

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA- IM  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL (PROFMAT)

JOSÉ ALBUQUERQUE MATOS NETO

**PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: UMA EXPERIÊNCIA COM O  
PIC-OBMEP**

Maceió  
2026

JOSÉ ALBUQUERQUE MATOS NETO

**PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: UMA EXPERIÊNCIA COM O  
PIC-OBMEP**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

Maceió  
2026

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

M433p     Matos Neto, José Albuquerque.  
Princípio fundamental da contagem : uma experiência com o PIC-OBMEP / José Albuquerque Matos Neto. - 2026.  
137 f. : il.

Orientador: Isnaldo Isaac Barbosa.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2026.  
Inclui produto educacional.

Bibliografia: f. 114-115.  
Apêndices: f. 117-124.

1. Olimpíada Brasileira Matemática das Escolas Públicas. Programa de Iniciação Científica Júnior. 2. Princípio fundamental da contagem. 3. Resolução de problemas. 4. Análise combinatória. I. Título.

CDU: 519.1

## **Folha de Aprovação**

**JOSÉ ALBUQUERQUE MATOS NETO**

### **PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: UMA EXPERIÊNCIA COM O PIC-OBMEP**

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) apresentada em 27 de fevereiro de 2026.

#### **Banca Examinadora:**

---

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa  
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

---

Examinador interno: Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo  
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

---

Examinador externo: Prof. Dr. Daniel Nicolau Brandão  
Universidade Estadual de Alagoas (UNEAL)

Dedico este trabalho a minha mãe, Rosângela e aos meus avôs José Júlio e Marinalva que se dedicaram a minha criação e minha educação.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, que me permitiu o meu nascimento, saúde e inteligência para traçar um caminho acadêmico e a escrita desse trabalho.

Aos meus familiares principalmente, a minha mãe Rosângela e avôs: Júlio e Marinalva, que se dedicaram a minha educação me apoiando constantemente nos meus sonhos. A minha esposa Mércia pelo apoio, paciência e estímulo.

Ao professor doutor Isnaldo Isaac Barbosa, pela dedicação de ser o orientador deste trabalho e auxiliar no meu impulso profissional. Agradeço pelos seus conhecimentos, tempo e orientação que me proporcionaram crescimento profissional.

A equipe gestora e profissionais que fizeram parte do meu desenvolvimento como pesquisador, já que permitiram participar do programa de desenvolvimento e mentoria de alunos para a OBMEP, em especial a Alexandrina Gouveia e Antônio Fernandes. Esse programa permitiu obter várias medalhas e desenvolver o pensamento lógico matemático de diversos estudantes impulsionando meu entendimento sobre a docência e o processo de aquisição de conhecimento.

Aos amigos que me acompanharam nessa jornada do mestrado e nas lutas diárias na Universidade apoiando-se na construção de uma educação com qualidade e valorização da pesquisa.

Enfim, obrigado a todos!

Epígrafe

*“A Matemática é o motor que faz o universo se mover e a humanidade progredir”.*

(CLEBY FRANCISCO)

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo realizar uma revisão bibliográfica sobre o princípio fundamental da contagem e sua aplicabilidade no contexto escolar por meio das questões apresentadas nas Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Assim, para uma vasta investigação baseamos no ensino por meio da resolução de problemas do livro Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) com discussões relacionada a aplicabilidade metodológica e apresentação de uma Sequência Didática (SD) relacionadas ao princípio fundamental da contagem como sugestão de problemas de contagem inspirados na OBMEP e livro do PIC para os professores da Rede Pública. Nesse sentido, buscamos respostas para o seguinte questionamento: Como as questões relacionadas ao princípio fundamental da contagem estão apresentadas no livro PIC e sua aplicabilidade na OBMEP e quais estratégias o professor pode utilizar para ampliar a compreensão sobre a temática? Além disso, a pesquisa se norteia pelos objetivos específicos de refletir sobre as estratégias de ensino por meio da resolução de problemas relacionados a contagem, proporcionar ao aluno por meio da resolução de problemas a construção do seu próprio conhecimento, compreender o contexto interpretativo das questões apresentadas no livro/apostila trabalhadas no programa PIC e os caminhos resolutivos e criar uma sequência didática com a finalidade de consulta para os professores no futuro. Para alcançar esse objetivo realizaremos uma revisão bibliográfica e um estudo aprofundado sobre os livros do PIC e a resolução de problemas dialogando com diferentes autores que pesquisam sobre o assunto como: Paulo Cezar Pinto Carvalho (livro do PIC: métodos de contagem e probabilidade, 2017). A pesquisa foi desenvolvida baseada na revisão bibliográfica de conteúdo com a elaboração de uma sequência didática sugestiva para os professores de 6º ao 9º ano que desejam utilizar o método de resolução de problemas no tratamento de ideias/questões como treinamento para a OBMEP. Assim, com relatos exitosos de aplicação reconhecemos a contribuição dos livros/apostila do PIC na aprendizagem dos alunos no entendimento lógico matemático das questões resolvidas.

**Palavras-chave:** Princípio Fundamental da Contagem, Resolução de Problemas, OBMEP, PIC e Análise Combinatória.

## ABSTRACT

The purpose of this study is to conduct a literature review on the fundamental principle of counting and its applicability in the school setting through the problems presented in the Brazilian Public School Mathematics Olympiad (OBMEP). Thus, for a comprehensive investigation, we based our analysis on teaching through problem-solving from the book Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), with discussions regarding methodological applicability and the presentation of a Teaching Sequence (TS) related to the fundamental principle of counting. This serves as a suggestion for counting problems inspired by the OBMEP and the PIC book for public school teachers. In this sense, we seek answers to the following questions: How are issues related to the fundamental principle of counting presented in the PIC book and their applicability in OBMEP, and what strategies can teachers use to enhance understanding of the topic? Furthermore, the research is guided by the specific objectives of reflecting on teaching strategies through the resolution of counting-related problems, enabling students to construct their own knowledge through problem-solving, understanding the interpretive context of the questions presented in the book/workbook used in the PIC program and the paths to their solutions, and creating a teaching sequence to serve as a reference for teachers in the future. To achieve this objective, we will conduct a literature review and an in-depth study of the PIC textbooks and problem-solving, engaging with various authors who research the subject, such as: Paulo Cezar Pinto Carvalho (PIC textbook: Methods of Counting and Probability, 2017). The research was developed based on a literature review of the content, leading to the creation of a suggested teaching sequence for teachers of grades 6 through 9 who wish to use the problem-solving method when addressing concepts and questions as preparation for the OBMEP. Thus, with successful reports of application, we recognize the contribution of the PIC books/workbooks to students' learning in the logical mathematical understanding of the solved problems.

**Keywords:** Fundamental Principles of Counting; Problem Solving; OBMEP; PIC; Combinatorial Analysis.

## LISTA DE SIGLAS

<b>BNCC</b>	Base Nacional Comum Curricular
<b>ENEM</b>	Exame Nacional do Ensino Médio
<b>IDEB</b>	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
<b>IFAL</b>	Instituto Federal de Alagoas
<b>IMPA</b>	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
<b>INEP</b>	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
<b>OBM</b>	Olimpíada Brasileira de Matemática
<b>OBMEP</b>	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
<b>PIC</b>	Programa de Iniciação Científica Júnior.
<b>POTI</b>	Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
<b>PFC</b>	Princípio Fundamental da Contagem
<b>PTT</b>	Produto Técnico-Tecnológico
<b>SAEB</b>	Sistema de Avaliação da Educação Básica

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Ilustração princípio básico para contar .....	20
<b>Figura 2:</b> Página principal da OBMEP .....	31
<b>Figura 3:</b> Capa das apostilas utilizadas na pesquisa .....	36
<b>Figura 4:</b> Situação problema (1) .....	42
<b>Figura 5:</b> Bandeiras (1) .....	43
<b>Figura 6:</b> Bandeiras (1.1) .....	44
<b>Figura 7:</b> Árvore de enumeração (1) .....	45
<b>Figura 8:</b> Árvore de enumeração (1.1) .....	46
<b>Figura 9:</b> Situação Problema (2) .....	47
<b>Figura 10:</b> Árvore de enumeração (2) .....	48
<b>Figura 11:</b> Situação Problema (3) .....	49
<b>Figura 12:</b> Enumeração das faixas .....	50
<b>Figura 13:</b> Árvore de enumeração (3) .....	50
<b>Figura 14:</b> Árvore de enumeração (3.1) .....	51
<b>Figura 15:</b> Árvore de enumeração (3.2) .....	52
<b>Figura 16:</b> Árvore de enumeração (3.3) .....	54
<b>Figura 17:</b> Exemplo de cores .....	55
<b>Figura 18:</b> Situação problema (5) .....	55
<b>Figura 19:</b> Exemplo- caso zero não escolhido no terceiro ou segundo algoritmo .....	56
<b>Figura 20:</b> Situação problema (7) .....	58
<b>Figura 21:</b> Situação problema (8) .....	59
<b>Figura 22:</b> Situação problema (9) .....	61
<b>Figura 23:</b> Situação problema (10) .....	62
<b>Figura 24:</b> Situação problema (12) .....	65
<b>Figura 25:</b> Situação problema (13) .....	66
<b>Figura 26:</b> Questão 7 da OBMEP 2006 (Prova 1ª fase- nível 1) .....	69
<b>Figura 27:</b> Questão 15 da OBMEP 2006 (Prova 1ª fase- nível 2) .....	71
<b>Figura 28:</b> Questão 18 da OBMEP 2008 (Prova 1ª fase- nível 1) .....	72
<b>Figura 29:</b> Questão 5 da OBMEP 2012 (Prova 2ª fase- nível 1) .....	73
<b>Figura 30:</b> Questão 5 da OBMEP 2012 (Prova 2ª fase- nível 2) .....	76
<b>Figura 31:</b> Questão 13 da OBMEP 2013(Prova 1ª fase- nível 1) .....	77
<b>Figura 32:</b> Questão 16 da OBMEP 2013(Prova 1ª fase- nível 2) .....	78

