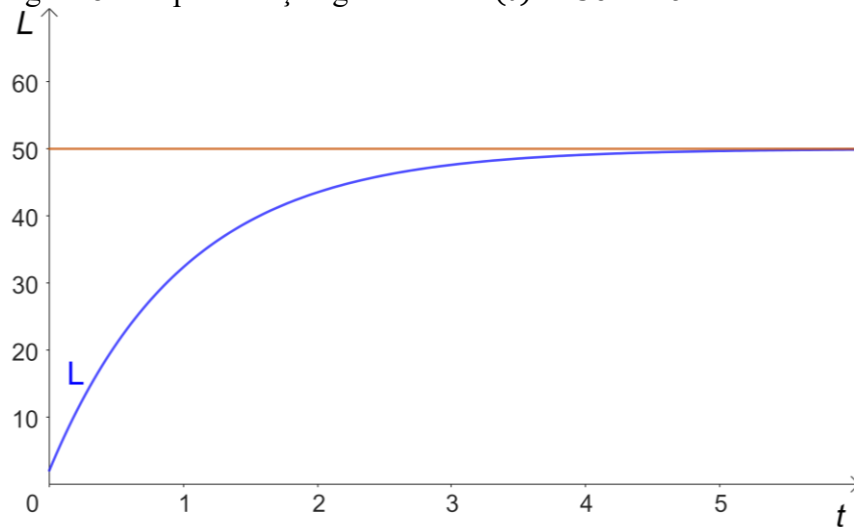
$$-k \approx \ln(0,3679)$$

$$k \approx 1$$

Daí,

$$L(t) = 50 - Ae^{-t}$$

A seguir temos o gráfico de  $L$ , onde podemos visualizar o porquê  $L_\infty = 50$  é chamado de comprimento assintótico, já  $y = 50$  é uma assíntota horizontal de  $L$ .

Figura 8 – Representação gráfica de  $L(t) = 50 - Ae^{-t}$ 

Fonte: elaborado pelo autor.

O exemplo a seguir é apresentado como exercício por Stewart e Day (2015).

**Exemplo 3.5 – Tratamento de diálise:** O tratamento de diálise remove a ureia e outros resíduos do sangue do paciente, desviando parte do fluxo sanguíneo externamente através de uma máquina chamada dialisador. Suponha que o volume sanguíneo de um paciente seja  $V$  ml e o sangue seja desviado através do dialisador a uma taxa de  $K$  ml/min. No início do tratamento, o sangue do paciente contém concentração  $c(0) = c_0$  mg/ml de ureia no sangue.

- Formule o processo de diálise como um problema de valor inicial.
- Qual é a concentração de ureia no sangue do paciente após  $t$  minutos de diálise?

**Solução:**

a) A cada minuto,  $K$  ml de sangue com concentração  $c(t)$  passa pelo dialisador, e a ureia desses  $K$  ml é removida. Isso equivale a uma perda de:

$$\text{Taxa de remoção da ureia} = K \cdot c(t) \text{ mg/min}$$

O sangue total tem volume  $V$ , então a concentração  $c(t)$  varia com a perda de ureia conforme:

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{K}{V}c \quad (3.4)$$

Assim, o problema de valor inicial consiste em resolver a equação diferencial (3.4) acima, encontrando uma família de soluções e determinar qual delas satisfaz a condição  $c(0) = c_0$ .

b) A equação (3.4) é separável e podemos reescrevê-la como

$$\frac{1}{c} dc = -\frac{K}{V} dt$$

Aplicando a integral nos dois lados da equação e sabendo que  $-\frac{K}{V}$  é uma constante em relação a  $t$ , temos:

$$\int \frac{1}{c} dc = \int -\frac{K}{V} dt$$

$$\ln|c| = -\frac{K}{V}t + A_1$$

Onde  $A_1$  é a constante de integração. Aplicando a exponencial

$$|c| = e^{-\frac{K}{V}t + A_1} = e^{A_1} \cdot e^{-\frac{K}{V}t}$$

Logo,

$$c(t) = A \cdot e^{-\frac{K}{V}t}$$

Onde  $A = \pm e^{A_1}$ .

Usando a condição inicial  $c(0) = c_0$ :

$$c(0) = A \cdot e^{-\frac{K}{V}0} = c_0$$

$$c_0 = A$$

Logo, a função que descreve a concentração de ureia no sangue do paciente após  $t$  minutos é

$$c(t) = c_0 \cdot e^{-\frac{K}{V}t}$$

**Exemplo 3.6 – Equação diferencial logística:** A equação (2.4), para o crescimento logístico de uma população, é uma equação separável.

$$\frac{dp}{dt} = rp \left(1 - \frac{p}{k}\right)$$

- Determine a solução para essa equação.
- Resolva o problema de valor inicial para a equação (2.2):

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = (0,59 - 0,0028p) \\ p(0) = 0,2 \end{cases}$$

**Solução:**

a) Reescrevendo a equação diferencial, separando as variáveis, temos

$$\frac{1}{p \left(1 - \frac{p}{k}\right)} dp = r dt$$

$$\frac{1}{p \left(\frac{k-p}{k}\right)} dp = r dt$$

$$\frac{k}{p(k-p)} dp = r dt \tag{3.5}$$

Observe que

$$\frac{k}{p(k-p)} = \frac{1(k-p) + 1p}{p(k-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{k-p}$$

Assim, podemos escrever (3.5) como

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{k-p}\right) dp = r dt$$

Aplicando a integral em ambos os membros

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{k-p}\right) dp &= \int r dt \\ \int \frac{1}{p} dp + \int \frac{1}{k-p} dp &= \int r dt \\ \ln|p| - \ln|k-p| &= rt + c_1 \\ \ln\left|\frac{p}{k-p}\right| &= rt + c_1\end{aligned}$$

Com  $c_1 \in \mathbb{R}$ . Aplicando a exponencial na equação acima obtemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{p}{k-p}\right| &= e^{rt+c_1} \\ \left|\frac{p}{k-p}\right| &= e^{c_1} e^{rt}\end{aligned}$$

Fazendo  $c_2 = \pm e^{c_1}$  temos

$$\begin{aligned}\frac{p}{k-p} &= c_2 e^{rt} \\ p &= kc_2 e^{rt} - pc_2 e^{rt}\end{aligned}$$

Isolando  $p$  e o pondo em evidência

$$\begin{aligned}p(1 + c_2 e^{rt}) &= kc_2 e^{rt} \\ p &= \frac{kc_2 e^{rt}}{1 + c_2 e^{rt}}\end{aligned}$$

Dividindo numerador e denominador da fração do lado direito por  $c_2 e^{rt}$ , obtemos

$$p = \frac{k}{\frac{1}{c_2 e^{rt}} + 1} = \frac{k}{1 + \frac{1}{c_2} \cdot \frac{1}{e^{rt}}}$$

Por fim, fazendo  $c = \frac{1}{c_2}$  temos

$$p(t) = \frac{k}{1 + ce^{-rt}}$$

Que é uma equação no mesmo formato de (2.3), determinado utilizando o *software* Geogebra.

**b)** Da mesma forma que determinamos a equação (2.4) na seção 2.1 temos que

$$\frac{dp}{dt} = (0,59 - 0,0028p) \approx 0,59p \left(1 - \frac{p}{210,71}\right)$$

Assim, a população máxima suportada no sistema em estudo é aproximadamente  $k = 210,71$ .

Pelo item a, temos que

$$p(t) = \frac{210,71}{1 + ce^{-0,59t}}$$

Para determinar o valor de  $c$ , façamos  $t = 0$

$$p(0) = \frac{210,71}{1 + c} = 0,2$$

$$1 + c = \frac{210,74}{0,2}$$

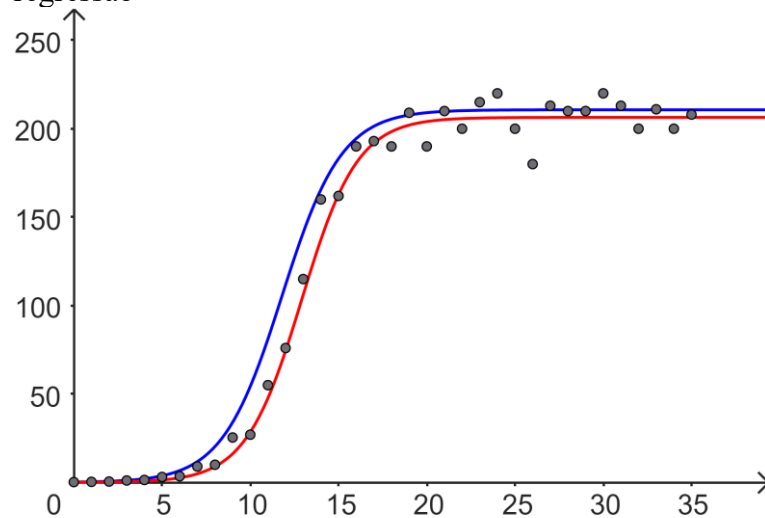
$$c = 1052,6$$

Portanto, temos

$$p(t) = \frac{210,71}{1 + 1052,6e^{-0,59t}} \quad (3.6)$$

Veja que o resultado encontrado destoa um pouco da equação (2.3). Apesar de valores semelhantes para a capacidade de suporte  $k$  e para a taxa de crescimento inicial  $r$ , a constante  $c$  teve um valor distante do determinado por regressão logística. Na figura a seguir temos a equação (2.3) representada em vermelho e a equação (3.6) em azul, onde é possível perceber que a equação gerada pela regressão logística representa melhor os dados da Tabela 1.

Figura 9 – Comparação gráfica das soluções analíticas e por regressão



Fonte: elaborado pelo autor.

Caso tivéssemos escolhido outro ponto, que não o  $(0; 0,2)$ , para determinar a constante o valor da constante  $c$  poderíamos ter aproximado mais a curva dos valores reais. Normalmente é útil utilizar valores que estão na zona de desaceleração do crescimento. No entanto, tanto as abordagens analíticas quanto as baseadas em regressão apresentaram limitações ao não abordar determinados aspectos, visto que fenômenos naturais, como o

crescimento populacional de leveduras, não ocorrem de maneira linear ou simplificada.

### 3.4 Gráficos de fase

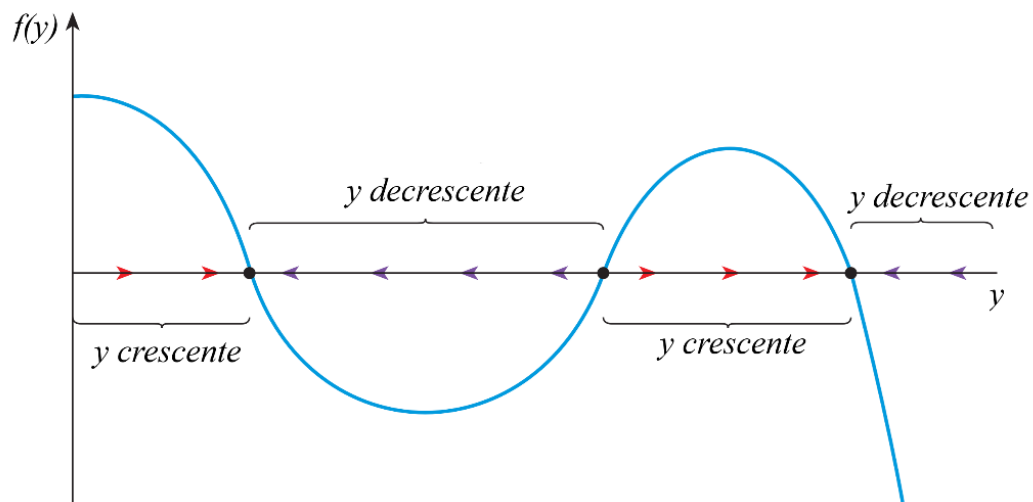
Os gráficos de fase constituem uma ferramenta visual fundamental no estudo de equações diferenciais autônomas, especialmente quando se deseja compreender o comportamento dinâmico de sistemas ao longo do tempo, sem a necessidade de conhecer explicitamente a solução analítica da equação. Em termos simples, um gráfico de fase representa a trajetória de um sistema no espaço formado pelas variáveis envolvidas, permitindo visualizar padrões de comportamento, como crescimento, oscilação, estabilização ou colapso de uma população, por exemplo.

Considere a equação autônoma

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Para a construção do gráfico de fases plotamos o gráfico de  $f(y)$ , o lado direito da equação diferencial, em função da variável dependentes  $y$ , conforme a imagem abaixo.

Figura 10 – Gráfico de fases



Fonte: Stewart e Day (2015, p. 431).

Quando o gráfico está acima do eixo horizontal,  $y'(t) > 0$ , o que significa que  $y$  está aumentando. Onde está abaixo,  $y'(t) < 0$ , logo  $y$  diminui. Os valores onde o gráfico cruza o eixo são aqueles em que  $y'(t) = 0$ . Podemos indicar a direção da mudança em  $y$  no eixo horizontal com setas, como na Figura 10.

O exemplo a seguir é apresentado por Stewart e Day (2015).

**Exemplo 3.7 – O efeito Allee:** Algumas populações entram em declínio até a extinção quando o seu tamanho é inferior a um valor crítico. Por exemplo, se o tamanho da população for muito pequeno, os indivíduos poderão ter dificuldade em encontrar parceiros para reprodução. Isso é conhecido como efeito Allee em homenagem ao ecologista americano Warder Clyde Allee (1885–1955). Uma extensão simples do modelo logístico que incorpora este efeito é dada por

$$\frac{dp}{dt} = r(p - a) \left(1 - \frac{p}{k}\right) p \quad (3.7)$$

Onde  $0 < a < k$ . Construa o gráfico de fase assumindo que  $r > 0$ .

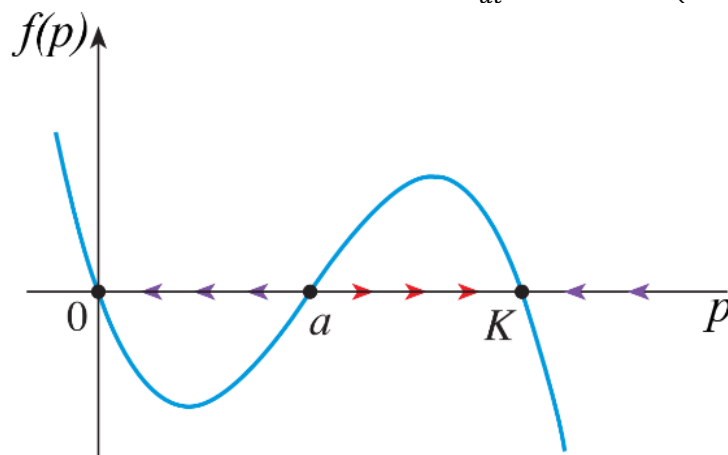
**Solução:**

O gráfico de fases desta equação diferencial corresponde ao gráfico da função polinomial do terceiro grau  $f(p) = r(p - a) \left(1 - \frac{p}{k}\right) p$ . As raízes deste polinômio são  $p = 0$ ,  $p = a$  e  $p = k$ . Veja que:

- $0 < p < a$  implica que  $p - a < 0$  e  $1 - \frac{p}{k} > 0$  (pois temos  $p < a < k$ ). Logo,  $f(p) < 0$ ;
- $a < p < k$  implica que  $p - a > 0$  e  $1 - \frac{p}{k} > 0$ . Logo,  $f(p) > 0$ ;
- $a < k < p$  implica que  $p - a > 0$  e  $1 - \frac{p}{k} < 0$ . Logo,  $f(p) < 0$ .

O caso em que  $p < 0$  não nos interessa, já que não faz sentido população negativa. Da análise feita, temos na Figura 11 o gráfico solicitado.

Figura 11 – Gráfico de fases da equação  $\frac{dp}{dt} = r(p - a) \left(1 - \frac{p}{k}\right) p$ .



Fonte: Stewart e Day (2015, p. 432).

O modelo (3.7) generaliza o modelo logístico clássico, incorporando o efeito Allee, que representa a dificuldade de uma população muito pequena sobreviver e crescer. O termo

$(p - a)$  introduz um limiar crítico  $a$ : se a população cair abaixo desse valor, ela tende à extinção ( $p$  tende a 0). Acima desse limiar, o crescimento segue uma dinâmica logística até se estabilizar na capacidade de suporte  $k$ . Isso é biologicamente plausível em espécies que dependem de interação social ou número mínimo de indivíduos para reprodução. A presença do termo  $(p - a)$  garante que o crescimento só ocorra significativamente quando a população ultrapassa esse ponto crítico.

### 3.5 Equilíbrio e estabilidade

Gráficos de fase mostram como a variável dependente muda e indicam valores onde não há mudança, chamados equilíbrios. Analisar esses pontos e sua estabilidade é crucial para entender sistemas dinâmicos nas biociências, como interações entre espécies, crescimento celular e disseminação de doenças. Esses conceitos ajudam a prever, por exemplo, se uma população crescerá, desaparecerá ou se estabilizará ao longo do tempo.

Considere a equação autônoma

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Os pontos de equilíbrio são os valores  $y_1, y_2, \dots, y_k$  tais que,  $f(y_i) = 0$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Ou seja, um ponto de equilíbrio ocorre quando a derivada da função é nula, indicando que não há variação da variável dependente.

No Exemplo 3.7, da seção anterior, apresentamos o efeito Allee modelado pela equação

$$\frac{dp}{dt} = r(p - a) \left(1 - \frac{p}{k}\right) p$$

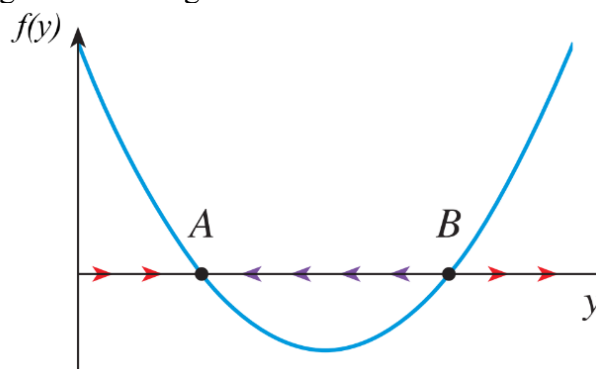
Essa equação possui três pontos de equilíbrio:  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = a$  e  $p_3 = k$ . Estes pontos de equilíbrio apresentam diferentes estabilidades. Se  $p = p_1 = 0$  a população é nula, assim não se reproduz e permanecerá nula, assim  $p_1 = 0$  é dito estável. Essa estabilidade também ocorre com  $p_3 = k$ . Da análise do gráfico de fases da Figura 11 temos que se  $p$  é próximo de  $k$  com  $p < k$ , a população continuará crescendo até chegar em  $k$ . Por outro lado, temos que se  $p$  é próximo de  $k$  com  $p > k$ , a população irá diminuir e se aproximará de  $k$ . Assim, quando  $p$  se aproxima de  $k$ , tanto pela esquerda como pela direita a população tende a  $k$ , o que biologicamente faz todo o sentido, já que  $k$  é a capacidade de suporte do ambiente em que a população em estudo vive. Logo, mesmo com pequenas perturbações o sistema retornar ao ponto de equilíbrio.

Veja que esta estabilidade não ocorre com  $p_2 = a$ . Analisando o gráfico da Figura 11, temos que para  $p_2 < a$  a população reduz e para  $p_2 > a$  a população cresce. Assim, o limiar  $p_2 = a$  é dito instável, pois pequenas perturbações no valor de  $p$  fazem o sistema se afastar do ponto de equilíbrio.

Segundo Stewart e Day (2015) podemos dizer que um equilíbrio  $y_i$  da equação  $\frac{dy}{dt} = f(y)$  é localmente estável se  $y$  se aproxima de  $y_i$  quando  $t \rightarrow \infty$ , para valores de  $y$  suficientemente próximos de  $y_i$ . Quando um equilíbrio não é estável ele é dito instável. Como ilustração veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.8 – Estabilidade de pontos de equilíbrio:** Analise a estabilidade dos pontos de equilíbrio A e B do gráfico de fases abaixo da equação diferencial  $\frac{dy}{dt} = f(y)$ .

Figura 12 – Um gráfico de fases



Fonte: Stewart e Day (2015, p. 434).

**Solução:**

Observe que se  $y$  estiver à esquerda de  $A$  teremos que  $\frac{dy}{dt} = f(y) > 0$ , o que significa que  $y(t)$  é crescente. Logo, à medida que  $t$  aumenta  $y$  se aproximará cada vez mais de  $A$ . Por outro lado, se  $y$  está à direita de  $A$ , com  $A < y < B$ , temos que  $\frac{dy}{dt} = f(y) < 0$ . Logo  $y(t)$  é decrescente nesse intervalo. Assim, à medida que  $t$  aumenta,  $y$  se aproximará do valor de  $A$ . Ou seja, sempre que  $y$  estiver próximo de  $A$  ele se aproximará cada vez mais deste valor à medida que  $t$  cresce. Logo,  $A$  é estável.

Analisando agora o ponto  $B$ , já sabemos que quando  $A < y < B$ ,  $y(t)$  é decrescente, se afastando de  $B$ . Temos ainda que quando  $y > B$ ,  $y(t)$  é crescente, logo quando  $t$  aumenta  $y$  continua a crescer se afastando cada vez mais de  $B$ . Portanto, o ponto  $B$  é instável.

Para facilitar a identificação da estabilidade de pontos de equilíbrio Stewart e Day (2015) definem o seguinte Critério de estabilidade local: Suponha que  $y_i$  seja um equilíbrio

da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Então  $y_i$  é localmente estável se  $f'(y_i) < 0$  e  $y_i$  é instável se  $f'(y_i) > 0$ . Se  $f'(y_i) = 0$ , então a análise é inconclusiva.

