



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**RAPHAEL GOMES VALE**

**UMA JORNADA FASCINANTE AO MUNDO DE PI: A SÉRIE DE LEIBNIZ E A  
CONEXÃO INESPERADA COM OS NÚMEROS ÍMPARES**

**FORTALEZA**

**2025**

RAPHAEL GOMES VALE

UMA JORNADA FASCINANTE AO MUNDO DE  $\pi$ : A SÉRIE DE LEIBNIZ E A  
CONEXÃO INESPERADA COM OS NÚMEROS ÍMPARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

V243j Vale, Raphael Gomes.

Uma jornada fascinante ao mundo de PI: a série de Leibniz e a conexão inesperada com os números ímpares. / Raphael Gomes Vale. – 2025.

141 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

1. Série de Leibniz . 2. Cálculo do pi. 3. Números ímpares. 4. Aproximação geométrica. 5. Transposição didática. I. Título.

CDD 510

---

RAPHAEL GOMES VALE

UMA JORNADA FASCINANTE AO MUNDO DE PI: A SÉRIE DE LEIBNIZ E A  
CONEXÃO INESPERADA COM OS NÚMEROS ÍMPARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em: 25/07/2025.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Francisco Ícaro Maciel Forte Chaves  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A todos aqueles que acreditam no poder transformador da Matemática.

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. José Alberto Duarte Maia, pela excelente orientação. Sua criatividade e paciência fizeram total diferença, apontando intervenções em pontos-chaves, na qual sem elas esse trabalho não seria possível.

Ao apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

Ao Coordenadores do Curso durante os anos de 2023 e 2025, Professores Dr. Jonatan Floriano da Silva, Dr. Antônio Caminha Muniz Neto e Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho pelo excelente trabalho.

Aos professores participantes da banca examinadora Marcelo Ferreira de Melo e Francisco Ícaro Maciel Forte Chaves pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores do curso, Dr. Marcos Melo, Dr. Marcelo Melo, Dr. Antônio Caminha, Dr. Jonatan Floriano, Dr. Frederico Vale, Dr. Esdras Medeiros e Dr. Alberto Duarte por terem contribuído com seus vastos conhecimentos para nossa formação de excelência.

Aos colegas da turma mais incrível do PROFMAT, Aírton, Wesley, Bartolomeu, Elizeu, Erivaldo, Hedilândio, Nairon, Jonathas, Thyago, Túlio, Fco de Assis, Danrlley, Dermeval e Eduardo pelas reflexões, momentos de exercícios, críticas e sugestões recebidas.

Aos meus pais Vicente e Conceição; e meus irmãos Rodolfo, Renan, Mateus e Marcelo, que são os diamantes da minha vida.

Aos colegas de trabalho e ao Núcleo Gestor da Escola Estadual de Educação Profissional (EEEP) Marwin, pela companheirismo e compreensão.

Aos meus alunos da turma do curso técnico em Desenvolvimento de Sistemas (DS) (Turma 2023-2025), a qual sou Professor Diretor de Turma (PDT), pelo companheirismo ao longo desses anos. Crescemos juntos.

"Coloquei nas prateleiras de baixo algumas lembranças de infância, na gaveta de cima as de minha juventude e, pendurado bem a minha frente, coloquei a minha capacidade de amar e, principalmente, de recomeçar" (Martha Medeiros.)

## RESUMO

Esta dissertação investiga o número  $\pi$  por meio de três abordagens inter-relacionadas: matemática, histórica e pedagógica. O estudo concentra-se na série de Leibniz ( $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$ ), apresentando três demonstrações distintas: uma abordagem geométrica, utilizando aproximações de arco via semelhança de triângulos; o Teorema da Transmutação de Leibniz, que transforma integrais para derivar a série; e a expansão em série de Taylor da função arco tangente. Além disso, explora-se a conexão entre  $\pi$  e os números ímpares, incluindo produtos infinitos envolvendo primos ímpares, como  $\pi/4 = (3/4)(5/4)(7/8)(11/12)\dots$ . A pesquisa também desenvolve uma sequência didática para o ensino médio, traduzindo esses conceitos avançados em atividades acessíveis, com ênfase em visualização geométrica e investigação matemática. Metodologicamente, combina revisão bibliográfica (fontes primárias e secundárias) com a criação de materiais educacionais testados em ambiente escolar. Os resultados destacam-se em três aspectos: a unificação de demonstrações da série de Leibniz, as relações entre  $\pi$  e números ímpares e a validação preliminar da abordagem pedagógica. Conclui-se que tópicos avançados, como séries infinitas, podem ser introduzidos no ensino básico de forma intuitiva, enriquecendo a formação matemática dos alunos.

**Palavras-chave:** série de Leibniz; cálculo de  $\pi$ ; números ímpares; aproximação geométrica; transposição didática.

## ABSTRACT

This dissertation investigates the number  $\pi$  through three interrelated approaches: mathematical, historical, and pedagogical. The study focuses on the Leibniz series ( $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$ ), presenting three distinct proofs: a geometric approach using arc approximations via triangle similarity; Leibniz's Transmutation Theorem, which transforms integrals to derive the series; and the Taylor series expansion of the arctangent function. Additionally, it explores the connection between  $\pi$  and odd numbers, including infinite products involving odd primes, such as  $\pi/4 = (3/4)(5/4)(7/8)(11/12)$ . The research also develops a didactic sequence for secondary education, translating these advanced concepts into accessible activities with an emphasis on geometric visualization and mathematical investigation. Methodologically, it combines a literature review (primary and secondary sources) with the creation of educational materials tested in school settings. Key results highlight three aspects: the unification of proofs for the Leibniz series, the relationships between  $\pi$  and odd numbers, and the preliminary validation of the pedagogical approach. The study concludes that advanced topics, such as infinite series, can be introduced in basic education intuitively, enriching students' mathematical training.

**Keywords:** Leibniz series; computation of  $\pi$ ; odd numbers; geometric approximation; didactic transposition.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Método egípcio para estimar o valor de $\pi$ . . . . .	12
Figura 2 – Método de Arquimedes para estimar o valor de $\pi$ por polígonos regulares inscritos e circunscritos numa circunferência. . . . .	13
Figura 3 – Retrato de Arquimedes e sua contribuição na aproximação de $\pi$ . . . . .	14
Figura 4 – representação de uma sequência na reta numérica . . . . .	18
Figura 5 – Ilustração da definição de limite de uma sequência . . . . .	18
Figura 6 – Visualização da série geométrica $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ através da divisão de uma unidade . . . . .	26
Figura 7 – Segmentos com comprimentos em progressão geométrica na reta . . . . .	27
Figura 8 – Representação de segmentos verticais sobre os pontos da progressão geométrica	27
Figura 9 – Triângulos semelhantes na demonstração geométrica da soma da série geométrica . . . . .	28
Figura 10 – Detalhe dos triângulos semelhantes para a soma parcial da série geométrica	28
Figura 11 – Definição de área: Retângulo formado por quadrados unitários . . . . .	54
Figura 12 – Demonstra a fórmula da área do paralelogramo pela translação de um triângulo	55
Figura 13 – Cálculo da área de um triângulo . . . . .	55
Figura 14 – Região sob a curva $y = x^2$ no intervalo $[0, 1]$ . . . . .	56
Figura 15 – Aproximação da área sob a curva $y = x^2$ usando 5 retângulos . . . . .	57
Figura 16 – Aproximação da área sob a curva $y = x^2$ usando 10 retângulos . . . . .	58
Figura 17 – Aproximação da área sob a curva $y = x^2$ usando $n$ retângulos . . . . .	59
Figura 18 – Retrato de Pierre de Fermat . . . . .	60
Figura 19 – Pontos em progressão geométrica no eixo $x$ para o método de Fermat . . . . .	61
Figura 20 – Mostra as alturas da curva $y = x^2$ nos pontos em progressão geométrica . . . . .	62
Figura 21 – Retângulos de larguras decrescentes na aproximação de área pelo método de Fermat . . . . .	62
Figura 22 – Comparação da área sob a curva $y = x^2$ com o triângulo de área $1/2$ . . . . .	64
Figura 23 – Comparação das curvas $y = x^2$ e $y = x^3$ no intervalo $[0, 1]$ . . . . .	64
Figura 24 – Comparação das curvas $y = x^k$ para diferentes valores de $k$ no intervalo $[0, 1]$	65
Figura 25 – Divisão do polígono regular em triângulos isósceles . . . . .	70
Figura 26 – Destaque em um triângulo isósceles . . . . .	70
Figura 27 – Retrato de Gottfried Wilhelm Leibniz . . . . .	78

Figura 28 – Triângulo isósceles e o arco de círculo para a dedução da série de Leibniz . . . . .	79
Figura 29 – Setorização do arco e divisão do segmento para aproximação . . . . .	80
Figura 30 – Setorização do arco e divisão do segmento em 4 e 5 . . . . .	80
Figura 31 – Detalhe da aproximação do arco por segmentos de reta . . . . .	81
Figura 32 – Identificação de triângulos semelhantes na construção geométrica . . . . .	81
Figura 33 – Identificação de ângulos retos na construção geométrica . . . . .	82
Figura 34 – Gráfico de uma função e sua reta tangente em um ponto . . . . .	88
Figura 35 – Detalha o triângulo OPQ na demonstração do Teorema da Transmutação . . . . .	88
Figura 36 – Interpretação geométrica da integral no Teorema da Transmutação . . . . .	89
Figura 37 – Quarto de círculo para a aplicação do Teorema da Transmutação de Leibniz . . . . .	91
Figura 38 – Representação gráfica da transformação de variáveis no Teorema da Transmutação . . . . .	92
Figura 39 – Área do quarto de círculo como uma integral definida . . . . .	92
Figura 40 – Relação entre as áreas na aplicação do Teorema da Transmutação . . . . .	93

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\pi$	Número pi $\approx 3,14159265359$
$\Sigma$	Somatório
lim	Limite
$\triangle$	Triângulo
<b>N</b>	Conjunto dos números Naturais
<b>R</b>	Conjunto dos números Reais
$\Pi$	Produtório
$\int$	Integral
$\iint$	Integral dupla
$\in$	Pertence
$\pm$	Mais ou menos
$\mp$	Menos ou mais
!	Fatorial
!!	Duplo Fatorial

## SUMÁRIO

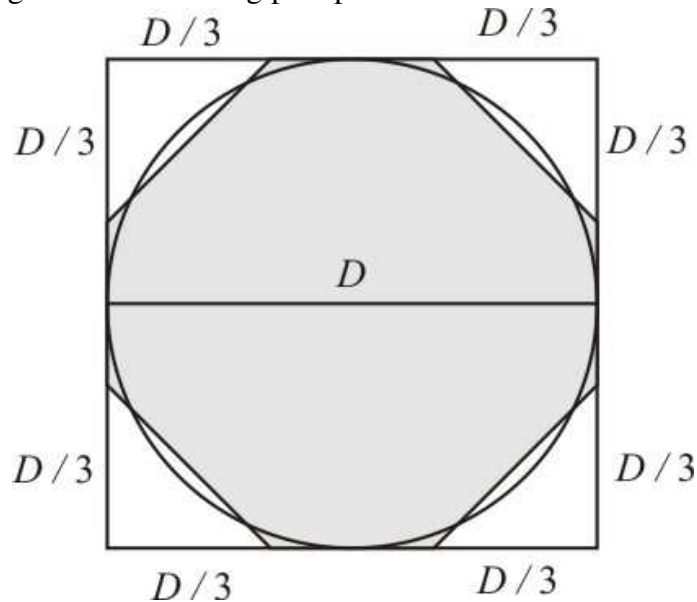
1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	FUNDAMENTOS DAS SÉRIES INFINITAS . . . . .	17
2.1	Sequências numéricas: definições e limites . . . . .	17
2.2	Introdução às séries infinitas . . . . .	19
2.3	Série geométrica . . . . .	23
2.3.1	<i>Série geométrica usando Geometria</i> . . . . .	26
2.4	CrITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA PARA SÉRIES DE TERMOS NÃO NEGATIVOS . . . . .	29
2.5	SÉRIES ALTERNADAS, CONVERGÊNCIA ABSOLUTA E CONDICIONAL . . . . .	43
2.6	FERRAMENTAS ADICIONAIS DE ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA . . . . .	46
2.7	COMUTATIVIDADE E REORDENAMENTO DE SÉRIE DE RIEMANN . . . . .	48
3	DO CÁLCULO DE ÁREAS AOS CÁLCULOS DO PI . . . . .	52
3.1	Definição de área do polígono . . . . .	52
3.2	Conjecturando a área sob a curva . . . . .	56
3.3	Fermat e a área sob a curva . . . . .	60
3.4	Soma de potências e convergência . . . . .	67
3.5	O círculo como limite de regiões poligonais . . . . .	69
3.6	O produto de Wallis . . . . .	71
4	A SÉRIE DE LEIBNIZ: DEMONSTRAÇÕES E CONEXÕES . . . . .	78
4.1	A série de Leibniz e a aproximação do arco . . . . .	79
4.2	Teorema da transmutação de Leibniz . . . . .	87
4.3	A conexão com a função arco tangente . . . . .	94
4.4	A lenta convergência da série de Leibniz . . . . .	97
4.5	Relação dos números primos ímpares e pi . . . . .	100
5	A SÉRIE DE LEIBNIZ E O ENSINO DE MATEMÁTICA . . . . .	104
5.1	Justificando as escolhas pedagógicas do produto educacional . . . . .	104
6	CONCLUSÃO . . . . .	107
	REFERÊNCIAS . . . . .	110
	APÊNDICE A – SOMA DE POTÊNCIAS DOS NATURAIS . . . . .	112
	APÊNDICE B – PRODUTO EDUCACIONAL . . . . .	116
	APÊNDICE C – CODIGO PYTHON PARA APROXIMAÇÃO . . . . .	138

## 1 INTRODUÇÃO

O número pi ( $\pi$ ) é uma constante matemática que tem fascinado matemáticos, cientistas e filósofos por milênios. Definido originalmente como a razão entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro,  $\pi$  é um número irracional, ou seja, ele não pode ser expresso como uma fração exata entre dois inteiros. A busca por entender e calcular os dígitos de  $\pi$  tem sido uma constante ao longo da história humana, desafiando não apenas as capacidades dos matemáticos, mas também os limites da tecnologia ao longo dos séculos.

Os primeiros registros do uso de  $\pi$  datam das civilizações antigas. Seu valor era essencial para cálculos práticos, como medição de terras, construção de estruturas e cálculo de impostos. Os egípcios, em torno de 1650 a.C., já faziam aproximações rudimentares de  $\pi$ , utilizando valores que se mostravam surpreendentemente precisos para a época,  $\pi \approx 3,16$ . Similarmente, os babilônios também possuíam uma aproximação que usava 3 como valor para  $\pi$ .

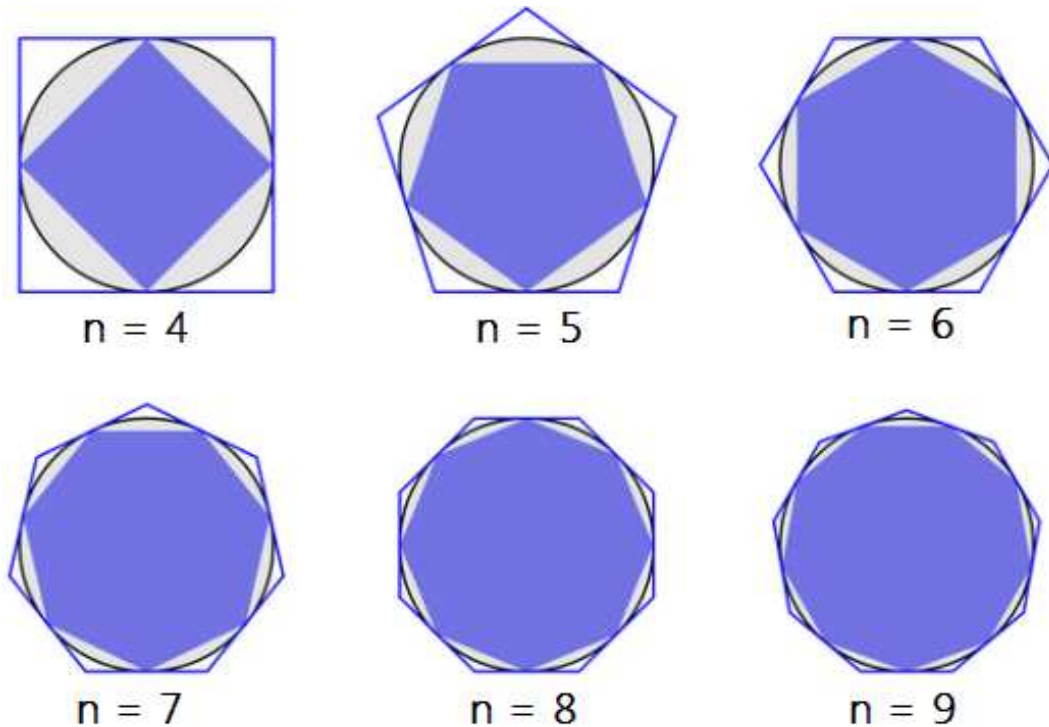
Figura 1 – Método egípcio para estimar o valor de  $\pi$



Fonte: Baricentro da Mente (2008)

Entretanto, foi na Grécia Antiga que os estudos matemáticos sobre o número  $\pi$  ganharam mais relevância, principalmente através dos trabalhos de Arquimedes, um dos maiores matemáticos da antiguidade (Arquimedes, 2024). Arquimedes desenvolveu um método geométrico que aproximava pi ao inscrever e circunscrever polígonos em círculos. Utilizando um polígono de 96 lados (Almeida, 2008), ele conseguiu determinar que o valor de  $\pi$  estava entre 3,1408 e 3,1428, mais precisamente com ele conseguiu relacionar a razão  $22/7$  uma aproximação bastante precisa para os padrões da época (Beckmann, 1993).

Figura 2 – Método de Arquimedes para estimar o valor de  $\pi$  por polígonos regulares inscritos e circunscritos numa circunferência.



Fonte: Almeida (2008).

Na era moderna, o número  $\pi$  continuou a ocupar um papel central na matemática, especialmente com o surgimento do cálculo infinitesimal no século XVII. Isaac Newton, utilizando as ferramentas do cálculo que ele ajudou a desenvolver, calculou pi com 16 casas decimais de precisão, um feito impressionante para o século XVII. À medida que o conhecimento matemático avançava e os métodos computacionais se tornavam mais sofisticados, a busca por mais dígitos de pi se intensificou. No século XX, com o advento dos computadores, a quantidade de casas decimais conhecidas de pi disparou. Atualmente, o número é conhecido com trilhões de dígitos, um esforço que não é mais guiado por uma necessidade prática, mas pelo desejo de testar os limites do cálculo numérico e da computação.

Além da matemática pura,  $\pi$  aparece em uma infinidade de áreas do conhecimento humano. Ele está presente nas equações que descrevem fenômenos naturais como a gravitação, as ondas, a eletricidade, o magnetismo e a teoria quântica. No campo da engenharia,  $\pi$  é utilizado em uma vasta gama de aplicações, desde o projeto de componentes mecânicos até o processamento de sinais digitais. Na estatística e na probabilidade,  $\pi$  também surge de maneiras inesperadas, como na fórmula da distribuição normal, a curva em formato de sino (ou chapéu) que descreve como muitas características mensuráveis em populações humanas e fenômenos naturais estão distribuídas.

Figura 3 – Retrato de Arquimedes e sua contribuição na aproximação de  $\pi$



Fonte: Adaptado de Societífica (2024).

Entretanto,  $\pi$  não é apenas um número com aplicações práticas; ele tem também um aspecto cultural que transcende a matemática. Celebrado mundialmente no "Dia do Pi", comemorado em 14 de março, pi ganhou notoriedade em parte por causa de seu mistério e complexidade. Muitos o consideram um símbolo da infinita busca humana pelo conhecimento e pelo entendimento profundo do universo. O fato de pi ser irracional, e até transcendente (não podendo ser a raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais), apenas reforça essa aura de mistério que o cerca (Borwein, 2013).

Ainda que a maioria das pessoas só precise de pouquíssimas casas decimais de  $\pi$  para fins práticos: 3,14, por exemplo, é suficiente para a maioria dos cálculos geométricos, o estudo aprofundado de suas propriedades continua a revelar novas facetas sobre a estrutura dos números e do próprio cosmos. Algumas perguntas intrigantes ainda permanecem, como a distribuição dos dígitos de  $\pi$  e o motivo pelo qual ele parece emergir de maneira tão natural em tantos campos diferentes da ciência, desafiando nossa compreensão e servindo como um lembrete da complexidade e beleza inerentes ao universo.

Nesse contexto, a Série de Leibniz para  $\pi$  emerge como um resultado particularmente intrigante e elegante. Desenvolvida pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII, essa série oferece uma maneira surpreendentemente simples de expressar  $\pi$  através da soma de uma sequência infinita de frações. A fórmula, que relaciona  $\pi/4$  à soma alternada dos inversos dos números ímpares:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad (1.1)$$

é um exemplo notável da beleza e da profundidade das séries infinitas.

Embora a beleza deste resultado seja evidente para os matemáticos, sua tradução para o ambiente da Educação Básica apresenta um desafio significativo. Conceitos como séries infinitas, convergência e a própria natureza de  $\pi$  podem parecer abstratos e distantes da realidade dos alunos. Surge, então, um problema de natureza pedagógica: como construir uma ponte entre a elegância da Série de Leibniz e o universo conceitual do estudante do Ensino Médio, de modo a promover não apenas a compreensão, mas o encantamento pela matemática?

Esta dissertação enfrenta esse desafio ao investigar os fundamentos matemáticos e históricos da série para, a partir deles, desenvolver, como produto final, uma sequência didática destinada a esse público. O objetivo é, portanto, duplo: primeiro, realizar uma exploração teórica rigorosa do tema e, segundo, mobilizar esse conhecimento para criar um recurso educacional prático e fundamentado, capaz de articular diferentes campos da matemática (geometria, álgebra, teoria dos números) de forma coesa e acessível.

Ao longo dos capítulos, embarcaremos em uma jornada que nos permitirá apreciar a elegância da matemática e a forma como conceitos aparentemente distintos podem se unir para revelar resultados surpreendentes e significativos, como a conexão entre  $\pi$  e a sequência dos números ímpares.

No Capítulo 2, estabeleceremos as bases teóricas para a compreensão das séries geométricas, apresentando suas definições, propriedades e condições de convergência. Essa fundamentação será essencial para os desenvolvimentos subsequentes.

O Capítulo 3 dedicará-se à aplicação das séries geométricas em problemas clássicos de cálculo, como o cálculo de áreas sob curvas. Exploraremos como a soma de potências e as séries geométricas podem ser utilizadas para aproximar essas áreas de forma eficiente. Além disso, investigaremos a soma de potências infinitas e sua relação com frações, revelando um elegante resultado que conecta álgebra e análise.

No Capítulo 4, direcionaremos nosso foco para um dos números mais fascinantes da matemática:  $\pi$ . Apresentaremos a fórmula de Leibniz para  $\pi$ , demonstrada a partir de três maneiras: Primeira, a partir da medida de comprimento do arco, usando semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras; segunda, a partir da medida medida do quarto de um círculo, usando o

Teorema da Transmutação de Leibniz; terceiro, usando o ferramentas do Cálculo como série de Taylor.

Em seguida, exploraremos uma abordagem menos conhecida, que relaciona  $\pi$  com a distribuição dos números primos.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdots \quad (1.2)$$

A escolha do tema justifica-se pela relevância histórica e matemática do número  $\pi$ , um dos mais estudados e intrigantes na matemática. Além disso, a conexão entre séries geométricas e  $\pi$  amplia a fascinação pelo tema, oferecendo um campo rico para exploração e entendimento dos fundamentos matemáticos.

Objetivos Específicos:

1. Revisar os conceitos fundamentais de séries;
2. Aplicar as séries geométricas em problemas clássicos de cálculo como cálculo de área sob a curva;
3. Explorar a relação entre as séries geométrica e soma de potencias e o número  $\pi$ ;
4. Contribuir para a divulgação da matemática, apresentando resultados clássicos de forma acessível.

A metodologia utilizada nesta pesquisa será predominantemente bibliográfica, com base em livros, artigos científicos e materiais didáticos. A abordagem será teórica e histórica, buscando apresentar os resultados de forma clara e concisa, com o auxílio de exemplos e demonstrações.

Em resumo, o número  $\pi$  é muito mais do que uma simples constante usada para medir círculos; ele é uma janela para algumas das questões mais profundas da matemática e da natureza. Seja em suas origens históricas, nas suas implicações práticas ou nas suas aplicações científicas e filosóficas, pi continua a ser um objeto de estudo que fascina e inspira, representando a busca humana pela verdade matemática e pela compreensão do cosmos (Roque e Pitombeira, 2012).

## 2 FUNDAMENTOS DAS SÉRIES INFINITAS

Estabeleceremos, neste capítulo, as bases teóricas para a compreensão das séries, abordando em especial as séries geométricas. Discutiremos a definição geral de séries, suas propriedades fundamentais, os critérios de convergência e as condições que garantem a convergência no caso das séries geométricas infinitas. Essa fundamentação será essencial para os capítulos subsequentes.

### 2.1 Sequências numéricas: definições e limites

Uma sequência pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

O número  $a_1$  é chamado primeiro termo,  $a_2$  é o segundo termo e, em geral,  $a_n$  é o  $n$ -ésimo termo. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo  $a_n$  terá um sucessor  $a_{n+1}$ .

Observe que, para cada inteiro positivo  $n$ , existe um número correspondente  $a_n$  e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos  $a_n$  em vez da notação de função  $f(n)$  para o valor da função no número  $n$ .

A sequência  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  é também denotada por

$$(a_n) \quad \text{ou} \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o  $n$ -ésimo termo. No exemplo a seguir, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência.

$$\left( \frac{n}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad a_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{ou} \quad \left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right)$$

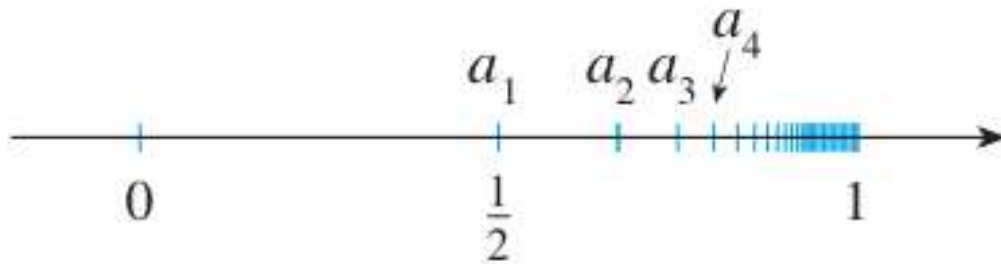
Uma sequência como exemplo,  $a_n = \frac{n}{n+1}$ , pode ser visualizada marcando seus termos na reta real, como na figura 4.

A partir da Figura 4 parece que os termos da sequência  $a_n = \frac{n}{n+1}$  estão se aproximando de 1 quando  $n$  se torna grande. De fato, a diferença  $1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$  pode ficar tão

pequena quanto se desejar tomando-se  $n$  suficientemente grande. Indicamos isso escrevendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Figura 4 – representação de uma sequência na reta numérica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em geral, uma sequência  $(a_n)$  tem limite  $L$  e escrevemos

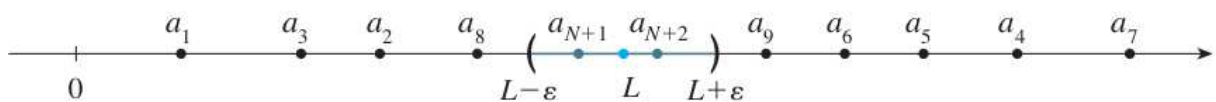
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty$$

se pudermos tornar os termos  $a_n$  tão próximos de  $L$  quanto quisermos ao fazer  $n$  suficientemente grande. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existir, dizemos que a sequência converge (ou é convergente). Caso contrário, dizemos que a sequência diverge (ou é divergente). Formalmente, se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existir um inteiro correspondente  $N$  tal que

$$\text{se } n > N \text{ então } |a_n - L| < \varepsilon$$

A definição está ilustrada pela Figura 5, na qual os termos  $a_1, a_2, a_3, \dots$  são marcados na reta real. Não importa quão pequeno seja escolhido o intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ , existe um  $N$  tal que todos os termos da sequência de  $a_{N+1}$  em diante devem estar naquele intervalo.

Figura 5 – Ilustração da definição de limite de uma sequência



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Exemplo:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$  quando  $0 < |r| < 1$ .

**Solução.** Como  $\frac{1}{|r|} > 1$ , podemos escrever  $\frac{1}{|r|} = 1 + g$ , com  $g$  sendo um número real positivo, assim usando binômio de Newton, temos

$$\frac{1}{|r|^n} = (1 + g)^n > 1 + ng$$

e, a partir daí,

$$|r^n - 0| < \frac{1}{1 + ng}$$

Como queremos que  $|r^n - 0| < \varepsilon$ , basta escolhermos  $n$  tal que  $\frac{1}{1 + ng} < \varepsilon$ , ou seja,  $n > \frac{1}{g} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)$ .

## 2.2 Introdução às séries infinitas

Nos primórdios do cálculo infinitesimal, nos séculos XVII e XVIII, os conceitos de séries infinitas e convergência representavam um profundo desafio intelectual para pensadores como Newton e Leibniz. A ideia de "somar infinitos termos" era paradoxal e desconcertante para a intuição matemática da época.

Newton, em seus trabalhos sobre séries infinitas, operava com elas de maneira pragmática, sem uma fundamentação rigorosa do conceito de convergência, pois nem ele mesmo se preocupava rigorosamente com isso. Seu famoso teorema binomial, por exemplo, era expresso como uma série infinita sem uma discussão sistemática. Por sua vez, Leibniz, embora mais preocupado com questões de fundamentação, também oscilava entre insights profundos e confusões conceituais. Embora a famosa série para  $\pi/4$  estivesse correta, o entendimento do porquê e de quando tais séries como esta convergiam permanecia muito nebuloso.

A teoria da convergência só atingiu um nível substancial de rigor técnico no século XIX, com os trabalhos de Augustin-Louis Cauchy. Foi ele quem consolidou sua forma moderna, estabelecendo um rigor que seria inimaginável nos tempos de Newton e Leibniz.

Considere uma sequência de números reais  $(a_n)_{n \geq 1}$ . A partir dela, analisamos a **sequência das somas parciais**  $(S_n)_{n \geq 1}$ , em que cada termo  $S_n$  dessa sequência, chamado de **n-ésima soma parcial**, é definido como a soma dos  $n$  primeiros termos da sequência original:  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Se o limite da sequência das somas parciais  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existe e é igual a um número  $S$ , dizemos que a série infinita  $\sum_{k \geq 1} a_k$  **converge** ou **é convergente** e sua soma é  $S$ , caso contrário, (não existindo esse limite,) dizemos que ela **diverge** ou **é divergente**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{ou} \quad \sum_{k \geq 1} a_k = S.$$

Em outras palavras, quando escrevemos  $\sum_{k \geq 1} a_k = S$ , estamos dizendo que as somas finitas  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  aproximam-se mais e mais do número real  $S$ , à medida que  $n \rightarrow +\infty$ . É nesse sentido que a igualdade deve ser pensada, como um limite (Lima, 2008).

Por vezes, teremos em mãos uma sequência  $(a_n)_{n \geq 0}$  de números reais, em cujo caso a série (ou soma) correspondente será denotada por  $\sum_{k \geq 0} a_k$ . Nosso interesse é encontrar critérios que permitam decidir se uma dada série é ou não convergente.

**Proposição:** Uma série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, então a sequência de seus termos  $(a_n)$  tende a zero. Em outras palavras,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

**Prova:** Assumimos, por hipótese, que a série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, isso significa que a sequência de suas somas parciais  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge para um limite  $S$ . Ou seja, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > N$  então  $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Lembrando que a  $n$ -ésima soma parcial é definida como:  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Podemos expressar o termo  $a_n$  da sequência em termos das somas parciais. Para  $n \geq 2$ , temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos:

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1})$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

Portanto,  $a_n = S_n - S_{n-1}$  para todo  $n \geq 2$ . (Para  $n = 1$ , temos  $a_1 = S_1$ ). Agora, vamos calcular o limite de  $a_n$  quando  $n \rightarrow \infty$ :

$$|a_n| = |S_n - S_{n-1}| = |S_n - S + S - S_{n-1}| < |S - S_n| + |S - S_{n-1}|$$

Como  $n \rightarrow \infty$ , também temos  $n - 1 \rightarrow \infty$ . Uma vez que a sequência  $(S_n)$  converge para  $S$ , a sequência  $(S_{n-1})$  (que é essencialmente a mesma sequência, apenas com o índice deslocado) também converge para  $S$ . Ou seja, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $n_1 > N$  então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \implies |S_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Usando o fato de que  $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|S_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$  temos a seguinte desigualdade:

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

Concluimos então que, para qualquer  $\varepsilon$  existe  $N \in \mathbb{N}$  Tal que se  $n > N$  então  $|a_n| < \varepsilon$ , ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Portanto, se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Isso estabelece que, se a série converge, então necessariamente  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Esta proposição é uma condição necessária, mas não suficiente, para a convergência da série. Ou seja, embora  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  seja necessário para que a série convirja, não garante por si só a convergência da série (um exemplo clássico é a série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ). No entanto, a forma contrapositiva desta proposição é muito útil e é conhecida como o **Teste para Divergência**: se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ou se o limite não existe, então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

No entanto, existem algumas manipulações e argumentos "heurísticos" (não rigorosos) que são frequentemente usados para ilustrar como se chega a um número real a partir de uma série divergente, mas é crucial saber que não são provas formais, justamente porque manipulam séries divergentes como se fossem convergentes, o que pode levar a contradições. Por exemplo, a famosa contraintuitiva soma  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$ .

Vamos considerar três séries:

1.  $S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  (Série de Grandi)
2.  $S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$
3.  $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$  (A soma que queremos "calcular")

Temos a série de Grandi:

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Se tentarmos manipular algebricamente (o que é problemático para séries divergentes):

$$1 - S_1 = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S_1$$

Então,  $1 - S_1 = S_1 \implies 2S_1 = 1 \implies S_1 = \frac{1}{2}$ .