<b>Figura 33:</b> Questão 19 da OBMEP 2013(Prova 1ª fase- nível 2) .....	79
<b>Figura 34:</b> Questão 17 da OBMEP 2013(Prova 1ª fase- nível 3) .....	81
<b>Figura 35:</b> Questão 18 da OBMEP 2015 (Prova 1ª fase- nível 2) .....	82
<b>Figura 36:</b> Questão 6 da OBMEP 2015 (Prova 2ª fase- nível 1) .....	84
<b>Figura 37:</b> Questão 18 da OBMEP 2016(Prova 1ª fase- nível 3) .....	85
<b>Figura 38:</b> Questão 17 da OBMEP 2017(Prova 1ª fase- nível 1) .....	87
<b>Figura 39:</b> Questão 11 da OBMEP 2017(Prova 1ª fase- nível 2) .....	88
<b>Figura 40:</b> Questão 5 da OBMEP 2017(Prova 2ª fase- nível 1) .....	89
<b>Figura 41:</b> Questão 17 da OBMEP 2018(Prova 1ª fase- nível 1) .....	92
<b>Figura 42:</b> Questão 19 da OBMEP 2018(Prova 1ª fase- nível 1) .....	93
<b>Figura 43:</b> Questão 14 da OBMEP 2018(Prova 1ª fase- nível 2) .....	95
<b>Figura 44:</b> Questão 19 da OBMEP 2018(Prova 1ª fase- nível 2) .....	96
<b>Figura 45:</b> Questão 2 da OBMEP 2018(Prova 2ª fase- nível 2) .....	97
<b>Figura 46:</b> Questão 12 da OBMEP 2019(Prova 1ª fase- nível 1) .....	97
<b>Figura 47:</b> Questão 16 da OBMEP 2019(Prova 1ª fase- nível 2) .....	98
<b>Figura 48:</b> Questão 5 da OBMEP 2021(Prova 2ª fase- nível 1) .....	99
<b>Figura 49:</b> Questão 17 da OBMEP 2022(Prova 1ª fase- nível 2) .....	100
<b>Figura 50:</b> Questão 20 da OBMEP 2023(Prova 1ª fase- nível 1) .....	100
<b>Figura 51:</b> Questão 11 da OBMEP 2023(Prova 1ª fase- nível 2) .....	101
<b>Figura 52:</b> Questão 5 da OBMEP 2023(Prova 2ª fase- nível 1) .....	101
<b>Figura 53:</b> Questão 4 da OBMEP 2023(Prova 2ª fase- nível 2) .....	102
<b>Figura 54:</b> Questão 6 da OBMEP 2023(Prova 2ª fase- nível 3) .....	102
<b>Figura 55:</b> Questão 12 da OBMEP 2024(Prova 1ª fase- nível 1) .....	103
<b>Figura 56:</b> Questão 17 da OBMEP 2024(Prova 1ª fase- nível 1) .....	103
<b>Figura 57:</b> Questão 15 da OBMEP 2024(Prova 1ª fase- nível 2) .....	104
<b>Figura 58:</b> Questão 6 da OBMEP 2024(Prova 2ª fase- nível 1) .....	104
<b>Figura 59:</b> Questão 13 da OBMEP 2025(Prova 1ª fase- nível 1) .....	105

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1:</b> Diagrama de árvore do princípio da multiplicação.....	21
<b>Quadro 2:</b> Diagrama de exemplificação (Permutação) .....	23
<b>Quadro 3:</b> Premiação Escola Municipal Liege Gama Rocha de 2013 a 2025 .....	110
<b>Quadro 4:</b> Evolução da nota Saeb .....	111

## SUMÁRIO

<b>1.INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>2. CONTEXTUALIZAÇÃO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA</b> .....	16
2.1 Princípio Fundamental da Contagem .....	19
2.2 Métodos de Contagem (arranjo, permutação e combinação) .....	23
<b>3. PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIC) E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM</b> .....	31
3.1 Programa de Iniciação Científica (PIC) .....	33
3.2 Resolução de problemas e o Princípio Fundamental da contagem .....	40
3.3 Cenários e contexto da OBMEP: Aplicabilidade dos problemas de contagem .....	68
<b>4. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: Experiência, produção e análise de dados</b> .....	105
4.1 PIC- CORURIFE: Uma produção de sucesso .....	107
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	112
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	114
<b>APÊNDICES</b> .....	116
<b>PRODUTO EDUCACIONAL</b> .....	125

## 1. INTRODUÇÃO

Desde os primórdios o homem utiliza métodos de agrupamento e contagem a partir das suas necessidades de subsistência, como por exemplo: demandas de contagem com os objetos e animais que possuíam. De fato, os pastores utilizam pedras para contar seu rebanho e atualizar diariamente seus ganhos e percas no campo. A partir das necessidades evolutivas se fez necessário novas formas para determinar a quantidade de elementos independente do conjunto. Nesse sentido, o princípio fundamental da contagem ou multiplicativo apresenta como ferramenta de contagem para calcular as possibilidades de combinação entre os conjuntos. Essas categorias de análise são entendidas com dificuldades pelos alunos, que muitas vezes não entendem os princípios básicos da multiplicação. Assim, em decorrência da minha vivência em sala de aula e as inquietações sobre como os alunos aprendem essas categorias de análise de contagem senti a necessidade de buscar formas para transmitir esse conhecimento.

Nesse contexto, o papel do professor é de suma importância para o desenvolvimento aplicável da matemática, visto que, apresentar a resolução de problemas em contexto de provas de olimpíadas instiga os alunos possibilitando engajamento e conseqüentemente aprender os assuntos propostos. Assim, ao propor trabalhar o Princípio Fundamental da Contagem se faz necessário mostrar a sua aplicabilidade em problemas do cotidiano de forma a impulsionar os alunos a familiaridade de como é resolver problemas do dia - dia. A autonomia resolutiva também é instigada no sentido de que os alunos compreendam que a partir dos princípios básicos alcancem os conceitos mais complexos sem a necessidade de decorar fórmulas.

Ao trabalhar nessa perspectiva os conteúdos se tornam aplicáveis, pois nas oficinas foram estimuladas a autonomia no entendimento e construção da resolução, assim, traçando diferentes caminhos resolutivos para a mesma questão. Diante do exposto, a presente pesquisa baseia-se na seguinte problemática:

**Como as questões relacionadas ao princípio fundamental da contagem estão apresentadas no livro PIC e sua aplicabilidade na OBMEP e quais estratégias o professor pode utilizar para ampliar a compreensão sobre a temática?**

Vejam os que, essa problemática surge a partir das inquietações do pesquisador juntamente com a observação das dificuldades enfrentadas pelos alunos em sala de aula. Assim, a presente pesquisa busca na primeira seção realizar uma revisão bibliográfica sobre a literatura acerca do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), estruturando o diálogo na discussão dos aspectos teóricos já presente na literatura por meio do desenvolvimento e ampliação nos resultados e

discussões onde será elencado os dados já encontrados e sugestões de atividades para o desenvolvimento do pensamento da contagem.

Vale destacar que o presente trabalho tem por objetivos específicos: refletir sobre as estratégias de ensino por meio da resolução de problemas relacionados a contagem, proporcionar ao aluno por meio da resolução de problemas a construção do seu próprio conhecimento, compreender o contexto interpretativo das questões apresentadas no livro/apostila trabalhadas no programa PIC e os caminhos resolutivos e criar uma sequência didática com a finalidade de consulta para os professores no futuro. Esses objetivos surgiram a partir da vivência do pesquisador/professor que ao lecionar no Ensino Fundamental 2 percebeu as dificuldades interpretativas em questões contextualizadas da OBMEP.

Outro ponto observado, ao lecionar no segmento 6º ao 9º ano na rede municipal, foi que os alunos apresentam dificuldades na resolução de problemas de contagem. O que resultou na abordagem desses conteúdos em sala de aula, com diferentes problemas pertinentes ao contexto dos alunos, como por exemplo: problemas de colorir a bandeira do Brasil com um número determinado de cores, assim, na sala de aula esse problema pode ser abordado de diferentes formas desenvolvendo uma reflexão sobre o conhecimento que os alunos já possuem.

