UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA PROPOSTA DE PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA INTEGRANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

ÁLVARO RAONNY MENEZES DE SANTANA

Maceió, julho de 2025

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Álvaro Raonny Menezes de Santana

UMA PROPOSTA DE PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA INTEGRANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

MACEIÓ

2025

Álvaro Raonny Menezes de Santana

UMA PROPOSTA DE PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA INTEGRANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva.

MACEIÓ

2025

Catalogação na fonte Universidade
Federal de Alagoas Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

S232p Santana, Álvaro Raonny Menezes de.
Uma proposta de percurso de estudo e pesquisa integrando a modelagem matemática no ensino de matemática / Álvaro Raonny Menezes de Santana – 2025.
110 f. : il. color.

Orientador: Marcos Ranieri da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2025.

Bibliografia: f. 82-88.
Anexos: f. 89-110.

1. Proposta pedagógica. 2. Modelagem matemática. 3. Percurso de estudo e pesquisa. 4. Painéis fotovoltaicos – Análise custo-benefício. 5. Ensino de matemática. I. Título.

CDU: 51:37

Folha de aprovação

ÁLVARO RAONNY MENEZES DE SANTANA

Uma proposta de Percurso de Estudo e Pesquisa integrando a Modelagem Matemática no ensino de matemática

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas apresentada em 16 de julho de 2025.

Banca Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
MARCOS RANIERI DA SILVA
Data: 17/07/2025 11:39:09-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva

UFAL-AL

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE ANDERSON DE LIMA E SILVA
Data: 17/07/2025 17:08:09-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Examinador interno: Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva

UFAL-AL

gov.br Documento assinado digitalmente
JONATHAS DOUGLAS SANTOS DE OLIVEIRA
Data: 18/07/2025 09:27:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Examinador externo: Prof. Dr. Jônathas Douglas Santos de Oliveira

CEFET-MG

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma proposta pedagógica que integra a Modelagem Matemática e o Percurso de Estudo e Pesquisa, fundamentada no Paradigma de Questionamento do Mundo, como estratégia de ensino voltada à análise de um problema real: o custo-benefício da instalação de painéis solares fotovoltaicos para geração de energia elétrica em residências. A abordagem busca promover o protagonismo estudantil, a autonomia investigativa e o desenvolvimento de competências matemáticas a partir da contextualização do conteúdo em situações próximas da realidade dos alunos. As atividades foram planejadas para estimular a formulação de hipóteses, a interpretação de dados e a construção de soluções com base em conceitos geométricos, trigonométricos e financeiros, articulando aspectos sociais, ambientais, econômicos e científicos. O trabalho baseia-se em autores como D'Ambrosio, Chevallard e Bassanezi, que defendem uma educação matemática crítica, contextualizada e significativa. Embora a proposta não tenha sido aplicada integralmente devido às limitações impostas por um acidente, ela foi parcialmente explorada com apoio docente e está estruturada para futura implementação. Acredita-se que esta proposta possa contribuir para o avanço de práticas pedagógicas inovadoras, ampliando as possibilidades de ensino da Matemática de forma interdisciplinar, investigativa e socialmente comprometida.

Palavras-chave: proposta educativa, teoria antropológica do didático, painéis fotovoltaicos, modelagem matemática, percurso de estudo e pesquisa, ensino de matemática.

ABSTRACT

This dissertation presents a pedagogical proposal that integrates Mathematical Modeling and the Study and Research Pathway, based on the World Questioning Paradigm, as a teaching strategy aimed at analyzing a real problem: the cost-benefit of installing photovoltaic solar panels to generate electricity in homes. The approach seeks to promote student protagonism, investigative autonomy, and the development of mathematical skills by contextualizing the content in situations close to the students' reality. The activities were planned to stimulate the formulation of hypotheses, the interpretation of data, and the construction of solutions based on geometric, trigonometric, and financial concepts, articulating social, environmental, economic, and scientific aspects. The work is based on authors such as D'Ambrosio, Chevallard, and Bassanezi, who advocate a critical, contextualized, and meaningful mathematics education. Although the proposal was not fully implemented due to limitations imposed by an accident , it was partially explored with teacher support and is structured for future implementation. It is believed that this proposal can contribute to the advancement of innovative pedagogical practices, expanding the possibilities of teaching Mathematics in an interdisciplinary, investigative, and socially committed way.

Keywords: educational proposal, anthropological theory of didactics, photovoltaic panels, mathematical modeling, study and research pathway, mathematics teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A crescente demanda por soluções sustentáveis e a necessidade de repensar práticas pedagógicas no ensino de Matemática têm motivado o desenvolvimento de propostas que integrem conteúdos acadêmicos a problemas reais. Tal necessidade de mudança nas práticas é reforçada quando analisamos os dados presentes no Censo Escolar 2023, que indicam uma taxa de evasão escolar de 5,9% no ensino médio. Assim, uma tomada de ação é necessária. (Brasil, 2024).

A presente dissertação propõe uma abordagem pedagógica baseada na Modelagem Matemática e no Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), fundamentada no Paradigma de Questionamento do Mundo (PQM). A proposta visa promover o protagonismo discente, desenvolver competências investigativas e estimular a reflexão crítica a partir da seguinte questão geradora: **“Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?”** Com base na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e em contribuições de autores como D’Ambrosio, Chevallard e Bassanezi, a proposta articula conteúdos matemáticos a situações reais por meio de atividades de pesquisa, análise de dados e aplicação de conceitos geométricos e trigonométricos.

Segundo D’Ambrosio (2009),

> pesquisa é o elo entre teoria e prática. Claro, em situações extremas alguns se dedicam a um lado desse elo e fazem pesquisa chegando a teorias baseando-se na prática de outros. Outros estão do outro lado e exercem uma prática, que também é uma forma de pesquisa, baseando-se em teorias propostas por outros. Em geral fica-se numa situação intermediária entre esses extremos, praticando e refletindo sobre o que praticamos, e consequentemente melhorando nossa prática. (D’Ambrosio, 2009, p. 92).

Assim, o essencial para o ensino de Matemática está no equilíbrio entre a teoria e prática, pois com a prática o professor pode atrair a atenção dos alunos para o que é proposto, desse modo, busca-se estimular o interesse genuíno dos alunos por meio de situações que promovam a aprendizagem significativa.

Dessa forma, unir o Projeto de Estudo e Pesquisa, que faz uso do Paradigma de Questionamento de Mundo, com questões iniciais que direcionam tal projeto a uma possível rota que envolve a Modelagem Matemática, nos possibilita obter esse equilíbrio entre teoria, técnica e prática. Por meio dessa abordagem, busca-se contribuir para a formação de uma compreensão interdisciplinar, engajando estudantes e pesquisadores na análise de um tema de grande relevância social, ambiental e econômica. Ademais, a utilização da Modelagem Matemática visa fornecer uma compreensão aprofundada e aplicada do tema, promovendo uma aprendizagem concreta, contextualizada e voltada para a solução de problemas do mundo real, reforçando competências essenciais para o desenvolvimento de uma educação voltada para a sustentabilidade e a inovação.

Nesse sentido, pensando no princípio do professor como facilitador da Modelagem Matemática e no Percurso de Estudo e Pesquisa, ambos podem ser complementares, já que ambos envolvem o protagonismo do aluno em uma situação de investigação do mundo ao seu redor. Portanto, uma questão inicial e um grafo de questões bem articulado em conjunto com os alunos podem nos levar a visitar a Modelagem Matemática na busca da solução da questão inicial. Como consequência, o aluno obtém uma aprendizagem concreta e baseada na realidade.

Contudo, uma observação se faz necessária, durante o processo de elaboração desse trabalho o autor sofreu um acidente e ficou por múltiplos meses afastado da escola em que trabalha. Dessa forma, o que é elencado nesse trabalho deve ser visto apenas como uma proposta que ainda deve ser aplicada integralmente e avaliada, pois não foi possível ser testado em sala de aula dentro da realidade escolar por completo. Assim, a aplicação e a avaliação ficarão para um futuro trabalho.

Esta dissertação foi dividida em quatro capítulos. No capítulo 2, apresentamos a fundamentação teórica que tem foco na Teoria Antropológica do Didático e na Modelagem Matemática. No capítulo 3, temos a presença das análises feitas para a criação e execução da proposta, como também as atividades e os conteúdos que são utilizadas pela mesma. Por fim, no capítulo 4, temos as considerações finais.

1.1 Objetivos gerais e específicos

O objetivo geral desta dissertação é elaborar e submeter à análise uma proposta pedagógica que integre Modelagem Matemática e PEP, a fim de oferecer uma abordagem contextualizada no ensino de Geometria, Trigonometria e Finanças, com foco na análise de viabilidade de placas fotovoltaicas em residências. Como objetivos específicos temos:

- Elaborar uma sequência didática interdisciplinar que integre Modelagem Matemática e PEP, baseada em uma questão geradora real e socialmente relevante;
- Propor atividades investigativas que estimulem o protagonismo estudantil, a interpretação de dados e a resolução de problemas reais por meio da Matemática;
- Avaliar a coerência teórico-metodológica da proposta elaborada, considerando as possibilidades de aplicação em contextos escolares e suas contribuições para o desenvolvimento de competências matemáticas críticas e sustentáveis;
- Facilitar que outros professores possam futuramente aplicar a sequência, mesmo que não possuam tanta prática com metodologias diferentes da tradicional, por meio da criação de uma sequência detalhada, com cronogramas e instrumentos avaliativos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O ensino no Brasil apresenta diversos desafios. Entre os principais fatores que dificultam essa atividade, um deles é o baixo envolvimento dos responsáveis com a escola. Nesse viés, Duch (2005) realizou diversas análises sobre programas cujo objetivo era aumentar o envolvimento dos responsáveis e, de modo geral, os programas acarretaram: uma diminuição no estresse parental, melhora no bem-estar emocional da criança e de sua família, aprimoramento das atitudes parentais e aumento da conscientização dos responsáveis quanto a seus direitos.

Nesse contexto, quando tratamos do ensino da Matemática, essa situação se agrava, pois ainda persiste a crença de que aprender essa disciplina requer um dom ou uma aptidão excepcional. Dessa forma, os alunos não se empenham acreditando que não têm essa habilidade e, por consequência, o professor também não se empenha com tais alunos. Isto é, a falta de motivação para se empenhar por parte dos alunos tem como uma das consequências a falta de empenho do professor, estes não são os únicos fatores, mas apresentam importante relevância. Se opondo a tais ideias relacionadas a dons e aptidões, Lima (1995) fala que:

> Ao contrário das demais matérias que se estudam na escola, que se referem a objetos e situações concretas, a Matemática trata de noções e verdades de natureza abstrata. Aliás, essa é uma das razões da sua força e sua importância. A afirmação 2 x 5 = 10 tanto se aplica aos dedos de duas mãos quanto aos jogadores que disputam um jogo de basquete. A generalidade com que valem as proposições matemáticas exige precisão, proíbe ambiguidades e por isso requer mais concentração e cuidado por parte do estudante. Por outro lado, o exercício dessas virtudes durante os anos de escola ajuda a formar hábitos que serão úteis no futuro. A perseverança, a dedicação e a ordem no trabalho são qualidades indispensáveis para o estudo da Matemática. Note-se que não se trata de talentos e que não se nasce dotado delas (Lima, 1995, RPM 28).

Com isso, é possível aprender Matemática; contudo, é imprescindível existir dedicação em ambas as partes, isto é, professor e aluno precisam se empenhar para alcançarem o aprendizado. Além disso, apenas professor e aluno não são suficientes, também é necessário que a escola se adapte e inclua a heterogeneidade das famílias responsáveis pelos alunos e das diversas culturas, o que, segundo Szymanski (2004), tem sido uma prática falha. Ademais, a visão acerca do erro também gera muitos impactos. Luckesi (1999) afirma que o erro, tradicionalmente, aparece na escola como fonte de condenação/castigo para o aluno.

Outro desafio contemporâneo é o desenvolvimento de habilidades e competências, o que torna necessário, da parte do professor, que este busque formas de motivar e estimular para o aluno atingir tal desenvolvimento. Assim, se faz necessário uma mudança na forma de ensino, isto pode se dar através da ampliação das metodologias conhecidas pelos professores, para que estes possam lidar melhor com as necessidades das turmas e os objetivos educacionais, como afirma Moran (2015):

> As metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa. (Moran, 2015, p. 17).

Portanto, é necessário mudar como o ensino ocorre, isto é, sair do ensino puramente tradicional: professor ativo em frente ao quadro e alunos passivos ouvindo. Com isso em mente, ao buscar novas formas, podemos nos deparar com o Projeto de Estudo e Pesquisa (PEP) da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e a Modelagem Matemática, ambas as teorias repensam a forma de ensino e mudam o foco para o aluno.

A Teoria Antropológica do Didático proposta por Yves Chevallard se trata da análise de um dos problemas que o professor enfrenta em sala de aula: preparar o curso através de aulas e colocá-las em prática, isto é, como organizar um objeto de estudo matemático de forma que este funcione em sala de aula para os alunos alcancem o aprendizado. A partir da releitura feita por Santos e Menezes (2015), a teoria trata de vários elementos presentes no ecossistema didático: a gestão do tempo, o contrato didático, a transposição didática. Para tal, o autor trata de três conceitos primitivos, são eles os objetos, as instituições e as pessoas.

Nessa perspectiva, também temos a presença do paradigma de questionamento de mundo, no qual, segundo Chevallard (2009), uma questão "Q" convoca uma investigação feita a partir de um Percurso de Estudo e de Pesquisa. Ademais, uma mesma questão Q pode conduzir a diversos percursos de estudo e pesquisa e, dessa forma, a complexos de *obras* (conteúdos, assuntos, objetos de estudo) distintos.

Em geral, os trabalhos acadêmicos que fazem uso dessa teoria giram em torno de aplicações de PEPs no ensino básico, PEPs para a formação de professores no ensino superior e análises de livros didáticos e organizações matemáticas e didáticas sob a luz da TAD. Como alguns exemplos, temos os trabalhos de Freitas e Bittar (2016), Santo (2023), Henrique (2021), Maduro (2015) e Ponte (2013).

Já a Modelagem Matemática é uma estratégia de ensino que busca quebrar o tradicionalismo conteudista mediante um processo dinâmico de aprendizagem por meio da resolução de situações reais que envolvem conteúdo da matemática. Segundo Burak (1992), a Modelagem Matemática é constituída por um conjunto de objetivos que visam construir uma explicação matemática de fenômenos presentes na vida do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões acerca do fenômeno estudado.

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orienta e dita o currículo nacional, dentre as competências específicas da área da Matemática e suas Tecnologias, existem pontos que são possíveis de serem interpretados a partir da perspectiva da Modelagem e da TAD, como na terceira competência que trata de:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p. 531).

Dessa forma, é possível observar que alguns fatores que estão presentes no documento orientador envolvem a investigação, o interesse dos alunos, a capacidade de desenvolver problemas, compreender situações presentes no mundo. Todos esses aspectos que marcam presença nas concepções de Modelagem Matemática. De modo semelhante, tais fatores presentes no documento também se alinham com o que ocorre na TAD através do uso do Percurso de Estudo e Pesquisa.

D'Ambrosio (1986) afirma que, através da Modelagem Matemática, o aluno se torna mais consciente da utilidade da matemática para solucionar problemas do dia a dia. Assim, o uso da Modelagem pode proporcionar uma melhora da qualidade do ensino, já que aquele que aprende terá uma aprendizagem rica em significado prático e teórico. Dessa forma, ao relacionar trechos do documento curricular com a Modelagem Matemática e a TAD, o professor que apresenta consciência dessas metodologias, segundo Pacheco (2020), e em sintonia com D'Ambrosio (1986), pode desenvolver a contextualização, a resolução de problemas e a interdisciplinaridade em sala de aula.

2.1 A Teoria Antropológica do Didático

Inicialmente, para se estudar a teoria proposta por Yves Chevallard é necessário compreender os conceitos primitivos de objeto “O”, pessoa “X” e instituições “I”. Chevallard (1998) detalha bem o conceito de objeto ao dizer que ele pode ser qualquer coisa, mas apenas existe quando for reconhecido pela pessoa X ou instituição I em:

> Do ponto de vista da «semântica» da teoria, qualquer coisa pode ser um objeto. Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (respectivamente, para I) se existir um objeto, que denotarei por R (X, O) (resp. R_1 (O)), a que chamarei de relação pessoal de X com O (resp. relação institucional de I com O). (Chevallard, 1998, p. 93)

Conforme Santos e Freitas (2017), a definição de instituição é dada como sendo um dispositivo social que impõe às pessoas formas de fazer, pensar que são da própria instituição. Além disso, o indivíduo da sociedade passa a ser sujeito quando se sujeitam a instituições e aceitam as demandas da instituição I. E, através das múltiplas relações que o indivíduo possui com diferentes instituições forma-se a pessoa X, isto é, o conjunto de sujeitos do indivíduo formam a pessoa X.

Dessa forma, uma pessoa X ao entrar em uma instituição I, na qual existe a presença de um objeto O, começa a ter uma relação institucional com o objeto que se amplia ou se limita com base no contrato da instituição. Para fins de exemplificação: um funcionário ao iniciar suas atividades em uma empresa passa a se adequar às regras da empresa (instituição), isto é, seguir os critérios de vestimenta, cumprir os horários, cumprir suas atividades no cargo que ocupa, dentre outras obrigações. Ao cumprir tais regras, ele passa a se tornar um sujeito dessa instituição e, assim, passa a apresentar relações com ela.

Migrando para o contexto educacional, as relações entre os objetos (conteúdo/obras/assuntos), sujeitos (alunos) e instituição (escola) são moldadas por diversas intencionalidades e relações, principalmente, diante das relações entre alunos e professores diante do saber a ser ensinado. Ainda dentro desse contexto, se faz necessário entender como o professor prepara as aulas e coloca as mesmas em prática, para tal temos o conceito de praxeologia.

A Teoria Antropológica do Didático, segundo Chevallard (1999), expõe que tanto o conhecimento quanto as atividades humanas e sua produção podem ser descritos em termos de praxeologias. Portanto, uma praxeologia é uma teoria que tenta explicar a estrutura lógica da ação humana, baseada na noção de que os humanos se envolvem no comportamento proposital, que se opõe ao comportamento reflexivo.

Além disso, a partir da origem da palavra praxeologia, *práxis* e *logos,* podemos entender melhor que ela é o estudo da prática, isto é, no contexto da Matemática, o estudo das práticas docentes, quais práticas são valorizadas e quais estão presentes nos livros didáticos. Segundo Santos e Freitas (2017), a praxeologia é composta por uma quadra de elementos, logo, a praxeologia (T, τ, θ, ϕ) é o conjunto de atividades humanas objetivando realizar uma tarefa de um tipo T, por meio de uma técnica τ, amparada por alguma tecnologia θ e justificada através da teoria ϕ.

Dessa forma, a TAD busca investigar as práticas docentes em sala de aula por meio da praxeologia, identificando quais conteúdos são valorizados e mais utilizados pelos professores em sala de aula e o decompondo nos quatro componentes que formam a quadra da praxeologia. Santos e Menezes (2015) exemplificam muito bem uma praxeologia. Considere a tarefa de resolução de uma equação a seguir:

"Determine o valor de x na equação $x^2 + 6x + 9 = 0$"

Assim, para executar essa tarefa, necessitamos da utilização da técnica da oposição de termos, que contém como tecnologia as propriedades das operações inversas nos números reais e é sustentada pela teoria da Álgebra.

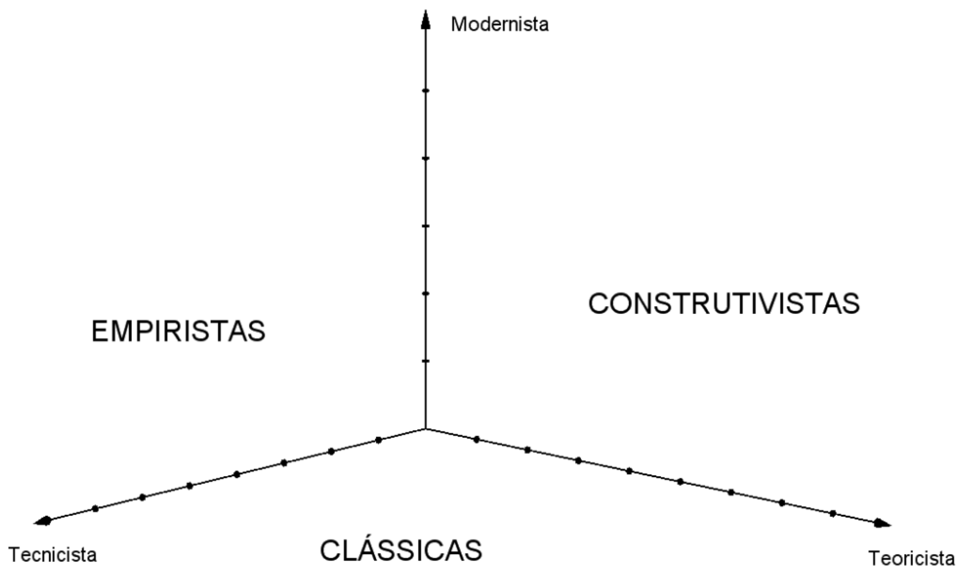
No contexto da Matemática, temos a praxeologia matemática ou organização matemática. A qual é originada, segundo Santos e Menezes (2015), na análise dos documentos oficiais, dos quais saem a escolha de conteúdos a serem ensinados. Em virtude disso, o professor inicia a determinação dos tipos de tarefa para a aquisição dos saberes determinados, e, assim, surgem os demais componentes da praxeologia: técnica, tecnologia e teoria.

Ainda falando sobre a praxeologia, temos praxeologia didática ou organização didática, que surge quando tentamos responder perguntas do tipo: "como ensinar o conteúdo 'X'?". Chevallard (1999) afirma que não se deve esperar que essas formas de tarefas que podem ocorrer na construção de uma organização didática sejam feitas de maneira única, contudo, independentemente do caminho de estudo, certas situações (momentos) estão presentes. Tais momentos, segundo Chevallard (1998), proporcionam ao professor uma análise de seus processos didáticos, ele elenca os momentos da seguinte forma:

- O *primeiro momento* de estudo será aquele em que acontecerá o primeiro encontro com a organização matemática que será colocada no cenário didático.
- O *segundo momento* é o da exploração dos tipos de tarefas e da elaboração de técnicas relativas a esse tipo de tarefa.
- O *terceiro momento* é o estudo do que compõe o entorno tecnológico-teórico relativo à técnica e o tipo de tarefa sugerido pela organização matemática.
- O *quarto momento* é o trabalho da técnica, isto é, pôr em prática a técnica visando torná-la eficaz e confortável para o uso nas tarefas adequadas.
- O *quinto momento* é a oficialização dos elementos da organização matemática, ou seja, a institucionalização.
- O *sexto momento* é o da avaliação, ou seja, verificar o que de fato foi aprendido com a organização matemática que estava sendo utilizada.

Gascón (2003), reúne e resume tais organizações em um espaço a partir dos eixos: teoricista, tecnicista e modernista (Figura 1).

Figura 1 - organização dos eixos teoricista, tecnicista e modernista.



Fonte: adaptado de Gascón (2003).

Os eixos possuem as seguintes características: teoricista, compreende que a Matemática se aprende através teorias, ou seja, deduções, postulados, demonstrações e outras provas; tecnicista, diz que aprender matemática resulta do trabalho de executar tarefas e técnicas com repetição e memorização; modernista, valoriza a experimentação, o aprender matemática é explorar técnicas diversas, aplicar resultados conhecidos, buscar problemas, formular conjecturas, buscar contraexemplos, dentre outros meios de exploração.

A TAD, constata que o paradigma atual da educação em geral visa ensinar obras (praxeologias/conteúdos/assuntos/temas), que já estão prontas, totalmente bem definidas e confinadas em pacotes, ou seja, as escolas se preocupam em ensinar conteúdos, como funções, matrizes, logaritmo, etc., consolidados no âmbito educacional. Contudo, há pouco questionamento sobre o porquê desses conteúdos estarem no currículo e por qual motivo eles devem ser ensinados, algo também constatado por outras metodologias como a Modelagem Matemática, o conjunto instituição de ensino e professor somente se restringe a passar o que se está nos livros e o aluno apenas responde questões artificiais com pouca, ou nenhuma, motivação para isso. (Benito *et al.*, 2022).

Entre as características que compõem um paradigma denominado por Chevallard (2013) como paradigma de visita às obras (PVO). Seguindo tal ideia, os professores assumem um papel de guia turístico, que apresenta uma obra já feita e acabada e os alunos (turistas), estão lá apenas apreciando o que veem, sem entender sobre a importância daquilo, ou a necessidade da presença daquela obra ali. Assim, Benito *et al*. (2022) colocam que, de certa forma, é como se a obra visitada fosse uma postagem recomendada pelo algoritmo de uma rede social, podemos até apreciar a postagem por um momento, mas sem a motivação real para chegar até a ela, pouco será acrescentado à vida.

Sob esse ponto de vista, Chevallard (2013) afirma que o Paradigma de Visita às Obras é ultrapassado, apenas prezamos por obras/conteúdos presos aos grandes nomes da Matemática de forma que não existe um sentido fora de si mesma. Dessa forma, é necessário a criação de um novo paradigma de ensino.

Então, em vista desses problemas, se faz necessária uma mudança. Chevallard (2013) propõe que as obras continuem sendo visitadas, mas que elas não sejam o foco principal do sistema didático. Essa mudança se dá através do estudo para a resolução de uma questão, um problema, indo na direção contrária da organização atual que divide o estudo em temas. Essa é uma das características do Paradigma de Questionamento do Mundo (PQM) que atende a dois princípios básicos, o primeiro é que não há idade para aprender, todo mundo possui a capacidade para tal e os estudos devem ser úteis até a velhice. O segundo, para aprender determinado conteúdo, o conhecimento precisa ser perseguido com o auxílio de um mediador/professor ou não, em um material de estudo e pesquisa confiável, partindo de uma pergunta que necessite de uma pesquisa (questão geradora ou pergunta inicial).

Sob essa perspectiva, para conseguir executar uma mudança e superar o paradigma vigente (PVO), dentro da TAD, Chevallard (2009) propõe o Percurso de Estudo e Pesquisa, tal metodologia é uma estratégia de estudo baseada no processo de investigação. Os estudantes assumem o papel de investigar o necessário para responder à questão inicial, compartilhada com eles pelo professor, que também é um investigador como os alunos, assim o conteúdo e a motivação são determinados pelo processo que se dá ao tentar solucionar essa questão. Ademais, durante essa investigação, é importante frisar que os caminhos que os alunos podem seguir são muitos e nem sempre podem ser caminhos previstos pelo professor, cabendo a ele não os restringir, mas apontar que o intuito é responder à pergunta inicial.

Em detalhes, por meio dos estudos de Almouloud *et al.* (2021), o PEP pode ser visto a partir do sistema herbatiano, indicado por: $S(X; Y; Q) \rightarrow R$, o esquema indica que os estudantes X investigam sobre uma pergunta Q sob a direção de Y, no intuito de dar uma resposta R a Q. Para a elaboração dessa resposta, existe a criação de um *milieu* didático, isto é, um meio de exploração para a construção da resposta Q, isto fica denotado como: $[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \rightarrow R$. Além disso, o milieu M é o conjunto de todos os recursos úteis para a construção da resposta R, unindo outros questionamentos e suas repostas dentro dele, podendo ser representado como: $M = \{R_1; R_2; \dots; R_n; Q_n; Q_{n+1}; \dots; Q_s\}$.

Nesse sentido, Chevallard (2009) propõe que os PEP partam de uma pergunta geratriz Q que gere outras perguntas derivadas de Q em função das necessidades de conhecimentos gerados no estudo de Q. Tais outras questões podem ser organizadas de acordo com sua dependência de outras, isto é, uma questão Q_2 é crucial para Q_1 quando o fato de saber responder à Q_2 permite avançar na busca pela resposta à Q_1. Ademais, para uma mesma questão, podem existir várias questões derivadas geradas a partir dela.