*Observação:*  $S_1$  é uma série divergente; suas somas parciais alternam entre 1 e 0. Atribuir o valor  $\frac{1}{2}$  é uma forma de "regularização", mas a manipulação algébrica acima não é justificada para séries divergentes.

Considere a série:

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$$

Vamos tentar outra manipulação (igualmente não rigorosa). Considere  $2S_2$ :

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$$

$$S_2 = +1 - 2 + 3 - 4 + \dots \quad (\text{deslocando a série})$$

Somando as duas linhas termo a termo:

$$2S_2 = (1 + 0) + (-2 + 1) + (3 - 2) + (-4 + 3) + (5 - 4) - \dots$$

$$2S_2 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = S_1$$

Então, se  $S_1 = \frac{1}{2}$ , temos  $2S_2 = \frac{1}{2} \implies S_2 = \frac{1}{4}$ .

*Observação:* Subtrair ou somar séries divergentes termo a termo, ou rearranjar seus termos, pode levar a resultados diferentes ou inconsistentes. Essas operações são válidas para séries absolutamente convergentes, que veremos mais adiante.

Temos:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$$

Consideremos a diferença  $S - S_2$  (novamente, uma operação não rigorosa):

$$S - S_2 = (1 - 1) + (2 - (-2)) + (3 - 3) + (4 - (-4)) + (5 - 5) + \dots$$

$$= 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + \dots$$

$$= 4 + 8 + 12 + \dots$$

$$= 4 \times (1 + 2 + 3 + \dots)$$

$$S - S_2 = 4S$$

Rearranjando os termos:

$$-S_2 = 4S - S \implies -S_2 = 3S \implies S = -\frac{S_2}{3}$$

Usando o valor que encontramos para  $S_2 = \frac{1}{4}$ :

$$S = -\frac{1/4}{3} = -\frac{1}{12}$$

Que é claramente um absurdo, pois somar números inteiros positivos não se deve obter como resultado um número negativo ou não-inteiro. Enfatizamos que isso acontece devido ao fato de que estamos somando, subtraindo e rearranjando termos de séries que não convergem. Essas operações só são válidas para séries convergentes.

### 2.3 Série geométrica

Vimos até aqui o estudo geral das série numéricas, entretanto, vamos agora dar um destaque para séries geométricas que constituem um caso particularmente importante, caracterizadas por terem uma estrutura simples. Mas antes de abordarmos sua definição formal, é fundamental retomar o conceito de progressão geométrica (PG), sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é obtido pela multiplicação do anterior por uma constante chamada de razão. Matematicamente, a progressão geométrica pode ser escrita como:

$$(a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n, \dots)$$

onde:

- $a$  é o primeiro termo da série,
- $r$  é a razão entre os termos consecutivos, ou seja, ao dividir um termo pelo termo antecessor dele sempre teremos  $r$ .

$$\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = \frac{ar^3}{ar^2} = \frac{ar^4}{ar^3} = \dots = r$$

Essa relação de recorrência gera padrões de crescimento ou decaimento exponencial, dependendo do valor da razão, e serve como base para a compreensão das séries geométricas, que representam a soma dos termos dessas progressões (Wagner *et al.*, 2005).

Além do interesse teórico, as progressões geométricas possuem aplicações vastas em diversas áreas. Na Matemática financeira, são usadas para calcular juros compostos e valores de montantes ao longo de unidades de tempo. Na física, modelam fenômenos como decaimento radioativo e dissipação de energia. Na biologia, descrevem o crescimento de populações em condições ideais. Essa aplicabilidade geralmente é reforçada no Ensino Médio através de situações-problemas.

Diante disso, uma série geométrica é a soma dos termos de uma progressão geométrica (PG), podendo ser finita ou infinita:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k \quad \text{Soma finita de n termos}$$

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k \quad \text{Soma infinita}$$

Em particular, uma série geométrica infinita cujo o primeiro termo é igual a 1 pode ser escrita assim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

: Dado  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , a série geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ , converge se, e somente se,  $0 < |r| < 1$ .

Neste caso, a sua soma é igual a  $\frac{1}{1-r}$

**Prova.** Sendo  $S_k = 1 + r + r^2 + \dots + r^{k-1}$  a soma dos  $k$  primeiros termos da sequência geométrica. Por se tratar de uma soma finita, podemos multiplicar ambos os termos da igualdade por  $1 - r$ :

$$(1-r)S_k = (1-r)(1+r+r^2+\dots+r^{k-1}) = (1-r) + (r-r^2) + (r^2-r^3) + \dots + (r^{k-1}-r^k) = 1-r^k$$

Segue daí, para  $r \neq 1$ , a fórmula para soma dos  $k$  primeiros termos de uma progressão geométrica Progressão Geométrica (PG) que

$$S_k = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{k-1} = \frac{1-r^k}{1-r} \quad (2.1)$$

Agora, Se  $0 < |r| < 1$ , temos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} r^k = 0$ . Portanto,

$$S_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1-r^k}{1-r} \right) = \frac{1}{1-r}$$

Observe que, se  $|r| = 1$  temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} |r^k| = 1$ , e se  $|r| > 1$ , então a  $\lim_{k \rightarrow \infty} |r^k| = +\infty$ , de forma que sequências das somas parciais não convergem, pois é necessário que  $\lim_{k \rightarrow \infty} |r^k| = 0$  que só ocorre quando  $|r| < 1$ . Portanto, nestes casos, a série geométrica diverge.

Lembrando que a queação 2.1 é a primeira fórmula que precisaremos. Ela é útil para os próximos capítulos, no Capítulo 3, é a ferramenta para encontrar a área sob certas curvas e, finalmente, no Capítulo 4, ela nos ajuda a mostrar que um círculo está relacionada aos inversos de todos os números inteiros ímpares.

**Exemplo:** Considerando a sequencia  $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots\right)$ , em que  $r = \frac{1}{2}$ , a partir dela, formamos uma série geométrica convergente como é mostrado a baixo:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots = \frac{1}{1-(1/2)} = \frac{1}{(1/2)} = 2$$

Podemos fazer algumas observações calculando as somas parciais dos primeiros termos

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1,5 + 0,25 = 1,75$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1,75 + 0,125 = 1,875$$

Com apenas 4 termos, chegamos a um resultado de 1,875 que é bem próximo de 2.

Se continuar adicionando mais alguns termos obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 &= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} \\ &= 0,0625 + 0,03125 + 0,015625 + 0,0078125 + 0,00390625 + 0,001953125 = 0,123046875 \end{aligned}$$

Adicionando a 1,875, temos:

$$S_{10} = 1,875 + 0,123046875 = 1,998046875$$

Que é muitíssimo próximo de 2.

Para visualizar de outra forma, considere um experimento simples (figura 6): tome uma folha de papel e divida-a ao meio. Em seguida, pegue uma dessas metades e divida-a novamente ao meio, obtendo um quarto da folha original. Repita o processo, dividindo o próximo pedaço ao meio para obter um oitavo, e assim sucessivamente.

Sabendo que iniciamos com uma unidade inteira, é possível expressar essa divisão sucessiva como uma soma infinita: a unidade original é composta pela soma de

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

Essa construção exemplifica uma série geométrica infinita, onde cada termo sucessivo é metade do anterior, convergindo ao valor inicial de 1.

Ao somar 1, em ambos os membros da equação, coincide com o a primeira parte do exemplo:

$$S_{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1 + 1 = 2$$



onde a série geométrica entre parênteses converge para  $\frac{1}{1-s^2}$ .

$$\frac{1}{1-s^2} - s \cdot \frac{1}{1-s^2} = \frac{1}{1-s^2} - \frac{s}{1-s^2} = \frac{1-s}{1-s^2} = \frac{1}{1+s} = \frac{1}{1-(-s)} = \frac{1}{1-r}$$

É possível que esta demonstração tenha surgido de forma incidental durante o estudo do problema de semelhança de triângulos, mas a prova se consolidou como parte da “literatura popular” da matemática, sendo simples e direta. Para iniciar, colocam-se segmentos de comprimentos  $1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \dots$  ao longo de uma linha, conforme ilustrado no diagrama a seguir:

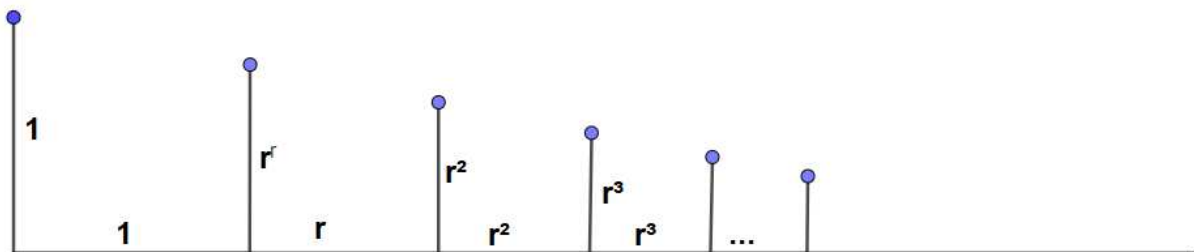
Figura 7 – Segmentos com comprimentos em progressão geométrica na reta



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em seguida, na extremidade esquerda de cada seção, desenhe um poste vertical tão longo quanto a seção, obtendo a figura a seguir.

Figura 8 – Representação de segmentos verticais sobre os pontos da progressão geométrica



Fonte: Elaborado pelo autor.

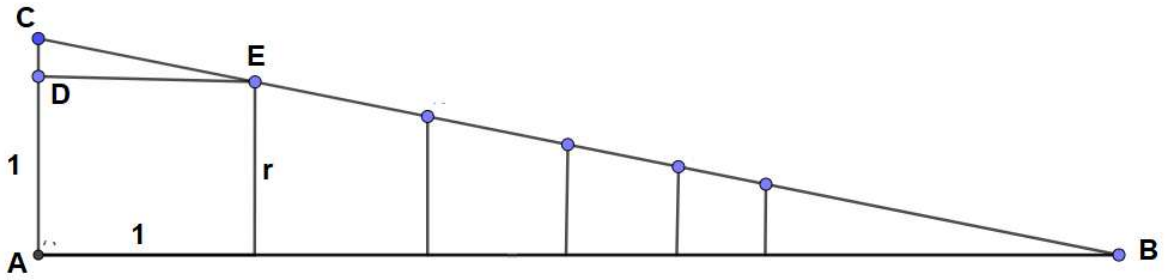
Observa-se que os pontos posicionados no topo dos segmentos, como lâmpadas sobre postes, alinham-se em uma reta. A seguir, traça-se a linha que passa por esses pontos, conforme ilustrado na figura 9.

Já vemos que a soma de todas as potências de  $r$  não fica arbitrariamente grande, já que sua soma é apenas o comprimento do segmento  $AB$ . Tudo o que resta é encontrar esse comprimento.

Pelos triângulos semelhantes  $CAB$  e  $CDE$ , temos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC}$$

Figura 9 – Triângulos semelhantes na demonstração geométrica da soma da série geométrica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma olhada no figura mostra que  $DE = 1$ ,  $AC = 1$  e  $DC = 1 - r$ . Portanto,

$$\frac{AB}{1} = \frac{1}{1-r}$$

por isso,

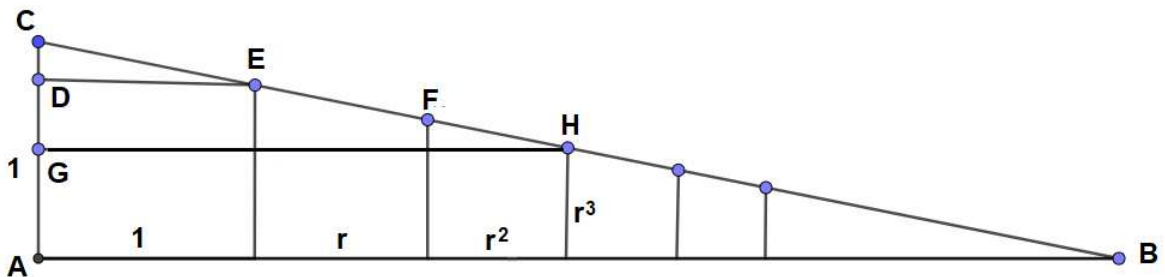
$$AB = \frac{1}{1-r}$$

e concluímos que

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots = \frac{1}{1-r} \quad (2.2)$$

Pode-se questionar: "A ideia é interessante, mas o que ocorre com a soma de apenas um número finito de termos, como, por exemplo  $1 + r + r^2$ ?" Para responder essa pergunta, observa-se, através do triângulo ABC, conforme a figura 10:

Figura 10 – Detalhe dos triângulos semelhantes para a soma parcial da série geométrica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Usando semelhança de triângulos entre os CDE e CGH a verificação é imediata.

$$\frac{GH}{DE} = \frac{CG}{CD} \Rightarrow \frac{1+r+r^2}{1} = \frac{1-r^3}{1-r}$$

E concluímos que

$$1 + r + r^2 = \frac{1-r^3}{1-r}$$

As demais somas parciais podem ser verificadas de forma análoga. Embora a apreciação estética seja subjetiva, há uma beleza intrínseca nesta demonstração geométrica. A simplicidade e clareza visual dessa abordagem tornam-na memorável e impactante, como se o resultado estivesse apenas aguardando para ser descoberto.

Vale notar que, neste caso, a geometria ilumina a álgebra. Em outros contextos, ocorre o inverso: a álgebra esclarece conceitos geométricos. Esse fenômeno é característico da matemática, onde áreas aparentemente distintas se interconectam de forma inesperada e fascinante, enriquecendo o entendimento e promovendo uma visão unificada do conhecimento.

A série geométrica nos fornece um importante exemplo de série convergente e uma fórmula elegante para sua soma quando  $|r| < 1$ . No entanto, nem todas as séries possuem essa estrutura simples. Para determinar a convergência de séries mais gerais, precisamos de outros critérios, como o Teste da Comparação, que exploraremos na próxima seção.

## 2.4 Critérios de convergência para séries de termos não negativos

### *Teste da Comparação*

Expandindo nossas ferramentas para analisar a convergência de séries, apresentamos nesta seção o Teste da Comparação. Este critério nos permite determinar se uma dada série converge ou diverge comparando-a com outra série cujo comportamento (convergência ou divergência) já é conhecido.

**Proposição:** Seja  $\sum a_n$  uma série de termos não-negativos ( $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ), e seja  $\sum b_n$  outra série de termos não-negativos. Se existir  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $0 \leq a_n \leq b_n$  para todo  $n \geq N$ , e se  $\sum b_n$  convergir, então  $\sum a_n$  também converge.

**Prova:** Suponha que exista  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $0 \leq a_n \leq b_n$  para todo  $n \geq N$ , e que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge. Considere as somas parciais:

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n,$$

$$T_k = \sum_{n=1}^k b_n.$$

Como  $\sum b_n$  converge, existe  $T = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k < \infty$ . Para  $k \geq N$ , temos:

$$S_k = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^k a_n \leq \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^k b_n \leq \sum_{n=1}^{N-1} a_n + T.$$

Portanto, a sequência  $(S_k)$  é monótona crescente (pois  $a_n \geq 0$ ) e limitada superiormente, logo converge pelo Teorema da Sequência Monótona. Assim,  $\sum a_n$  converge.

**Observação:** Se existir  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $0 \leq b_n \leq a_n$  para todo  $n \geq N$ , e se  $\sum b_n$  divergir, então  $\sum a_n$  também diverge. Para provar isso, suponha que exista  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $0 \leq b_n \leq a_n$  para todo  $n \geq N$ , e que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverge. Como  $b_n \geq 0$ , a divergência implica que as somas parciais  $T_k \rightarrow +\infty$ . Para  $k \geq N$ , temos:

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n \geq \sum_{n=N}^k a_n \geq \sum_{n=N}^k b_n = T_k - \sum_{n=1}^{N-1} b_n.$$

Como  $T_k \rightarrow +\infty$ , segue que  $S_k \rightarrow +\infty$ . Portanto,  $\sum a_n$  diverge. Esse teste é especialmente útil porque permite concluir sobre a convergência ou divergência de uma série comparando-a com uma série de comportamento conhecido (Lima, 2008).

### *Série Harmônica*

Existe uma série muito interessante cujo o nome vem do fato de termos são números relacionados com a escala musical, a série conhecida como série harmônica, que é série dos inversos de todos os números naturais:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \quad (2.3)$$

A divergência dessa série que pode ser mostrada ao comparar com uma série de termos menores que também diverge usando o método da comparação.

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{n}{2} = +\infty$ , então

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{2^n \rightarrow \infty} S_{2^n} = +\infty$$

Uma soma infinita de  $1/2$ . Como somar mais e mais  $1/2$  levará para além de qualquer número, ou seja, diverge. Portanto, pelo método da comparação, a soma dos inversos de todos os números naturais também diverge.

### *Série-p, a Série Harmônica Generalizada*

Agora, Considere a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  onde  $r > 0$ . Temos que:

- Para  $p = 1$  (série harmônica), a série diverge. (Que já foi demonstrado)
- Para  $p > 1$ , a série converge.

**Prova para o Caso  $p > 1$  (Convergência)** Para  $p > 1$ , considere  $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$ .

Agrupando os termos de forma conveniente:

$$T_n \leq 1 + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \dots + \left( \frac{1}{(2^m)^p} + \dots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^p} \right)$$

onde  $2^m \leq n < 2^{m+1}$ . Esta estimativa pode ser majorada por uma série geométrica:

$$T_n < \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^k = \frac{1}{1 - 2^{-(p-1)}}$$

Portanto, a sequência  $(T_n)$  é limitada e monótona, logo convergente.

A soma da série convergente  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  para  $p > 1$  define a função zeta de Riemann:

$$\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

Alguns valores notáveis são conhecidos, como  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ . Contudo, para muitos valores de  $p$ , especialmente inteiros ímpares maiores que 1, os valores exatos de  $\zeta(p)$  permanecem como problemas em aberto na matemática.

### *A Série dos Inversos dos Quadrados: A ideia de Euler*

Como podemos esperar de L. Euler, a sua ideia é muito esperta: ele começa com o fato elementar de que todo polinômio  $P$  pode ser fatorado em polinômios lineares da forma  $(x - \alpha)$ ,  $\alpha$  sendo um número complexo, sempre que  $\alpha$  é uma raiz de  $P$  e assume que o mesmo pode ser feito com séries infinitas (de fato, Euler anunciou esta solução em 1735, mas a justificativa rigorosa só foi aparecer em 1741 precisamente por causa dessa ‘propriedade’ para séries infinitas que ele assume).

Mais precisamente, Euler olha para a expansão em série do seno:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Dividindo por  $x$  temos

$$(1) \quad \frac{\text{sen } x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

Por outro lado, sabemos que os zeros de  $\frac{\text{sen } x}{x}$  ocorrem exatamente nos pontos  $x = \pm n\pi$  com  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Em particular, supondo que podemos fatorar esta série em fatores lineares (em analogia com o caso de polinômios) obtemos

$$\frac{\text{sen } x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

**Observação 1.** Normalmente, quando fatoramos um polinômio, escrevemos ele como produto de polinômios lineares da forma  $(x - \alpha)$ . No entanto, na expressão acima estamos trocando  $(x - \alpha)$  por  $\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = (\alpha - x)/\alpha$  na esperança de obter uma expressão que resulte em um produtório convergente (com efeito, a análise de convergência de um produtório é feita olhando a distância do termo geral para 1).

Agora, separando o ‘coeficiente’ de  $x^2$  no produtório acima, obtemos

$$- \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \right)$$

Entretanto, o coeficiente de  $x^2$  na expansão em série de Taylor de  $\frac{\text{sen } x}{x}$  é  $-1/3! = -1/6$ . Logo, temos a identidade

$$- \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \right) = -\frac{1}{6}$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Observação 2.** Obviamente, como já advertimos anteriormente, esta demonstração não é rigorosa.

### *Primeira prova mais rigorosa*

Agora, apresentaremos uma derivação rigorosa da célebre solução de Euler para o problema de Basel, que consiste em determinar a soma da série dos inversos dos quadrados dos números naturais.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

A abordagem que seguiremos utiliza integrais duplas e uma engenhosa mudança de variáveis. Começamos por estabelecer uma representação integral para o termo geral da série,

$\frac{1}{n^2}$ . Observe que a integral de  $x^{n-1}$  com respeito a  $x$  de 0 a 1 é  $\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}$ . Portanto, podemos escrever:

$$\frac{1}{n^2} = \left(\int_0^1 x^{n-1} dx\right) \left(\int_0^1 y^{n-1} dy\right).$$

Como as variáveis de integração são independentes, podemos combinar estas duas integrais simples em uma integral dupla sobre o quadrado unitário  $[0, 1] \times [0, 1]$  no plano  $xy$ :

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} y^{n-1} dx dy.$$

Esta identidade é a base para o que se segue.

Agora, desejamos somar  $\frac{1}{n^2}$  para  $n$  de 1 a  $\infty$ . Utilizando a representação integral acima, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} y^{n-1} dx dy.$$

Para justificar a troca da ordem da somatória com a integral dupla, podemos invocar o Teorema da Convergência Monotônica (Stewart, 2010). Como  $x^{n-1} y^{n-1} = (xy)^{n-1}$  é não-negativo para  $x, y \in [0, 1]$ , a troca é permitida:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (xy)^{n-1}\right) dx dy.$$

A soma interna  $\sum_{n=1}^{\infty} (xy)^{n-1}$  é uma série geométrica de primeiro termo  $a = (xy)^{1-1} = (xy)^0 = 1$  (assumindo  $xy \neq 0$ ) e razão  $r = xy$ . Para  $x, y \in [0, 1)$ , temos  $0 \leq xy < 1$ , garantindo a convergência da série geométrica para  $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-xy}$ . Mesmo nos casos em que  $x = 1$  ou  $y = 1$  (mas não ambos simultaneamente 1), a convergência ainda se mantém, e o integrando permanece bem definido, exceto no ponto  $(1, 1)$ , que é um conjunto de medida nula e não afeta o valor da integral. Assim, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy.$$

Para resolver esta integral, faremos uma mudança de variáveis. A transformação escolhida é dada por  $x = u - v$  e  $y = u + v$ . Portanto, o elemento de área  $dx dy$  se transforma em  $|J| du dv = 2 du dv$ . O termo  $1 - xy$  no denominador torna-se  $1 - (u - v)(u + v) = 1 - (u^2 - v^2) = 1 - u^2 + v^2$ . A região original de integração é o quadrado unitário  $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . Precisamos determinar a nova região de integração  $Q$  no plano  $uv$ . As fronteiras da região  $R$  são transformadas da seguinte maneira:

1.  $x = 0 \implies u - v = 0 \implies u = v$
2.  $x = 1 \implies u - v = 1 \implies v = u - 1$
3.  $y = 0 \implies u + v = 0 \implies v = -u$
4.  $y = 1 \implies u + v = 1 \implies v = 1 - u$

Analisando as interseções dessas retas, encontramos que a nova região de integração  $Q$  é um quadrado no plano  $uv$  com vértices em  $(0,0)$ ,  $(1/2, -1/2)$ ,  $(1,0)$  e  $(1/2, 1/2)$ .

Substituindo na integral, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \iint_Q \frac{2}{1-u^2+v^2} du dv = 2 \iint_Q \frac{du dv}{1-u^2+v^2}.$$

O quadrado  $Q$  é o que foi descrito com vértices  $(0,0)$ ,  $(1/2, 1/2)$ ,  $(1/2, -1/2)$  e  $(1,0)$ . Podemos explorar as simetrias deste quadrado e do integrando. O integrando  $\frac{1}{1-u^2+v^2}$  é uma função par em  $v$ . A região  $Q$  é simétrica em relação ao eixo  $u$  (a reta  $v = 0$ ). A integral sobre  $Q$  pode ser dividida explorando essa simetria. Dividimos a região  $Q$  em duas partes pela reta  $u = 1/2$ :

- Para  $0 \leq u \leq 1/2$ ,  $v$  varia de  $-u$  a  $u$ .
- Para  $1/2 \leq u \leq 1$ ,  $v$  varia de  $-(1-u)$  a  $1-u$ .

Devido à simetria do integrando em relação a  $v$ , ou seja,  $f(u, v) = f(u, -v)$ , podemos integrar  $v$  de 0 até o limite superior e multiplicar por 2. Assim, a integral sobre  $Q$  é expressa como:

$$\iint_Q \frac{du dv}{1-u^2+v^2} = 2 \int_0^{1/2} \left( \int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du + 2 \int_{1/2}^1 \left( \int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du.$$

Vamos calcular a integral interna em  $v$ :  $\int \frac{dv}{(1-u^2)+v^2}$ . Esta é da forma  $\int \frac{dw}{a^2+w^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{w}{a}\right)$ , onde  $a^2 = 1-u^2$ . Assumindo  $1-u^2 > 0$  (o que é verdade para  $u \in [0, 1)$ ), temos  $a = \sqrt{1-u^2}$ .

Logo,

$$\int_0^k \frac{dv}{1-u^2+v^2} = \left[ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right) \right]_0^k = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{k}{\sqrt{1-u^2}}\right).$$

Aplicando este resultado às duas integrais, com  $k = u$  para a primeira e  $k = 1-u$  para a segunda:

$$\iint_Q \frac{du dv}{1-u^2+v^2} = 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + 2 \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du.$$

Para a primeira integral, utilizamos a identidade trigonométrica  $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsen x$ . Esta identidade pode ser visualizada considerando um triângulo retângulo com cateto oposto  $x$ , hipotenusa 1, e cateto adjacente  $\sqrt{1-x^2}$ . O ângulo  $\alpha$  tal que  $\sen \alpha = x$  tem  $\tan \alpha = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Assim, a primeira integral (sem o fator 2 na frente) é:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du = \int_0^{1/2} \frac{\arcsen u}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

Para resolver esta integral, fazemos a substituição  $w = \arcsen u$ . Então,  $dw = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$ . Os limites de integração mudam: quando  $u = 0$ ,  $w = \arcsen 0 = 0$ . Quando  $u = 1/2$ ,  $w = \arcsen(1/2) = \pi/6$ . Portanto,

$$\int_0^{1/2} \frac{\arcsen u}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_0^{\pi/6} w dw = \left[ \frac{w^2}{2} \right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{6} \right)^2 - 0 = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{72}.$$

Agora, consideramos a segunda integral (sem o fator 2 na frente):

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left( \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du.$$

Fazemos a mudança de variável  $\theta = \arctan \left( \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right)$ . Observamos que  $\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1-u}{\sqrt{(1-u)(1+u)}} = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$ . Então  $\theta = \arctan \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$ . Segue que  $\tan^2 \theta = \frac{1-u}{1+u}$ . Isolando  $u$ :  $(1+u) \tan^2 \theta = 1-u \implies \tan^2 \theta + u \tan^2 \theta = 1-u \implies u(\tan^2 \theta + 1) = 1 - \tan^2 \theta \implies u \sec^2 \theta = 1 - \tan^2 \theta$ . Assim,  $u = \frac{1 - \tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} = (1 - \tan^2 \theta) \cos^2 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$ . A fortiori,  $2\theta = \arccos u$ , ou seja,  $\theta = \frac{1}{2} \arccos u$ . Usando  $\arccos u = \frac{\pi}{2} - \arcsen u$ , temos  $\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsen u \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsen u$ . Portanto, a segunda integral torna-se:

$$\int_{1/2}^1 \frac{\left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsen u \right)}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

Esta integral pode ser resolvida como:

$$\int \frac{\left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsen u \right)}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{\pi}{4} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{\arcsen u}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{\pi}{4} \arcsen u - \frac{1}{2} \frac{(\arcsen u)^2}{2} + C.$$

Então, avaliando nos limites:

$$\left[ \frac{\pi}{4} \arcsen u - \frac{(\arcsen u)^2}{4} \right]_{u=1/2}^{u=1}.$$

Para  $u = 1$ :  $\frac{\pi}{4} \arcsen(1) - \frac{(\arcsen 1)^2}{4} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{2} \right) - \frac{(\pi/2)^2}{4} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{2\pi^2 - \pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16}$ . Para  $u = 1/2$ :  $\frac{\pi}{4} \arcsen(1/2) - \frac{(\arcsen(1/2))^2}{4} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{6} \right) - \frac{(\pi/6)^2}{4} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2/36}{4} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{144} = \frac{6\pi^2 - \pi^2}{144} = \frac{5\pi^2}{144}$ . Subtraindo os valores:

$$\frac{\pi^2}{16} - \frac{5\pi^2}{144} = \frac{9\pi^2 - 5\pi^2}{144} = \frac{4\pi^2}{144} = \frac{\pi^2}{36}.$$

Substituindo os resultados das duas integrais (já multiplicados por 2 como na expressão original) na equação para  $\iint_Q$ :

$$\iint_Q \frac{dudv}{1-u^2+v^2} = 2 \left( \frac{\pi^2}{72} \right) + 2 \left( \frac{\pi^2}{36} \right) = \frac{\pi^2}{36} + \frac{\pi^2}{18}.$$

Para somar estas frações, encontramos um denominador comum, que é 36:

$$\frac{\pi^2}{36} + \frac{2\pi^2}{36} = \frac{3\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Este valor é o resultado da integral  $\iint_Q \frac{dudv}{1-u^2+v^2}$ .

Finalmente, recordamos que a soma original era:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \iint_Q \frac{dudv}{1-u^2+v^2}.$$

Substituindo o valor que acabamos de calcular para a integral dupla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{12}.$$

Realizando a multiplicação final, concluímos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (2.4)$$

Este é o famoso resultado do problema de Basel, obtido aqui através de uma elegante, embora intrincada, avaliação de integrais duplas. Cada passo, desde a representação integral de  $1/n^2$  até a cuidadosa mudança de variáveis e subsequente integração, contribui para a robustez e beleza desta prova.

### ***Segunda prova mais rigorosa***

Utilizando séries de Fourier da função  $f(x) = x$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

A função  $f(x) = x$  é ímpar e periódica com período  $2\pi$ . Portanto, sua série de Fourier contém apenas termos de seno:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nx)$$

onde os coeficientes  $b_n$  são dados por:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \text{sen}(nx) dx$$

Como  $x \text{sen}(nx)$  é uma função par, podemos simplificar a integral:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \text{sen}(nx) dx$$

Vamos calcular cada  $b_n$  por Integração por Partes, com:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx,$$

$$dv = \text{sen}(nx) dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{\cos(nx)}{n}.$$

Assim:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) dx \right]$$

Calculando os termos:

$$-\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^\pi = -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + 0 = -\frac{\pi(-1)^n}{n},$$

$$\int_0^\pi \cos(nx) dx = \frac{\text{sen}(nx)}{n} \Big|_0^\pi = 0.$$

Portanto:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\pi(-1)^n}{n} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

A série de Fourier resultante de  $f(x) = x$  é:

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\text{sen}(nx)}{n}, \quad \text{para } x \in (-\pi, \pi).$$

Agora vamos a aplicação da identidade de Parseval para séries de Fourier é dada por:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Para  $f(x) = x$ , temos:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad (\text{função ímpar}), \quad b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

Substituindo na identidade de Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n} \right)^2.$$

Calculando a integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}.$$

Assim:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Simplificando:

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Portanto, dividindo ambos os lados por 4, demonstramos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

utilizando séries de Fourier e a identidade de Parseval (Apostol, 2000).

A obtenção deste resultado através de métodos como a avaliação de integrais duplas, conforme mencionado, demonstra a robustez e a beleza da análise matemática. Após admirar um resultado tão belo, uma pergunta natural emerge: "E quanto à soma dos inversos dos cubos?"

Essa pergunta nos transporta a um território igualmente fascinante, porém muito mais misterioso.

### A soma dos inversos dos cubos: a constante de apéry

De forma análoga ao Problema de Basel, podemos definir a soma dos inversos dos cubos como uma série infinita, representada pela função Zeta de Riemann avaliada em 3:

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

Esta série também converge para um valor específico, que é aproximadamente 1.2020569...

No entanto, aqui começam as grandes diferenças em relação ao Problema de Basel.

Apesar de séculos de esforço dos maiores matemáticos, incluindo o próprio Leonhard Euler, ninguém jamais encontrou uma "forma fechada" para este valor. Ou seja, não se conhece uma expressão que represente  $\zeta(3)$  usando uma combinação finita de constantes matemáticas fundamentais (como  $\pi$ ,  $e$  ou logaritmos), da mesma forma que  $\frac{\pi^2}{6}$  representa a soma dos inversos dos quadrados.

A importância e o mistério que cercam esta constante são tão grandes que ela recebeu um nome próprio: a **Constante de Apéry**.

O grande avanço em nossa compreensão sobre  $\zeta(3)$  não foi a descoberta de seu valor exato, mas sim de sua natureza fundamental. Em 1978, o matemático francês **Roger Apéry** apresentou uma prova surpreendente de que a constante que hoje leva seu nome é um **número irracional**. Isso significa que  $\zeta(3)$  não pode ser expresso como uma fração de dois números inteiros.

A prova de Apéry foi um feito monumental, resolvendo um problema que permanecia aberto por muito tempo. Enquanto a beleza da solução do Problema de Basel reside na elegância de seu resultado final, a beleza na história da Constante de Apéry reside na genialidade e na complexidade da demonstração de sua irracionalidade.

Ao passar da soma dos inversos dos quadrados para os cubos, saímos de um problema elegantemente resolvido para um dos grandes mistérios em aberto da matemática. Questões sobre a natureza de  $\zeta(3)$  — por exemplo, se é um número transcendente (como  $\pi$  e  $e$ ) — ainda permanecem sem resposta. A busca por essas soluções continua a inspirar matemáticos em todo o mundo, mostrando que mesmo as questões mais simples de se formular podem levar às fronteiras do conhecimento humano.

### *Série dos inversos dos primos*

Consideramos a série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{p} + \cdots, \quad (2.5)$$

onde os denominadores  $p$  são os números primos em ordem crescente. É uma série especialmente interessante de se trabalhar (Honsberger, 1998).