As reflexões mediadas com os alunos sobre a interpretação dos enunciados das questões permitiram a elaboração de estratégias lógico-matemáticas que suscitaram novos elementos resolutivos, fomentando o raciocínio combinatório. Diante das dificuldades diagnosticadas em sala de aula, delineou-se uma sequência didática a ser aplicada em oficinas de resolução de problemas no contraturno. Tais atividades voltaram-se aos discentes interessados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), transcendendo o grupo de premiados e abrangendo todos que buscavam o aprofundamento na disciplina. Sob essa ótica, a **resolução de problemas** constituiu-se como **ferramenta metodológica** para articular o conhecimento prévio dos estudantes às exigências das olimpíadas científicas, essa metodologia é explicada e detalhada a partir da seção 3.2. Convém ressaltar que embora as oficinas de reforço básico para a olimpíada ocorressem desde 2013 no turno contrário aos das aulas normais, as inquietações do pesquisador em 2017 culminaram na incorporação de novas perspectivas metodológicas, elevando o nível de abstração e compreensão do alunado.

Nesse sentido, foram utilizadas as apostilas do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), com foco no desenvolvimento das habilidades resolutivas, compreendendo a redação de problemas e soluções, além da leitura e interpretação de textos matemáticos vinculados ao estudo aprofundado e aplicado da matemática. Para a preparação das oficinas do Ensino Fundamental 2, foram utilizados os quatro volumes das apostilas intitulados: 1- Encontros de Aritmética; 2- Métodos de Contagem

e Probabilidade; 3- Teorema de Pitágoras e Áreas; 4- Encontros de Geometria parte 1, esses volumes serão discutidos com mais profundidade nas próximas seções. A presente pesquisa foi dividida em várias etapas, nas quais, se realizaram, inicialmente, a revisão bibliográfica, relato de experiência da aplicação do livro do PIC e os resultados encontrados com a metodologia utilizada.

Diante disso, o presente trabalho está dividido do seguinte modo: Na primeira seção, trata-se do que é o Princípio Fundamental da Contagem, seu surgimento e desdobramento das metodologias práticas como: arranjo, permutação e combinação. Na segunda seção, apresento as expectativas do PIC e a resolução de problemas relacionados à contagem. Vale destacar que as oficinas práticas pesquisadas estão relacionadas a questões dessa natureza. E por fim, na terceira seção, a explanação prática com a descrição das experiências realizadas e os resultados obtidos juntamente com a elaboração do produto educacional.

## **2. CONTEXTUALIZAÇÃO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA**

A análise combinatória é uma área da matemática que costuma ser difícil tanto para o aluno como para o professor. Não é incomum surgirem problemas que os próprios educadores sintam dificuldade em resolver; daí a importância de se aperfeiçoar, buscando novas metodologias e até inovando no ensino dessa disciplina. A resolução de problemas com situações do cotidiano é utilizada para instigar o raciocínio lógico, aguçando a curiosidade e impulsionando a compreensão sobre a análise combinatória.

A compreensão do desenvolvimento histórico da combinatória constitui um pilar essencial na formação do educador, visto que o domínio da evolução desses conceitos fortalece a transposição didática em sala de aula. Afinal o que é análise combinatória?

Segundo Morgado (1991, p. 01),

[...] a Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações (conceitos que permitem resolver um tipo de problemas de Análise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos.), de outras técnicas para atacá-los: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas de Análise Combinatória.

Em uma visão baseada nos livros didáticos do segundo ano do Ensino Médio, onde esse conteúdo matemático é abordado, Paiva (2009, p.15) destaca que “A análise combinatória é o ramo da matemática voltado ao estudo de metodologias para a resolução de problemas de contagem”, ou seja, que não precise contar as possibilidades uma a uma, por exemplo determinar o número de possibilidades de senhas, maneiras possíveis de escolher números sorteados em loterias. Paiva

(2009) ainda destaca que a análise combinatória estuda problemas que envolvem os números naturais e as operações básicas de: soma, subtração, multiplicação e divisão.

Data-se que a análise combinatória começou com o desenvolvimento do triângulo de Pascal, mas que não foi o matemático francês Blaise Pascal (1623-1662) quem descobriu, pois, esse triângulo já era conhecido por volta do ano 1300, pelo chinês Chu Shi-Kié e foi aperfeiçoado por Pascal. Assim iniciou um estudo sobre as possibilidades que mais tarde resultou no desenvolvimento da Análise combinatória a partir dos problemas encontrados nos jogos de azar. Segundo, Mota (2017, p.4)

A necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos jogos gerou o estudo dos métodos de contagem. Grandes matemáticos se ocuparam com o assunto: o italiano Niccollo Fontana (1500 - 1557), conhecido como Tartaglia, e os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623 – 1662). A análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sobre certas condições.

Assim, os jogos de azar impulsionaram o desenvolvimento de técnicas que previssem maneiras seguras de encontrar os resultados certos, ampliando as chances de os jogadores ganharem. Nesse sentido, com a criação das técnicas de contagem, muitos matemáticos antigos se destacaram, por exemplo, Euler (1707-1783) que a partir das funções geradoras desenvolveu estudos em torno de problemas relacionados a partições de um número inteiro. Assim, segundo Morgado (1991, p.4), “O interesse de Euler por este problema surgiu devido a uma pergunta que lhe foi feita pelo matemático francês Phillippe Naudé, em uma carta, na qual entre outras coisas, perguntava de quantas maneiras um número pode ser escrito como soma de inteiros positivos distintos”. A partir da resposta do matemático, desenvolveu-se a “teoria das partições”, trazendo contribuições principalmente no campo da probabilidade.

Além disso, destaca-se historicamente que o matemático Bhaskara (1114 – 1185) já realizava cálculos de permutações, combinações e arranjos para o número  $n$  de objetos. Ampliando o contexto histórico, segundo Mota (2017), outros matemáticos tiveram destaque para o desenvolvimento da Análise combinatória que conhecemos hoje como, por exemplo: Abraham De Moivre (1667- 1754), Daniel Bernoulli (1700 – 1782) e Jacques Phillippe Marie Binet (1786 – 1856), que demonstraram como achar diretamente os números de Fibonacci – Moivre, especificamente, utilizou técnicas das funções geradoras.

Observa-se pelos estudos que a teoria da probabilidade se originou com Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665), após Chevalier de Méré, jogador de cartas, discutir por meio de correspondência com Pascal envolvendo problemas relativos a como ganhar nos jogos de cartas. Segundo Morgado (1991, p.06) “Despertado seu interesse pelo assunto, Pascal correspondeu-

se com Fermat sobre o que hoje chamaríamos de probabilidades finitas”, com isso, a teoria da probabilidade começava a se desenvolver e aplicou aos estudos de jogos de cartas. A probabilidade em jogos de azar sempre instigou o ser humano para desvendar maneiras seguras de ganhar. Assim, [...] “o desenvolvimento da Análise Combinatória deve-se em grande parte à necessidade de resolver problemas de contagem originados na teoria das probabilidades”, como citado por Morgado (1991, p. 06). Além da aplicabilidade nos jogos percebeu-se a utilidade da teoria das probabilidades em situações de taxas de mortalidade, doenças, prêmios e outros. Morgado (1991) destaca que em 1662, John Graunt (1620-1674) utilizou esses registros relacionados a falecimento para determinar a mortalidade em Londres.

Nessa perspectiva o estudo da Análise combinatória surgiu a partir dos jogos de azar, como baralho, dados, entre outros e da teoria das probabilidades que apresenta muitos problemas interessantes que desenvolveram estudos relacionados a temática. O matemático que mais contribuiu para o desenvolvimento dessa teoria foi Laplace (1749 – 1827) seus trabalhos sobre a probabilidade foram incorporados ao “Tratado Analítico das Probabilidades”, introduzindo técnicas para a resolução de probabilidade como as funções geradoras. Conforme aponta Morgado (1991, p.10), “funções geradoras, aproximações para probabilidades usando os métodos do cálculo integral”, esta técnica impulsionou a pesquisa sobre a descrição do comportamento de uma variável aleatória discreta ou contínua.

Nessa perspectiva, observa-se que o desenvolvimento dos estudos sobre a Análise combinatória partiu da necessidade prática do princípio fundamental da contagem. Atualmente, esse conteúdo é apresentado aos alunos no Ensino Médio por meio de fórmulas prontas para resolver problemas envolvendo permutações, arranjos e combinações. Entretanto, partindo do princípio da contagem a análise combinatória poderia ser apresentada mais cedo e de forma lúdico-constructiva não só com apresentação de fórmulas para resolver problemas sem contextualização com a vivência dos estudantes, pois a contagem já está presente na vida dos alunos desde a infância com a contagem de numerais e quantidades.

Nesse sentido, a presente dissertação tem como objetivo partir do princípio fundamental da contagem, desenvolver o raciocínio lógico-combinatório com a explanação de problemas do contexto dos alunos, que aproximem sua vivência às técnicas de análise combinatória. Para isso utilizaremos problemas contextualizados do livro do PIC com aplicação vivenciada pelo pesquisador, esses pontos serão discutidos e detalhados na próxima seção.