De fato, o Critério de estabilidade local é verdadeiro e tem a seguinte demonstração:

Dado  $y_i$  é um ponto de equilíbrio, ou seja

$$f(y_i) = 0$$

Definimos  $\varepsilon(t)$  como uma pequena perturbação em torno de  $y_i$ , tal que

$$\varepsilon(t) = y(t) - y_i$$

Se  $y_i$  for localmente estável, então o módulo de  $\varepsilon(t)$  deve diminuir com o tempo. Ou seja,  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Derivando  $\varepsilon(t)$  temos

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt}[y(t) - y_i] = \frac{dy}{dt} - 0 = f(y)$$

Da última igualdade e do fato de  $y(t) = \varepsilon(t) + y_i$  obtemos que

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = f(\varepsilon + y_i)$$

Usando expansão de Taylor, para valores pequenos de  $\varepsilon$ , temos a seguinte aproximação:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \approx f(y_i) + f'(y_i) \cdot \varepsilon$$

Como  $f(y_i) = 0$ , então

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \approx f'(y_i) \cdot \varepsilon$$

Onde  $f'(y_i)$  é uma constante. Logo, a equação acima é separável. Assumindo a igualdade e reescrevendo a equação para aplicação da integral temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon &= f'(y_i) \cdot dt \\ \int \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon &= \int f'(y_i) \cdot dt \\ \ln|\varepsilon| &= f'(y_i)t + C \\ |\varepsilon| &= e^C \cdot e^{f'(y_i)t} \end{aligned}$$

Como  $e^C$  também é constante, temos que:

- Se  $f'(y_i) < 0$ , então  $|\varepsilon| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Logo,  $y_i$  é estável;
- Se  $f'(y_i) > 0$ , então  $|\varepsilon|$  cresce quando  $t \rightarrow \infty$ . Logo,  $y_i$  é instável;
- Se  $f'(y_i) = 0$  a análise é inconclusiva.

Assim, concluímos a demonstração.

**Exemplo 3.9 – Alimentação Cruzada bacterina:** Duas cepas bacterianas às vezes se alimentam de substâncias químicas excretadas uma pela outra: a cepa A se alimenta de substâncias químicas produzidas pela cepa B e vice-versa. Este fenômeno é conhecido como alimentação cruzada. Suponhamos que duas cepas bacterianas, cepa 1 e cepa 2, cresçam separadamente em um mesmo ambiente, com taxas de crescimento constantes  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. A evolução temporal de suas populações  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$  pode ser descrita pelas equações diferenciais:

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 \text{ e } \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2$$

onde  $r_1 \neq r_2$ . Definimos a frequência da cepa 1 na população, no tempo  $t$ , total como:

$$F(t) = \frac{P_1(t)}{P_1(t) + P_2(t)}$$

Onde essa frequência representa o percentual da população da cepa 1 em relação ao todo.

- Mostre que  $\frac{dF}{dt} = sF(1 - F)$ , onde  $s = r_1 - r_2$ ;
- Determinar os pontos de equilíbrio e a estabilidade local em função de  $s$ .

**Solução:**

a) Derivando  $F(t)$ , utilizando a regra do quociente, temos:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{(P_1 + P_2) \frac{dP_1}{dt} - P_1 \left( \frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} \right)}{(P_1 + P_2)^2}$$

Substituindo as expressões das derivadas fornecidas:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{(P_1 + P_2)r_1 P_1 - P_1(r_1 P_1 + r_2 P_2)}{(P_1 + P_2)^2}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{r_1 P_1^2 + r_1 P_1 P_2 - r_1 P_1^2 - r_2 P_1 P_2}{(P_1 + P_2)^2}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{r_1 P_1 P_2 - r_2 P_1 P_2}{(P_1 + P_2)^2} = \frac{(r_1 - r_2) P_1 P_2}{(P_1 + P_2)^2} \quad (3.8)$$

Como  $F = \frac{P_1}{P_1 + P_2}$ , temos que  $1 - F = \frac{P_2}{P_1 + P_2}$ . Daí,

$$\frac{P_1}{P_1 + P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{P_1 P_2}{(P_1 + P_2)^2} = F(1 - F) \quad (3.9)$$

Portanto, fazendo  $s = (r_1 - r_2)$  e substituindo em (3.8), juntamente com (3.9), temos o resultado que queremos

$$\frac{dF}{dt} = sF(1 - F)$$

b) Os pontos de equilíbrio são os pontos  $F_i$ , tais que

$$sF_i(1 - F_i) = 0$$

Logo, os pontos de equilíbrio são  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 1$ .

Para determinar a estabilidade local de cada ponto, aplicaremos o critério de estabilidade local.

Seja

$$g(F) = sF(1 - F)$$

Então

$$g'(F) = s(1 - 2F)$$

Assim, para:

- $F_1 = 0$

$$g'(0) = s$$

Logo,  $F_1 = 0$  é estável se  $s < 0$  e instável se  $s > 0$

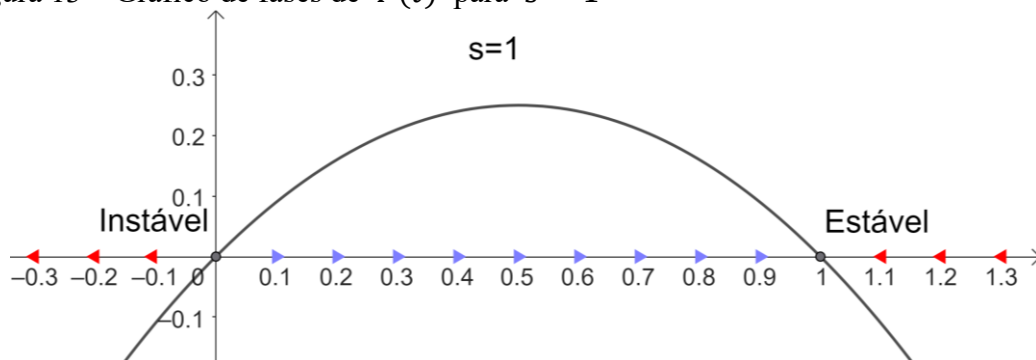
- $F_2 = 1$

$$g'(1) = -s$$

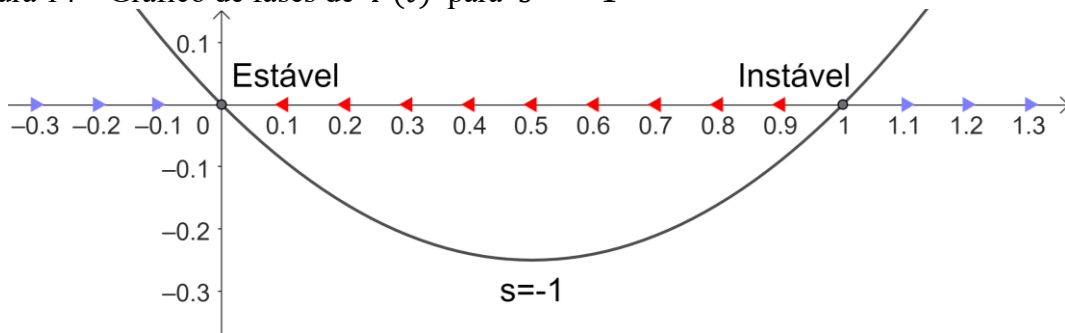
Logo,  $F_2 = 1$  é estável se  $s > 0$  e instável se  $s < 0$

Este último exemplo pode ser interpretado biologicamente da seguinte forma: Se  $r_1 > r_2$ , ou seja, a cepa 1 cresce mais rapidamente que a cepa 2, então a frequência  $F(t)$  tenderá a 1 com o tempo. Isso significa que a cepa 1 dominará a população. Se  $r_1 < r_2$ , ocorre o inverso: a frequência  $F(t)$  tenderá a 0, e a cepa 2 dominará. Esse modelo simples revela como a diferença nas taxas de crescimento determina a prevalência de uma cepa bacteriana sobre outra ao longo do tempo. As figuras a seguir ilustram a estabilidade de  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 1$  com os gráficos de fases para  $s = 1$  e  $s = -1$ .

Figura 13 – Gráfico de fases de  $F(t)$  para  $s = 1$



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 14 – Gráfico de fases de  $F(t)$  para  $s = -1$ 

Fonte: elaborado pelo autor.

**Exemplo 3.10 – Genética Populacional:** A equação diferencial do Exemplo 3.9 pode ser estendida para modelar os efeitos da alimentação cruzada bacteriana. Suponha que a taxa de crescimento da cepa 1 ( $r_1$ ) seja zero quando a frequência da cepa 2 for zero e que essa taxa aumente linearmente até um valor máximo  $\alpha$  quando a frequência da cepa 2 for 1. Da mesma forma, suponha que a taxa de crescimento da cepa 2 ( $r_2$ ) seja zero quando a frequência da cepa 1 for zero, e que ela aumente linearmente até um valor máximo  $\beta$  quando a frequência da cepa 1 for 1.

Mostre que essas suposições, combinadas com a equação diferencial do Exemplo 3.9 (parte a), resultam no modelo

$$\frac{dF}{dt} = F(1 - F)[\alpha(1 - F) - \beta F]$$

para a frequência da cepa 1.

**Solução:**

Como a frequência é um percentual, temos que  $0 \leq F(t) \leq 1$ . Assim, a frequência da cepa 2 é dada por

$$1 - F(t)$$

Onde  $F(t)$  é a frequência da cepa 1.

A taxa de crescimento  $r_1$ , da cepa 1, depende da frequência da cepa 2 e cresce linearmente de 0 (quando frequência da cepa 2 é 0) até  $\alpha$  (quando frequência da cepa 2 é 1). Como o crescimento desta taxa é linear, temos

$$r_1 = \alpha(1 - F)$$

Analogamente, a taxa de crescimento  $r_2$ , da cepa 2, é dada por

$$r_2 = \beta F$$

Do item a do Exemplo 3.9 temos que

$$\frac{dF}{dt} = F(1 - F)(r_1 - r_2)$$

Substituindo  $r_1$  e  $r_2$  obtemos a equação solicitada

$$\frac{dF}{dt} = F(1 - F)[\alpha(1 - F) - \beta F]$$

**Exemplo 3.11 – Alimentação Cruzada bacterina:** Na equação diferencial do exemplo anterior, suponha  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$ , obtendo a equação diferencial:

$$\frac{dF}{dt} = F(1 - F)(1 - 3F)$$

- Encontre os equilíbrios.
- Determine as propriedades de estabilidade de cada equilíbrio.

**Solução:**

a) Para determinar os pontos de equilíbrio façamos

$$F(1 - F)(1 - 3F) = 0$$

Logo, os equilíbrios são  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = \frac{1}{3}$  e  $F_3 = 1$ .

b) Para aplicarmos o critério de estabilidade local, definimos:

$$g(F) = F(1 - F)(1 - 3F)$$

$$g(F) = 3F^3 - 4F^2 + F$$

Logo,

$$g'(F) = 9F^2 - 8F + 1$$

Avaliando o valor da derivada em cada um dos equilíbrios, temos:

- $F_1 = 0$ :

$$g'(0) = 9 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 1 = 1$$

Como  $g'(0) > 0$  temos que  $F_1 = 0$  é instável.

- $F_2 = \frac{1}{3}$

$$g'\left(\frac{1}{3}\right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{1}{3} + 1 = -\frac{2}{3}$$

Como  $g'\left(\frac{1}{3}\right) < 0$  temos que  $F_2 = \frac{1}{3}$  é estável.

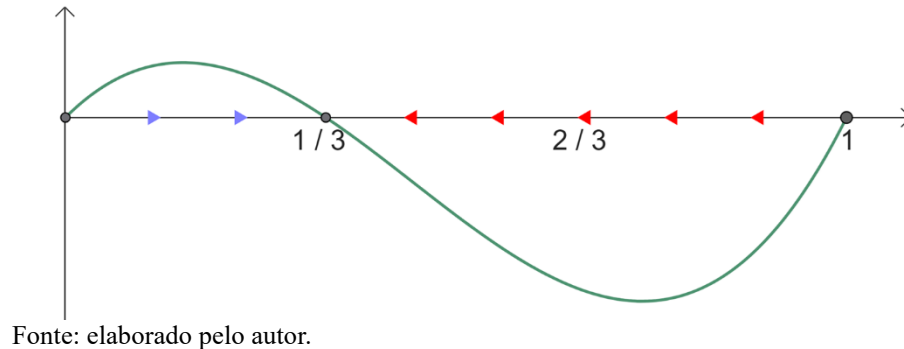
- $F_3 = 1$

$$g'(1) = 9 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 1 = 2$$

Como  $g'(1) > 0$  temos que  $F_3 = 1$  é instável.

Esses resultados indicam que a frequência da cepa 1 da bactéria tende a se aproximar de  $\frac{1}{3}$ , o que também é possível observar no gráfico de fases a seguir.

Figura 15 – Gráfico de fazes para frequência da cepa 1 da população de bactérias

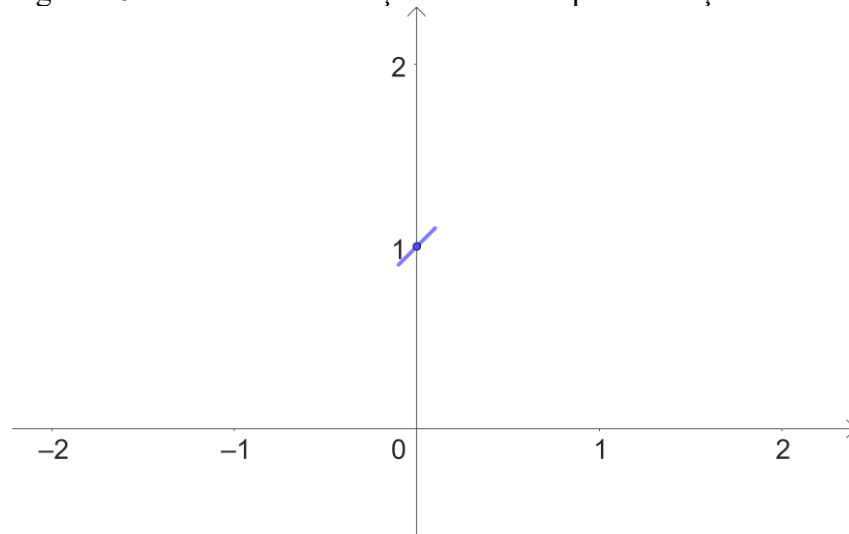


### 3.6 Campos de direção

Ao estudar equações diferenciais de primeira ordem da forma  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ , nem sempre é possível obter soluções analíticas, ou obter estas soluções tem elevado grau de dificuldade. Nesse contexto, os campos de direção (ou campos de inclinação) tornam-se uma poderosa ferramenta gráfica para visualizar o comportamento das soluções mesmo sem conhecê-las explicitamente. Um campo de direção consiste em pequenos segmentos de reta desenhados em vários pontos do plano  $(t, y)$ , onde a inclinação de cada segmento é dada pelo valor da derivada  $\frac{dy}{dt}$  naquele ponto específico. Assim, os campos de direção oferecem uma representação visual da inclinação das soluções da equação diferencial ao longo do tempo.

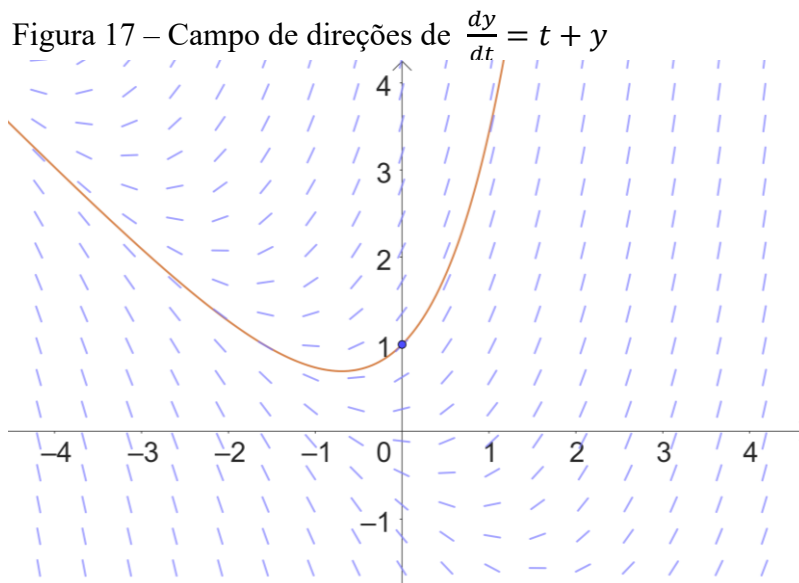
A construção de um campo de direção segue um procedimento simples, mas conceitualmente rico. Dado um conjunto de pares ordenados  $(t, y)$ , calcula-se o valor da derivada  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  em cada ponto, e traça-se um segmento de reta com essa inclinação. Por exemplo, para a equação  $\frac{dy}{dt} = t + y$ , sabemos que a inclinação do gráfico de  $y$  no ponto  $(0, 1)$  é  $0 + 1 = 1$ , já que, neste caso, a inclinação será o valor da derivada é dado pela soma das coordenadas  $t$  e  $y$ . Assim, traçamos um pequeno segmento de reta com a inclinação obtida pelo ponto  $(0, 1)$ , conforme a Figura 16.

Figura 16 – Início da construção de um campo de direções



Fonte: elaborado pelo autor.

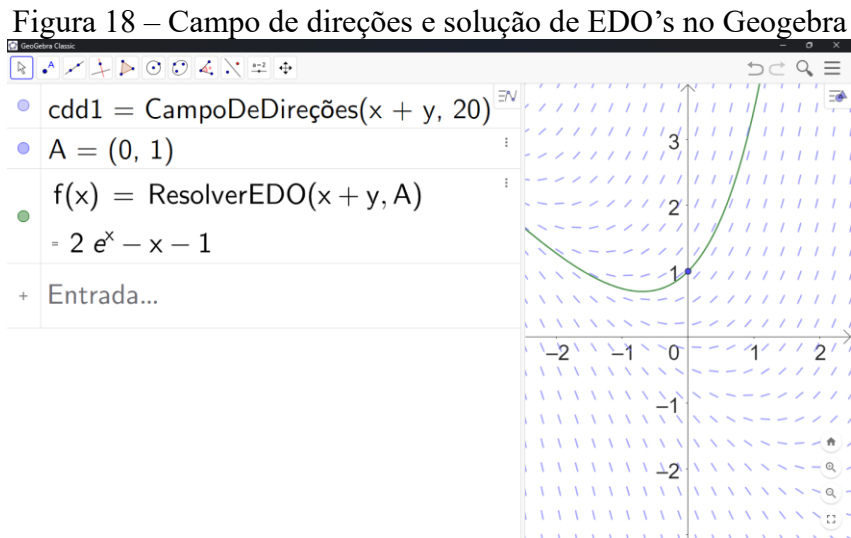
Repetimos este processo em vários pontos, obtendo um guia para a família de soluções da equação diferencial, permitindo visualizar o comportamento das curvas de solução através da inclinação em cada ponto, indicando a direção das curvas. A Figura 17 apresenta o campo de direções de  $\frac{dy}{dt} = t + y$ , junto com o esboço da curva que passa pelo ponto  $(0, 1)$ .



Fonte: elaborado pelo autor.

Do ponto de vista didático, os campos de direção são úteis para desenvolver nos estudantes a noção de solução como curva tangente aos vetores do campo. Ferramentas digitais como o GeoGebra, permitem a construção automatizada desses campos, tornando o ensino mais acessível e visual. O campo de direções acima e a curva de solução que passa por  $(0, 1)$  foram construídos com esta ferramenta. Para o campo de direções foi digitado o comando

“CampoDeDireções” na caixa de entrada e para a solução da EDO o comando “ResolverEDO”, como mostra a Figura 18.



Fonte: elaborado pelo autor.

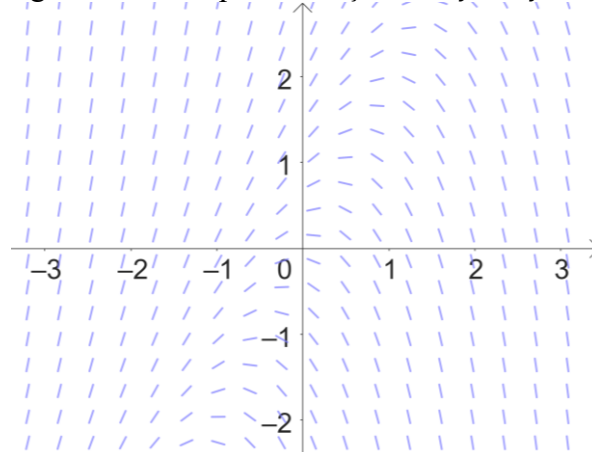
**Exemplo 3.12** – Esboce o campo de direções da equação diferencial  $y' = y - 2x$  e esboce uma curva solução que passe pelo ponto  $(1, 0)$ .

**Solução:**

Começamos calculando a inclinação do gráfico de  $y$  em alguns pontos, conforme o quadro a seguir.

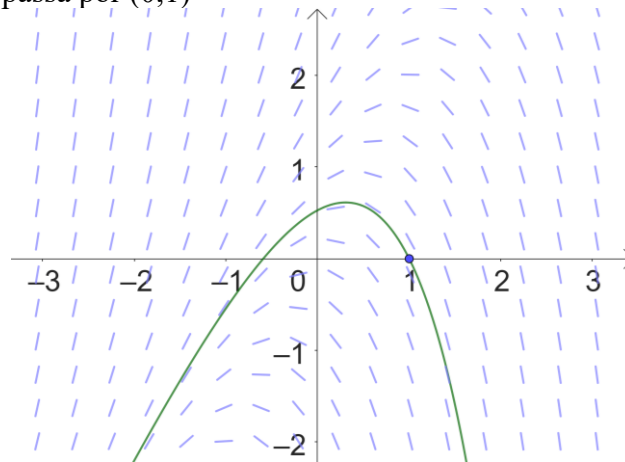
$y$							
2	8	6	4	2	0	-2	-4
1	7	5	3	1	-1	-3	-5
0	6	4	2	0	-2	-4	-6
-1	5	3	1	-1	-3	-5	-7
-2	4	2	0	-2	-4	-6	-8
	-3	-2	-1	0	1	2	3
							$x$

Em seguida desenhamos os segmentos de retas com as inclinações indicadas em cada ponto. Veja a Figura 19.