Vemos, então, que a série geométrica converge, enquanto a harmônica diverge. Notamos que a série  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  tem todos os seus termos pertencentes também na séries harmônica. Ou seja, termos suficientes da série harmônica foram removidos para reduzir a soma a um número finito. Agora, a série dos inversos dos primos também pode ser obtida a partir da série harmônica removendo termos. Surge a questão: será que termos deletados foram suficientes para produzir uma série convergente? Nosso principal objetivo é provar de que a série dos inversos dos primos diverge (Hardy e Wright, 1960).

Prosseguimos pelo método indireto; ou seja, assumindo que a série converge, argumentamos até uma contradição.

Se a série dos inversos dos primos convergisse para uma soma  $S$ , então todo número menor que  $S$  eventualmente seria ultrapassado pelas somas parciais. Em particular, as somas parciais eventualmente excedem  $S - \frac{1}{2}$ . Suponha que isso ocorra após a adição do  $n$ -ésimo termo  $1/p_n$  da série:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{p_{n-1}} \leq S - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{p_{n-1}} + \frac{1}{p_n} > S - \frac{1}{2}.$$

A soma de todos os termos restantes,

$$\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \cdots,$$

deve, então, ser menor que  $\frac{1}{2}$ ; caso contrário, o total seria maior que  $S$ , o que não é o caso. Para algum valor de  $n$ , então, temos:

$$\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \cdots < \frac{1}{2}.$$

Agora, fazemos uma digressão para uma área aparentemente não relacionada. Considere a sequência de números primos, em ordem crescente, além do  $k$ -ésimo primo:

$$p_{k+1}, \quad p_{k+2}, \quad \cdots$$

Seja  $N(x)$  o número de inteiros positivos menores ou iguais ao inteiro positivo  $x$  que não são divisíveis por nenhum dos primos

$$p_{k+1}, \quad p_{k+2}, \quad \cdots$$

Em outras palavras,  $N(x)$  é o número de inteiros positivos  $\leq x$ , cujos fatores primos estão entre os primeiros  $k$  números primos  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Por exemplo, se  $k = 4$ , então

$$\{p_5, p_6, p_7, p_8, \dots\} = \{11, 13, 17, 19, \dots\},$$

e

$$N(10) = 10, \quad N(15) = 13, \quad N(27) = 20.$$

Ou seja, nenhum inteiro de 1 a 10 é divisível por 11, 13, 17,  $\dots$ , logo  $N(10) = 10$ ; no intervalo de 1 a 15, apenas dois inteiros (11 e 13) são divisíveis por algum dos primos 11, 13, 17,  $\dots$ , logo  $N(15) = 13$ ; no intervalo de 1 a 27, sete inteiros (11, 13, 17, 19, 22, 23, 26) são divisíveis por um dos primos 11, 13, 17,  $\dots$ , logo  $N(27) = 20$  para  $k = 4$ .

Suponha que algum valor para  $k$  tenha sido decidido e os valores de  $N(x)$  determinados de acordo. (O valor particular de  $k$  é irrelevante neste momento.) Podemos estimar o tamanho de  $N(x)$  da seguinte forma.

Seja  $y$  qualquer inteiro positivo; ele pode ser fatorado em seus fatores primos:

$$y = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_t^{a_t},$$

onde alguns dos expoentes  $a_1, a_2, \dots, a_t$  podem ser ímpares e outros pares. Se um expoente  $a_i$  for ímpar, diminuimos para o próximo valor par inferior, transferindo um dos fatores  $p_i$  para o final da expressão. Por exemplo, se  $y = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0$ , reescrevemos como:

$$y = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0)(3 \cdot 5).$$

Dessa forma, podemos escrever  $y = uv$ , onde cada fator primo em  $u$  aparece um número par de vezes e cada um em  $v$  aparece exatamente uma vez. Como os fatores de  $u$  aparecem um número par de vezes,  $u$  é um quadrado perfeito; logo, podemos escrever:

$$y = w^2 \cdot v,$$

onde  $v$  não possui fatores repetidos. Agora, para que um inteiro  $y$  seja contado por  $N(x)$ , ele deve satisfazer as condições:

1.  $y \leq x$ ,
2. todos os fatores primos de  $y$  devem estar entre os primeiros  $k$  primos  $p_1, p_2, \dots, p_k$ .

Para estimar  $N(x)$ , estimamos o número de inteiros positivos  $y = w^2v$  que satisfazem (i) e (ii). Para satisfazer (1), certamente devemos estipular que  $w^2v \leq x$ , e como  $v \geq 1$ , devemos exigir que:

$$w \leq \sqrt{x}.$$

Para satisfazer (2), devemos garantir que todos os fatores primos de  $y = w^2v$ , e portanto certamente todos os fatores primos de  $v$ , estejam entre os primeiros  $k$  primos  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Logo, exigimos que  $v$  seja da forma:

$$v = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k},$$

onde, como  $v$  não contém fatores repetidos, cada um dos expoentes  $b_1, b_2, \dots, b_k$  é 0 ou 1. Como apenas duas escolhas são permitidas para cada um dos  $k$  expoentes, o número total de valores permitidos para  $v$  é no máximo  $2^k$ . (É menor que  $2^k$  se  $p_1 p_2 \cdots p_k > x$ , pois, nesse caso, alguns valores de  $v$  violariam a condição (1).)

O número de valores que  $y = w^2v$  pode assumir sem violar as condições (1) e (2) depende do número de valores permitidos para suas partes  $w$  e  $v$ . O número de escolhas para as partes são, respectivamente, no máximo  $\sqrt{x}$  e no máximo  $2^k$ . Consequentemente, pode haver no máximo:

$$2^k \sqrt{x}$$

valores adequados para  $y$ ; ou seja,

$$N(x) \leq 2^k \sqrt{x}.$$

Existem  $x$  inteiros positivos menores ou iguais ao inteiro  $x$ ;  $N(x)$  deles não são divisíveis por nenhum dos primos  $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots$ , então os restantes  $x - N(x)$  são divisíveis por algum primo  $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots$ . Podemos tentar contar esses  $x - N(x)$  números diretamente, registrando quantos números entre 1 e  $x$  são múltiplos de um dos primos  $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots$ . No conjunto  $\{1, 2, \dots, x\}$ , há no máximo  $x/p_{k+1}$  múltiplos de  $p_{k+1}$  (pois esses múltiplos  $p_{k+1}, 2p_{k+1}, 3p_{k+1}, \dots$  ocorrem apenas a cada  $p_{k+1}$ -ésima posição). Por exemplo, o conjunto  $\{1, 2, \dots, 20\}$  contém os seis múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18; e  $6 \leq 20/3$ . Da mesma forma, no máximo  $x/p_{k+2}$  dos números de 1 a  $x$  são múltiplos de  $p_{k+2}$ , e assim por diante. Portanto:

$$(1) \quad x - N(x) \leq \frac{x}{p_{k+1}} + \frac{x}{p_{k+2}} + \dots.$$

Observe que essa estimativa é definitivamente uma superestimativa para valores grandes de  $x$ ; por exemplo, quando  $x$  é divisível por ambos  $p_{k+1}$  e  $p_{k+2}$ , ele é contado uma vez em cada uma das expressões  $x/p_{k+1}$  e  $x/p_{k+2}$ , embora contribua apenas uma vez para  $x - N(x)$ .

Agora, voltando à questão principal. Já vimos que, se a série  $P$  converge, então para algum valor de  $n$  temos:

$$(2) \quad \frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \dots < \frac{1}{2}.$$

Tomemos  $k$  como sendo esse valor de  $n$  (qualquer que seja) e consideremos as funções correspondentes  $N(x)$  e  $x - N(x)$ . A relação (1) acima, para  $k = n$ , torna-se:

$$x - N(x) \leq \frac{x}{p_{n+1}} + \frac{x}{p_{n+2}} + \dots,$$

e multiplicando a relação (2) por  $x$ , obtemos (para qualquer  $x$ ):

$$\frac{x}{p_{n+1}} + \frac{x}{p_{n+2}} + \dots < \frac{1}{2}x.$$

Combinando esses resultados, temos:

$$x - N(x) < \frac{1}{2}x,$$

o que equivale a:

$$\frac{1}{2}x < N(x),$$

e vale para todos os valores de  $x$ . Mas anteriormente tínhamos que  $N(x) \leq 2^k \sqrt{x}$ , o que para  $k = n$  se torna:

$$N(x) \leq 2^n \sqrt{x}.$$

Portanto:

$$\frac{1}{2}x < N(x) \leq 2^n \sqrt{x}, \quad \text{para todo } x.$$

Para  $x$  igual a  $2^{2n+2}$ , obtemos:

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{2n+2} < N(x) \leq 2^n \cdot 2^{n+1}, \quad (\sqrt{x} = 2^{n+1}),$$

o que simplifica para:

$$2^{2n+1} < N(x) \leq 2^{2n+1}.$$

Essa contradição prova que a série  $P$  diverge. (Uma contradição similar é obtida para  $x$  igual a qualquer valor maior que  $2^{2n+2}$ .)

Uma observação interessante, pelo fato da série dos inversos dos primos ser divergente implica diretamente que a série harmônica diverge, pois a série harmônica contém todos os termos da série dos inversos dos primos.

## 2.5 Séries alternadas, convergência absoluta e condicional

### *Séries Alternadas*

Uma série é denominada **alternada** quando seus termos apresentam sinais alternados. Tal série pode ser expressa em uma das seguintes formas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$$

onde  $b_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

O **Crítério de Leibniz** consiste na seguinte ideia: Considere a série alternada  $\sum (-1)^{n-1} b_n$  onde  $b_n > 0$ . Se as seguintes condições forem satisfeitas:

1.  $b_{n+1} \leq b_n$  para todo  $n$  (sequência  $\{b_n\}$  é decrescente),
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ,

então a série é convergente. A demonstração é dividida em três partes:

**1. Análise das Somas Parciais Pares:** Considere as somas parciais pares  $S_{2n}$ :

$$S_2 = b_1 - b_2 \geq 0,$$

$$S_4 = S_2 + (b_3 - b_4) \geq S_2,$$

$$\vdots$$

$$S_{2n} = S_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geq S_{2n-2}.$$

Assim, a sequência  $\{S_{2n}\}$  é não-decrescente. Além disso:

$$S_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n} \leq b_1,$$

portanto,  $\{S_{2n}\}$  é limitada superiormente. Pelo Teorema da Sequência Monótona,  $\{S_{2n}\}$  converge para um limite  $S$ .

**2. Análise das Somas Parciais Ímpares:** Para as somas ímpares  $S_{2n+1}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + b_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

**3. Conclusão:** Como ambas as subsequências pares e ímpares convergem para  $S$ , concluímos que a sequência de somas parciais  $\{S_n\}$  converge para  $S$ , e portanto a série é convergente.

Diante de tudo isso, o que podemos concluir é a série alternada dos inversos dos números ímpares  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$  é convergente e o valor de sua soma será determinado no capítulo 4.

### ***Convergência absoluta***

A seguinte definição destaca uma classe importante de séries numéricas cuja análise de convergência é particularmente acessível:

**Definição.** Uma série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  é denominada **absolutamente convergente** quando a série associada  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  é convergente.

A relevância deste conceito é evidenciada pelo seguinte resultado fundamental:

**Teorema.** Toda série absolutamente convergente é necessariamente convergente.

**Prova** Considere  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  uma série absolutamente convergente. Definimos as somas parciais:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$$

Para quaisquer índices  $m > n \geq 1$ , vale a desigualdade:

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = T_m - T_n$$

Como  $\sum |a_k|$  converge por hipótese, a sequência  $(T_n)$  é de Cauchy. Assim, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $m > n > n_0$  temos  $T_m - T_n < \varepsilon$ . Consequentemente:

$$m > n > n_0 \Rightarrow |S_m - S_n| \leq T_m - T_n < \varepsilon$$

Isto estabelece que  $(S_n)$  também é uma sequência de Cauchy. Pelo critério de completude dos números reais, concluímos que  $\sum a_k$  converge.

### **Convergência Condicional**

Quando uma série é convergente, mas não é absolutamente convergente, é chamada de **Condicionalmente convergente**

Um exemplo de uma série que converge condicionalmente, ou seja, converge segundo o Critério de Leibniz, mas não absolutamente convergente é a **série harmônica alternada** é dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \quad (2.6)$$

### **Demonstração da Convergência (Critério de Leibniz)**

Para verificar a convergência, aplicamos o **Critério de Leibniz**, que estabelece que uma série alternada da forma  $\sum (-1)^{n+1} a_n$  converge se:

1.  $a_n$  é **decrecente**:  $a_{n+1} \leq a_n$  para todo  $n$ .
2.  $a_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

No caso da série harmônica alternada:

$$- a_n = \frac{1}{n}, \text{ que é decrescente } \left( \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \right).$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Portanto, a série **converge**. Porém a série **não converge absolutamente**, pois a série dos valores absolutos é a série harmônica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que é **divergente**.

Diante desse fato, a série harmônica alternada converge para um valor conhecido que vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2) \quad (\approx 0.6931).$$

Para demonstrar essa afirmação: usaremos a expansão em série de Taylor do logaritmo natural em  $x = 1$ :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad \text{para } -1 < x \leq 1.$$

Substituindo  $x = 1$ :

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Calculando os primeiros termos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \approx 0.6167,$$

que se aproxima de  $\ln(2) \approx 0.6931$  à medida que mais termos são adicionados.

Este é um exemplo clássico de uma série que converge devido ao cancelamento entre termos positivos e negativos, mas cuja versão absoluta diverge. Esse comportamento é típico de séries **condicionalmente convergentes**.

## 2.6 Ferramentas adicionais de análise de convergência

### *Teste da Razão ou Teste de d'Alambert*

**Proposição:** Seja  $\sum a_n$  uma série de termos positivos e considere o limite:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Então Se  $L < 1$ , a série  $\sum a_n$  converge absolutamente.

**Prova:** Seja  $L < 1$  e escolha  $r$  tal que  $L < r < 1$ . Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$  temos  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ . Isso implica:

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< ra_N \\ a_{N+2} &< ra_{N+1} < r^2 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &< r^k a_N \end{aligned}$$

A série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_N r^k$  é geométrica e converge pois  $r < 1$ . Pelo teste da comparação,  $\sum a_n$  converge.

1. Se  $L = 1$ , o teste é inconclusivo.

**Observação:** Se  $L > 1$  ou  $L = +\infty$ , a série  $\sum a_n$  diverge. Com efeito, seja  $L > 1$  e escolha  $r$  com  $1 < r < L$ . Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq N$  temos  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > r$ . Portanto:

$$\begin{aligned} a_{N+1} &> ra_N \\ a_{N+2} &> ra_{N+1} > r^2 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &> r^k a_N \end{aligned}$$

Como  $r > 1$ , os termos  $a_n$  não tendem a zero, logo a série diverge.

Se  $L = 1$ : O teste é inconclusivo, observe:

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n} &\text{ diverge com } L = 1 \\ \sum \frac{1}{n^2} &\text{ converge com } L = 1 \end{aligned}$$

Portanto, quando  $L = 1$ , a série pode convergir ou divergir.

### **Teste da Raiz ou Teste de Cauchy**

**Proposição:** Seja  $\sum a_n$  uma série, considere o limite:

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Então Se  $L < 1$ , a série  $\sum a_n$  converge absolutamente.

**Prova:** Seja  $L < 1$  e escolha  $r$  tal que  $L < r < 1$ . Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$ :

$$\sqrt[n]{a_n} < r \quad \Rightarrow \quad a_n < r^n.$$

Como  $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$  é uma série geométrica convergente ( $r < 1$ ), pelo teste da comparação direta,  $\sum a_n$  converge absolutamente.

**Observação:** Se  $L > 1$ , a série  $\sum a_n$  diverge. Com efeito, se  $L > 1$ , existe uma subsequência  $(a_{n_k})$  tal que:

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n_k} > 1.$$

Portanto,  $\liminf a_n \geq 1$  e o termo geral não tende a zero, logo a série diverge.

O teste mais uma vez é inconclusivo quando  $L = 1$ , Considere os exemplos:

$$\sum \frac{1}{n} \quad \text{diverge com } L = 1$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad \text{converge com } L = 1$$

Assim, quando  $L = 1$ , o comportamento da série não pode ser determinado por este critério.

## 2.7 Comutatividade e reordenamento de série de Riemann

Uma propriedade fundamental da adição de um número finito de termos é a comutatividade: a ordem em que os números são somados não altera o resultado final. Contudo, ao transitar para o domínio das séries infinitas, onde somamos uma infinidade de termos, surge a questão de se essa propriedade de comutatividade ainda se mantém. Ou seja, se rearranjarmos os termos de uma série convergente, a nova série ainda convergirá para a mesma soma? A resposta, surpreendentemente, depende da maneira como a série original converge (Lima, 2008).

**Proposição** Toda série absolutamente convergente é comutativamente convergente.

**Prova** Começemos com uma série convergente  $\sum a_n$ , onde  $a_n \geq 0$  para todo  $n$ . Seja  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma bijeção e ponhamos  $b_n = a_{\varphi(n)}$ . Afirmamos que  $\sum b_n = \sum a_n$ . Com efeito, sejam  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  e  $t_n = b_1 + \dots + b_n$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , chamemos de  $m$  o maior dos números  $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)$ . Então

$$\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\} \subseteq [1, m].$$

Segue-se que  $t_n = \sum_{i=1}^n a_{\varphi(i)} \leq \sum_{j=1}^m a_j = s_m$ .

Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe um  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $t_n \leq s_m$ . De modo análogo (considerando-se  $\varphi^{-1}$  em vez de  $\varphi$ ) se vê que para cada  $m \in \mathbb{N}$  existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $s_m \leq t_n$ . Concluimos que

$$\lim s_n = \lim t_n, \text{ ou seja } \sum a_n = \sum b_n.$$

No caso geral, temos  $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ , onde  $p_n$  e  $q_n$  são respectivamente a parte positiva e a parte negativa de  $a_n$ . Toda reordenação  $(b_n)$  dos termos  $a_n$  origina uma reordenação  $(u_n)$  para os  $p_n$  e uma reordenação  $(v_n)$  dos  $q_n$ , de tal modo que cada  $u_n$  é a parte positiva e cada  $v_n$  é a parte negativa de  $b_n$ . Pelo que acabamos de ver,  $\sum u_n = \sum p_n$  e  $\sum v_n = \sum q_n$ . Logo

$$\sum a_n = \sum u_n - \sum v_n = \sum b_n, \text{ o que prova o teorema.}$$

Isso significa que, para séries absolutamente convergentes, a ordem dos termos é irrelevante para o valor da soma. Podemos somá-los em qualquer ordem que desejarmos, e o resultado será sempre o mesmo.

A situação muda drasticamente quando consideramos séries que são condicionalmente convergentes. Para essas séries, a ordem dos termos não é apenas importante, mas crucial, como demonstrado pelo notável Teorema de **Rearranjo de Riemann** (também conhecido como **Teorema da Série de Riemann**).

**Teorema:** Seja  $\sum a_n$  uma série condicionalmente convergente. Dado qualquer número real  $c$ , existe uma reordenação  $(b_n)$  dos termos de  $\sum a_n$ , tal que  $\sum b_n = c$ .

**Prova:** Sejam  $p_n$  a parte positiva e  $q_n$  a parte negativa de  $a_n$ . Como  $\sum a_n$  converge condicionalmente, temos  $\lim a_n = 0$ , donde  $\lim p_n = \lim q_n = 0$ , mas  $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$ .

Reordenaremos os termos da série  $\sum a_n$  tomando como primeiros termos  $p_1, p_2, \dots, p_{n_1}$ , onde  $n_1$  é o menor índice tal que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} > c.$$

Em seguida, tomaremos os termos negativos  $-q_1, -q_2, \dots, -q_{n_2}$ , onde  $n_2$  é o menor índice tal que

$$p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{n_2} < c.$$

As escolhas de  $n_1$  e  $n_2$  são possíveis porque  $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$ .

Continuamos assim: escolhemos o menor índice  $n_3$  tal que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_3} > c$$

e depois o menor índice  $n_4$ , tal que

$$p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_3} - q_{n_2+1} - \dots - q_{n_4} < c.$$

Prosseguindo desta maneira, obtemos uma reordenação de  $\Sigma a_n$  tal que as reduzidas  $t_n$  da nova série tendem para  $c$ . Com efeito, para todo  $i$  ímpar temos

$$t_{n_i+1} < c < t_{n_i}, \quad 0 < t_{n_i} - c \leq p_{n_i}, \quad 0 < c - t_{n_i+1} < q_{n_i+1}.$$

Dáí resulta (levando em conta que  $\lim p_{n_i} = \lim q_{n_i} = 0$ ) que  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_{n_i} = c$ .

Além disso, é claro que:

- Para  $i$  ímpar,  $n_i < n < n_{i+1} \Rightarrow t_{n_i+1} \leq t_n \leq t_{n_i}$
- Para  $i$  par,  $n_i < n < n_{i+1} \Rightarrow t_{n_i} \leq t_n \leq t_{n_i+1}$

Assim  $\lim t_n = c$ , ou seja, a nova série tem soma  $c$ .

**Exemplo** Sabemos que  $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$  é convergente e até já informamos que  $s = \log 2$ . Podemos multiplicar os termos de uma série convergente por um número real. Multiplicando por  $1/2$ , obtemos  $\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots$ . Podemos escrever, evidentemente,

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots$$

Ao somar termo a termo duas séries convergentes. Logo

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Vê-se que os termos da série acima, cuja soma é  $\frac{3s}{2}$ , são os mesmos da série inicial, cuja soma é  $s$ , apenas com uma mudança de ordem. Logo um rearranjo na ordem dos termos de uma série convergente pode alterar o valor da sua soma.

Podemos observar que a série de Leibniz,  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ , converge. Isso pode ser demonstrado utilizando o Teste de Leibniz para Séries Alternadas, pois os termos (tanto os positivos quanto negativos), são em módulo decrescentes e tendem a zero.

No entanto, usando o teste da comparação vemos que a série dos valores absolutos dos seus termos,  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$ , é maior que a metade da serie harmônica que claramente diverge. Logo a série dos valores absolutos dos termos da série de Leibniz diverge como é pode ser observado abaixo

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots \right) \quad (2.7)$$

Como a série original converge, mas a série dos valores absolutos diverge, a Série de Leibniz é classificada como condicionalmente convergente. Isso significa que a a série converge especificamente para  $\pi/4$  (que será demonstrado no Capítulo 4) devido uma consequência direta da ordem precisa em que os termos são apresentados e somados. Qualquer alteração nessa ordem poderia levar a um valor diferente ou à perda da convergência. Essa característica sublinha a beleza e a delicadeza da Série de Leibniz.

Com os fundamentos sobre sequências e séries estabelecidos, incluindo critérios essenciais de convergência, estamos agora munidos das ferramentas necessárias para explorar como esses conceitos podem ser aplicados na resolução de problemas clássicos da geometria e do cálculo. No próximo capítulo, veremos como as ideias de séries, em particular as somas de potências, emergem naturalmente ao abordarmos o desafio de calcular áreas delimitadas por curvas, abrindo caminho para a manipulação algébrica que nos será crucial mais adiante.

### 3 DO CÁLCULO DE ÁREAS AOS CÁLCULOS DO $\pi$

Neste capítulo, voltaremos nossa atenção para um problema geométrico fundamental: o cálculo de áreas sob curvas. Veremos que, surpreendentemente, a abordagem para determinar tais áreas nos conduzirá de volta ao universo das somas e séries que exploramos no Capítulo 2, revelando uma profunda conexão entre a geometria e a análise matemática, e preparando o terreno para as manipulações algébricas que culminarão em importantes fórmulas gerais. O capítulo se dividirá em seções interligadas: abordaremos métodos para determinar a área sob uma curva em um intervalo e de como o cálculo de áreas pode expressar somas de potências de números naturais; em seguida exploraremos as séries de potências sem o uso da geometria, contribuindo para o cálculo de  $\pi$  no próximo capítulo.

#### 3.1 Definição de área do polígono

De maneira intuitiva, a área de uma região no plano é um valor positivo que podemos associar a essa região, permitindo-nos medir o espaço que ela ocupa. Consideremos uma figura plana como uma região fechada em um plano bidimensional. A área dessa figura é uma medida que satisfaz os seguintes postulados (Stewart, 2010):

**Postulado de Existência e Positividade** A toda figura plana corresponde um único número positivo, chamado de área, que representa o "tamanho" da superfície interna delimitada pela figura. A área de qualquer figura plana é sempre maior ou igual a zero.

**Postulado de Congruência** Figuras planas congruentes (isto é, figuras que podem ser sobrepostas exatamente uma sobre a outra) possuem áreas iguais.

**Postulado de Aditividade (ou Adição de Áreas)** Se uma figura pode ser dividida em partes que não se sobrepõem, a área da figura é a soma das áreas dessas partes. Permitindo calcular a área de uma figura complexa a partir da soma das áreas de figuras mais simples.

**Postulado de Invariância por Translação e Rotação** A área de uma figura plana não muda se a figura for transladada ou rotacionada no plano. Em outras palavras, o valor da área é independente da posição ou orientação da figura.

**Postulado de Normalização (Área do Quadrado Unidade)** Um quadrado com lado igual a 1 unidade de comprimento possui área igual a 1 unidade quadrada. Esse postulado estabelece uma unidade padrão para a medição de áreas, servindo como referência para o cálculo de áreas de outras figuras.

Com base nesses postulados, a **área de uma figura plana** pode ser definida como a medida numérica que quantifica o "espaço" interno dessa figura, respeitando as propriedades de congruência, aditividade, e invariância, e utilizando a área de um quadrado unidade como referência de medida.

Por definição, temos que o quadrado de lado 1 possui área 1. Considere, agora, um quadrado de lado  $\frac{m}{n}$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ , e área  $A_{\frac{m}{n}}$ . Arranje  $n^2$  cópias do mesmo, empilhando  $n$  quadrados de lado  $\frac{m}{n}$  por fila, em  $n$  filas, formando assim um quadrado de lado  $\frac{m}{n} \cdot n = m$ . Tal quadrado maior terá, como já sabemos, área  $m^2$ ; por outro lado, como ele está particionado em  $n^2$  quadrados de lado  $\frac{m}{n}$  cada, sua área é igual à soma das áreas desses  $n^2$  quadrados, i.e.,

$$m^2 = n^2 \cdot A_{\frac{m}{n}}.$$

Portanto,

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

A discussão acima sugere que a área de um quadrado de lado  $l$  deve ser igual a  $l^2$ . Para confirmar tal suposição, argumentamos que, para  $k \in \mathbb{N}$ , tomamos números racionais  $x_k$  e  $y_k$  tais que

$$x_k < l < y_k \quad \text{e} \quad y_k - x_k < \frac{1}{k}.$$

Em seguida, construímos quadrados de lados  $x_k$  e  $y_k$ , o primeiro contido no quadrado dado e o segundo o contendo. Como já sabemos calcular áreas de quadrados de lado racional. Podemos garantir que a área  $A_l$  do quadrado de lado  $l$  deve satisfazer as desigualdades

$$x_k^2 < A_l < y_k^2.$$

Mas como  $x_k^2 < l^2 < y_k^2$ , concluímos que ambos os números  $A_l$  e  $l^2$  devem pertencer ao intervalo  $(x_k^2, y_k^2)$ , de maneira que

$$|A_l - l^2| < y_k^2 - x_k^2 = (y_k - x_k)(y_k + x_k) < \frac{1}{k}(y_k - x_k + 2x_k) < \frac{1}{k} \left( \frac{1}{k} + 2l \right).$$

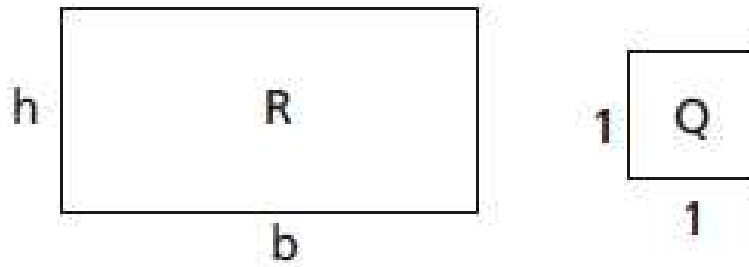
Tendo de satisfazer a desigualdade acima para todo número natural  $k$ , temos que  $|A_l - l^2| = 0$ ,

$$A_l = l^2.$$

Logo temos que todo quadrado de lado  $l$  tem área  $l^2$

Para calcular a área de um retângulo de base  $b$  e altura  $h$  ao dividi-lo em uma grade de quadrados unidade. Como cada quadrado tem área igual a 1 unidade quadrada, a área total do retângulo será o produto  $b \times h$ , conforme o Postulado de Aditividade (Dolce e Pompeo, 2005).

Figura 11 – Definição de área: Retângulo formado por quadrados unitários



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p. 306).

Um argumento análogo ao acima permite provar que um retângulo de lados  $b$  e  $h$  tem área igual a  $bh$ . Começamos com um retângulo de lados  $m, n \in \mathbb{N}$ , particionando-o em  $mn$  quadrados de lado 1 para mostrar que sua área é  $mn$ . Em seguida, tomamos um retângulo de lados  $\frac{m_1}{n_1}$  e  $\frac{m_2}{n_2}$ , com  $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , e, com  $n_1 n_2$  cópias do mesmo, montamos um retângulo maior de lados  $m_1$  e  $m_2$ . Somando áreas iguais, concluímos que a área do retângulo dado originalmente é igual a

$$\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}.$$

Por fim, tomamos um retângulo de lados  $h, h > 0$  reais, e, para  $k \in \mathbb{N}$ , racionais  $x_k, y_k, u_k, v_k$  tais que  $x_k < b < y_k$ ,  $u_k < h < v_k$  e  $y_k - x_k, v_k - u_k < \frac{1}{k}$ . Sendo  $A$  a área do retângulo de lados  $b$  e  $h$ , um argumento análogo ao feito para quadrados garante que  $A$  e  $bh$  pertencem ambos ao intervalo  $(u_k x_k, y_k v_k)$  e, daí, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

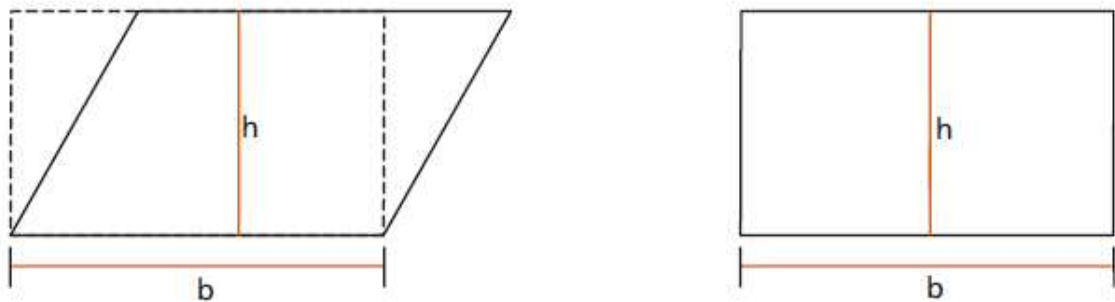
$$\begin{aligned} |A - bh| &< v_k y_k - u_k x_k = (v_k - u_k) y_k + u_k (y_k - x_k) \\ &< \frac{1}{k} (y_k + u_k) = \frac{1}{k} ((y_k - x_k) + 2x_k + (v_k - u_k) + 2u_k) < \frac{1}{k} \left( \frac{2}{k} + 2b + 2h \right). \end{aligned}$$

Também como antes, a validade da desigualdade acima para todo  $k \in \mathbb{N}$  garante que

$$A = bh$$

A fórmula para a área do paralelogramo pode ser justificada ao comparar essa figura com um retângulo. Se cortarmos um triângulo em um dos lados do paralelogramo e o movêssemos para o lado oposto, ele se transformaria em um retângulo com as mesmas base  $b$  e altura  $h$ . A área desse retângulo, que é  $b \cdot h$ , equivale à área do paralelogramo, já que o corte e deslocamento não alteram o total de área.

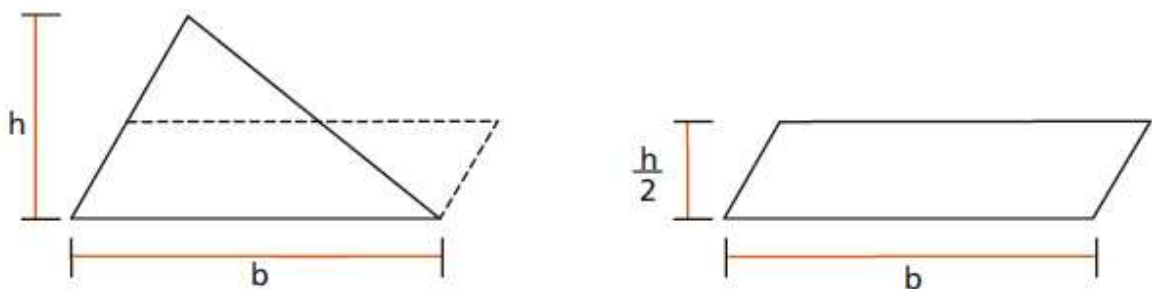
Figura 12 – Demonstra a fórmula da área do paralelogramo pela translação de um triângulo



Fonte: Dolce e Pompeo (2025, p. 307).

A fórmula para área do triângulo pode ser entendida como a área de um paralelogramo de mesma base, mas com a metade da altura, logo a área do triângulo em questão é a metade da área de o paralelogramo. Resumindo: Área do triângulo é  $\frac{b \cdot h}{2}$

Figura 13 – Cálculo da área de um triângulo



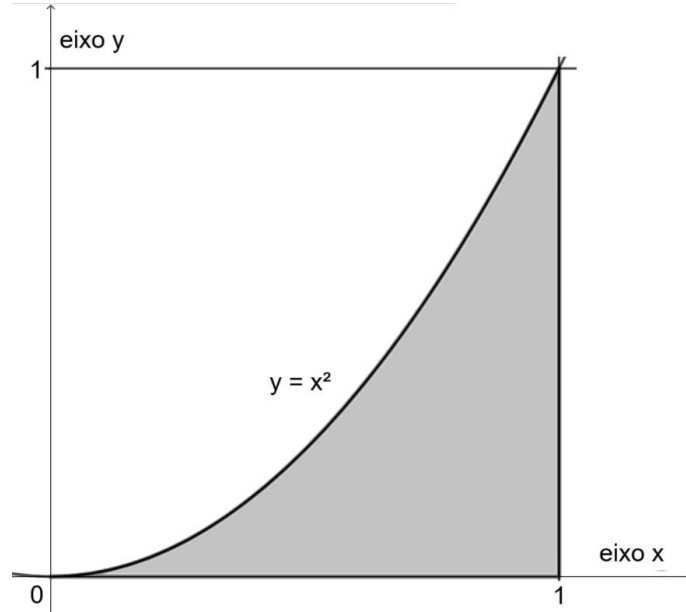
Fonte: (Dolce e Pompeo, 2005).