## 2. 1 Princípio Fundamental da Contagem

Nos primórdios, a contagem surgiu a partir da necessidade de subsistência humana para contar, por exemplo, alimentos e grupos de animais. Vale destacar que o surgimento dos símbolos como registro das quantidades surgiu a partir da necessidade de registrar quantidades de insumo para organizar a sociedade e sua subsistência, como agricultura, economia e construção civil. Em verdade, a partir da escrita dos símbolos e seu aprimoramento até a construção dos algarismos conseguimos delinear uma linha tênue entre a relação do numeral e sua representatividade quantitativa como conhecemos hoje. Segundo Roque (2019, p. 04-05)

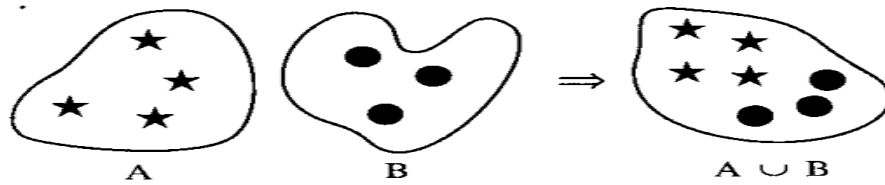
Os primeiros numerais não eram símbolos criados para representar números abstratos, mas sinais impressos que indicavam, por exemplo, medidas de grãos. Em um segundo momento, as marcas que representavam as quantidades passaram a ser acompanhadas de ideogramas que se referiam aos objetos contados. Este foi um passo em direção à abstração, pois o registro das quantidades podia servir para coisas de natureza distintas, tanto que surgiu a necessidade de se indicar o que era contado.

A necessidade da contagem está relacionada empiricamente ao convívio na sociedade e em tarefas básicas do dia a dia. Não é à toa que a primeira coisa que aprendemos na escola é a “contar” e relacionar a quantidade aos algarismos, assim, as operações básicas são introduzidas a partir dos métodos de contagem e agrupamento como é o caso da adição. Mas o que é “contar”, segundo Morgado (1991, p. 17): “[...] enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos”, e isso está relacionado a diversas aplicações no nosso cotidiano, por exemplo, a compra e venda de mercadorias.

Nesse sentido, a introdução das operações básicas no sistema de ensino é aplicada a problemas de contagem dos elementos de um conjunto com outro para determinar o total. Segundo Araújo (2021, p. 15), “Os princípios de contagem aditivo e multiplicativo fundamentam a resolução de problemas de análise combinatória, além de diagramas (ou árvores) de possibilidades e tabelas”. Assim, o autor discute sobre a importância da contagem no desenvolvimento de formas para calcular as condições de acontecimentos, ou seja, as possibilidades de determinados eventos ocorrerem, como nos jogos de azar para acertar os números sorteados.

Outro aspecto relativo à contagem está relacionado aos resultados da reunião de conjuntos. Araújo (2021, p. 16) destaca que: “O princípio aditivo da contagem parte dos resultados da teoria dos conjuntos para calcular o número de elementos decorrentes da união de dois conjuntos”. Como podemos observar na figura 1 a seguir.

**Figura1: Ilustração princípio básico para contar**



Fonte: Morgado (1991)

Essa Ilustração apresenta dois conjuntos A e B que ao ser unidos resulta em um novo conjunto de elementos  $A \cup B$ , que podemos evidenciar a exemplificação do “Princípio da Adição”, definida por Morgado (1991): “Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então  $A \cup B$  possui  $p + q$  elementos”. Assim, esse é o primeiro princípio ensinado na escola sobre as contagens dos elementos.

Além do Princípio Aditivo, apresentaremos também o Princípio Multiplicativo, que juntos constituem ferramenta básica para compreender os problemas de contagem relacionados a análise combinatória sem necessidade de decorar fórmulas. Nesse sentido, conhecer a fundo esses dois princípios fornece subsídios para os alunos compreenderem e resolverem problemas de contagem. Não é desprezando a aplicação de fórmulas, mas sim impulsionando o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático conseguindo entender e resolver diferentes questões.

Vale destacar que, em relação a temática da contagem diversos documentos sugerem diferentes propostas para os professores da rede trabalharem em sala de aula, como é o caso da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018 que estabelece em seu currículo problemas de contagem desde os Anos Iniciais (4º e 5º anos) do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Segundo Araújo (2021, p. 10) a BNCC aponta diversos problemas que envolvem o número de possibilidades referente a grupos e quantidades de elementos: “[...] esses problemas envolvem a determinação do número de possibilidades de certo agrupamento ou da quantidade de elementos de diferentes agrupamentos.” Portanto, a contagem pode ser trabalhada desde cedo para desenvolver pensamentos iniciais sobre a combinação de elementos e agrupamentos possíveis sem necessitar de fórmulas, as soluções são desenvolvidas a partir da interpretação como é proposto nessa dissertação.

Nessa perspectiva, com o desenvolvimento do pensamento lógico-combinatório a partir das interpretações de problemas multiplicativos, pode-se almejar o tratamento desse conteúdo desde os Anos Iniciais e, posteriormente, elevando gradativamente o nível de dificuldades nas séries finais. Vale destacar que problemas relacionados à análise combinatória estão presentes em diferentes exames de seleção como, por exemplo, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

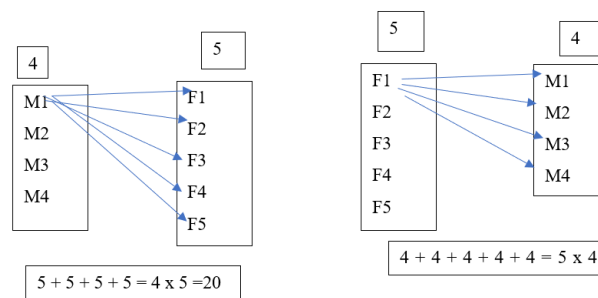
Sobre o “Princípio Multiplicativo”, destacamos que o mesmo junto com o “Princípio aditivo” é fundamental à resolução de problemas relacionados a análise combinatória. Segundo Araújo (2021, p. 15): “Os princípios de contagem aditivo e multiplicativo fundamentam a resolução de problemas de análise combinatória, além de diagramas (ou árvore) de possibilidades e tabelas”. Nessa perspectiva, o princípio multiplicativo fundamenta-se no produto do número de elementos dos eventos envolvidos, ou seja, surti da soma de parcelas iguais, assim Araújo (2021) destaca que “[...] o princípio multiplicativo focará no total de maneiras de um evento ocorrer e o outro também. Esse total é igual ao produto dos números de possibilidades”, essa explicação pode ser exemplificada no problema a seguir.

**1- Em um parquinho existem 4 meninos e 5 meninas. De quantos modos é possível selecionar um casal menino-menina?**

Raciocínio para melhor compreensão do princípio fundamental da contagem:

Para cada menino escolhido existem 5 meninas para formar o casal, logo temos 5 casais possíveis para cada menino, logo o total de casais é:  $5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5 = 20$ . Ou para cada menina escolhida existem 4 meninos para formar o casal, logo temos 4 casais possíveis para cada menina, logo o total de casais é  $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \times 4$ . Tem que ficar claro para o aluno que ele pode fazer a contagem começando pelos meninos ou meninas, pois o resultado será o mesmo. Chamando os meninos de M1, M2, M3 e M4 e as meninas de F1, F2, F3, F4 e F5. Fixando M1 temos 5 casais:  $\{(M1,F1),(M1,F2),(M1,F3),(M1,F4),(M1,F5)\}$ , fixando M2 temos 5 casais:  $\{(M2,F1),(M2,F2),(M2,F3),(M2,F4),(M2,F5)\}$ , fixando M3 temos 5 casais:  $\{(M3,F1),(M3,F2),(M3,F3),(M3,F4),(M3,F5)\}$ , fixando M4 temos 5 casais:  $\{(M4,F1),(M4,F2),(M4,F3),(M4,F4),(M4,F5)\}$ , o que nos dá  $5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5 = 20$  casais. Analogamente chegamos à mesma resposta fixando uma menina. No diagrama da árvore tem que ficar claro esse raciocínio.

**Quadro 1: Diagrama de árvore do princípio da multiplicação**



Fonte: O autor (2025)

Nota-se que, o Princípio fundamental da contagem permite determinar a quantidade de elementos e possibilidades dentro de um conjunto sem necessitar enumerar os elementos um por um. Tal princípio é definido por Morgado (1991), da seguinte forma: “Se uma decisão d1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d1, a decisão d2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d1 e d2 é xy”. Nesse sentido, podemos observar sua aplicabilidade no exemplo do parquinho.

Assim no exemplo dado acima, para formar um casal devemos tomar as decisões:

d1: escolha do menino;

d2: escolha da menina.

Como d1 pode ser tomada de 4 maneiras e, depois disso, d2 pode ser tomada de 5 maneiras, o número de maneiras de formar um casal ( Isto é , de tomar decisões d1 e d2) é  $4 \times 5 = 20$ , observe que escolhemos como primeira decisão, a decisão d1: escolher o menino, poderíamos ter escolhido começar a primeira decisão em escolher a menina e a resposta seria a mesma, no final invés de  $4 \times 5$  teríamos  $5 \times 4 = 20$ , isso tem que ficar claro para os alunos.