Figura 19 – Campo de direções de  $y' = y - 2x$ 

Fonte: elaborado pelo autor.

Por fim, resta traçar a curva de solução que passa por  $(0, 1)$ , o que é apresentado na Figura 20.

Figura 20 – Solução da EDO  $y' = y - 2x$  que passa por  $(0,1)$ 

Fonte: elaborado pelo autor.

Para as construções no Exemplo 3.12 foi utilizado novamente o *software* Geogebra, o que facilita a apresentação das ilustrações e agiliza as construções. Por exemplo, com este *software* não há necessidade de construir o quadro inicial, pois com apenas um comando já conseguimos esboçar o campo de direções. Entretanto é importante compreender o que significa cada segmento do campo, bem como o comportamento da EDO de maneira geral, o que ocorre quando realizamos as primeiras construções passo a passo.

**Exemplo 3.13 – Genética populacional:** Sobre o modelo apresentado no Exemplo 3.11,

$$\frac{dF}{dt} = F(1 - F)(1 - 3F) \quad (3.10)$$

- a) Desenhe o campo de direções dessa equação diferencial.

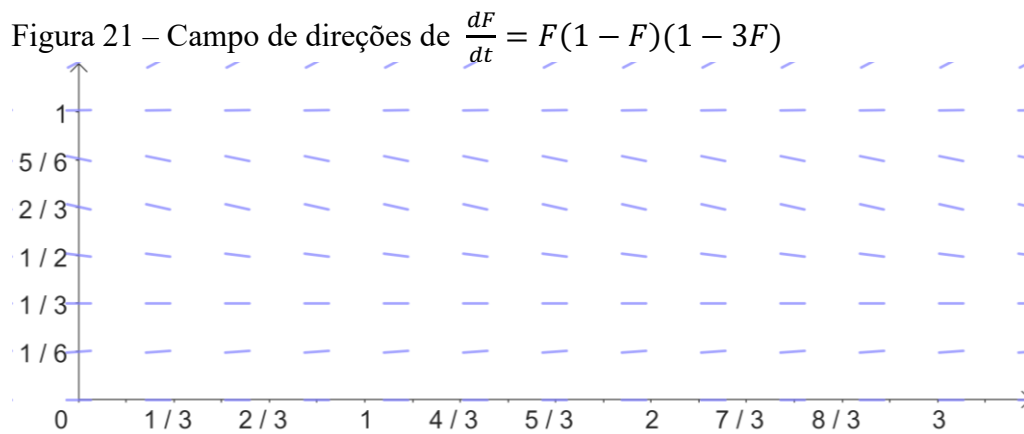
- b) Identifique todos os equilíbrios no gráfico.  
 c) Esboce a curva solução que começa em 0,8 quando  $t = 0$ .

**Solução:**

a) Novamente começamos calculando as inclinações em vários pontos, conforme o quadro a seguir:

$F$								
1	0	0	0	0	0	0	0	0
5/6	-5/24	-5/24	-5/24	-5/24	-5/24	-5/24	-5/24	-5/24
2/3	-2/9	-2/9	-2/9	-2/9	-2/9	-2/9	-2/9	-2/9
1/2	-1/8	-1/8	-1/8	-1/8	-1/8	-1/8	-1/8	-1/8
1/3	0	0	0	0	0	0	0	0
1/6	5/72	5/72	5/72	5/72	5/72	5/72	5/72	5/72
0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	$t$

Agora traçamos os segmentos com as inclinações indicadas em cada ponto. Veja a Figura 21.



Fonte: elaborado pelo autor.

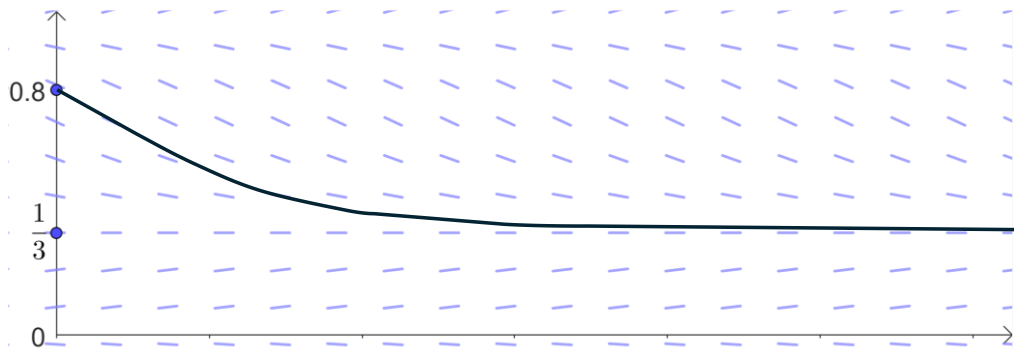
Neste exemplo os valores de todas as colunas do quadro são idênticos e isto ocorre porque a variável independente  $t$  não aparece no lado direito da equação diferencial. Ou seja, a equação (3.10) é autônoma.

b) Os pontos de equilíbrio são aqueles em que  $\frac{dF}{dt} = 0$ . Logo, os equilíbrios são  $0$ ,  $\frac{1}{3}$  e  $1$ .

Observe que a inclinação dos segmentos, no campo de direções, nos equilíbrios é nula.

c) A partir do campo de direções traçamos a curva de solução da equação (3.10) que passa por  $(0; 0,8)$ . Veja a imagem a seguir onde visualizamos a curva solicitada. Esta curva de solução é uma assíntota horizontal a reta  $y = \frac{1}{3}$ .

Figura 22 – Curva de solução de  $\frac{dF}{dt} = F(1 - F)(1 - 3F)$



Fonte: elaborado pelo autor.

Como já mencionado, algumas EDO's apresentam uma grande dificuldade na resolução e de entendimento do comportamento da variação da variável independente. Este é o caso da equação (3.10), que apesar de se uma equação separável, envolve técnicas de integração mais avançadas, como as frações parciais, utilizada na equação (3.5) do Exemplo 3.6(3.6), e uma representação final não convencional, o que dificulta o entendimento do comportamento da variável independente como passar do tempo. Essa situação reforça a necessidade e importância de se compreender sobre os campos de direções.

Para a curva de solução da Figura 22 o *software* Geogebra não foi capaz de realizar a construção. Assim, aumentou-se o número de segmentos do campo de direções para facilitar a visualização do comportamento de  $F$  e o gráfico que passa por  $(0; 0,8)$  foi construído manualmente. Cabe ressaltar que existem outros *softwares* que conseguem realizar as construções gráficas das soluções da equação (3.10), inclusive linguagens de programação e sistemas de inteligência artificial.

### 3.7 Método de Euler

Observando os campos de direções, vemos que se considerarmos a inclinação em um ponto dado e unirmos os segmentos de reta tangentes a uma curva de solução, então teríamos um gráfico formado pela união de vários segmentos, que se aproximaria de uma curva de solução para o problema de valor inicial. Assim, os campos de direções servem como ponto de partida para métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais, que fornecem aproximações da solução verdadeira. Um dos mais simples e introdutórios entre esses métodos é o método de Euler, que leva o nome do matemático suíço Leonhard Euler.

O método de Euler consiste em aproximar a solução de uma EDO da forma  $y' = f(t, y)$ , com condição inicial  $y(t_0) = y_0$ , construindo uma sequência de pontos que seguem

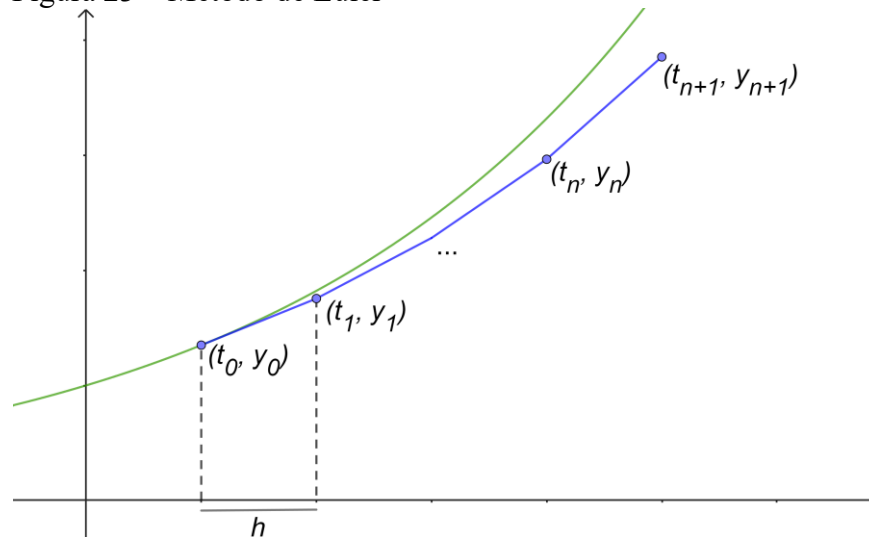
aproximadamente o gráfico da solução exata. Segue a definição: Dado um passo  $h > 0$ , os valores aproximados do problema de valor inicial  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , com  $t_{n+1} = t_n + h$  são

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

onde  $y_n = y(t_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Assim, a cada novo ponto, soma-se ao valor anterior a variação estimada com base na taxa de variação instantânea (a derivada) multiplicada pelo tamanho do passo. A Figura 23 ilustra graficamente o método de Euler, onde que cada segmento limitado pelos pontos  $(t_n, y_n)$  e  $(t_{n+1}, y_{n+1})$  tem equação

$$y = y_n + f(t_n, y_n)(t - t_n) \quad (3.11)$$

Figura 23 – Método de Euler



Fonte: elaborado pelo autor.

Esse processo permite construir uma solução aproximada, que se torna mais precisa à medida que o passo  $h$  diminui. No entanto, há um equilíbrio a ser considerado entre a precisão e o custo computacional: passos menores geram melhores aproximações, mas exigem mais cálculos. Os exemplos a seguir ilustram as aplicações do método de Euler.

**Exemplo 3.14 – Administração de medicamentos:** No Exemplo 3.3 temos que variação da concentração  $y(t)$  de medicamento (em mg/ml) ao longo do tempo  $t$ , em horas, varia de acordo com a equação

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \text{sen } t - ky$$

Para determinado medicamento, tomamos  $k = 1$  e sabendo que a concentração inicial do medicamento na corrente sanguínea é de 2,5 mg/ml, estime a concentração após 1h utilizando o método de Euler, com passo  $h = 0,25$ .

**Solução:**

Nas notações do método de Euler, temos que  $f(t, y) = 1 + \sin t - y$  e  $(t_0; y_0) = (0; 2,5)$  temos que calcular  $y_4$  o que corresponde a 4 passos de 0,25 h, totalizando 1 h:

$$y_1 = 2,5 + 0,25(1 + \sin 0 - 2,5) \approx 2,13$$

$$y_2 = 2,13 + 0,25(1 + \sin 0,25 - 2,13) \approx 1,91$$

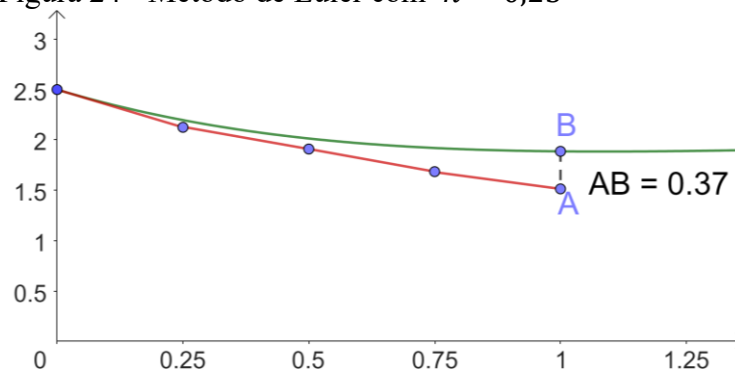
$$y_3 = 1,91 + 0,25(1 + \sin 0,5 - 1,91) \approx 1,68$$

$$y_4 = 1,68 + 0,25(1 + \sin 0,75 - 1,68) \approx 1,51$$

Portanto, a concentração após 1h é de aproximadamente 1,51 mg/ml.

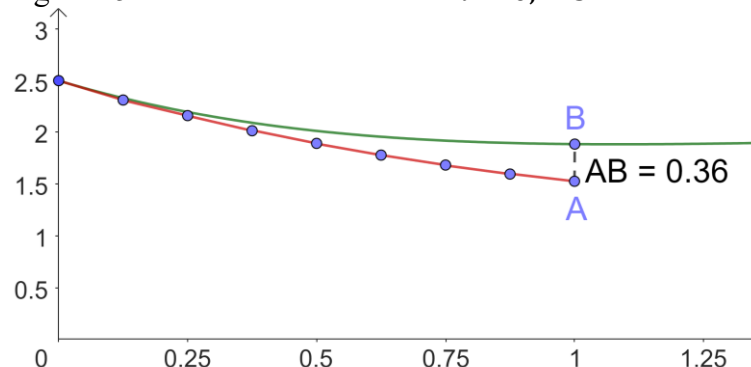
A Figura 24 mostra o gráfico de segmentos lineares construído conforme a equação (3.11), com um passo  $h = 0,25$ , em comparação com a curva de solução da equação diferencial do Exemplo 3.14, construído no Geogebra utilizando o comando “ResolverEDO”. Com essas construções computacionais vemos que o método de Euler cometeu um erro de 0,37 mg/ml. Já a Figura 25, mostra o que ocorreria se usarmos um passo  $h = 0,125$ , onde teríamos o dobro do trabalho na realização dos cálculos e mesmo assim ainda teríamos um erro de 0,36 mg/ml.

Figura 24 - Método de Euler com  $h = 0,25$



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 25 - Método de Euler com  $h = 0,125$



Fonte: elaborado pelo autor.

**Exemplo 3.15 – Modelagem de populações de leveduras:** Na seção 2.1 apresentamos a seguinte equação para descrever a dinâmica de uma população experimental de leveduras:

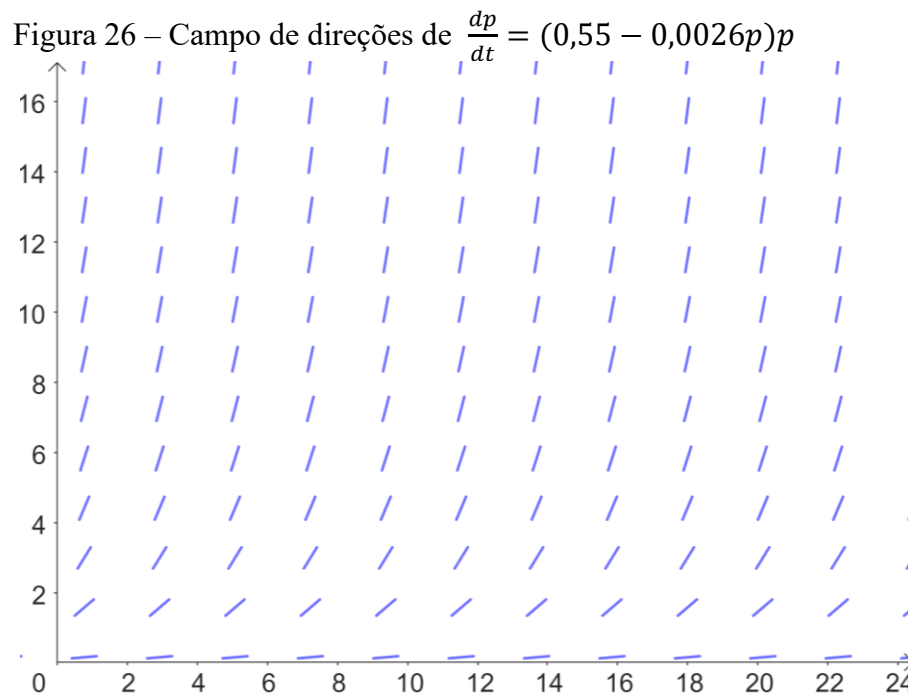
$$\frac{dp}{dt} = (0,55 - 0,0026p)p$$

Onde  $p(t)$  é o tamanho da população (em milhões de indivíduos por ml) no tempo  $t$  (em horas).

- Esboce o campo de direções da equação diferencial.
- Tomando  $p(0) = 0,2$ , se o método de Euler com um passo de  $h = 0,5$  para estimar o tamanho da população após quatro horas. Compare seu resultado com os dados da Tabela 1 da seção 2.1.

**Solução:**

a) Utilizando o comando “CampoDeDireções” no Geogebra obtemos o campo de direções da Figura 26, onde é possível observar um crescimento exponencial da função  $p(t)$  que representa a população de leveduras de um experimento.



Fonte: elaborado pelo autor.

b) Como  $h = 0,5$  e queremos a população para  $t = 4$  horas, devemos avançar 8 passos seguindo o método de Euler. Veja:

$$p_1 = 0,2 + 0,5[(0,55 - 0,0026 \cdot 0,2)0,2] \approx 0,25$$

$$p_2 = 0,25 + 0,5[(0,55 - 0,0026 \cdot 0,25)0,25] \approx 0,32$$

$$p_3 = 0,32 + 0,5[(0,55 - 0,0026 \cdot 0,32)0,32] \approx 0,41$$

$$p_4 = 0,41 + 0,5[(0,55 - 0,0026 \cdot 0,41)0,41] \approx 0,53$$

$$p_5 = 0,53 + 0,5[(0,55 - 0,0026 \cdot 0,53)0,53] \approx 0,67$$

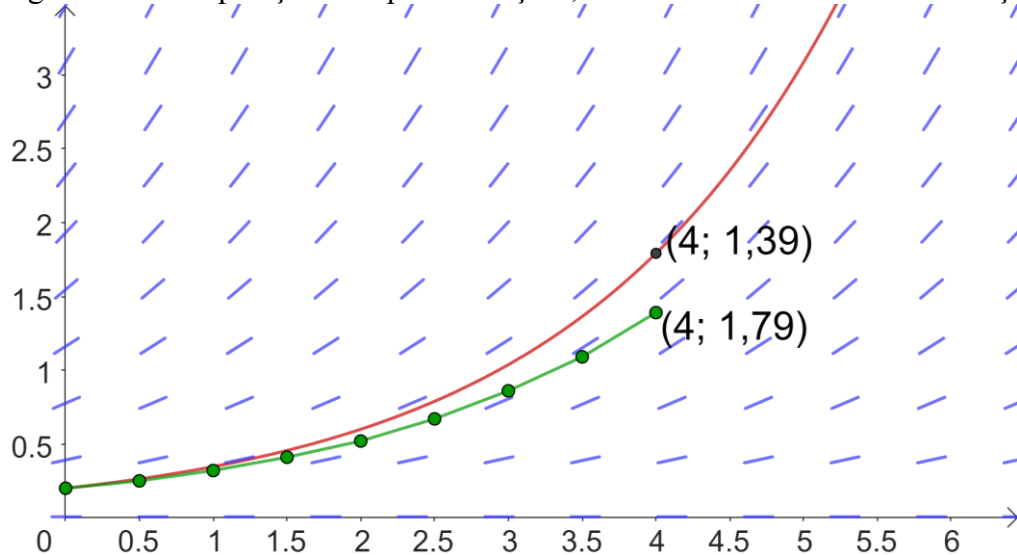
$$p_6 = 0,67 + 0,5[(0,55 - 0,0026 \cdot 0,67)0,67] \approx 0,86$$

$$p_7 = 0,85 + 0,5[(0,55 - 0,0026 \cdot 0,85)0,85] \approx 1,09$$

$$p_8 = 1,39 + 0,5[(0,55 - 0,0026 \cdot 1,09)1,09] \approx 1,39$$

Assim, pelo método de Euler, temos que a população de leveduras após 4 horas é  $p(4) = 1,39$  milhões, mostrando uma boa precisão em comparação com o valor apresentado na tabela 1 de 1,4 milhão de leveduras. A Figura 27 mostra o campo de direções do item a, junto com a curva de solução do problema do item b e o gráfico do método de Euler, onde observamos que mesmo o modelo apresentado na equação diferencial deste último exemplo apresenta imprecisões em relação aos resultados da tabela 1, o que é normal quando lidamos com sistemas dinâmicos.

Figura 27 – Comparação: campo de direções, método de Euler e curva de solução



Fonte: elaborado pelo autor.

Pelo apresentado, temos que, embora simples, o método de Euler é uma poderosa ferramenta didática para introduzir o pensamento numérico no estudo de EDOs. Em ambientes escolares, ele permite que os estudantes visualizem o comportamento de soluções sem depender exclusivamente de fórmulas complexas, promovendo uma abordagem exploratória.

## 4 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Em diversas situações do mundo real, especialmente em contextos biológicos, físicos e econômicos, a dinâmica de um fenômeno depende da interação entre duas ou mais variáveis. Nesses casos, um modelo com uma única equação diferencial pode ser insuficiente. Surge, então, a necessidade de empregar sistemas de equações diferenciais, nos quais duas ou mais equações atuam simultaneamente, descrevendo a evolução de múltiplas variáveis ao longo do tempo.

Um sistema de duas equações diferenciais ordinárias (EDO's) pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Esse tipo de sistema descreve como as variáveis  $x(t)$  e  $y(t)$  evoluem no tempo, de acordo com as funções  $f$  e  $g$ , que podem depender tanto de  $x$  quanto de  $y$  e sua solução é justamente o par de funções  $x(t)$  e  $y(t)$  que satisfazem as duas equações. Tais sistemas são chamados autônomos quando  $f$  e  $g$  não dependem explicitamente do tempo  $t$ , conforme a definição de equação diferencial autônoma da subseção 3.2.2.

### 4.1 Modelo predador-presa

Um exemplo clássico e importante é o modelo predador-presa, também conhecido como modelo de Lotka-Volterra, desenvolvido entre os anos de 1925 e 1926 por Alfred J. Lotka (1880-1949), um biofísico norte-americano, e Vito Volterra (1860-1940), um matemático italiano. Esse modelo é utilizado na ecologia para estudar a interação entre duas populações: uma de presas (como coelhos) e uma de predadores (como raposas). Assim, esse modelo apresenta duas variáveis em função do tempo,  $C(t)$  e  $R(t)$  que representam as populações da presa e predador, respectivamente.