Como podemos encontrar a área de qualquer triângulo, podemos encontrar a área de qualquer polígono, basta subdividi-lo em triângulos, encontrar a área de cada triângulo e somar as áreas.

### 3.2 Conjecturando a área sob a curva

Mas a partir daí surge uma pergunta: Como se calcula a área de figuras delimitadas por uma curva, em vez de apenas segmentos retos? Por exemplo, como é a área da região sob a curva  $y = x^2$  acima da seção onde  $x$  varia de 0 até 1? Essa área está sombreada na figura 14:

Figura 14 – Região sob a curva  $y = x^2$  no intervalo  $[0, 1]$



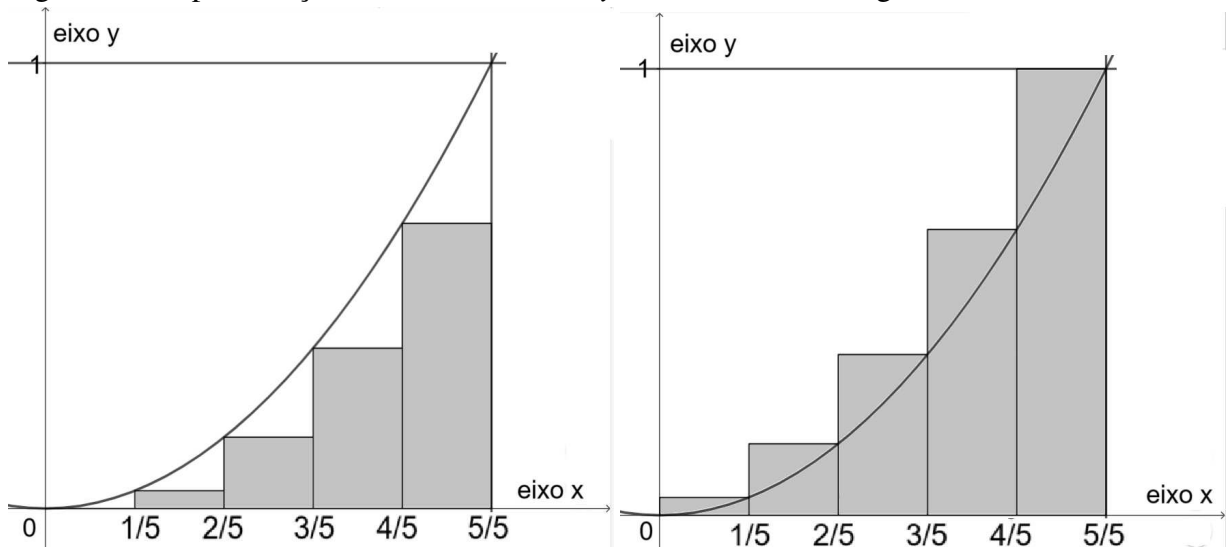
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que a área é menor do que  $\frac{1}{2}$  pois está dentro de um triângulo de base e altura 1 que facilmente pode ser visto na figura acima.

Uma estratégia para conseguir calcular a área aproximada é construir uma escada de retângulos. Esse método que remonta a Arquimedes no século III a C. Neste caso, subdividimos o segmento de 0 a 1 em  $n$  partições, então altura de cada retângulo pode ser compreendida em dois casos: dada por  $y = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2$ , no caso que se queira construir retângulos cuja soma das áreas se aproxime por falta; da por  $y = x^2$ , no caso que queira construir retângulos cuja a soma das áreas se aproxime por excesso (Lima, 2008).

Para deixar mais didático, peguemos o caso  $n = 5$ . Dividindo o intervalo de 0 a 1 em cinco partes iguais. Em seguida, foi desenhado uma escada de cinco retângulos. Na figura 15, mostra como o procedimento é feito em cada caso: o primeiro caso, os vértices superiores esquerdos de cada retângulo toca a curva; o segundo caso, são os vértices da direita que toca a curva. Em ambos os casos, ao somar as áreas dos retângulos, se obtêm uma área aproximada da área sob a curva.

Figura 15 – Aproximação da área sob a curva  $y = x^2$  usando 5 retângulos



Fonte: Elaborado pelo autor.

A base dos retângulos da figura acima é  $\frac{1}{5}$  e a altura do menor deles é  $\left(\frac{1}{5}\right)^2$  (no intervalo  $[1/5, 2/5]$  no primeiro gráfico e no intervalo  $[0, 1/5]$  no segundo gráfico), pois o vértice desse retângulo encontra a curva da equação  $y = x^2$  (Onde  $x = \frac{1}{5}$ , então  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^2$ ). Diante disso a área do retângulo menor é

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1^2}{5^2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1^2}{5^3}$$

A altura do retângulo imediatamente a direita do menor, é  $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ , então a área é dada por

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2^2}{5^2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2^2}{5^3}$$

Note que os denominadores é sempre  $5^3$  para todos os retângulos em questão, só os numeradores que mudam, segundo a ordem numérica dos naturais. Chamamos de  $A$  a área da região sob a curva. Com isso a área total de todos retângulos dos respectivos gráficos, se aproximam da área  $A$ , da seguinte maneira:

$$\frac{0^2}{5^3} + \frac{1^2}{5^3} + \frac{2^2}{5^3} + \frac{3^2}{5^3} + \frac{4^2}{5^3} < A < \frac{1^2}{5^3} + \frac{2^2}{5^3} + \frac{3^2}{5^3} + \frac{4^2}{5^3} + \frac{5^2}{5^3}$$

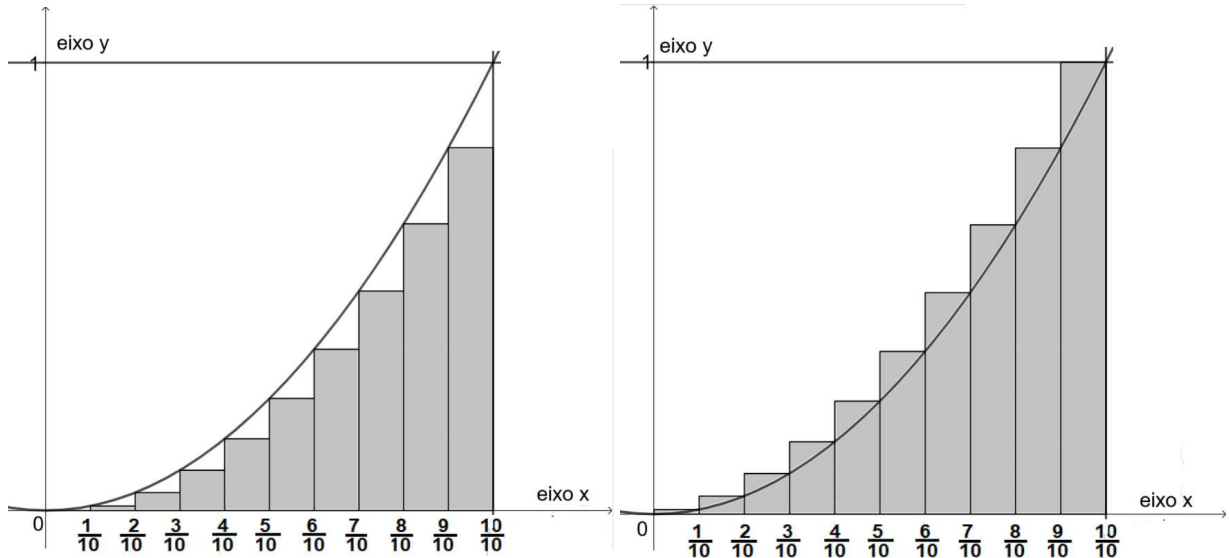
Reescrevendo de uma forma mais simples

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{5^3} < A < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{5^3} \quad (3.1)$$

As frações acima representa apenas aproximações da área sob a curva  $y = x^2$  baseados em retângulos. (Calculando obtemos:  $\frac{30}{125} < A < \frac{55}{125} \Rightarrow 0,24 < A < 0,44$ )

Ao aumentar para  $n = 10$ , obtém-se, novas escadas de retângulos, obedecendo as mesmas regras, mas desta vez com 10 retângulos. A área desta escada (soma das áreas dos retângulos) é uma aproximação melhor da áreas sob a curva.

Figura 16 – Aproximação da área sob a curva  $y = x^2$  usando 10 retângulos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Fazendo o calculo de modo similar

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2}{10^3} < A < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2}{10^3}$$

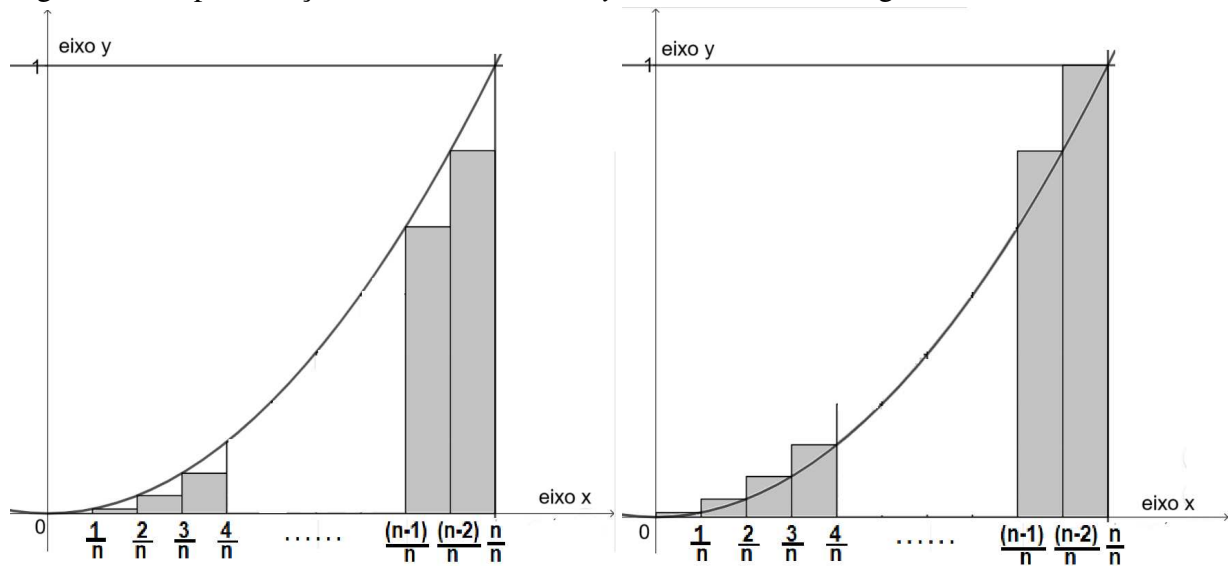
(Área estimada está entre 0,285 e 0,385)

Nos casos  $n = 5$  e  $n = 10$  são apenas valores particulares. A figura 17 mostra um caso geral de  $n$  retângulos em cada um tem largura de  $\frac{1}{n}$ . Neste caso geral, a areá  $A$  fica entre duas frações que parecem convergir para o mesmo número a medida que  $n$  cresce indeterminadamente.

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} < A < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

Um ponto importante a ser examinado é o comportamento da fração quando  $n$  tende a valores muito grandes. A compreensão desse comportamento permite estimar a área sob a curva correspondente. À medida que  $n$  cresce, tanto o numerador quanto o denominador da fração aumentam. Inicialmente, pode parecer que, dado o crescimento do numerador, a fração resultante se tornará grande; no entanto, o denominador também cresce e, dependendo da taxa de crescimento, a fração pode diminuir. Em particular, se o denominador cresce mais rapidamente que o numerador,

Figura 17 – Aproximação da área sob a curva  $y = x^2$  usando  $n$  retângulos



Fonte: Elaborado pelo autor

a fração pode tender a zero. Contudo, como a área sob a curva está entre 0 e  $\frac{1}{2}$  a fração se aproxima de um valor dentro desse intervalo, já que a área, embora limitada, não é zero.

Este cenário revela uma "disputa" entre as taxas de crescimento dos numeradores e dos denominadores. Para investigar, é possível calcular a fração para diferentes valores de  $n$  e observar a tendência. Para  $n = 5$ , a área sob a curva fica entre 0,24 e 0,44; para  $n = 10$  a aproximação melhora, ficando entre 0,285 e 0,385, sugerindo que o tamanho do intervalo diminui conforme  $n$  aumenta. Essas estimativas permanecem inferiores ou superiores à área sob a curva, pois a aproximação através de uma função em formato de "escada de retângulos" resulta em valores ligeiramente menores ou maiores respectivamente.

Em caso de curiosidade, recomenda-se explorar valores de  $n$  maiores, como 20, 50 e assim por diante, para analisar o comportamento da fração e tentar inferir o limite ao qual ela converge. Software como Geogebra podem auxiliar na investigação. Embora essa análise experimental não forneça a área exata sob a curva, ela permite conjecturar um valor aproximado. Através de uma abordagem alternativa de "escada", podemos chegar a uma estimativa indireta para a área sob a curva.

Na seção seguinte, será necessário investigar o comportamento de outras frações com estrutura similar à medida que  $n$  aumenta. Considere, por exemplo, a fração:

$$\frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \dots + n^4}{n^5}$$

Aqui, substituímos o expoente 2 do numerador pelo expoente 4, e o expoente 3 do denominador pelo expoente 5. Esta fração aproxima a área sob a curva  $y = x^4$  no intervalo de 0 a

1. Poderíamos calcular seu valor para diferentes valores de  $n$  e conjecturar o limite ao qual ela se aproxima. No entanto, na próxima seção, determinaremos exatamente esse limite.

### 3.3 Fermat e a área sob a curva

Na seção anterior, tentamos encontrar a área sob a curva  $y = x^2$ , mas não foi o suficiente. Pois os retângulos que usamos para fazer uma escada tinham a mesma largura. Nesta seção veremos que há um outro método, devido ao trabalho de Fermat no século XVII, que encontra exatamente essa área (Stein, 2008). Em seu método, os retângulos não têm a mesma largura.

Figura 18 – Retrato de Pierre de Fermat



Fonte: Folha Única (2022).

Pierre de Fermat, brilhante matemático francês do século XVII conhecido como "o príncipe dos amadores", destacou-se não apenas por suas contribuições fundamentais à matemática – como avanços em álgebra, teoria dos números, cálculos preliminares ao cálculo infinitesimal e estudos em óptica física –, mas também por sua erudição humanista, manifesta em seus talentos como poeta, latinista e helenista (Fermat, 2022). Formado em direito e atuando como advogado, Fermat cultivou a matemática como vocação intelectual, tornando-se um dos maiores gênios de seu tempo ao conciliar seu interesse pelas ciências naturais, especialmente a física, com uma produção matemática revolucionária que transcendeu sua condição de estudioso não profissional.

Para o cálculo, precisamos relembrar da equação 2.2, para qualquer número  $r \in (-1, 1)$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1 - r}.$$

A partir desta equação tomamos  $r = p^3$ . Assim, temos:

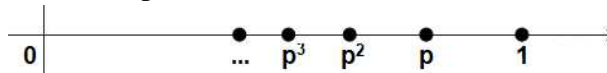
$$1 + p^3 + (p^3)^2 + (p^3)^3 + \dots = \frac{1}{1 - p^3} \implies 1 + p^3 + p^6 + p^9 + \dots = \frac{1}{1 - p^3}.$$

O segundo fato é que  $1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$ . Para qualquer número inteiro  $k$  e qualquer número  $x$ , exceto 1. Na verdade, usamos este segundo fato na ordem inversa, reescrevendo-o como

$$\frac{1 - x}{1 - x^{k+1}} = \frac{1}{1 + x + x^2 + \dots + x^k}. \quad (3.2)$$

Para cada número positivo  $p$  menor que 1, faremos uma escada correspondente, como segue. Primeiro, marcamos onde os números  $p, p^2, p^3, p^4, \dots$  estão localizados no eixo  $x$ , como na Figura 19. À medida que o expoente  $k$  aumenta,  $p^k$  diminui, aproximando-se de 0.

Figura 19 – Pontos em progressão geométrica no eixo  $x$  para o método de Fermat



Fonte: Elaborado pelo autor.

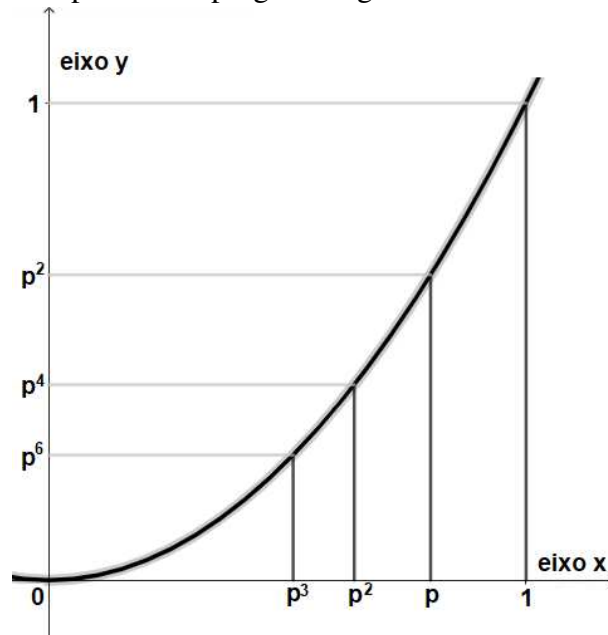
À medida que se move da direita para a esquerda, os pontos escolhidos ficam cada vez mais próximos. Eles também se aproximam cada vez mais de 0.

Em seguida, calculamos a altura da curva  $y = x^2$  acima de cada um desses pontos. Por exemplo, quando  $x = p$ , então  $y = x^2 = p^2$ . Quando  $x = p^2$ , então  $y = x^2 = (p^2)^2 = p^4$ . Quando  $x = p^3$ , então  $y = (p^3)^2 = p^6$ . Algumas dessas alturas são mostradas no gráfico 20. Na sequência, fazemos uma "escada" de retângulos, com a altura de cada retângulo igual à altura da curva na lateral direita do retângulo. Veja o gráfico 21

Tudo o que resta é encontrar a área total desta escada e então ver o que acontece com esta área conforme  $p$  se aproxima cada vez mais de 1. (Quanto mais próximo  $p$  estiver de 1, mais estreitos serão os retângulos e mais a escada se assemelhará à curva).

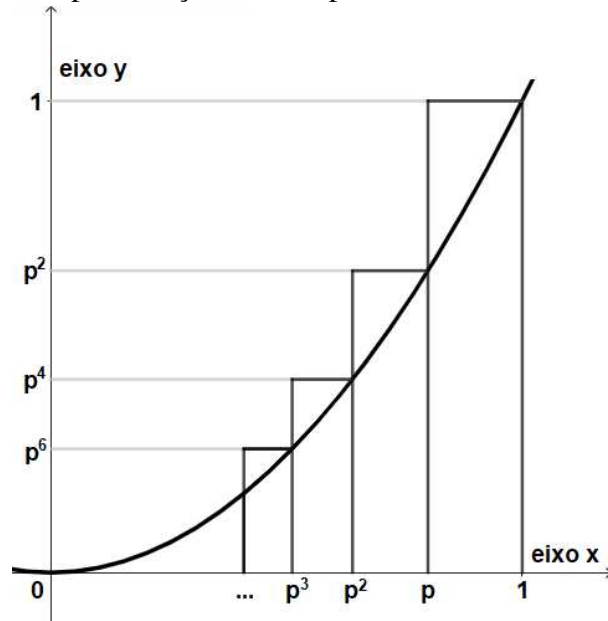
Considere primeiro a área do maior retângulo. Sua altura é 1 e sua largura é  $1 - p$ . Sua área é, portanto,  $1 \cdot (1 - p)$ .

Figura 20 – Mostra as alturas da curva  $y = x^2$  nos pontos em progressão geométrica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21 – Retângulos de larguras decrescentes na aproximação de área pelo método de Fermat



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe o retângulo logo à sua esquerda. Sua altura é  $p^2$  e sua largura é  $p - p^2$ . Sua área é, portanto,

$$p^2(p - p^2) = p^2p(1 - p) = p^3(1 - p).$$

Considere o terceiro retângulo da direita. Sua altura é  $p^4$  e sua largura é  $p^2 - p^3$ .

Sua área é

$$p^4(p^2 - p^3) = p^4 p^2(1 - p) = p^6(1 - p)$$

A área do próximo retângulo, como podemos verificar, é  $p^9(1 - p)$ .

A área de cada retângulo é o produto de  $1 - p$  e uma potência de  $p$ . O expoente nesta potência aumenta em três vezes cada vez que nos movemos para a esquerda na escada de retângulos. A área da escada sem fim, portanto,

$$\text{Área da escada} = (1 - p) + p^3(1 - p) + p^6(1 - p) + p^9(1 - p) + \dots$$

Como o fator  $1 - p$  aparece em todos os termos, colocando-o em evidência, obtemos:

$$\text{Área da escada} = (1 - p)(1 + p^3 + p^6 + p^9 + \dots)$$

A soma que aparece nesta equação é uma série geométrica disfarçada, com razão  $p^3$ . Conforme mencionado no início da seção, Esta soma é igual a  $1/(1 - p^3)$  Portanto, a área total é

$$\text{Área da escada} = (1 - p) \cdot (1 + p^3 + p^6 + p^9 + \dots) = (1 - p) \cdot \frac{1}{1 - p^3}$$

finalmente temos uma fórmula muito curta para a área da escada

$$\text{Área da escada} = \frac{1 - p}{1 - p^3}$$

Chegamos a um fórmula tão simples. Só falta descobrir o que acontece com  $\frac{1 - p}{1 - p^3}$  quando  $p$  fica maior e próximo de 1.

Observamos o resultado da equação, agora no caso  $k = 2$  e  $x = p$ . temos que a área total de:

$$\frac{1 - p}{1 - p^3} = \frac{1}{1 + p + p^2}$$

Como  $p$  se aproxima a 1, a área da escada se aproxima

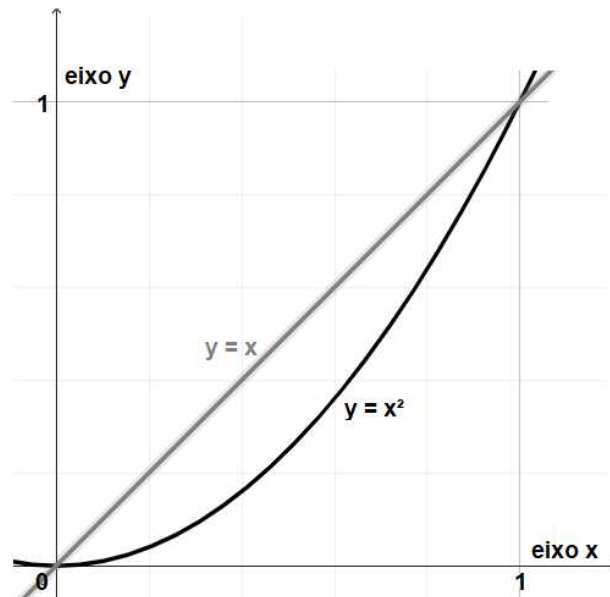
$$\lim_{p \rightarrow 1} \frac{1}{1 + p + p^2} = \frac{1}{1 + 1 + 1^2} = \frac{1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

A área da região sob a curva deve ser  $\frac{1}{3}$ . Esta resposta é razoável. Basta olhar novamente a figura 14 e a figura 22.

Uma abordagem similar funciona para a curva  $y = x^3$ . (veja a figura 23) Seguindo os passos, basta saber de duas informações:

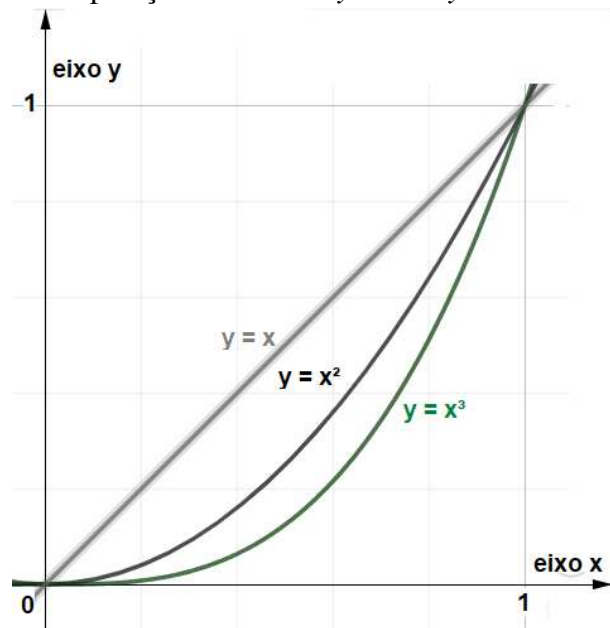
$$1 + p^4 + p^8 + \dots = \frac{1}{1 - p^4} \quad \text{e} \quad \frac{1 - p}{1 - p^4} = \frac{1}{1 + p + p^2 + p^3}$$

Figura 22 – Comparação da área sob a curva  $y = x^2$  com o triângulo de área  $1/2$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 – Comparação das curvas  $y = x^2$  e  $y = x^3$  no intervalo  $[0, 1]$



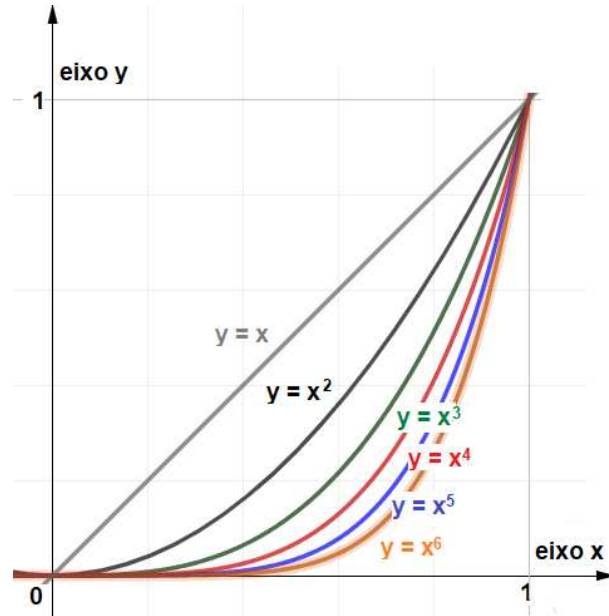
Fonte: Elaborado pelo autor.

Ambos são apenas casos especiais da equação  $y = x^k$ , para algum  $k$  inteiro. À medida que  $p$  se aproxima de 1, portanto, a área da escada se aproxima

$$\frac{1}{1 + 1 + 1^2 + 1^3} = \frac{1}{1 + 1 + 1 + 1} = \frac{1}{4}$$

Concluimos que a área sob a curva  $y = x^3$  no intervalo  $[0; 1]$  é  $1/4$ . Se representarmos graficamente a curva, verá que ela fica abaixo da curva  $y = x^2$  no intervalo  $[0; 1]$ . Portanto, é de se esperar que a área abaixo dela seja menor que  $1/3$ , nossa resposta no caso de  $y = x^2$ .

Figura 24 – Comparação das curvas  $y = x^k$  para diferentes valores de  $k$  no intervalo  $[0, 1]$



Fonte: Elaborado pelo autor.

O mesmo argumento, seguindo o mesmo passo a passo, funciona para todas as curvas  $y = x^4$ ,  $y = x^5$ ,  $y = x^6$ , ... podemos verificar que para qualquer número inteiro  $k$ , área sob a curva  $y = x^k$  no intervalo  $[0; 1]$  é  $\frac{1}{k+1}$ .

Concluimos que o argumento de Fermat revela sua simplicidade: Aproxime uma área curva por uma área que podemos calcular exatamente. Então veja o que acontece com essas aproximações à medida que elas ficam cada vez melhores. Agora que encontramos a área sob a curva  $y = x^2$ , sabemos o que acontece com o quociente que encontramos na seção anterior,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$$

Isto é, à medida que  $n$  aumenta, como ele se aproxima dessa área, o quociente deve se aproximar de  $1/3$ . Ao generalizar para curva  $y = x^k$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \quad (3.3)$$

### Prova por Indução em $k$ :

Caso inicial, ( $k = 1$ ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Sabemos que  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Logo:

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a base está verificada.

Hipótese de Indução: Assumimos que, para um certo  $k \geq 1$ , vale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Passo passo de Indução ( $k \rightarrow k+1$ ): Queremos provar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{k+1} + 2^{k+1} + \dots + n^{k+1}}{n^{k+2}} = \frac{1}{k+2}.$$

Usamos a identidade telescópica:

$$(n+1)^{k+2} - 1 = \sum_{m=1}^n \left( (m+1)^{k+2} - m^{k+2} \right).$$

Expandindo  $(m+1)^{k+2}$  pelo binômio de Newton:

$$(m+1)^{k+2} = m^{k+2} + (k+2)m^{k+1} + O(m^k).$$

Substituindo na soma:

$$(n+1)^{k+2} - 1 = (k+2) \sum_{m=1}^n m^{k+1} + \sum_{m=1}^n O(m^k).$$

Dividindo por  $n^{k+2}$ :

$$\frac{(n+1)^{k+2}}{n^{k+2}} - \frac{1}{n^{k+2}} = (k+2) \frac{\sum_{m=1}^n m^{k+1}}{n^{k+2}} + \frac{\sum_{m=1}^n O(m^k)}{n^{k+2}}.$$

Tomando o limite  $n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{(n+1)^{k+2}}{n^{k+2}} \rightarrow 1, \quad \frac{1}{n^{k+2}} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{\sum_{m=1}^n O(m^k)}{n^{k+2}} \rightarrow 0 \quad (\text{pela hipótese de indução}).$$

Simplificando:

$$1 = (k+2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n m^{k+1}}{n^{k+2}}.$$

Portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{k+1} + 2^{k+1} + \dots + n^{k+1}}{n^{k+2}} = \frac{1}{k+2}.$$

Por indução, o resultado vale para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Nas seções 3.2 e 3.3 deste capítulo, abordou-se o cálculo de áreas sob curvas, uma questão fundamental que representa o núcleo do estudo do cálculo integral. A determinação precisa dessas áreas envolve o uso de métodos de aproximação por somas parciais, frequentemente utilizando "escadas" para aproximar a área sob a curva. Com o refinamento desse método, as aproximações se tornam cada vez mais próximas da área real, o que exige a aplicação de técnicas específicas e rigorosas para alcançar um limite preciso (Lima *et al.*, 2000).

### 3.4 Soma de potências e convergência

Nessa seção, será apresentada uma maneira alternativa sem usar a geometria como suporte. O resultado que precisamos saber é uma aproximação de  $\frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$ , à medida que  $n$  fica cada vez maior, tendendo ao infinito.

Para fazer isso, precisamos olhar para essa expressão aparentemente irrelevante:  $(x-1)^{k+1}$ . Com a técnica do binômio de Newton vamos expandir essa expressão. Felizmente, como só precisamos de uma aproximação para isso, precisamos apenas dos dois primeiros termos, que são as duas potências mais altas de  $x$  (Stillwell, 1989).

$$(x-1)^{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^j x^{k+1-j} = x^{k+1} - (k+1)x^k + O(x^{k-1})$$

Que é equivalente a

$$(x-1)^{k+1} = \underbrace{(x-1)(x-1)(x-1)\dots(x-1)}_{k+1}$$

Isso significa que para obter  $x^{k+1}$ , precisa multiplicar  $x$  de todos os  $k+1$  parênteses. Só há uma maneira de fazer isso, então coeficiente de  $x^{k+1}$  é 1.

Semelhantemente, para calcular o coeficiente de  $x^k$ . Precisamos multiplicar  $x$  de todos os parênteses  $x$ , exceto um dos parênteses. Como há um total de  $k+1$  parênteses, temos  $k+1$  opções de multiplicar  $x$  de todos  $k+1-1=k$ , portanto,  $-(k+1)$  é o coeficiente de  $x^k$ .

Poderia continuar e calcular todos os outros termos até o final. E sem dúvida existe como fazer isso, através binômio de Newton, mas não precisamos conhecer esses termos em detalhes.

$$(x-1)^{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} x^{k+1-j} (-1)^j = x^{k+1} - (k+1)x^k + O(x^{k-1})$$

Só precisamos saber que todo o resto é algum polinômio que é tão pequeno que é absolutamente dominado pelo termo  $x^{k-1}$ . E uma abreviação para escrever isso é  $O(x^{k-1})$ . Isso

significa que esses termos não estão sendo esquecidos, mas são condensados em um termo que é da ordem  $x^{k-1}$ , onde o  $k-1$  é a maior potência de  $x$  que aparece em todos os termos restantes.

$$x^{k+1} - (k+1)x^k + O(x^{k-1}) = (x-1)^{k+1}$$

Reorganizando,

$$x^{k+1} - (x-1)^{k+1} = (k+1)x^k - O(x^{k-1})$$

Agora vamos substituir diferentes valores de  $x$  nesta equação e ver o que acontece.