Dessa forma, o princípio multiplicativo permite encontrar o número de elementos do conjunto sem a necessidade de contar um por um. Outro ponto, observado no exemplo acima é a utilização do raciocínio lógico e interpretação para a resolução do problema proposto sem necessitar de fórmulas prontas para encontrar o número de elementos. Isso já é sugerido em documentos oficiais nos quais intensificam estratégias para o letramento matemático com questões vinculadas ao contexto dos alunos. De acordo com, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Brasil (2018, p. 275)

[...] Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativos e aditivos e do princípio da casa dos pombos. Outro exemplo é o da resolução de problemas envolvendo as operações fundamentais, utilizando ou não a linguagem algébrica.

Dessa forma, o problema anterior foi resolvido utilizando raciocínio lógico a partir da soma das quantidades de casais fixado uma menina ou menino, bem como sua representação no diagrama de árvore para melhor visualização, a partir das somas chegamos no princípio fundamental da contagem.

Além disso, em problemas mais complexos os alunos podem se utilizar de técnicas derivadas do princípio multiplicativo: arranjo, permutação e combinação), vale destacar que essas categorias serão aprofundadas na próxima seção.

## 2. 2 Métodos de contagem (arranjo, permutação e combinação)

A partir do que foi exposto na seção anterior podemos utilizar de forma adequada o princípio fundamental da contagem, assim, teremos casos particulares desse princípio: arranjo e permutação. Já a combinação nada mais é que a utilização do princípio fundamental da contagem, mais precisamente o arranjo, dividido pelos casos contados a mais (a permutação contada a mais no arranjo).

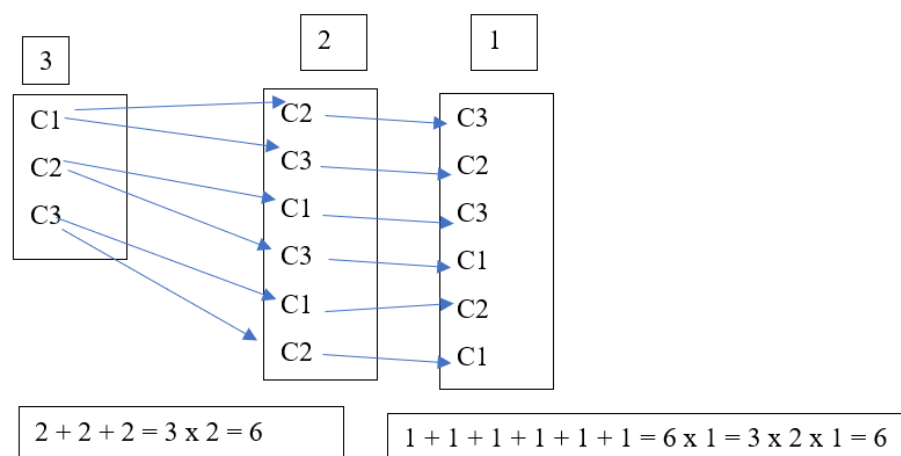
### • Permutações simples

Antes de definirmos o que é uma permutação, vamos utilizar um problema motivador:

#### 2- Em uma praça temos 3 crianças, de quantas maneiras diferentes podemos colocá-las em fila indiana?

Temos 3 posições diferentes na fila: primeiro da fila, segundo da fila e terceiro da fila. Existem 3 possibilidades de escolher o primeiro da fila, para cada uma das 3 possibilidades de escolher o primeiro da fila existem 2 possibilidades de escolher o segundo da fila, utilizando o PFC temos  $3 \times 2 = 6$  possibilidades de escolher o primeiro e o segundo da fila, para cada uma dessas 6 possibilidades existe uma possibilidade de escolher o terceiro da fila, utilizando novamente o PFC, temos  $6 \times 1 = 6$  ou aplicando diretamente de maneira sucessiva o PFC, temos  $3 \times 2 \times 1 = 6$ . Chamando as crianças de C1, C2 E C3 temos o seguinte diagrama

**Quadro 2: Diagrama de exemplificação (Permutação)**



Fonte: O autor (2025)

No diagrama acima para cada criança fixada como primeiro da fila temos 2 possibilidades de crianças como segundo da fila, o que resulta  $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$  possibilidades de colocar em fila o primeiro da fila e o segundo da fila. Para cada uma dessas 6 possibilidades existe uma possibilidade de criança como terceiro da fila, daí temos  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \times 1 = 3 \times 2 \times 1 = 6$  possibilidades de colocar as 3 crianças em fila indiana. O diagrama é útil para mostrar passo a passo a transformação de soma em produto, mostrando o porquê de o princípio fundamental da contagem funcionar. Caso tivéssemos 4 crianças teríamos pelo PFC:  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  maneiras diferentes de colocá-las em fila indiana, se tivéssemos 5 crianças teríamos pelo PFC:  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  maneiras diferentes de colocá-las em fila indiana, generalizando se tivéssemos  $n$  crianças, de quantas maneiras diferentes poderíamos colocá-las em fila indiana? Em matemática quando uma coisa aparece com muita frequência sempre se pensa em dar um tratamento especial a essa coisa. De maneira geral segundo Morgado (1991, p. 27) “Dados  $n$  objetos distintos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . de quantos modos é possível ordená-los?”

Vimos que para ordenar 3 crianças temos  $3 \times 2 \times 1 = 6$  ( $C_1C_2C_3, C_1C_3C_2, C_2C_1C_3, C_2C_3C_1, C_3C_1C_2, C_3C_2C_1$ ), para ordenar 4 crianças temos:  $4 \times 3 \times 2 \times 1$ , para ordenar 5 crianças temos:  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  para ordenar  $n$  objetos temos:  $n$  possibilidades de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar,  $n - 1$  possibilidades de escolher o objeto que ocupará o segundo lugar.  $n - 2$  possibilidades de escolher o objeto que ocupará o terceiro lugar... 3 possibilidades de escolher o objeto que ocupará o antepenúltimo lugar, 2 possibilidades de escolher o objeto que ocupará o penúltimo lugar, 1 possibilidade de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Portanto, utilizando o princípio fundamental da contagem temos por definição de Morgado (1991, p. 27)

O número de modos de ordenar  $n$  objetos distintos é

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Cada ordenação dos  $n$  objetos é chamada de uma permutação simples de  $n$  objetos e o número de permutações simples de  $n$  objetos distintos é representado por  $P_n$ . Assim  $P_n = n!$  (já que  $0! = 1$ , defini-se  $P_0 = 1$ ).

É vantajoso adotar  $0! = 1$  e  $1! = 1$ , isso faz com que algumas fórmulas e alguns conceitos fiquem mais simples. Dessa forma temos:

$$0! = 1 = P_0$$

$$1! = 1 = P_1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = P_2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_3$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 = P_4$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 = P_5$$

...

Como  $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$ , temos por indução finita que:

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! = P_n$$

Chamamos  $n!$  de “ $n$  fatorial”, onde  $n$  é um número natural, ele é o produto de todos os inteiros de 1 até  $n$  (em ordem decrescente), sendo  $1! = 1$  e  $0! = 1$  por definição.

Portanto o número de permutações simples nada mais é que um caso específico do princípio fundamental da contagem. Podemos calcular qualquer número de permutações simples utilizando o PFC. Permutação com repetição e permutação circular serão tratadas no próximo capítulo.

- **Arranjos simples**

Como feito antes de definirmos permutação, vamos utilizar um problema motivador antes de definirmos um arranjo:

**Em uma escola oito alunos passaram para as quartas de final do torneio de tênis de mesa, sabendo que o pódio é composto pelo primeiro lugar (medalha de ouro), segundo lugar (medalha de prata) e terceiro lugar (medalha de bronze), quantos são os possíveis pódios?**

Para a escolha do primeiro lugar temos oito possibilidades, independente da escolha do aluno que vai ocupar o primeiro lugar temos sete possibilidades de escolha para o segundo lugar (pois para cada aluno fixado no primeiro lugar teremos sete possibilidades no segundo lugar), independente da escolha dos alunos que vão ocupar o primeiro e o segundo lugar temos seis possibilidades de escolha para o terceiro lugar (pois fixado um aluno no primeiro lugar e fixado um aluno no segundo lugar sobram seis para o terceiro lugar), pelo PFC a quantidade de pódios é:  $8 \times 7 \times 6 = 336$ . A transformação da soma em produto e o diagrama da árvore desse problema fica como exercício para o leitor. Observe que ao escolher o pódio fixando por exemplo, Pedro no primeiro lugar, João no segundo lugar e Lucas no terceiro lugar (Pedro(1º), João(2º), Lucas(3º)) é diferente de escolher o pódio fixado por exemplo por: João como primeiro lugar, Pedro como segundo lugar e Lucas como terceiro lugar (João(1º), Pedro(2º), Lucas(3º)), nesse caso a **ordem** que escolhemos os alunos **importa**, embora sejam os mesmos alunos nos dois pódios, a colocação que os alunos Pedro e João estão é diferente, tornando os pódios diferentes. Afinal o que é um arranjo? Assim como a permutação simples, um arranjo simples é um agrupamento ordenado.