A partir da pergunta geratriz, Chevallard (2017) afirma que os PEP podem ser abertos, semiabertos e fechados. Além disso, o autor também coloca que:

> De maneira sub-reptícia, o professor pode impor um certo percurso que leva a classe a conhecer (e confrontar) as noções matemáticas escolhidas previamente pelo mesmo professor. Mais sutilmente, o professor pode ter escolhido a pergunta para investigar de tal maneira que, sob as restrições vigentes, o percurso passe quase necessariamente

> por esta ou aquela obra matemática. No primeiro caso, falo de um percurso fechado; no segundo, de um percurso semiaberto. Chamarei aberto um percurso em que o papel desempenhado pelo professor é puramente negativo, no sentido de que o professor, como "chefe de investigação", conforma-se com impor de vez em quando a decisão de não ir encontrar tal ou qual obra, que lhe parece estar ainda fora do alcance do grupo de estudantes. Só neste caso falarei de percurso aberto. (Chevallard, 2017, p. 168-169).

Assim, é possível observar que o PEP pode ser adaptado para lidar com obrigações relacionadas ao currículo escolar, isto é, caso o professor necessite trabalhar única e exclusivamente com determinado conteúdo, ele pode optar por um PEP fechado. Caso seja necessário ensinar um conteúdo específico, mas a situação não restrinja o surgimento de outros no processo de ensino, é possível utilizar um PEP semiaberto. Caso não exista nenhum tipo de restrição, com exceção de conteúdo fora do alcance dos alunos, um PEP aberto é a escolha ideal.

A partir do trabalho de Almouloud *et al.* (2021), temos que o PEP apresenta 3 princípios estruturantes:

- Organizar o PEP em torno de uma questão geradora;
- Organizar o PEP em torno de cinco gestos básicos: observar, analisar, avaliar as respostas, desenvolver e, por fim, divulgar e defender a resposta R;
- Durante a aplicação do PEP é necessário ter as dez dialéticas fundamentais em mente que afinam seu prosseguimento.

Os autores elencam e caracterizam as dez dialéticas da seguinte forma:

- Primeira dialética: um PEP envolve a investigação do conhecimento disponível na cultura, cujos trabalhos podem ser ou não adequados para responder à pergunta. Dessa forma, a pesquisa é ampla em contexto e o estudo é mais específico. Podem ocorrer pesquisas em múltiplas mídias, como internet, livros, consulta com professores, estudo de trabalhos etc. Isto é, quando estivermos em sala de aula e surgir a pergunta: “Professor(a) onde procurar sobre isso?” Devemos incentivar a utilização do maior número de meios proveitosos;
- Segunda dialética: deve haver a formulação de perguntas e respostas, quanto essas últimas, podemos ter a redação por completo delas, a menção ou alusão na forma oral. Assim, quando estivermos em sala de aula, devemos incentivar os alunos a fazerem registros de todas as dúvidas, perguntas e respostas produzidas;

- Terceira dialética: os alunos estudam em coletivo, isto é, cada indivíduo segue livremente o seu estudo e através da colaboração em grupo eles foram a tomada de decisões sobre como e quais perguntas serão respondidas. Em sala de aula, devemos incentivar as discussões em grupo e entre grupos, para tal, podemos fazer o uso de debates e de apresentações de resultados;
- Quarta dialética: deve haver uma análise praxeologia e didática a *priori*. Portanto, antes de o professor levar uma questão geradora para a aula, ele deve realizar toda a análise de contexto, de organização didática e matemática, além de elaborar o mapa dos questionamentos a priori e os caminhos de resolução;
- Quinta dialética: por vezes será necessário sair do tema ou disciplina para procurar as respostas e, em seguida, retornar ao tema. Essas entradas e saídas em outras disciplinas precisam ser consideradas relevantes para construir uma resposta. Ou seja, é necessário que o professor analise as imersões em outros temas, caso elas não sejam proveitosas, ele deve interferir e redirecionar os alunos;
- Sexta dialética: é necessário explorar grandes áreas do conhecimento para encontrar o conhecimento que é útil e pertinente para responder a um problema. Assim, em sala de aula, analisamos o geral e, na medida em que aprendemos mais, partimos em direção aos conhecimentos específicos úteis;
- Sétima dialética: alguns saberes são mais relevantes que outros para a resolução da questão geratriz, ou seja, é necessário encontrar um nível adequado sobre o que e quanto estudar sobre uma obra. Por consequência, alguns saberes ficaram esclarecidos, já outros não. Cabe ao professor auxiliar os alunos em sala de aula para que eles atinjam o nível de profundidade adequado para a sala de aula, isto é, não devemos realizar uma imersão em integrais quando desejamos calcular uma área que ajude a solucionar uma questão;
- Oitava dialética: deve-se evitar simplesmente transcrever, é necessário interpretar a parte útil das respostas, analisá-las, avaliá-las e reescrevê-las na forma de resumos, conclusões finais, glossários, etc. Assim, quando estivermos em sala de aula, devemos incentivar a elaboração original por parte dos alunos, para tal, a discussão em grupo pode ajudar os alunos a adquirirem tal experiencia;
- Nona dialética: os alunos acessam algumas repostas conhecidas nas mídias e, utilizando o milieu, as transformam e incorporam a ele, no processo de preparar as possíveis respostas para as perguntas. Essa situação pode ser mais bem compreendida a partir de um

exemplo: os alunos, em sua busca por respostas, se deparam com uma informação que altera a solução de uma questão considerada já respondida, dessa forma, eles alteram a resposta e, algumas vezes, novas questões podem ser criadas a partir disso;

- Décima dialética: é necessário disseminar e defender a resposta obtida pela comunidade de estudo. Dessa forma, a apresentação de respostas e os debates são fundamentais para a aplicação, logo, sempre que for possível o professor deve colocar o aluno em situações do tipo.

Dessa forma, o ensino através do uso do PEP pode ser descrito e resumido da seguinte forma: dada a questão inicial, os estudantes em conjunto do professor elaboram outras questões derivadas, tais questões possibilitam contribuir com o entendimento da pergunta inicial e ajudam a chegar em uma solução para a mesma, comumente, as questões derivadas necessitam de conhecimentos encontrados em alguma obra matemática (função, matrizes, geometria…), dessa forma, as obras são visitadas e entendidas para a elaboração das respostas. Além disso, durante tal processo, os estudantes, com os novos conhecimentos, podem gerar mais questões, derivadas da pergunta inicial ou das perguntas derivadas anteriormente, que por sua vez precisam de novas visitas às obras. Esse ciclo se repete até que a construção da resposta final seja feita, discutida, aceita e validada pelos participantes.

Leão e Bittar (2024) descrevem que o PEP faz usos de procedimentos da engenharia didática, que é um processo que se caracteriza por meio de um desenho experimental na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino que se legitima pela comparação entre as análises a *priori* e a *posteriori*. Além disso, os autores também descrevem que quatro fases são necessárias para a construção de um PEP, a primeira é a Análise Epistemológica ou preliminar, na qual a pesquisa é problematizada, delimitada e são pensados as condições e restrições do ambiente escolar. A segunda fase é a Análise a *Priori*, nela temos a escolha da questão geradora e o mapeamento das suas ramificações. A terceira fase é a análise *in vivo*, isto é, a aplicação e início das primeiras análises e apurações. A quarta fase é a Análise a *Posteriori*, na qual revisamos as questões de pesquisa realizando um contraste com o que foi observado nas experimentações, reformulando hipóteses e concluindo a pesquisa.

Assim, o PEP tem início com a análise preliminar e seleção da questão geradora e a montagem de um mapa de perguntas e respostas a *priori*. Tal mapa representa os caminhos que os alunos podem tomar até que alcancem a resposta institucionalmente aceita pela questão inicial. Após esse início, a investigação é proposta aos alunos que se reúnem em grupos e discutem qual o melhor caminho para se alcançar a resposta, que não necessariamente é única ou exata. A partir disso os estudantes procuram a respostas em obras/conteúdos/ materiais confiáveis e discutem entre si para constatar se as respostas são ou não confiáveis. Com as respostas em mãos, novas perguntas são feitas e o ciclo se repete até que o grupo decida que chegou a uma conclusão e assim possa apresentar sua trajetória. Como consequência desse processo, o foco não mais é o professor e sua transmissão de conhecimentos para o aluno, o foco passa a ser agora o aluno e seu protagonismo na busca por respostas, conhecimento para solucionar as dúvidas e questionamentos que surgem, tudo isso com o professor sendo um suporte durante esse processo.

Nesse sentido, a questão inicial impulsiona a busca por novas questões e diferentes repostas que dão impulso a uma nova modelização matemática em busca da resposta da questão inicial. Além disso, os estudos ou visitas às obras/conteúdos não necessariamente precisam ser feitas de forma tradicional, onde o processo volta a ser focado no professor e na sua transmissão de conhecimentos pertinentes a questão ou o tema que a questão discute. Assim, podemos recorrer a outras metodologias nesse processo, nos aproveitando do foco que o PEP dá ao aluno, uma boa forma de fazer essa visita e melhorar ainda mais a concretização do conhecimento e o andamento do próprio PEP é a Modelagem Matemática.

2.2 A Modelagem Matemática

A Matemática, da forma como é comumente trabalhada em sala de aula, costuma gerar questionamentos nos alunos, como: “Por que estudar isso? Onde usarei isso em minha vida? Não tenho para que usar isso, então tenho algum motivo para estudar?”. Tais questionamentos têm origem em uma necessidade de contextualização, de relacionar a matemática com o cotidiano, com a vida ao redor das pessoas. Andrade (2013) elenca várias consequências desse distanciamento da realidade:

> O Ensino da Matemática é visto pela comunidade escolar (pais, alunos, professores e equipe pedagógica) como um desafio a ser vencido nas escolas. Pois, a matemática ensinada nas salas de aula, em sua maior parte, ainda em muitos casos acontece de forma tradicional e é desvinculada daquela utilizada no dia a dia, o que torna o ensino pouco atrativo e desse modo, o processo de ensino e aprendizagem da referida disciplina não obtém resultados satisfatórios e o índice de reprovação ainda é alto (Andrade, 2013, p. 13).

Dessa forma, a Modelagem Matemática, entra como uma metodologia, segundo Franco (2016), que prioriza a investigação e o protagonismo do aluno em seu processo de aprendizagem. De maneira mais específica, os alunos assumem uma posição de investigadores em conjunto com seus colegas, cujo objetivo é encontrar a solução para a determinada situação problema (Schrenk; Vertuan, 2022).

A Modelagem Matemática não é necessariamente novidade, Biembengut (2009) cita que os debates sobre a modelagem e suas aplicações na educação surgiram em torno da década de 60 devido a um movimento da época que buscava aplicações práticas para os conhecimentos científicos e para a sociedade. Após isso, Beltrão (2012) apresenta um panorama do desenvolvimento da modelagem em três fases.

A primeira fase, denominada fase de defesa, que ocorreu entre os anos 1965 e 1975, teve como marco a conferência organizada por Freudenthal em 1968, na Holanda, nela existiram discussões a favor da inclusão de componentes relacionados às aplicações e a Modelagem no ensino de Matemática.

A segunda chamada de fase do desenvolvimento, ocorreu entre 1975 e 1990, essa fase pode ser descrita pela sua evolução real dos currículos e materiais, também houve a abrangência dos componentes relacionados as aplicações e componentes de Modelagem e, ainda, a produção de casos para uso em sala de aula. Essa fase também teve um grande destaque internacional, as tendências geradas por ela refletiram em múltiplos congressos internacionais.

Por fim, a partir das contribuições de Pollak (1979), considerado um dos pioneiros das aplicações e Modelagem na Educação Matemática, foi alcançada a terceira fase, chamada de fase de maturação. Na mesma, os estudos empíricos sobre o ensino e a aprendizagem relacionados a Modelagem tiveram destaque, sendo acrescentados à ênfase teórica presente nas fases anteriores.

No Brasil, a Modelagem Matemática é uma forte tendência da atualidade, ela iniciou-se por entre os anos 1970 e 1980, com a contribuição de diversos profissionais como Aristides C. Barreto, Ubiratan D'Ambrosio, Rodney Carlos Bassanezi. Visto alguns aspectos históricos da modelagem, é importante abordar algumas das diversas concepções sobre como a Modelagem pode ser feita em sala de aula para ampliarmos nosso horizonte de atuação e nos armar com as múltiplas maneiras que a mesma pode ser feita.

Nesse sentido, Kaiser e Sriraman (2006) afirmam que a Modelagem é compreendida de forma heterogênea, seja em âmbito nacional ou internacional. Dessa forma, os autores buscam fazer uma classificação das diversas perspectivas, elas foram denominadas: Modelagem aplicada ou realística, Modelagem contextual, Modelagem educacional, Modelagem socio-crítica e Modelagem epistemológica.

Nesse viés, a perspectiva realística traz como objetivo a criação de procedimentos pragmáticos em que se pretende resolver problemas do mundo real a partir da criação de modelos. Por outro lado, a contextual, que busca embasamento na área psicológica, apresenta debates sobre o ensino da Matemática, aprendizagem e prática escolar. Já a perspectiva educacional foca sua visão na estruturação da aprendizagem e dos conceitos a serem estudados. Por fim, a sócio crítica, apresenta enfoque na compreensão do mundo e busca desenvolver a criticidade por meio da Modelagem. Por último, a perspectiva epistemológica está voltada para a produção da teoria sobre o ensino com Modelagem. (Schwendler, 2023).

Na comunidade acadêmica brasileira, também não existe um consenso sobre as compreensões e concepções da modelagem. Seguindo tal falta de consenso, Kluber (2012), identificou diversos autores significativos para a área: Almeida, Araújo, Barbosa, Bassanezi, Biembengut e Hein, Burak, Caldeira e Jacobini. E, assim, sistematizou 6 ideias que reúnem as compreensões sobre a Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira:

> 1) Como ambiente de Aprendizagem; 2) Como desdobramentos; 3) Como método; 4) Como processo; 5) Desde a sua constituição; 6) Como investigação Matemática, a

> qual conta com apenas uma unidade, portanto é uma idiossincrasia (Kluber, 2012, p. 376).

A partir do trabalho feito por Mutti (2016) podemos entender melhor como são as características básicas de cada uma dessas categorias, ao mesmo tempo, em que alguns nomes que exemplificam tais categorias são citados nesse trabalho. Em resumo:

- Ambiente de aprendizagem: um ambiente em que os alunos são convidados a investigar ou indagar sobre situações de outras áreas da realidade por meio da matemática, um dos nomes que representa essa ideia é Jonei Cerqueira Barbosa;
- Desdobramentos: são ideias caracterizadas por serviram de um conjunto de procedimentos não limitados a técnica para se atingir um paralelo explicativo da realidade que de significado aos conteúdos matemáticos no caminho, temos como representante Dionísio Burak;
- Como método: uma perspectiva da Modelagem Matemática que ela pode ser entendida como uma ponte que liga a realidade ao conteúdo a ser ensinado, podendo fazer uso do método científico, mas, também, podendo ir além do método, Lourdes Maria Werle de Almeida representa bem essa ideia;
- Como processo: o objetivo principal não é chegar ao modelo, o mais importante é o processo percorrido pelos professores e alunos para a compreensão do objeto estudado, temos como exemplo dessa modalidade Ademir Donizete Caldeira;
- Constituição: transformar problemas do cotidiano em matemáticos cuja soluções sejam interpretadas na linguagem usual com uma presença forte da interdisciplinaridade, Rodney C. Bassanezi é um exemplo dessa compreensão;
- Investigação: a Modelagem é um meio de interação entre a matemática e a realidade, Salett Biembengut e Nelson Hein representam tal concepção.

Desse modo, podemos perceber que existem várias concepções sobre como fazer a modelagem matemática e o quão variadas elas são, portanto, em sequência, trataremos em mais detalhes sobre como a Modelagem é feita a partir de alguns autores.

Segundo Bassanezi (2004), a modelagem é algo dinâmico, usada para a obtenção de modelos por meio da abstração e generalização do problema visando se obter previsões e tendencias. Tal autor esquematiza a modelagem em alguns passos:

Figura 2 – esquematização dos passos, segundo Bassanezi.

Passo	Descrição
Experimentação	Identificar o problema não matemático e experimentar com ele e obter dados.
Abstração	Abstração do que ocorreu no passo de experimentação, com a formulação dos modelos possíveis através da seleção de hipóteses, problematização e simplificação.
Resolução	O problema foi traduzido para a linguagem matemática e o estudo analítico e numérico é feito.
Validação	Validar a solução recorrendo aos dados experimentais que surgiram no passo de experimentação.
Reformulação	Caso o modelo não se encaixe nos dados experimentais, partimos para o passo de reformulação que é a modificação do modelo até que o modelo possa ser obtido.

Fonte: autor.

Portanto, Bassanezi (2004), considera a modelagem como uma estratégia na qual o foco está no caminho e não no resultado, dessa forma, a sistematização, aplicação do conteúdo matemático e a interação entre o professor e aluno são mais relevantes do que o modelo obtido em si. Na visão de outros autores o modelo pode ser visto e compreendido como

> uma descrição simplificada de uma situação real, realizada através de conceitos, relações e representações matemáticas. No processo de modelação, começa-se por construir um modelo que represente a situação, depois, procura-se uma solução para o problema assim formulado em termos matemáticos, após o que se regressa à situação original, procurando interpretar nessa situação as soluções matemáticas obtidas e tirar as desejadas conclusões. (Ponte; Quaresma, 2012, p. 198).

Segundo Biembengut e Hein (2019), Modelagem Matemática:

> É o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa ótica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo

> matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (Biembengut; Hein, 2019, p. 12).

Jacobini (2004) acredita que os problemas da realidade podem ser transformados em uma linguagem Matemática e, assim, serem resolvidos conforme as teorias correspondentes a ele. A partir desse contexto, ele afirma que as soluções encontradas são adaptadas para à linguagem do mundo real e, dessa forma, as soluções são validadas a partir dos dados disponíveis.

Outro viés se mostra quando estamos tratando de problemas da realidade em sala de aula, sendo a dificuldade que o aluno apresenta para compreender a linguagem Matemática. Para uma possível solução dessa dificuldade, podemos nos guiar pela visão de Almeida (2020) que

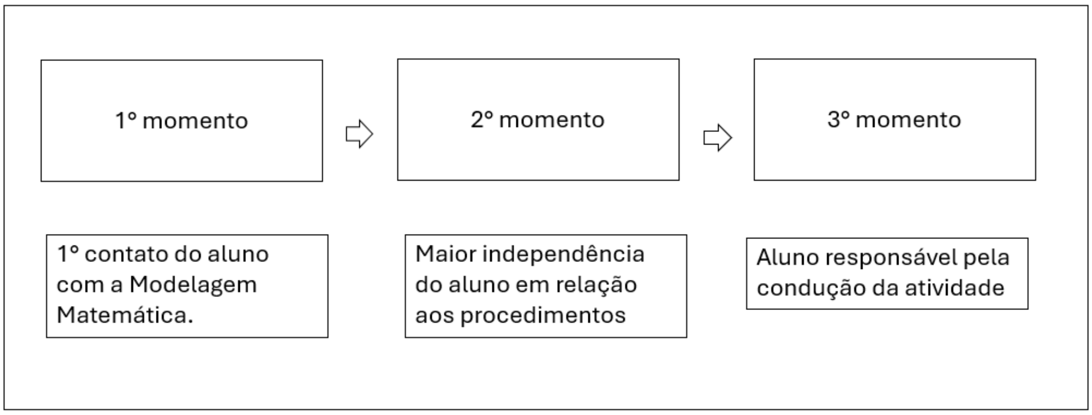
> Atividades de modelagem matemática envolvem o uso da linguagem matemática para quantificar situações-problema ou fenômenos da realidade e analisar seu comportamento e que a modelagem matemática pode indicar bons encaminhamentos para resolver problemas em que a matemática é usada para fomentar o entendimento de situações da realidade. (Almeida, 2020, p. 222).

Nesse sentido, a Modelagem ressignifica a linguagem Matemática, a coloca em um contexto, e dessa forma o aluno pode obter tanto um conhecimento e aprendizagem acerca da situação problema quanto do conteúdo Matemática. De fato, podemos ver a presença dessas características e ressignificações nos trabalhos de Scheller (2009), Silva (2022), Silva, M. (2023) e Oliveira (2023).

Tal visão de Almeida (2020) é reforçada em seus trabalhos em conjunto com Vertuan (2011). Os autores dizem que "uma atividade de Modelagem Matemática tem em uma situação problemática a sua origem e tem como característica essencial a possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à matemática" (Almeida; Vertuan, 2011).

Além disso, Almeida e Vertuan (2011) descrevem de forma simplificada os principais momentos da aproximação dos alunos com a Modelagem Matemática. Tais momentos podem ser vistos na Figura a seguir.

Figura 3 – diferentes momentos da Modelagem Matemática na sala de aula.



Fonte: Almeida e Vertuan (2011).

Na concepção de Barbosa (2001), a Modelagem Matemática é um método que proporciona aos alunos um ambiente para se aprender Matemática por meio da investigação de situações ou problemas que tenham origem na realidade do mundo que os cerca. Ele divide o processo de investigação em três casos baseados nas formas de organização curricular. No primeiro caso, o professor descreve uma situação-problema com as informações necessárias para a sua resolução e com o problema já formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução. No segundo caso, o professor leva para a sala de aula um problema de outra área da realidade e os alunos ficam como responsáveis por fazer coleta das informações necessárias para a sua resolução. Por fim, no terceiro caso, partindo de temas não matemáticos, os alunos formulam, coletam informações, simplificam e solucionam a situação-problema.

Barbosa (2001) também frisa que é importante o professor participar da investigação, mas de maneira mais próxima de um coadjuvante e não protagonista. Seguindo tais conceitos é possível sintetizar as possibilidades de atuação da seguinte forma.

Figura 4 – tarefas e casos do processo de Modelagem segundo Barbosa.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Criação do problema	Professor	Professor	Professor / aluno
Simplificação para adequação	Professor	Professor / aluno	Professor / aluno
Coleta de dados e pesquisa	Professor	Professor / aluno	Professor / aluno

Solução	Professor / aluno	Professor / aluno	Professor / aluno

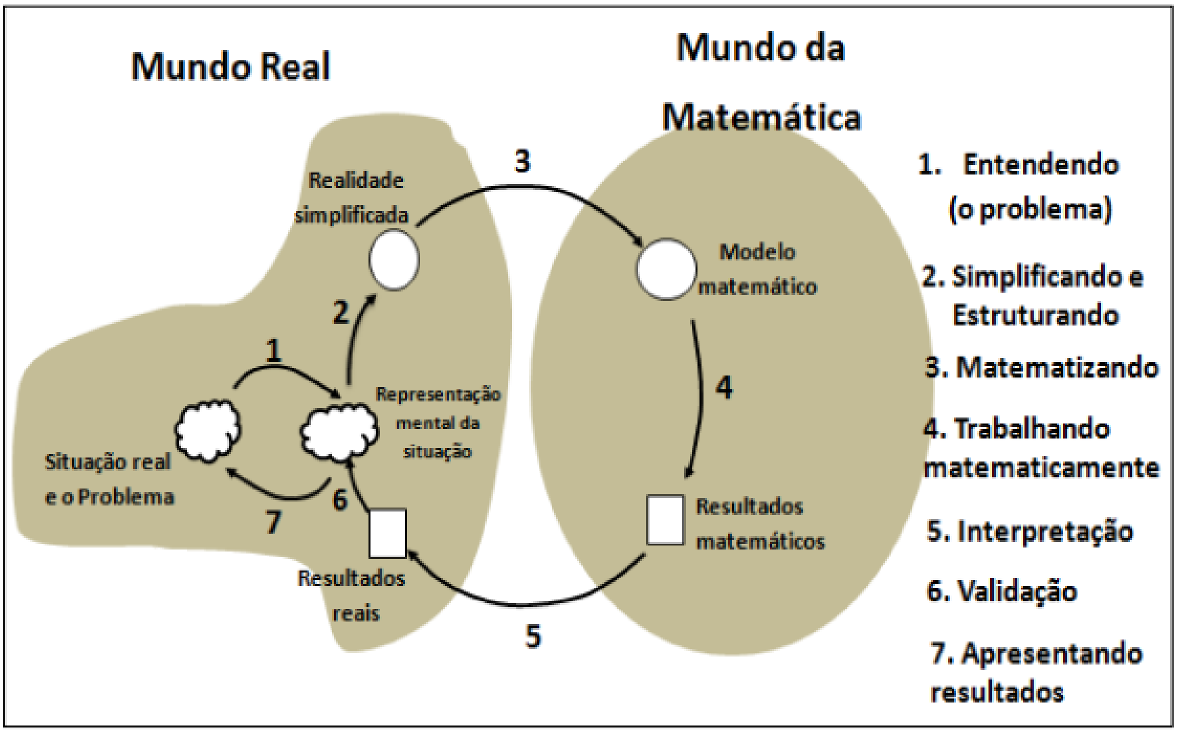
Fonte: adaptado de Barbosa (2001).

Já Burak (1992) compreende que a Modelagem Matemática é composta por procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar de forma matemática fenômenos presentes no cotidiano do ser humano para o suporte na tomada de decisões. Ele afirma que não existe a necessidade de encontrar uma fórmula ou uma generalização do problema, para ele a parte mais importante desse trabalho está na construção do conhecimento, isto é, no ensino-aprendizagem.

Nesse sentido, Burak quebra a aplicação da modelagem na educação em 5 passos: escolha do tema, pesquisa explanatória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas, análise crítica da solução. Para ele, tais passos são suficientemente capazes de dar significado e construir autonomia daqueles que participam, tornando-os agentes ativos na construção de seu conhecimento.

Blum e Leib (2005), descrevem a Modelagem Matemática como um ciclo composto por sete etapas que partem do mundo real, passam pelo mundo da Matemática e retornam para o mundo real, essas etapas são: entendimento do problema, simplificação e estruturação, matematização, execução matemática, interpretação, validação e apresentação dos resultados. A relação das etapas com os dois mundos fica claro na figura a seguir.

Figura 5 – sete etapas da Modelagem e o seu ciclo.



Fonte: Blum e Leib, 2005.

Nessa figura podemos observar que os conjuntos que contêm os mundos são distintos em forma. Tal distinção reflete as características de cada mundo: o real sem forma definida, representando as incertezas presentes na própria realidade, o da Matemática com forma bem definida, representando as estruturas bem definidas que fazem parte dele. Além disso, vale ressaltar que as etapas, por mais que sejam representadas em apenas um dos conjuntos, são complementares umas às outras e influenciam todas as outras etapas presentes no processo. (Souza, 2017).

Segundo Machado (2006) no ambiente de modelagem o professor não sabe de tudo, ele terá que aprender a lidar com a insegurança da falta de controle. Nessa situação é importante estar aberto para valorizar os conhecimentos dos alunos e nessa interação é que ocorrerá a aprendizagem. Assim, o professor se torna um facilitador que discute com os alunos e incentiva a pesquisa para que todos aprendam em conjunto.

Portanto, por meio de tudo que foi dito fica claro que a Modelagem Matemática traz consigo uma série de vantagens para a aprendizagem dos estudantes. Biembengut e Hein (2019), colocam alguns pontos a favor da modelagem, são eles:

• Aproximar uma outra área do conhecimento da Matemática;

• Enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno;

• Despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade;

• Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;

• Desenvolver a habilidade para resolver problemas;

• Estimular a criatividade.

(Biembengut; Hein, 2019, p. 18-19).

Vertuan (2010), afirma que:

> Acreditamos que as atividades de Modelagem Matemática levam os alunos a verem a Matemática como uma ferramenta para analisar, investigar e interpretar a realidade. Ao desenvolverem uma atividade deste tipo, utilizam vários conceitos matemáticos em problemas reais e se obrigam, inclusive, a conhecerem melhor outras áreas do conhecimento. Logo, a Modelagem não só é uma alternativa para o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos, como também é uma alternativa para a formação crítica dos alunos, os quais vivem numa sociedade em constante mudança. (Vertuan, 2010, p. 06).

Bassanezi (2004) também elenca argumentos a favor da Modelagem Matemática em sala de aula, tais argumentos são: enfatiza aplicações matemáticas; focaliza a preparação dos estudantes para a realidade como cidadãos atuantes na sociedade; enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas; garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos, e valorizar a própria Matemática.

Ainda de acordo com Bassanezi (2004), muitos professores trazem obstáculos para a sua implantação, principalmente em cursos regulares, como:

• O currículo dos cursos regulares que devem ser desenvolvidos integralmente e, como a modelagem é um processo demorado, isto pode não acontecer;

• Alguns professores de matemática duvidam se é de sua responsabilidade, ensinar a resolver problemas de outras áreas, ou estabelecer conexões com estas;

• O aluno está acomodado ao ensino tradicional, e com a introdução da Modelagem, ele pode se perder ou tornar-se apático.