Seguindo as ideias de Lotka-Volterra temos que, em condições ideais, sem contato com predadores e com alimentação em abundância, a população de presas tende a crescer proporcionalmente à população já existente. Assim,

$$\frac{dC}{dt} = aC$$

Já em relação à população de predadores, sem o contato com as presas ela tende a diminuir através da mortalidade a uma taxa proporcional à população já existente, ou seja,

$$\frac{dR}{dt} = -dR$$

Onde  $a$  e  $d$  são constantes positivas.

Entretanto, assumindo que as duas espécies estejam interagindo em um mesmo ambiente temos que a população de presas irá decair a uma taxa o proporcional as duas populações, logo proporcional a  $CR$ . Por outro lado, a população de predadores tem uma taxa de natalidade que depende da alimentação disponível, a população de presas. Assim, a população de predadores  $R(t)$  aumentará a uma taxa proporcional a ambas as populações, da mesma forma, proporcional à  $CR$ . Incorporando essas ideias às duas equações apresentadas anteriormente temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = aC - bCR \\ \frac{dR}{dt} = -cR + dCR \end{cases} \quad (4.1)$$

Onde  $a, b, c$  e  $d$  são constantes positivas.

**Exemplo 4.1 – Modelo predador-presa:** Considere o sistema de equações diferenciais que descreve a interação entre uma população de coelhos  $C(t)$  e de raposas  $R(t)$ :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = 2C - 0,01CR \\ \frac{dR}{dt} = -0,5R + 0,0001CR \end{cases}$$

- Use o sistema de equações diferenciais para encontrar uma expressão para  $\frac{dR}{dC}$ .
- Apresente um campo de direções para a equação diferencial resultante no plano  $CR$ .
- Suponha que, em algum momento, existam 5000 coelhos e 100 raposas. Desenhe a curva correspondente representando a solução para estas condições iniciais.
- Use o item c para fazer esboços de  $C$  e  $R$  como funções de  $t$ .

**Solução:**

a) Temos pela regra da cadeia que

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dC} \cdot \frac{dC}{dt}$$

então,

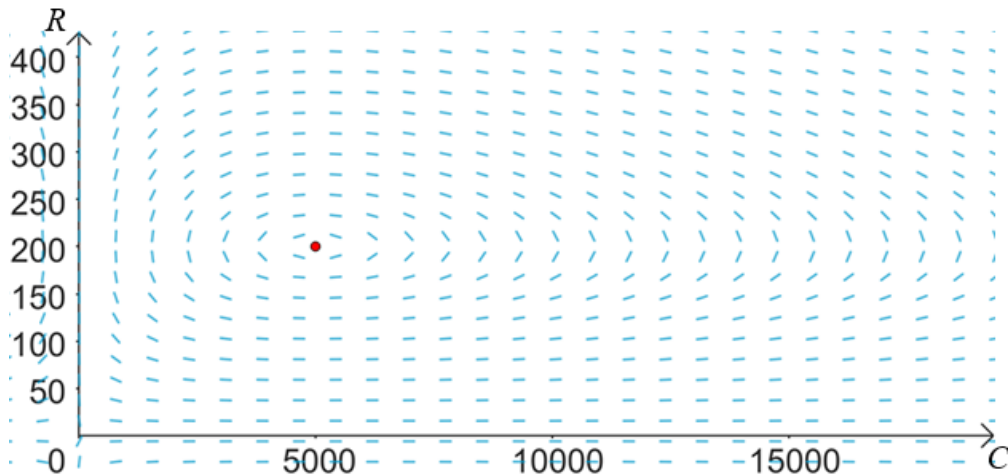
$$\frac{dR}{dC} = \frac{\frac{dR}{dt}}{\frac{dC}{dt}}$$

Logo,

$$\frac{dR}{dC} = \frac{-0,5R + 0,0001CR}{2C - 0,01CR} \quad (4.2)$$

b) Considerando  $R$  como uma função de  $C$  temos o seguinte campo de direções para a equação (4.2), construído utilizando o software Geogebra:

Figura 28 – Campo de direções no plano  $CR$



Fonte: elaborado pelo autor.

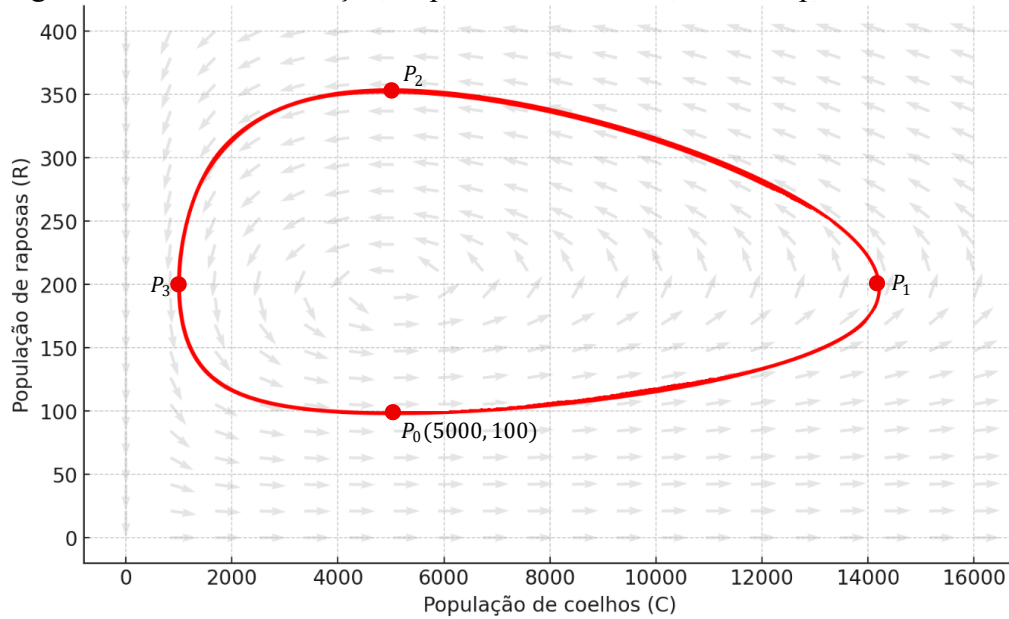
Podemos observar que as curvas de interação entre as duas populações formam um ciclo fechado, em torno do ponto destacado, indicando que as populações de coelhos e raposas oscilam periodicamente. Isso significa que, em certos momentos, a população de coelhos aumenta enquanto a de raposas diminui, e vice-versa. Esse comportamento cíclico é característico do modelo predador-presa e reflete a interação dinâmica entre as duas espécies.

c) No campo de direções do item b, é importante analisar como as populações evoluem ao longo do tempo. Por exemplo, ao considerar o ponto  $(C, R) = (5000, 100)$ , temos que

$$\frac{dC}{dt} = 2C - 0,01CR = 2 \cdot 5000 - 0,01 \cdot 5000 \cdot 100 = 5000 > 0$$

Logo, no instante em que a população de coelhos é de 5000 e a de raposas é de 100 existe uma tendência de crescimento a população de coelhos já que a derivada de  $\frac{dC}{dt}$  é positiva, o que indica um crescimento na população de coelhos. Daí, podemos inferir que o movimento cíclico do campo de direção segue no sentido anti-horário. Assim, podemos esboçar a curva de soluções como na figura a seguir, construída através da linguagem de programação Python, pois o Geogebra não foi capaz de resolver problemas desta complexidade.

Figura 29 – Curva de solução do problema de valor inicial no plano  $CR$



Fonte: elaborado pelo autor.

A figura acima apresenta o que é chamado de **plano de fase**, uma representação das soluções de sistemas de equações diferenciais como curvas no plano  $CR$ . Nele, as trajetórias de fase são os caminhos que as soluções  $(C, R)$  percorrem ao longo do tempo. Por exemplo, na figura acima temos em destaque a trajetória de fase através de  $(5000, 100)$ . Já um retrato de fases reúne essas trajetórias, ilustrando comportamentos típicos de solução.

Analisando biologicamente a Figura 29, os pontos destacados na ilustram diferentes fases do ciclo populacional. No ponto  $P_0$ , a população de coelhos é moderada e a de raposas é relativamente baixa. Nesse cenário, há poucas raposas para controlar os coelhos, o que permite que a população de presas cresça rapidamente. Em seguida, o sistema evolui para o ponto  $P_1$ , onde a população de coelhos atinge seu valor máximo, por volta de 14000 indivíduos. As raposas ainda estão em crescimento, impulsionadas pela abundância de alimento, mas ainda não atingiram seu pico populacional.

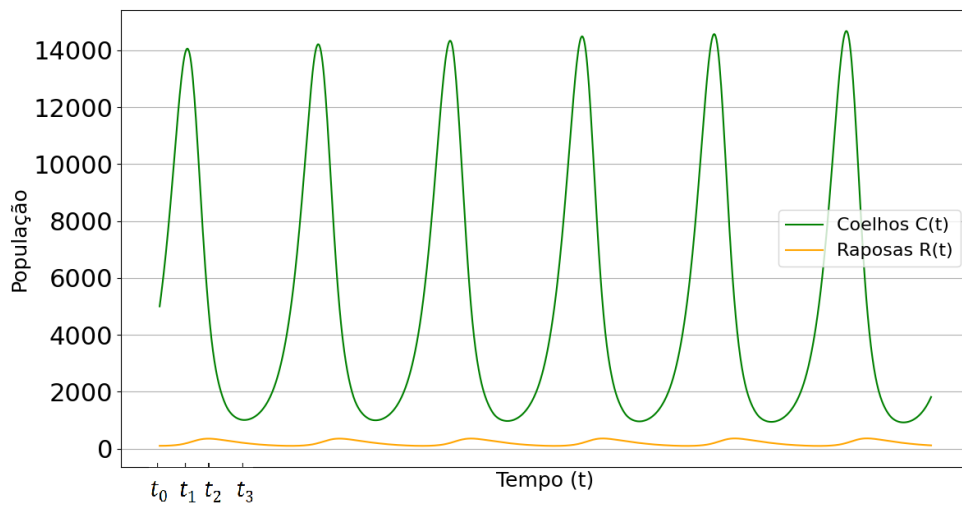
O ponto  $P_2$  marca o auge da população de raposas, que atinge aproximadamente 350 indivíduos. Contudo, os coelhos já começaram a declinar devido à intensa predação. Com o tempo, a escassez de presas compromete a sobrevivência dos predadores, levando ao ponto  $P_3$ , onde a população de coelhos se encontra em seu mínimo, enquanto as raposas continuam em queda. A diminuição da pressão predatória permite então que os coelhos iniciem um novo crescimento, reiniciando o ciclo.

Esse comportamento oscilatório evidencia como a dinâmica entre espécies em interação pode ser compreendida e antecipada por meio de sistemas de equações diferenciais. Os ciclos

refletem um equilíbrio ecológico dinâmico, onde populações se alternam em fases de crescimento e declínio, de forma previsível e interdependente.

**d)** A partir da interpretação biológica descrita no item anterior podemos esboçar os gráficos de  $C(t)$  e  $R(t)$ . Supondo que os pontos  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  ocorram nos tempos  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$ , respectivamente, temos os gráficos das funções apresentados na Figura 30, construída novamente utilizando Python, como a maioria das imagens do restante deste capítulo.

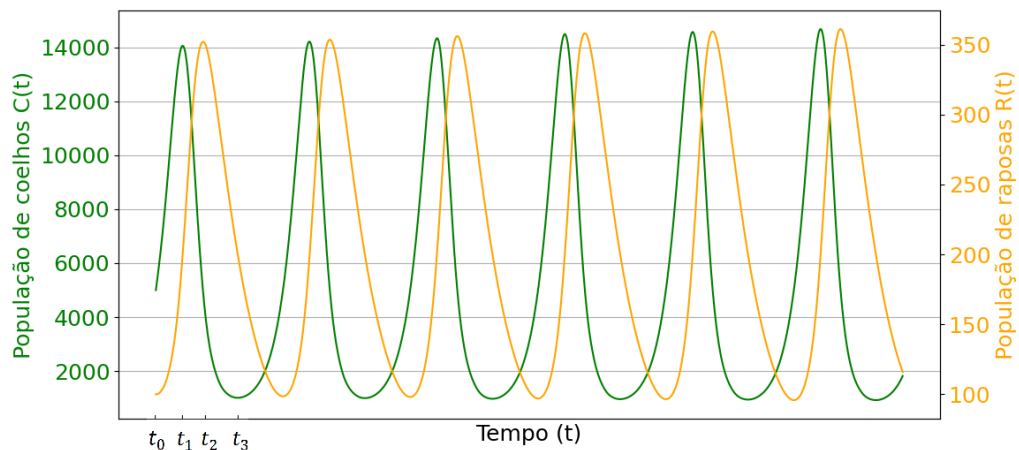
Figura 30 – Populações de coelhos e raposas ao longo do tempo



Fonte: elaborado pelo autor.

A fim de melhorar a visualização do comportamento das duas populações podemos utilizar escala diferentes para cada uma delas, conforme a imagem a seguir.

Figura 31 – Populações de coelhos e raposas ao longo do tempo, em escalas diferentes



Fonte: elaborado pelo autor.

Apesar de suas suposições simplistas, o modelo de Lotka-Volterra foi um marco. Ele demonstrou matematicamente como interações ecológicas simples podem gerar dinâmicas complexas e cíclicas, fornecendo uma base teórica para a observação de flutuações populacionais na natureza. Ele serve como o ponto de partida para modelos mais realistas e sofisticados que incorporam fatores adicionais, como a capacidade de suporte do ambiente à população de presas, assumindo que na ausência de predadores, as presas crescem de acordo com o modelo logístico. Adicionando estes fatores o modelo predador-presa tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = aC \left(1 - \frac{C}{k}\right) - bCR \\ \frac{dR}{dt} = -cR + dCR \end{cases}$$

**Exemplo 4.2 – Modelo predador-presa:** Considerando a capacidade de suporte do ambiente alteramos o sistema de equações diferenciais Exemplo 4.1 da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = 2C(1 - 0,0001C) - 0,01CR \\ \frac{dR}{dt} = -0,5R + 0,0001CR \end{cases}$$

- De acordo com estas equações, o que acontece à população de coelhos na ausência de lobos?
- Encontre uma expressão para  $\frac{dR}{dC}$ .
- Use um sistema de álgebra computacional para desenhar um campo de direções para a equação diferencial resultante no plano  $CR$ . Em seguida, use o campo de direção para esboçar um retrato de fase.
- Suponha que, em algum momento, existam 1000 coelhos e 200 raposas. Desenhe a curva correspondente representando a solução para estas condições iniciais.
- Esboços de  $C$  e  $R$  como funções de  $t$ .

**Solução:**

a) O termo  $2C(1 - 0,0001C)$  introduz uma limitação ambiental, modelando a competição intraespecífica dos coelhos conforme sua população se aproxima de  $C = 10000$ , valor que representa a capacidade de suporte do ecossistema. Assim, na ausência de raposas ( $R = 0$ ), o sistema se reduz a:

$$\frac{dC}{dt} = 2C(1 - 0,0001C)$$

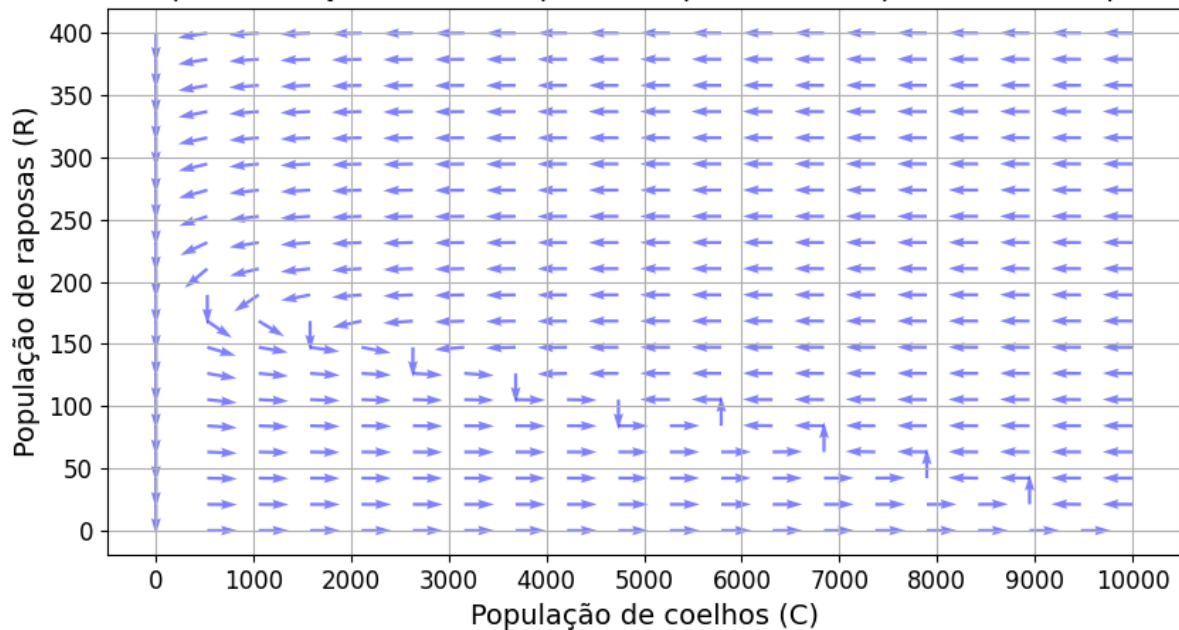
revelando que a população de coelhos cresce logisticamente, se estabilizando em  $C = 10000$  ou  $C = 0$ , valores que satisfazem  $\frac{dC}{dt} = 0$ .

b) De forma análoga ao item a do exemplo anterior, temos:

$$\frac{dR}{dC} = \frac{-0,5R + 0,0001CR}{2C(1 - 0,0001C) - 0,01CR}$$

c) Usando Python temos o seguinte campo de direções para o problema dado:

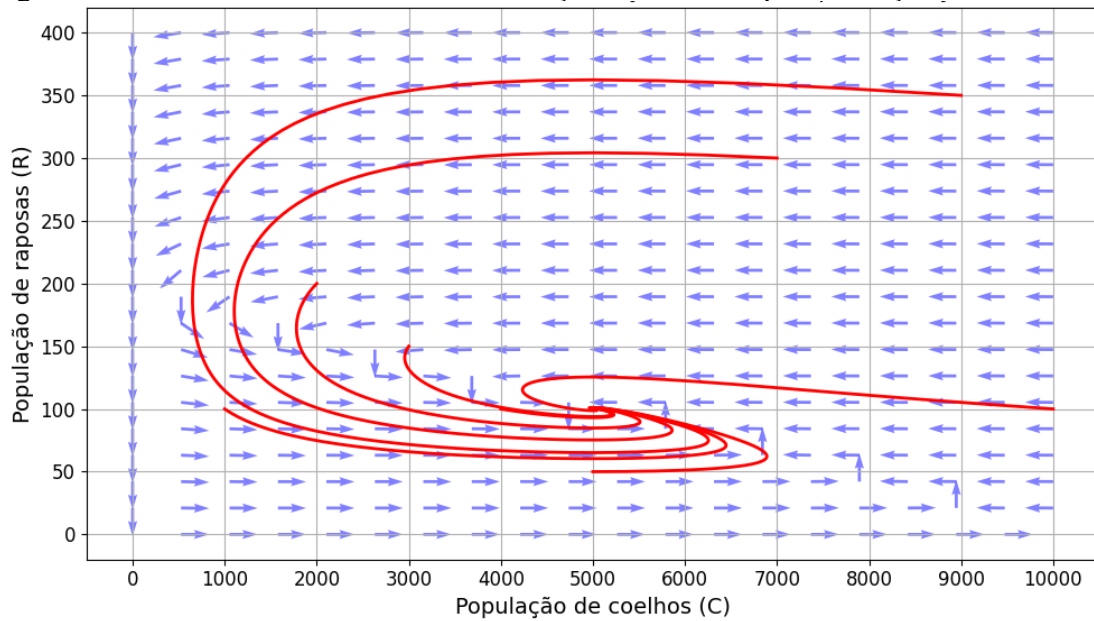
Figura 32 – Campo de direções: Modelo predador-presa com capacidade de suporte



Fonte: elaborado pelo autor.

No problema anterior tínhamos um movimento cíclico das populações de coelhos e raposas, entretanto quando inserimos capacidade de suporte no sistema predador-presa o campo de direções apresenta um comportamento em espiral, o que indica que as populações tendem a se estabilizar em determinada quantidade. No retrato de fases da Figura 33 pode-se visualizar melhor este comportamento indicando uma instabilidade em 5000 coelhos e 100 raposas.

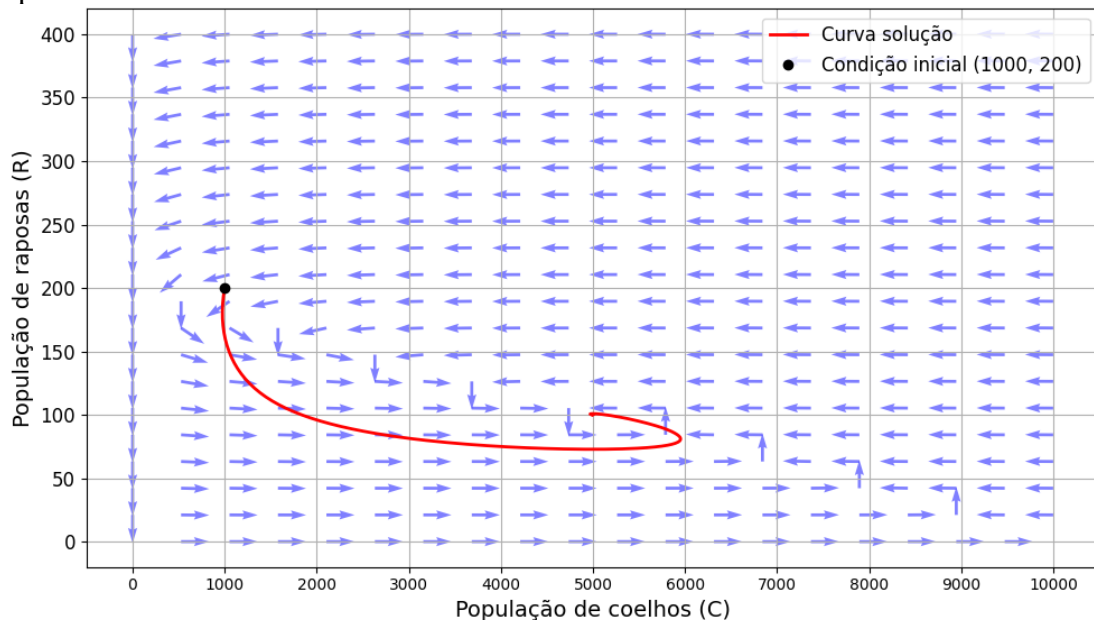
Figura 33 – Retrato de fases: Curvas de solução sobre o campo de direções



Fonte: elaborado pelo autor.