Podemos reformular o problema anterior da seguinte maneira: Quais e quantos agrupamentos ordenados diferentes de 3 alunos é possível formar com 8 alunos? Ou utilizando o exemplo de permutação modificado: De quantas maneiras podemos colocar 8 pessoas nos 3 primeiros lugares de uma fila? Chamando os alunos de Pedro, João, Lucas, Matheus, Maria, Julia, Alice e Sophia temos os seguintes pódios: (Pedro(1º), João(2º), Lucas(3º)), (Pedro(1º), Lucas(2º), João(3º)), (João(1º), Pedro(2º), Lucas(3º)), (João(1º), Lucas(2º), Pedro(3º)), (Lucas(1º), João(2º), Pedro(3º)), (Lucas(1º), Pedro(2º), João(3º)), (Matheus(1º), João(2º), Lucas(3º))... cada um dos 336 pódios são agrupamentos ordenados diferentes, esses agrupamentos são chamados de arranjos simples. Arranjamos 8 elementos 3 a 3 e o número desses Arranjos foi 336. Escrevemos então:

$$A_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ (Arranjo de 8 tomados 3 a 3 é igual a 336).}$$

Caso tivéssemos no problema anterior 7 alunos, pelo PFC teríamos:  $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ . Dizemos nesse exemplo que fizemos arranjos de 7 elementos 3 a 3, e o número desses arranjos é 210. Indicamos assim:  $A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ . Deixamos como exercício os casos em que tivéssemos 6,5 ou 4 alunos. No caso de termos 3 alunos, pelo PFC teríamos  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ . Dizemos nesse exemplo que fizemos arranjos de 3 elementos 3 a 3, e o número desses arranjos é 6. Indicamos assim:  $A_{3,3} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ . Observe que esse último exemplo é igual a permutação de 3 elementos:  $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ . **A permutação é um caso específico de arranjo.** Caso tivéssemos mais lugares no pódio, quantos seriam os possíveis pódios? Para 4 lugares no pódio teríamos  $A_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$  pódios. Para 5 lugares no pódio teríamos  $A_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$  pódios. Para 6 lugares no pódio teríamos  $A_{8,6} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160$  pódios. Para 7 lugares no pódio teríamos  $A_{8,7} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40320$  pódios. Para 8 lugares no pódio teríamos  $A_{8,8} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$  pódios que é igual a permutação de 8 elementos:  $P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$ . Observe que se tivermos mais de 8 lugares no pódio haveria lugar sem aluno. Vamos generalizar:

Caso tenhamos  $n$  elementos arranjados  $p$  a  $p$ , com  $n \geq p$  como calcular o número total desses agrupamentos, ou seja, calcular  $A_{n,p}$ ? Temos dois casos:

Para  $n = p$  temos  $A_{n,n} = P_n = n!$  (Arranjo de  $n$  tomados  $n$  a  $n$  é igual a permutação de  $n$ )

Para  $n > p$ , temos  $n$  elementos distintos e vamos arranja-los  $p$  a  $p$ . Temos:  $n$  possibilidades para primeira posição,  $n - 1$  possibilidades para a segunda posição,  $n - 2$  possibilidades para a terceira posição ...  $n - (p - 1)$  para  $p$ -ésima posição, Daí pelo PFC:

$$A_{n,p} = n(n - 1)(n - 2) \cdot \dots \cdot [n - (p - 1)]$$

Observe que temos  $p$  fatores na expressão acima e que  $[n - (p - 1)] = n - p + 1$ . A principal dúvida aqui é: como obtivemos o último termo? Como  $A_{n,p}$  tem  $p$  fatores temos: 1 está associado  $n$ , 2 está associado a  $n - 1$  (subtraímos de  $n$  o fator anterior a 2, no caso: 1), 3 está associado a  $n -$

2 (subtraímos de  $n$  o fator anterior a 3, no caso: 2)... daí o fator  $p$  vai está associado a  $n$  menos o fator anterior a  $p$ , no caso  $p - 1$ , daí para  $p$ -ésima posição temos  $n - (p - 1)$ :

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot [n - (p-1)]$$

**1    2        3                                  p**

Exemplos:

$A_{1,1} = 1$ ,  $A_{2,1} = 2$ ,  $A_{2,2} = 2 \cdot 1 = 2$ ,  $A_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$ ,  $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ,  $A_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$ ,  $A_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ . Perceba que a multiplicação para no termo  $n - (p - 1)$ , por exemplo  $A_{9,4}$  Temos  $n = 9$  e  $p = 4$ , daí o último termo a ser multiplicado é  $9 - (4 - 1) = 6$ , daí o resultado desse arranjo é multiplicar todos os inteiros do 6 ao 9 em ordem decrescente. No geral  $A_{n,p}$  é calculado multiplicando todos os inteiros do  $n - (p - 1)$  até  $n$  em ordem decrescente. Podemos escrever  $A_{n,p}$  utilizando fatoriais, isso pode ser útil em alguns problemas. Temos que:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot [n - (p-1)]$$

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando esse número por  $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ , temos:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Logo:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Observe que ao multiplicarmos  $A_{n,p}$  por  $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$  Estamos considerando  $n \geq p$ , já que para  $n = p$  temos  $\frac{(n-n)!}{(n-n)!} = \frac{0!}{0!} = \frac{1}{1} = 1$ . Aqui pode surgir uma discussão, um dos motivos de adotar  $0! = 1$  é justamente que em expressões como esta faz sentido. É fácil ver que para  $n > p$ , temos  $\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = 1$ , já que temos a divisão de dois números naturais iguais.

Portanto Temos duas maneiras de calcular  $A_{n,p}$ : uma diretamente pelo princípio fundamental da contagem e a outra utilizando fatoriais, por definição de Dante (2005):

Arranjos simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$  ( $p \leq n$ ) são os agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com  $p$  dos  $n$  elementos dados. Indica-se por  $A_{n,p}$  ou  $A_p^n$  o total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \text{ ou}$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Em particular,

$$A_{n,n} = P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1!} = n! \text{ (permutação é um caso específico de arranjo em que } n = p \text{)}$$

Exemplos:

$$A_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680 \text{ ou } A_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$$

$$A_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42 \text{ ou } A_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$$

Em regra, qualquer problema envolvendo arranjo pode ser resolvido diretamente pelo princípio fundamental da contagem. Só quando precisarmos utilizar fatoriais a segunda forma será mais útil. Uma característica do arranjo é que a **ordem** entre os elementos de cada grupo **importa**, esse fato é importante para diferenciarmos arranjo de combinação.

- **Combinações simples**

Como feito antes de definirmos permutação e arranjo, vamos utilizar um problema motivador antes de definirmos uma combinação:

**Os alunos de uma sala de aula de uma escola foram divididos em grupos de 5 alunos. Um desses grupos, vamos chamá-lo de alfa, é composto por José, Thiago, Pedro, Maria e Sophia. Três alunos do grupo alfa precisam representar a equipe em uma apresentação. De quantos modos podemos escolher esses três alunos? Quais são todas as possibilidades?**

Podemos usar o seguinte raciocínio: Para a escolha do primeiro Aluno temos cinco possibilidades, independente da escolha do primeiro aluno temos quatro possibilidades de escolha para o segundo aluno (pois para cada aluno fixado como primeiro teremos quatro possibilidades de escolha para o segundo), independente da escolha do primeiro aluno e do segundo aluno temos três possibilidades de escolha para o terceiro aluno (pois fixado o primeiro aluno e o segundo aluno sobram três possibilidades para o terceiro aluno), pelo PFC a quantidade de modos de escolher os três alunos é:  $5 \times 4 \times 3 = 60$ . Existe um **erro** nessa contagem, observe que fizemos um arranjo de 5 tomados 3 a 3 ( $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ ), sendo assim consideramos como diferentes, por exemplo, os trios: (José, Thiago, Pedro) e (Thiago, José, Pedro), nesse problema a **ordem** de escolha **não**

**importa**, sendo assim os trios (José, Thiago, Pedro) e (Thiago, José, Pedro) representam a mesma escolha (o mesmo trio).

Com isso fizemos contagem a mais. Vamos listar todas as possibilidades para verificar o que contamos a mais: Representemos por **J**: José; **T**: Thiago; **P**: Pedro; **M**: Maria; e **S**: Sophia. O problema acima é equivalente ao seguinte: Quais são todos os subconjuntos de 3 elementos do conjunto de 5 elementos (J, T, P, M, S). A **ordem** em que os elementos aparecem nesses subconjuntos **não importa**, pois (José, Maria, Sophia) é o mesmo trio que (Maria, José, Sophia) por exemplo. Então, os subconjuntos de 3 elementos(trios) são:

(J, T, P), (J, T, M), (J, T, S), (J, P, M), (J, P, S), (J, M, S), (T, P, M), (T, P, S), (T, M, S), (P, M, S).