• Na Modelagem, o aluno passa a ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, ou seja, ele é responsável pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo, logo, a aula poderá caminhar em ritmo mais lento;

• A formação heterogênea de uma classe pode dificultar na relação dos conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática;

• O tema escolhido pode não interessar a todos;

• Os professores não se sentem habilitados a desenvolver a modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações da Matemática em outras áreas.

Dessa forma, podemos observar que a Modelagem Matemática possui muitos argumentos a favor e contra ela. E, ainda, vemos que as dificuldades estão relacionadas ao cotidiano da educação como todo: dificuldades em relação aos alunos, ao professor, à escola em si e a falta de preparo nas licenciaturas.

3 PROPOSTA DE PEP EM CONJUNTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Inicialmente, resumimos aqui algumas informações básicas a respeito da proposta. A primeira informação trata sobre os conteúdos que serão trabalhados em conjunto com a teoria: área de figuras planas e ângulos no triângulo retângulo, também existem trechos interdisciplinares sem aprofundamento de teoria tratando sobre sazonalidade, latitude e longitude. A segunda, quanto aos pré-requisitos: é necessário que o aluno tenha conhecimentos de matemática básica, consiga entender e calcular porcentagens sucessivas, construir tabelas e tenha acesso à internet ou outro meio de pesquisa. A terceira, o público alvo são os alunos do ensino médio, sejam eles no primeiro ano ou no segundo ano. Por fim, a quarta e última informação, a duração inicial da proposta é de dois meses, desde que seja aplicada em quatro aulas de matemática semanais, caso o professor tenha menos aulas ou alguma disciplina como Aprofundamento de ciências da natureza e matemática, a duração passa a ser de quatro meses para duas aulas semanais, ainda sugerimos a aplicação em forma de projeto caso o professor participe de programas como Professor Mentor ou semelhantes. Finalizadas as informações básicas, seguiremos com os passos do PEP.

Como o primeiro passo para a construção de um PEP temos a análise epistemológica ou preliminar. Nesta, visamos avaliar quais saberes estão em jogo, as características gerais dos estudantes e as dificuldades que surgem a partir da própria instituição de ensino. Inicialmente, este percurso está planejado para ser aplicado e avaliado na escola em que o autor trabalha, assim, a análise preliminar será feita conforme as condições dessa escola.

Para determinar os saberes que estão em jogo fizemos uso da BNCC, quando ela afirma, na competência 3, que é necessário resolver problemas em diversos contextos, com criação de modelos e análise dos resultados. Além da BNCC, também pensamos na defasagem dos alunos e nas habilidades que podem ser desenvolvidas a partir de uma temática multidisciplinar.

Ao conversar com os professores mentores das turmas, das 3 categorias definidas pelo programa Professor Mentor, que dividem os alunos de acordo com seus pontos fortes e fracos, a maioria dos alunos enquadra-se nas categorias 2 e 3. Isso significa que eles possuem pontos fracos em protagonismo, habilidades de fala e discussão, interpretação de texto. Além desses pontos fracos, eles também necessitam de recuperação de aprendizagens. Portanto, podemos notar a necessidade de um percurso que, ao mesmo tempo que trabalhe as habilidades socioemocionais deles, também trabalhe com conteúdo/obras que possam ser abordadas em diferentes níveis de profundidade.

A própria escola também traz limitações com relação à estrutura física, por exemplo, a sala de informática tem capacidade para cerca de 10 alunos e muitas vezes é utilizada para reuniões. Nesse sentido, quando pensamos que em média o número de alunos em sala de aula é 40, utilizar tal sala se torna inviável. Também existe uma cobrança com relação aos conteúdos dados e as avaliações devem ocorrer sempre em uma determinada semana, assim surgem limitações com o tempo para a proposta. Além disso, a biblioteca da escola também enfrenta problemas similares à sala de informática, com relação à capacidade e uso.

Ao pensar nas demandas e desafios que emergem desse contexto escolar, decidimos fazer uso de um PEP semiaberto, visto que dessa forma teremos uma predeterminação dos conteúdos a se aprender e quantidade de conteúdo fora do contexto usual da escola se torna reduzida, contribuindo para as dificuldades com tempo e cobranças conteudistas da gestão escolar e, também, tal modalidade ainda cede liberdade para os alunos explorarem contribuindo para o desenvolvimento de diversas habilidades deles. Ademais, com relação ao tema, pensamos na sustentabilidade por meio da geração de energia limpa com placas solares, pois esse tema é atual, multidisciplinar e tem capacidade para cativar interesse nos alunos. Assim, finalizamos nossa análise preliminar e seguimos para o próximo passo: a análise a *priori*.

Conforme o descrito anteriormente, o segundo passo para o preparo de um PEP está na análise a *priori*, dentro dela o questionamento inicial é de suma importância, dentro da sustentabilidade e geração de energia limpa temos o tema que trata de placas solares, por ser um tema capaz de gerar uma multidisciplinaridade incrível, iniciaremos o nosso percurso com ele.

Dessa maneira, após uma reflexão, chegamos à pergunta inicial: “Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?”. Essa questão, instiga uma curiosidade sobre o lado financeiro e funcional das placas, o que normalmente desperta o interesse dos alunos.

Finalizada a escolha da questão inicial, o próximo passo é construir um grafo de possíveis perguntas que os alunos podem fazer sobre o tema. É importante que as questões estejam organizadas pelas suas relações entre si, dessa forma aqui faremos uso de numerações.

Dada a questão inicial, as seguintes perguntas derivadas foram pensadas e organizadas por sua relação com as demais:

0. Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?

1. Quais são os custos iniciais associados à instalação de placas fotovoltaicas?

1.1. Quais são os equipamentos necessários para a instalação?

1.1.1 Quanto custa a compra e instalação dos equipamentos?

1.1.2. Qual é o preço dos painéis solares?

1.1.3. Quais são os custos dos inversores e outros componentes?

1.1.4. Quanto custa a instalação e mão de obra especializada?

1.2. Existem incentivos ou subsídios disponíveis para reduzir os custos iniciais?

1.2.1. Quais programas governamentais estão disponíveis para a energia solar?

1.2.2. Quais são os benefícios fiscais e isenções?

2. Quais são os custos de manutenção e operação das placas fotovoltaicas?

2.1. Qual é a vida útil dos painéis solares e componentes?

2.2. Quais são os custos de manutenção regular e substituição de componentes?

2.2.1. Quanto custa a limpeza e manutenção dos painéis?

2.2.2. Qual é o custo de substituição de componentes, como inversores?

3. Qual é a economia gerada pela redução na conta de energia elétrica?

3.1. Qual é a redução média na conta de energia após a instalação?

3.1.1. Qual é a economia estimada com base no consumo de energia atual?

3.1.2. Qual é o impacto das tarifas de energia nas economias?

3.2. Como a energia excedente pode ser vendida ou compensada na rede?

3.2.1. Quais são as políticas de compensação e venda de energia?

3.2.2. Como funcionam os créditos de energia?

3.3. Vale a pena para quem consome pouca energia elétrica?

4. Qual é o tempo estimado para o retorno do investimento?

4.1. Como calcular o tempo de retorno com base nos custos e economias?

4.1.1. Quais são as variáveis que afetam o tempo de retorno?

4.2. Qual é o impacto de variáveis como eficiência do sistema e clima?

4.2.1. Como a localização geográfica afeta o tempo de retorno?

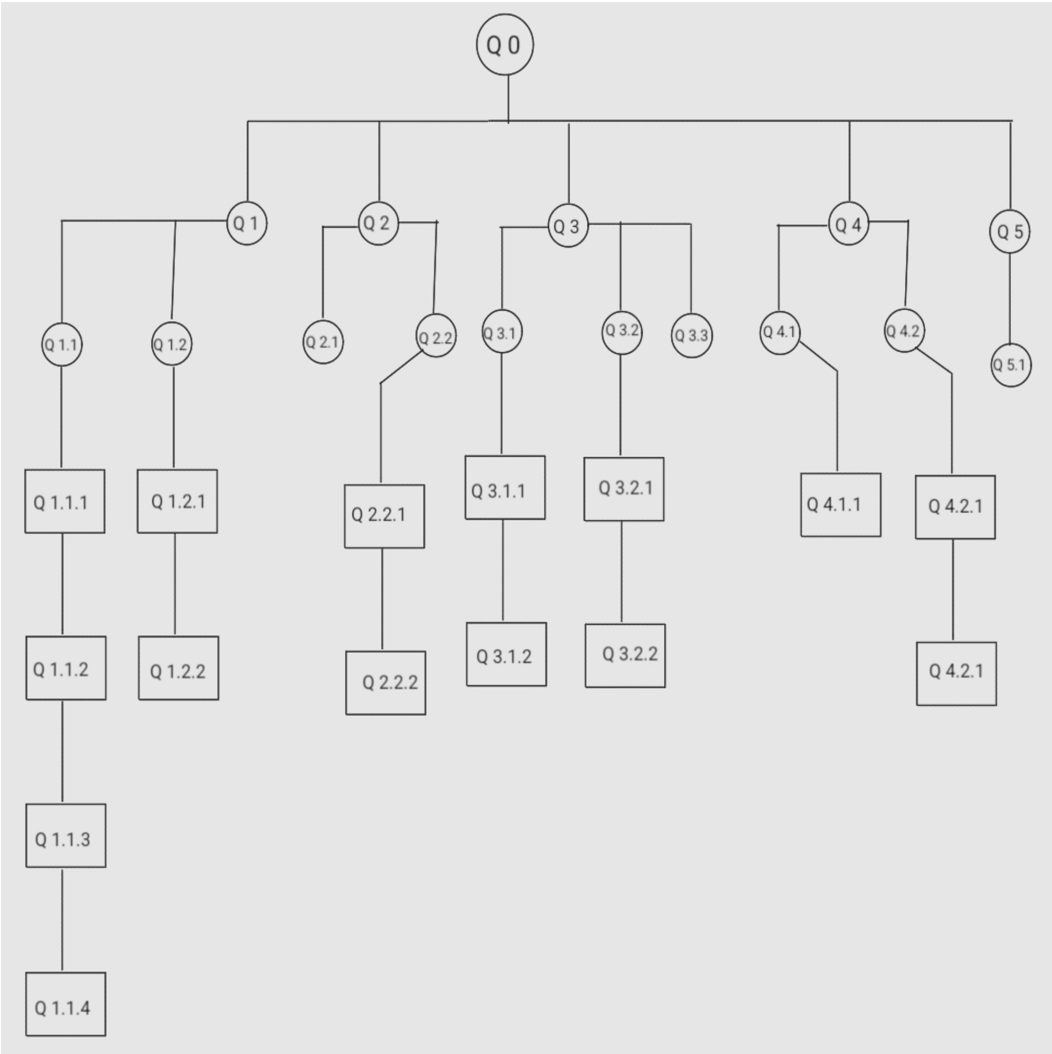
4.2.2. Quais são os efeitos de variações sazonais na geração de energia?

5. Como funciona uma placa de energia solar?

5.1 Como podemos melhorar seu funcionamento para obter maior geração de energia?

É importante que o professor em conjunto dos alunos também realize uma etapa de construção visual das conexões entre as perguntas, para melhorar a fixação na mente de ambos, tal construção e análise é feita na fase de experimentação ou análise *in vivo*. Em formato visual, utilizaremos a seguinte notação "Q" para pergunta seguido de uma numeração que indique sua relação com as demais perguntas, por exemplo, "Q 3.2.2" ou "Q-3.2.2" seria a pergunta 3.2.2 exposta anteriormente. Assim, temos a seguinte figura com as perguntas criadas:

Figura 6 – grafo de perguntas.



Fonte: autor.

Dadas essas questões derivadas, é importante que o professor tenha conhecimento sobre como os alunos podem respondê-las, quais possíveis respostas e como essas respostas podem se conectar com algum conteúdo Matemático, dessa forma o professor pode manejar melhor os alunos durante a aplicação e guiá-los parcialmente na direção da solução da resposta inicial. É importante salientar que os alunos normalmente irão utilizar a ferramenta mais prática a disposição deles para chegar a essa resposta, ou seja, farão uso de pesquisas no Google, livros e materiais didáticos a disposição na biblioteca escolar, portanto o professor deve auxiliá-los para que eles alcancem respostas embasadas e verdadeiras por meio de fontes confiáveis.

A formação das respostas para as perguntas iniciais de cada índice segue usualmente a relação inversa das conexões entre as perguntas, isto é, para responder, por exemplo, a questão Q2 precisamos responder às questões Q 2.1 e Q 2.2 antes e por sua vez, antes das questões Q

2.1 e Q 2.2, precisamos responder às questões Q 2.2.1 e Q 2.2.2. É importante ter sempre a relação entre os questionamentos em atenção, dessa forma garantimos uma certa estrutura para a investigação e assim os alunos se sentem menos perdidos em sua procura pelas respostas.

Sabendo que o professor também deve ter uma noção das respostas e como elas devem ser organizadas, chegamos a algumas respostas esperadas ou o caminho que se pode percorrer para alcançar a resposta, são elas:

Resposta 1.1.1: é necessário consultar sites de empresas especializadas no assunto. Em geral, são necessários: painéis solares, inversor solar, suportes, controlador de carga, baterias, cabos e conectores, quadro de distribuição, sistema de aterramento, medidor bidirecional.

Resposta 1.1.2: os preços variam bastante conforme a marca e eficiência.

Resposta 1.1.3: os custos com o inversor dependem do tipo e capacidade. Para outros componentes, como cabos, estruturas de suporte e outros, o preço deles depende da necessidade de onde serão instalados.

Resposta 1.1.4: para determinar esse custo, precisamos saber a complexidade do sistema e o local onde será instalada.

Resposta 1.1: a partir das 3 respostas anteriores, podemos pensar em uma residência comum, ou até mesmo utilizar uma residência dos alunos como referência e, com isso, consultar algumas empresas da região para determinar o custo da compra e instalação.

Resposta 1.2.1: existem alguns programas que podem ser consultados e, com isso, os alunos podem verificar se eles abrangem a região em questão.

Resposta 1.2.2: os alunos podem buscar pela legislação local para descobrir se existem ou não benefícios desse tipo.

Resposta 1.2: dependerá da região em que o projeto for aplicado.

Resposta 1: para a primeira pergunta, notamos que existe uma grande variação nos custos iniciais, dessa forma, cabe neste momento uma atividade que consiste na divisão da turma em grupos, donde cada grupo represente uma residência com condições distintas uma das outras. Dessa forma, o trabalho de cada grupo será construir a resposta ao primeiro questionamento de acordo com a residência do próprio grupo.

Resposta 2.1: a vida útil das placas normalmente gira em torno de 30 anos, os inversores possuem, os inversores normalmente têm vida útil menor, 10 a 15 anos.

Resposta 2.2.1: depende do tamanho do sistema, da frequência da limpeza e do local de instalação.

Resposta 2.2.2: o custo pode variar um pouco dependendo da evolução da tecnologia do componente que precisa ser trocado. Em geral, inversores custam bem mais do que os suportes e o cabeamento.

Resposta 2.2: normalmente, tais custos aumentam conforme o sistema envelhece e peças mais caras como inversores e placas precisam ser trocados. Os alunos podem fazer uma tabela sobre os valores atuais do preço dos componentes envolvidos no processo e, com isso, simular os custos anuais de limpeza e extras (troca de alguma placa, cabeamento, suporte, inversor no ano em questão).

Resposta 2: tal pergunta tem sua solução determinada pela resposta 2.2.

Resposta 3.1.1: depende do tamanho do sistema e do quanto a residência consome em média por mês.

Resposta 3.1.2: quanto maiores as tarifas/ bandeiras de energia, maior tende a ser a economia gerada pelo uso de painéis solares.

Resposta 3.1: para responder a essa pergunta é necessário avaliar o tamanho do sistema, as bandeiras e a capacidade que o sistema tem de gerar energia e o quanto a energia custa.

Resposta 3.2.1: existem normativas que possibilitam a compensação da energia excedente pelo sistema solar, normalmente estas normativas fazem uso do sistema de créditos que têm um prazo para serem utilizados.

Resposta 3.2.2: são uma forma de adquirir saldo extra que pode ser usado para abater o consumo futuro que ultrapasse a capacidade de geração.

Resposta 3.2: em geral, a energia em excesso é injetada na rede de distribuição e, assim, são gerados saldos que podem ser utilizados para abater o consumo futuro de energia.

Resposta 3.3: é comum não valer a pena para quem apresenta consumo baixo, pois o custo do investimento pode não ser retornado ao longo da vida útil do sistema.

Resposta 3: para determinar o quanto vale a economia gerada precisamos determinar quanto as placas do sistema podem produzir, quanto desta energia é gasta pela residência e quanto o excedente pode valer.

Resposta 4.1.1: tal tempo de retorno depende do custo inicial do sistema, dos custos de manutenção, da economia mensal e se existem ou não incentivos fiscais.

Resposta 4.1: é necessário levar em conta o custo inicial, o custo da manutenção e o saldo da geração mensal média.

Resposta 4.2.1: Quanto maior a tarifa de energia e a incidência solar, menor será o tempo de retorno.

Resposta 4.2.2: Dependendo do quão forte seja a variação do clima na região podem existir momentos de menor geração de forma significativa, contudo isso pode ser compensado pela geração de saldo energético nos momentos favoráveis.

Resposta 4.2: o impacto pode ser benéfico ou não a depender do clima da região, com alguns fatores que podem viabilizar a instalação mesmo em condições fora do ideal.

Resposta 4: neste momento cabe outra atividade aos grupos mencionados na resposta 1, donde cada um que já tem a resposta sobre o custo inicial, irá buscar as informações encontradas nas respostas sobre o custo organizá-las em conjunto do saldo, com relação ao saldo de geração outra atividade que será discutida mais adiante no texto poderá ser utilizada para determinar o saldo.

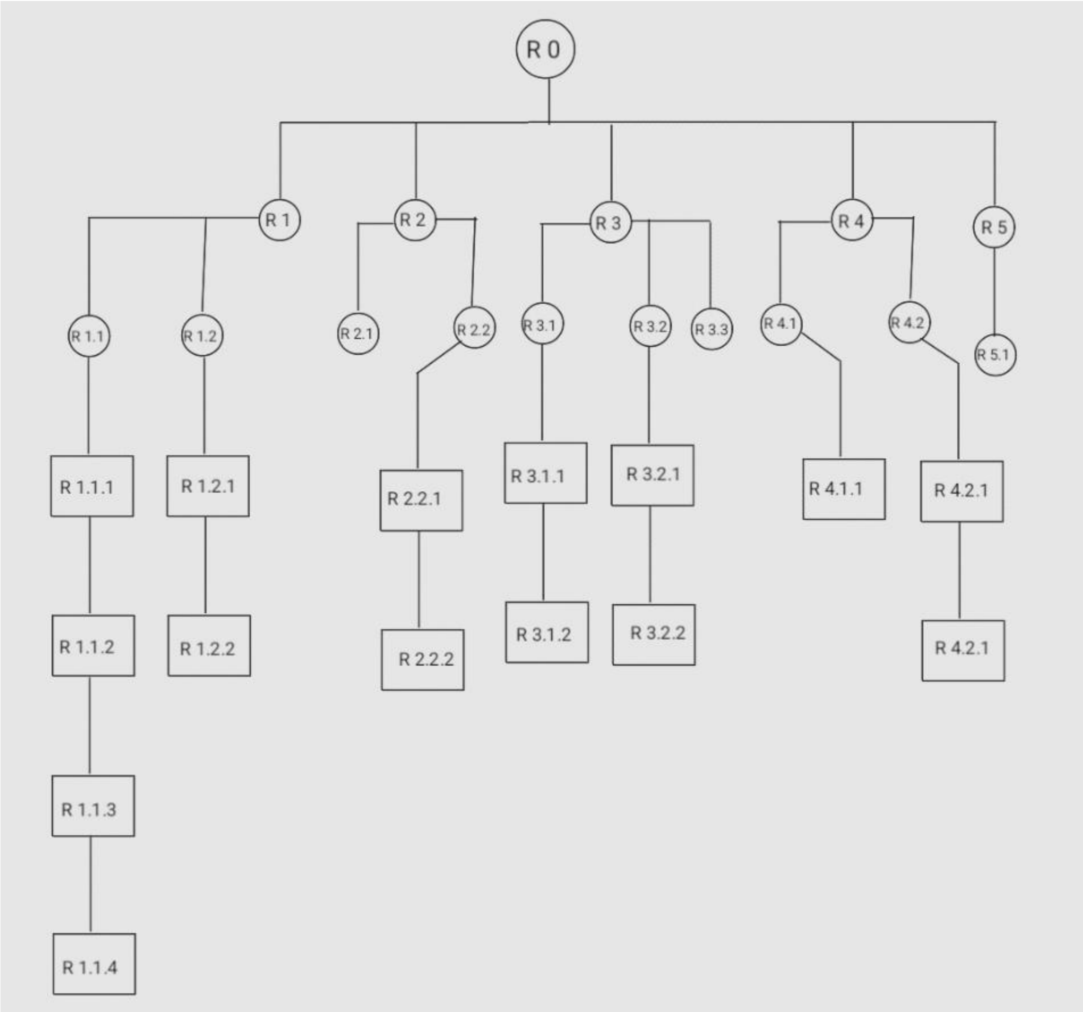
Resposta 5.1: a quantidade de radiação solar recebida afeta a produtividade do painel, quanto mais perpendicular for a incidência da luz sobre a placa, melhor. Dessa forma, precisamos colocar a placa de forma que a luz solar a atinja fazendo um ângulo de 90°.

Resposta 5: um conjunto de módulos capta a radiação solar e converte a energia solar em elétrica por meio do efeito fotovoltaico.

Resposta 0: será dada por meio do conjunto das atividades futuras presentes nesta dissertação.

Novamente, podemos relacionar as respostas em um grafo para melhorar a visualização e a conexão delas. Segue tal grafo na figura a seguir:

Figura 7 – grafo de respostas.



Fonte: autor.

Dentro do caminho para as respostas é necessário que o professor esteja atento para as respostas que podem passar por conteúdos de sua disciplina ou de outras. Quando tratamos de matemática, observamos que a construção da resposta 1 pode caminhar pelo conteúdo de área de figuras planas. Além desta, a resposta 5 pode percorrer conteúdos relacionados a ângulos, já a resposta 4 pode envolver matemática básica.

Como os alunos podem apresentar tanto respostas qualitativas quanto quantitativas para os questionamentos, é interessante padronizar os registros dos alunos. Para tal, no Anexo F, temos a presença de um modelo de tabela que pode ser usado para o registro das respostas quantitativas. Nesse sentido, com relação as repostas qualitativas, sugerimos a confecção de um relatório com seções para cada categoria de perguntas onde os registros de cada resposta podem ser dispostos. Ademais, caso o professor considere relevante, confeccionar os modelos de registro de resposta em conjunto com os alunos também é uma opção.

As perguntas e respostas exibidas aqui não representam a totalidade do que pode ser visto em uma sala de aula, nem tampouco a variedade advinda da criatividade de alguns alunos. Elas nos servirão como base para o planejamento e execução das atividades que estão presentes nos próximos tópicos, pois o único trecho aplicado em sala de aula com os alunos foi o que será analisado a seguir.

Com a análise a *priori* feita, partimos para a análise *in vivo*, que é feita a partir da aplicação do PEP em sala de aula com os alunos. No nosso caso, nos restringimos aos questionamentos dos alunos em sala de aula. Com relação a ela, devido ao acidente, não foi possível se deslocar até a escola para a aplicação prática e em totalidade dela. Contudo, foi possível solicitar a uma professora de física que se voluntariou na escola para realizar de maneira simplificada e que se encaixasse em sua aula parte do percurso.

A professora atua em uma escola estadual do ensino básico de Alagoas, a mesma que o autor, para esta aplicação ela selecionou uma turma do segundo ano do ensino médio, que apresenta 32 alunos. A justificativa para a escolha dessa turma se deu pela existência da disciplina de Aprofundamento de Ciências da Natureza e Matemática, além disso, tal professora estava trabalhando em sala de aula com os alunos sobre fontes de energia sustentáveis e o tema da proposta se encaixava nas discussões que estavam sendo executadas nos encontros anteriores.

Para a aquisição das perguntas criadas pelos alunos, a professora, ao chegar no tema placas solares, trabalhou com a leitura de um texto sobre as placas e, no final dessa leitura, lançou a reflexão aos alunos, isto é, a pergunta inicial Q-0. Ademais, os alunos foram colocados em grupos para refletir sobre a pergunta e o documento também continha algumas orientações sobre como proceder com a pergunta (tanto o texto quanto a pergunta e as orientações podem ser encontradas no Anexo E). Por fim, os alunos reuniram, no Anexo E, os seus questionamentos e devolveram à professora no final das aulas. Ademais, esse processo inteiro durou aproximadamente duas aulas, 120 minutos.

Alguns dos resultados obtidos pelos alunos podem ser visualizados nas figuras a seguir:

Figura 8 – resultados do grupo 1.

1. **Quais fatores devem ser considerados para responder a essa pergunta?**
   - Liste os elementos que precisam ser analisados.
2. **Que questionamentos surgem a partir dessa investigação?**
   - Que perguntas você precisa responder para chegar a uma conclusão?
3. **Você possui os dados necessários para responder à pergunta?**
   - Caso não tenha, quais dados seriam importantes e onde poderiam ser encontrados?
4. **Quais recursos foram utilizados para buscar as respostas?**
   - Cite materiais, fontes ou ferramentas ou consultados.
5. **Registre o caminho percorrido até a resposta final:**
   - Apresente de forma clara as etapas da investigação, os dados coletados e as conclusões obtidas.

1 - mão de obra, materiais, periodo de instalação,

2 - • A região onde eu moro favorece a geração de energia solar?
• será melhor que a energia convencional?
• será necessario?

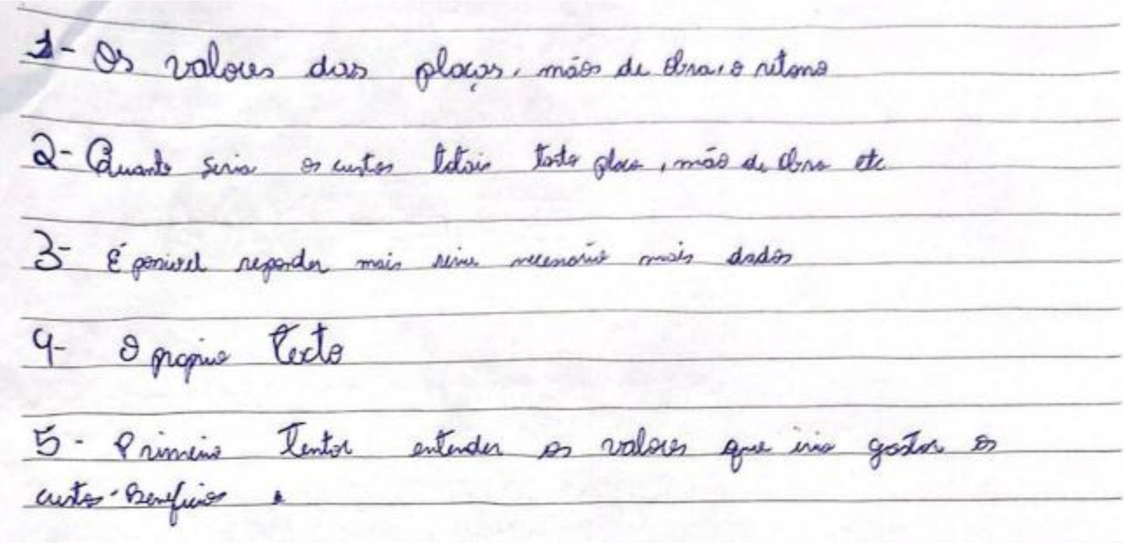
3. A razão, logica, blogs, foruns, sites, pesquisas, manchetes jornalisticos etc...

4. simuladores, Agencias de energia, Relatorios de mercados, Artigos tecnicos e academicos

5. levantamento de dados sobre o sistema fotovoltaico
• fontes consultadas
• Dados coletados
• Analise da economia gerada
• verificação de regulamentação e incentivos
• considerações ambientais e sociais
• Conclusões obtidos

Fonte: autor.