**d)** A partir das observações feitas nos itens anteriores, temos a curva de solução para o problema de valor inicial apresentada na Figura 34.

Figura 34 – Curva de solução do problema de valor inicial no plano  $CR$ , com capacidade de suporte

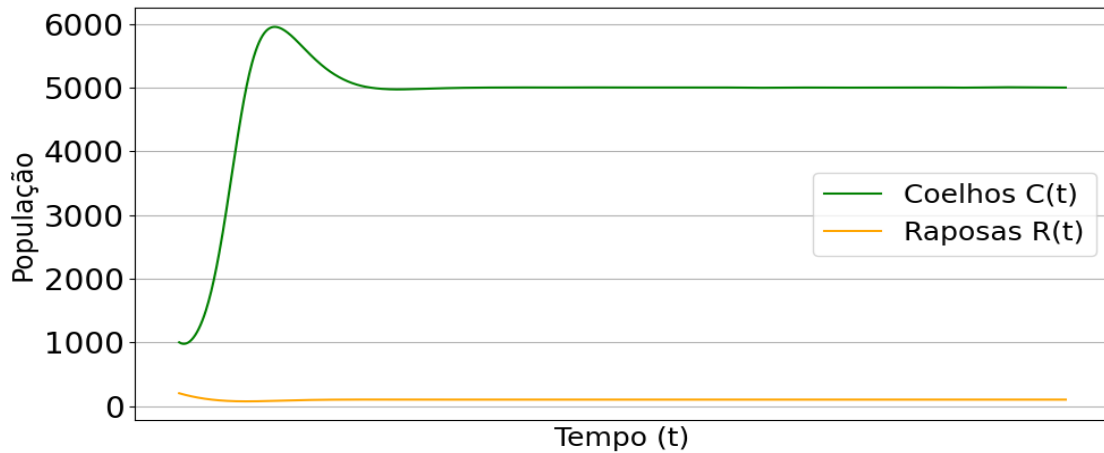


Fonte: elaborado pelo autor.

**e)** Analisando a Figura 34, observa-se que, a população de raposas, inicialmente alta, entra em declínio por falta de alimento. No entanto, a população de coelhos cresce devido à baixa densidade e ausência de competição intraespecífica significativa. À medida que os coelhos se

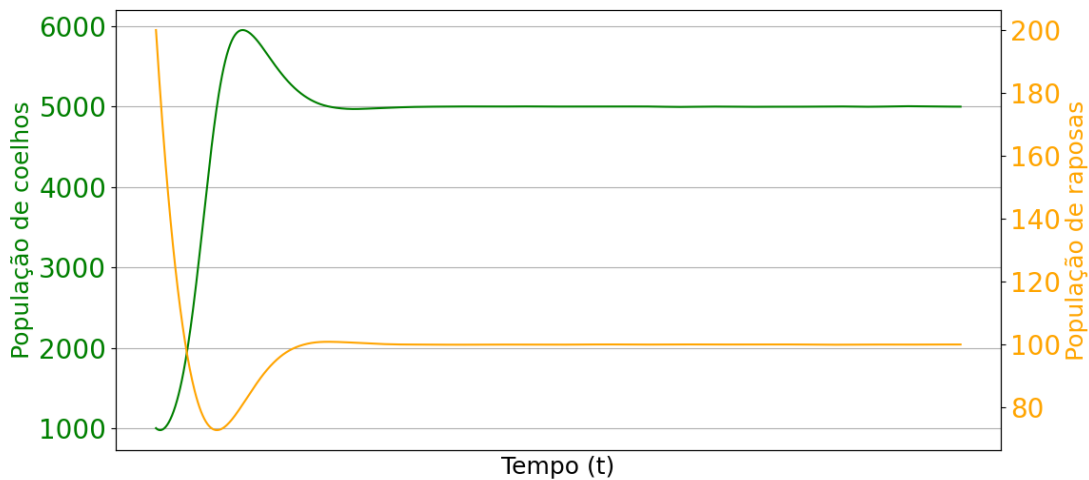
multiplicam, favorecem o crescimento posterior das raposas. O sistema exibe então uma trajetória que se aproxima de um ponto de equilíbrio em que as populações se estabilizam mutuamente. Esta descrição justifica os gráficos de  $C(t)$  e  $R(t)$  nas figuras a seguir, onde na Figura 36 temos os dois gráficos em escalas diferentes, facilitando a compreensão dos movimentos populacionais.

Figura 35 – Populações de coelhos e raposas ao longo do tempo, com capacidade de suporte



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 36 – Populações de coelhos e raposas ao longo do tempo, com capacidade de suporte e em escalas diferentes



Fonte: elaborado pelo autor.

## 4.2 Análise do plano de fases

Os planos de fases permitem analisar qualitativamente o comportamento dinâmico de sistemas de equações diferenciais, entretanto sua construção pode ser complexa sem o

auxílio de ferramentas computacionais. Neste contexto, será apresentada uma análise desses planos, visando fornecer uma visão geral e compreensão qualitativa da dinâmica de sistemas compostos por duas equações diferenciais autônomas. Inicialmente devemos definir o equilíbrio de um sistema de equações, semelhante ao que foi feito na seção 3.5.

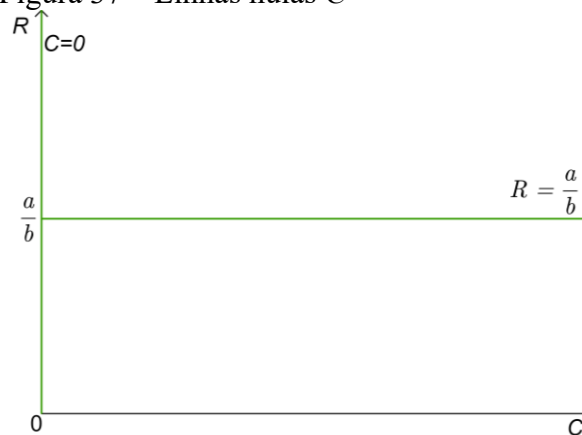
Considere o sistema de equações diferenciais autônomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Os equilíbrios são os pares  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$  tais que,  $f(x_i, y_i) = 0$  e  $g(x_i, y_i) = 0$  para  $i = 1, \dots, k$ . Ou seja, um ponto de equilíbrio ocorre quando as derivadas das funções são nulas, indicando que não há variação da variável dependente.

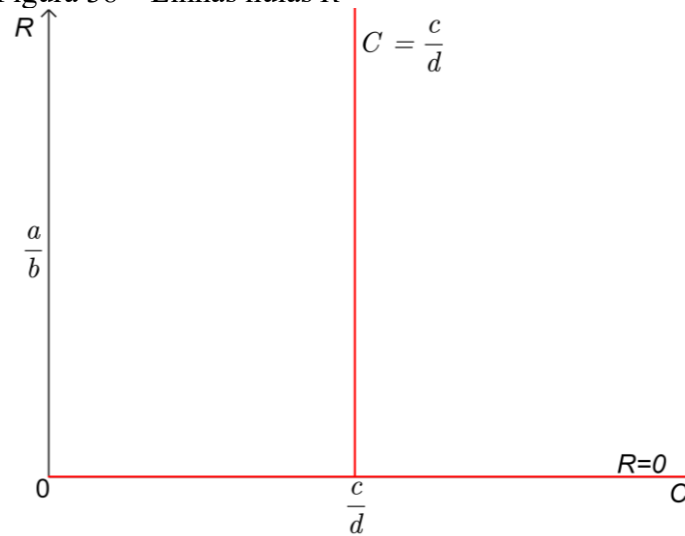
Tomando como exemplo o modelo predador-presa, equação (4.1), a população de coelhos permanece constante quando  $\frac{dC}{dt} = aC - bCR = 0$ . Fatorando essa expressão temos  $C(a - bR) = 0$ . Logo, a população de coelhos entrará em estabilidade quando  $C = 0$  ou  $R = \frac{a}{b}$ , onde a primeira igualdade representa a extinção dos coelhos e a segunda uma população de lobos que preda os coelhos tanto quanto eles nascem. Representando graficamente estas equações temos o que é chamado de linhas nulas de  $C$ , que são as curvas no plano  $CR$  que satisfazem  $\frac{dC}{dt} = 0$ .

Figura 37 – Linhas nulas  $C$



Fonte: elaborado pelo autor.

Analogamente, a população de raposas descrita por  $\frac{dR}{dt} = -cR + dCR$ , entra em estabilidade em  $R = 0$  ou  $C = \frac{c}{d}$ . Assim, temos as linhas nulas de  $R$  apresentadas na Figura 38.

Figura 38 – Linhas nulas  $R$ 

Fonte: elaborado pelo autor.

Traçando as linhas nulas de  $C$  e  $R$  simultaneamente determinamos, através da intercessão das linhas, os dois pontos de equilíbrio  $(0, 0)$  e  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  para o sistema de equações (4.1), indicando que nestes pontos as populações de presas e predadores tendem a permanecer constantes.

Figura 39 – Intercessão das linhas nulas



Fonte: elaborado pelo autor.

Com as linhas nulas traçadas podemos verificar o comportamento de  $C$  e  $R$  nas regiões do plano  $CR$  que estão entre as linhas. Tomando  $R > \frac{a}{b}$  temos que

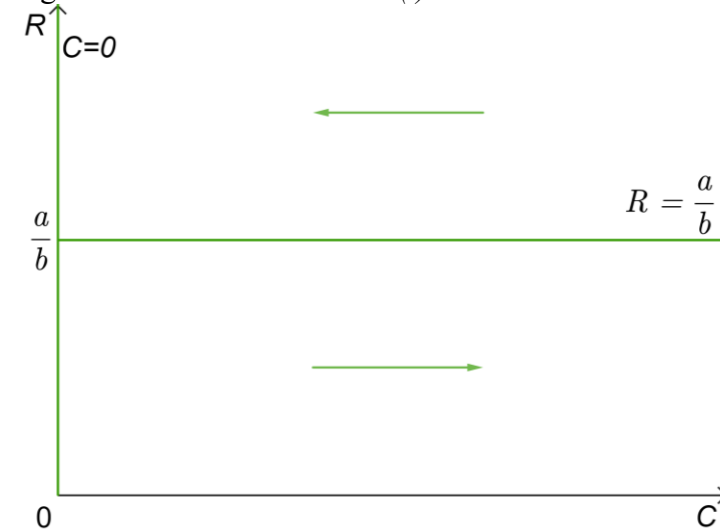
$$\frac{dC}{dt} = aC - bCR < aC - bC \cdot \frac{a}{b} = 0$$

Já para  $R < \frac{a}{b}$

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCR > aC - bC \cdot \frac{a}{b} = 0$$

Portanto, para  $R > \frac{a}{b}$ ,  $C(t)$  é decrescente e para  $R < \frac{a}{b}$ ,  $C(t)$  é crescente, conforme o indicado pelas setas a esquerda e a direita, respectivamente, na figura abaixo.

Figura 40 – Crescimento de  $C(t)$



Fonte: elaborado pelo autor.

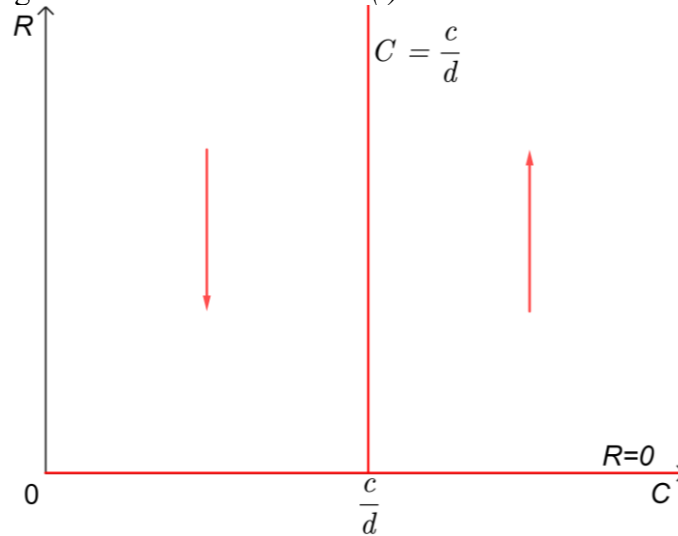
Analogamente, analisando o comportamento de  $R(t)$ , temos que para  $C > \frac{c}{d}$

$$\frac{dR}{dt} = -cR + dCR > -cR + d \frac{c}{d} R = 0$$

E para  $C < \frac{c}{d}$

$$\frac{dR}{dt} = -cR + dCR < -cR + d \frac{c}{d} R = 0$$

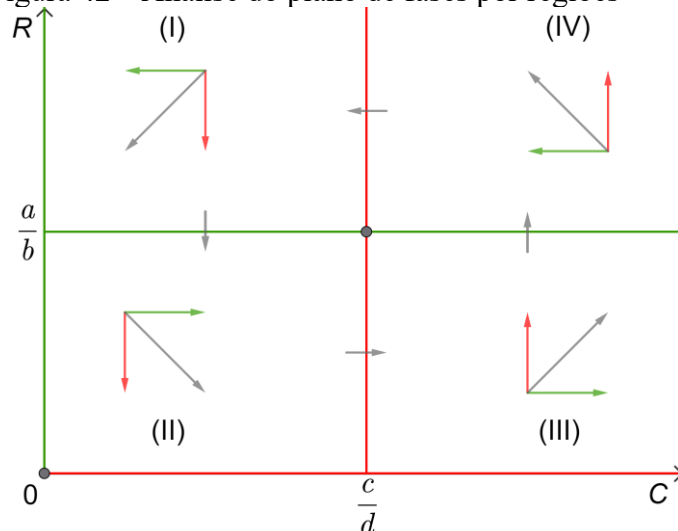
Logo, para  $C > \frac{c}{d}$ ,  $R(t)$  é crescente e para  $C < \frac{c}{d}$ ,  $R(t)$  é decrescente, conforme o indicado pelas setas para cima e para baixo, respectivamente, na Figura 41.

Figura 41 – Crescimento de  $R(t)$ 

Fonte: elaborado pelo autor.

Juntando as duas últimas figuras temos uma visão geral do comportamento das equações do sistema à medida que  $t$  aumenta, conforme é mostrado na imagem a seguir. As setas verdes, horizontais, indicam o crescimento de  $C(t)$  e as setas vermelhas, verticais, o crescimento de  $R(t)$ . Já as setas cinzas, que estão na diagonal, indicam, de maneira geral, o comportamento do plano de fases. Por exemplo, na região (I) temos  $C$  e  $R$  decrescentes, enquanto na região (IV)  $C$  é decrescente e  $R$  é crescente. Observe ainda que as setas cinza que estão na horizontal ou vertical indicam estabilidade de uma das populações.

Figura 42 – Análise do plano de fases por regiões



Fonte: elaborado pelo autor.

Para ilustra uma aplicação desse tipo de análise do plano de fases, segue um exercício apresentado por Stewart e Day (2015).

**Exemplo 4.3 – Doenças infecciosas:** As equações de **Kermack-McKendrick** são equações diferenciais de primeira ordem que descrevem um surto de doença infecciosa. Usando  $S$  e  $I$  para denotar o número de pessoas suscetíveis e infectadas em uma população, respectivamente, as equações são

$$\begin{cases} S' = -\beta SI \\ I' = \beta SI - \mu I \end{cases}$$

Onde  $\beta$  e  $\mu$  são constantes positivas que representam a taxa de transmissão e a taxa de recuperação, respectivamente.

- Forneça uma explicação biológica para cada termo das equações.
- Suponha  $\beta = 1$  e  $\mu = 5$ . Construa o plano de fase incluindo todos os nulos, equilíbrios e setas que indicam a direção do movimento no plano.
- Construa o plano de fase para valores arbitrários de  $\beta$  e  $\mu$ , incluindo todos os valores nulos, equilíbrios e setas que indicam a direção do movimento no plano.

**Solução:**

**a)** A equação  $S' = -\beta SI$  indica que a taxa de variação do número de pessoas suscetíveis  $S$  diminui proporcionalmente ao produto do número de pessoas suscetíveis e infectadas, multiplicado pela taxa de transmissão  $\beta$ . Isso significa que quanto mais pessoas infectadas houver, maior será a taxa de transmissão da doença, resultando em uma diminuição mais rápida do número de pessoas suscetíveis. Já a equação  $I' = \beta SI - \mu I$  descreve a taxa de variação do número de pessoas infectadas  $I$ . O primeiro termo  $\beta SI$  representa o aumento do número de infectados devido à transmissão da doença, enquanto o segundo termo  $-\mu I$  representa a diminuição do número de infectados devido à recuperação.

**b)** Substituído os valores dados temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} S' = -SI \\ I' = SI - 5I \end{cases}$$

Para determinar as linhas nulas, veja que  $S' = 0$  somente se  $S = 0$  ou  $I = 0$ . Observe ainda que  $S' < 0$  para todos os valores de  $S$  e  $I$  maior que zero. Já em relação à  $I'$ , temos que  $I' = 0$  ocorre quando

$$SI - 5I = 0$$

$$I(S - 5) = 0$$

Logo,  $I' = 0$  quando  $I = 0$  ou  $S = 5$ . Em relação ao sinal de  $I'$ , como no contexto não faz sentido  $I$  ou  $S$  negativos nos resta analisar dois casos com  $I > 0$ :

$$1) S < 5 \Rightarrow I(S - 5) < 0 \Rightarrow I' < 0$$

$$2) S > 5 \Rightarrow I(S - 5) > 0 \Rightarrow I' > 0$$

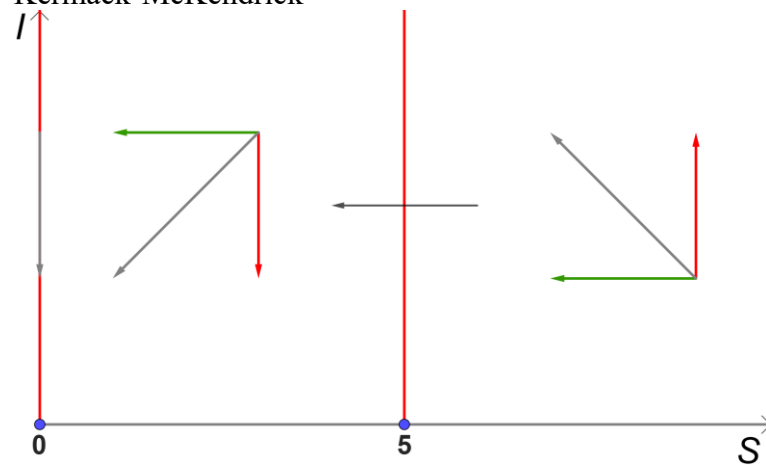
Em relação aos pontos de equilíbrio, eles satisfazem o sistema

$$\begin{cases} -SI = 0 \\ SI - 5I = 0 \end{cases}$$

Ou seja, os equilíbrios no plano  $SI$  são  $(0, 0)$  e  $(5, 0)$ .

Unindo as informações anteriores temos o plano de fases a seguir:

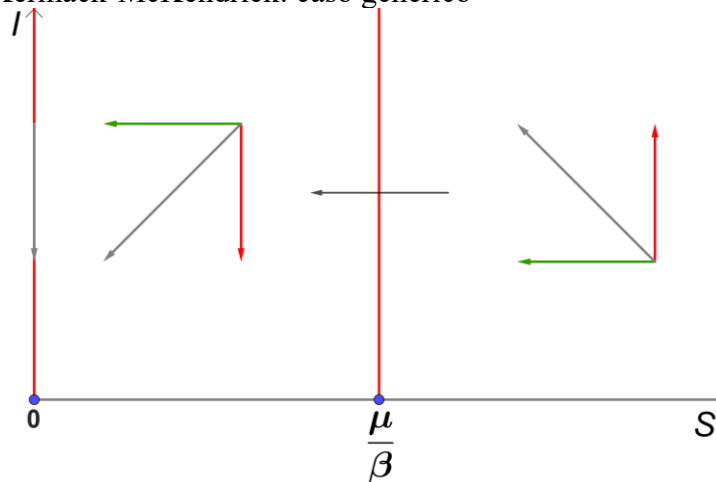
Figura 43 – Análise do plano de fases das equações de Kermack-McKendrick



Fonte: elaborado pelo autor.

c) Seguindo um raciocínio totalmente análogo temos abaixo o plano de fases para valores arbitrários de  $\beta$  e  $\mu$ .