Especificamente, vamos usar  $x = n; (n-1); (n-2); \dots; 1$ .

$$\begin{aligned} n^{k+1} - (n-1)^{k+1} &= (k+1)n^k - O(n^{k-1}) \\ (n-1)^{k+1} - (n-2)^{k+1} &= (k+1)(n-1)^k - O((n-1)^{k-1}) \\ (n-2)^{k+1} - (n-3)^{k+1} &= (k+1)(n-2)^k - O((n-2)^{k-1}) \\ &\vdots \\ 2^{k+1} - 1^{k+1} &= (k+1)2^k - O(2^{k-1}) \\ 1^{k+1} - 0^{k+1} &= (k+1)1^k - O(1^{k-1}) \end{aligned}$$

Agora vejamos o que acontece quando somamos todas essas equações. No lado esquerdo da igualdade, quase todos os termos serão cancelados para nos dar apenas  $n^{k+1}$ , e no lado direito da igualdade, podemos colocar em evidência o termo  $k+1$  para obter  $(k+1)(1^k + 2^k + \dots + n^k)$  menos  $n$  vezes  $O(x^{k-1})$ .

$$n^{k+1} = (k+1)(1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k) - nO(n^{k-1})$$

Lembrando que nossa abreviação para os termos que não calculamos era que todos eles eram na ordem de, no máximo,  $n^{k-1}$ . Então, se tivermos  $n$  destes termos, então os termos não calculados serão, no máximo, de ordem  $n^k$ . Isso significa que podemos escrever:

$$n^{k+1} = (k+1)(1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k) - O(n^k)$$

E agora, reorganizando,

$$n^{k+1} + O(n^k) = (k+1)(1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k)$$

Agora, dividindo por  $k+1$ , podemos obter

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{O(n^k)}{k+1} = (1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k)$$

Agora, uma expressão de qualquer ordem multiplicada por uma constante não muda sua ordem, então podemos descartar um dos  $1/(1+k)$  do denominador de  $O(n^k)$ , Esta é a nossa aproximação com a soma que procurávamos no início.

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} + O(n^k) = (1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k)$$

No entanto, para obtê-lo de uma forma que seja mais útil mais tarde, precisamos dividir por  $n^{k-1}$ .

$$\frac{1}{k+1} + \frac{O(n^k)}{n^{k+1}} = \frac{(1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k)}{n^{k+1}}$$

Então, em resumo, o que mostramos é que, à medida que  $n$  vai para o infinito, Temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k)}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \quad (3.4)$$

### 3.5 O círculo como limite de regiões poligonais

O objetivo desta seção é mostrar que a área de um polígono regular de  $n$  lados, inscrito em um círculo unitário, tende a  $\pi$  quando o número de lados  $n$  tende ao infinito ( $n \rightarrow \infty$ ).

Temos um **círculo unitário**, o que significa que seu raio  $r$  é igual a 1. A área deste círculo, por definição, é:

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \pi(1)^2 = \pi.$$

Dentro deste círculo, inscrevemos um polígono regular de  $n$  lados. Podemos decompor este polígono em  $n$  triângulos isósceles idênticos. O vértice comum a todos os triângulos é o centro do círculo, e as bases dos triângulos são os lados do polígono.

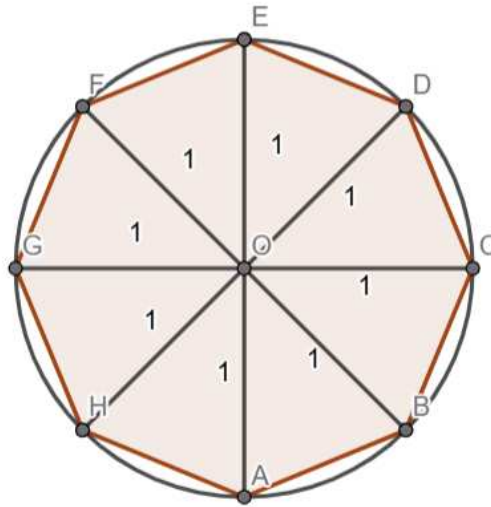
- Os dois lados iguais de cada triângulo isósceles são os raios do círculo. Portanto, ambos medem  $r = 1$ .
- O ângulo no vértice central de cada um desses triângulos é o ângulo total do círculo ( $2\pi$  radianos) dividido pelo número de triângulos ( $n$ ). Portanto, o ângulo de cada triângulo no centro do círculo é  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ .

Agora, vamos focar em apenas um desses  $n$  triângulos isósceles. Conhecemos o comprimento de dois lados ( $a = 1$  e  $b = 1$ ) e o ângulo entre eles ( $\theta = \frac{2\pi}{n}$ ).

A fórmula para a área de um triângulo, dadas essas informações, é:

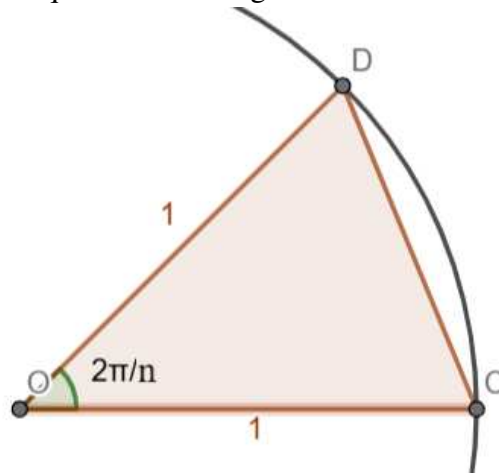
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen}(\theta)$$

Figura 25 – Divisão do polígono regular em triângulos isósceles



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 – Destaque em um triângulo isósceles



Fonte: Elaborado pelo autor

Substituindo nossos valores:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}(1)(1) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)$$

A área total do polígono, que chamaremos de  $A_n$ , é simplesmente a área de um triângulo multiplicada pelo número de triângulos,  $n$ .

$$A_n = n \times A_{\text{triângulo}}$$

$$A_n = n \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{n}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)$$

Esta fórmula nos dá a área de qualquer polígono regular de  $n$  lados inscrito em um círculo unitário.

Intuitivamente, à medida que aumentamos o número de lados  $n$  do polígono ( $n \rightarrow \infty$ ), o polígono preenche cada vez mais o espaço do círculo, e sua área  $A_n$  deve se aproximar da área do círculo, que é  $\pi$ .

Vamos provar isso matematicamente calculando o limite de  $A_n$  quando  $n \rightarrow \infty$ :

$$A_{\text{círculo}} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)$$

Este limite está na forma indeterminada " $\infty \cdot 0$ ", então precisamos manipulá-lo para usar o **Límite Trigonométrico Fundamental**:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

Para fazer isso, faremos uma substituição de variável. Seja  $x = \frac{2\pi}{n}$ . Note que quando  $n \rightarrow \infty$ , a variável  $x$  se aproxima de 0.

Agora, vamos reescrever o nosso limite em termos de  $x$ . Primeiro, isolamos  $n$  na nossa substituição: Se  $x = \frac{2\pi}{n}$ , então  $n = \frac{2\pi}{x}$ .

Substituindo  $n$  e  $\frac{2\pi}{n}$  na fórmula do limite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{x} \right) \operatorname{sen}(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \pi \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \\ &= \pi \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \quad (\text{pois } \pi \text{ é uma constante}) \\ &= \pi \cdot 1 = \pi \end{aligned}$$

Demonstramos com sucesso que o limite da área do polígono regular inscrito no círculo unitário, à medida que o número de lados tende ao infinito, é exatamente  $\pi$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \pi$$

Este resultado é um belo exemplo de como o cálculo, através da noção de limites, pode fornecer uma base rigorosa para fórmulas geométricas que conhecemos intuitivamente.

### 3.6 O produto de Wallis

O Produto de Wallis, uma fascinante descoberta do matemático inglês John Wallis em 1655, oferece uma representação alternativa e elegante para o número  $\pi$  como um produto

infinito de números racionais. Esta fórmula não apenas enriquece a nossa compreensão do  $\pi$ , mas também pode ser elegantemente derivada a partir da integração de potências de funções trigonométricas, e possui interessantes interpretações geométricas (Pedrosa, 2018).

A expressão para o Produto de Wallis é a seguinte:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

De forma mais compacta, utilizando a notação de produto infinito, a fórmula pode ser escrita como:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}$$

### ***Demonstração a partir da Integração de Potências Trigonômicas***

Uma das maneiras mais elucidativas de se obter o Produto de Wallis é através da análise da integral de potências da função seno. Consideremos a integral:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n(x) dx$$

Mas antes, vamos utilizar a técnica de integração por partes, para mostrar que

$$\int \text{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \text{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \text{sen}^{n-2} x dx.$$

**Solução:** Seja  $\int \text{sen}^n x dx = \int \text{sen}^{n-1} x \text{sen} x dx$ . Façamos  $u = \text{sen}^{n-1} x$  e  $dv = \text{sen} x dx$ . Daí temos  $du = (n-1) \text{sen}^{n-2} x \cos x dx$  e  $v = -\cos x$ . Assim, a integração por partes nos dá

$$\int \text{sen}^n x dx = -\cos x \text{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \text{sen}^{n-2} x \cos^2 x dx.$$

Usando a relação  $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ , temos que

$$\int \text{sen}^n x dx = -\cos x \text{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \text{sen}^{n-2} x dx - (n-1) \int \text{sen}^n x dx.$$

Somando  $(n-1) \int \text{sen}^n x dx$  em ambos os lados obtemos,

$$n \int \text{sen}^n x dx = -\cos x \text{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \text{sen}^{n-2} x dx.$$

E finalmente, dividindo por  $n$  ambos os membros temos,

$$\int \text{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \text{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \text{sen}^{n-2} x dx.$$

Agora vamos para a integral definida no intervalo  $[0, 1]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-2} x dx$$

onde  $n \geq 2$  e inteiro.

### Solução

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x dx = \left[ -\frac{1}{n} \cos x \text{sen}^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-2} x dx.$$

Uma vez que  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  e  $\text{sen} 0 = 0$ , temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-2} x dx. \quad (3.5)$$

Com isso, percebemos que é possível estabelecer uma fórmula de recorrência para

$I_n$ :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

A partir desta recorrência e dos valores iniciais  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  e  $I_1 = 1$ , podemos derivar expressões para potências pares e ímpares:

Para potências pares ( $n = 2k$ ),

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{\pi}{2}, \text{ ou seja, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\pi}{2}, \forall n \geq 1.$$

**Prova:** Fazemos indução finita sobre  $n$ . Para  $n = 1$ ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 x dx = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Suponhamos que a fórmula acima vale para  $n = k \geq 1$ . Para  $n = k + 1$ ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k+2} x dx = \frac{(2k+2)-1}{2k+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k} x dx = \frac{2k+1}{2k+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k} x dx.$$

Daí, utilizando a hipótese de indução temos,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k+2} x dx = \left( \frac{2k+1}{2k+2} \right) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \frac{\pi}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k \cdot (2k+2)} \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, a fórmula é válida para todo  $n \geq 1$ .

Para potências ímpares ( $n = 2k + 1$ ):

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!}, \text{ ou seja, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}, \forall n \geq 1.$$

**Prova:** Fazemos indução finita sobre  $n$ . Supondo que vale para  $n = k \geq 1$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k+3} x dx = \frac{(2k+3) - 1}{2k+3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{(2k+3)-2} x dx = \frac{2k+2}{2k+3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k+1} x dx.$$

Daí, utilizando a hipótese temos,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k+3} x dx = \left( \frac{2k+2}{2k+3} \right) \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k \cdot (2k+2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1) \cdot (2k+3)}.$$

Portanto, a fórmula é válida para todo  $n \geq 1$ .

Agora, Consideremos a seguinte identificação,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x dx$ . Provemos que

$$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}.$$

**Solução:**  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , segue que  $0 \leq \text{sen } x \leq 1$ . Daí para  $n \geq 0$ ,

$$\text{sen}^{2n+2} x \leq \text{sen}^{2n+1} x \leq \text{sen}^{2n} x.$$

Integrando de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ , obtemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+2} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x dx,$$

isto é,

$$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}.$$

Agora, verificamos que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Pelo integral definida 3.5 temos,

$$I_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+2} x dx = \frac{2n+1}{2n+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x dx = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n}.$$

Logo,

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Agora, para mostre que.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1.$$

Para isso temos,  $I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$ . Logo, dividindo por  $I_{2n} > 0$ ,

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1.$$

O que é equivalente, usando o exercício anterior, a

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1.$$

Agora, uma vez que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}} = \frac{2+0}{2+0} = 1,$$

e  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ , segue pelo Teorema do Confronto que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1.$$

Com isso temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$ .

$$I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$$

e

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}}{\frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}} = 1.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left( \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

## Aplicações geométricas interessantes

### Aplicação 1

Usando a fórmula de Wallis, mostre que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

*Solução*

Pela fórmula de Wallis temos que,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2 \cdot (2n+1)}.$$

Daí segue,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2 (2n+1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\sqrt{2}$ , obtemos

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}} \right].$$

Observando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{2 + \frac{1}{n}}} = 1.$$

E como

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Substituindo na expressão para  $\sqrt{\pi}$ ,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

## ***Aplicação 2***

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

*Solução*

Fazendo a substituição  $x = \cos t$ , temos que  $dx = -\sin t dt$ . Para  $x = 0$ , temos  $t = \frac{\pi}{2}$  e para  $x = 1$ , temos  $t = 0$ . Daí,

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2 t)^n \sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)^n \sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt.$$

Que isso implica, utilizando resultados anteriores:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}.$$

### Aplicação 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \operatorname{cos}^n x} dx = \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

### Solução

Mostraremos inicialmente que se  $f$  é uma função contínua e  $a$  um número real, então  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ . De fato, fazendo  $u = a - x$ , temos  $du = -dx$  e assim,

$$\int_{x=0}^{x=a} f(a-x) dx = - \int_{u=a}^{u=0} f(u) du = \int_0^a f(u) du.$$

Seja  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \operatorname{cos}^n x} dx$ . Usando a propriedade acima com  $a = \frac{\pi}{2}$ ,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^n(\frac{\pi}{2} - x)}{\operatorname{sen}^n(\frac{\pi}{2} - x) + \operatorname{cos}^n(\frac{\pi}{2} - x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cos}^n x}{\operatorname{cos}^n x + \operatorname{sen}^n x} dx.$$

Somando as duas expressões para  $I$ :

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \operatorname{cos}^n x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cos}^n x}{\operatorname{cos}^n x + \operatorname{sen}^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^n x + \operatorname{cos}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \operatorname{cos}^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx.$$

$$2I = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

Diante de tudo isso, percebemos que as ferramentas de manipulação algébrica e a compreensão de como somas de potências se relacionam com o cálculo de áreas, conforme demonstramos nesta seção, provarão ser indispensáveis. Com essas ideias em mente, estamos agora preparados para embarcar em uma jornada que nos levará a um dos resultados mais elegantes da matemática: a série de Leibniz para  $\pi$ , tema do nosso próximo capítulo.

#### 4 A SÉRIE DE LEIBNIZ: DEMONSTRAÇÕES E CONEXÕES

Após explorarmos as profundas conexões entre manipulação algébrica, somas de potências e o cálculo de áreas sob curvas, direcionamos agora nosso foco para um dos números mais fascinantes da matemática:  $\pi$ . Neste capítulo, desvendaremos a célebre fórmula de Leibniz, uma série infinita notável que expressa  $\pi$  e cuja demonstração se baseia, de maneira engenhosa, em muitas das ideias e técnicas que desenvolvemos nos capítulos anteriores. Essa fórmula, descoberta independentemente por diversos matemáticos ao longo da história, representa um marco na busca por uma compreensão mais profunda da natureza de  $\pi$ . Exploraremos suas implicações e a razão pela qual sua convergência é extremamente lenta, apesar de sua beleza e simplicidade.

Figura 27 – Retrato de Gottfried Wilhelm Leibniz



Fonte: Francke (1695).

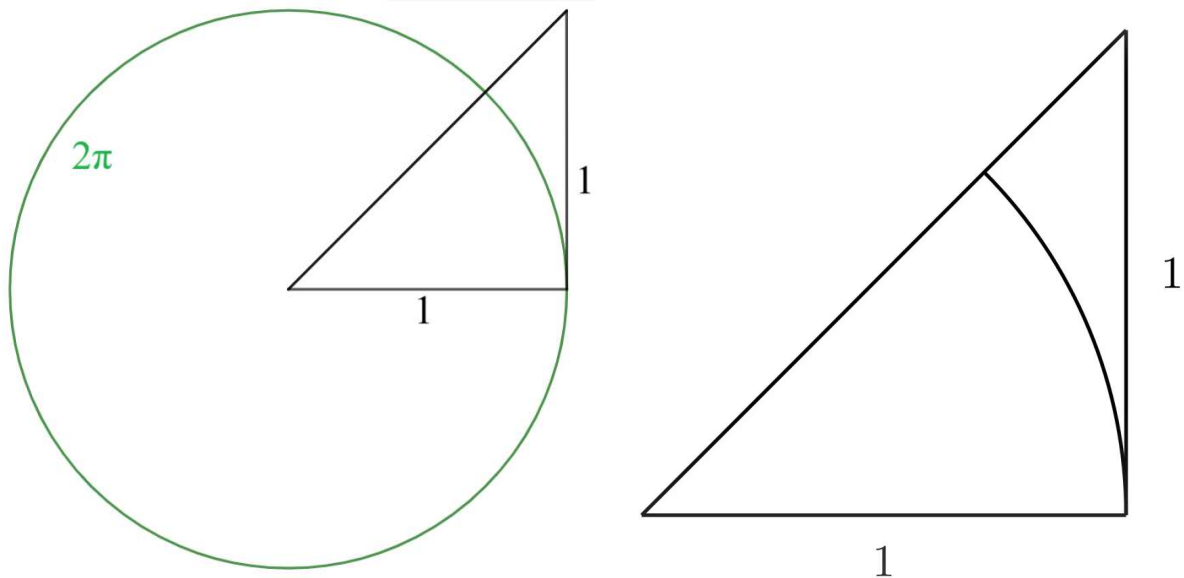
Gottfried Wilhelm Leibniz foi um polímata alemão que deixou um legado notável em diversas áreas do conhecimento (Francke, 1695). Considerado um dos maiores filósofos e matemáticos de seu tempo, Leibniz desenvolveu, independentemente de Newton, o cálculo,

revolucionando a matemática e a física. Suas contribuições à lógica, com a criação de uma linguagem formal para representar argumentos, e à filosofia, com a teoria da monadologia, são igualmente significativas. Além disso, Leibniz foi pioneiro na ciência da computação, tendo desenvolvido o sistema binário e construído uma das primeiras calculadoras mecânicas. Sua busca por uma linguagem universal e sua visão otimista sobre o universo, como o melhor dos mundos possíveis, o tornam uma figura central na história do pensamento ocidental.

#### 4.1 A série de Leibniz e a aproximação do arco

A presente análise parte de uma construção geométrica fundamental. Define-se um triângulo retângulo isósceles e, para fins de normalização, estipula-se que o comprimento de seus catetos seja unitário. Subsequentemente, traça-se um arco de circunferência de raio 1, com centro no vértice correspondente ao ângulo reto, que se estende até interceptar os dois catetos. O foco da investigação recai sobre esta configuração: o triângulo e o setor circular de 90 graus (ou  $\frac{\pi}{2}$  radianos) que ele delimita.

Figura 28 – Triângulo isósceles e o arco de círculo para a dedução da série de Leibniz

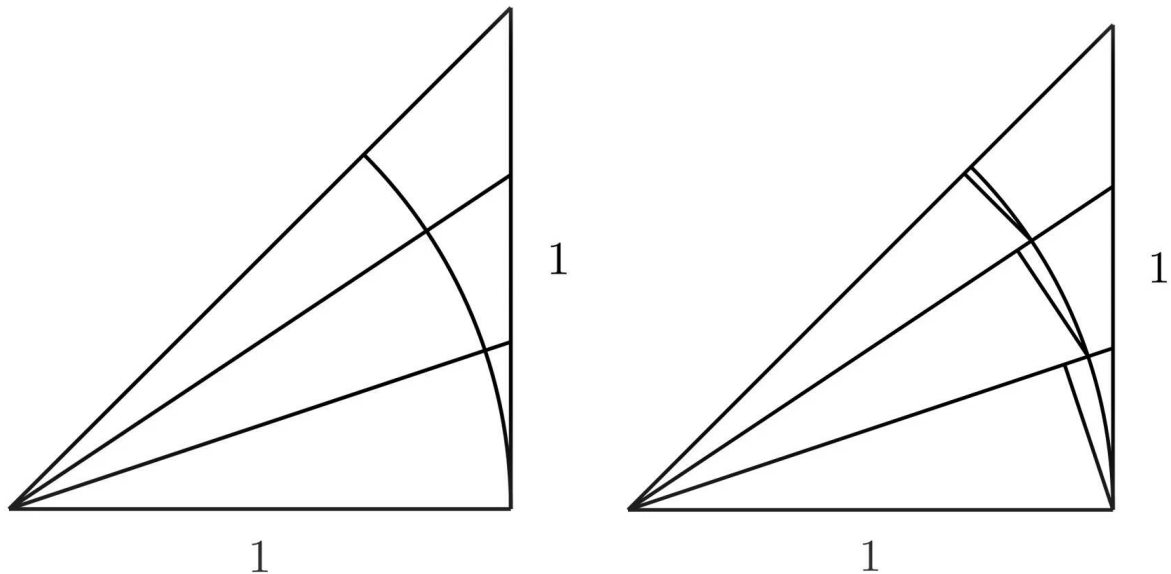


Fonte: Elaborado pelo autor.

Definirmos que a circunferência de um círculo completo é  $2\pi r$ . Considerando que o raio seja 1 e, utilizando apenas um oitavo do círculo, então este é um oitavo de círculo tem o comprimento do arco  $\frac{\pi}{4}$ . Ao dividir o lado do triângulo que é tangente ao arco em  $n$  seções iguais. Neste caso da figura, definimos  $n = 3$  e desenhamos linhas dos pontos finais das seções até o centro do arco. Em seguida, pegamos cada um dos pontos onde essas linhas encontram o

arco e traçamos linhas deles até a linha acima deles que encontram essa linha a 90 graus.

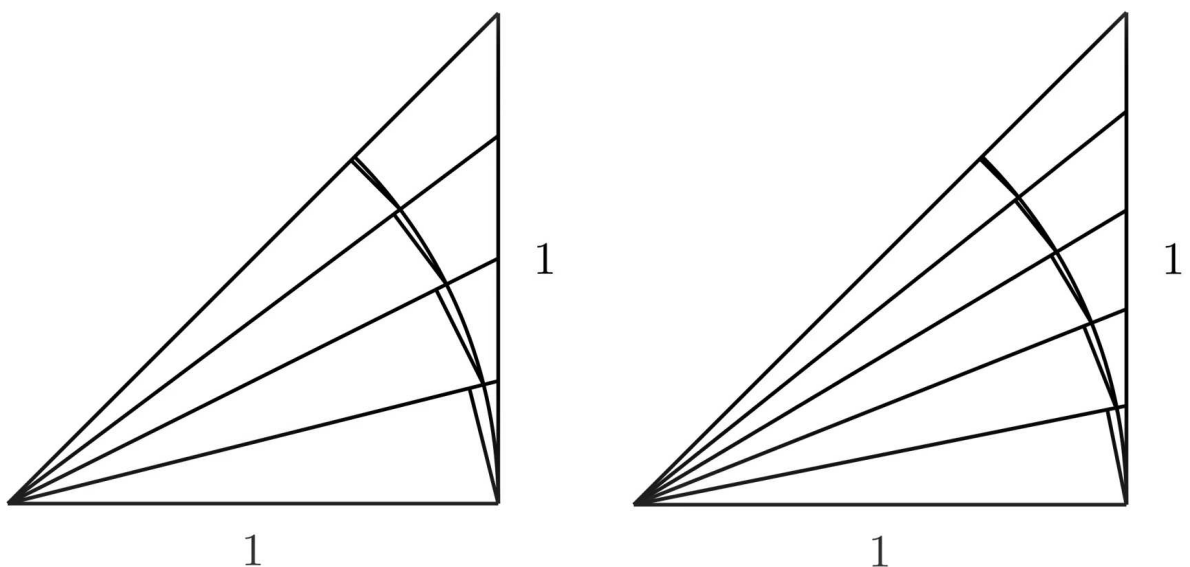
Figura 29 – Setorização do arco e divisão do segmento para aproximação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essas linhas fornecem uma aproximação bastante boa do arco e essa aproximação ficará melhor se criarmos seções cada vez menores, como ilustrado na figura onde  $n = 4; 5...$ , conforme mostra a figura 30.

Figura 30 – Setorização do arco e divisão do segmento em 4 e 5



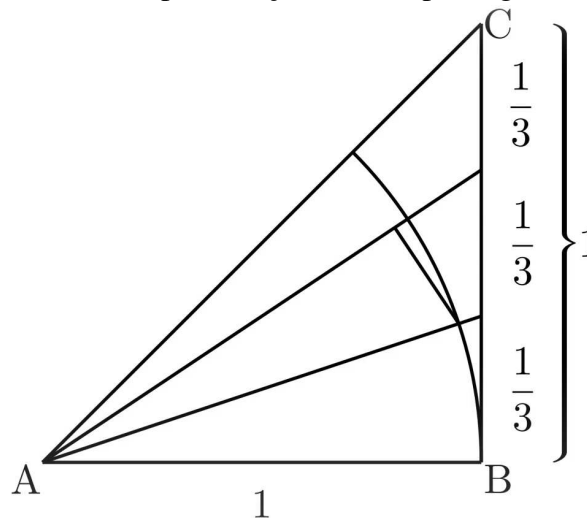
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observamos que há nada de especial em usar  $n = 3$ , isso é apenas para ilustrar como o processo na prática,  $n$  deve assumir valores cada vez maiores para obter uma melhor aproximação. Assim como aproximamos uma curva por retângulos (Método de Riemann), a

série de Leibniz aproxima  $\frac{\pi}{4}$  somando distancias que preenchem um quarto de círculo.

Então, o que queremos fazer é encontrar o comprimento de cada uma das linhas que se aproximam do arco e somá-los para obter uma aproximação de  $\frac{\pi}{4}$ . Por enquanto, vamos olhar para apenas uma dessas linhas e chamá-la de  $i$ -ésima correspondente à  $i$ -ésima seção da parte inferior. No nosso caso, estamos usando  $i = 2$  e, vamos chamar os vértices do triângulo original A, B e C, mostrado na figura 31.

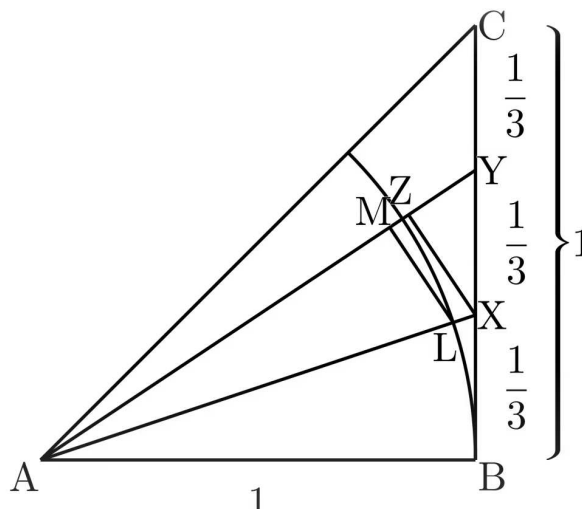
Figura 31 – Detalhe da aproximação do arco por segmentos de reta



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, escolhemos a seção intermediária do segmento BC, X e Y conforme a figura 32 e, dizemos que a reta que faz parte da aproximação do arco seja  $LM$ , com  $L$  pertencente ao arco reto em  $M$ .

Figura 32 – Identificação de triângulos semelhantes na construção geométrica

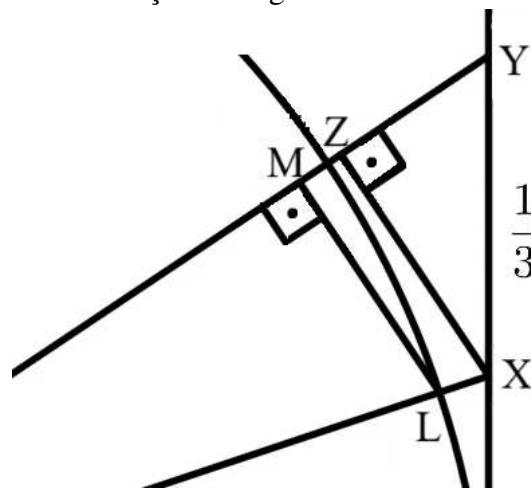


Fonte: Elaborado pelo autor.

Para facilitar esse problema, usaremos um nova reta  $XZ$ , reto em  $Z$  ( $Z$  não pertence ao arco), de tal modo que  $LM$  e  $XZ$  sejam paralelos e cruzando as mesmas retas. Perante essa construção, temos que os triângulos  $\triangle ALM$  e  $\triangle AXZ$  são semelhantes, ( $\triangle ALM \sim \triangle AXZ$ ). Isso significa que podemos dizer que as proporções dos comprimentos correspondentes são iguais e, portanto,

$$\frac{LM}{AL} = \frac{XZ}{AX}$$

Figura 33 – Identificação de ângulos retos na construção geométrica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, há outro triângulo semelhante aqui, mas não é tão óbvio. Ao olhar para o triângulo  $\triangle XZY$ , note que ele tem um ângulo reto em  $Z$ , um de seus outros ângulos está em  $Y$  e o último ângulo, o de  $X$ , será 90 menos o ângulo em  $Y$ . Mas agora, observe o triângulo  $\triangle ABY$ , encontrará novamente um ângulo reto em  $B$  e o mesmo ângulo em  $Y$  e, portanto, o último ângulo em  $A$  deve ser o mesmo que o de  $X$  do triângulo anterior. Assim, podemos ver que os triângulos  $\triangle ABY$  e  $\triangle XZY$  são semelhantes ( $\triangle ABY \sim \triangle XZY$ ) e, portanto, podemos ver antes que as proporções dos comprimentos correspondentes sejam iguais, dando:

$$\frac{XZ}{XY} = \frac{AB}{AY}$$

Finalmente, a última coisa que vamos usar é o fato de que, Quando  $n \rightarrow \infty$ , a diferença entre  $AX$  e  $AY$  torna-se insignificante, pois os pontos  $X$  e  $Y$  convergem para o mesmo ponto (Figura 32). Formalmente, usando a desigualdade triangular, isso decorre do fato de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |AX - AY| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

ou seja, seja  $n$  o número de seções que dividimos  $BC$ , à medida que  $n$  fica cada vez maior,  $AX$  é aproximadamente igual a  $AY$ .

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow AX = AY$$

Vamos começar com nossa primeira observação de que  $\frac{LM}{AL} = \frac{XZ}{AX}$ . Se multiplicarmos o lado direito por  $1 = \frac{XY}{XY}$  e podemos reordenar os numeradores à direita, então, em vez de ter  $XZ \cdot XY$ , agora temos  $XY \cdot XZ$ .

$$\frac{LM}{AL} = \frac{XZ}{AX} \cdot 1 \Rightarrow \frac{LM}{AL} = \frac{XZ}{AX} \cdot \frac{XY}{XY} \Rightarrow \frac{LM}{AL} = \frac{XY \cdot XZ}{AX \cdot XY}$$

Agora, usando nossa segunda observação de que  $\frac{XZ}{XY} = \frac{AB}{AY}$ , obtemos  $\frac{LM}{AL} = \frac{XY}{AY} \cdot \frac{AB}{AY}$  e agora podemos mesclar essas duas frações multiplicando os numeradores e os denominadores. Agora podemos usar nossa terceira observação de que, para  $n$  grande,  $AX$  é aproximadamente  $AY$ , então podemos substituir  $AX$  por  $AY$  e sinal de igual por um sinal de aproximadamente igual.

$$\frac{LM}{AL} = \frac{XY}{AX} \cdot \frac{AB}{AY} \Rightarrow \frac{LM}{AL} \approx \frac{XY \cdot AB}{AY^2}$$

Agora, como podemos encontrar  $AY^2$  em termos de comprimentos que conhecemos usando Pitágoras no triângulo  $ABY$  para obter  $AY^2 = AB^2 + BY^2$ . Esta é agora a nossa fórmula final para  $\frac{LM}{AL}$ , que notamos que fornece uma aproximação cada vez melhor à medida que o valor de  $n$  aumenta indefinidamente.

$$\frac{LM}{AL} \approx \frac{XY \cdot AB}{AB^2 + BY^2}$$

lembre-se  $n$  é o número de seções em que dividimos o arco e  $i$  representa o segmento específico em que estamos interessados. Vale a pena notar neste ponto que, como  $AL$  é o raio do arco, seu comprimento é 1. Observando que  $AL = AB = 1$ ,  $XY = \frac{1}{n}$  e  $BY = \frac{i}{n}$  temos:

$$LM \approx \frac{\frac{1}{n} \cdot 1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

No caso ilustrado na figura temos  $n = 3$  e  $i = 2$

$$\frac{LM}{1} \approx \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

Podemos colocar valores reais nessa fórmula para  $n$  e  $i$  para encontrar uma aproximação para o comprimento da linha ou, melhor ainda, usar  $n$  e  $i$  para obter uma fórmula geral para a linha para qualquer  $n$  e  $i$ , como temos aqui.

$$LM \approx \frac{\frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \approx \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

Fazendo um balanço até agora, temos uma aproximação para o comprimento de cada linha usada para aproximar o comprimento do arco e, se somarmos todos esses comprimentos, obtemos uma aproximação para o comprimento do arco, que sabemos ser  $\frac{\pi}{4}$ .

Lembrando que

$$\frac{\pi}{4} \approx 0,7853981633$$

para  $n = 3$

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{\frac{1}{3}}{1 + (\frac{1}{3})^2} + \frac{\frac{1}{3}}{1 + (\frac{2}{3})^2} + \frac{\frac{1}{3}}{1 + (\frac{3}{3})^2} = 0,6974358974\dots$$

para  $n = 4$

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{\frac{1}{4}}{1 + (\frac{1}{4})^2} + \frac{\frac{1}{4}}{1 + (\frac{2}{4})^2} + \dots + \frac{\frac{1}{4}}{1 + (\frac{4}{4})^2} = 0,7202941176\dots$$

para  $n = 5$

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{\frac{1}{5}}{1 + (\frac{1}{5})^2} + \frac{\frac{1}{5}}{1 + (\frac{2}{5})^2} + \dots + \frac{\frac{1}{5}}{1 + (\frac{5}{5})^2} = 0,7337315284\dots$$

para  $n = 50$

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{\frac{1}{50}}{1 + (\frac{1}{50})^2} + \frac{\frac{1}{50}}{1 + (\frac{2}{50})^2} + \dots + \frac{\frac{1}{50}}{1 + (\frac{50}{50})^2} = 0,7803814967\dots$$

para  $n = 10000$

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{\frac{1}{10000}}{1 + (\frac{1}{10000})^2} + \frac{\frac{1}{10000}}{1 + (\frac{2}{10000})^2} + \dots + \frac{\frac{1}{10000}}{1 + (\frac{10000}{10000})^2} = 0.7853731642\dots$$

Como observamos antes, essa aproximação ficará cada vez melhor quanto maior o  $n$  ficar. Como exemplo, para 3 seções, obtemos uma aproximação que está a cerca de 0,1 de  $\frac{\pi}{4}$ , que é cerca de 0,785; para 50 seções, a aproximação é de 0,005 de distância de  $\frac{\pi}{4}$ ; para 10.000 seções, a aproximação é de 0.000024 de distância de  $\frac{\pi}{4}$ . Então, se em algum sentido pudéssemos deixar  $n$  tender ao infinito, essa aproximação seria na verdade uma igualdade.