Figura 9 – resultados do grupo 2.



1- Os valores das placas, mão de obra e retorno

2- Quanto seria os custos totais todo placa, mão de obra etc

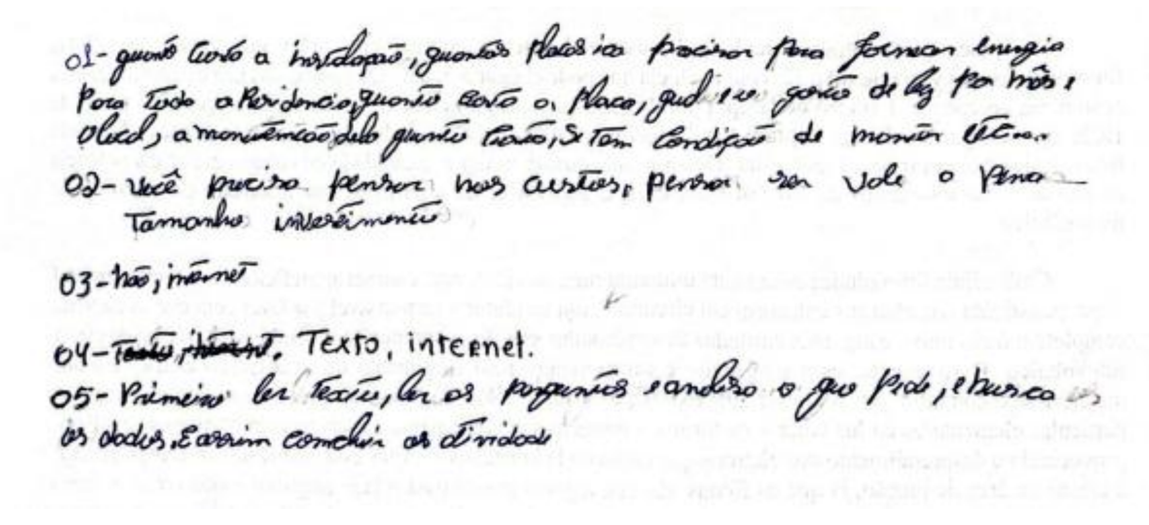
3- É possível responder mais seria necessário mais dados

4- O próprio texto

5- Primeiro tentar entender os valores que iria gastar os custo-benefício.

Fonte: autor.

Figura 10- resultados do grupo 3.



01- quanto custo a instalação, quantas placas ia precisar para fornecer energia para toda a residência, quanto custa a placa, qual ia gasto de luz por mês, o led, a manutenção dela quanto custo, se tem condição de manter etc.

02- você precisa pensar nos custos, pensar se vale a pena tamanho investimento

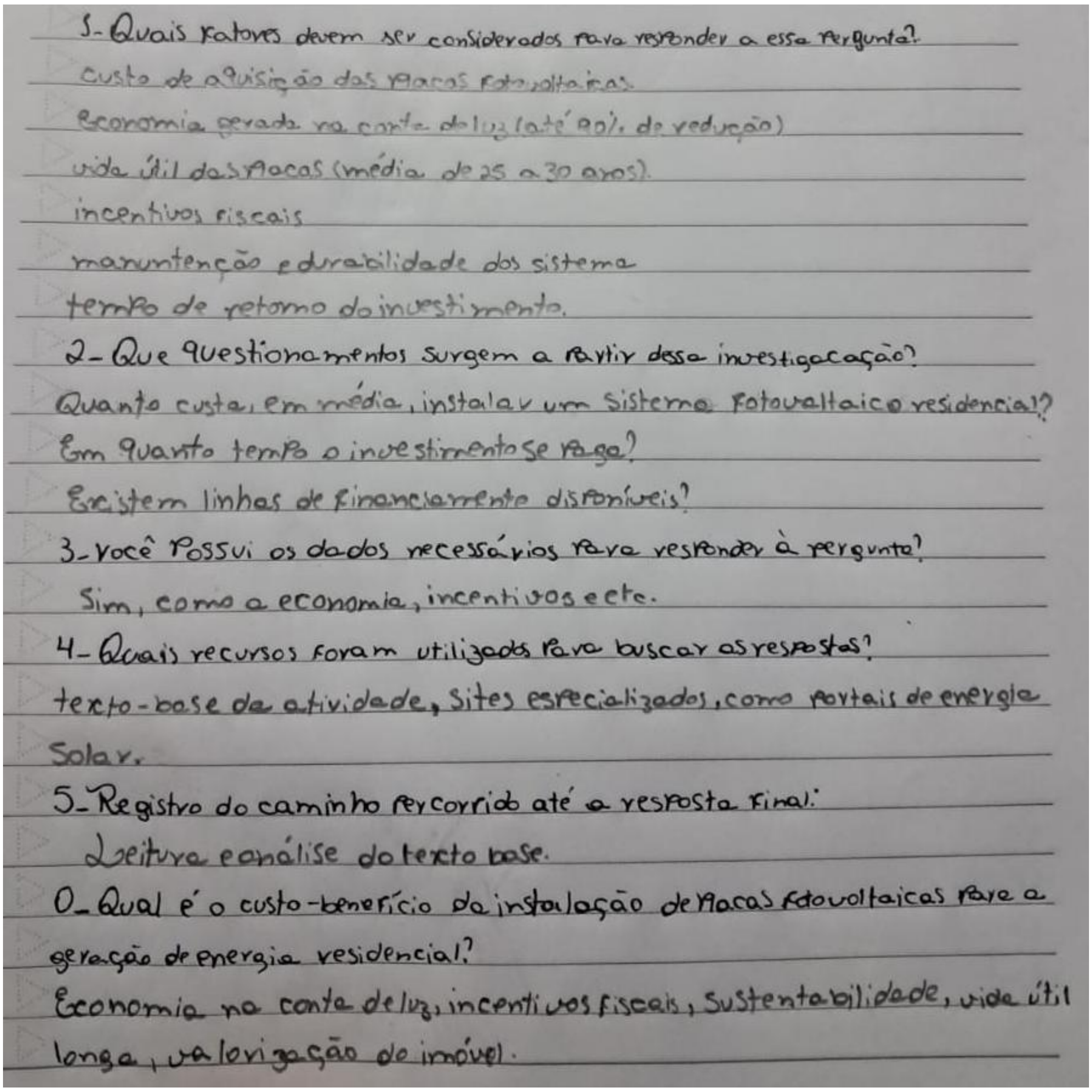
03- não, internet

04- ~~Texto, internet~~, Texto, internet.

05- Primeiro ler texto, ler as perguntas e analisar o que pede, e busca os dados, e assim concluir as atividades

Fonte: autor.

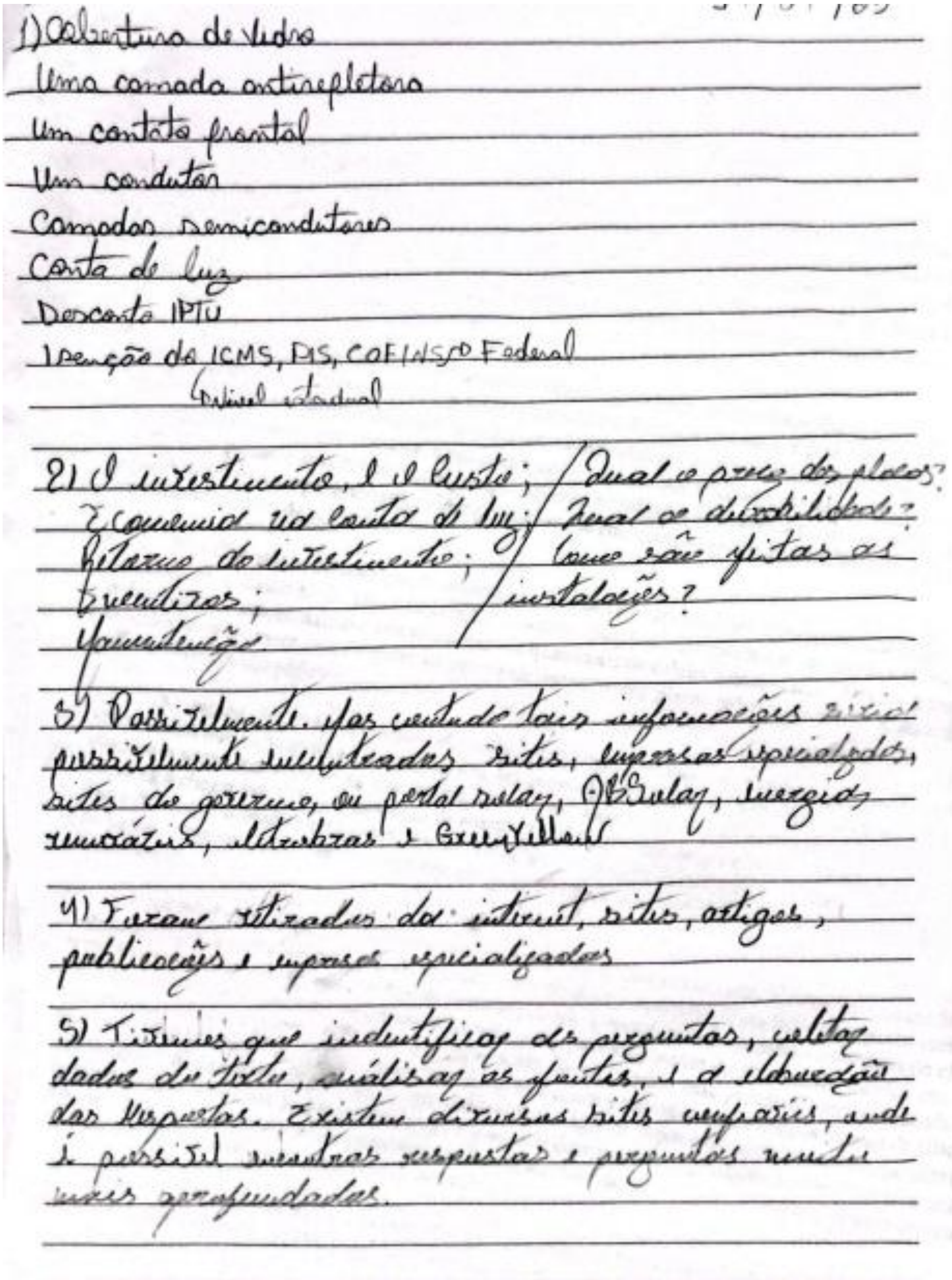
Figura 11 – resultados do grupo 4.



1- Quais fatores devem ser considerados para responder a essa pergunta?
Custo de aquisição das placas fotovoltaicas
Economia gerada na conta de luz (até 90% de redução)
vida útil das placas (média de 25 a 30 anos).
incentivos fiscais
manutenção e durabilidade dos sistema
tempo de retorno do investimento.
2- Que questionamentos surgem a partir dessa investigação?
Quanto custa, em média, instalar um sistema fotovoltaico residencial?
Em quanto tempo o investimento se paga?
Existem linhas de financiamento disponíveis?
3- você possui os dados necessários para responder à pergunta?
Sim, como a economia, incentivos e etc.
4- Quais recursos foram utilizados para buscar as respostas?
texto-base da atividade, sites especializados, como portais de energia Solar.
5- Registro do caminho percorrido até a resposta final:
Leitura e análise do texto base.
0- Qual é o custo-benefício da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia residencial?
Economia na conta de luz, incentivos fiscais, sustentabilidade, vida útil longa, valorização do imóvel.

Fonte: autor.

Figura 12 – resultados do grupo 4.


1) Cobertura de vidro
Uma camada antirefletora
Um contato frontal
Um condutor
Camadas semicondutoras
Conta de luz
Desconto IPTU
Isenção do ICMS, PIS, COFINS, Federal
(nível estadual)

2) O investimento, e o custo; / Qual o preço das placas?
Economia na conta de luz; / Qual a durabilidade?
Retorno do investimento; / Como são feitas as
Incentivos; / instalações?
Manutenção.

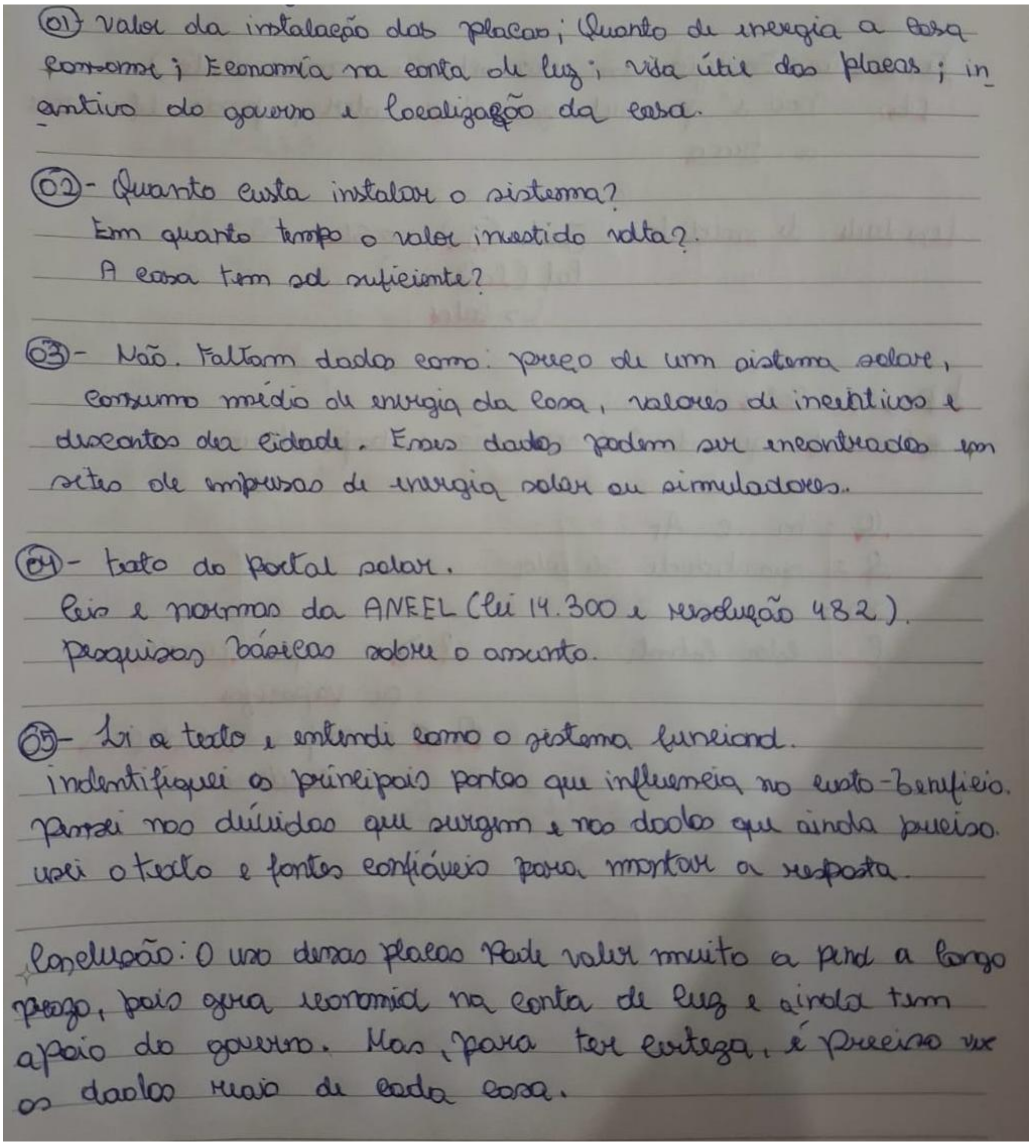
3) Possivelmente, nas contendo tais informações sites possivelmente selecionados sites, empresas especializadas, sites do governo, ou portal solar, Absolar, energias renováveis, Eletrobras e GreenYellow

4) Foram retirados da internet, sites, artigos, publicações e empresas especializadas

5) Técnicas que identificar as perguntas, coletar dados do texto, analisar as fontes, e a elaboração das respostas. Existem diversos sites confiáveis, onde é possível encontrar respostas e perguntas muito mais aprofundadas.

Fonte: autor.

Figura 13 – resultados do grupo 5.


01) Valor da instalação das placas; Quanto de energia a casa consome; Economia na conta de luz; vida útil das placas; incentivo do governo e localização da casa.

02- Quanto custa instalar o sistema?
Em quanto tempo o valor investido volta?
A casa tem sol suficiente?

03- Não. Faltam dados como: preço de um sistema solar, consumo médio de energia da casa, valores de incentivos e descontos da cidade. Esses dados podem ser encontrados em sites de empresas de energia solar ou simuladores.

04- texto do Portal solar.
Leis e normas da ANEEL (lei 14.300 e resolução 482).
Pesquisas básicas sobre o assunto.

05- Li o texto e entendi como o sistema funciona.
indentifiquei os principais pontos que influencia no custo-benefício.
Pensei nas dúvidas que surgem e nos dados que ainda preciso.
usei o texto e fontes confiáveis para montar a resposta.

Conclusão: O uso dessas placas pode valer muito a pena a longo prazo, pois gera economia na conta de luz e ainda tem apoio do governo. Mas, para ter certeza, é preciso ver os dados reais de cada casa.

Fonte: autor.

Nesse contexto, podemos observar que inicialmente os questionamentos e análises feitos pelos grupos giram em torno dos equipamentos necessários, mão de obra, valores de custo das peças, leis que regem a instalação, benefícios da instalação, como a instalação é feita, onde é viável instalar as placas, dentre outras. Portanto, o que foi feito pelos alunos está em sintonia com a nossa análise a *priori*, de forma mais específica podemos observar relações com as perguntas Q1, Q2, Q3 e Q4, além de relações de aproximação com algumas das perguntas derivadas de cada uma dessas categorias. Assim, justificamos o proceder da proposta fazendo uso das perguntas construídas durante a análise a *priori*, dado que uma aplicação integral e avaliação da proposta não foi possível e, por consequência, também ressaltamos que não será possível uma análise a *posteriori* completa visto que ela necessita de uma análise *in vivo* completa.

3.1 Resumo da abordagem

A abordagem como proposta nesse trabalho tem características que a fazem ser pouco conectada com a tecnologia, isto é, ela é ideal para escolas que não possuem sala de informática ou que ela não tenha capacidade para todos os alunos da sala, pois não faz uso de softwares que necessitam de computadores capazes ou outros programas do tipo. Contudo, em alguns momentos o acesso a um navegador de internet para pesquisas se faz necessário e o uso do celular e livros também.

Além disso, no Anexo G, temos a presença de um cronograma para a aplicação com as etapas semanais e sugestões para a divisão de aulas. Esta abordagem inicialmente tem duração prevista de 2 meses, caso o professor aplique-a em suas 4 aulas de matemática semanais. De outro modo, caso o professor aplique em outra disciplina, como por exemplo, Aprofundamento de Ciências da Natureza e Matemática, que possui duas aulas semanais, a duração passa a girar em torno de 4 meses e um ajuste do cronograma se faz necessário. Por fim, propositalmente foram deixados espaços em branco no cronograma, eles servem para não deixar que atrasos na duração inicial prevista ocorram, além de possibilitar estender momentos que o professor julgue que seja necessário mais tempo.

Com relação as avaliações temos a presença de 3 instrumentos avaliativos distintos, tais instrumentos podem ser encontrados nos anexos e estão descritos na seção 3.4. De forma resumida, sempre que um grupo for apresentar ele poderá ser avaliado de acordo com os critérios socioemocionais da BNCC. Além disso, enquanto avançamos na proposta, temos a presença de atividades que podem ser utilizadas para uma avaliação qualitativa das técnicas, teorias, habilidades e competências adquiridas. Por fim, temos uma última avaliação que é feita a partir do relatório final produzido pelos alunos.

A partir das etapas da atividade de modelagem propostas por Biembengut e Hein (2019), podemos classificar e resumir a abordagem, sobre a ótica da modelagem, proposta da seguinte forma:

1ª Etapa (interação): nos momentos iniciais abordados pelos tópicos das questões 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 os estudantes começam a reconhecer a situação-problema e a se familiarizar. Para isso, os estudantes passam pelo momento de confecção e organização do percurso de estudo e pesquisa. Além disso, também temos os momentos de apresentação de resultados e as interferências do professor visando o aprendizado a partir da visita à alguma obra/conteúdo.

2ª Etapa (matematização): nos tópicos das questões 3.1.3, 3.2.2, 3.3.1 os estudantes buscam formular a resolução do problema a partir dos diversos modelos que o compõem, formados a partir das outras atividades feitas em busca das respostas de outras questões, os telhados e o custo, os telhados e seu ângulo, a geração de energia de cada imóvel.

3ª Etapa (modelo matemático): Interpretação da solução e validação do modelo. Para tal, cada grupo irá apresentar a sua resposta, baseada em seu imóvel, para a pergunta inicial Q-0: "Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?" apresentando também os "minimodelos" encontrados na etapa de matematização e seus impactos na construção da resposta.

3.1.1 Passos iniciais e momentos introdutórios

Para a primeira parcela de 50 minutos, ou seja, a primeira aula, é imprescindível apresentar aos alunos o que será feito. Neste caso, precisamos explicar a eles como as próximas aulas irão funcionar, isto é, é preciso comentar com eles sobre a inversão de papéis que irá ocorrer e que eles não poderão ficar passivos para que a metodologia tenha andamento e funcionamento. Ou seja, é preciso contar que eles farão o papel de investigadores a respeito de um tema e que eles precisarão organizar-se em grupos para tal. Caso haja perguntas a respeito, elas devem ser solucionadas.

Também é necessário comentar com os alunos que iremos trabalhar com o tema de placas solares, com isso, é certo que haverá alguma estranheza por parte de alguns. É possível pensar que eles perguntarão coisas do tipo: "Como assim placas solares?" ou "Mas a aula é de Matemática, como pode isso?". Neste momento em que eles estão curiosos com a mudança, já temos uma oportunidade para iniciar o percurso de estudo e pesquisa com a nossa questão inicial: "Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?

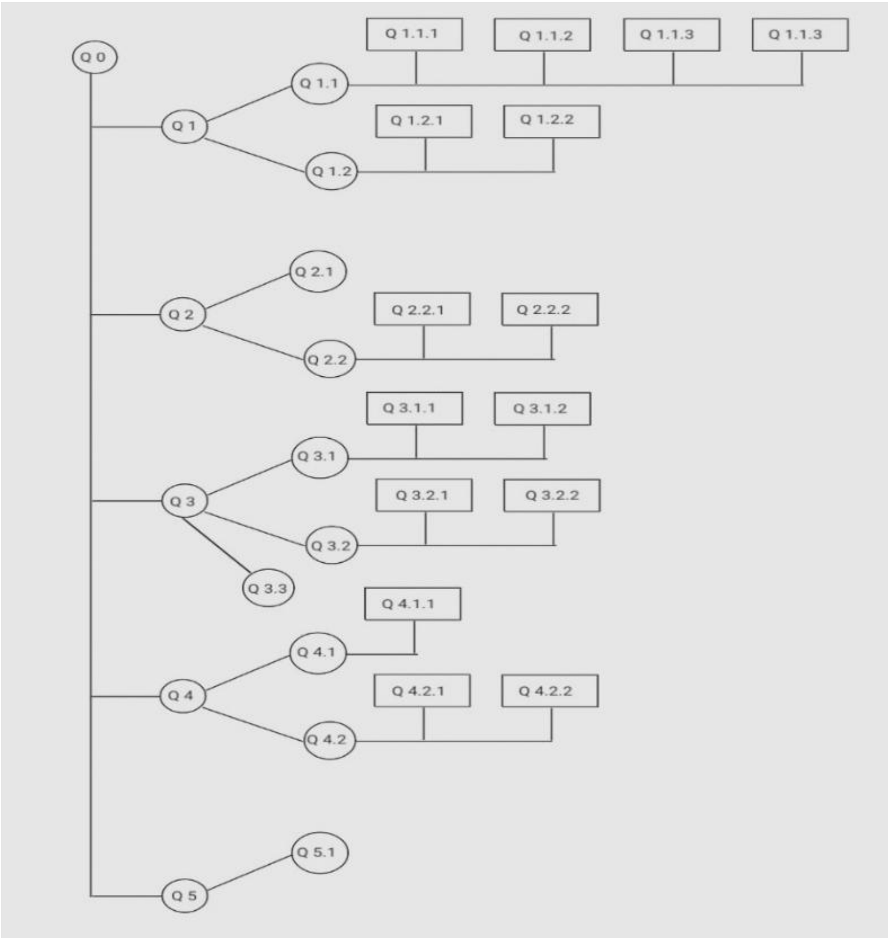
Agora entramos na segunda aula, este é o momento em que se deve fazer os alunos refletirem sobre o que é preciso para responder essa pergunta. Nessa segunda aula é necessário reunir todas as dúvidas, perguntas e sugestões dos alunos e que elas sejam salvas em anotações. É a partir desses registros que serão montados os grafos das perguntas relacionadas à questão inicial e, também, tais registros serão utilizados para os próximos passos e atividades.

Caso o professor veja que existem muitas perguntas e os alunos ainda apresentam sugestões e dúvidas no fim da segunda aula, o tempo para tal atividade pode ser aumentado para uma terceira aula. Além disso, após reunidas as perguntas, é necessário que o professor realize em seu momento de planejamento a análise delas. Por fim, aqui iremos considerar que não foi necessário tempo extra, para simplificar a indexação das aulas.

Concluídos os registros, a terceira aula irá consistir em nossa primeira atividade com os alunos/professor. Tal atividade será organizar o grafo de perguntas derivadas do nosso PEP. Queremos que os alunos reflitam e categorizem as perguntas de acordo com a semelhança no assunto de que elas tratam e quais perguntas podem nos ajudar a responder outras.

Como não foi possível aplicar em sala de aula essa proposta, iremos utilizar as perguntas hipotéticas e esperadas citadas anteriormente para que o leitor possa entender melhor qual o objetivo da aula 3. Sendo assim, queremos sair das perguntas bagunçadas/caóticas registradas na aula 2 e chegar a algo como na figura a seguir:

Figura 14 – exemplo de uma possível forma de registro e organização das questões.



Fonte: autor.

Na quarta aula, ocorrerá a formação dos grupos e a divisão temática das perguntas, assim poderemos reorganizar o grafo de acordo com a semelhança de temas.

Como visto na figura anterior, os questionamentos ficarão divididos em 5 categorias. Para a quinta aula, os alunos irão iniciar o processo de investigação dessas 5 categorias. Divididos em 5 grupos (caso existam mais categorias de perguntas, os alunos podem ser divididos em mais grupos), cada grupo irá ser o responsável por investigar e tentar solucionar, ou teorizar como pode ser solucionado as perguntas presentes na categoria um com o objetivo de montar uma apresentação sobre essa categoria, vale ressaltar que os alunos podem tentar responder todas as perguntas nesta aula, a escolha da categoria é apenas para dar um norte a cada grupo. Para tal, eles podem utilizar quaisquer meios disponíveis, sejam livros, pesquisas na internet (no computador da escola ou em seu próprio telefone). Para a sexta e sétima aula, os alunos podem continuar a pesquisa, contudo, na parcela final da aula, instruímos os alunos a prepararem uma apresentação para a próxima aula sobre o que eles encontraram como resposta da categoria um.

Para a oitava aula, temos a apresentação das repostas da categoria um (Q-1 e suas perguntas derivadas). Conforme os alunos avancem em sua explicação, será possível perceber que uma resposta exata para a primeira pergunta (Q-1) é difícil de se formular, pois existem muitas condições que podem influenciar na capacidade de geração elétrica da casa. A partir daí, o professor irá propor uma atividade para melhor compreensão a respeito desse fato que será feita na nona aula, ela está disponível a seguir.

3.1.2 Atividade: analisando telhados e o custo

Com esta atividade, temos como objetivos chegar a um meio para se responder à pergunta Q-1 de forma geral, além de que os alunos poderão aprender sobre áreas de figuras planas durante este processo. Para tal, iremos modelar, em conjunto com os alunos, o custo em função da área que o telhado possui. Com o propósito de atingir esses objetivos, seguimos a linha de modelagem do caso 3 pensada por Barbosa (2001).