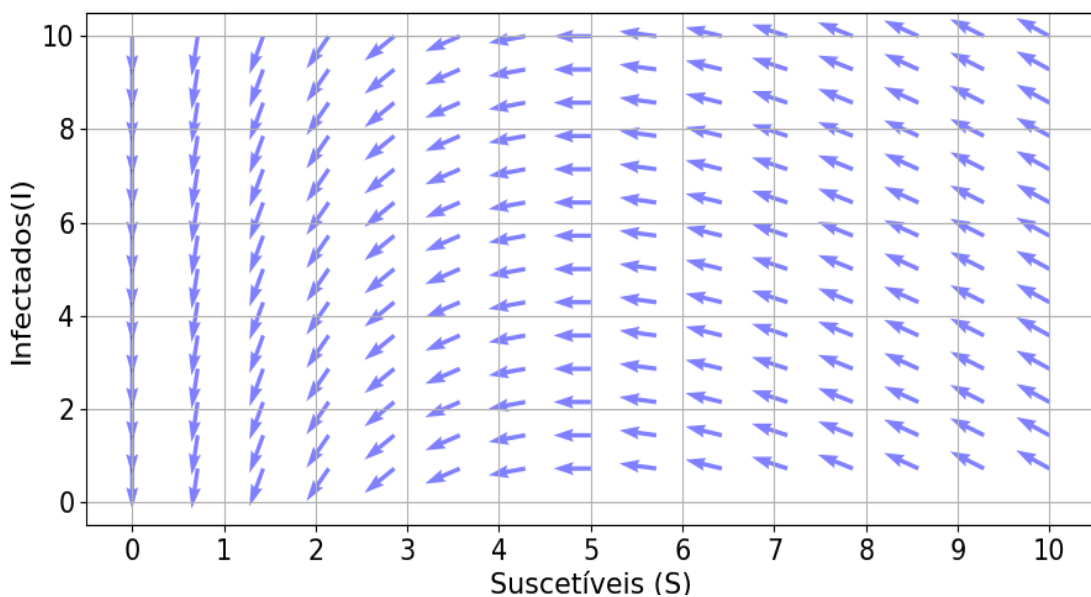
Figura 44 – Análise do plano de fases das equações de Kermack-McKendrick: caso genérico



Fonte: elaborado pelo autor.

Para efeito de comparação, a Figura 45 apresenta o plano de fases completo do sistema gerado pelas equações de Kermack-McKendrick, com os dados do item b), construída utilizando a linguagem de programação Python. As linhas de fluxo e a orientação das setas mostram como a população evolui ao longo do tempo, revelando que a infecção se espalha apenas quando a população de suscetíveis é suficientemente grande. Um dado importante é o que ocorre em  $S = 5$ , conhecido como limiar epidêmico: acima dele, a infecção cresce; abaixo dele, ela tende a desaparecer. Veja que a Figura 43 já é suficiente para esta análise.

Figura 45 – Plano de fases das equações de Kermack-McKendrick



Fonte: elaborado pelo autor.

### 4.3 Sistemas de equações diferenciais lineares

Até agora, não abordamos a solução analítica dos sistemas de equações diferenciais devido à sua complexidade e especialmente porque muitos sistemas encontrados na natureza são não lineares e difíceis ou impossíveis de resolver dessa forma. Para introduzir soluções analíticas, começaremos com sistemas lineares, uma classe especial onde as funções apresentam maior simplicidade.

De forma geral, um sistema linear de equações diferenciais ordinárias pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

onde, para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $x_j$  são funções na variável independente  $t$ ,  $a_{ij}(t)$  são os coeficientes e  $g_i(t)$  são funções de  $t$ , chamadas de funções de forçamento. Se  $a_{ij}$  e  $g_i$  são independentes do tempo, então teremos um sistema de equações diferenciais autônomas lineares de primeira ordem, que é o tipo de sistema que será estudado nesta seção, especialmente os sistemas bidimensionais.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \end{cases}$$

Utilizando notação matricial, mais comum de sistemas de equações diferenciais, temos a seguinte escrita:

$$\frac{dX}{dt} = AX + G \quad (4.3)$$

Onde  $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  e  $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$ . Se tivermos  $G = 0$  teremos o sistema homogêneo

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Sobre os equilíbrios de (4.3),  $X_i$ , temos que

$$\frac{dX}{dt} = 0 \Rightarrow AX_i + G = 0$$

logo,

$$AX_i = -G \quad (4.4)$$

Multiplicando a esquerda pela inversa de  $A$  obtemos:

$$X_i = -A^{-1}G$$

Veja ainda que, definindo  $Y = X - X_i$ , ou seja, o vetor coluna cujas entradas são  $y(t) = x(t) - x_i$  que representa o deslocamento em relação ao ponto de equilíbrio, temos que

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}(X - X_i) = \frac{dX}{dt} - \frac{dX_i}{dt}$$

Como  $X_i$  é constante (e equilíbrio do sistema), sua derivada é zero. Assim:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dX}{dt} = AX + G$$

Fazendo  $X = Y + X_i$  e substituindo na equação acima

$$\frac{dY}{dt} = A(Y + X_i) + G = AY + AX_i + G$$

Utilizando (4.4) temos que:

$$\frac{dY}{dt} = AY$$

Portanto, todo sistema não homogêneo (4.3) pode ser convertido no sistema homogêneo

$$\frac{dY}{dt} = AY$$

Onde,  $Y = X - X_i$ , ou ainda  $Y = X + A^{-1}G$ . Assim, um método de resolução para sistemas homogêneos também resolverá sistemas não homogêneos. Com esse resultado é suficiente investigar a solução de sistemas homogêneos.

#### 4.3.1 Resolução de sistemas de equações diferenciais lineares

A resolução de sistemas de equações diferenciais lineares normalmente gira em torno de um problema de valor inicial

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

onde  $X(t_0) = X_0$ . Assim, buscaremos as funções que satisfazem o sistema e a condição inicial.

**Exemplo 4.4:** Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{22}x_2 \end{cases}$$

Onde  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .

- Escreva o sistema na forma matricial;
- Resolva o sistema.

**Solução:**

a) Esse sistema pode ser escrito de forma matricial como

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = AX$$

b) As equações do sistema são desacopladas, logo podem ser resolvidas separadamente e possuem como solução

$$x_1(t) = c_1 e^{a_{11}t} \text{ e } x_2(t) = c_2 e^{a_{22}t}$$

Onde as constantes  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas a partir da condição inicial.

O **teorema** a seguir garante a **existência e unicidade** destas soluções: Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Suponha que  $a_{ij}(t)$  seja uma função contínua em um intervalo  $I$  contendo  $t_0$ . Então o problema acima tem uma única solução no intervalo acima.

A demonstração desse teorema é complexa e envolve conhecimento não abordados neste trabalho, mas pode ser encontrada para estudo em Santos, p. 673.

Um outro resultado importante é o **Princípio da Superposição** que afirma o seguinte: Se  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  são soluções do sistema homogêneo

$$\frac{dX}{dt} = AX \tag{4.5}$$

então, toda combinação linear  $X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$ , para  $\alpha$  e  $\beta$  escalares, também é uma solução.

De fato,

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}[\alpha X_1 + \beta X_2] = \frac{d}{dt}\alpha X_1 + \frac{d}{dt}\beta X_2$$

$$\frac{dX}{dt} = \alpha \frac{d}{dt}X_1 + \beta \frac{d}{dt}X_2$$

$$\frac{dX}{dt} = \alpha AX_1 + \beta AX_2$$

onde a última igualdade vem do fato de  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  serem soluções de (4.5). Daí,

$$\frac{dX}{dt} = A(\alpha X_1 + \beta X_2) = AX$$

Assim, fica demonstrado o princípio da superposição, que pode ser facilmente generalizado para  $n$  soluções do sistema.

Considere agora o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Sejam  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  soluções do sistema (sem a condição inicial). Qual condição para que existam as constantes  $c_1, \dots, c_n$  tais que  $X(t) = c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t)$  seja solução do problema de valor inicial?

Substituindo  $t = 0$  em  $X(t) = c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t)$  obtemos o sistema de equações

$$c_1X_1(0) + \dots + c_nX_n(0) = X_0$$

Fazendo  $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$  e  $M = [X_1(0) \dots X_n(0)]$  podemos reescrever a equação acima como

$$MC = X_0$$

Note que  $M$  é uma matriz quadrada, pois é formada por  $n$  vetores colunas com  $n$  coordenadas. Assim, se  $M$  é invertível, então multiplicando a equação por  $M^{-1}$ , a esquerda obtemos a solução única para  $C$ ,

$$C = M^{-1}X_0$$

Mas, uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero (HEFEZ e FERNANDES, 2022, p. 206).

Deste último resultado e do teorema da unicidade da solução do problema de valor inicial temos o seguinte **teorema**:

Dados  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  soluções do sistema  $\frac{dX}{dt} = AX$  tais que

$$\det[X_1(0) \dots c_nX_n(0)] \neq 0 \quad (4.6)$$

Para toda condição inicial  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Tem uma única solução e é da forma

$$X(t) = c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t)$$

O determinante que aparece em (4.6) é chamado de **wroskiano** de  $t = 0$ . No caso geral,  $t \in \mathbb{R}$ , temos a seguinte notação

$$W[X_1 \dots X_n](t) = \det[X_1(t) \dots X_n(t)]$$

Do que foi dito temos que a seguinte nomenclatura:

- Se  $n$  soluções  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  do sistema linear homogêneo  $\frac{dX}{dt} = AX$  são tais que  $W[X_1 \dots X_n](0) \neq 0$  dizemos que elas **são soluções fundamentais** desse sistema;
- Se  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  são soluções fundamentais do sistema  $\frac{dX}{dt} = AX$  então

$$X(t) = c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t)$$

é chamado de **solução geral**, para  $c_1, \dots, c_n$  constantes,

Voltando ao **Exemplo 4.4**: Considere o sistema de equações Exemplo 4.4, observe que as soluções encontradas

$$x_1(t) = c_1 e^{a_{11}t} \text{ e } x_2(t) = c_2 e^{a_{22}t}$$

são individualmente, soluções do sistema pois escrevendo

$$X_1(t) = c_1 e^{a_{11}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = c_2 e^{a_{22}t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e substituindo  $X_1$  no sistema, temos:

$$\frac{dX_1}{dt} = c_1 a_1 e^{a_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 e^{a_1 t} \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 \end{bmatrix} c_1 e^{a_1 t} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} c_1 e^{a_{11}t}$$

Ou seja,

$$\frac{dX_1}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} X_1$$

Para  $X_2$  temos um caso totalmente análogo. Além disso temos que

$$W[X_1 \ X_2](0) = \begin{bmatrix} c_1 e^{a_{11} \cdot 0} & 0 \\ 0 & c_2 e^{a_{22} \cdot 0} \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

logo,  $X_1$  e  $X_2$  são soluções fundamentais e a solução geral pode ser escrita como

$$X(t) = c'_1 \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} \\ 0 \end{bmatrix} + c'_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{a_{22}t} \end{bmatrix}$$

O sistema  $\frac{dX}{dt} = AX$  do Exemplo 4.4 foi facilmente resolvido devido a matriz  $A$  ser uma matriz diagonal, tornando as equações desacopladas. Assim, se podermos diagonalizar  $A$  podemos resolver qualquer sistema linear de EDO's.

Como nosso foco está em sistemas bidimensionais, suponha que existam as matrizes  $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ , com  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , tais que

$$A = PDP^{-1}$$

Utilizando esta igualdade no sistema  $\frac{dX}{dt} = AX$ , temos

$$\frac{dX}{dt} = PDP^{-1}X$$

Multiplicando a esquerda por  $P^{-1}$ , obtemos

$$P^{-1} \frac{dX}{dt} = DP^{-1}X \tag{4.7}$$

Agora, fazendo uma mudança de variável escrevendo

$$Y(t) = P^{-1}X(t) \tag{4.8}$$

A equação (4.7) pode ser escrita como

$$\frac{dY}{dt} = DY$$

que é um sistema de equações desacopladas

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

Este último sistema é equivalente ao do Exemplo 4.4, logo tem solução

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \text{ e } y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Escrito na forma matricial temos

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Veja ainda em (4.8), multiplicando por  $P$  a esquerda, temos

$$PY(t) = X(t)$$

Substituindo este resultado em (4.9) obtemos que a solução do sistema  $\frac{dX}{dt} = AX$  é

$$X(t) = P \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Como  $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$ , então

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + w_1 c_2 e^{\lambda_2 t} \\ v_2 c_1 e^{\lambda_1 t} + w_2 c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \\ X(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Assim, do último teorema apresentado esta é a solução geral do sistema, já que para as soluções

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, x_2(t) = e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

temos que

$$\det[X_1(0) \ X_2(0)] = \det(P) \neq 0$$

aonde a desigualdade vem do fato de  $P$  admitir inversa.

Portanto, se conseguirmos determinar  $P$  e  $D$ , conseguiremos resolver o sistema.

Assim, considere novamente a condição

$$A = PDP^{-1}$$

Multiplicando a direita por  $P$  obtemos

$$AP = PD$$

$$A \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$[AV \ AW] = [\lambda_1 V \ \lambda_2 W]$$

Onde  $V$  e  $W$  são respectivamente os vetores  $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ . Daí

$$AV = \lambda_1 V \text{ e } AW = \lambda_2 V$$

Nessas equações, dizemos que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são **autovalores** de  $A$  e se  $V$  e  $W$  são vetores não nulos, eles são chamados de **autovetores**.

Considerando a equação

$$AV = \lambda V$$

onde  $A$  é uma matriz quadrada,  $V$  um autovetor de  $A$  e  $\lambda$  um autovalor. Observando que  $I_n V = V$ , onde  $I_n$  é a matriz identidade, temos que

$$\begin{aligned} AV &= \lambda I_n V \\ (A - \lambda I_n)V &= \bar{0} \end{aligned}$$

onde,  $\bar{0}$  é o vetor nulo.

Veja ainda que os autovetores  $V$  são vetores não nulos, logo os autovalores são os valores de  $\lambda$ , para os quais o sistema  $(A - \lambda I_n)V = \bar{0}$  tem solução não trivial. Mas, este sistema homogêneo tem solução não trivial se, e somente se,  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ . Daí, os autovalores de  $A$  são as raízes do polinômio

$$p(t) = \det(A - tI_n)$$

chamado de polinômio característico de  $A$ .

Além disso, para cada autovalor  $\lambda$ , os autovetores associados são os vetores não nulos  $V$  que satisfazem  $(A - \lambda I_n)V = \bar{0}$ .

Com os últimos resultado e definições poderemos diagonalizar a matriz  $A$  de um sistema de equações diferenciais e sair um sistema de equações acopladas para um sistema de equações desacopladas. Os exemplos a seguir ajudam a sintetizar a teoria desenvolvida, bem compreender suas aplicações.

**Exemplo 4.5:** Resolva o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

**Solução:**

Escrevendo na forma matricial  $\frac{dX}{dt} = AX$  temos

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Devemos diagonalizar a matriz  $A$  e para isso devemos encontrar seus autovalores e autovetores.

Iniciamos determinando as raízes do polinômio característico

$$p(t) = \det(A - tI_n) = \det \begin{bmatrix} 1-t & -1 \\ 2 & 4-t \end{bmatrix} = 4 - t - 4t + t^2 + 2$$

$$p(t) = t^2 - 5t + 6$$

Como os autovalores são as raízes do polinômio característico, temos  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 3$ .

Para determinar os autovetores associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  devemos resolver o sistema  $(A - \lambda I_n)V = \bar{0}$ .

Para  $\lambda_1 = 2$  temos:

$$(A - 2I_n)V = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -v_1 - v_2 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases}$$

Logo,  $V = \{(\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ . Fazendo  $\alpha = 1$  obtemos  $V = (1, -1)$

Para  $\lambda_2 = 3$  temos:

$$(A - 3I_n)W = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 - v_2 = 0 \\ 2v_1 + v_2 = 0 \end{cases}$$

Logo,  $W = \{(\alpha, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ . Fazendo  $\alpha = 1$  obtemos  $W = (1, -2)$

Assim, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e as matrizes

$$P = [V \ W] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}$$

Portanto, de (4.10) a solução geral do sistema é

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 4.6 – Dinâmica metapopulacional:** Uma população de papagaios é dividida em duas ilhas, A e B. A população na ilha A se reproduz a uma taxa per capita de 3, enquanto a da ilha B se reproduz a uma taxa per capita de 1 (onde o tempo é medido em anos). A taxa de movimento per capita da ilha A para B é 4, e da ilha B para A é 3.

- Utilizando  $x_A(t)$  e  $x_B(t)$  para as populações de papagaios nas ilhas A e B, respectivamente, no tempo  $t$  (em anos), escreva um sistema de duas equações diferenciais lineares que descreva os dois trechos;
- Encontre a solução geral do sistema;

c) Determine a solução para o problema de valor inicial  $x_A(0) = 150$  e  $x_B(0) = 80$ .

**Solução:**

a) Para a população da ilha A os indivíduos se reproduzem a uma taxa per capita de 3 o que gera uma um crescimento populacional de  $3x_A$ , ao mesmo tempo existe uma migração anual de proporcional a 4, o que reduz a população em  $4x_A$ . Por fim, existe uma migração da ilha B para ilha A à uma taxa per capita de 3 em relação a população de B, o que gera um a acréscimo na população da ilha A de  $3x_B$ . Assim, a variação da população de papagaios da ilha A é dada por

$$\frac{dx_A}{dt} = 3x_A - 4x_A + 3x_B$$

$$\frac{dx_A}{dt} = -x_A + 3x_B$$

Analogamente a população na ilha B é dada por

$$\frac{dx_B}{dt} = x_B - 3x_B + 4x_A$$

$$\frac{dx_B}{dt} = 4x_A - 2x_B$$

Assim temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_A}{dt} = -x_A + 3x_B \\ \frac{dx_B}{dt} = 4x_A - 2x_B \end{cases}$$

Na forma matricial temos  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ . Portanto,

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

b) Para a solução geral devemos determinar os autovalores e os autovetores da matriz  $A$ .

Tomando o polinômio característico temos

$$p(t) = \det \begin{bmatrix} -1-t & 3 \\ 4 & -2-t \end{bmatrix} = 2 + t + 2t + t^2 - 12 = t^2 + 3t - 10$$

Calculando as raízes do polinômio obtemos os autovalores  $\lambda_1 = -5$  e  $\lambda_2 = 2$ .

Para  $\lambda_1 = -5$  temos:

$$(A + 5I_n)V = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4v_1 + 3v_2 = 0 \\ 4v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases}$$

Logo,  $V = \left\{ \left( \alpha, -\frac{4}{3}\alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ . Fazendo  $\alpha = 3$  obtemos  $V = (3, -4)$

Para  $\lambda_2 = 2$  temos:

$$(A - 1I_n)W = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3v_1 + 3v_2 = 0 \\ 4v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases}$$

Logo,  $W = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ . Fazendo  $\alpha = 1$  obtemos  $W = (1, 1)$ . Assim, para

$$P = [V \ W] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

temos

$$A = PDP^{-1}$$

Portanto, de (4.10) a solução geral do sistema é

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} x_A(t) \\ x_B(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-5t} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$x_A(t) = 3c_1 e^{-5t} + c_2 e^{2t} \text{ e } x_B(t) = -4c_1 e^{-5t} + c_2 e^{2t}$$

c) Fazendo  $t = 0$  em cada uma das equações acima obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_A(0) = 3c_1 + c_2 = 150 \\ x_B(0) = -4c_1 + c_2 = 80 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$7c_1 = 70$$

$$c_1 = 10$$

Utilizando esse resultado em uma das equações do sistema encontramos

$$c_2 = 120$$

Portanto, a solução para o problema de valor inicial é

$$x_A(t) = 30e^{-5t} + 120e^{2t} \text{ e } x_B(t) = -40e^{-5t} + 120e^{2t}$$

O exemplo a seguir é uma adaptação de um exercício de Stewart e Day (2015) e apresenta a aplicação e resolução de sistemas de equações diferenciais lineares não homogêneas.

**Exemplo 4.7 - Tratamento do câncer de próstata** – Durante o tratamento de câncer de próstata, algumas células tumorais tornam-se resistentes à medicação através de uma variedade de alterações bioquímicas. Algumas dessas mudanças são reversíveis e outras são irreversíveis. Usando  $x_1$  e  $x_2$  para denotar as frações de células sensíveis e irreversivelmente resistentes ao tratamento respectivamente, um modelo simples para sua dinâmica durante o tratamento é

$$\begin{cases} x_1' = -4x_1 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + d \end{cases}$$

- Use uma mudança de variável para reduzir este sistema a um sistema homogêneo de equações diferenciais lineares.
- Encontre a solução geral para o sistema.

- c) Suponha que, no início do tratamento, todas as células sejam sensíveis, isto é,  $x_1(0) = 1$  e  $x_2(0) = 0$ . Qual é a solução para este problema de valor inicial?
- d) Qual é a função que especifica a fração de células que são irreversivelmente resistentes em função do tempo?
- e) Quanto tempo após o início do tratamento 50% das células estarão irreversivelmente resistentes? (Suponha que  $d > 1$ .)

**Solução:**

a) Como visto no início da seção 4.3 podemos transformar um sistema não homogêneo em um sistema homogêneo fazendo a mudança de variável  $Y = X - X_i$ , onde  $X_i$  é o equilíbrio do sistema. Para determinar os equilíbrios do sistema fazemos

$$\begin{cases} x_1' = -4x_1 = 0 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + d = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação temos que  $x_1 = 0$ . Usando esse resultado na segunda equação obtemos que  $x_2 = \frac{d}{2}$ . Logo,

$$X_i = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 2 \end{bmatrix}$$

Assim, definimos  $Y = X - X_i$ , ou ainda  $X = Y + X_i$  temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 2 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$x_1 = y_1 \text{ e } x_2 = y_2 + \frac{d}{2}$$

Substituindo estas igualdades no sistema em questão obtemos o seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 \\ y_2' = y_1 - 2\left(y_2 + \frac{d}{2}\right) + d \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

b) Escrevendo o sistema na forma matricial temos

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

A matriz  $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  tem como polinômio característico

$$p(t) = \det \begin{bmatrix} -4 - t & 0 \\ 1 & -2 - t \end{bmatrix} = t^2 + 6t + 8$$

Logo, os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = -4$  e  $\lambda_2 = -2$ .

Para  $\lambda_1 = -4$  os autovetores  $V$  são tais que

$$(A + 4I_2)V = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases}$$

Logo,  $V = \left\{ \left( \alpha, -\frac{\alpha}{2} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ . Fazendo  $\alpha = 2$  obtemos  $V = (2, -1)$ .