Geometricamente, isso significa que estaríamos adicionando um número infinito de termos, cada um dos quais é infinitesimalmente pequeno ou aproximadamente igual a zero, mas é claro que não podemos dizer que infinito vezes zero é  $\frac{\pi}{4}$  porque isso é um absurdo. Temos que usar estratégias muito mais inteligentes.

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + (\frac{1}{n})^2} + \frac{\frac{1}{n}}{1 + (\frac{2}{n})^2} + \dots + \frac{\frac{1}{n}}{1 + (\frac{n}{n})^2}$$

A saída desse problema é manipular nossa fórmula para a aproximação do comprimento do arco em algo em que, se levarmos  $n$  ao infinito, possamos fazer algum sentido disso. Para fazer isso, primeiro reescrevemos a mesma soma colocando o fator  $\frac{1}{n}$  de cada termo em evidência para simplificar.

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{1}{1 + (1/n)^2} + \frac{1}{1 + (2/n)^2} + \dots + \frac{1}{1 + (n/n)^2} \right)$$

Agora lembre-se do nosso primeiro resultado, obtido no capítulo 2 que deu a equação para uma série geométrica infinita. (Equação 2.2)

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots = \frac{1}{1 - r}$$

Veja o que acontece se trocarmos os lados esquerdo e direito da equação e substituímos  $r$  por  $-(1/n)^2$ . Este é agora o nosso primeiro termo, então podemos substituí-lo por uma série infinita equivalente.

$$\frac{1}{1 + (1/n)^2} = \frac{1}{1 - (-1^2/n^2)} = 1 + \left( \frac{-1^2}{n^2} \right) + \left( \frac{-1^2}{n^2} \right)^2 + \left( \frac{-1^2}{n^2} \right)^3 + \dots$$

Também podemos fazer o mesmo para o segundo termo, substituindo  $r$  por  $-(2/n)^2$ . Na verdade, podemos substituir cada termo por uma série infinita correspondente para criar uma espécie de "adição de grade" de  $n$  linhas e colunas infinitas.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left[ \left( 1 - \left( \frac{1^2}{n^2} \right) + \left( \frac{1^2}{n^2} \right)^2 - \left( \frac{1^2}{n^2} \right)^3 + \dots \right) \right. \\ \left. + \left( 1 - \left( \frac{2^2}{n^2} \right) + \left( \frac{2^2}{n^2} \right)^2 - \left( \frac{2^2}{n^2} \right)^3 + \dots \right) \right. \\ \left. + \dots \right. \\ \left. + \left( 1 - \left( \frac{n^2}{n^2} \right) + \left( \frac{n^2}{n^2} \right)^2 - \left( \frac{n^2}{n^2} \right)^3 + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

E vale a pena nos lembrar que tudo isso se soma para se tornar nossa aproximação para  $\pi/4$ . Neste ponto, podemos ficar tentados a tentar somar todos os termos, uma linha de cada vez, mas, em vez disso, vamos somar cada coluna individualmente. A razão é que isso nos dá esses termos, que estão começando a parecer uma fórmula realmente coerente.

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots + n^0}{n^0} - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^2} + \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^4} - \dots \right)$$

Agora vamos multiplicar cada termos por  $\frac{1}{n}$ .

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots + n^0}{n^1} - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} + \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5} - \dots$$

Lembrando da Equação 3.3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

À medida que  $n$  fica cada vez maior, o lado esquerdo da igualdade fica cada vez mais próximo do lado direito. Mas espere, cada um dos termos é o lado esquerdo do segundo mini resultado para diferentes valores de  $k$ . Quando  $k$  é 0, obtemos o primeiro termo, quando  $k$  é 2, obtemos o segundo termo, quando  $k$  é 4, obtemos o terceiro termo e assim por diante.

Para  $k = 0$

$$\frac{1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots + n^0}{n^{0+1}} \rightarrow \frac{1}{0+1}$$

Para  $k = 2$

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^{2+1}} \rightarrow \frac{1}{2+1}$$

Para  $k = 4$

$$\frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^{4+1}} \rightarrow \frac{1}{4+1}$$

Agora podemos deixar  $n$  ir para o infinito e de repente tudo faz sentido. Nosso primeiro termo se torna  $\frac{1}{0+1}$ , o segundo termo se torna  $\frac{1}{2+1}$ , o terceiro termo é  $\frac{1}{4+1}$  e assim por diante, dando-nos essa série infinita de  $\frac{\pi}{4}$ .

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{0+1} - \frac{1}{2+1} + \frac{1}{4+1} - \frac{1}{6+1} + \dots$$

Finalizando,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (4.1)$$

Portanto, agora temos algo que é por si só, um resultado muito bom. É um resultado bastante famoso que foi descoberto pelo matemático indiano Madhava no século XIV e depois redescoberto por Leibniz cerca de 300 anos depois na Europa (Beckmann, 1993). Então,

naturalmente, tem sido referido como a série Leibniz de  $\pi$  desde sua redescoberta. Uma outra forma de escrever essa série é usando a notação de somatório.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Uma das principais áreas de aplicação e utilização desta fórmula está no ensino de cálculo, comumente usada como exemplo, mais precisamente em séries infinitas para ilustrar a ideia de aproximação e o conceito de convergência de séries, sendo uma das primeiras tentativas de se obter  $\pi$  de maneira sistemática, portanto, a fórmula de Leibniz é uma peça importante para ilustrar a beleza das séries infinitas e a criatividade matemática.

## 4.2 Teorema da transmutação de Leibniz

Nesta seção, aborda-se uma forma alternativa, desenvolvida por Leibniz, para obter a fórmula de Leibniz para  $\pi$ . Esta abordagem aplica de maneira engenhosa um resultado específico para resolver problemas de integração. Esse resultado é conhecido como Teorema da Transmutação de Leibniz. Vejamos como foi a construção desse teorema e como aplicaremos para obter a fórmula de  $\pi$

Considere o gráfico de uma função  $y = f(x)$  (Figura 32). Ao traçarmos uma reta tangente  $t$  à curva no ponto  $P(x, y)$ , obtemos um ponto  $T$  como a intersecção dessa tangente  $t$  com o eixo  $y$ . A ordenada do ponto  $T$  é denotada por  $z$ .

Agora podemos desenhar dois triângulos retângulos semelhantes:  $\triangle TDP \sim \triangle PRQ$  implica a proporção  $\frac{QR}{PR} = \frac{PD}{TD}$  que, substituindo as grandezas identificadas na figura 34 Obtemos  $QR = dy$ , e  $PR = dx$ ,  $PD = y - z$ , e  $TD = x$ , que resulta em:

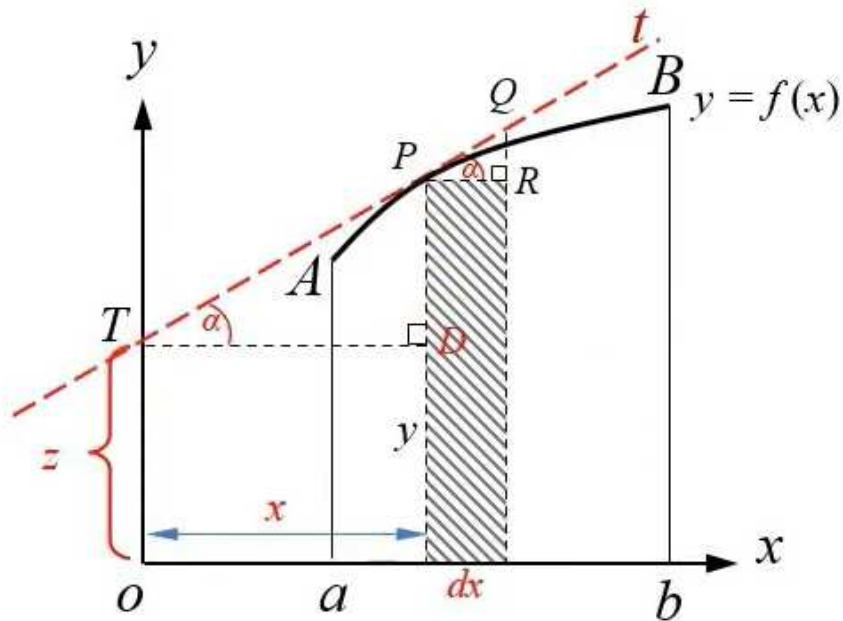
$$\frac{QR}{PR} = \frac{PD}{TD} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y-z}{x} \implies z = y - x \frac{dy}{dx} \quad (4.2)$$

Então a partir disto, podemos ver que  $z$  é uma nova variável, é uma variável transformada de  $y$ , e obviamente,  $z$  é uma função diferente de  $x$ . Essa transformação da variável de  $y$  para  $z$ , ambas em função de  $x$ .

Agora na figura 35, traçamos uma reta perpendicular da origem para a reta tangente,  $W$  sendo o ponto de intersecção e a distância  $OW$  mede  $h$ . A partir disso, temos dois triângulo semelhantes  $\triangle OWT \sim \triangle PRQ$  que por sua vez, implica a proporção  $\frac{PQ}{PR} = \frac{OT}{OW}$ , que, substituindo novamente as grandezas identificadas na Figura 34,  $PQ = ds$ ,  $OT = z$  e  $OW = h$ , que resulta:

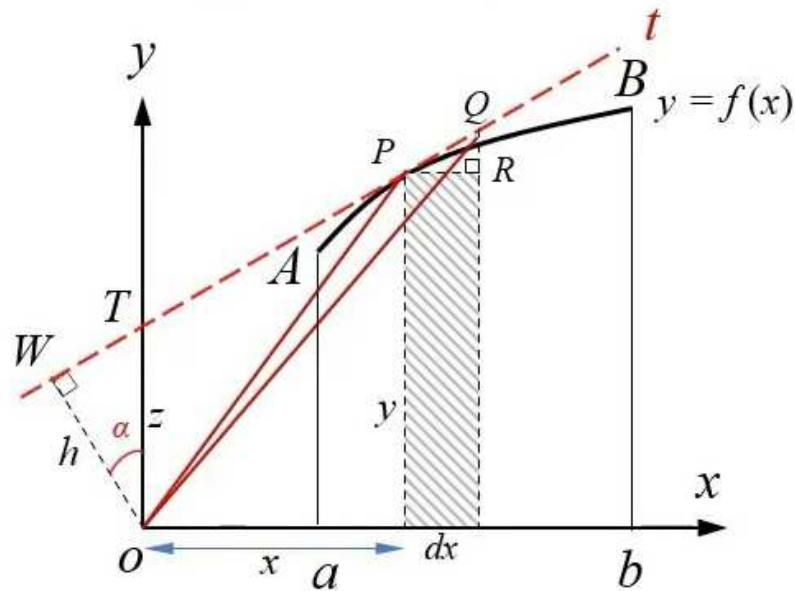
$$\frac{ds}{dx} = \frac{z}{h}$$

Figura 34 – Gráfico de uma função e sua reta tangente em um ponto



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 35 – Detalha o triângulo OPQ na demonstração do Teorema da Transmutação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se  $dx$  for muito pequeno e  $PQ$  estiver muito próximo da curva, então  $ds$  seria a hipotenusa do triângulo  $\triangle PRQ$  e  $z$  é a hipotenusa do triângulo  $\triangle OWT$ , a partir disso temos a relação:

$$h \cdot ds = z \cdot dx$$



Onde  $S_{\triangle O B b}$  e  $S_{\triangle O A a}$  são áreas de triângulos formados pela origem, um ponto no eixo  $x$  e o ponto correspondente na curva. A área dos dois triângulos retângulos podem ser calculadas se os limites de integração e a função sejam conhecidos, assim temos:

$$S = \int_a^b y dx = \frac{1}{2} \int_a^b z dx + \frac{1}{2} b f(b) - \frac{1}{2} a f(a)$$

Onde  $\int_a^b y dx$  é a integral em  $y$ ;  $\frac{1}{2} \int_a^b z dx$  é a integral em  $z$ ;  $\frac{1}{2} b f(b)$  é área do triângulo retângulo  $\triangle O B b$  e  $\frac{1}{2} a f(a)$  é área do triângulo  $\triangle O A a$ . Note que  $\frac{1}{2} b f(b) - \frac{1}{2} a f(a) = \frac{1}{2} (xy) \Big|_a^b$ , logo:

$$S = \int_a^b y dx = \frac{1}{2} (xy) \Big|_a^b + \frac{1}{2} \int_a^b z dx \quad (4.3)$$

Este é o teorema da transmutação de Leibniz, nós podemos transformar integrais de funções mais complicadas (em  $y$ ) para integrais de funções mais simples (em  $z$ ), desde que encontremos essa transformação (Dunham, 2005).

Uma pergunta que naturalmente surge: Essa transformação serve para todos os tipos de função? Para responder essa pergunta, faremos uma discussão sobre isso, aplicando a relação  $z = y - x \frac{dy}{dx}$ , na transformada integral:

$$\begin{aligned} \int_a^b y dx &= \frac{1}{2} \int_a^b \left( y - x \frac{dy}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} b f(b) - \frac{1}{2} a f(a) = \frac{1}{2} \int_a^b y dx - \frac{1}{2} \int_a^b x dy + \frac{1}{2} b f(b) - \frac{1}{2} a f(a) \\ \Rightarrow \int_a^b y dx &= \frac{1}{2} b f(b) - \frac{1}{2} a f(a) - \int_a^b x dy \end{aligned}$$

$$\int_a^b y dx = (xy) \Big|_a^b - \int_a^b x dy \quad (4.4)$$

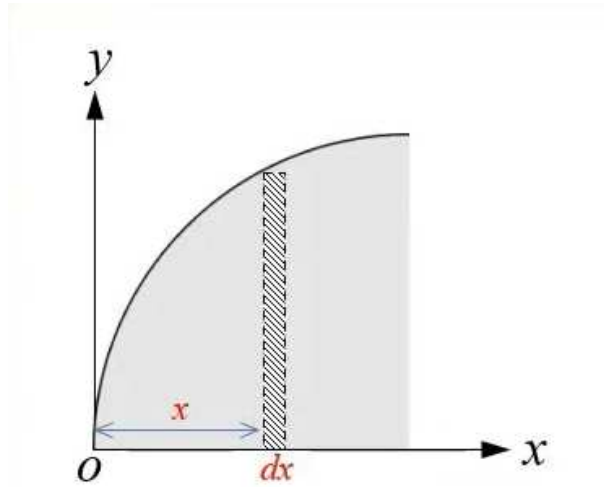
Obtemos a formula de integral por partes, válida para qualquer função, logo o teorema também é valido.

Passemos agora ao problema central desta seção: a aplicação do teorema para determinar a área de um quarto de círculo. Considera-se um quarto de círculo de raio 1 com centro em  $(1, 0)$  (Figura 37). A área sob a curva que define este quarto de círculo no intervalo  $x \in [0, 1]$  é sabidamente igual a  $\frac{\pi}{4}$

Cuja a equação do círculo, no intervalo de  $[0, 1]$  é:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 2x - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{2x - x^2}$$

Figura 37 – Quarto de círculo para a aplicação do Teorema da Transmutação de Leibniz



Fonte: Elaborado pelo autor.

A área do quarto do círculo é definida pela integral

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx$$

Como ainda não se conhecia série de Taylor ou binômio Newton. Tomaremos outro recurso, derivando a equação  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ , temos:

$$2(x - 1)dx + 2ydy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{y}$$

Usando o teorema da transmutação, transformando a variável, temos

$$z = y - x \frac{dy}{dx} = y - x \frac{1 - x}{y} = \frac{y^2 - x + x^2}{y} = \frac{2x - x^2 - x - x^2}{y}$$

$$z = \frac{x}{y} \tag{4.5}$$

$$z^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{2x - x^2}$$

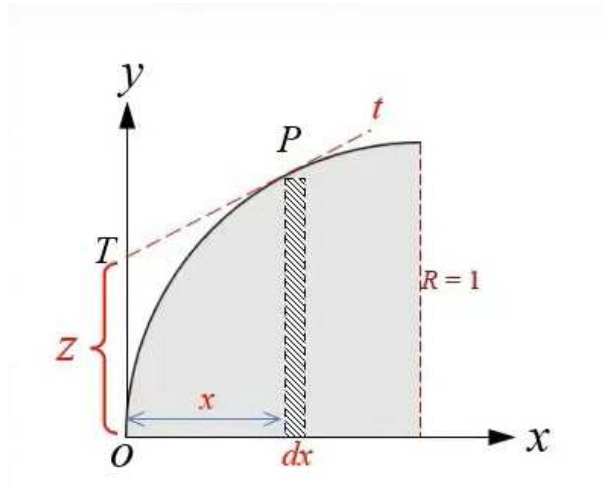
Para o caso  $x \neq 0$

$$z^2 = \frac{x}{2 - x} \tag{4.6}$$

Isolando x, no primeiro membro temos:

$$\Rightarrow z^2(2 - x) = x \Rightarrow x + xz^2 = 2z^2$$

Figura 38 – Representação gráfica da transformação de variáveis no Teorema da Transmutação



Fonte: Elaborado pelo autor.

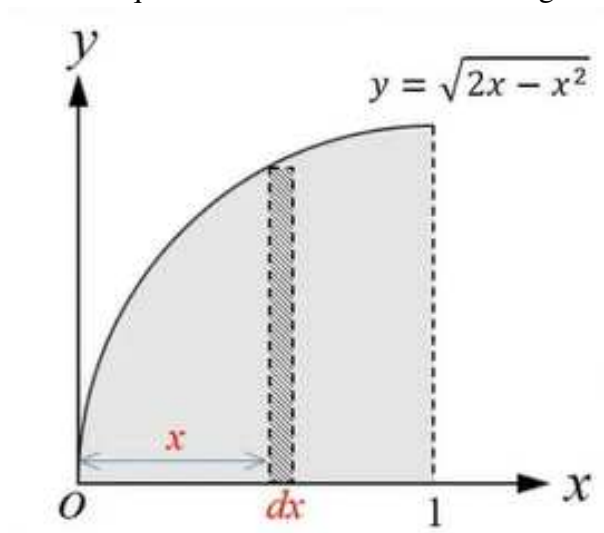
$$x = \frac{2z^2}{1+z^2} \quad (4.7)$$

Para o caso  $x = 0$ , usaremos a ideia de limite através da regra de L'Hopital:

$$z = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2 - 2x} = \frac{0}{2} = 0$$

Observe que  $x = 0 \Rightarrow z = 0$  e  $x = 1 \Rightarrow z = 1$

Figura 39 – Área do quarto de círculo como uma integral definida

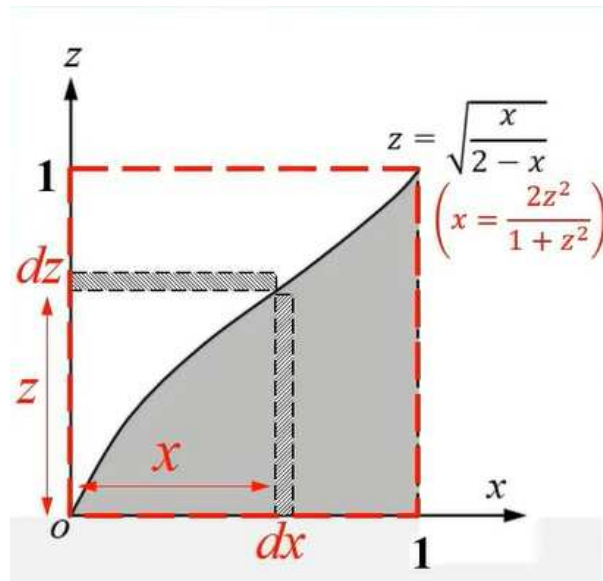


Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando a figura 39, usando a transmutação de Leibniz para integrais, temos:

$$\frac{\pi}{4} = S = \int_0^1 y dx = \frac{1}{2}(xy) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 z dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 z dx$$

Figura 40 – Relação entre as áreas na aplicação do Teorema da Transmutação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 40, a integral  $\int_0^1 z dx$ , pode ser calculada também como a área do quadrado de lado 1 menos a área da região branca do quadrado, matematicamente temos:

$$\int_0^1 z dx = 1 - \int_0^1 x dz$$

Onde  $\int_0^1 z dx$  é a área da região hachurada; 1 é a área do quadrado 1x1;  $\int_0^1 x dz$  é a área região branca. Essa é uma propriedade conhecida para funções monotônicas ou relacionada à integração de funções inversas. Voltamos à integral:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 z dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^1 x dz \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^1 \left( \frac{2z}{1+z} \right) dz \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} 1 - \int_0^1 \left( \frac{z}{1+z} \right) dz \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2} dz \end{aligned}$$

Lembrando do resultado da série geométrica (Equação 2.2):

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \dots$$

Então, a integral em z fica:

$$\int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2} dz = \int_0^1 (z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + z^{10} - \dots) dz$$

Calculando a integral definida concluímos, finalmente, a fórmula de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

### 4.3 A conexão com a função arco tangente

A fascinante relação entre a constante  $\pi$  e a série de Leibniz pode ser elegantemente demonstrada através da função arco tangente. Esta função, fundamental no cálculo e na trigonometria, é a chave para desvendar a série. A função arco tangente, denotada por  $\arctan(x)$  ou  $\tan^{-1}(x)$ , responde à pergunta: "Qual ângulo, no intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , possui uma tangente igual a  $x$ ?". Este intervalo é crucial, pois nele a função tangente é estritamente crescente e, portanto, invertível. Por exemplo, afirmamos que  $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$  porque  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ , e  $\frac{\pi}{4}$  pertence ao intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  (Stein, 2008).

Uma das ferramentas mais poderosas e versáteis do cálculo diferencial é a expansão de funções em séries de Taylor. Este método permite-nos aproximar funções bem comportadas (infinitamente diferenciáveis num ponto) por polinômios, cuja precisão aumenta com o grau do polinômio. A fórmula geral para a expansão de uma função  $f(x)$  em torno de um ponto  $x = a$  é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

onde  $f^{(n)}(a)$  representa a  $n$ -ésima derivada de  $f$  calculada no ponto  $a$ , e  $n!$  é o fatorial de  $n$ . Quando a expansão é realizada em torno do ponto  $a = 0$ , a série de Taylor é frequentemente chamada de série de Maclaurin. Para a função arco tangente,  $\arctan(x)$ , sua expansão em série de Maclaurin (ou seja,  $a = 0$ ) é particularmente útil e conhecida:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Esta série converge para  $\arctan(x)$  no intervalo  $|x| \leq 1$ . Se considerarmos o valor específico de  $x = 1$ , que está na fronteira do intervalo de convergência da série, podemos substituir este valor na expansão:

$$\arctan(1) = 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - \frac{1^7}{7} + \dots$$

Simplificando as potências de 1, obtemos a expressão:

$$\arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Como estabelecemos anteriormente, o valor de  $\arctan(1)$  é  $\frac{\pi}{4}$ . Substituindo este valor na equação acima, chegamos à famosa série de Leibniz para  $\pi$ :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Esta derivação, embora elegante, depende da convergência da série de Taylor no ponto  $x = 1$ . Existe uma abordagem alternativa, talvez mais direta para alguns, que utiliza o cálculo integral e solidifica este resultado. Conforme explorado por (Stewart, 2010), partimos do conhecimento de que a derivada da função arco tangente é

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos expressar  $\arctan(1)$  através da integral definida desta derivada no intervalo  $[0, 1]$ :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) - \arctan(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Uma vez que  $\arctan(0) = 0$ , temos:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Para revelar a série a partir desta integral, utilizamos uma manipulação algébrica engenhosa. Adicionamos e subtraímos o termo  $(-1)^{n+1}x^{2n+2}$  (o que equivale a adicionar zero) ao numerador do integrando. Este passo pode parecer artificial à primeira vista, mas seu propósito é permitir a utilização da fórmula da soma de uma progressão geométrica finita:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left( \frac{1 - (-1)^{n+1}x^{2n+2} + (-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} \right) dx$$

Podemos então separar o integrando em duas frações:

$$= \int_0^1 \left( \frac{1 - (-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} \right) dx$$

O primeiro termo dentro da integral,  $\frac{1 - (-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$ , é a soma dos primeiros  $n+1$  termos de uma progressão geométrica com primeiro termo 1 e razão  $-x^2$ . Lembre-se que a soma de uma PG finita  $1 + r + r^2 + \dots + r^n$  é  $\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$  (Equação 2.2). No nosso caso, o "r" é  $-x^2$  e o expoente final da razão é  $n$ . Assim, temos:

$$\frac{1 - (-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} = \frac{1 + (-1)^{n+2}x^{2(n+1)}}{1 - (-x^2)} = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 - (-x^2)} = \sum_{k=0}^n (-x^2)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$$

Substituindo esta soma finita de volta na integral:

$$= \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} \right) dx$$

Utilizando a propriedade da linearidade da integral, podemos separar a integral da soma finita e a integral do termo restante. A integral da soma finita pode ser escrita como a soma das integrais de cada termo:

$$= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k x^{2k} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

Calculando a integral de cada termo polinomial  $(-1)^k x^{2k}$ :

$$\int_0^1 (-1)^k x^{2k} dx = (-1)^k \left[ \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = (-1)^k \left( \frac{1^{2k+1}}{2k+1} - \frac{0^{2k+1}}{2k+1} \right) = \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Assim, a expressão se torna:

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \left( \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \right) dx$$

Agora, nosso objetivo é analisar o comportamento do termo integral restante, que chamaremos de  $R_n$ , à medida que  $n$  tende ao infinito:

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

Vamos analisar o valor absoluto da integral. Para  $x \in [0, 1]$ , sabemos que  $x^{2n+2} \geq 0$  e  $1+x^2 > 0$ . Além disso,  $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ , o que implica que  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ . Portanto, para o integrando  $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$ , temos as seguintes desigualdades no intervalo  $[0, 1]$ :

$$0 \leq \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$$

Integrando todos os membros da desigualdade de 0 a 1:

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \left[ \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+3}$$

À medida que  $n \rightarrow +\infty$ , o termo  $\frac{1}{2n+3}$  claramente tende a 0. Pelo *Teorema do Confronto* (ou *Sanduiche*), a integral  $\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$  também tende a 0. Consequentemente, o termo  $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$  também tende a 0 quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Portanto, ao tomar o limite quando  $n \rightarrow +\infty$  na nossa expressão para  $\frac{\pi}{4}$ :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \left( \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \right) dx \right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} + 0$$

Isso nos leva à mesma série de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

A demonstração da série de Leibniz para  $\pi$  utilizando a função arco tangente, seja pela expansão em série de Taylor ou pela avaliação de sua integral definida, é um exemplo clássico e belo da interconexão de conceitos no cálculo. Ela ilustra como ferramentas analíticas podem ser empregadas para deduzir resultados numéricos profundos e elegantes, conectando a geometria (através do arctan e de  $\pi$ ) com as somas infinitas.

#### 4.4 A lenta convergência da série de Leibniz

A série de Leibniz, dada por  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$ , demonstra uma conexão matemática elegante entre um número irracional fundamental e uma série infinita simples. No entanto, apesar de sua beleza teórica, a série de Leibniz apresenta uma característica notável: sua lenta convergência. Como é mostrado ao analisar as 5 primeiras somas parciais, lembrando que  $\frac{\pi}{4} \approx 0,7853981633\dots$ ):

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0.6666\dots$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10+3}{15} = \frac{13}{15} = 0.8667\dots$$

$$S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{13}{15} - \frac{1}{7} = \frac{91-15}{105} = \frac{76}{105} = 0.7238\dots$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{76}{105} + \frac{1}{9} = \frac{228+35}{315} = \frac{263}{315} = 0.8349\dots$$

Uma série é dita que converge lentamente quando um grande número de seus termos precisa ser somado para que a soma parcial se aproxime do valor limite com uma precisão

razoável. No caso da série de Leibniz, essa lentidão é bastante pronunciada. Podemos analisar essa característica observando o comportamento das suas somas parciais e utilizando a estimativa do erro fornecida pelo Teste de Leibniz para séries alternadas.

O Teste de Leibniz garante que para uma série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$  com  $b_n > 0$ , se  $\{b_n\}$  é decrescente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , então a série converge. Além disso, o erro ao aproximar pela  $N$ -ésima soma parcial  $S_N$  é:

$$|R_N| \leq b_{N+1} = \frac{1}{2(N+1)+1} = \frac{1}{2N+3}.$$

#### Exemplos numéricos:

- Para  $N = 4$  termos:  $S_3 \approx 0,8667$ . Erro máximo:  $|R_3| \leq \frac{1}{7} \approx 0,1428$ . Diferença real:  $|0,7854 - 0,8667| \approx 0,0813$ .
- Para  $N = 50$  termos:  $S_{49} \approx 0,78038$ . Erro máximo:  $|R_{49}| \leq \frac{1}{101} \approx 0,0099$ . Diferença real:  $|0,7854 - 0,78038| \approx 0,00502$ .

Percebe-se que, mesmo com 50 termos, a aproximação ainda possui um erro significativo na terceira casa decimal. Para obter uma precisão de, por exemplo, 4 casas decimais corretas (erro menor que 0,00005), precisaríamos que

$$\frac{1}{2N+3} < 0,00005 \implies N > 9998,5 \quad (\text{aproximadamente } 10.000 \text{ termos}).$$

Ou seja, seriam necessários aproximadamente 10.000 termos para alcançar essa precisão, o que evidencia a lentidão da convergência.

#### *Aceleração da Convergência e o Método de Euler*

A necessidade de somar um número excessivamente grande de termos para obter uma precisão aceitável torna a série de Leibniz pouco prática para cálculos numéricos eficientes de  $\pi$ . Diante dessa limitação, surgiram diversos métodos matemáticos com o objetivo de acelerar a convergência de séries, transformando uma série lentamente convergente em outra série que converge para o mesmo valor limite, mas de forma muito mais rápida. A aceleração da convergência é um campo importante do cálculo numérico, com aplicações em diversas áreas.

Um dos métodos clássicos para acelerar a convergência de séries alternadas é a Transformada de Euler. Este método é particularmente eficaz para séries do tipo da série de Leibniz, onde os termos decrescem monotonicamente para zero. A ideia fundamental da Transformada de Euler é expressar a soma da série original em termos de diferenças progressivas dos seus termos (Burden e Faires, 2011).

A **Transformada de Euler** para a série alternada  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Delta^k a_0}{2^{k+1}},$$

onde  $\Delta^k a_0$  representa a  $k$ -ésima diferença progressiva avaliada no primeiro termo  $a_0$ . As diferenças progressivas são definidas recursivamente:

$$\Delta^0 a_n = a_n,$$

$$\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n,$$

$$\Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n,$$

$$\Delta^k a_n = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} a_{n+j}.$$

Aplicando a Transformada de Euler à série de Leibniz, onde  $a_n = \frac{1}{2n+1}$ , precisamos calcular as diferenças progressivas de  $a_0 = \frac{1}{1} = 1$ .

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{5}, \quad a_3 = \frac{1}{7}, \quad \dots$$

Diferenças progressivas calculadas:

$$\Delta^0 a_0 = a_0 = 1,$$

$$\Delta^1 a_0 = a_1 - a_0 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3},$$

$$\Delta^2 a_0 = a_2 - 2a_1 + a_0 = \frac{1}{5} - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15},$$

$$\Delta^3 a_0 = a_3 - 3a_2 + 3a_1 - a_0 = \frac{1}{7} - 3\left(\frac{1}{5}\right) + 1 - 1 = \frac{5-21}{35} = -\frac{16}{35}.$$

E assim por diante. Pode-se observar um padrão em  $\Delta^k a_0$ .

A série transformada torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \frac{\Delta^0 a_0}{2^1} - \frac{\Delta^1 a_0}{2^2} + \frac{\Delta^2 a_0}{2^3} - \frac{\Delta^3 a_0}{2^4} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{-2/3}{4} + \frac{8/15}{8} - \frac{-16/35}{16} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{12} + \frac{8}{120} + \frac{16}{560} + \dots \end{aligned}$$

Simplificando as frações temos a série transformada:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots$$

Que colocando, através da fatoração podemos rescrever a seguinte fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$$

Calculando as primeiras as 5 primeiras somas parciais ( $\frac{\pi}{4} \approx 0,7853981633\dots$ ):

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0,6666666666\dots$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} = 0,7333333333\dots$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = 0,7619047619$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{4}{315} = 0,7746031746\dots$$

Ao calcular as somas parciais desta nova série, percebemos que a convergência é significativamente mais rápida do que a da série original de Leibniz. Por exemplo, com apenas alguns termos, já obtemos uma aproximação muito melhor de  $\frac{\pi}{4}$

#### 4.5 Relação dos números primos ímpares e pi

Essa seção é um bônus onde o  $\frac{\pi}{4}$  será obtido através de números primos (Ono e Trebat-Leder, 2016). Para facilitar as manipulações subsequentes, chamaremos nossa série de  $\frac{\pi}{4}$  de  $M$ , isto é

$$M = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Se olharmos mais de perto os termos negativos, podemos ver que são todos os termos que têm um denominador que é um a menos que um múltiplo de 4. E da mesma forma, os termos positivos são todos os termos com um denominador um a mais do que um múltiplo de 4. Vale a pena notar agora para nos ajudar a ver para onde estamos indo. Podemos tentar eliminar esse segundo termo considerando o que é  $M \cdot \frac{1}{3}$ . Se dividirmos cada termo por 3, obteremos

$$M \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} \dots$$

Cada um desses termos do lado direito aparece na série original  $M$ , mas com o sinal oposto. Portanto, se adicionarmos  $M + \frac{1}{3} \cdot M$ , todos esses termos serão cancelados. Resultando

apenas na série original, mas sem nenhum termo que seja um sobre um múltiplo de 3. Fatorando  $M$ , temos:

$$M\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \dots$$

Então, o que realmente fizemos nessas etapas foi multiplicar nossa série original por  $1 + \frac{1}{3}$  para eliminar todos os termos que são um sobre um múltiplo de 3. Podemos tentar a mesma abordagem para o segundo passo, que é multiplicar por  $\frac{1}{5}$ .

$$M\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{35} - \frac{1}{55} + \frac{1}{65} \dots$$

Novamente cada um desses termos aparece na série acima, o  $M\left(1 + \frac{1}{3}\right)$ , mas desta vez com o mesmo sinal. Então, para eliminar esses termos, temos que subtrair.

$$M\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots$$

Se fizéssemos isso outra vez com o novo segundo termo,  $1/7$ , multiplicaríamos por  $1 + \frac{1}{7}$  e isso eliminaria todos os termos restantes que são um sobre um múltiplo de 7.

$$M\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) = 1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots$$

Então, em seguida, fazemos isso com 11 onde adicionamos, depois 13 subtraímos, depois 17 subtraímos e assim por diante, eliminando todos os termos relacionados à medida que avançamos.

$$M\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{11}\right) \left(1 - \frac{1}{13}\right) \left(1 - \frac{1}{17}\right) \dots = 1$$

Olhando para a sequência de números que eliminamos como o segundo termo até agora, um terço, um quinto, um sétimo, um onze avos, um treze avos, um dezessete avos, agora podemos ver que esses denominadores são todos primos.  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}, \dots\right)$

Tendo trabalhado com os primeiros exemplos, observamos que o segundo termo da série em qualquer etapa de eliminação é um sobre o próximo primo. Isso ocorre porque qualquer número menor que esse primo já foi eliminado da série por um primo menor em algum processo anterior de eliminação. Então agora sabemos que para eliminar todos os termos da forma um sobre um múltiplo de primo  $p$ , multiplicamos nossa série por  $1 \pm \frac{1}{p}$ . Mas como sabemos se deve adicionar ou subtrair? Há uma maneira muito fácil de saber.