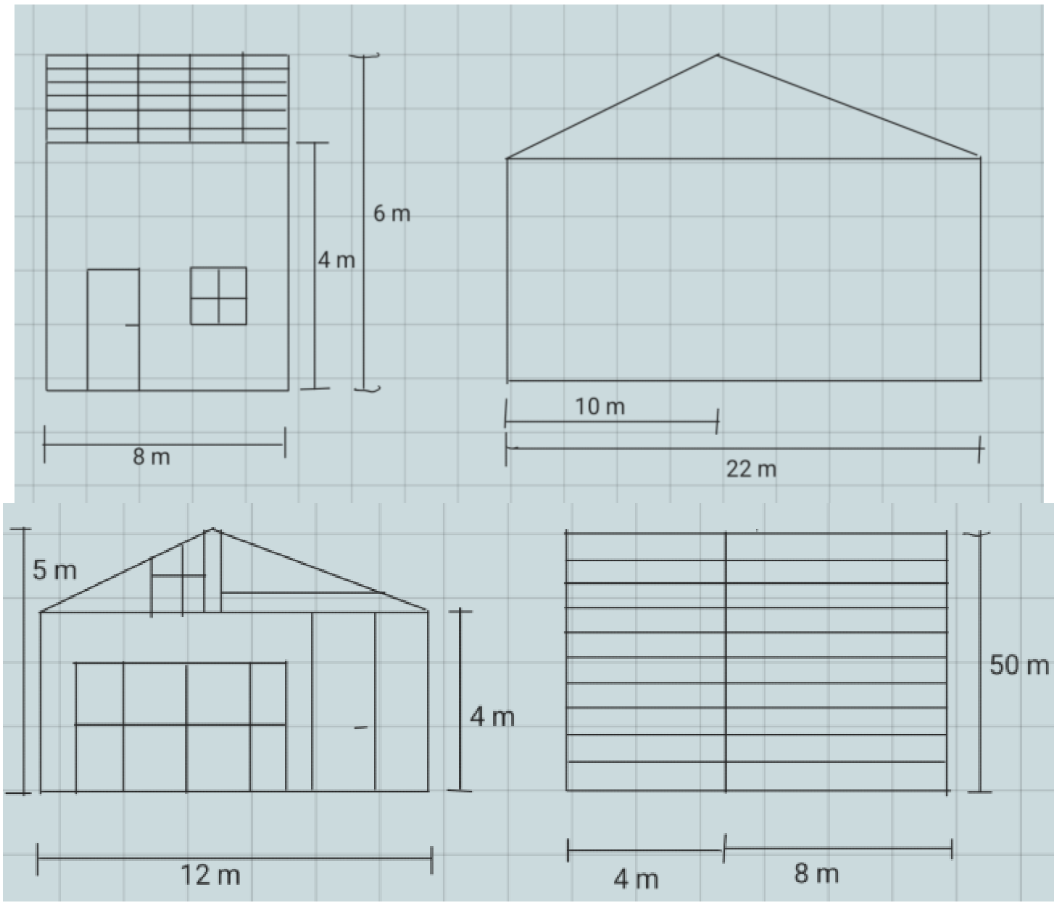
Em detalhes, temos que a criação do problema já surgiu anteriormente na tentativa de dar uma resposta mais completa e específica para Q-1. Nesta atividade, tratamos da simplificação do problema a partir da utilização de imóveis fictícios para a análise do custo em função da área. Tais imóveis farão parte da coleta de dados feita pelos alunos/professor. Além disso, com relação à etapa de pesquisa, é necessário buscar por painéis solares e seu custo, como também, a forma de se calcular a área dos telhados. Por fim, a solução é dada quando chegamos a uma forma de relacionar essas variáveis (área e custo) e calcularmos o valor. Ademais, é necessário também entender que tal processo não é limitado para os imóveis fictícios em questão. Assim, propomos que a atividade possa ser percorrida da maneira que ela será apresentada a seguir.

O espaço que a pessoa apresenta para instalar suas placas é um fator capaz de influenciar amplamente a capacidade de geração elétrica que a residência irá possuir e os custos com placas. Esta atividade pretende relacionar tais fatos com os conteúdos de áreas de figuras.

Inicialmente, a seguinte situação problema será apresentada:

Observe as seguintes casas e seus telhados:

Figura 15 – vista frontal e lateral da primeira casa e vista frontal e superior da segunda.



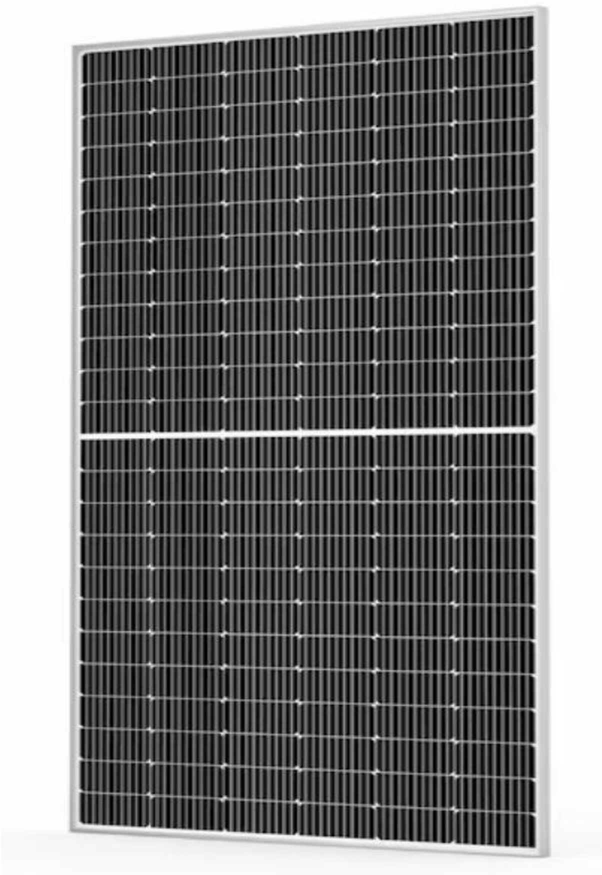
Fonte: autor.

Qual das casas apresenta um maior custo de instalação das placas solares?

Quanto é o custo de instalação das placas em cada casa?

Se forem utilizadas placas do modelo a seguir, feitas de silício policristalino, temos um custo de 399 por placa segundo dados da NeoSolar (2024). Para critérios de simulação de instalação é possível utilizar a área da placa como sendo 2 m^2.

Figura 16 – painel solar policristalino.



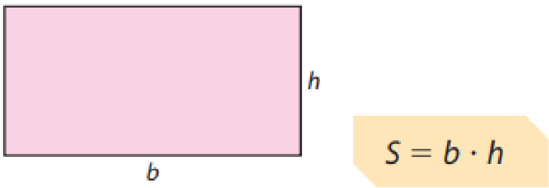
Fonte: Freepik, 2025.

É fácil responder à primeira pergunta, a casa que apresentar o maior telhado também apresentará um custo maior, pois mais placas serão usadas no processo. Para a segunda pergunta, precisamos determinar o quanto de espaço disponível pode ser usado para a instalação das placas.

Visto que as placas são planas e ficarão sobre o telhado, essa quantidade de espaço disponível pode ser dada a partir do conceito de área. Dessa forma, iniciamos a descrever o conceito da área de polígonos. A área de uma figura plana é uma medida da superfície de uma figura, para seu cálculo é necessário utilizar algumas fórmulas especificas por figuras.

Em nosso exemplo inicial temos a presença de retângulos, dessa forma, é necessário revisitarmos sua fórmula, que é dada por:

Figura 17 - área do quadrado.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Assim podemos ver que a quantidade de espaço disponível na primeira casa pode ser encontrada através da largura e comprimento do telhado. Dessa forma, temos que a largura do telhado é de 8 metros, mas o comprimento do trecho de subida e do trecho de descida são diferentes e podem ser encontradas a partir de Pitágoras. Daí temos que os comprimentos são:

$$c_s^2 = 10^2 + 2^2 = 104\ c_s = \sqrt{104} \cong 10,2$$

$$c_d^2 = 12^2 + 2^2 = 148\ c_d = \sqrt{148} \cong 12,2$$

Portanto, a área do primeiro telhado é dada por:

$$S = 8 \times 10,2 + 8 \times 12,2 = 179,2$$

O que totaliza 89 placas de 2 m^2.

Já na segunda casa, temos um comprimento de 50 metros em ambas as partes de subida e descida do telhado. Para as larguras também podemos utilizar Pitágoras, da seguinte forma:

$$l_s^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Longrightarrow\ l_s = \sqrt{17} \cong 4,1 \Longrightarrow\ l_d^2 = 8^2 + 1^2 = 65 \Longrightarrow l_d = \sqrt{65} \cong 8,1$$

Assim, a área do telhado é dada por:

$$S = 50 \times 4,1 + 50 \times 8,1 = 610$$

Portanto, são necessárias 305 placas de 2 m^2 para cobrir esse telhado.

Dessa forma, o custo para cobrir o telhado da primeira casa com o máximo de placas possível é dado por:

$$T_1 = 89 \times 399 = 35511$$

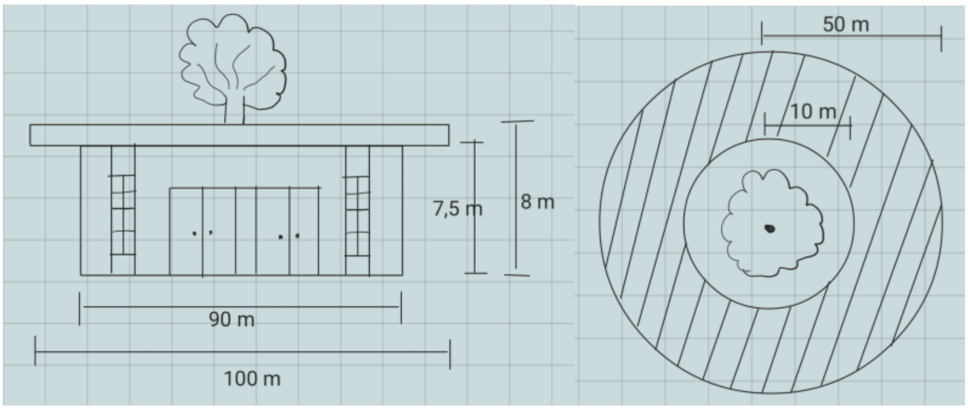
Para a segunda casa:

$$T_2 = 305 \times 399 = 121695$$

Portanto, a casa 2 é a que apresenta o maior custo.

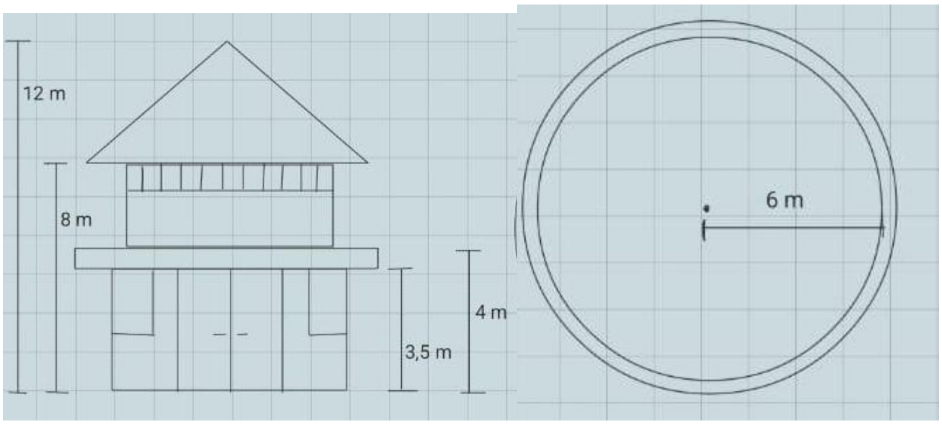
Finalizado tal momento introdutório da atividade apresentamos em sequência uma lista de imóveis hipotéticos em que cada grupo ficará responsável por responder os questionamentos do PEP com base neles, incluindo a pergunta Q-1 que trata dos custos, dessa vez com dados mais concretos presentes na lista de imóveis. Inicialmente, os alunos podem apresentar como custo o valor bruto das placas solares, contudo, conforme mais perguntas vão sendo respondidas, a complexidade do que gera o custo aumenta e eles devem atualizar tal valor de acordo. A seguir apresentamos algumas imagens dos imóveis fictícios, com vista frontal e superior, a descrição e dados podem ser encontrados no Anexo A.

Figura 18 – imóvel 1.



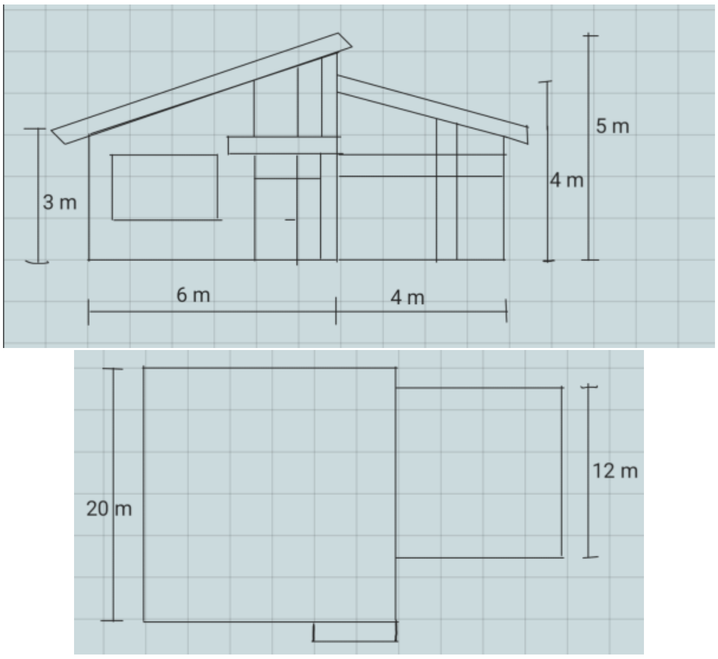
Fonte: construído pelo autor.

Figura 19 – imóvel 2.



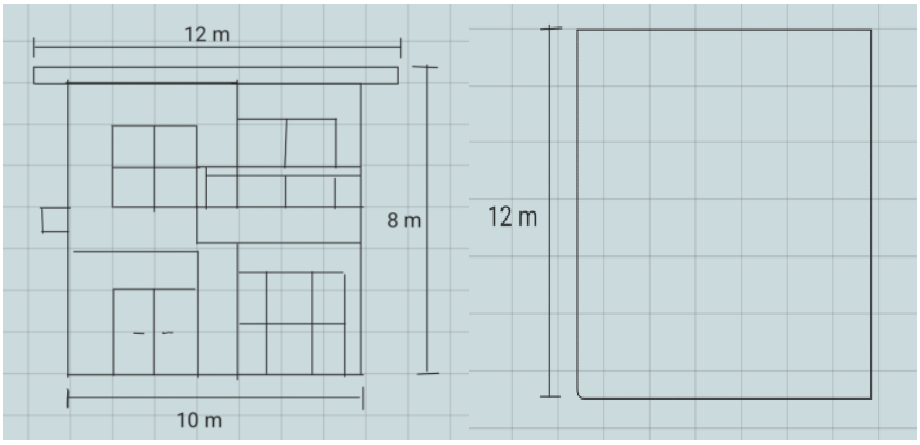
Fonte: construído pelo autor.

Figura 20 – imóvel 3.



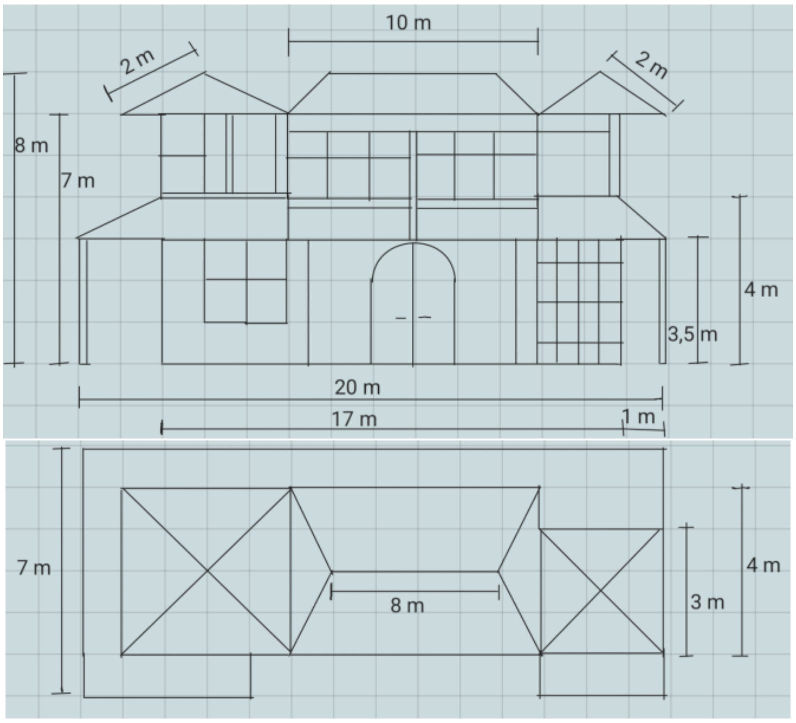
Fonte: construído pelo autor.

Figura 21 – imóvel 4.



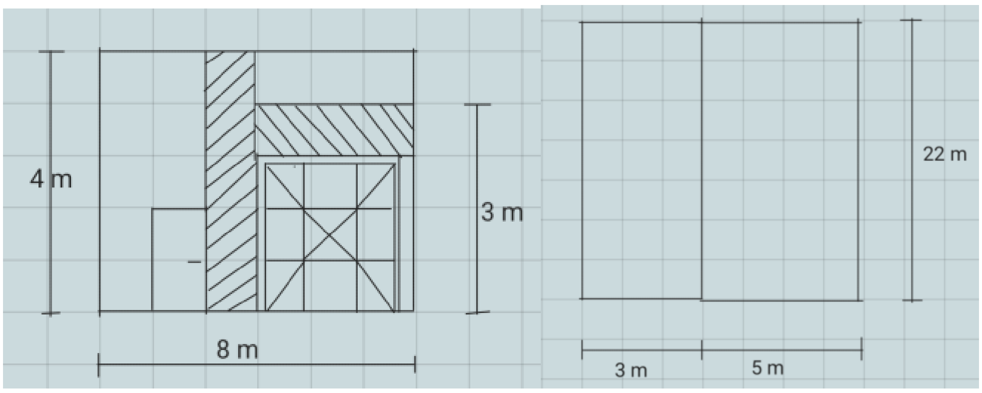
Fonte: construído pelo autor.

Figura 22 – imóvel 5.



Fonte: construído pelo autor.

Figura 23 – imóvel 6.



Fonte: construído pelo autor.

É recomendado ao professor que o mesmo que imprima e faça um sorteio de um imóvel por grupo para dinamizar mais as interações, tal documento para impressão pode ser encontrado no Anexo A. Com o intuito de pensar nos diversos formatos de superfícies para a instalação das placas é necessário complementar o estudo fazendo uma visita às obras a respeito de áreas de figuras. Dessa maneira, saímos da nossa atividade e partimos para a décima aula, agora motivados ao compreender a utilidade do assunto, para um estudo da teoria, apresentado na seção a seguir.

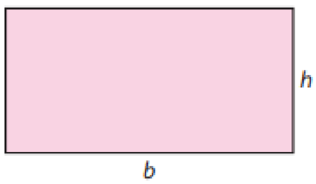
3.1.3 Teoria: Formalizando e conhecendo mais sobre áreas de figuras

Neste momento, buscamos ampliar a visão sobre áreas de figuras aprendendo mais sobre outras figuras e propriedades delas. Anteriormente, revisitamos a fórmula para o cálculo da área de um retângulo, agora, desejamos retomar formalmente esse conceito, ao mesmo tempo que ampliamos a teoria para várias outras figuras e justificamos formalmente alguns casos.

No dia a dia as áreas que precisamos determinar nem sempre são polígonos perfeitos, contudo, saber como realizar esse cálculo nos ajuda a fazer uma boa aproximação dessas áreas. Listaremos aqui as mais comuns:

- Área do retângulo: A área "S" de um retângulo de lados de medidas b e h é dada pelo produto da medida da base b pela medida da altura h. Ou seja, $S = b * h$.

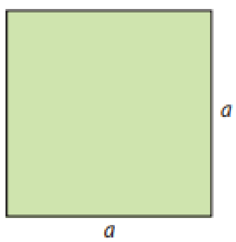
Figura 24 – retângulo.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do quadrado: todo quadrado é um retângulo com lados de medidas iguais. Logo, a área "S" de um quadrado é igual ao produto das medidas de seus lados.

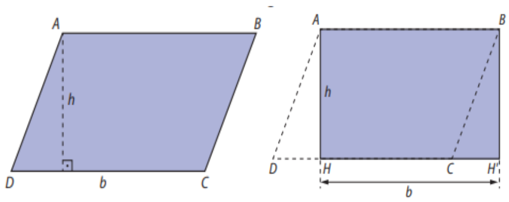
Figura 25 – imagem de um quadrado.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do paralelogramo: considerando um paralelogramo ABCD, com base de tamanho b e altura h, projetando de maneira ortogonal os vértices A e B sobre a reta CD, obtemos mais dois pontos H e H' que formam um retângulo ABHH'. Como os triângulos AHD e BH'C são semelhantes pelo caso lado, ângulo e ângulo oposto. Assim, eles têm a mesma área. Portanto, a área do paralelogramo é dada pelo produto da base pela altura.

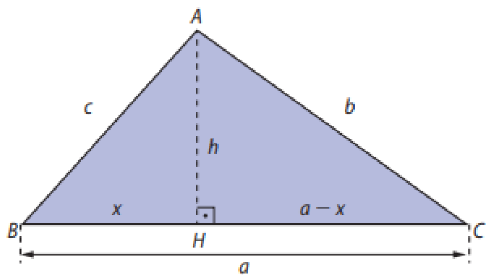
Figura 26 – paralelogramo e sua transformação em retângulo.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do triângulo: a área "S" do triângulo ABC é igual à metade do produto da medida da base pela altura relativa a essa base. Uma outra forma de calcular é fazendo uso da fórmula de Heron: $S = \sqrt{p * (p - a) * (p - b) * (p - c)}$, donde p é o semiperímetro do triângulo e $a, b \; e \; c$ são as medidas de seus lados.

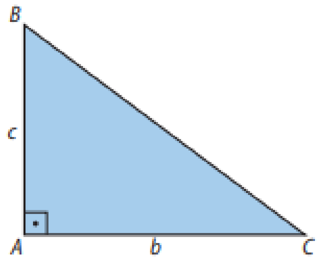
Figura 27 – imagem de um triângulo.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do triângulo retângulo: sejam as medidas dos catetos dadas por b e c a área do triângulo retângulo é dada por: $S = \frac{b*c}{2}$.

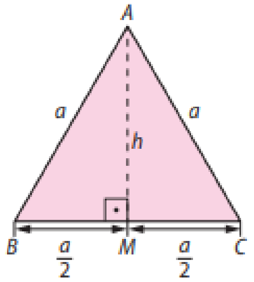
Figura 28 – triângulo retângulo.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do triângulo equilátero: sendo a a medida de seus lados, sua área "S" é dada por: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

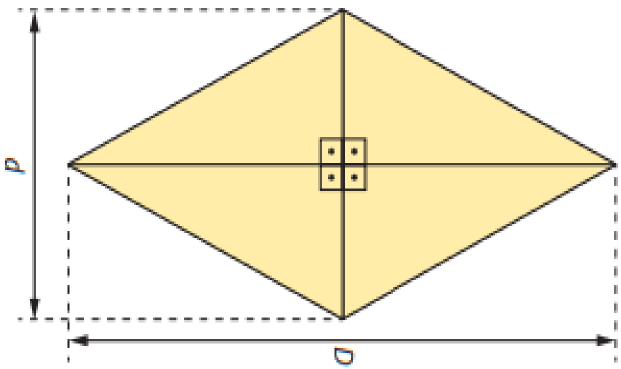
Figura 29 – triângulo equilátero.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do losango: observe que o losango pode ser partido em quatro triângulos congruentes que apresentam uma mesma área. Assim, sua área "S" é a soma das áreas desses quatro triângulos, isto é: $S = \frac{D*d}{2}$.

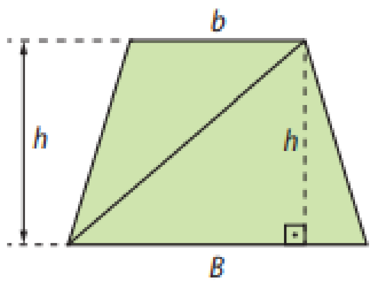
Figura 30 – imagem de um losango.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do trapézio: vamos considerar um trapézio cujas base maior, base menor e altura medem B, b e h, respectivamente. Traçando uma diagonal nesse trapézio, obtemos dois triângulos: um de base B e altura h e outro de base b e altura h. A área “S” do trapézio é a soma dessas áreas, então: $S = \frac{(B+b)*h}{2}$.

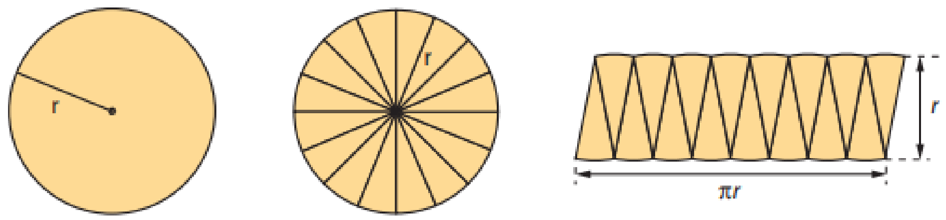
Figura 31 – imagem de um losango.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do círculo: considerando um círculo de raio r, dividindo-o em um número par de partes iguais, podemos formar uma figura que lembra um paralelogramo. Quanto mais aumentarmos essa quantidade de partes, mais a base se aproxima do comprimento de metade da circunferência. Assim, quanto mais aumentarmos a quantidade de partes, mais a figura se aproxima de um paralelogramo de lados πr e r. Realizando esse processo de forma ilimitada de vezes a área do círculo e a do paralelogramo coincidem, logo, a área do círculo de raio r é dada por $S = \pi r^2$.

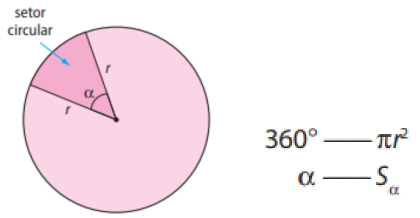
Figura 32 – círculo, seu recorte e reorganização.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do setor circular: para calcular a área do setor circular basta realizar uma regra de 3 simples a partir do ângulo central α:

Figura 33 – setor circular e sua fórmula.

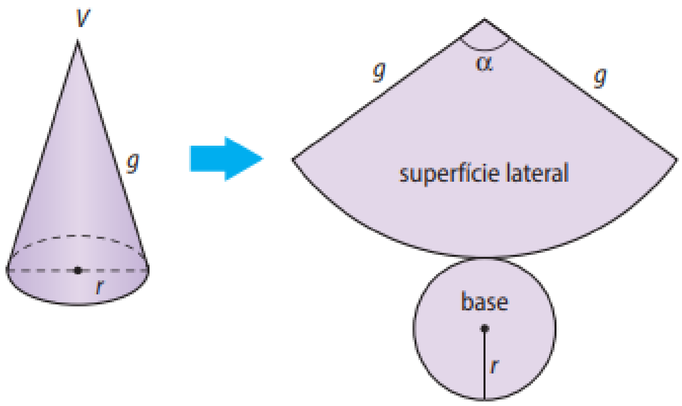


$$S_\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi r^2}{360°}$$

Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área da superfície lateral de um conte reto: planificando a superfície de um cone reto de base r e geratriz g. A área da superfície lateral de um cone corresponde à área de um setor circular de raio g (geratriz do cone) e arco de comprimento $2\pi r$, o qual é o comprimento da circunferência da base do cone. Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do arco correspondente, podemos, dessa forma, determinar sua área, dada por: $S = \pi r g$.

Figura 34 – superfície do cone planificada.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Finalizadas essas explanações, temos uma lista de atividades (Anexo C), visando fixar os conceitos e de servir como instrumento avaliativo, é recomendado que a atividade seja realizada de forma individual e que o professor recolha a mesma para uma avaliação qualitativa dos alunos. Tais questões foram retiradas do livro Prisma matemática: Geometria.