A esses subconjuntos chamamos de combinações simples de 5 elementos tomados com 3 elementos, ou tomados 3 a 3, e escrevemos  $C_{5,3}$ .

Como o número total dessas combinações é 10, escrevemos  $C_{5,3} = 10$ .

Na nossa contagem utilizando arranjo cada trio foi contado 6 vezes a mais a permutação dos 3 elementos de cada trio resulta  $3!$ , dando origem a 6 arranjos) por exemplo, ao permutar todos os elementos do trio (J, T, P), encontramos os arranjos (J, T, P), (J, P, T), (T, J, P), (T, P, J), (P, J, T), (P, T, J), contados como se fossem diferentes utilizando arranjo. Como temos 10 trios(a resposta do problema encontrada acima com todos os resultados possíveis) e cada trio foi contado 6 vezes a mais utilizando arranjo, temos:  $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 6(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 6 \cdot 10 = 10 \cdot 6 = 10 \cdot 3!$ , daí para encontrarmos a resposta correta utilizando o raciocínio de arranjo devemos dividir o resultado encontrado por  $6 = 3!$ , ou seja,  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = \frac{10 \cdot 6}{6} = \frac{10 \cdot 3!}{3!} = 10 = C_{5,3}$ , como  $60 = 10 \cdot 6 = 10 \cdot 3! = A_{5,3}$  e  $3! = P_3$ , ficamos como solução:  $C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{P_3} = \frac{A_{5,3}}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{60}{6} = 10$ .

Daí temos que o número de arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3 é 6 vezes o número de combinações de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja,  $A_{5,3} = 6C_{5,3}$ . Sendo o 6 obtido fazendo permutações dos 3 elementos de, por exemplo, (J,T,P), temos  $P_3 = 6$ . Utilizando a forma de arranjo em fatoriais ficamos com:  $C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{P_3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$ . Caso tivéssemos que escolher uma dupla ao invés de um trio ficaríamos utilizando o raciocínio de arranjo com  $A_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$ , nessa contagem contamos cada dupla duas vezes a mais ( $2! = 2 \cdot 1$ ), cada combinação dessas duplas dá origem a 2 arranjos, daí  $(2 + 2 + 2 \dots + 2) = 20 \rightarrow 2(1 + 1 + 1 \dots + 1) = 20$ , seja  $x = (1 + 1 + 1 \dots + 1)$ , que é exatamente o valor da soma de cada dupla contada uma única vez, logo  $2x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{2} = 10$  ou  $C_{5,2} = \frac{A_{5,2}}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$ . E se caso tivéssemos que escolher um quarteto? utilizando

o raciocínio de arranjo com  $A_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ , nessa contagem contamos cada quarteto 24 vezes a mais ( $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ), cada combinação desses quartetos dá origem a 24 arranjos, daí  $24 + 24 + 24 + \dots + 24 = 24(1 + 1 + 1 + \dots + 1)$ , temos  $x$  parcelas de 24, logo  $24x = 120 \rightarrow x = \frac{120}{24} = 5$  ou  $C_{5,4} = \frac{A_{5,4}}{P_4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{24} = 5$ . E se caso tivéssemos que escolher um trio de um conjunto de 7 alunos? utilizando o raciocínio de arranjo com  $A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ , nessa contagem contamos cada trio 6 vezes a mais ( $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ ), cada combinação desses trios dá origem a 6 arranjos, daí  $6 + 6 + 6 + \dots + 6 = 6(1 + 1 + 1 + \dots + 1)$ , temos  $x$  parcelas de 6, logo  $6x = 210 \rightarrow x = \frac{210}{6} = 35$  ou  $C_{7,3} = \frac{A_{7,3}}{P_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{210}{6} = 35$ .

Generalizando temos o seguinte problema:

### Determine todos os subconjuntos de $p$ elementos do conjunto de $n$ elementos.

Queremos calcular o total de combinações de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ . Vimos que podemos calcular o número total de combinações simples através do número total de arranjos simples, por definição de Dante (2005):

A cada combinação de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$  correspondem  $p!$  arranjos, que são obtidos permutando-se os elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ Então}$$

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Combinações simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$  ( $p \leq n$ ) são os subconjuntos com exatamente  $p$  elementos que se podem formar com os  $n$  elementos dados.

Indica-se por  $C_{n,p}$ ,  $C_p^n$  ou  $\binom{n}{p}$  o número total de combinações de  $n$  elementos

tomados  $p$  a  $p$  e calcula-se por  $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  ou  $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$ .

Assim, temos duas formas de calcular a combinação, uma usando o arranjo diretamente pelo princípio fundamental da contagem e dividindo o resultado pela permutação dos elementos escolhidos ( $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = C_{n,p} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{p!}$ ) ou usando arranjo pela fórmula do fatorial

e dividindo o resultado pela permutação dos elementos escolhidos ( $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ).

Existe ainda um método de encontrar o número total de combinações simples usando o arranjo, a soma das permutações contadas a mais e através da quantidade de parcelas dessa soma conseguimos chegar numa equação onde o resultado é o total de combinações simples, por exemplo, como fizemos acima para encontrar a  $C_{7,3}$ , calculamos o  $A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ , daí cada

trio foi contado  $3!$  ( $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ) vezes a mais, cada combinação desses trios dá origem a 6 arranjos, daí  $6 + 6 + 6 + \dots + 6 = 6(1 + 1 + 1 + \dots + 1)$ , temos  $x$  parcelas de 6, logo  $6x = 210 \rightarrow x = \frac{210}{6} = 35$  ou  $C_{7,3} = \frac{A_{7,3}}{P_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{210}{6} = 35$ . Numa combinação a **ordem** dos elementos **não importa**, esse fato é crucial quando vamos resolver um problema e ficamos na dúvida se é arranjo (a ordem dos elementos importa) ou combinação.

### 3. PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIC) E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM

Antes de iniciar o estudo das apostilas do PIC e o que é o PIC, convém estudarmos o que é a OBMEP. A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto nacional criada em 2005 com o intuito de estimular o estudo da matemática e descobrir talentos na área. Realizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, inicialmente foi idealizada para as escolas públicas, estendendo-a posteriormente, em 2017, para as escolas privadas. Podemos observar que no site da OBMEP os estudantes e professores encontram todas as informações sobre o programa, como podemos observar na figura 2.

Figura 2: Página principal da OBMEP (2025)



Fonte: Imagem do site < <http://www.obmep.org.br> > (2025). Acessado em 29 de março de 2025

De acordo com o site da OBMEP, o programa tem como objetivos principais:

- Estimular e promover o estudo da matemática;

- Contribuir para melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

O público-alvo da OBMEP é composto de alunos do 6º ano do ensino fundamental até o último do ensino médio. Vale ressaltar que, a OBMEP não é o primeiro concurso do gênero no país, esse título é da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática) tendo sua primeira edição organizada em 1979. A OBM possui alguns objetivos semelhantes a OBMEP.

Nesse sentido, de acordo com o regulamento do programa os alunos participantes da OBMEP são divididos em três níveis, de acordo com o grau de escolaridade em que estiverem matriculados no momento da inscrição: nível 1 (6º ou 7º ano do ensino fundamental), nível 2 (8º ou 9º ano do ensino fundamental), nível 3 (ensino médio).

Segundo o regulamento de 2025, a OBMEP é realizada em duas fases: Na primeira fase a escola é a única responsável pela aplicação presencial da prova, que consiste em uma prova objetiva, de caráter eliminatório, composta de 20 questões de múltipla escolha, com 5 opções de resposta cada (A, B, C, D e E), dentre as quais apenas uma delas é correta, cada questão vale 1(um) ponto, totalizando 20(vinte) pontos. A seleção dos classificados para a segunda fase obedece a critérios que constam no regulamento IMPA (2025), entre esses critérios temos por exemplo, caso a quantidade de alunos inscritos na primeira fase no nível 1, nível 2 ou nível 3 seja superior ou igual a 241 em cada nível a quantidade de vagas para segunda fase por nível será de 5% do total de alunos inscritos na primeira fase de cada nível. A segunda fase se caracteriza pela aplicação da prova discursiva, de caráter classificatório, composta de 6 (seis) questões, valendo até 20(vinte) pontos cada, totalizando 120 (cento e vinte) pontos. A aplicação da prova da segunda fase é realizada exclusivamente pelo IMPA. A prova da segunda fase se destina a todos os alunos participantes classificados na primeira fase, sendo diferenciada de acordo com o nível (1,2 e 3), conforme descrito no regulamento. Os premiados são alunos, professores, escolas e secretarias municipais de educação pelos melhores desempenhos na edição.

A premiação dos alunos é distribuída separadamente entre escolas públicas e privadas de acordo com as regras descritas no regulamento, podendo ser: Medalha de ouro, medalha de prata, medalha de bronze e menção honrosa. A premiação dos professores está vinculada ao desempenho de seus alunos na segunda fase de acordo com as regras descritas no regulamento. As escolas participantes são premiadas a partir do desempenho nacional dos seus alunos segundo critérios descritos no regulamento. As secretarias municipais de educação são premiadas de acordo com o desempenho dos alunos de suas respectivas escolas públicas municipais inscritas na segunda fase da OBMEP segundo critérios descritos no regulamento.