Para  $\lambda_2 = -2$  os autovetores  $W$  são tais que

$$(A + 2I_2)W = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases}$$

Logo,  $W = \{(0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ . Fazendo  $\alpha = 1$  obtemos  $W = (0, 1)$

Portanto, a solução geral do sistema é

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-4t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou ainda

$$\begin{cases} y_1(t) = 2c_1 e^{-4t} \\ y_2(t) = c_2 e^{-2t} - c_1 e^{-4t} \end{cases}$$

Voltando para as funções  $x_1$  e  $x_2$  temos

$$\begin{cases} x_1(t) = 2c_1 e^{-4t} \\ x_2(t) = c_2 e^{-2t} - c_1 e^{-4t} + \frac{d}{2} \end{cases}$$

c) Das condições do problema de valor inicial temos

$$\begin{cases} x_1(0) = 2c_1 = 1 \\ x_2(0) = c_2 - c_1 + \frac{d}{2} = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação, temos que

$$c_1 = \frac{1}{2}$$

Substituindo na segunda equação, temos

$$c_2 - \frac{1}{2} + \frac{d}{2} = 0$$

$$c_2 = \frac{1-d}{2}$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-4t} \\ x_2(t) = \frac{1-d}{2} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-4t} + \frac{d}{2} \end{cases}$$

d) A função que especifica a fração de células que são irreversivelmente resistentes em função do tempo é a função  $x_2(t) = \frac{1-d}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{d}{2}$ .

e) Queremos encontrar o tempo  $t$  para o qual  $y_2(t) = \frac{1}{2}$ . Ou seja,

$$\frac{1-d}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{d}{2} = \frac{1}{2}$$

Multiplicando toda a equação por 2 obtemos

$$(1-d)e^{-2t} - e^{-4t} + d = 1$$

Reorganizando a equação temos que

$$e^{-4t} - (1-d)e^{-2t} + (1-d) = 0$$

Fazendo  $u = e^{-2t}$  e substituindo na equação acima obtemos a equação quadrática

$$u^2 - (1-d)u + (1-d) = 0$$

Resolvendo esta equação temos que

$$u = \frac{(1-d) \pm \sqrt{(1-d)^2 - 4(1-d)}}{2}$$

$$u = \frac{(1-d) \pm \sqrt{(1-d)^2 - 4(1-d)}}{2}$$

Pondo  $(1-d)$  em evidência

$$u = \frac{(1-d) \pm \sqrt{(1-d)(-3-d)}}{2}$$

$$u = \frac{(1-d) \pm \sqrt{(d-1)(d+3)}}{2}$$

Como  $u = e^{-2t}$ , seu valor deve ser positivo. Dado que  $d > 1$ , temos  $(1-d) < 0$ . Assim, temos que

$$u = \frac{(1-d) + \sqrt{(d-1)(d+3)}}{2}$$

Desfazendo a substituição  $u = e^{-2t}$  e aplicando logaritmo obtemos

$$e^{-2t} = \frac{(1-d) + \sqrt{(d-1)(d+3)}}{2}$$

$$-2t = \ln \frac{(1-d) + \sqrt{(d-1)(d+3)}}{2}$$

Portanto,

$$t = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{(1-d) + \sqrt{(d-1)(d+3)}}{2} \right)$$

## 5 PROPOSTA METODOLÓGICA NO ENSINO MÉDIO

A aplicação de equações diferenciais em contextos reais oferece uma oportunidade única para engajar estudantes do Ensino Médio no pensamento matemático avançado, conectando abstrações teóricas a fenômenos tangíveis. Este capítulo apresenta três sequências didáticas interdisciplinares, elaboradas para a partir de temas centrais deste trabalho — crescimento populacional, administração de medicamentos e modelo predador-presa — de forma acessível e alinhada à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e nos princípios de interdisciplinaridade e aprendizagem significativa discutidos no Capítulo 2.

As sequências didáticas têm como pré-requisito, para os estudantes, os conhecimentos sobre funções logarítmicas e exponenciais, exceto a sequência 3, em que conhecimentos sobre funções afim e quadráticas já são suficientes. Cada sequência foi desenhada para:

- contextualizar conceitos matemáticos (como funções exponenciais, logísticas e sistemas de equações) em problemas das Ciências da Vida;
- Promover habilidades críticas, incluindo análise de dados, modelagem computacional (com GeoGebra) e trabalho em equipe;
- Integrar conhecimentos de Biologia, Saúde e Meio Ambiente, reforçando a interdisciplinaridade prevista na BNCC.

Os planos de aula detalhados a seguir incluem: objetivos, durações, materiais e avaliações, com adaptações para diferentes realidades escolares (como falta de recursos tecnológicos). Esta proposta concretiza o potencial da modelagem matemática como ferramenta pedagógica, demonstrando como equações diferenciais podem ser ensinadas de forma dinâmica, relevante e conectada aos desafios do século XXI.

### 5.1 Sequência didática 1: Concentração de medicamentos na corrente sanguínea

**Duração:** 100 minutos.

#### **Objetivos:**

- Compreender como a concentração de medicamentos no sangue varia com o tempo usando modelos matemáticos;
- Compreender o conceito de taxa de variação (derivada);

- Relacionar conceitos matemáticos (funções exponenciais, meia-vida) com situações reais da saúde;
- Estabelecer modelo exponencial para descrever situações biológicas.

### **Competências da BNCC:**

- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
- (EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

### **Materiais:**

- Computadores/tablets com acesso ao Geogebra ou planilhas eletrônicas;
- Material impresso com o roteiro das atividades;
- Pincel, apagador e quadro branco (para o professor)

### **Desenvolvimento da Aula:**

Discussão inicial (15 minutos):

- “Como os médicos calculam a dose de um remédio?”
- “Como o nosso corpo absorve os medicamentos?”
- Explicar que normalmente os medicamentos são metabolizados a uma taxa proporcional a concentração atual existente na corrente sanguínea (ver Exemplo 3.3).

Problemática (50 minutos): Distribuição ou apresentação no quadro do roteiro de atividades a seguir, com posterior apresentação das soluções.

- 1) Suponha que o corpo humano consiga, a cada hora, metabolizar 10% do medicamento A, que esteja na corrente sanguínea, a cada hora. Se  $C(t)$  representa a concentração do

medicamento na corrente sanguínea, em função do tempo  $t$ . Qual a expressão representa a variação da concentração do medicamento na corrente sanguínea?

Solução e comentário: Este exercício pode ser utilizado para se definir a derivada como taxa de variação, retomando o conceito de taxa de variação no estudo de função afim  $f(x) = ax + b$ , que relaciona este conceito com o coeficiente angular  $a$ . A notação

$$\frac{dC}{dt} = -0,1C$$

Pode ser apresentada para indicar que a cada hora a concentração do medicamento diminui em 10% (0,1). Formalizando,

$$\frac{dy}{dx}$$

É a derivada de  $y$  no ponto  $x$  que representa o quanto  $y$  está variando em  $x$ . Temos ainda que

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

É uma equação diferencial, que nos dá a forma como  $y$  varia, mesmo sem saber a lei de formação da função  $y(x)$ .

- 2) Sabendo que um paciente recebeu o medicamento A e está com uma concentração inicial de 10 mg/ml, construa uma tabela com a concentração do medicamento na corrente sanguínea nas próximas 24 horas (utilizando planilha eletrônica, preferencialmente no Geogebra). Qual a meia vida do medicamento?

Solução e comentário: Os estudantes podem construir a tabela de dados utilizando a planilha de sua preferência, mas utilizar o Geogebra poderá facilitar o próximo exercício. O recurso de planilhas ser acessado na versão online do Geogebra acessando o menu lateral esquerdo, na opção “Planilhas de cálculos”, conforma a imagem a seguir.

Figura 46 – Planilha de Cálculos no Geogebra



Fonte: GeoGebra (2025).

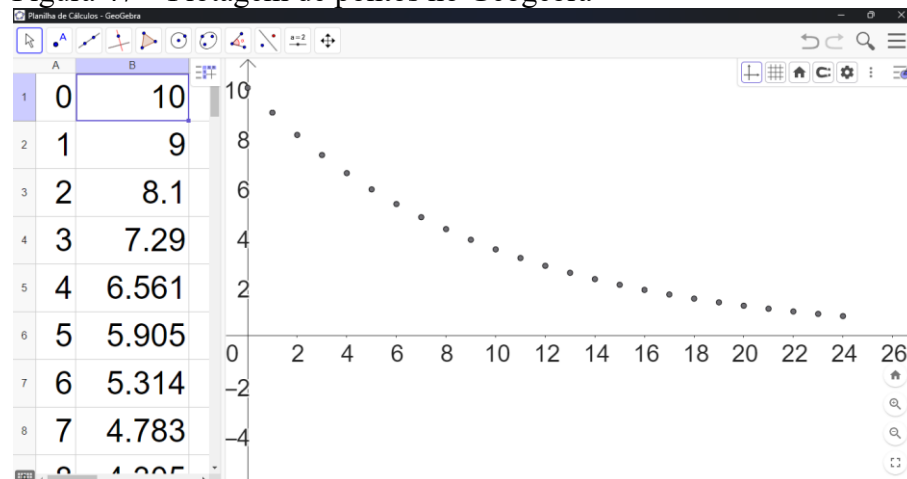
Já para versões instaladas em computadores, o recurso pode ser acessado pelo menu lateral direito, em “Disposições” e por fim, em “Planilha de Cálculos”.

Com a construção da planilha os estudantes devem perceber que a meia vida do medicamento se dá entre 6 e 7 horas.

3) No Geogebra, plote os pontos do exercício 2.

Solução e comentário: Plotando os pontos os estudantes poderão perceber o decaimento exponencial da concentração do medicamento na corrente sanguínea. A Figura 47 mostra a disposição dos pontos

Figura 47 – Plotagem de pontos no Geogebra



Fonte: elaborado pelo autor.

4) Determine uma expressão para  $C(t)$  e calcule a meia vida utilizando essa expressão.

Solução e comentário: Com a concentração do medicamento reduz em 10% por hora, a cada hora restará 90% da concentração na hora anterior. Assim, os estudantes devem encontrar a expressão

$$C(t) = 10 \cdot 0,9^t \quad (5.1)$$

para a lei de formação da função que descreve a concentração do medicamento.

Calculando a meia vida temos:

$$10 \cdot 0,9^t = 5$$

$$(0,9)^t = 0,5$$

Aplicando logaritmo

$$\log 0,9^t = \log 0,5$$

$$t \cdot \log 0,9 = \log 0,5$$

$$t = \frac{\log 0,5}{\log 0,9} \approx 6,6$$

Encerramento da aula (35 minutos):

- Retomar a pergunta inicial, explicando que no cálculo da dose de um medicamento o médico leva em conta uma concentração do medicamento na corrente sanguínea que não traga efeitos colaterais graves. E para saber a frequência com que o medicamento será administrado, é considerada a variação da taxa de concentração do medicamento à corrente sanguínea no decorrer do tempo;
- Explicar que em uma situação real um medicamento não é absorvido pelo organismo em intervalos regulares de tempo. A metabolização ocorre continuamente. Assim, a expressão determinada (5.1), apesar de descrever bem a problemática, comete erros em uma situação real;
- Apresentar o modelo

$$f(t) = f_0 e^{rt}$$

para variação exponencial de uma quantidade  $f$ . Em que  $f_0$  é a quantidade inicial,  $t = 0$ , e  $r$  é a taxa de variação por unidade;

- Na problemática em estudo, temos  $r = -0,1$ . Assim,

$$C(t) = 10 \cdot e^{-0,1t}$$

- Plotar o gráfico da equação acima e compará-lo com o gráfico de (5.1);

- Devolutiva sobre a avaliação da aula.

**Avaliação da Aprendizagem:**

- Participação nas discussões;
- Manuseio das ferramentas digitais;
- Desempenho na resolução das questões.

**Orientações gerais:**

- No caso da indisponibilidade de computadores/tablets as atividades podem ser adaptadas utilizando calculadora científica e malha quadriculada;
- A interdisciplinaridade com a biologia deve ser reforçada;
- A temática sobre automedicação pode ser abordada, comentando sobre os riscos de uma alta dosagem de medicamentos.

**5.2 Sequência didática 2: Crescimento populacional**

**Duração:** 150 minutos

**Objetivos:**

- Compreender os modelos matemáticos de crescimento populacional (exponencial e logístico).
- Analisar fatores que limitam o crescimento de populações (recursos, predação).
- Compreender e aplicar o conceito de taxa de variação (derivada);
- Relacionar conceitos matemáticos com situações reais envolvendo crescimento populacional;
- Estabelecer equação diferencial logística para o crescimento populacional;

**Competências da BNCC:**

- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
- (EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
- (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

**Materiais:**

- Computadores/tablets com acesso ao Geogebra ou planilhas eletrônicas;
- Projetor ou TV para o professor;
- Material impresso com o roteiro das atividades;
- Pincel, apagador e quadro branco (para o professor)

**Desenvolvimento da Aula:**

Discussão inicial (10 minutos):

- “A população mundial pode crescer indefinidamente?”;
- “Por que algumas populações crescem rapidamente?”

Problemática (100 minutos): Distribuição ou apresentação no quadro do roteiro de atividades a seguir, com posterior apresentação das soluções.

Considere o crescimento de uma população de leveduras, organismos unicelulares usados na produção de álcool e panificação. Pesquisadores coletaram dados da Tabela 3, medindo o tamanho da população de leveduras cultivada em cultura líquida (indivíduos por ml de cultura) em diferentes momentos (horas).

Tabela 3 – População leveduras no decorrer do tempo

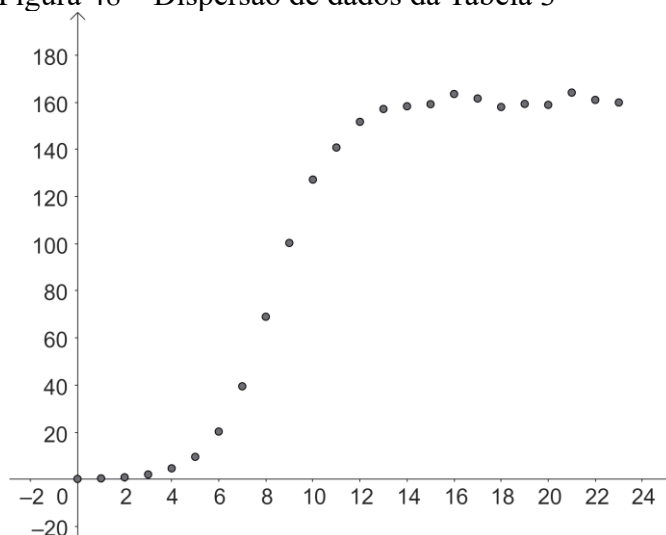
Tempo (h)	Tamanho da Pop. ( $\times 10^6/mL$ )	Tempo (h)	Tamanho da Pop. ( $\times 10^6/mL$ )
0	0,20	12	151,70
1	0,44	13	157,15
2	0,90	14	158,3
3	2,10	15	159,20
4	4,70	16	163,50
5	9,58	17	161,60
6	20,30	18	158,00
7	39,50	19	159,30
8	69,00	20	158,90
9	100,32	21	164,10
10	127,20	22	161,00
11	140,8	23	159,90

Fonte: elaborado pelo autor.

1. Utilizando o Geogebra, plote os pontos  $(x, y) = (t, p)$ , onde  $t$  representa o tempo, em horas, e  $p$  a população de leveduras.

Solução e comentário: A seguir temos a disposição dos pontos com um ajuste na proporção dos eixos  $x$  e  $y$  de 1 para 10 (Esse ajuste pode feito clicando com o botão direito do *mouse* em um dos eixos e selecionando a opção “EixoX : EixoY”).

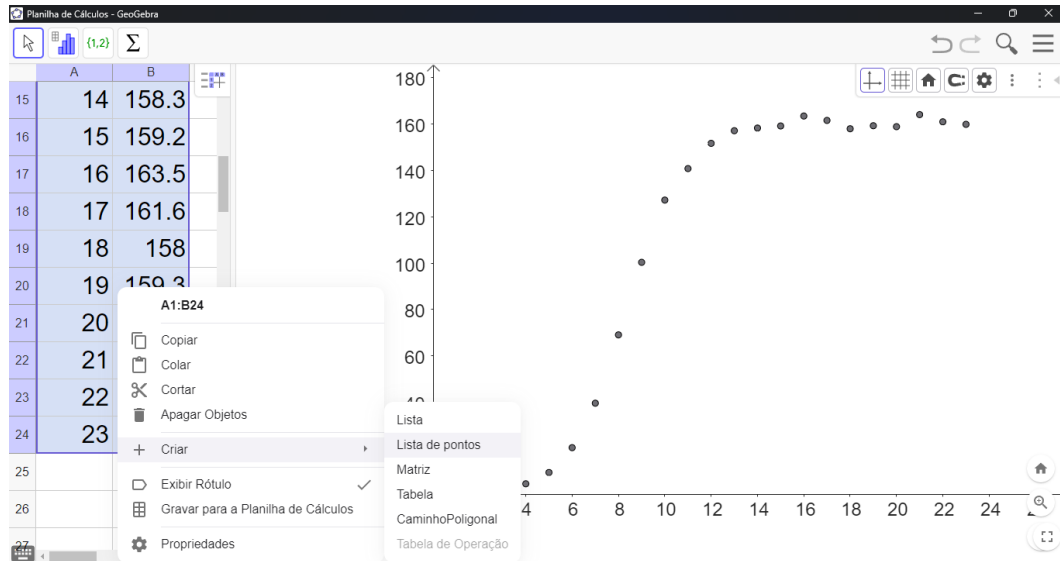
Figura 48 – Dispersão de dados da Tabela 3



Fonte: elaborado pelo autor.

Para inserir os pontos na janela de visualização os estudantes podem utilizar a Planilha de Cálculos, selecionar os valores e clicando com o botão direito do *mouse* selecionar a opção “criar” “lista de pontos”, conforme a imagem a seguir.

Figura 49 – Lista de pontos no Geogebra



Fonte: elaborado pelo autor.

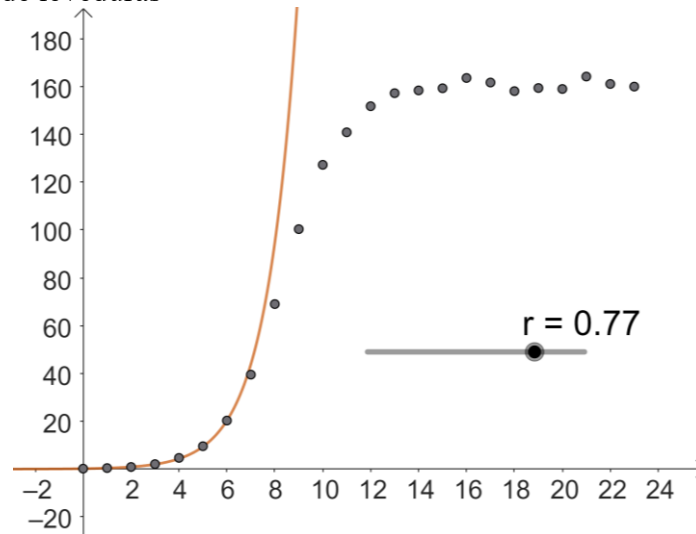
2. Utilizando “Controles Deslizantes” estabeleça uma função exponencial na forma

$$p(t) = p_0 e^{rt}$$

que represente o crescimento da população de leveduras nas 6 primeiras horas, onde  $p_0$  é a população quando  $t = 0$ .

Solução e comentário: A expressão desta questão foi apresentada nas seções 2.1 e 5.1. Inicialmente os estudantes devem criar o Controle Deslizante através da barra de ferramentas na faixa superior do *software*. Logo após, inserir a expressão “ $y = 0.2 * e^{rx}$ ” na caixa de entrada. Ajustando o valor de  $r$  percebe-se que ele será um valor entre 0 e 1. Após alguns ajustes vemos que o valor  $r = 0,77$  faz com que a  $p(t) = 0,2e^{0,77t}$  represente bem a população de leveduras nas primeiras 6 horas, como pode ser visto na figura a seguir.

Figura 50 – Representa exponencial da população inicial de leveduras



Fonte: elaborado pelo autor.

Observe que a partir da sétima hora, o gráfico de  $p$  não contém os demais pontos. Isso ocorre porque há desaceleração no crescimento da população de leveduras. Na função  $p$  a variação população se dá por  $\frac{dp}{dt} = rp$ . Como podemos escrever

$$r = \frac{\frac{dp}{dt}}{y}$$

Temos que  $r$  é a taxa de variação per capita da população de leveduras, como foi exposto na seção 2.1. A taxa de variação em um ponto  $y_i$  pode ser aproximada por

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p_{i+1} - p_i}{h}$$

Onde  $h$  é o tamanho do passo dado em  $t$ . Esse método para o cálculo da taxa de variação é chamado de “diferença atrasada” e por sua facilidade utilizaremos ele em vez da fórmula de diferença centrada, apresentada na seção 2.1. Se tomarmos  $h = 1$ , temos que a taxa de variação percepta é dada por

$$R = \frac{p_{i+1} + p_i}{p_i}$$

3. Preencha a tabela a seguir com o valor de  $R$ .

Tabela 4 - População de leveduras e sua taxa de crescimento per capita

Tamanho da Pop. ( $\times 10^6/mL$ )	$R = \frac{p_{i+1} + p_i}{p_i}$	Tamanho da Pop. ( $\times 10^6/mL$ )	$R = \frac{p_{i+1} + p_i}{p_i}$
0,20	1,2	140,8	0,077
0,44	1,045	151,7	0,036
0,90	1,333	157,15	0,007
2,10	1,238	158,3	0,006
4,70	1,038	159,2	0,027
9,58	1,119	163,5	-0,012
20,30	0,946	161,6	-0,022
39,50	0,747	158	0,008
69,00	0,454	159,3	-0,003
100,32	0,268	158,9	0,033
127,20	0,107	164,1	-

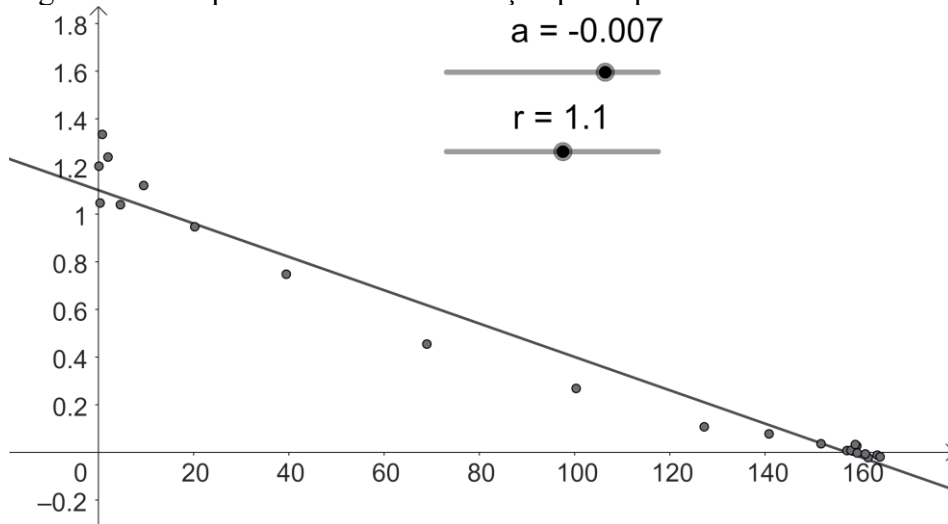
Fonte: elaborado pelo autor.