3.2 Momentos intermediários

Com relação a décima primeira aula, os alunos deverão ajustar as respostas da categoria de perguntas um. Após os grupos apresentarem o que eles determinaram como a resposta da pergunta Q-1 e finalizadas as imersões e aprendizados propostos anteriormente, é necessário dar continuidade a resposta das outras categorias de perguntas. Outra categoria que nos permite adentrar em mais outros assuntos é a cinco. A partir dela podemos, de forma interdisciplinar, tratar de ângulos. Portanto, teremos apresentações, na décima segunda aula, na qual os alunos irão tratar da categoria 5.

Como já mencionado, para a resposta da questão Q-5.1, os alunos possivelmente encontrarão que as placas, idealmente, devem fazer um ângulo de 90 graus com os raios solares. Contudo, sistemas que fazem um rastreamento da posição solar e ajustam as placas conforme o movimento do sol são mais raros. Dessa forma, o usual é fazer uso de uma medida para o ângulo da placa dada a partir da latitude e do azimute (Freita; Júnior, 2019).

Portanto, para que os alunos consigam responder com propriedade acerca do questionamento Q-5.1 é necessária uma visita a algumas outras obras. Tal visita será feita por meio da interdisciplinariedade na décima terceira aula.

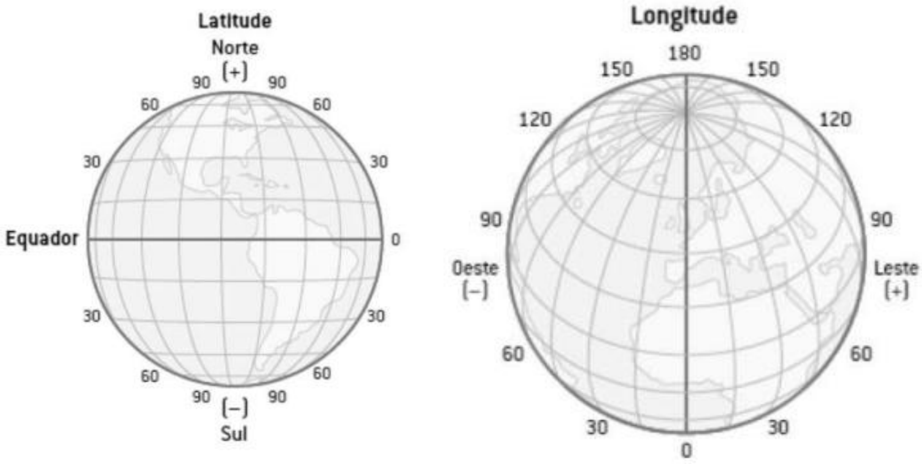
3.2.1 Interdisciplinaridade entre a Matemática e a Geografia.

Nos sistemas de localização são utilizadas linhas imaginárias, linhas essas traçadas para facilitar a localização de elementos e fenômenos na superfície terrestre. O cruzamento dessas linhas horizontais e verticais representam um sistema de localização que mostra com exatidão a posição de um determinado ponto da superfície terrestre. (Sampaio, 2022)

Um dos sistemas de localização mais comuns no planeta faz uso de paralelos e meridianos. Os paralelos são linhas que dão a volta completa na terra no sentido leste – oeste, o principal deles é o equador, além disso, eles também cumprem a função de separar as zonas térmicas. Os meridianos são linhas que cortam o planeta de forma perpendicular aos paralelos, ou seja, são linhas que cortam a Terra no sentido norte – sul, o meridiano de Greenwich é o ponto de referência deles. (Sampaio, 2022)

Cada ponto do cruzamento entre um paralelo e um meridiano é uma coordenada geográfica. A distância entre os paralelos é chamada de latitude e entre os meridianos é chamada de longitude. Sua medida é dada em graus. (Sampaio, 2022)

Figura 35 – latitude e longitude.



Fonte: Geo-logos, 2021.

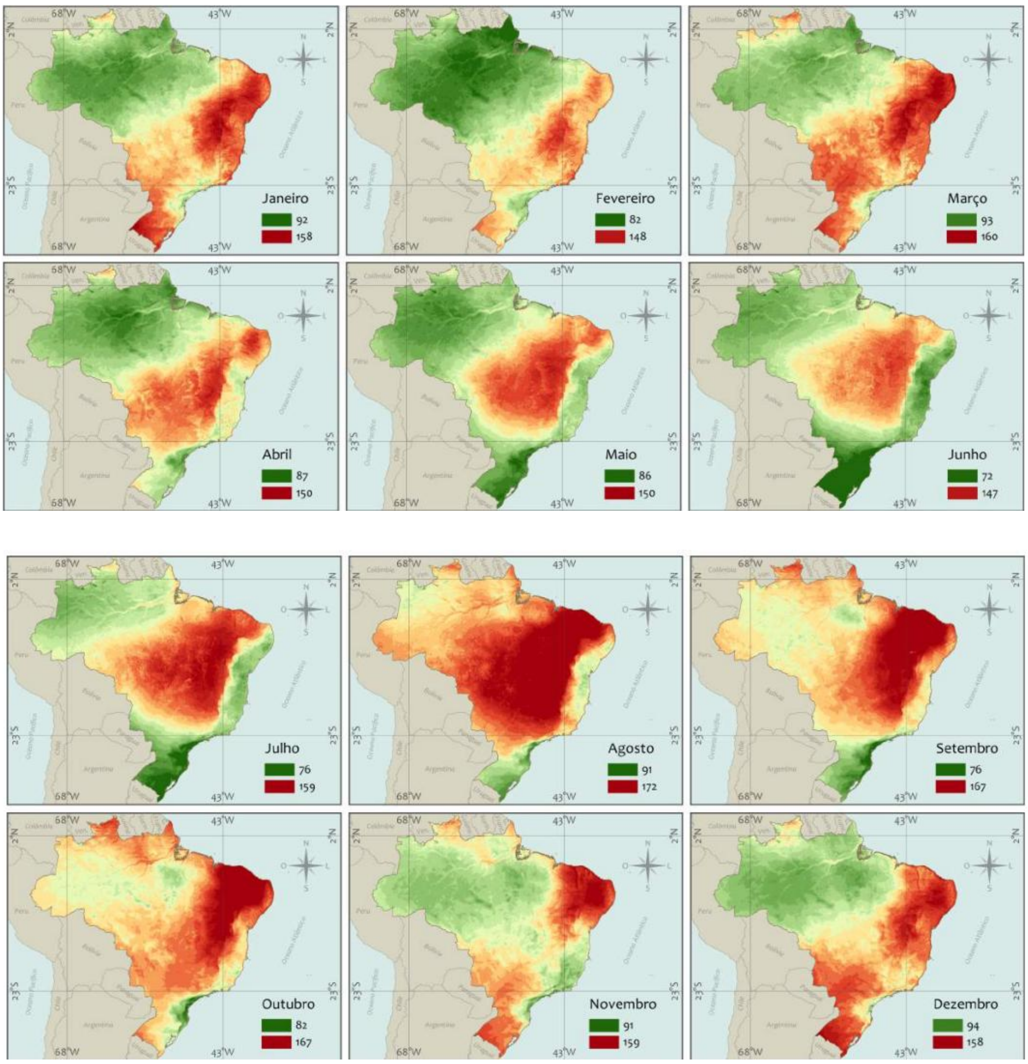
Portanto, podemos observar que a latitude e longitude são apenas as regiões formadas por duas retas. Dessa forma, latitude e longitude são representações de ângulos, já que um ângulo é a região formada a partir de duas retas.

Agora, a partir da latitude e longitude conseguimos encontrar os ângulos em que as placas devem ficar, contudo, a maioria dos telhados não são planos e paralelos ao chão. Portanto, é necessário encontrar uma forma de determinar o ângulo do próprio telhado para que as placas sejam instaladas de forma correta. Para tal processo podemos utilizar alguns conceitos da trigonometria de triângulos.

Outro conceito importante da geografia é a sazonalidade, ele se refere às mudanças cíclicas que ocorrem ao longo do ano, geralmente são previsíveis. Normalmente essas variações possuem um intervalo específico inferior a um ano e afetam muitas coisas como o clima, a vegetação, a agricultura e o turismo. Contudo, temos exceções como os fenômenos: El Niño, aquecimento das águas do Oceano Pacífico e La Niña, correspondente ao resfriamento dessas águas. Tais fenômenos não possuem sazonalidade explicita, mas são cíclicos, isto é, um seguido pelo outro, além disso, eles podem causar impactos no clima do Brasil.

Em nosso caso, a incidência de luz solar é muito importante e é um fator sazonal. O Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) possui um sistema que mapeia o potencial solar mensal de todos os estados do país. A partir desse sistema podemos visualizar os efeitos da sazonalidade na geração solar nas figuras a seguir. Além disso, o site também conta com tabelas sobre a irradiação média mensal de diversas regiões ao longo dos meses, informações essenciais para o cálculo da geração de energia. Tais informações podem ser encontradas em seu site: https://labren.ccst.inpe.br/atlas_2017.html. Por exemplo, em Maceió – AL, acessamos o atlas, escolhemos o estado e o município, encontramos o ID, pesquisamos a partir do ID no site e verificamos que no mês de janeiro a incidência média é de $5376 \frac{Wh}{m^2.\ dia}$.

Figura 36 – potencial de geração solar ao longo dos meses.



Fonte: adaptado de Pereira *et al*. (2017).

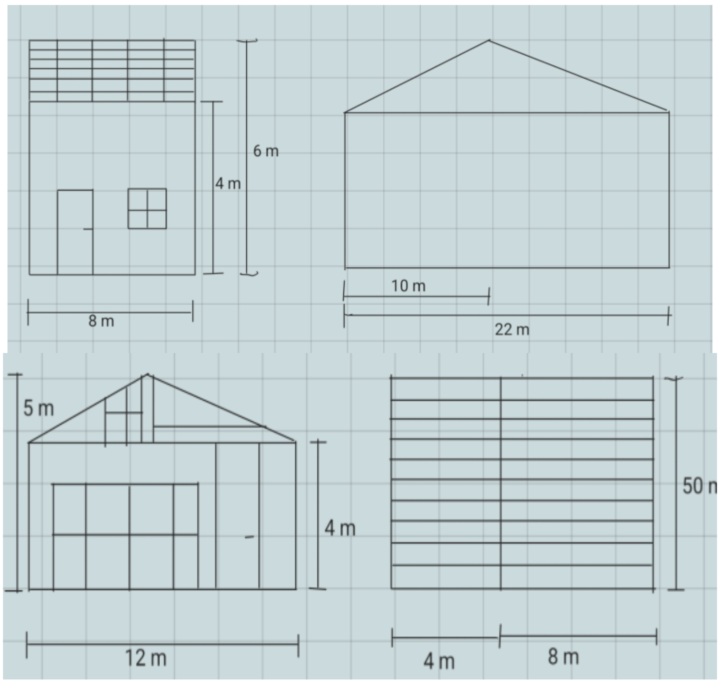
Após esse momento interdisciplinar, os alunos passarão a ter o entendimento sobre como os ângulos são influenciados pela posição geográfica e como a posição também tem impacto na incidência, além disso, eles também adquiriram uma noção dos impactos da sazonalidade na geração. Essa última, que ainda não foi determinada, e, quando partimos em direção a ela, precisamos saber do ângulo de instalação das placas, portanto mais uma atividade se faz necessária. Atividade que será aplicada na décima quarta aula e está presente a seguir.

3.2.2 Atividade: relacionando telhados e ângulos

Nesta atividade visamos adquirir e aprender os conhecimentos necessários para determinar o ângulo ideal de instalação das placas, considerando que os telhados das casas comumente não são paralelos ao chão. Dessa forma, seguiremos fazendo uso das duas casas que foram utilizadas na primeira atividade.

Observando os telhados podemos notar que é a suas inclinações são capazes de gerar uma discrepância com o ângulo ideal para a instalação das placas, dessa forma precisamos encontrar esse ângulo para a correta instalação

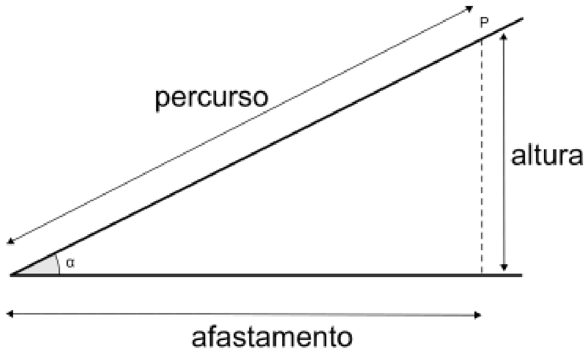
Figura 37 – vista frontal e lateral da primeira casa e vista frontal e superior da segunda.



Fonte: autor.

Observando o telhado lateralmente, podemos compará-lo a um triângulo, como na figura abaixo

Figura 38 – triângulo com associações.



Fonte: Dante (2008).

Visto que se alterarmos individualmente os valores do afastamento, altura e percurso, o ângulo e, por consequência, seu valor se alteram. Então, a partir desses valores e suas relações entre si podemos determinar o valor do ângulo. Assim, para solucionarmos o problema do ângulo dos telhados, precisamos visitar o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo. Dessa forma, partimos dos conceitos dados a seguir.

A razão entre o afastamento e o percurso é chamada de cosseno do ângulo α.

$$cos\ \alpha\ = \frac{afastamento}{percurso}$$

A razão entre a altura e o percurso é chamada de seno do ângulo α.

$$sen\ \alpha = \frac{altura}{percurso}$$

A razão entre a altura e o afastamento é chamada de tangente do ângulo α.

$$tan\ \alpha\ = \frac{altura}{afastamento}$$

Tais razões nos proporcionam um conhecimento do valor do ângulo, muitas delas organizadas em tabelas como abaixo:

Figura 39 – tabela trigonométrica comum.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

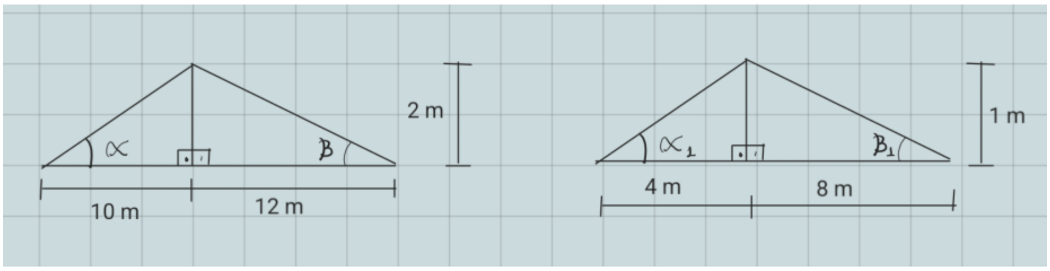
Figura 40 - tabela trigonométrica expandida.

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∃	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∃	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Fonte: Passei direto, 2018.

Dessa forma, os ângulos dos telhados iniciais, apresentados na figura a seguir, são dados da seguinte forma:

Figura 41 – ângulos presentes nos telhados.



Fonte: autor.

$$tan\ \alpha\ = \frac{2}{10} = 0{,}2 \qquad tan\ \beta\ = \frac{2}{12} = 0{,}16667$$

$$tan\, \alpha_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad tan\, \beta_1 = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

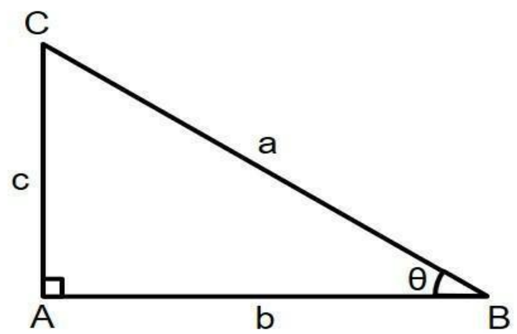
A partir da tabela presente no Anexo D, temos que os ângulos são: $\alpha = 12°$; $\beta = 10°$; $\alpha_1 = 14°$; $\beta_1 = 7°$.

Novamente, motivados pela aplicação prática dos conteúdos, podemos partir para a décima quinta aula com a formalização e aprofundamento da teoria por trás da prática.

3.2.3 Teoria: formalizando os conceitos de trigonometria a partir dos triângulos retângulos.

Anteriormente tratamos dos conceitos de seno cosseno e tangente de forma simplificada, visando a solução imediata do problema do ângulo dos telhados, contudo, é necessária a formalização teórica desses conceitos. Para tal formalização faremos uso do triângulo retângulo a seguir:

Figura 42 – triângulo retângulo em A.



Fonte: Autor.

Dessa forma,

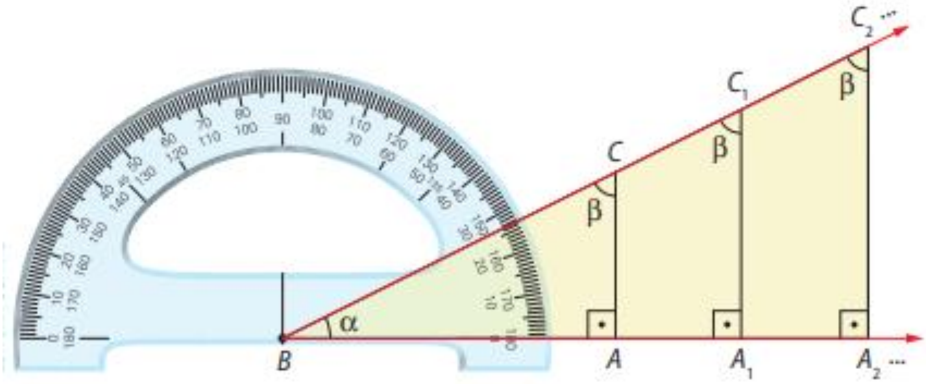
- **a** é a medida da hipotenusa, a qual é o lado oposto ao ângulo reto;
- **b** e **c** são as medidas dos catetos, sendo os segmentos que compõem o ângulo reto;
- $\underline{AC}$ é o cateto oposto ao ângulo θ;
- $\underline{AB}$ é o cateto adjacente ao ângulo θ.

As razões que verificamos anteriormente dependem apenas da medida do ângulo e não do tamanho dos lados. De fato, sobre uma das semirretas que determina um dos lados do ângulo, tomamos arbitrariamente os pontos $A, A_1, A_2, \ldots$ e, por esses pontos, traçamos segmentos perpendiculares ao lado $\underline{BA}$, que intersectam o outro lado do ângulo nos pontos $C, C_1, C_2, \ldots$, respectivamente. Obtemos, assim, os triângulos retângulos $ABC, A_1\ BC_1\ , A_2\ BC_2\ , \ldots$, que são semelhantes entre si pelo caso AA (ângulo-ângulo).

Portanto, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \cdots = K$$

Figura 43 – representação visual da demonstração anterior.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Assim, considerando o ângulo α como referência, tal relação é a razão entre o tamanho do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotensa, chamada de seno de α ($sen\ \alpha$). Portanto, escrevemos:

$$sen\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \text{ângulo}\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{AC}{BC}$$

De modo análogo podemos relacionar as razões entre a medida dos catetos adjacentes e a hipotenusa para obter o que chamamos de cosseno de α ($cos\ \alpha$). E, considerando as razões entre os catetos opostos e adjacentes do ângulo α, obtemos a tangente de α ($tan\ \alpha$). Assim, escrevemos:

$$cos\ \alpha\ = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \text{ângulo}\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa} = \frac{AB}{BC}$$

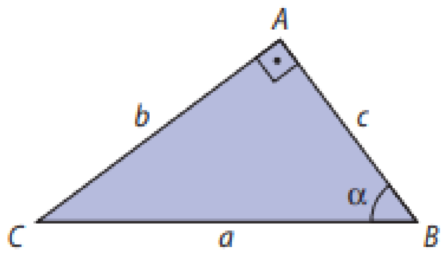
$$tan\ \alpha\ = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \text{ângulo}\ \alpha}{meidda\ do\ cateto\ adjaente\ ao\ \text{ângulo}\ \alpha} = \frac{AC}{AB}$$

Além disso, existem diversas relações envolvendo seno, cosseno e tangente de um ângulo α. A relação fundamental da Trigonometria diz que a soma do quadrado do seno de um ângulo agudo α com o quadrado do cosseno desse mesmo ângulo agudo α é igual a 1, ou seja:

$$sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha \; = 1$$

Demonstração: considere o triângulo retângulo a seguir.

Figura 44 - triângulo retângulo ABC.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Temos que:

$$sen\,\alpha = \frac{b}{a} \rightarrow sen^2\,\alpha = \frac{b^2}{a^2} \qquad cos\,\alpha \; = \frac{c}{a} \rightarrow \cos^2\alpha \; = \frac{c^2}{a^2}$$

Dessa forma, obtemos:

$$sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha \; = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Visto que o triângulo é retângulo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Portanto,

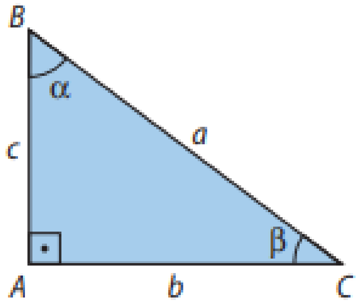
$$sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha \; = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Outra relação importante é que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento, ou seja:

$$sen\,\alpha = cos\,(90° - \alpha)$$

Demonstração: Considere o triângulo retângulo da figura a seguir.

Figura 45 – triângulo retângulo ABC reto em A.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Como $\alpha + \beta = 90°$, obtemos que $\alpha = 90° - \beta$. Logo, temos que:

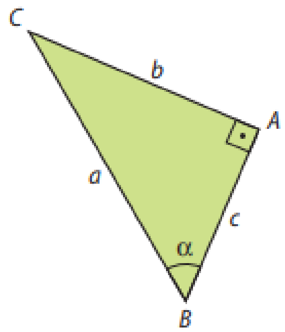
$$sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)$$

Por fim, a tangente de um ângulo agudo α é igual à razão entre o seno e o cosseno desse mesmo ângulo. Ou seja:

$$tan\ \alpha\ = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

Demonstração: Tome o triângulo da figura a seguir.

Figura 46 – triângulo retângulo.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Assim,

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a} \quad cos\ \alpha = \frac{c}{a}$$

Ao dividir o seno pelo cosseno, obtemos:

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tan\ \alpha$$

Após a formalização, uma atividade para os alunos é determinar o ângulo do telhado do imóvel do seu grupo e, em conjunto com ele, determinar o ângulo de instalação das placas com relação ao telhado (décima sexta aula), também incluímos outra atividade convencional recortada do livro de trigonometria de Bonjorno, *et al.* (2022) (ver Anexo H). Dessa forma, verificamos e fixamos os conteúdos aprendidos e, ainda, concordamos com Biembengut e Hein (2019), quando eles afirmam que: “Pode-se propor, também, a resolução de exercícios (convencionais, aplicados, demonstrações). Esses exercícios servem como meio de avaliar se os conceitos apresentados foram apreendidos.” (Biembengut; Hein, 2019).

3.3 Momentos finais

Com as devidas conexões com outras áreas feitas e as perguntas do PEP respondidas, partimos para uma atividade prévia à resposta da pergunta Q-0. Essa atividade visa complementar ainda mais o conhecimento acumulado pelos alunos até então e, com isso, dar mais embasamento para a resposta da pergunta inicial. Tal atividade será feita na décima sétima aula.

3.3.1 Atividade: calculando a geração de energia

Para responder às perguntas das categorias 3 e 4 dentro do contexto do imóvel de cada grupo, é necessário determinar o quanto de energia a placa é capaz de gerar. Portanto, os alunos precisão entender sobre os fatores que podem causar impactos negativos na geração de energia.

Um dos fatores necessários para se calcular e entender melhor o custo-benefício dos painéis solares são os fatores de perda da geração de energia solar. Segundo um estudo feito por Kurokawa e Ikki (2001), os principais fatores de perdas de eficiência podem ser:

- Perdas na conversão de energia;
- Sombreamento parcial;
- Perdas nos inversores;
- Mismatch (descasamento de módulos);
- Aumento da temperatura do painel fotovoltaico.

Outros estudos mais recentes são capazes de quantificar os fatores de perda, como podemos observar no trabalho de Jurinic (2020). Tais quantidades de perda podem ser vistas nas tabelas abaixo.

Figura 47 – fatores de perda da geração de energia solar.

Fatores de perdas	Variação	Exemplo	*Gerador Fotovoltaico de 1KWp*
Sombreamento	0,0 – 5,0 %	2,5 %	E_{ideal}=1.200KWh
Sujidade	1,0 – 3,0 %	2,0 %	1.170KWh
Reflexão	3,0 – 5,0 %	4,0 %	1.147KWh
Variação do aspecto AM 1.5	1,0 – 2,0 %	1,5 %	1.101Kwh
Mismatch	0,5 – 2,5 %	1,7 %	1.084Kwh
Condições diferentes dos padrões de teste	4,0 – 9,0 %	6,0 %	1.066Kwh
Perdas c.c.	0,5 – 1,5 %	0,7 %	1.002Kwh
Perdas na conversão de energia	0,5 – 3,0 %	1,5 %	995Kwh
Perdas no inversor	3,0 – 7,5 %	5,0 %	980Kwh
Perdas na fiação elétrica	0,2 – 1,5 %	0,5 %	931Kwh
			E_{real}=926Kwh

Fonte: Jurinic, 2020.

Dessa forma, podemos tornar mais próximo da realidade o cálculo da geração de energia de cada imóvel caso o sistema apresente fatores de perda energética. Assim, neste momento é proposta uma atividade para os grupos calcularem a geração energética ideal de cada imóvel e contrapô-la com a geração real com a presença de perda.

Nesse sentido, para determinar quais serão os fatores que irão influenciar na geração de cada sistema dos diferentes imóveis, será feito a partir de sorteio. Um representante do grupo em um primeiro sorteio irá retirar quais fatores irão influenciar seu imóvel e, em um sorteio a partir de um gerador de números aleatórios, o quanto tais fatores serão influentes.

Os fatores podem ser encontrados no Anexo B, quanto ao gerador de números aleatório pode ser utilizado o seguinte: https://www.random.org/integers/. Basta configurá-lo conforme a figura abaixo e clicar em “Get Numbers”. Para os demais sorteios basta clicar no botão “Again!” que surgirá após o primeiro sorteio.

Figura 48 – página do gerador de números configurada.

Fonte: https://www.random.org/integers/

Figura 49 – um possível resultado ao clicar em “Get Numbers”.

Fonte: https://www.random.org/integers/

Na prática, digamos que o representante de um grupo retirou no sorteio os fatores sombreamento e sujidade e, além disso, no sorteador de números, ele tirou os seguintes resultados: 71 e 80, isso significa que o sombreamento terá um impacto de 7,1% na geração de energia e a sujidade 8,0%.

Quando todos os grupos estiverem com seus fatores, é necessário que eles levem em consideração o rendimento das placas, que em média é de 17%, a incidência solar local, quanto de área de placas existe no imóvel e os seus respectivos fatores de perda. Dessa forma, eles irão obter a geração de energia da placa para os seus imóveis e, assim, estarão mais próximos de responder à Q-0.

Durante a aula, os alunos farão o que pode ser visto no exemplo numérico a seguir:

- Área total do telhado 50 m^2, destes 30 m^2 possuem placas;
- Com um rendimento de 17% e uma irradiância de 5376 $\frac{Wh}{m^2.dia}$ temos uma geração de energia em condições ideais de: $E_i = 0{,}17 \times 5376 \times 30 = 27417 \frac{Wh}{dia}$;
- Com 30 m^2 ocupados por placas de 2 m^2 temos um total de 15 placas;
- Nossas placas só possuem uma potência de 200 W, logo, assumindo 12 horas de luminosidade máxima a energia máxima que pode ser produzida é: $E_m = 200 \times 12 \times 15 = 36000 \frac{Wh}{dia}$. Dessa maneira, a geração ideal pode ser alcançada com nossas placas;
- Resultado do sombreamento: $E_{som} = (1 - 0{,}071) \times 27417 = 25470$;
- Resultado da sujidade: $E_{suj} = (1 - 0{,}08) \times 25470 = 23432$.

Portanto, temos uma geração de 23,4 kWh por dia.