Se o termo  $\frac{1}{p}$  é um termo negativo na série original  $M$ , então, para eliminar os termos relacionados a esse primo  $p$ , multiplicamos a série por  $1 + \frac{1}{p}$ . E da mesma forma, se o termo  $\frac{1}{p}$  é um termo positivo na série original, então, para eliminar os termos relacionados a  $p$ , multiplicamos a série por  $1 - \frac{1}{p}$  (Hefez e Fernandez, 2016).

Agora, como destacado anteriormente, podemos dizer se algum termo na série original  $M$  é positivo ou negativo apenas vendo se denominador é um múltiplo de  $4 \pm 1$ . Por exemplo,  $\frac{1}{7}$  e  $\frac{1}{11}$  são termos negativos, pois 7 e 11, ambos são um a menos que um múltiplo de 4, e, por exemplo também,  $\frac{1}{13}$  e  $\frac{1}{17}$  são positivos, pois 13 e 17, são um a mais do que um múltiplo de 4.

$$M = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \mp \frac{1}{p} \pm \dots$$

onde:  $p = 4k \pm 1$ , para algum  $k$  natural.

Continuando dessa forma, agora podemos eliminar todos os termos relacionados a todos os primos e, de fato, ao fazer isso, eliminaremos todos os termos, exceto 1.

$$M \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{11}\right) \left(1 - \frac{1}{13}\right) \left(1 - \frac{1}{17}\right) \dots = 1$$

Agora, vamos transformar cada termo à esquerda em uma única fração, adicionando ou subtraindo as frações.

$$M \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{8}{7}\right) \left(\frac{12}{11}\right) \left(\frac{12}{13}\right) \left(\frac{16}{17}\right) \dots = 1$$

Agora vamos cancelar cada termo à esquerda, primeiro multiplicando os dois lados por  $\frac{3}{4}$ , depois multiplicamos os dois lados por  $\frac{5}{4}$ , depois  $\frac{7}{8}$  ... Continuando assim, a fórmula começa a aparecer.

$$M = \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{7}{8}\right) \left(\frac{11}{12}\right) \left(\frac{13}{12}\right) \left(\frac{17}{16}\right) \dots \quad (4.8)$$

Agora podemos ver que os denominadores de cada fator do lado direito da igualdade é o número primo do numerador mais 1 se esse primo for da forma  $4k - 1$ , ou é o número primo no numerador menos 1 se esse primo for da forma  $4k + 1$ . Em outras palavras, o denominador de cada fração é o numerador primo arredondado para o múltiplo de 4 mais próximo.

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{7}{8}\right) \left(\frac{11}{12}\right) \left(\frac{13}{12}\right) \left(\frac{17}{16}\right) \dots \quad (4.9)$$

E finalmente mostramos que  $\frac{\pi}{4}$  é o produto de todos os primos ímpares divididos por o múltiplo de 4 mais próximo. No entanto, por se tratar de um produto de infinitos fatores, podemos introduzir a seguinte notação de produtório,

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{p \text{ primo ímpar}} \frac{p}{p \pm 1}, \quad (4.10)$$

Concluimos este capítulo explorando a fascinante Série de Leibniz, que nos permitiu calcular o valor de  $\frac{\pi}{4}$  através de abordagens diversas. Essa jornada nos revelou não apenas a beleza da matemática em si, mas também um vislumbre inesperado de sua universalidade, ao notar sua curiosa ligação com a distribuição dos números primos. No entanto, podemos transcender a beleza teórica e transformar conceitos tão intrínsecos e, por vezes, abstratos em ferramentas concretas para o aprendizado e a prática. É essa ponte entre a Matemática e sua aplicação na educação que nos guiará no próximo capítulo.

## 5 A SÉRIE DE LEIBNIZ E O ENSINO DE MATEMÁTICA

A jornada matemática empreendida nesta dissertação, explorando as diversas demonstrações da série de Leibniz para  $\pi$ , revela não apenas a beleza e a interconexão de diferentes áreas da matemática, mas também um rico potencial pedagógico para o Ensino Básico. A própria natureza da série, que conecta um número irracional ( $\pi$ ) a uma soma infinita de termos racionais simples e alternados, oferece um contexto motivador para introduzir e discutir conceitos abstratos como infinito, convergência, aproximação e a ideia intuitiva de limite.

A abordagem histórica permite contextualizar a matemática como uma ciência em evolução, enquanto as demonstrações, especialmente a de viés geométrico explorada neste capítulo, fornecem visualizações que podem facilitar a compreensão de processos de aproximação sucessiva.

### 5.1 Justificando as escolhas pedagógicas do produto educacional

A decisão de estruturar a sequência didática (Apêndice B) em torno da demonstração geométrica da Série de Leibniz, explorada na Seção 4.1, não foi arbitrária. Ela resulta de uma análise comparativa das múltiplas abordagens investigadas nesta dissertação, considerando as particularidades cognitivas e curriculares do aluno do Ensino Médio.

A abordagem geométrica apresenta-se como a mais adequada para este nível de ensino por seu forte apelo visual e intuitivo. Ela permite que os estudantes compreendam o processo de aproximação de um arco por segmentos de reta e a construção da soma termo a termo sem a necessidade de um conhecimento prévio de cálculo diferencial e integral. Ferramentas como o GeoGebra, sugeridas na sequência didática, potencializam essa abordagem, tornando o processo dinâmico e exploratório.

Em contrapartida, as outras demonstrações, embora matematicamente ricas, exigem um ferramental mais avançado. A prova via Teorema da Transmutação de Leibniz (Seção 4.2) e a conexão com a função arco tangente e a série de Taylor (Seção 4.3) são elegantes, mas dependem de conceitos de cálculo que não fazem parte do currículo padrão do Ensino Médio. Apresentá-las diretamente poderia criar um obstáculo de abstração, transformando o que deveria ser uma jornada de descoberta em um exercício de aceitação de fórmulas prontas.

Portanto, a pesquisa teórica aprofundada nas diferentes demonstrações cumpriu um papel crucial: permitiu não apenas o domínio do conteúdo pelo professor-pesquisador, mas

também a tomada de uma decisão pedagógica informada, selecionando o caminho mais fértil para a construção do conhecimento em sala de aula.

Reconhecendo esse potencial, e em cumprimento às exigências do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), foi desenvolvido um recurso educacional atrelado à presente pesquisa. Este recurso consiste em uma **Sequência Didática, composta por 5 aulas**, intitulada "Desvendando  $\pi$  - Uma Jornada Infinita", destinada a alunos do Ensino Médio. A sequência completa encontra-se no **Apêndice B** deste trabalho.

Esta sequência didática foi concebida como um produto independente, de modo que um professor da Educação Básica possa utilizá-la sem a necessidade de consulta prévia à dissertação. Ela traduz os elementos centrais da investigação teórica aqui apresentada: a história de  $\pi$ ; a aproximação de áreas e arcos por subdivisão; a introdução às séries via série geométrica e a apresentação da série de Leibniz através de uma construção geométrica intuitiva. Com atividades práticas, discussões guiadas e explorações visuais (com sugestões de uso do software GeoGebra), buscando engajar os alunos e facilitar a construção de conceitos matemáticos relevantes.

A elaboração deste recurso educacional e sua articulação com a fundamentação teórica descrita na dissertação atendem diretamente ao disposto no **Artigo 13º do Regimento Geral do PROFMAT** (SBM-PROFMAT, 2023), que estabelece:

Para a obtenção do título de Mestre em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação Básica, é necessário o desenvolvimento de um recurso educacional e de uma dissertação de mestrado, na qual estejam descritos os fundamentos teóricos empregados e os processos que culminaram neste produto e na sua aplicação em situações de ensino. Isso deve ser feito com foco em tópicos específicos relacionados ao currículo de Matemática na Educação Básica e seu impacto na prática pedagógica em sala de aula.

Nesse sentido, a presente dissertação e o produto educacional dela decorrente (Apêndice B) buscam uma sinergia explícita. A decisão de explorar múltiplas demonstrações da Série de Leibniz no Capítulo 4, por exemplo, não visa apenas a completude teórica, mas também a reflexão sobre qual abordagem seria mais transponível e significativa para o Ensino Médio – culminando na escolha da derivação geométrica para a sequência didática. Similarmente, a discussão sobre a lenta convergência da série (Seção 4.4) é diretamente abordada na Aula 5 como uma oportunidade para discutir a eficiência de métodos matemáticos e a natureza das aproximações. A fundamentação em séries geométricas (Capítulo 2) é traduzida na Aula 3 como um degrau essencial para que os alunos possam, posteriormente, compreender a manipulação algébrica que transforma a soma dos comprimentos dos segmentos na Série de Leibniz.

A sequência didática proposta (Apêndice B) representa, portanto, o recurso educacional exigido, focado em tópicos do currículo da Educação Básica e com potencial de impacto na prática pedagógica ao oferecer uma abordagem alternativa e contextualizada para o ensino de conceitos matemáticos. A presente dissertação, por sua vez, descreve os fundamentos teóricos e os processos matemáticos que embasaram a criação deste recurso.

Espera-se que a combinação da exploração teórica com a proposta didática prática contribua para a valorização do ensino de matemática, mostrando como tópicos clássicos e elegantes podem ser ferramentas poderosas para o desenvolvimento do raciocínio e o encantamento dos estudantes na Educação Básica.

## 6 CONCLUSÃO

Esta pesquisa explorou o número  $\pi$ , um dos mais emblemáticos da Matemática, sob várias perspectivas: histórica, geométrica, analítica e pedagógica. Revelando conexões surpreendentes e oferecendo ferramentas inovadoras para o ensino de matemática. Os principais resultados e contribuições podem ser organizados em três eixos:

Primeiro: Traçamos a evolução do conceito de  $\pi$ , desde as aproximações empíricas de civilizações antigas (como os egípcios, que usavam  $\pi \approx \frac{256}{81}$ , e os babilônios, com simplesmente  $\pi \approx 3$ ) até os métodos rigorosos de Arquimedes, que aproximou  $\pi$  usando polígonos inscritos e circunscritos. Essa reconstrução histórica é traduzida em atividades práticas em salas de aulas do ensino fundamental médio, como a medição de  $\pi$  com objetos cotidianos (copos, moedas, rodas de bicicleta e etc), permitindo a vivência da matemática como uma ciência experimental e em constante evolução.

Segundo: demonstramos que a série de Leibniz  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  frequentemente abordada como uma curiosidade analítica, pode ser derivada de uma abordagem geométrica. Ao subdividir recursivamente um triângulo isósceles inscrito em um quarto de círculo (Figura 28), associamos cada etapa da subdivisão a um termo da série, revelando como a geometria clássica pode fundamentar resultados de séries infinitas. Essa abordagem revela como a geometria pode iluminar resultados clássicos de séries infinitas.

Terceiro: provamos também que  $\pi$  pode ser expresso como um produto infinito envolvendo números primos ímpares:

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{p \text{ primo ímpar}} \frac{p}{p \pm 1}, \quad (6.1)$$

onde o sinal  $\pm$  depende da congruência do primo módulo 4. Uma generalização que conecta **teoria dos números** a representações de constantes irracionais.

Diante de tudo isso é importante ressaltar que cada um desses eixos teóricos não foi explorado isoladamente, mas com o olhar voltado para sua potencial transposição didática. A análise aprofundada dos fundamentos das séries infinitas (Capítulo 2) forneceu as bases para a introdução gradual desses conceitos na sequência didática. A investigação sobre o cálculo de áreas e somas de potências (Capítulo 3) inspirou as atividades de aproximação e visualização com tecnologia. E, crucialmente, a exploração das diferentes facetas da Série de Leibniz (Capítulo 4), desde sua derivação geométrica até sua conexão com os números primos, moldou o núcleo da

proposta pedagógica, buscando apresentar a matemática como uma ciência viva, interconectada e acessível.

A interpretação geométrica da série de Leibniz pode ser adaptada para aulas de pré-cálculo, para estudantes do Ensino Médio e para professores em formação continuada, usando ferramentas como GeoGebra (Geogebra, 2023) e programação em Python para visualizações interativas, ficando, assim, sugestões para trabalhos futuros.

Embora a Fórmula de Leibniz não seja eficiente para cálculos de alta precisão devido à sua lenta convergência, seu valor reside em enriquecer o entendimento histórico da série e, também, em oferecer uma ferramenta pedagógica poderosa para ilustrar conceitos de cálculo e análise numérica, tornando abstrações matemáticas mais tangíveis em ambientes educacionais.

Os resultados desta pesquisa foram convertidos em recursos pedagógicos prontos para uso em sala de aula, alinhados à Base Nacional Comum curricular (BRASIL, 2018), através de uma sequência didática, formadas por 5 aulas, abordando, desde um pouco da história de  $\pi$  até a introdução de conceitos de cálculo para somas infinitas. Ao traduzir conceitos abstratos em atividades palpáveis, esta pesquisa reforça que a matemática pode ser ensinada de forma contextualizada, interdisciplinar e inclusiva.

A tradução desses insights teóricos para o contexto da Educação Básica materializou-se na sequência didática 'Desvendando  $\pi$  - Uma Jornada Infinita' (Apêndice B). A escolha pela abordagem geométrica para derivar a Série de Leibniz nas Aulas 4 e 5, por exemplo, é um reflexo direto da análise comparativa das demonstrações apresentadas no Capítulo 4, priorizando-se aquela com maior potencial visual e conceitual para alunos do Ensino Médio. A introdução às séries via o exemplo concreto e visual da série geométrica na Aula 3 espelha a fundamentação teórica do Capítulo 2, que destaca a importância deste tipo de série como porta de entrada para o estudo de somas infinitas. Mesmo a discussão sobre a lenta convergência da série (Seção 4.4) encontra seu eco na Aula 5, promovendo uma reflexão crítica sobre a aplicabilidade e eficiência dos métodos matemáticos.

Portanto, esta dissertação buscou não apenas contribuir para a compreensão teórica da Série de Leibniz e suas fascinantes conexões, mas também, e fundamentalmente, demonstrar como um estudo aprofundado de tópicos matemáticos clássicos pode diretamente informar e enriquecer a prática pedagógica. A sequência didática desenvolvida é um testemunho dessa interdependência, onde os desafios e as descobertas da pesquisa teórica se convertem em estratégias de ensino que visam engajar os alunos e revelar a beleza inerente à matemática.

Esta pesquisa abre caminho para trabalhos futuros em três frentes principais, com potencial para transformar o ensino de matemática: Generalização para outras constantes, adaptando a abordagem geométrica para explorar constantes como  $e$  (número de Euler), por exemplo; desenvolvimento de um aplicativo para mostrar dinamicamente as demonstrações geométricas apresentados neste trabalho; um curso de formação continuada para professores da rede pública, com módulos sobre: Integração de Python e GeoGebra em aulas de geometria e também oferecer estratégias de como ensinar o básico teoria dos números, para resolução de problemas de olimpíadas de Matemática.

Em última análise, esta dissertação e seu produto educacional buscam materializar o princípio fundamental do PROFMAT: a formação do professor como pesquisador de sua própria prática. A jornada pelos fundamentos das séries, pelas provas de Fermat e pelas múltiplas demonstrações da fórmula de Leibniz não foi um mero exercício acadêmico. Foi, na verdade, o percurso necessário para adquirir a profundidade teórica que permite ao educador realizar a transposição didática de forma consciente e responsável. Dominar o complexo para poder ensinar o simples com clareza é a essência do trabalho docente aqui defendido.

Concluimos este trabalho com a esperança de que ele contribua tanto para o ensino quanto para a valorização da Matemática, demonstrando como seus conceitos se entrelaçam e se desdobram em uma harmonia intelectual. Além disso, esta pesquisa não se limita a uma exploração teórica de  $\pi$ , mas oferece um modelo replicável para ensinar tópicos complexos de matemática na educação básica. Que ela inspire educadores a transformar fórmulas em narrativas, números em pontes para o conhecimento e salas de aula em espaços de descoberta coletiva.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, K. K. de. **Uma breve cronologia de pi**. [S. l.], 2008. Imagem de domínio público. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2008/12/breve-cronologia-de-pi.html>. Acesso em: 06 de maio de 2025.
- APOSTOL, T. M. **Calculus; Vol. 2**. [S. l.]: Reverte, 2000.
- ARQUIMEDES. [S. l.], 2024. Imagem de domínio público. Disponível em: <https://engenharia360.com/wp-content/uploads/2021/08/SoCient%C3%ADfica-1.jpg>. Acesso em: 10 de nov. de 2024.
- BECKMANN, P. **A History of pi**. [S. l.]: Barnes & Noble, 1993.
- BORWEIN, J. M. **The Life of pi: from archimedes to eniac and beyond**. [S. l.]: Springer, 2013.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC, 2018.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical analysis**. 9th. ed. [S. l.]: Cole Publishing Company, 2011.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. 8ª. ed. São Paulo: Editora Atual, 2005. v. 9.
- DUNHAM, W. **The calculus gallery: masterpieces from newton to lebesgue**. [S. l.]: Princeton University Press, 2005.
- FERMAT. [S. l.], 2022. Imagem de domínio público. Disponível em: <https://www.folhaunica.com.br/wp-content/uploads/2022/10/fermat-768x395.jpg>. Acesso em: 15 de abr. de 2025.
- FRANCKE, C. B. **Retrato de Gottfried Wilhelm Leibniz**. [S. l.], 1695. Óleo sobre tela, Museu de Berlim, Alemanha. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried\\_Wilhelm\\_Leibniz](https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz). Acesso em: 10 de nov. de 2024.
- GEOGEBRA. **Geogebra**. [S. l.], 2023. Disponível em: <https://www.geogebra.org> Acesso em: 8 de ago. de 2025.
- HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M. **An introduction to the theory of numbers**. 4th. ed. Oxford: Clarendon Press, 1960.
- HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Aritmética**. [S. l.]: SBM, 2016. (Coleção PROFMAT).
- HONSBERGER, R. **Ingenuity in mathematics**. [S. l.]: Mathematical Association of America, 1998. v. 23. (New Mathematical Library, v. 23). Originalmente publicado em 1970.
- LIMA, E. L. **Curso de análise**. 12ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. v. 1.
- LIMA, E. L. *et al.* **Matemática no ensino médio**. [S. l.]: SBM, 2000. v. 1.
- ONO, K.; TREBAT-LEDER, S. **Research in Number Theory**. [S. l.]: Springer, 2016. v. 2. 1–6 p.
- PEDROSA, A. S. F. **Potências do Seno: do produto de wallis ao comprimento da elipse**. 2018. 44 f. Fortaleza, CE: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, 2018.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de história da matemática**. [S. l.]: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

SBM-PROFMAT. **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**. [S. l.], 2023. Disponível em: <https://profmat.sbm.org.br/regimento/>, Acesso em: 04 de maio de 2025.

STEIN, S. K. **Strength in numbers**: discovering the joy and power of mathematics in everyday life. [S. l.]: Turner Publishing, 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. [S. l.]: Cengage Learning, 2010. v. 2.

STILLWELL, J. **Mathematics and its history**. [S. l.]: Springer, 1989. v. 3.

WAGNER, E.; MORGADO, A.; ZANI, S. **Progressões e matemática financeira**. [S. l.: s. n.], 2005.

## APÊNDICE A – SOMA DE POTÊNCIAS DOS NATURAIS

Ao observar as seções do capítulo 3, dentro dos métodos abordados, a maior dificuldade estava no cálculo das somas das potências, porque não tínhamos uma fórmula curta para a soma  $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ . Na verdade, existem tais fórmulas e, quando  $k$  é pequeno, elas podem ser encontradas com algum esforço. Só para registrar, aqui estão as fórmulas para os quatro primeiros casos,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Para alguns casos, usaremos o seguinte resultado através da seguinte potência, usando binômio de Newton.

$$(1+l)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} l^i$$

**Soma dos  $n$  primeiros naturais,  $k = 1$**

$$S_1 = 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + n^1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Que é uma soma de uma progressão aritmética (P.A.)

**Soma dos quadrados dos  $n$  primeiros naturais,  $k = 2$**

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Usando o desenvolvimento do binômio de Newton, para  $k = 2$  e  $l = 1; 2; 3; \dots; n$  temos:

$$(1+1)^3 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 1^3$$

$$(1+2)^3 = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3$$

$$(1+3)^3 = 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 3^3$$

⋮

$$(1+n)^3 = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2 + n^3$$

Ao somar todas as equações, observando ambos os membros das igualdades acima, é fácil ver que  $(1+1)^3$  se cancela com  $2^3$ ;  $(1+2)^3$  se cancela com  $3^3$ , assim sucessivamente até  $(1+n-1)^3$  se cancela com  $n^3$ , que é chamado de somas telescópicas:

$$(1+n)^3 = n + 3 \cdot S_1 + 3 \cdot S_2 + 1^3$$

Fazendo  $S_1 = \frac{n+n^2}{2}$ :

$$\Rightarrow 1 + 3n + 3n^2 + n^3 = n + 3 \cdot \frac{n^2+n}{2} + 3 \cdot +1$$

$$\Rightarrow 6n + 6n^2 + 2n^3 = 2n + 3n^2 + 3n + 6 \cdot S_2$$

$$\Rightarrow 6 \cdot S_2 = n + 3n^2 + 2n^3$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Soma dos cubos dos n primeiros naturais,  $k = 3$**

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^2 + \dots + n^3$$

Novamente, desenvolvendo o binômio de Newton para  $k = 3$ , e  $l = 1; 2; 3; \dots; n$

temos:

$$(1+1)^4 = 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^3 + 1^4$$

$$(1+2)^4 = 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 2^4$$

$$(1+3)^4 = 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 3^4$$

⋮

$$(1+n)^4 = 1 + 4 \cdot n + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n^3 + n^4$$

Ao somar todas as equações, observando ambos os membros das igualdades acima, é fácil ver que  $(1+1)^4$  se cancela com  $2^4$ ;  $(1+2)^4$  se cancela com  $3^4$ , assim sucessivamente até  $(1+n-1)^4$  se cancela com  $n^4$  (somadas telescópicas), tem-se:

$$1 + 4n + 6n^2 + 4n^3 + n^4 = n + 4 \cdot S_1 + 6 \cdot S_2 + 4 \cdot S_3 + 1^3$$

Sabendo que  $S_1 = \frac{n^2+n}{2}$  e  $S_2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$  temos:

$$\Rightarrow 1 + 4n + 6n^2 + 4n^3 + n^4 = n + 4 \cdot \left( \frac{n^2+n}{2} \right) + 6 \cdot \left( \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6} \right) + 4 \cdot S_3 + 1$$

$$\Rightarrow 4n + 6n^2 + 4n^3 + n^4 = n + 2n^2 + 2n + n + 3n^2 + 2n^3 + 4 \cdot S_3$$

$$\Rightarrow 4 \cdot S_3 = n^2 + 2n^3 + n^4$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{n^2 + 2n^3 + n^4}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = (S_1)^2$$

### Soma dos quartas potências dos $n$ primeiros naturais, $k = 4$

$$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$$

Mas uma vez, usaremos aquele aquele resultado usando o binômio, agora para  $k = 4$  e  $l = 1; 2; 3 \dots; n$ :

$$(1 + 1)^5 = 1 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^4 + 1^5$$

$$(1 + 2)^5 = 1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + 2^5$$

$$(1 + 3)^5 = 1 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 3^5$$

$$\vdots$$

$$(1 + n)^5 = 1 + 5 \cdot n + 10 \cdot n^2 + 10 \cdot n^3 + 5 \cdot n^4 + n^5$$

Fazendo o mesmo procedimento, observando ambos os membros das igualdades acima:  $(1 + 1)^5$  se cancela com  $2^5$ ;  $(1 + 2)^5$  se cancela com  $3^5$ , assim sucessivamente até  $(1 + n - 1)^5$  se cancela com  $n^5$ . Assim sendo, tem-se:

$$(1 + n)^5 = n + 5 \cdot S_1 + 10 \cdot S_2 + 10 \cdot S_3 + 5 \cdot S_4 + 1^5$$

Substituindo novamente,  $S_1 = \frac{n^2 + n}{2}$ ;  $S_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$  e  $S_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$  temos:

$$1 + 5n + 10n^2 + 10n^3 + 5n^4 + n^5 = n + 5 \cdot \frac{n^2 + n}{2} + 10 \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + 10 \cdot \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} + 5 \cdot S_4 + 1$$

Multiplicando toda a equação por 6 para cancelar todos os denominadores:

$$30n + 60n^2 + 60n^3 + 30n^4 + 6n^5 = 6n + 15n^2 + 15n + 20n^3 + 30n^2 + 10n + 15n^4 + 30n^3 + 15n^2 + 30 \cdot S_4$$

$$\Rightarrow 30 \cdot S_4 = -n + 10n^3 + 15n^4 + 6n^5$$

$$\Rightarrow S_4 = \frac{-n + 10n^3 + 15n^4 + 6n^5}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = S_2 \cdot \frac{3n^2+3n-1}{5}$$

### Caso geral

Percebe-se que a medida que valor de  $k$  (o expoente das somas) aumenta, para calcular uma nova soma precisamos dos resultados de todas as somas anteriores, ou seja, as

sequências das somas  $(S_1; S_2; S_3; S_4; \dots)$  obedecem uma relação de recorrência. Para generalizar, faremos o processo para um valor  $k$  natural qualquer:

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

Usando o resultado binomial mais uma vez e lembrando que  $\binom{x}{0} = \binom{x}{x} = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} (1+1)^{k+1} &= 1 + \binom{k+1}{1} \cdot 1 + \binom{k+1}{2} \cdot 1^2 + \dots + \binom{k+1}{k} \cdot 1^k + 1^{k+1} \\ (1+2)^{k+1} &= 1 + \binom{k+1}{1} \cdot 2 + \binom{k+1}{2} \cdot 2^2 + \dots + \binom{k+1}{k} \cdot 2^k + 2^{k+1} \\ (1+3)^{k+1} &= 1 + \binom{k+1}{1} \cdot 3 + \binom{k+1}{2} \cdot 3^2 + \dots + \binom{k+1}{k} \cdot 3^k + 3^{k+1} \\ &\vdots \\ (1+n)^{k+1} &= 1 + \binom{k+1}{1} \cdot n + \binom{k+1}{2} \cdot n^2 + \dots + \binom{k+1}{k} \cdot n^k + n^{k+1} \end{aligned}$$

Aplicando mais uma vez as somas telescópicas:  $(1+1)^{k+1}$  se cancela com  $2^{k+1}$ ;  $(1+2)^{k+1}$  se cancela com  $3^{k+1}$ , assim sucessivamente até  $(1+n-1)^{k+1}$  se cancela com  $n^{k+1}$ .

Assim sendo, tem-se:

$$(1+n)^{k+1} = n + \binom{k+1}{1} \cdot S_1 + \binom{k+1}{2} \cdot S_2 + \dots + \binom{k+1}{k} \cdot S_k + 1^{k+1}$$

Resumindo e lembrando que  $\binom{k+1}{k} = k+1$ .

$$(1+n)^{k+1} = n + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k+1}{i} \cdot S_i + (k+1)S_k + 1$$

Isolando o  $S_k$ :

$$S_k = \frac{1}{k+1} \left[ (1+n)^{k+1} - n - 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k+1}{i} \cdot S_i \right]$$

A fórmula geral para a soma das  $k$ -ésimas potências dos  $n$  primeiros números naturais não é simples, principalmente porque ela envolve uma relação de recorrência isso significa que, para calcular a soma dos  $n$  primeiros números elevados a uma potência  $k$ , precisamos, de certo modo, conhecer as somas das potências inferiores.

**APÊNDICE B – PRODUTO EDUCACIONAL**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**

**RAPHAEL GOMES VALE**

**PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA: DESVENDANDO  $\pi$  - UMA JORNADA**  
**INFINITA**

**FORTALEZA**

**2025**

RAPHAEL GOMES VALE

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA: DESVENDANDO  $\pi$  - UMA JORNADA INFINITA

Recurso Educacional decorrente da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

FORTALEZA

2025

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>120</b>
<b>2</b>	<b>APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA . . . . .</b>	<b>122</b>
<b>2.1</b>	<b>Aula 1: o mistério de pi - da roda à irracionalidade . . . . .</b>	<b>123</b>
<b>2.2</b>	<b>Aula 2: aproximando o inatingível - a área sob a curva . . . . .</b>	<b>126</b>
<b>2.3</b>	<b>Aula 3: somando o infinito? séries geométricas . . . . .</b>	<b>129</b>
<b>2.4</b>	<b>Aula 4: um caminho geométrico para pi (parte 1 - a construção) . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>2.5</b>	<b>Aula 5: um caminho geométrico para pi (parte 2 - a série de Leibniz) . . . . .</b>	<b>134</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>137</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história, diferentes civilizações e matemáticos dedicaram-se a desvendar os segredos de  $\pi$ . De aproximações rudimentares na antiguidade a cálculos com precisão astronômica nos tempos modernos, a evolução da compreensão sobre esse número é um testemunho da curiosidade e do engenho humano. A descoberta de métodos para calcular  $\pi$  não apenas proporcionou uma maior precisão em aplicações práticas, mas também revelou conexões profundas e inesperadas dentro da própria estrutura da matemática (Beckmann, 1993).

Nesse contexto, a Série de Leibniz para  $\pi$  emerge como um resultado particularmente intrigante e elegante (Stein, 2008). Desenvolvida pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII, essa série oferece uma maneira surpreendentemente simples de expressar  $\pi$  através da soma de uma sequência infinita de frações. A fórmula, que relaciona  $\pi/4$  à soma alternada dos inversos dos números ímpares:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

é um exemplo notável da beleza e da profundidade das séries infinitas.

Esta sequência didática propõe uma jornada investigativa de 5 aulas, destinada a alunos do Ensino Médio, que utiliza o número  $\pi$  como fio condutor para explorar conceitos matemáticos fundamentais de forma conectada e significativa. Partindo da definição elementar de  $\pi$  e de sua estimativa prática, avançamos por métodos de aproximação geométrica, introduzimos a poderosa ideia de séries infinitas através do exemplo acessível da série geométrica, e culminamos na apresentação da célebre e elegante Série de Leibniz.

Muitos conceitos importantes da matemática do Ensino Médio e que preparam para o Ensino Superior, como a noção de limite, processos infinitos e a conexão entre diferentes campos (geometria, álgebra, funções), podem parecer abstratos ou desconectados para os alunos. Abordar a Série de Leibniz para  $\pi$  através de uma perspectiva histórica e de construções geométricas e aproximações sucessivas oferece um contexto rico e motivador para tornar essas ideias mais concretas e acessíveis.

### *Objetivos da Sequência Didática*

- Compreender a definição de  $\pi$  e sua natureza como número irracional.
- Descrever métodos históricos e práticos de aproximação de  $\pi$ .
- Entender a estratégia de aproximação de áreas e comprimentos curvos por meio de subdivisões e somas de elementos mais simples (retângulos, segmentos).
- Reconhecer a ideia de limite como um processo de aproximação sucessiva.
- Identificar uma série geométrica e aplicar sua condição de convergência e fórmula da soma ( $|r| < 1$ ).
- Compreender (intuitivamente) como uma construção geométrica pode levar a uma soma infinita.
- Reconhecer a Série de Leibniz como uma representação de  $\pi/4$ .
- Calcular termos da Série de Leibniz e observar sua (lenta) convergência.
- Valorizar a conexão entre diferentes áreas da matemática e sua evolução histórica.

A metodologia adotada busca promover uma aprendizagem ativa e significativa, combinando diferentes abordagens: **Aprendizagem Baseada em Problemas/Investigação:** Partir de perguntas (Como medir  $\pi$ ? Como calcular a área curva? Como somar infinitos termos?) para guiar a exploração; **Contextualização Histórica:** Apresentar conceitos e resultados inseridos em seu contexto de desenvolvimento; **Atividades Práticas e Lúdicas:** Iniciar com a medição concreta de  $\pi$ ; **Visualização e Tecnologia Educacional:** Uso intensivo do software GeoGebra para construir figuras, visualizar aproximações e explorar o comportamento de funções e sequências; **Construção Progressiva:** Apresentar os conceitos de forma encadeada, onde cada aula se baseia nas anteriores, construindo gradualmente a compreensão até a Série de Leibniz; **Discussão e Colaboração:** Incentivar a troca de ideias entre os alunos e a discussão mediada pelo professor. A abordagem evita o formalismo excessivo do cálculo diferencial e integral, focando na intuição, na visualização e na conexão conceitual.