Solução e comentários: A tabela acima já está com os valores de  $R$ . Os estudantes podem realizar os cálculos facilmente utilizando planilhas eletrônicas.

4. Esboce no Geogebra os pontos  $(x, y) = (p, R)$ . Em seguida esboce uma função afim que se aproxime da relação entre  $p$  e  $R$ .

Solução e comentário: Após inserir os pontos ajustar a proporção dos eixos, pode-se criar dois controles deslizantes,  $a$  e  $r$ , e inserir a função " $y = ax + r$ ". Após alguns ajustes percebe-se que o valor de  $0 < r < 2$  e que  $a$  é negativo com valor absoluto pequeno. Veja que a reta  $y = 1,1 - 0,007x$  se aproxima bem dos pontos plotados.

Figura 51 – Dispersão da taxa de variação per capita



Fonte: elaborado pelo autor.

5. Qual expressão para a taxa de variação da população de leveduras?

Solução e comentários: Com o resultado do item anterior, obtemos que a variação da população de leveduras é dada por:

$$\frac{dp}{dt} = (1,1 - 0,007p)p \quad (5.2)$$

6. Para qual valor de  $p$  a população para de crescer?

Solução e comentários: Se a população não cresce, então sua variação é zero. Logo

$$\frac{dp}{dt} = (1,1 - 0,007p)p = 0$$

O que implica em  $p = 0$ , ou

$$1,1 - 0,007p = 0$$

$$p = \frac{1,1}{0,007} \approx 157,14$$

Assim, a população entra em equilíbrio em 0 ou 157 140 000. Como próximo de zero a população é crescente, se afastando desse valor dizemos que zero é instável. Já para  $p = 157,14$ , dizemos que é estável, pois a população fica oscilando próximo desse valor, o pode ser visualizado na Figura 48.

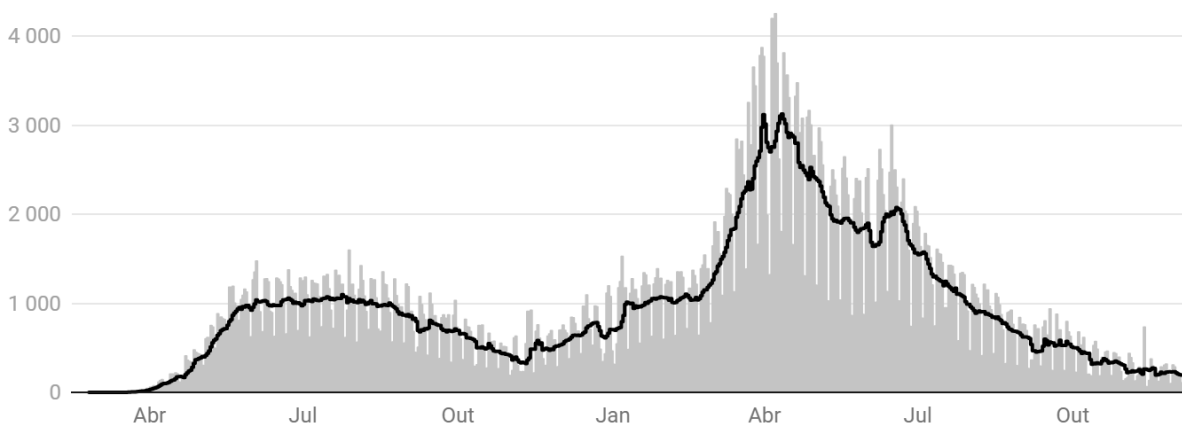
Encerramento da aula (40 min):

- Reorganizar a equação (5.2), para obter a expressão  $\frac{dp}{dt} = 1,1p(1 - \frac{p}{157,14})$ ;
- Explicar que o valor de  $p = 157,14$  representa a capacidade de suporte do ambiente, o que limita o crescimento da população, devido à ausência de recurso ou até mesmo de espaço físico, definido o crescimento logístico;
- Generalizar a equação diferencial logística  $\frac{dp}{dt} = rp(1 - \frac{p}{k})$ , onde  $k$  é a capacidade de suporte do ambiente, a população máxima;
- Resolver a equação (5.2) utilizando o comando “ResolverEDO no Geogebra e apresentar as soluções;
- Abordar que outros eventos também podem seguir uma evolução logística, como epidemias;
- Destacar a pandemia de Covid-19, que no primeiro ano segue o padrão da curva

logística.

Figura 52 – Mortes por Covid-19 no Brasil de fevereiro de 2020 a dezembro de 2021

— Novas mortes registradas — Média diária em 7 dias



Fonte: Gazeta do povo (2025).

#### **Avaliação da Aprendizagem:**

- Participação nas discussões;
- Manuseio das ferramentas digitais;
- Desempenho na resolução das questões.

#### **Orientações gerais:**

- Para ganhar tempo o professor deve realizar as resoluções questão por questão, logo após os estudantes terem resolvido cada questão. Desse modo a turma avançará junta;
- Para a resolução da questão 4 pode ser utilizada regressão linear, disponível no Geogebra. Entretanto ao se trabalhar com Controles deslizantes o estudante revisa a influência do coeficiente linear e angular no gráfico de uma função afim;
- O método de Euler pode ser explorado, conforme foi feito na seção 3.7;
- A problemática desta aula pode ser readaptada com dados da Covid-19.

### **5.3 Sequência didática 3: Modelo predador-presa**

**Duração:** 100 minutos.

**Objetivos:**

- Compreender os conceitos básicos do modelo predador-presa e sua representação por meio de equações diferenciais;
- Relacionar a matemática com fenômenos ecológicos reais;
- Determinar os valores de equilíbrio de populações;
- Analisar qualitativamente e graficamente as interações entre espécies em um ecossistema.

### **Competências da BNCC:**

- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

### **Materiais:**

- Projetor ou TV para o professor;
- Material impresso com o roteiro das atividades;
- Pincel, apagador e quadro branco (para o professor)

### **Desenvolvimento da Aula:**

Discussão inicial (30 minutos):

- “O que acontece quando desaparecem os predadores de um ecossistema?”;
- “O que acontece com a população de predadores se as presas desaparecem?”
- “Como a interação entre as duas espécies afeta cada população?”

Apresentar o predador presa conforme foi feito na seção 4.1, apresentando o sistema (4.1), destacando a relação interdependência das populações de presas e predadores.

- Citar populações de duas espécies de predadores e presas, tais como raposas e coelhos, cobras e ratos, tubarões e peixes, entre outras.

Problemática (50 min): Adaptando o Exemplo 4.1 temos o seguinte roteiro de atividades:

Considere o sistema de equações diferenciais que descreve a interação entre uma população de

coelhos  $C(t)$  e de raposas  $R(t)$ :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = 2C - 0,01CR \\ \frac{dR}{dt} = -0,5R + 0,0001CR \end{cases}$$

- 1) O que representam os parâmetros  $a = 2, b = 0,001, c = 0,5$  e  $d = 0,0001$ ?

Solução e comentário: Da interpretação do sistema temos que

- $a$ : Taxa de reprodução das presas;
- $b$ : Taxa de eficiência da predação;
- $c$ : Taxa de mortalidade dos predadores.
- $d$ : Taxa de crescimento das raposas com base na predação;

- 2) Lembrando que as equações do sistema acima representam a taxa de variação das populações de coelhos ( $C$ ) e raposas ( $R$ ), determine as situações em que as duas populações entram e estabilidade.

Solução e comentário:

A população de coelhos entra em estabilidade quando

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= 2C - 0,01CR = 0 \\ C(2 - 0,01R) &= 0 \end{aligned}$$

Logo,  $C = 0$ , ou

$$\begin{aligned} 2 - 0,01R &= 0 \\ R &= \frac{2}{0,01} = 200 \end{aligned}$$

Já para população de raposas,

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= -0,5R + 0,0001CR = 0 \\ R(0,0001C - 0,5) &= 0 \end{aligned}$$

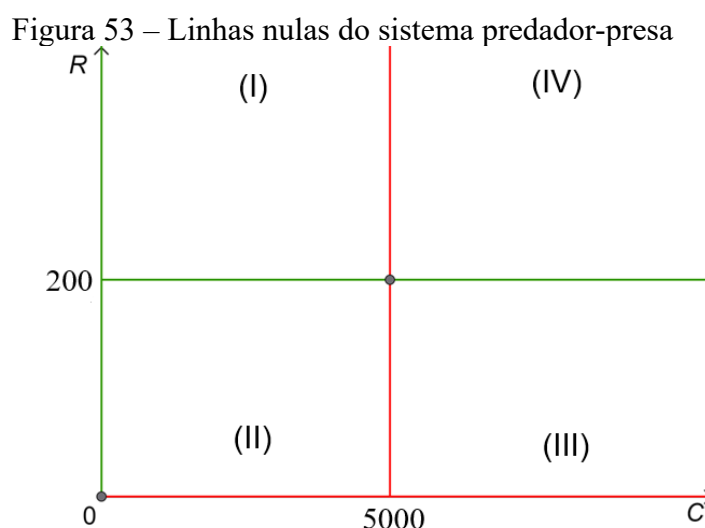
Logo,  $R = 0$ , ou

$$\begin{aligned} 0,0001C - 0,5 &= 0 \\ C &= \frac{0,5}{0,0001} = 5000 \end{aligned}$$

Assim, temos que as duas populações entram em equilíbrio simultaneamente quando são ambas extintas ou quando temos 5000 coelhos e 200 raposas.

- 3) Considerando o plano cartesiano  $CR$ , em que o eixo horizontal ( $x$ ) representa a população de coelhos e o eixo vertical ( $y$ ) a população de raposas, esboce as retas determinadas na questão anterior.

Solução e comentário: Nesse ponto são definidas as linhas nulas, como na seção 4.2. Na Figura 53 são apresentadas em verde a representação gráfica das linhas nulas da população de coelhos ( $C = 0$  e  $R = 200$ ). Em vermelho estão as linhas nulas referentes à população de raposas ( $R = 0$  e  $C = 5000$ ). Como as populações são sempre positivas só precisamos considerar o primeiro quadrante, que fica dividido em quatro regiões



Fonte: elaborado pelo autor.

- 4) Analise a variação populacional de coelhos e raposas quando:
- $C = 2000$  e  $R = 300$ .
  - $C = 2000$  e  $R = 100$ .
  - $C = 8000$  e  $R = 100$ .
  - $C = 8000$  e  $R = 300$ .

Solução e comentário: No item a) veja que para  $C = 2000$  e  $R = 300$

$$\frac{dC}{dt} = 2 \cdot 2000 - 0,01 \cdot 2000 \cdot 300 = -2000 < 0$$

Como a taxa de variação é negativa, isso significa que a população de coelhos está diminuindo.

Analogamente, temos

$$\frac{dR}{dt} = -0,5 \cdot 300 + 0,0001 \cdot 2000 \cdot 300 = -90 < 0$$

O que nos diz que a população de raposas também está diminuindo.

Com raciocínio análogo, temos no item b) que

$$\frac{dC}{dt} = 2 \cdot 2000 - 0,01 \cdot 2000 \cdot 100 = 200 > 0$$

Logo, a população de coelhos está em crescimento. Já para a população de raposas

$$\frac{dR}{dt} = -0,5 \cdot 100 + 0,0001 \cdot 2000 \cdot 100 = -30$$

Assim, a população de raposas está em queda.

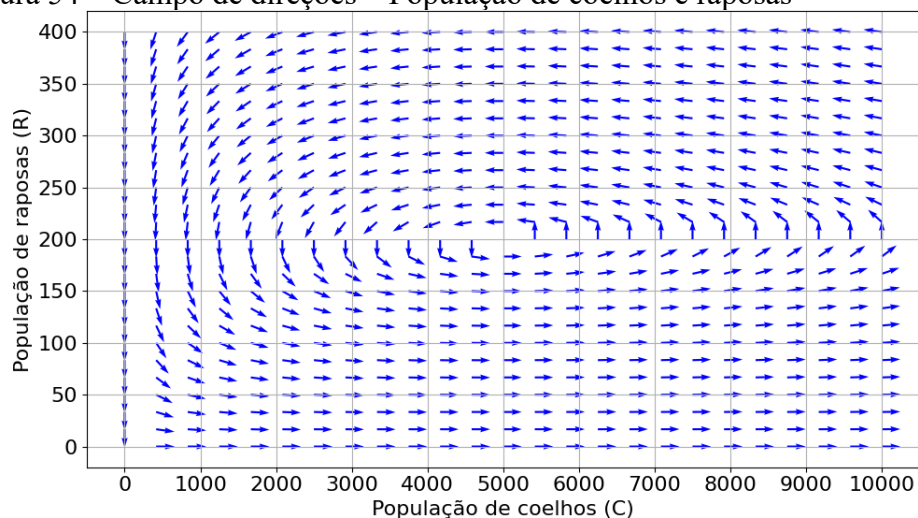
Seguindo para os demais itens obtemos no item c) que as populações de coelhos e raposas são crescentes. Por fim, no item d), a população de coelhos será decrescente e a de raposas crescente.

Nesse momento podemos generalizar o crescimento e decrescimento das populações em cada uma das 4 regiões delimitadas, analisando o comportamento do plano de fases, como feito na seção 4.2 para a

Encerramento da aula (35 min):

- Apresentar o campo de direções da Figura 54 destacando o movimento cíclico da variação das populações de predadores e presas;

Figura 54 – Campo de direções – População de coelhos e raposas



Fonte: elaborado pelo autor.

- Retomar os questionamentos iniciais concluindo que na ausência de predadores,  $\frac{dC}{dt} =$

$aC$ ,  $a > 0$ , logo a população de presas cresce exponencialmente, segundo o sistema apresentado;

- Já na ausência de presas  $\frac{dR}{dt} = -dR$  o que nos diz que a população de predadores tende a extinção;
- Questionar os estudantes sobre falhas no sistema apresentado, concluído que é necessário inserir um crescimento logístico para a população de presas.

#### **Avaliação da Aprendizagem:**

- Participação nas discussões;
- Construção do plano cartesiano;
- Desempenho na resolução das questões.

#### **Orientações gerais:**

- Enfatizar a importância de cada espécie para manutenção do equilíbrio ecológico;
- O código da Figura 54 pode ser trabalhado com a turma em uma próxima aula, adicionando mais uma competência da BNCC: (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática;

Segue o código Python da Figura 54:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parâmetros do modelo
a = 2 # taxa de crescimento dos coelhos
b = 0.01 # taxa de predação
c = 0.5 # taxa de mortalidade das raposas
d = 0.0001 # taxa de crescimento das raposas

# Malha do plano
C, R = np.meshgrid(np.linspace(0, 10000, 25), np.linspace(0, 400, 25))

# Equações diferenciais
dCdt = a * C - b * C * R
dRdt = d * C * R - c * R

# Normalização dos vetores
norm = np.sqrt(dCdt**2 + dRdt**2)
u = dCdt / norm
```

```
v = dRdt / norm

# Plotagem do campo de direções
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.quiver(C, R, u, v, angles="xy", color="blue")
plt.xlabel("População de coelhos (C)", fontsize=16)
plt.ylabel("População de raposas (R)", fontsize=16)
plt.title("Campo de direções - População de coelhos e raposas",
          fontsize=17)
plt.xticks(np.arange(0, 11000, 1000), fontsize=16)
plt.yticks(fontsize=16)
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O percurso desta dissertação foi norteado pelo objetivo de construir uma ponte entre o campo das equações diferenciais aplicadas a fenômenos biológicos, frequentemente percebido como um domínio avançado da matemática, e a realidade da sala de aula do Ensino Médio. A intenção central foi evidenciar que, por meio da Modelagem Matemática e de uma abordagem interdisciplinar, torna-se viável não apenas apresentar, mas também aprofundar e analisar de maneira significativa conceitos matemáticos complexos em contextos biológicos pertinentes aos estudantes.

Para atingir tal objetivo, o trabalho foi estruturado em uma progressão lógica. Inicialmente, no Capítulo 2, estabeleceu-se a fundamentação pedagógica, alinhando a proposta aos preceitos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que incentiva a interdisciplinaridade e a resolução de problemas em contextos reais para uma aprendizagem significativa. Os Capítulos 3 e 4 se aprofundaram no arcabouço matemático, explorando desde as definições e classificações de equações diferenciais até a análise de sistemas dinâmicos complexos, como o modelo predador-presa. A teoria foi consistentemente ilustrada com exemplos das biociências, como o crescimento logístico de populações, a administração de medicamentos e a dinâmica de ecossistemas.

O ápice deste percurso se materializou no Capítulo 5, com a apresentação do produto educacional: três sequências didáticas detalhadas. Estas propostas não são meros exemplos, mas sim a concretização da tese central deste trabalho. Elas demonstram a viabilidade de se traduzir modelos como o crescimento populacional, a farmacocinética e a interação predador-presa em atividades investigativas, que promovem o uso de tecnologias digitais como Geogebra e planilhas eletrônicas, e valorizam a interpretação e a análise crítica em detrimento da memorização de fórmulas.

Neste sentido, a principal conclusão que emerge deste estudo é que a abordagem de temas do Cálculo Diferencial no Ensino Médio é não apenas possível, mas também pode ser extremamente produtiva. Ela atende diretamente às demandas da BNCC por uma matemática contextualizada e instrumental para a compreensão do mundo, ao mesmo tempo em que potencializa o engajamento dos alunos, revelando o poder da matemática como linguagem descritiva das ciências da vida. A modelagem permite que o estudante assuma um papel ativo, transformando dados brutos em conhecimento e analisando a plausibilidade de suas próprias conclusões, desenvolvendo assim competências essenciais para sua formação.

Contudo, reconhece-se que as sequências didáticas aqui propostas constituem um ponto de partida. Embora fundamentadas na teoria e na prática docente, sua efetividade em larga escala dependeria de fatores como a formação contínua de professores para trabalhar com modelagem e a disponibilidade de recursos tecnológicos nas escolas.

Diante do exposto, e como recomendação para trabalhos futuros, sugerem-se os seguintes caminhos:

- Pesquisa Empírica: A aplicação prática das sequências didáticas propostas em diferentes contextos escolares e a coleta de dados sobre o aprendizado e o engajamento dos alunos poderiam validar e refinar as metodologias aqui apresentadas;
- Expansão dos Temas: Desenvolver novas propostas de ensino baseadas em outros modelos explorados nesta dissertação, como a epidemiologia (equações de Kermack-McKendrick) ou os efeitos da cooperação entre espécies (alimentação cruzada bacteriana), ampliando o repertório de atividades interdisciplinares disponíveis;
- Desenvolvimento de Materiais de Apoio ao Professor: Criar um guia ou realizar oficinas de formação para professores do Ensino Médio, focadas na aplicação da modelagem matemática e no uso de ferramentas como o Geogebra para o ensino de funções e introdução a sistemas dinâmicos;
- Exploração de Ferramentas de Programação: Investigar a viabilidade de introduzir conceitos básicos de programação, como o código em Python apresentado para a construção de campos de direção, em atividades para turmas avançadas ou em clubes de ciências, alinhando-se à habilidade EM13MAT405 da BNCC.

Conclui-se, portanto, que este trabalho alcançou seus objetivos, oferecendo uma contribuição teórica e prática que reafirma o potencial da matemática como uma disciplina viva, dinâmica e central para a formação de cidadãos críticos e capazes de interpretar a complexidade do mundo que os cerca.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. 1. ed. São Paulo; Contexto, 2013.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.; MEADE, Douglas B. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 05 de abr. de 2025.

GEOGEBRA. **Calculator suite**. [S. l.], 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org/calculator>. Acesso em: 5 set. 2025.

HEFEZ, A.; FERNANDES, C. S. **Introdução à Álgebra linear**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

LAVAQUI, V.; BATISTA, I. DE L. Interdisciplinaridade em ensino de Ciências e de Matemática no Ensino Médio. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 13, n. 3, p. 399 - 420, set. 2007. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/RJjxc78XXyctF8RTkrg9xck/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 30 de abr. de 2025.

NÚMEROS do Coronavírus: entenda o avanço da Covid-19 no Brasil e no mundo. **Gazeta do Povo**, Curitiba, 2021. Caderno especial. Disponível em: <https://especiais.gazetadopovo.com.br/coronavirus/numeros>. Acesso em: 5 set. 2025.

RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

SANTOS, Reginaldo J. **Introdução às equações diferenciais ordinárias**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2013. Disponível em: <https://saapjr.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/04/iedo.pdf>. Acesso em: 25 maio 2025.

STEWART, James; DAY, Troy. **Biocalculus: calculus, probability, and statistics for the life sciences**. 1. ed. Boston: Cengage Learning, 2015.

STEWART, James. **Cálculo, volume 2**. Tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela M.S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem matemática em sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021. (Coleção Tendências em Educação Matemática).