Na décima oitava aula, teremos a criação das estimativas de geração de energia por parte dos imóveis do grupo. Com relação a décima nona aula, após a resolução das perguntas das categorias 3 e 4, o professor pode incentivar os alunos a fazerem uma reflexão sobre o dimensionamento do sistema. Para tal, pode haver um debate com os integrantes de cada grupo a partir das reflexões geradas pelas perguntas: o sistema que está sendo instalado é suficiente? Ele está sendo excessivo ou leva em consideração a sazonalidade da irradiância? Ele suporta um aumento no consumo de energia no futuro?

Para a vigésima e vigésima primeira aula, respectivamente, os alunos podem apresentas as estimativas feitas anteriormente e realizar a análise geral do custo de manutenção (perguntas da categoria 2). Ao chegarem na vigésima segunda e terceira os alunos poderão fazer as análises dos benefícios e estimativas de retorno, além da comparação de economia mensal entre os imóveis de cada grupo. Na vigésima quarta aula, os alunos poderão revisitar o percurso, os conteúdos e respostas geradas, isto é, ocorrerá uma espécie de recapitulação do que terá sido feito por eles até então.

3.3.2 Respondendo a Q-0

Após isso, os alunos podem optar por investigar ainda mais com outras perguntas a situação, ou dar a resposta para a Q-0. Caso optem por investigar mais, o professor pode manter a divisão de grupos atual e, durante os próximos encontros, os alunos podem apresentar as respostas das questões derivadas encontradas até que eles se sintam preparados para dar a resposta final à Q-0. Caso contrário, durante a vigésima sexta e vigésima sétima aula, haverá, respectivamente, a construção da reposta final à pergunta inicial e a produção do relatório final em conjunto da preparação da apresentação dele.

Durante o encontro prévio a apresentação resolução da Q-0 é importante ressaltar aos grupos que sua apresentação da resposta para a questão inicial seja feita/personalizada conforme o imóvel cujo grupo estava como responsável nas atividades anteriores. Isto mostra aos alunos como os diferentes fatores causam impactos na busca por soluções e como os modelos se comportam em diferentes situações.

Durante a vigésima sétima aula haverá as apresentações dos grupos sobre a pergunta inicial, finalizadas as apresentações sobre a Q-0, é recomendado ao professor que ele abra um espaço para o feedback dos alunos (vigésima oitava aula), para que eles falem dos pontos que eles gostaram, dos que não gostaram e como eles pensam que o processo feito por todos pode ser melhorado.

3.4 Avaliação

Quando tratamos de avaliação a autora Hoffmann (2001) elenca que, devido à grande complexidade do processo avaliativo, é necessário um conjunto de reflexões anterior ao processo avaliativo, tais como: “O que pretendemos?”, “Para quem pretendemos?”, “Quais condições iremos criar?”. As respostas para essas perguntas não são definitivas, contudo, elas ampliam o olhar do professor com relação ao processo de ensino aprendizagem.

Ao pensar nas condições que criamos ao percorrer desta proposta, observamos que elas abrem muitas portas para avaliar os alunos em diversos aspectos. Pensando na situação escolar que a proposta seria aplicada e no decorrer do que ocorre na proposta, chegamos a 3 tipos de avaliação que verificam diferentes habilidades que podem ser adquiridas durante a proposta, são elas: a avaliação qualitativa das atividades presentes nos anexos; a avaliação das apresentações e debates dos alunos, por fim, a avaliação dos relatórios produzidos.

Considerando os objetivos de aprendizado expostos na introdução e nos conceitos de avaliação elencados por Hoffmann (2001), temos que pensar no que cada uma dessas formas de avaliar irão verificar nos alunos:

- Avaliação qualitativa das atividades: aqui buscamos verificar e avaliar, de forma qualitativa, a aquisição das habilidades e competências técnico-teóricas presentes na BNCC dos conteúdos vistos durante o percurso (para tal podem ser usados os Anexos C e H);
- Avaliação das apresentações: aqui buscamos avaliar a presença das habilidades socioemocionais, ou "soft skills", dos alunos conforme a BNCC (o Anexo I contém alguns critérios);
- Avaliação do relatório final produzido: avaliar diversos critérios que partem da produção textual, passam pela aplicação dos conceitos e chegam até a originalidade e protagonismo (ver Anexo J).

Outro ponto a se pensar é a avaliação da proposta em si, para tal, também precisamos avaliar os alunos de maneira previa a ela. Dessa forma, um outro instrumento avaliativo (ver Anexo K) foi preparado para adquirir informações qualitativas dos alunos antes da interferência da proposta. Assim, poderemos cruzar e analisar as informações obtidas com as avaliações prévias em conjunto com as informações obtidas das avaliações feitas durante o processo para, no fim, validar o benefício ou não da proposta.

Nesse instrumento, dividido em três partes, avaliamos conhecimentos matemáticos via: identificação do domínio de figuras planas, noções de conhecimento de ângulos, cálculo com proporção e valores reais, familiaridade com conceitos financeiros. Também buscamos conhecer um pouco mais da situação socioemocional de cada aluno por meio de uma autoavaliação. Por fim, também temos um trecho para preenchimento do professor que conta com algumas observações gerais de cada aluno.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação teve como objetivo investigar como a integração entre a Modelagem Matemática e o Percurso de Estudo e Pesquisa, fundamentada no Paradigma de Questionamento do Mundo, pode contribuir para o ensino da Matemática a partir de uma abordagem contextualizada, interdisciplinar e investigativa. A problemática central girou em torno da seguinte questão: Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?

Embora a proposta não tenha sido aplicada em sua totalidade devido a fatores externos, como o afastamento do autor devido ao acidente, a elaboração e a parcial aplicação da sequência didática permitiram reflexões relevantes. Observou-se que a articulação entre teoria e prática, por meio da resolução de problemas reais, pode potencializar o protagonismo estudantil, favorecer a aprendizagem significativa e aproximar os alunos da realidade social.

Nesse sentido, a proposta se mostrou promissora ao integrar conteúdos matemáticos como geometria, trigonometria e análise de dados com temas atuais de sustentabilidade e eficiência energética. Além disso, o uso de recursos como a investigação de fatores de perda de energia, o cálculo de geração e o levantamento de dados reais pode agregar valor formativo ao processo educativo, visto que esses recursos aproximam a proposta e o ato modelar da realidade.

Do ponto de vista teórico, o trabalho reforça a importância de fundamentos como a Teoria Antropológica do Didático e os princípios da modelagem. Na prática, sugere-se que a junção entre PEP e Modelagem Matemática pode constituir uma alternativa didática potente e alinhada com as competências exigidas pela Base Nacional Comum Curricular.

Contudo, uma limitação importante deste estudo reside na impossibilidade de implementação integral da proposta em ambiente escolar, o que impede a avaliação empírica de seus resultados. Dessa forma, recomenda-se que trabalhos futuros realizem a aplicação completa da sequência em turmas do ensino médio, comparando seus efeitos com metodologias tradicionais. Também é pertinente investigar como diferentes áreas do conhecimento podem se integrar ao modelo proposto, ampliando ainda mais seu potencial interdisciplinar. Pensando em tais fatores, no Anexo G, temos um cronograma detalhando e sugerindo quais ações podem ser tomadas semanalmente do início ao fim da proposta.

Conclui-se, portanto, que a abordagem delineada nesta dissertação oferece uma contribuição relevante ao ensino de Matemática, especialmente por propor um ensino crítico, contextualizado e comprometido com os desafios contemporâneos da educação e da sustentabilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, L. **Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de Modelagem Matemática**. Com a palavra, o professor, v. 5, n. 11, 2020.

ALMEIDA, L.; VERTUAN, R. Discussões sobre "como fazer" modelagem matemática na sala de aula. *In*: ALMEIDA, L.; ARAÚJO, J.; BISOGNINI, E. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática relatos de experiências e propostas pedagógicas**. Londrina: Eduel, 2011.

ALMOULOUD, S. *et al.* Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação. **Revista de Educação da Universidade Federal do Vale do São Francisco**, v. 11, n. 24, p. 426-466, 2021.

ANDRADE, C. **O ensino da Matemática para o cotidiano**. Monografia (Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2013.

BARBOSA, J. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. **Reunião anual da ANPED**, v. 24, n. 2001, p. 01-15, 2001.

BASSANEZI, R. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Editora Contexto, 2004.

BENITO, R.; SILVA, M.; BOSCH, M. **Um percurso de estudo e pesquisa para o ensino de cônicas no ensino médio**: condições e restrições que incidem sobre sua implementação. Bolema, Rio Claro (SP), 2022. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/y84c5wGJbPrXsK5p6hrYYGq/?lang=pt

BELTRÃO, M. Aplicações e Modelagem Matemática: aspectos históricos. **V seminário internacional de pesquisa em educação matemática – V SIPEM**, p. 1-18, 2012.

BIEMBENGUT, M. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 07-32, 2009.

BIEMBENGUT, M.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2019.

BLUM, W.; LEIB, D. “**Filling-up” – the problem of independencepreserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks**. CERME4, WG 13 Modelling and Application, p. 1623-1633. 2005.

BONJORNO, J.; GIOVANNI Jr., J.; SOUSA, P. **Prisma matemática**: Geometria. Editora FTD. São Paulo, ed..2020.

BONJORNO, J.; GIOVANNI Jr., J.; SOUSA, P. **Prisma matemática**: Geometria e trigonometria. Editora FTD. São Paulo, ed..2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/UNDIME, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação. **Censo revela crescimento na educação profissional**. *[S.l]*. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/2024/fevereiro/censo-revela-crescimento-na-educacao-profissional . Acesso em: 4 jun. 2025.

BURAK; D. **Modelagem matemática**: ações e interações no processo de ensino aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques:** l’approche anthropologique**.** In: L’universite d’ete, 1998, p.91-118. Actes de l’Université d’été La Rochelle. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998.

CHEVALLARD, Y. **L’analyse des pratiques enseignantes em Théorie Anthropologic Didactique.** Recherches em Didactiques des Mathématiques, Grenoble, v.19, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La notion d’ingénierie didactique, un concept à refonder**; Clermont-Ferrand, 16-23, 2009.

CHEVALLARD, Y. **La matemática en la escuela**: Por una revolución epistemológica y didáctica. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2013.

CHEVALLARD, Y.**¿Por qué enseñar matemáticas em secundário? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan**. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 20(1), p. 159-169, 2017.

DANTE, L. R. **Matemática Dante volume único**. São Paulo: Editora Ática, 2008.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. Campinas, Summus, 1986.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas, Papirus, 2009.

DA PONTE, J.; QUARESMA, M. O papel do contexto nas tarefas matemáticas. **Revista Interacções,** v. 8, n. 22, 2012.

DE SOUZA, M. *et al*. Modelagem matemática e formação social da mente: perspectivas de mútuo potencial. **Revista eletrônica debates em educação científica e tecnológica**, v. 7, n. 02, p. 144-161, 2017.

DE FREITAS, M.; BITTAR, M. **O ensino de volume dos sólidos geométricos em livros didáticos do ensino médio sob a ótica da TAD**. 2016.

DOS SANTOS, C.; DE FREITAS, J. Contribuições da teoria antropológica do didático na formação de professores de matemática. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 13, n. 27, p. 51-66, 2017.

DUCH, H. Redefining parent involvement in Head Start: A two-generation approach. **Early child development and care**, v. 175, n. 1, p. 23-35, 2005.

FRANCO, M. Prática pedagógica e docência: um olhar a partir da epistemologia do conceito. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 97, p. 534-551, 2016.

GASCÓN, J. **La necessidad de utilizar modelos em didáctica de las matemáticas**.*In*: Revista, 2003.

Freepik. **Painel solar policristalino**. Disponível em: https://br.freepik.com. Acesso em 08/02/2025.

Geo-Logos. **Latitude e longitude**. Disponível em: http://geoweb.geo-logos.com.br/geo-logos/curso%20de%20rotas/GEO%20LOGOS%20-%20MV2%20-%20Latitude%20e%20Longitude%20WGS84%20GGMMSSS.htm Acesso em: 08/02/2025.

HENRIQUE, M. **Uma análise do ensino de frações equivalentes no contexto da pandemia da Covid-19 mediado pela Teoria Antropológica do Didático.** Dissertação de mestrado – Universidade Federal de Rondonópolis, Rondonópolis, 2021.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover**: as setas do caminho. Porto Alegre, Editora Mediação, 2001.

JACOBINI, O. **A Modelagem Matemática como instrumento de ação política na sala de aula**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

JURINIC, F. **Estudo para melhoria na performance e eficiência de placas fotovoltaicas**: através de um sistema combinado de inclinação e resfriamento. Universidade Federal da Fronteira do Sul. Cerro Largo, 2020.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zdm**, v. 38, p. 302-310, 2006.

KLÜBER, T. E.; BURAK, D. **Sobre a pesquisa qualitativa na Modelagem Matemática em Educação Matemática**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 26, p. 883-905, 2012.

KUROKAWA, K.; IKKI, O. The Japanese experiences with national PV system programmes. **Solar Energy**, v. 70, n. 6, p. 457-466, 2001.

LEÃO, K.; BITTAR, M. Percalços de um percurso de estudo e pesquisa. **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, p. 1-15, 2024.

LIMA, E. L. Sobre o ensino da matemática. **Revista do professor de matemática**, 1995.

LUCKESI, C. **Avaliação escolar**. 1999.

MACHADO, E. **Modelagem matemática e resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

MADURO, Vanessa Pires Santos. **Um estudo da prática docente no tema função quadrática com base na Teoria Antropológica do Didático**. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2015.

MORÁN, J. *et al*. Mudando a educação com metodologias ativas. **Coleção mídias contemporâneas. Convergências midiáticas, educação e cidadania: aproximações jovens**, v. 2, n. 1, p. 15-33, 2015.

MUTTI, G. *et al*. **Práticas pedagógicas de professores da educação matemática num contexto de formação continuada em modelagem matemática na educação matemática**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, 2016.

NEOSOLAR. **Qual o preço de uma placa solar?** Acesso em: 08/02/2025. Disponível em: https://www.neosolar.com.br/aprenda/saiba-mais/placa-solar-fotovoltaica/preco-placa-solar-fotovoltaica

OLIVEIRA, R. **A Modelagem Matemática como ferramenta de contextualização no processo de ensino-aprendizagem:** Modelos Epidemiológicos e o Uso do Software Excel no Estudo de Casos de Covid-19 no Município de Colorado do Oeste – Rondônia. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Rondônia-Unir, Porto Velho, 2023.

PACHECO, S. M. **Uma proposta de autoavaliação e avaliação por pares em modelagem na educação matemática**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2020.

PASSEI DIRETO. **Tabela trigonométrica**. Acesso em: 08/02/2025. Disponível em: **https://www.passeidireto.com/arquivo/50735977/tabela-seno-cosseno-e-tangente**

PEREIRA, E.; *et al.* **Atlas brasileiro de energia solar**. 2.ed. São José dos Campos: INPE, 2017. 80p. Disponível em: http://doi.org/10.34024/978851700089.

POLLAK, Henry O. The interaction between mathematics and other school subjects. **New trends in mathematics teaching**, p. 232-248, 1979.

PONTE, L. **Juros**: uma análise de livros didáticos e uma proposta de sequência de aulas com base na Teoria Antropológica do didático. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2013.

RANDON. **Randon integer generator**. Aceso em: 08/02/2025. Disponível em: https://www.random.org/integers/.

SANTO, C. **Saberes não matemáticos articulados às práticas sociais com modelagem matemática no ensino básico**: o caso da educação fiscal na formação de professores. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Pará, Belém, 2023.

SANTOS, M.; MENEZES, M. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 18, 2015.

SAMPAIO, F. **Geração alpha geografia**. SM educação. São Paulo, 4 ed. 2022.

SCHELLER, M. **Modelagem Matemática na iniciação científica**: contribuições para o ensino médio técnico. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

SCHRENK, M.; VERTUAN, R. **Modelagem Matemática como prática pedagógica**: uma possível caracterização em educação matemática. Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 24, n. 1, p. 194-224, 2022.

SCHWENDLER, D. **A contextualização na Modelagem Matemática na educação matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2023.

SILVA, A. **Modelagem Matemática e interdisciplinaridade**: possibilidades e desafios na construção de um projeto de hortas em escolas rurais do Distrito Federal-Brasil. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2022.

SILVA, M. **Placas fotovoltaicas - aprendizagem baseada em projetos**: uma aplicação de Modelagem Matemática para o ensino médio. Dissertação de mestrado, Faculdade de Ciências Exatas da Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2023.

SZYMANSKI, Heloisa. Práticas educativas familiares: a família como foco de atenção psidoeducacional. **Estudos de Psicologia (Campinas)**, v. 21, p. 5-16, 2004.

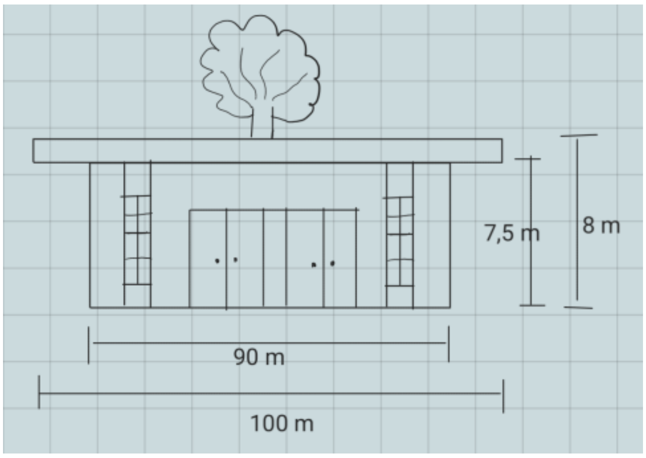
VERTUAN, R. **Modelagem matemática na educação básica**. IVEPMEM, Paraná, 2010.

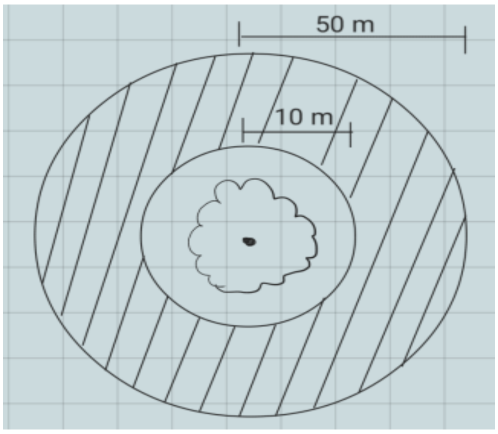
ANEXOS

Anexo A - Lista de imóveis e sua descrição.

Imóvel 1

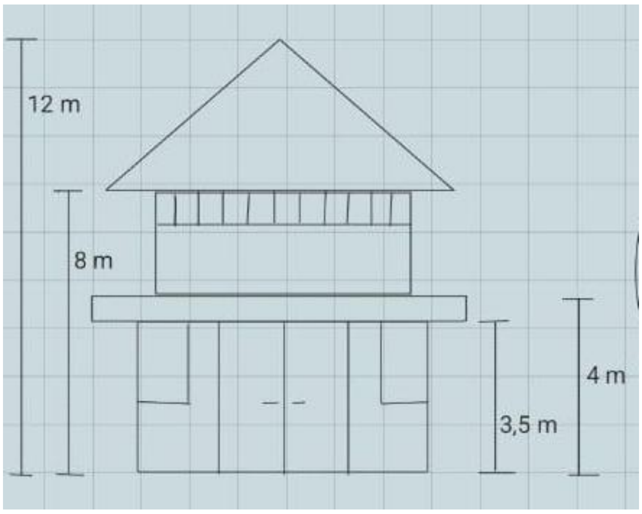
Abaixo temos a visão de frente e por cima da planta de um futuro museu, localizado no nordeste do Brasil. Tal planta dará à luz um museu que tenta integrar tecnologia e natureza, as exposições disponíveis para o público serão dadas a partir de obras que borrão a separação entre o natural e o feito pelo homem. Assim, uma das preocupações dos idealizadores é a própria geração de energia, o consumo estimado das obras gira em torno de 5000 kWh mensais.

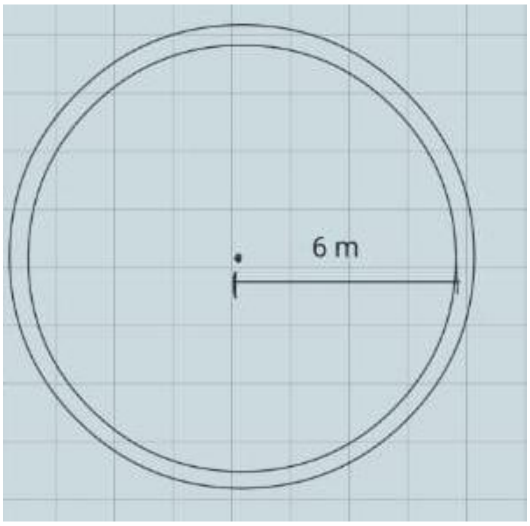




Imóvel 2

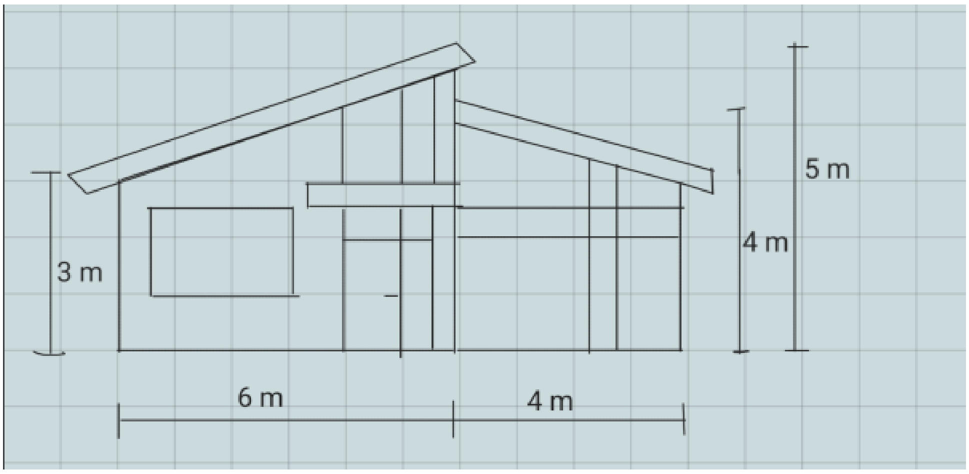
O setor hospitaleiro e de turismo segue buscando por novas formas de atrair mais clientes e, assim, aumentar seus ganhos. Uma recente modalidade de turismo no Sudeste visa conectar mais as pessoas a natureza através do aluguel de chalés localizados em regiões rurais. Em algumas localidades, para o corte de custos, é necessário que os chales possuam geração própria de energia, além do armazenamento, com a capacidade para suprir cerca de 400 kWh por mês de geração. Abaixo temos a vista frontal e superior de um projeto a ser construído.

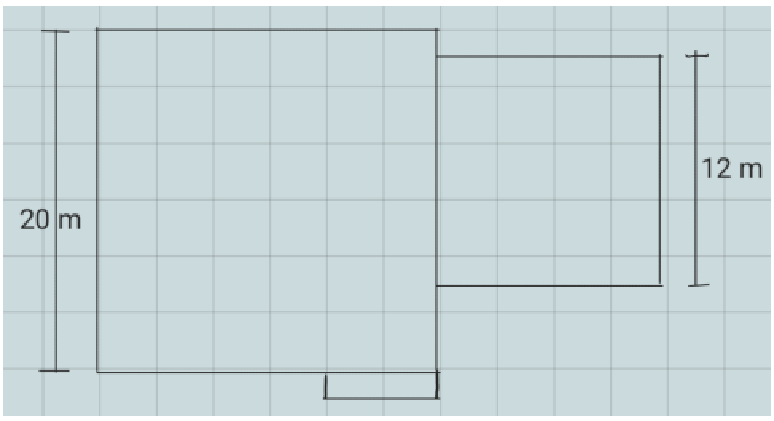




Imóvel 3

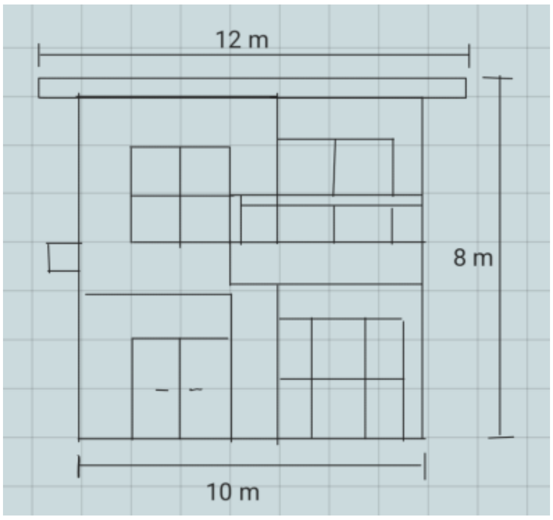
Este imóvel está localizado em um condomínio do sul do país projetado com foco na sustentabilidade ambiental e na economia de recursos. Com design moderno e funcional, o espaço oferece conforto e eficiência para moradores preocupados com o impacto ambiental. Com base no projeto sustentável e no uso de energia solar, os gastos com eletricidade podem ser reduzidos em até 70%. A previsão média mensal é de 300 kWh dependendo do uso de equipamentos elétricos como ar-condicionado e eletrodomésticos de maior consumo. A seguir temos o projeto com vista frontal e superior.

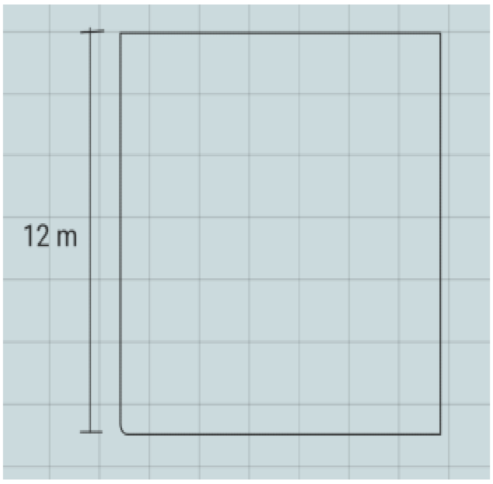




Imóvel 4

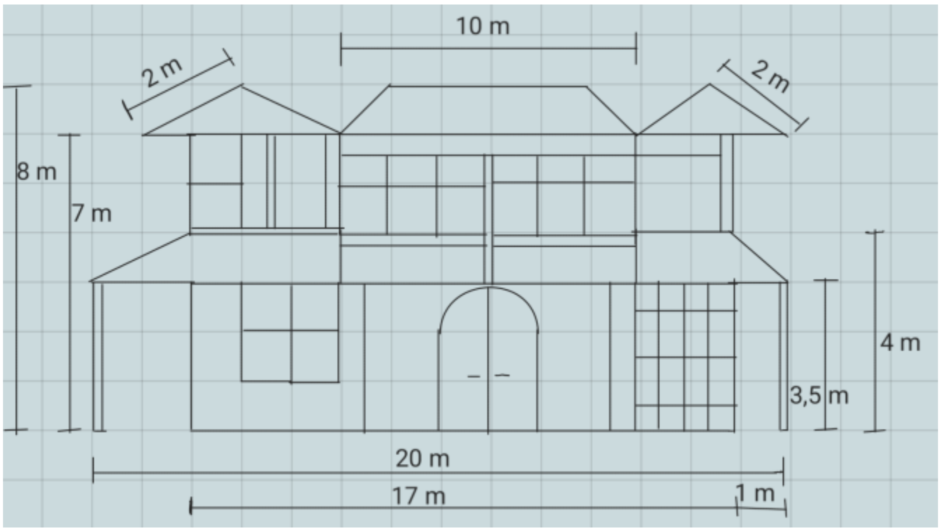
Esta casa térrea foi projetada com foco em sustentabilidade ambiental e eficiência energética, proporcionando um ambiente acolhedor e ecologicamente responsável. Com arquitetura contemporânea e soluções inteligentes, ela é ideal para quem busca conforto alinhado com a preservação ambiental e a otimização do terreno externo. Graças ao uso de energia solar e iluminação eficiente, os gastos mensais com eletricidade podem ser significativamente reduzidos, tendo em vista que o consumo médio para uma residência do tipo gira em torno de 450 kWh. Abaixo temos a planta para visualização com vista frontal e superior.