Esta sequência didática foi desenvolvida como um **recurso educacional** para uso em salas de aula do Ensino Médio, em consonância com os objetivos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Ela se baseia em fundamentos teóricos sólidos, mas é apresentada de forma autossuficiente e prática para o professor. Seu foco em tópicos relevantes do currículo da Educação Básica (números, funções, geometria, sequências) e sua metodologia voltada para a exploração e a visualização visam contribuir para a melhoria do ensino de Matemática.

## 2 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

**Público-Alvo:** Alunos do Ensino Médio (preferencialmente 2ª ou 3ª série com conhecimentos básicos de geometria plana, funções e introdução à sequências).

**Duração Total:** 5 aulas de aproximadamente 50 minutos cada.

**Objetivo Geral:** Explorar o número  $\pi$  através de métodos de aproximação histórica e geométrica, introduzir a noção de séries infinitas e limites de forma intuitiva, e apresentar a Série de Leibniz como uma forma de calcular  $\pi$ , conectando conceitos geométricos e algébricos.

**Recursos Gerais:** Lousa ou quadro branco, projetor multimídia, computadores com acesso à internet e software GeoGebra (Geogebra, 2023) (ou similar), objetos circulares variados, barbante, régua, calculadoras, folhas de atividades.

**Alinhamento com BNCC (BRASIL, 2018) (Algumas Habilidades).**

- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
- (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

## 2.1 Aula 1: o mistério de pi - da roda à irracionalidade

### *Objetivos Específicos:*

- Definir  $\pi$  como a razão constante entre a circunferência e o diâmetro de qualquer círculo.
- Justificar a importância histórica de encontrar valores aproximados para  $\pi$ .
- Estimar o valor de  $\pi$  através de medições práticas.
- Apresentar  $\pi$  como um número irracional. (infinitas casas decimais não periódicas).

### *Conteúdos:*

Círculo, circunferência, diâmetro, razão, constante matemática, número  $\pi$ , história da matemática (breve menção a Arquimedes), números irracionais (Beckmann, 1993).

### *Materiais:*

Objetos circulares (latas, tampas, etc.), barbante, réguas, calculadoras, projetor (Opcional).

### *Metodologia/Procedimentos:*

**(5 min) Introdução:** Iniciar com a pergunta: "Se tivermos círculos de tamanhos diferentes, existe algo em comum entre eles?". Guiar a discussão para a relação entre o contorno (circunferência) e a maior distância entre dois pontos do contorno passando pelo centro (diâmetro).

**(15 min) Atividade Prática - Medindo  $\pi$ :** Organizar a turma em grupos. Distribuir objetos circulares, barbante e régua. Em seguida, orientar os alunos a medir a circunferência (C) de cada objeto usando o barbante e a régua, e também o seu diâmetro (D) e pedir que calculem a razão  $\frac{C}{D}$  para cada objeto e anotem os resultados.

**(10 min) Discussão e Definição de  $\pi$ :** Reunir os resultados dos grupos na lousa. Discutir a variação (devido a erros de medição) mas notar a tendência de os valores se agruparem em torno de 3,1 ou 3,2. Em seguida, apresentar que, teoricamente, essa razão é *exatamente* a mesma para *todos* os círculos, e esse número constante é chamado de  $\pi$ .

$$\pi = \frac{C}{D}$$

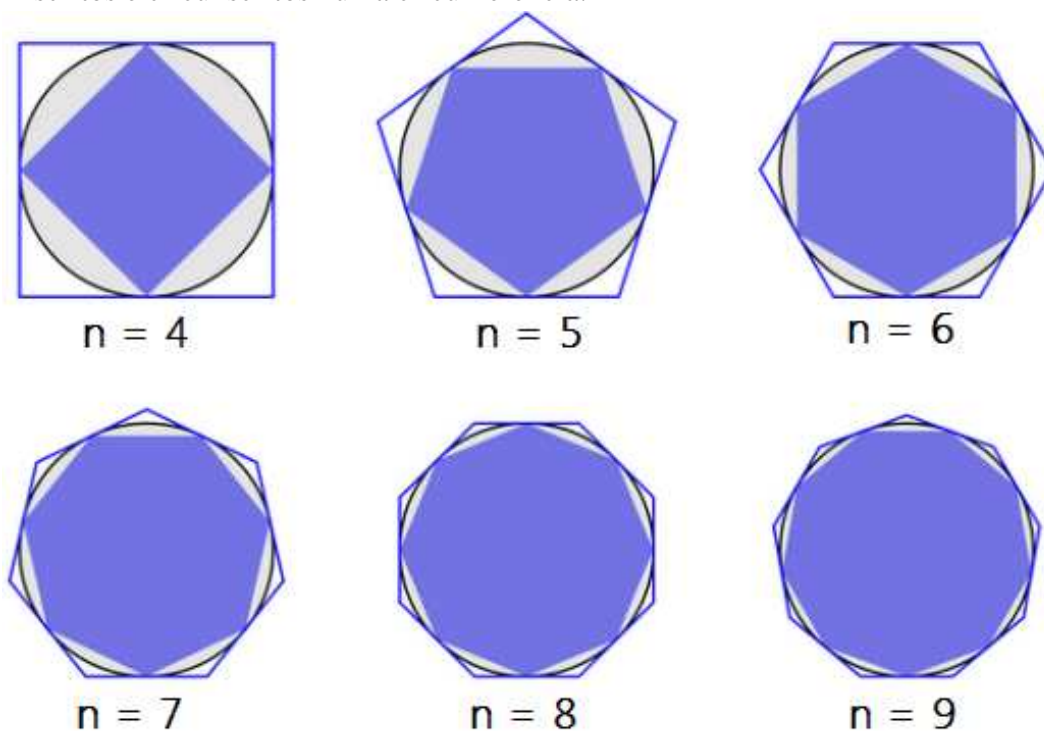
Figura 1 – Sugestão de atividades para medição de objetos e calcular  $\pi$

Preencha a tabela abaixo com nome do objeto, medindo seu diâmetro e comprimento, em seguida, calcular a razão entre as medidas.			
Objeto	Comprimento - C	Diâmetro - D	Razão C/D

Fonte: Elaborado pelo autor

**(15 min) História e Natureza de  $\pi$ :** Comentar que encontrar o valor exato de  $\pi$  foi um desafio por milênios. Mencionar Arquimedes como um dos primeiros a usar um método rigoroso (aproximando o círculo por polígonos com muitos lados – mostrar uma imagem ilustrativa simples, se possível) como essa do blog Baricentro da Mente (Almeida, 2008).

Figura 2 – Método de Arquimedes para estimar o valor de  $\pi$  por polígonos regulares inscritos e circunscritos numa circunferência.



Fonte: Almeida (2008).

Explicar que  $\pi$  é um *número irracional*: sua representação decimal é infinita e não periódica (não é dízima periódica, não pode ser escrito como fração de inteiros). Mostrar alguns dígitos: 3,14159265....

**(5 min) Fechamento:** Reforçar:  $\pi$  é a constante universal dos círculos, um número irracional fascinante. Nas próximas aulas, veremos como ideias de “somar muitas partes pequenas” podem nos levar a ele.

***Avaliação:***

Observar o engajamento na atividade e a compreensão demonstrada na discussão. Verificar as anotações e cálculos da atividade.

## 2.2 Aula 2: aproximando o inatingível - a área sob a curva

### *Objetivos Específicos:*

- Visualizar o problema de calcular a área de uma região com limite curvo.
- Aplicar a estratégia de aproximação da área usando retângulos. (intuição da Soma de Riemann).
- Utilizar o GeoGebra para visualizar como a aproximação melhora com mais retângulos.
- Construir a expressão algébrica que representa a soma das áreas dos retângulos.

### *Conteúdos:*

Área de retângulo, função quadrática ( $y = x^2$ ), plano cartesiano, aproximação, somatório (intuitivo), limite (intuitivo) (Dolce e Pompeo, 2005).

### *Materiais:*

Lousa, projetor, computadores com GeoGebra, folha de atividades.

### *Metodologia/Procedimentos:*

**(5 min) Revisão/Introdução:** Relembrar como calcular a área de retângulos. Apresentar o gráfico da função  $y = x^2$  no intervalo  $[0, 1]$ . Questionar: "Como poderíamos calcular a área exata da região entre essa curva, o eixo  $x$  e as retas  $x = 0$  e  $x = 1$ ?"

**(25 min) Exploração com GeoGebra:** Guiar os alunos no GeoGebra: Plotar  $f(x) = x^2$ . Definir um controle deslizante ' $n$ ' para o número de retângulos (inteiro, de 1 a 50, por exemplo). Usar o comando `SomaSuperior(f, 0, 1, n)` ou `SomaInferior(f, 0, 1, n)` e fazer a conferência.

Observação: Caso não tenha computadores na escola, construir manualmente os retângulos como sugeridos nas figuras 3 e 4 no quadro.

Observar visualmente os retângulos e como eles cobrem (ou ficam abaixo) da área desejada. Variar ' $n$ ' e observar como a *soma das áreas* dos retângulos (geralmente exibida pelo GeoGebra) muda. Perguntar: "O que acontece com a aproximação quando ' $n$ ' aumenta? O valor da soma parece se aproximar de algum número?". (Esperado: Sim, parece se aproximar de  $0,333\dots$  ou  $1/3$ ).

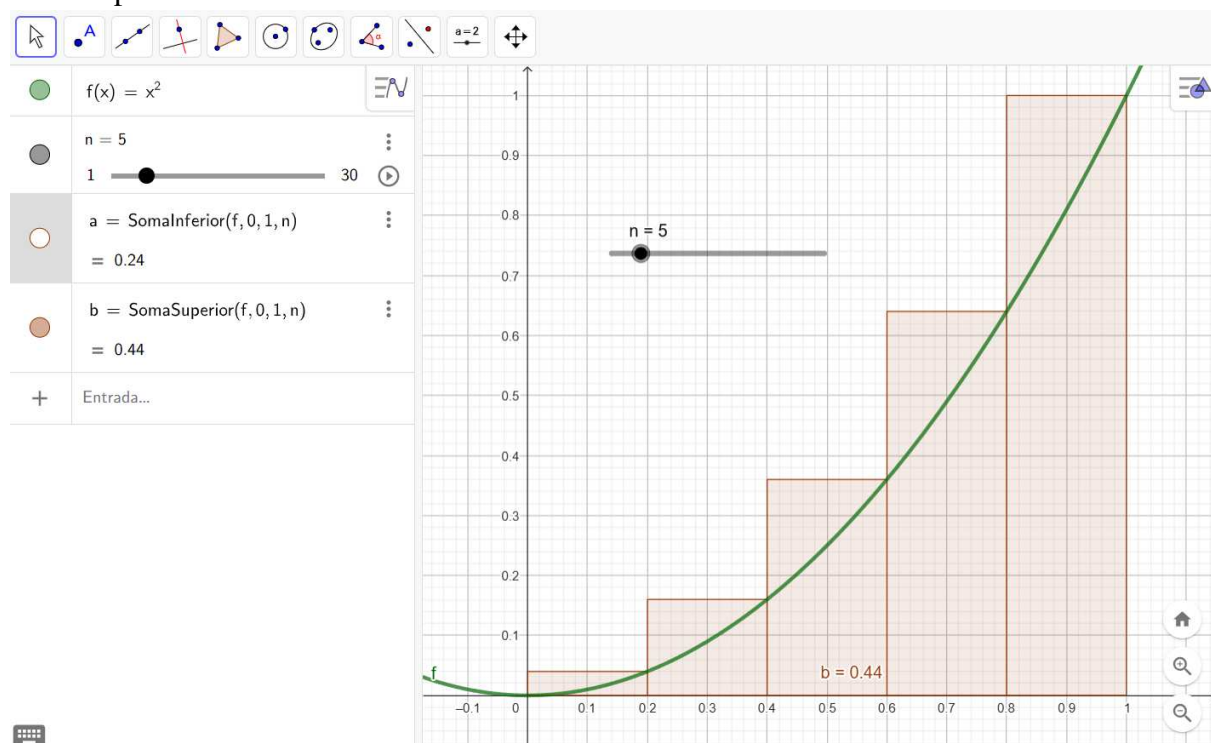
Figura 3 – Aproximação da área sob a curva  $y = x^2$  usando 5 retângulos, através do recurso de soma inferior.



Fonte: Elaborado pelo autor

ou

Figura 4 – Aproximação da área sob a curva  $y = x^2$  usando 5 retângulos, através do recurso de soma superior.



Fonte: Elaborado pelo autor

**(15 min) Da Visualização à Expressão:** Fixar um 'n' pequeno (ex:  $n = 5$ ). E pedir para o alunos calcular a área de cada retângulo: Base =  $1/n = 1/5$ . Alturas (pela direita) =  $(1/5)^2, (2/5)^2, (3/5)^2, (4/5)^2, (5/5)^2$ , conforme a figura 4.

$$\text{Área Total} \approx (\text{Base}) \times (\text{Soma das Alturas}) = \frac{1}{5} \left[ \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{5}\right)^2 \right]$$

. Generalizar para 'n':

$$\text{Área} \approx \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

. Escrever essa expressão na lousa.

**(5 min) Conclusão:** Vimos que podemos *aproximar* uma área curva somando áreas de retângulos. A precisão aumenta com o número de retângulos. A soma pode ser escrita como uma expressão matemática. O valor exato seria o *limite* dessa soma quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Avaliação:**

Participação na exploração do GeoGebra; capacidade de explicar o método de aproximação; preenchimento de um exercício simples na atividades (calcular a soma para  $n=5$ ).

## 2.3 Aula 3: somando o infinito? séries geométricas

### *Objetivos Específicos:*

- Apresentar a ideia de somar infinitos termos (séries infinitas).
- Diferenciar séries convergentes (soma finita) de divergentes (soma infinita).
- Definir e identificar uma série geométrica.
- Aplicar a condição de convergência ( $|r| < 1$ ) para séries geométricas.
- Utilizar a fórmula  $S = a_1/(1 - r)$  para calcular a soma de séries geométricas convergentes.

### *Conteúdos:*

Séries infinitas, convergência, divergência, Progressão Geométrica (PG), razão ( $r$ ), série geométrica, fórmula da soma da série geométrica convergente (Lima, 2008).

### *Materiais:*

Lousa, projetor, folha de atividades, calculadora.

### *Metodologia/Procedimentos:*

**(5 min) Introdução:** Perguntar novamente: "Podemos somar infinitos números e obter um resultado finito?". Relembrar a ideia da Aula 2: a área exata seria uma soma de infinitos retângulos infinitesimais. **(15 min) Visualizando a Convergência/Divergência:**

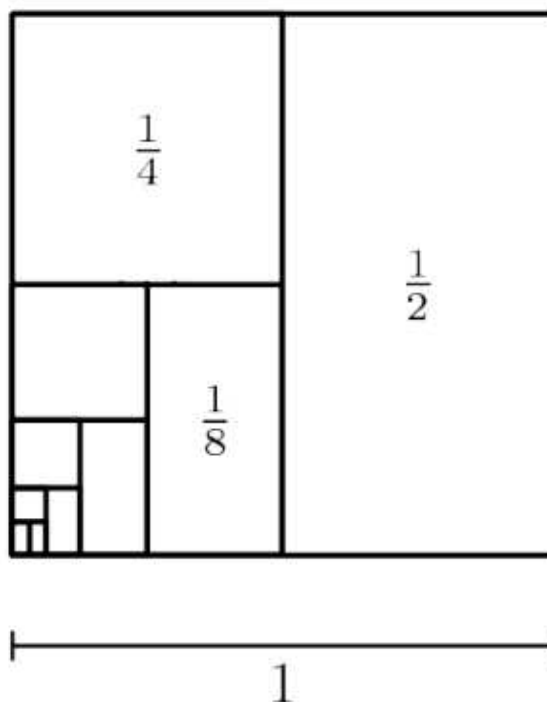
**Exemplo Convergente:** Apresentar a série  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ . Desenhar um quadrado unitário na lousa e mostrar como essas frações preenchem o quadrado sem ultrapassá-lo (soma = 1). Identificar como uma PG de razão  $r = 1/2$ . Conforme a figura 5

**Exemplo Divergente:** Apresentar a série  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ . Mostrar que a soma cresce indefinidamente. Identificar como uma PG de razão  $r = 2$ .

Concluir que algumas somas infinitas “se acomodam em um valor” (convergem) e outras “explodem” (divergem).

**(15 min) A Série Geométrica e sua Soma:** Definir formalmente a série geométrica:  $a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots$ . Enunciar a condição de convergência: A série geométrica converge se e somente se a razão  $r$  estiver entre -1 e 1 (ou seja,  $|r| < 1$ ). Apresentar a fórmula da soma para séries convergentes:  $S = \frac{a_1}{1 - r}$ .

Figura 5 – Visualização da série geométrica  $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$  através da divisão de uma unidade.



Fonte: Elaborado pelo autor

(Professor pode optar por fazer a dedução algébrica simples baseada na soma finita  $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)}$  e argumentar que  $r^n \rightarrow 0$  se  $|r| < 1$ , ou apresentar como um resultado estabelecido).

**(10 min) Praticando:** Atividade: Usando a fórmula  $S = \frac{a_1}{1-r}$  as seguintes somas:

- (a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
- (b)  $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$
- (c)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$
- (d)  $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$

**(5 min) Fechamento:** A série geométrica é uma ferramenta poderosa para entender somas infinitas. A condição  $|r| < 1$  é crucial. Essa ideia será útil para entender a fórmula de  $\pi$  na última aula.

**Avaliação:**

Resolução de exercícios (identificar séries geométricas, determinar convergência e calcular a soma).

## 2.4 Aula 4: um caminho geométrico para pi (parte 1 - a construção)

### *Objetivos Específicos:*

- Apresentar uma construção geométrica que visa aproximar um comprimento de arco relacionado a  $\pi$ .
- Compreender a estratégia de usar segmentos de reta para aproximar o comprimento de um arco.
- Identificar os elementos geométricos relevantes na construção proposta.
- Utilizar o GeoGebra para visualizar e explorar a construção.

### *Conteúdos:*

Geometria plana: arco de circunferência, aproximação de comprimentos (Stillwell, 1989).

### *Materiais:*

Lousa, projetor, computadores com GeoGebra.

### *Metodologia/Procedimentos:*

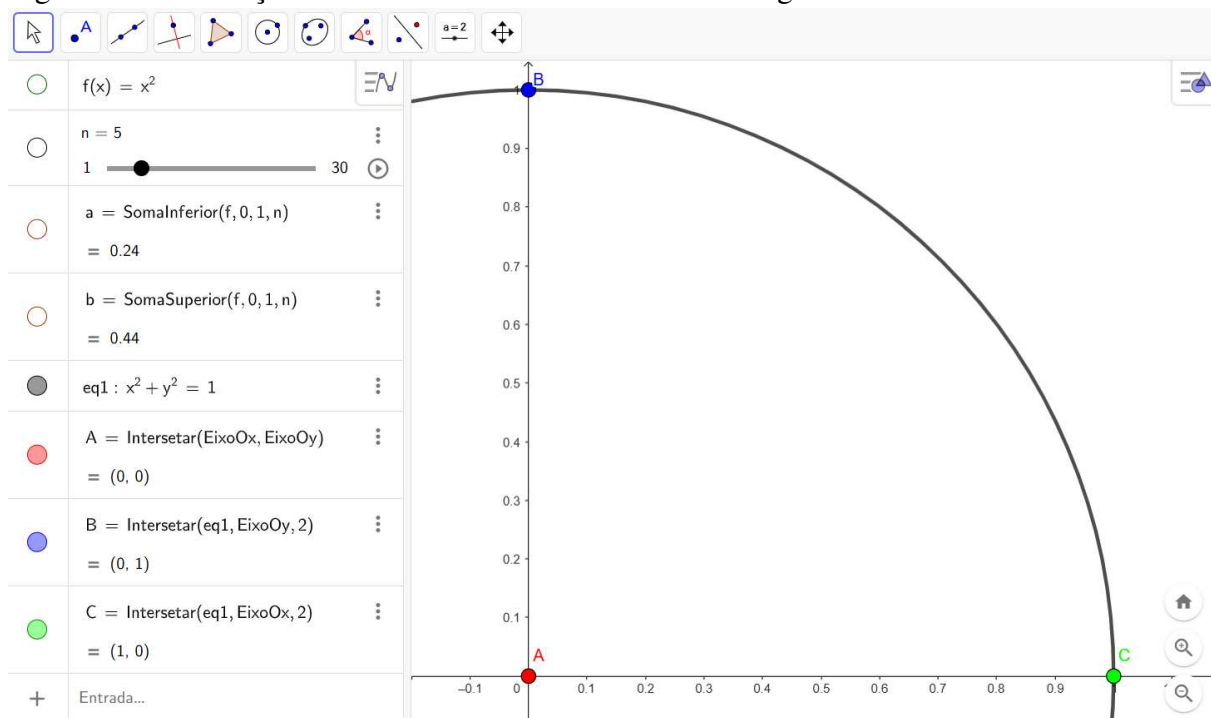
**(5 min) Introdução:** Relembrar o objetivo final: encontrar uma fórmula para  $\pi$  (ou  $\pi/4$ ) usando ideias de soma infinita. Introduzir que farão isso através de uma aproximação geométrica do comprimento de um arco.

#### **(30 min) Construção Geométrica Guiada (GeoGebra):**

Pedir para desenhar um sistema de eixos cartesianos. Marquem a origem  $A=(0,0)$ , o ponto  $C=(1,0)$  e o ponto  $B=(0,1)$ . Tracem o arco de círculo centrado na origem  $A$ , com raio 1, que liga  $C$  a  $B$ . Qual o comprimento deste arco?"(Guiar para a resposta:  $L = \frac{1}{4} \times 2\pi(1) = \pi/2$ ).

Focando na ideia principal: queremos aproximar o comprimento desse arco  $\pi/2$  usando pequenos segmentos de reta. Pedir para dividir o segmento  $AC$  (eixo  $x$  de 0 a 1) em ' $n$ ' partes iguais (exemplo  $n = 5$ ). De cada ponto de divisão, traçamos um segmento vertical até encontrar o arco. Vamos conectar os pontos consecutivos no arco por segmentos de reta. A soma dos comprimentos desses segmentos será uma aproximação do comprimento do arco. Veja o exemplo nas figuras 6 e 7.

Figura 6 – Construção de um círculo centrado na origem e raio unitário



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 7 – Aproximando o arco através de segmentos poligonais



Fonte: Elaborado pelo autor

**Exploração Visual:** Usar o GeoGebra para mostrar que ao aumentar 'n', a poligonal formada pelos segmentos se ajusta melhor ao arco. Perguntar: "A soma dos comprimentos desses segmentos parece se aproximar de  $\pi/2$  quando 'n' aumenta?".

**(10 min) Foco nos Segmentos:** Explicar que matemáticos conseguem encontrar uma fórmula para o comprimento de cada pequeno segmento usando geometria (semelhança de

triângulos, Pitágoras) e que a soma total desses comprimentos, para ‘ $n$ ’ subdivisões, pode ser escrita matematicamente.

**(5 min)** Próximo Passo: Na próxima aula, veremos qual a fórmula aproximada para a soma desses comprimentos e como, ao considerarmos infinitos segmentos ( $n \rightarrow \infty$ ), chegamos a uma série relacionada a  $\pi/4$ .

***Avaliação:***

Observar a compreensão da construção geométrica e do princípio de aproximação.  
Pedir aos alunos que expliquem o método com suas palavras.

## 2.5 Aula 5: um caminho geométrico para pi (parte 2 - a série de Leibniz)

### *Objetivos Específicos:*

- Apresentar a expressão resultante da soma dos comprimentos dos segmentos aproximados.
- Introduzir (conceitualmente) a conexão dessa soma com a expansão em série de  $1/(1+x^2)$ .
- Apresentar a Série de Leibniz como o resultado final dessa aproximação infinita.
- Calcular termos da série para observar a aproximação de  $\pi/4$ .
- Refletir sobre a convergência e a beleza da fórmula.

### *Conteúdos:*

Série de Leibniz, convergência(Stewart, 2010).

### *Materiais:*

Lousa, projetor, calculadora, folha de atividades.

### *Metodologia/Procedimentos:*

**(5 min)** Revisão: Relembrar a construção geométrica da Aula 4 e a soma dos segmentos que aproximam o arco.

**(20 min)** A Conexão e a Série de Leibniz:

Relembrem da série geométrica  $1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1-r}$  da Aula 3. Substituir usarmos  $r = -x^2$ , para obter uma expansão para a função da nossa soma:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

Relembrar também a seguinte relação:

$$\tan(45^\circ) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{logo} \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Apesar o publico alvo sendo alunos do ensino, por motivos de contextualização, por se tratar de um assunto limítrofe ao Ensino Médio, é interessante dizer (sem entrar em muitos detalhes) que existe uma relação matemática chamada de **Integral** e que, a seguinte afirmação é verdadeira:

$$\arctan(n) = \int_0^n \frac{1}{1+x^2} dx$$

Portanto, unindo todas as informações apresentadas temos:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \arctan(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 (1-x^2+x^4-x^6+\dots) dx \\ &= \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\end{aligned}$$

Assim chega-se a um resultado fantástico, conhecido como “Série de Leibniz:”

**Apresentar a Série de Leibniz:**

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

ou usando somatório:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Enfatizar:  $\pi$ , da geometria, conectado a uma soma alternada simples dos inversos dos ímpares!

**(20 min)** Explorando a Série: Pedir aos alunos para calcularem as primeiras somas parciais na calculadora e compararem com  $\pi/4 \approx 0,78539 \dots$

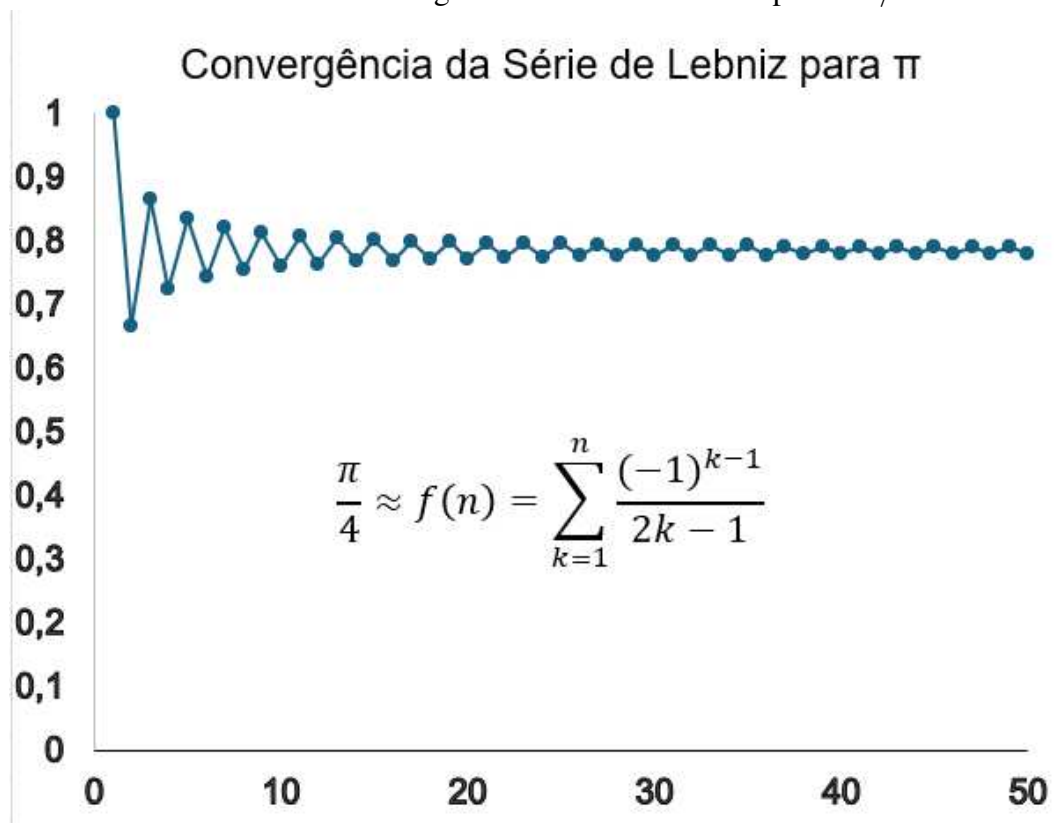
Figura 8 – Sugestão de atividade para calcular as somas parcial da série de Leibniz

Soma Parcial	Operação	Resultado
S(1) =	1	1
S(2) =	S(1) - 1/3 =	
S(3) =	S(2) + 1/5 =	
S(4) =	S(3) - 1/7 =	
S(5) =	S(4) + 1/9 =	
S(6) =	S(5) - 1/11 =	
S(7) =	S(6) + 1/13 =	
S(8) =	S(7) - 1/15 =	
S(9) =	S(8) + 1/17 =	
S(10) =	S(9) - 1/19 =	

Fonte: Elaborado pelo autor

Discutir: A soma "oscila", conforme mostrado na figura 9 em torno do valor real. Ela converge, mas muito lentamente. Mencionar que seriam necessários milhares de termos para obter apenas algumas casas decimais corretas.

Figura 9 – Gráfico mostrando a convergência da serie de Leibniz para o  $\pi/4 \approx 0.78539816339$



Fonte: Elaborado pelo autor

**(5 min)** Conclusão da Jornada: Revisitar os passos da sequência didática. Destacar a beleza das conexões matemáticas e como ideias aparentemente simples (como somar partes) podem levar a resultados profundos sobre números como  $\pi$ .

#### **Avaliação:**

Cálculo das somas parciais e análise da aproximação. Discussão sobre a convergência (lenta vs rápida). Possivelmente, pedir aos alunos que escrevam um pequeno texto refletindo sobre a conexão mais surpreendente que viram nestas aulas.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, K. K. de. **Uma breve cronologia de pi**. [S. l.], 2008. Imagem de domínio público. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2008/12/breve-cronologia-de-pi.html>. Acesso em: 06 de maio de 2025.
- BECKMANN, P. **A History of pi**. [S. l.]: Barnes & Noble, 1993.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC, 2018.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**. 8ª. ed. São Paulo: Editora Atual, 2005. v. 9.
- GEOGEBRA. **Geogebra**. [S. l.], 2023. Disponível em: <https://www.geogebra.org> Acesso em: 8 de ago. de 2025.
- LIMA, E. L. **Curso de análise**. 12ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. v. 1.
- STEIN, S. K. **Strength in numbers**: discovering the joy and power of mathematics in everyday life. [S. l.]: Turner Publishing, 2008.
- STEWART, J. **Cálculo**. [S. l.]: Cengage Learning, 2010. v. 2.
- STILLWELL, J. **Mathematics and its history**. [S. l.]: Springer, 1989. v. 3.

## APÊNDICE C – CÓDIGO PYTHON PARA APROXIMAÇÃO

Código em Python que implementa a aproximação de  $\frac{\pi}{4}$ . A fórmula é dada por:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

O código gera uma função que calcula o valor desta soma para um número finito  $n$  de subintervalos. O script a seguir define a função `aproximar_pi_div_4(n)` que realiza o cálculo e, em seguida, a utiliza para gerar aproximações para diferentes valores de  $n$ .

```

1 import math
2
3 def aproximar_pi_div_4(n):
4     """
5     Calcula uma aproximacao de pi/4 usando a soma de Riemann para a
6     integral de 1/(1+x^2) de 0 a 1.
7
8     A formula implementada e: (1/n) * Sum[i=1 a n] 1 / (1 + (i/n)^2)
9
10    Args:
11        n: 0 numero de iteracoes (subintervalos). Deve ser um inteiro
12           positivo.
13
14    Returns:
15        A aproximacao de pi/4 para o dado n.
16    """
17    if not isinstance(n, int) or n <= 0:
18        raise ValueError("0 valor de 'n' deve ser um inteiro positivo.")
19
20    soma = 0
21    for i in range(1, n + 1):
22        termo = 1.0 / (1.0 + (i / n)**2)
23        soma += termo
24
25    return (1/n) * soma
26
27 # --- Exemplo de Uso ---
28 if __name__ == "__main__":

```

```

28     valores_n = [10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000]
29
30     print("Calculo da aproximacao de pi/4 para diferentes valores de
n:\n")
31     for n_teste in valores_n:
32         aproximacao = aproximar_pi_div_4(n_teste)
33         # Para obter a aproximacao de Pi, multiplicamos o resultado
por 4
34         pi_aproximado = aproximacao * 4
35         print(f"Para n = {n_teste:<7} | Aproximacao de pi/4: {
aproximacao:<22} | Aproximacao de pi: {pi_aproximado}")
36
37     print("\n" + "-"*80)
38     valor_real_pi_div_4 = math.pi / 4
39     print(f"Valor de referencia (math.pi / 4): {valor_real_pi_div_4}"
)
40     print(f"Valor de referencia (math.pi):          {math.pi}")

```

Código-fonte 1 – Código Python para aproximação de  $\pi/4$ .

Ao executar o script acima, a saída gerada demonstra a convergência da aproximação para o valor real de  $\frac{\pi}{4}$  à medida que  $n$  aumenta.

Calculo da aproximacao de pi/4 para diferentes valores de n:

```

Para n = 10      | Aprox pi/4: 0.7599797534   | Aprox pi: 3.0399190137
Para n = 100    | Aprox pi/4: 0.7828962250   | Aprox pi: 3.1315849001
Para n = 1000   | Aprox pi/4: 0.7851481634   | Aprox pi: 3.1405926538
Para n = 10000  | Aprox pi/4: 0.7853731633   | Aprox pi: 3.1414926535
Para n = 100000 | Aprox pi/4: 0.7853956633   | Aprox pi: 3.1415826535
Para n = 1000000 | Aprox pi/4: 0.7853979133   | Aprox pi: 3.1415916535

```

```

-----
Valor de referencia (math.pi / 4): 0.7853981633
Valor de referencia (math.pi):      3.1415926535

```

O código implementa com sucesso o método da soma de Riemann para aproximar o valor de  $\frac{\pi}{4}$ . Os resultados confirmam que a precisão da aproximação aumenta com o número de subintervalos  $n$ , alinhando-se com a teoria matemática do cálculo integral.