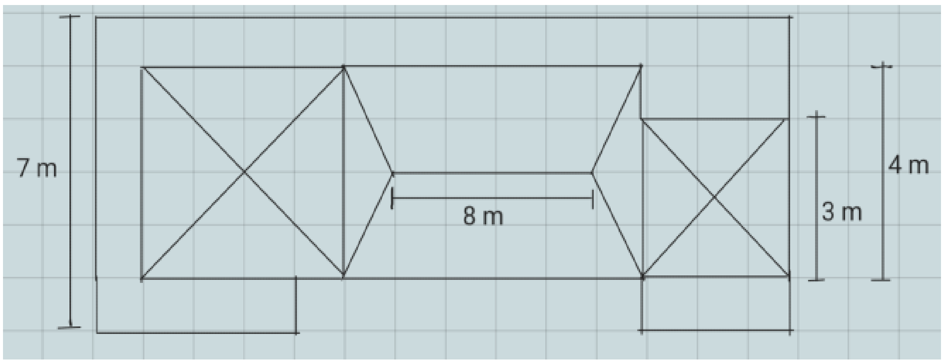




Imóvel 5

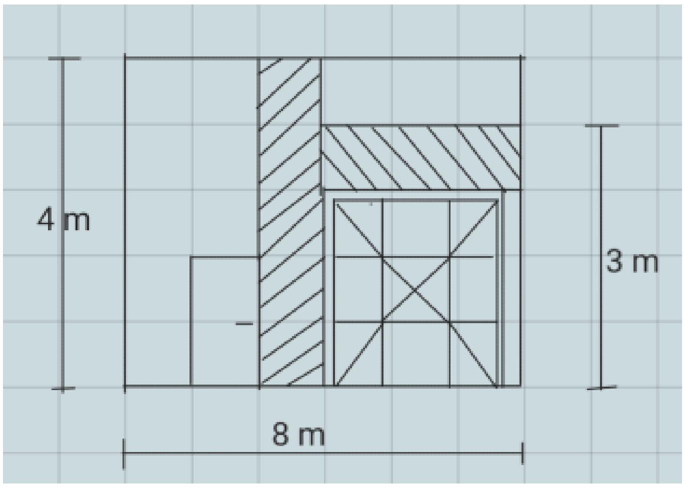
Uma casa única e inspiradora, projetada no estilo oriental clássico, perfeita para locação em produções audiovisuais, como filmes, séries, clipes musicais e comerciais, ela está situada na Califórnia. A arquitetura autêntica e os detalhes minuciosos proporcionam um cenário rico em cultura, beleza e atmosfera zen. A casa está disponível para locação diária ou semanal, com pacotes personalizados para diferentes produções. A atmosfera rica em cultura oriental garante um cenário único, perfeito para narrativas autênticas ou composições visuais impactantes. Ela conta com geração própria de energia, via placas solares, visando suprir as necessidades mensais estimadas em 2000 kWh devido ao alto consumo elétrico dos equipamentos de gravação. A seguir temos a vista frontal e superior da mesma.

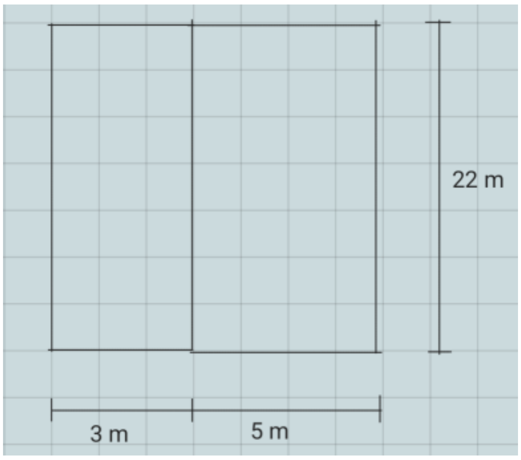




Imóvel 6

Esta casa térrea combina elementos clássicos da arquitetura brasileira com o charme do telhado invertido, oferecendo um estilo diferenciado e moderno. Ideal para quem busca um lar espaçoso e funcional, localizada em um bairro residencial de Sergipe. Essa casa não inclui características de sustentabilidade, mas entrega o conforto necessário para famílias ou uso como escritório ou espaço comercial. O telhado invertido agrega um diferencial visual ao imóvel, que combina o tradicional com um toque moderno. O suficiente para abrigar móveis e eletrodomésticos que geram um consumo médio mensal de 150 kWh.





Anexo B - Lista de condições de perda

Abaixo temos uma tabela para facilitar o recorte e o sorteio das condições de perda de geração nos circuitos.

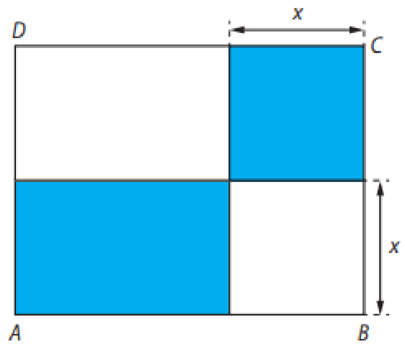
Sombreamento
Sujidade
Reflexão
Mismatch
Condições diferentes dos padrões de teste
Perdas por curto-circuito
Perdas na conversão de energia
Perdas no inversor
Perdas na fiação elétrica

Anexo C - Atividades sobre área de figuras

1. Uma parede retangular tem 2,4 m de comprimento por 90 cm de largura. Quantos azulejos quadrados de lado medindo 45 cm são necessários, no mínimo, para cobrir essa parede?

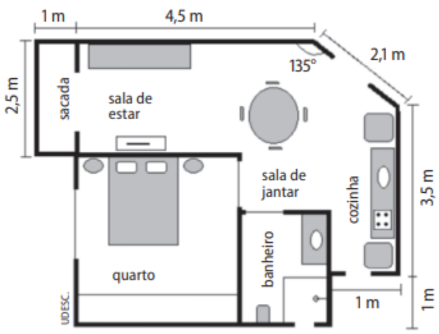
2. Se aumentarmos a medida do lado de um quadrado em 4 cm, sua área será aumentada em 56 cm^2. Qual é a medida da diagonal do quadrado inicial?

3. Considere o retângulo ABCD a seguir.



Sabendo que AB = 27 cm e AD = 21 cm, calcule o valor de x de modo que a soma das áreas dos retângulos em azul seja a maior possível.

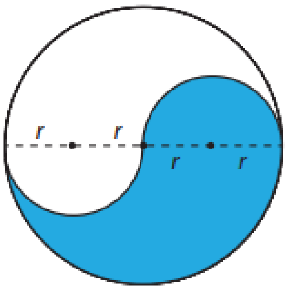
4. (Udesc-SC) Maria precisa comprar piso para o seu apartamento cuja planta baixa pode ser vista na figura. Devido aos recortes necessários para a colocação do piso, o mestre de obras solicitou 10% a mais da metragem total do apartamento.



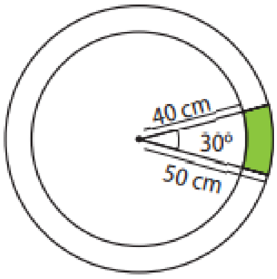
De acordo com as instruções do mestre de obras, Maria deve comprar aproximadamente?

5. Qual é a medida do diâmetro de um círculo de área $100\pi\ dm^2$?

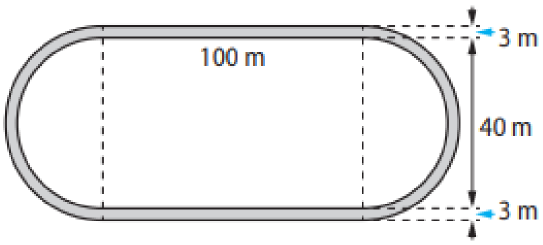
6. Sabendo que r = 10 cm, calcule a área da região colorida de azul na figura. (Adote $\pi = 3{,}14$.)



7. Duas circunferências concêntricas têm raios iguais a 50 cm e 40 cm, conforme indica a figura. Calcule a área destacada em verde.



8. Uma praça é formada por um retângulo de comprimento 100 m e largura 40 m e dois semicírculos com diâmetro coincidindo com o lado menor do retângulo.



Em torno da praça será construída uma calçada de 3 m de largura, cujo preço por metro quadrado é R$ 50,00. Calcule o custo total desse projeto. (Adote $\pi = 3{,}14$).

Anexo D - Tabela trigonométrica

Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,682	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,766	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,788	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,809	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,829	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,848	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,515	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,866	0,5	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,309	0,9511	0,3249	63°	0,891	0,454	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,342	0,9397	0,364	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,404	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,342	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,454	0,891	0,5095	72°	0,9511	0,309	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5	0,866	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,515	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,848	0,6249	77°	0,9744	0,225	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,829	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,809	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,788	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,766	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,682	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-

Anexo E - Atividade aplicada em sala para análise *in vivo*

Aprofundamento de Ciências da Natureza e Matemática

Alunos (as):

Data:

Turma:

Energia Solar e Placas Fotovoltaicas

A energia solar é uma das fontes de energia renovável mais promissoras e sustentáveis disponíveis atualmente. Ela é obtida a partir da luz e do calor emitidos pelo Sol, podendo ser convertida em energia elétrica por meio das chamadas placas solares ou placas fotovoltaicas (também conhecidas como painéis fotovoltaicos). Com a expansão da energia solar e do conhecimento de seus benefícios, a instalação de placas fotovoltaicas tem se tornado o desejo de muitas pessoas que buscam reduzir significativamente os gastos com as contas de luz e trazer mais sustentabilidade para o imóvel.

As placas fotovoltaicas, também conhecidas como painéis solares fotovoltaicos, são os equipamentos mais importantes que compõem os sistemas solares fotovoltaicos conectados à rede (on-grid). A sua função é captar a luz solar e convertê-la em energia elétrica, o que ocorre por meio das células fotovoltaicas, normalmente fabricadas em silício, que integram a sua composição. Assim, por necessitarem da exposição à luz solar para captá-la, as placas fotovoltaicas se encontram expostas no telhado, formando a parte visível do sistema. Cada uma delas é capaz de gerar uma quantidade específica de energia e, ao serem conectadas, podem abastecer todo o consumo elétrico de um imóvel.

Nos dias atuais, há uma grande diversidade de placas solares no mercado nacional, as quais variam de acordo com o material de sua composição – silício, que pode se apresentar de modos distintos, como policristalino, monocristalino e silício-amorfo – e quantidade de células fotovoltaicas. Devido à variedade de modelos, é importante compreender os principais aspectos das placas solares, de forma a adquirir a mais adequada para o seu projeto.

As placas fotovoltaicas mais utilizadas globalmente contam com uma quantidade de células fotovoltaicas que varia de 60 a 72, com potência que pode chegar a 550W. Os painéis das principais fabricantes costumam apresentar 1 metro de largura por 2 metros de comprimento. O peso é variável, podendo partir de 18,20 kg e chegar até 27 kg. A produção de energia elétrica por meio da luz solar, é realizada por cada célula fotovoltaica que compõe a placa solar. Dessa forma, quanto maior a quantidade de células, maior é a potência da placa. Essa conversão da luz solar em energia elétrica se dá a partir de um fenômeno chamado efeito fotovoltaico.

Cada célula fotovoltaica conta com uma cobertura de vidro, uma camada antirefletora, um contato frontal – que possibilita aos elétrons entrarem em circuito –, um condutor – responsável por fazer com que os elétrons completem o circuito – e algumas camadas de semicondutores. Essa composição permite a ocorrência do efeito fotovoltaico. Basicamente, esse fenômeno é caracterizado pelo surgimento de uma tensão elétrica em um material semicondutor por meio de sua exposição à luz do sol. Assim, esse processo acontece quando as partículas elementares da luz solar – os fótons – atingem a célula e passam a reagir com os átomos de silício, provocando o desprendimento dos elétrons que estão no lado negativo. Após esse momento, um campo elétrico é criado na área de junção, já que os fótons não conseguem passar para o lado negativo e vice-versa. A única possibilidade de trajeto para essas partículas é a fina grade que liga as camadas. Portanto, surge a corrente elétrica que conhecemos como energia solar fotovoltaica.

Existem inúmeras vantagens trazidas pelo uso das placas fotovoltaicas e, portanto, do sistema solar fotovoltaico como um todo. A principal delas é a economia significativa obtida na conta de luz, que pode chegar a uma redução de até 90% do valor, pois o consumidor conseguirá gerar toda a energia necessária no mês, não havendo necessidade de pagar as taxas da distribuidora.

Além disso, conforme estabelecido pela Lei 14.300, que converteu em legislação as regras de geração distribuída elaboradas pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) na Resolução Normativa n.º 482, ao instalar um sistema fotovoltaico em algum imóvel e conectá-lo à rede local, o consumidor passa a integrar o sistema de compensação de energia elétrica, sendo capaz de gerar créditos energéticos. Ao produzir a própria energia por meio do uso de placas solares, também é possível contar com incentivos do governo, como a isenção do ICMS (nível estadual) e do PIS e COFINS (federal). Já na esfera municipal, quem produz energia por meio do sistema fotovoltaico pode receber desconto no IPTU por meio de programas de IPTU verde. Outros benefícios garantidos pelo uso de placas fotovoltaicas é a longa vida útil de 25 a 30 anos, além da baixa necessidade de manutenção, que é realizada de maneira periódica e simples.

Fonte: https://www.portalsolar.com.br/placas-fotovoltaicas

A partir da leitura do texto e da pergunta inicial (Pergunta 0), reflita e responda:

Pergunta 0: *Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?*

1. **Quais fatores devem ser considerados para responder a essa pergunta?**
   - Liste os elementos que precisam ser analisados.
2. **Que questionamentos surgem a partir dessa investigação?**
   - Que perguntas você precisa responder para chegar a uma conclusão?
3. **Você possui os dados necessários para responder à pergunta?**
   - Caso não tenha, quais dados seriam importantes e onde poderiam ser encontrados?
4. **Quais recursos foram utilizados para buscar as respostas?**
   - Cite materiais, fontes ou ferramentas ou consultados.
5. **Registre o caminho percorrido até a resposta final:**
   - Apresente de forma clara as etapas da investigação, os dados coletados e as conclusões obtidas.

Anexo F - Modelo de tabela para registro de respostas

<table>
<tr><th rowspan="3">Nome dos integrantes do grupo</th><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th>Imóvel</th><td colspan="4"></td></tr>
<tr><th>Custos</th><th>Valor</th><th>Incentivos</th><th colspan="2">Valor</th></tr>
<tr><td>Inversor</td><td></td><td>Fiscais</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Cabos</td><td></td><td>Geração</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Conectores</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Placas</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Estrutura</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Mão de obra</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Quadro de distribuição</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th>Total</th><td></td><th>Total</th><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Anexo G – Cronograma de aplicação

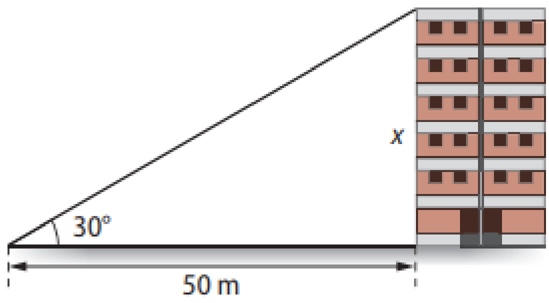
Semana	Etapa	Objetivos
1	Apresentação da metodologia do PEP e da pergunta geradora. Levantamento de dúvidas e sugestões com base na pergunta. Organização das perguntas e construção inicial do grafo. Formação dos grupos e divisão temática das perguntas.	Contextualizar o projeto e estimular o engajamento inicial; Estimular a curiosidade e o pensamento investigativo; Estabelecer conexões entre as dúvidas levantadas; Estruturar a investigação colaborativa por temas.
2	Início da pesquisa. Continuação. Organização dos dados obtidos e preparação para a apresentação dos dados. Primeira apresentação (perguntas da categoria um).	Levantar dados reais e contextualizar o problema; Relacionar matemática com questões sociais e econômicas; Sistematizar informações e desenvolver análise crítica; Promover a troca de informações e aprimorar a comunicação.
3	Atividade sobre área dos telhados. Teoria sobre área de figuras planas. Cálculo da área disponível nos imóveis dos grupos e preparação para as próximas apresentações. Segunda apresentação (perguntas da categoria 5).	Introduzir geometria plana aplicada; Aplicar fórmulas de área de figuras planas; Relacionar área útil e viabilidade técnica; Argumentar e validar resultados coletivamente.
4	Discussão sobre o ângulo ideal de inclinação dos painéis por meio da interdisciplinariedade. Atividade sobre o estudo dos ângulos a partir dos telhados. Teoria sobre trigonometria. Modelagem do posicionamento ideal com base na região e no imóvel e discussão sobre as variações nos ângulos entre os grupos.	Relacionar orientação solar e trigonometria; Utilizar relações trigonométricas básicas; Compreender o impacto da localização geográfica; Ampliar o pensamento crítico e investigativo.
5	Atividade sobre o cálculo de geração de energia. Estimativa da geração mensal de energia (em kWh).	Trabalhar com leitura de dados científicos; Calcular produção estimada por residência; Desenvolver habilidades de sistematização; Consolidar análise de dados em contexto real.

	Organização dos dados para comparação e solução das perguntas das categorias 3 e 4.	
	Apresentação das estimativas de cada grupo.	
6	Análise geral do custo de manutenção do sistema (perguntas da categoria 2).	Aplicar proporção, porcentagem e raciocínio lógico; Relacionar matemática financeira e tempo de retorno; Analisar viabilidade conforme diferentes perfis; Retomar e consolidar o conhecimento produzido.
	Análise dos benefícios e estimativa de retorno do investimento.	
	Comparação de economia mensal entre os imóveis.	
	Revisão do percurso, conteúdos e respostas geradas.	
7	Construção da resposta final à pergunta geradora.	Sistematizar as descobertas em forma de síntese; Elaborar produto da pesquisa; Socializar resultados e argumentar coletivamente; Aperfeiçoar comunicação oral e visual dos dados; Refletir criticamente sobre a aprendizagem.
	Produção de relatórios, pôsteres e/ou apresentações.	
	Apresentação dos grupos.	
	Avaliação coletiva da trajetória e das descobertas.	
8		

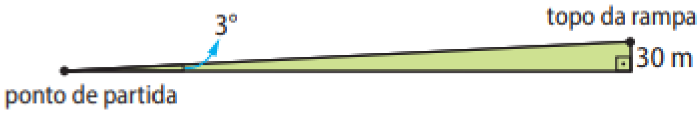
Anexo H – Atividade sobre trigonometria

1. Considere duas pessoas a 4 km de distância uma da outra, localizadas em dois pontos A e B no solo. A pessoa no ponto A, olhando na direção de B, avistou, segundo um ângulo de 50° (com a horizontal), um helicóptero. No mesmo instante, a pessoa no ponto B, olhando na direção de A, avistou o mesmo helicóptero segundo um ângulo de 45° (com a horizontal). Aproximadamente, a que altura do solo o helicóptero estava naquele momento? Considere $sen\ 45° = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e\ tg\ 50° \approx 1,19$.

2. Quando os raios do Sol formam o ângulo de 30° com o plano do chão, obtém-se a medida de 50 m para a sombra de um prédio. Qual é a altura aproximada desse prédio? Dado: $tg\ 30° \approx 0,58$.

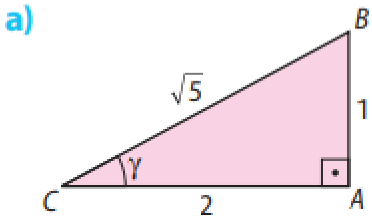


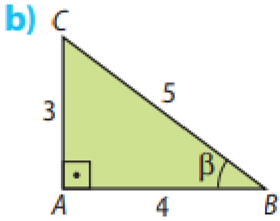
3. (Vunesp-SP) Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo.



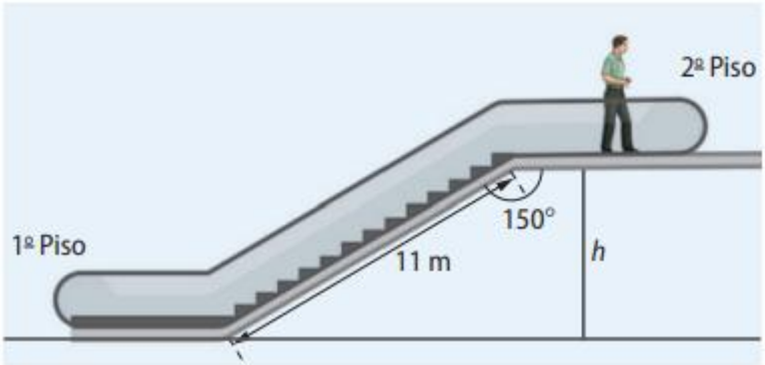
A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é de 30 m. Use a aproximação $sen\ 3° \approx 0,05$ e responda. O tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é?

4. Em cada caso, calcule o seno, o cosseno e a tangente do ângulo agudo destacado.





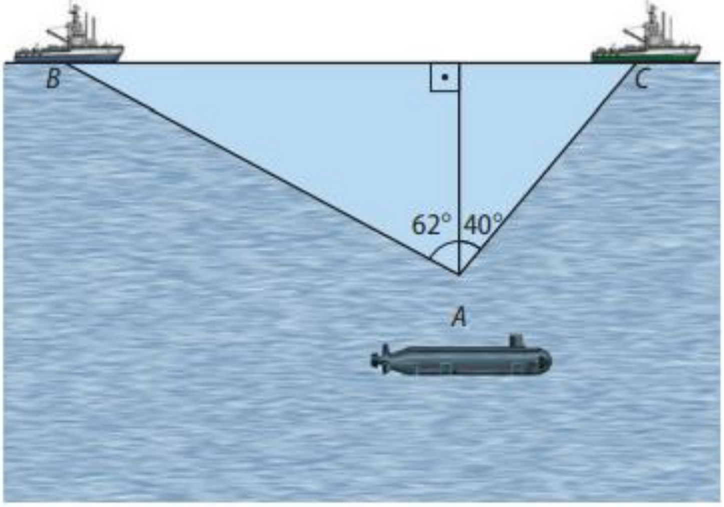
5. Numa estação rodoviária, um homem vai do primeiro piso para o segundo por meio de uma escada rolante, conforme mostra a figura a seguir:



Calcule a altura h, em metro, atingida pelo homem ao chegar ao segundo piso. Considere $cos\ 60° = \frac{1}{2}$.

6. Uma pessoa, ao observar um edifício sob um ângulo de 45°, conseguiu identificar o 20o andar do edifício. Sabendo que essa pessoa estava a 60 m do edifício e que todos os andares têm a mesma altura, calcule a altura de cada andar. Considere $sen\ 45° = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Um submarino A, que se encontra a uma profundidade de 400 m no mar, detecta dois barcos B e C na superfície da água sob ângulos de 62° e 40°, respectivamente, medidos entre a direção dos barcos e a direção perpendicular à superfície, como mostra a figura:



Qual é a distância aproximada entre os dois barcos? Considere $tg\ 62° \approx\ 1{,}9\ e\ tg\ 40° \approx\ 0{,}8$.

Anexo I – Rubrica para a avaliação das apresentações

Critério	Descrição	Nível 1 (Insuficiente)	Nível 2 (Parcial)	Nível 3 (Adequado)	Nível 4 (Excelente)
1. Clareza e organização da fala.	O grupo comunica suas ideias de forma clara, estruturada e objetiva?	Fala desorganizada e difícil de entender.	Alguma clareza, mas com repetições ou falta de coesão.	Fala clara, com começo, meio e fim definidos.	Fala bem estruturada, fluida, com ótima articulação de ideias.
2. Autonomia e domínio do conteúdo.	Os integrantes demonstram segurança e conhecimento sobre o tema?	Leitura direta, insegurança ou desconheciment o do tema.	Uso excessivo de anotações, com pouca segurança.	Fala com segurança e domínio geral do conteúdo.	Domínio completo do conteúdo, com linguagem segura e articulada.
3. Participação e cooperação no grupo.	Os membros dividiram bem as falas e se ajudaram mutuamente?	Um ou dois integrantes falam por todos.	Participação desigual, mas com cooperação pontual.	Boa divisão de falas e colaboração durante a apresentação.	Participação equilibrada, com forte espírito de equipe e apoio mútuo.
4. Empatia e escuta ativa.	Demonstram respeito ao público e respondem com empatia?	Ignoram perguntas ou reagem com impaciência.	Respondem sem clareza ou com pouca atenção ao outro.	Ouvem com atenção e respondem com respeito.	Respondem com empatia, respeito e valorizam a fala do outro.
5. Argumentaçã o e pensamento crítico.	Apresentam conclusões baseadas em dados e refletem criticamente?	Repetem informações sem interpretar ou justificar.	Fazem generalizaçõ es com pouca base nos dados.	Relacionam dados com o problema e argumentam com lógica.	Conectam evidências, interpretam criticamente e propõem reflexões próprias.

Anexo J – Rubrica para a avaliação do relatório final

Critério	Descrição	Nível 1 (Insuficiente)	Nível 2 (Parcial)	Nível 3 (Adequado)	Nível 4 (Excelente)
Clareza na apresentação da questão geradora.	O relatório apresenta e contextualiza bem a pergunta inicial?	A pergunta não é citada ou está desconectada do tema.	A pergunta é citada, mas pouco articulada ao desenvolvimento.	A pergunta está contextualizada e conecta bem com os dados	Apresenta a pergunta de forma clara, crítica e contextualizada.
Qualidade da investigação e uso de dados.	A equipe coletou dados relevantes e os analisou com coerência?	Dados ausentes ou superficiais.	Dados presentes, mas com análise limitada.	Dados consistentes e parcialmente analisados.	Dados reais, bem-organizados e analisados com profundidade.
Aplicação de conceitos matemáticos.	Foram aplicados corretamente conceitos geométricos, trigonométricos e financeiros?	Uso mínimo ou incorreto de conteúdos.	Alguns conteúdos usados corretamente.	Aplicação adequada dos conteúdos principais.	Excelente uso dos conceitos, com explicações e justificativas.
Organização e estrutura do relatório.	O texto está bem-organizado (introdução, desenvolvimento, conclusão)?	Desorganizado e difícil de compreender.	Organização parcial, com alguns erros de estrutura.	Organização satisfatória, linguagem adequada.	Muito bem estruturado, coeso e coerente.
Originalidade, reflexão e protagonismo.	O grupo apresentou ideias próprias, conclusões críticas e envolvimento no processo?	Sem autoria ou apenas reprodução de conteúdo.	Alguma elaboração própria, mas pouco reflexiva.	Mostra envolvimento e interpretação do problema	Demonstra autoria, reflexão crítica e protagonismo investigativo.

Anexo K – Instrumento avaliativo diagnóstico

Parte 1 – Conhecimentos matemáticos (individual)

Instruções: responda as questões abaixo com base no que você já sabe. Não se preocupe com erros – o objetivo é conhecer o que você já aprendeu até agora.

1. Você sabe como calcular a área de um telhado? Quais formas geométricas você usaria?
2. Você já ouviu falar sobre o uso de painéis solares? Que vantagens ou desvantagens imagina?
3. Se sua casa consumisse R$ 300 de energia elétrica por mês, quanto você gastaria por ano?
4. Explique, com suas palavras, o que é um ângulo. Para que você acha que ele pode ser útil?
5. Você sabe o que é "economia" ou "retorno de investimento"? Dê um exemplo.

Parte 2 – Autoavaliação socioemocional (individual)

Instruções: Marque o quanto você se identifica com cada afirmação (escala de 1 a 5).
1 = Nunca / 2 = Raramente / 3 = Às vezes / 4 = Frequentemente / 5 = Sempre

Afirmação	Consigo trabalhar bem em grupo, ouvindo os colegas e dando minha opinião	Gosto de resolver problemas que envolvam situações da vida real	Sei escutar ideias diferentes das minhas com respeito	Quando não entendo algo, busco pesquisar ou perguntar	Gosto de apresentar ou explicar ideias para outras pessoas
Identificação					

Parte 3 – Observação do professor

Critério observado	Descrição	Anotações do professor
Participação espontânea	O aluno contribui com perguntas ou ideias durante discussões?	
Trabalho em grupo	O aluno coopera, escuta os outros, evita conflitos?	
Autonomia	O aluno busca soluções por conta própria ou depende muito de instruções?	
Comunicação oral	O aluno se expressa com clareza, respeito e segurança?	