Nesse contexto, para impulsionar o estudo dos premiados na OBMEP foi criado o Programa de Iniciação Científica (PIC) sendo um programa que propicia aos alunos premiados da OBMEP, entrar em contato com interessantes questões no ramo da matemática, ampliando seu conhecimento científico e preparando-o para um futuro desempenho profissional e acadêmico. Nesse sentido essas questões serão aprofundadas na seção seguinte.

### **3.1 PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIC)**

O PIC é realizado desde a primeira edição da OBMEP em 2005, sendo constituído de maneira presencial e on-line. O programa tem como objetivo desenvolver atividades específicas para cada nível e multiplicidade. Nesse sentido, encontramos no site da OBMEP < <http://www.obmep.org.br/pic.htm> > os principais objetivos do PIC que são:

- Despertar nos alunos o gosto pela matemática e pela ciência em geral;
- Motivar os alunos na escolha profissional pelas carreiras científicas e tecnológicas;
- Aprofundar o conhecimento matemático dos alunos, por meio de resolução e redação de soluções de problemas, leitura e interpretação de textos matemáticos e estudo de temas de modo mais aprofundados e com maior rigor matemático;
- Desenvolver nos alunos algumas habilidades tais como: sistematização, generalização, analogia e capacidade de aprender por conta própria ou em colaboração com os demais colegas;
- Incentivar o aprimoramento matemático dos professores;
- Estimular uma articulação entre escolas e universidades.

Além disso, encontramos no site da OBMEP que o PIC consta das seguintes atividades:

- Encontros presenciais (ou virtuais dependendo da situação do aluno);
- Discussões virtuais no fórum da OBMEP- Denominado hotel de Hilbert;

- Avaliações para serem executadas no portal PIC;
- Outras atividades virtuais a serem executadas no portal da OBMEP;

Nesse sentido, observa-se que os encontros presenciais são dirigidos por professores/orientadores. Assim, durante os encontros os alunos recebem o material de estudo, orientação e o cronograma de atividades. Esse material é discutido no fórum, entre alunos, sob orientação dos moderadores do fórum.

Em regra, o PIC é destinado aos medalhistas da OBMEP, os alunos premiados com menção honrosa concorrem a vagas remanescentes após a inscrição dos medalhistas. O IMPA pode convocar alunos para participar do programa na modalidade ouvinte, a critério da necessidade de cada região. As bolsas são pagas apenas aos estudantes da rede pública. Ressalto que, todas as apostilas do programa encontram-se disponível para download de forma gratuita no site da OBMEP. São apostilas utilizadas no PIC:

- 1. Iniciação a aritmética**
- 2. Métodos de contagem e probabilidade**
- 3. Teorema de Pitágoras e áreas**
- 4. Indução matemática**
- 5. Grafos - Uma introdução**
- 6. A geometria do globo terrestre**
- 7. Criptografia**
- 8. Uma introdução as construções geométricas**
- 9. Oficina de dobraduras**
- 10. Atividades de contagem a partir de criptografia**
- 11. Explorando geometria com Origami**
12. Revista do professor de matemática - especial PIC 2007
13. Revista do professor de matemática - especial PIC 2008
14. Olimpíada brasileira de matemática revista eureka edição especial
15. Revista do professor de matemática - especial PIC 2013
16. Revista do professor de matemática - especial 10º PIC
- 17. Encontros de aritmética**
- 18. Encontros de geometria parte 1**

Nosso trabalho foi feito aplicando 4 apostilas do PIC: 2. Métodos de contagem e probabilidade, 3. Teorema de Pitágoras e áreas, 17. Encontros de aritmética e 18. Encontros de geometria parte 1, sendo esta dissertação voltada a aplicação de parte do livro 2: métodos de contagem e probabilidade.

Em 2017 e 2018 tive a oportunidade de participar como professor do programa OBMEP na escola, além de ser professor do ensino fundamental regular do 6º ao 9º ano, na escola municipal de educação básica Liege Gama Rocha, localizada em Coruripe – AL. Esse programa visa como prática didática a resolução de problemas para alunos selecionados na escola. Recebi do programa 4 apostilas do PIC (as que foram mencionadas acima) com vários exemplares para serem distribuídas aos alunos selecionados. As aulas presenciais ocorriam de 15 em 15 dias, sendo exercícios deixados para serem trabalhados em casa entre uma aula e outra. Decidi abrir uma turma no turno contrário (segundas e terças a tarde) com o apoio da direção da escola e da secretária de educação a todos os alunos que tivessem interesse em aprender uma matemática de qualidade e se preparar para OBMEP, como foram muitos alunos dividimos os alunos em duas turmas de acordo com o nível da OBMEP: turma 1 (6º e 7º ano, nível 1) e turma 2(8º e 9º, nível 2), no turno contrário eu fiquei responsável pela turma 2, já no turno normal dei aula voltada para OBMEP (50 minutos cada aula) a todas as turmas do 6º ao 9º ano matutino. Foram aplicadas as 4 apostilas mencionadas, além da resolução de provas anteriores da OBMEP, questões com produção própria e improvisadas na hora da aula voltadas para o cotidiano dos alunos fazendo uma ligação com o estilo da prova da OBMEP, além de questões do programa OBMEP na escola. Esse projeto não teve um nome, mas vamos chamá-lo aqui de PIC- Coruripe.

Na OBMEP de 2017 batemos um recorde municipal e estadual com 10 medalhas para escola, uma de prata (nível 2) e nove de bronze, sendo seis do nível 1 e três do nível 2, além de 11 menções honrosas, sendo duas do nível 1 e nove do nível 2. Devido ao desempenho dos meus alunos fui premiado como professor pela OBMEP. Em 2018 inscrevi a escola no POTI (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo), programa que oferece cursos gratuitos de matemática para alunos que procuram se destacar em competições matemáticas de alto nível como a OBMEP e a OBM. Fomos selecionados como polo e fui coordenador e professor. Os alunos da escola foram premiados com várias medalhas e eu novamente fui premiado como professor devido ao desempenho dos meus alunos. Em 2019 fiquei apenas com o PIC-Coruripe no primeiro semestre, e tivemos 7 alunos da escola premiados com medalhas na OBMEP. Recebi o prêmio de honra ao mérito da prefeitura de Coruripe do prefeito e do secretário de educação pelos meus trabalhos realizados de 2017 a 2019.

Feita essa análise vamos para o estudo das apostilas do PIC utilizadas, como podemos observar na figura 3, faremos um resumo de 3 dessas apostilas e focaremos na metodologia utilizada na apostila métodos de contagem e probabilidade.

**Figura 3: Capa das apostilas utilizadas na pesquisa**



Fonte: <<http://www.obmep.org.br/apostilas.htm>> (2025)

### **Apostila: Encontros de aritmética**

**Autores: Dutenhfner, Francisco. Cadar, Luciana (2017)**

Após várias edições do PIC acumulou-se uma enorme quantidade de materiais teóricos e problemas discutidos no fórum, a apostila encontros de aritmética contém um resumo dos planejamentos e dos materiais acumulados no fórum em algumas edições passadas do PIC referentes aos encontros de aritmética. Ela não tem o objetivo de ser um material didático completo, mas sim de ser um material orientador de apoio às aulas presenciais e às atividades de fórum trabalhadas nos 4 encontros de aritmética. Importante: Para ter acesso ao fórum o Aluno precisa estar inscrito no PIC tendo assim um login e senha.

No nosso caso, como abrimos a oportunidade para qualquer aluno interessado em aprender matemática de qualidade e se preparar para OBMEP, e não estarmos oficialmente no PIC, a maioria dos alunos não tinha acesso ao fórum. Para sanar esse problema foi criado grupo de whatsapp para discutirmos questões e tirar dúvidas entre uma semana e outra de aula. Utilizamos a apostila para ministrar as aulas de aritmética junto com material do portal da OBMEP, provas anteriores, materiais do programa OBMEP na escola e questões próprias. As aulas foram divididas em 4 encontros de acordo com a divisão da apostila, tiveram encontros que precisaram de mais

tempo devido a complexidade de alguns assuntos e exercícios. Temos nessa apostila alguns exercícios com solução e outros sem solução, o aluno é sempre estimulado a tentar resolver o exercício para só então verificar a solução apresentada na apostila, que em alguns casos pode não está de acordo com a apostila, mas está correta (uma solução alternativa). Nos casos em que não há solução do exercício na apostila, a resolução é feita em sala de aula, mas no geral os exercícios com ou sem solução foram debatidos em sala de aula, ensinando como realizar uma solução de forma escrita, na maioria das vezes perguntando o porquê das coisas, melhorando assim a escrita. Esta apostila foi o material de estudo diário para os alunos participantes do PIC- Coruripe. No estudo da apostila de Dutenhfner (2017) delimitamos o aprofundamento por encontros:

- Encontro 1: Discussão de alguns problemas do tema paridade para motivação inicial. Estudo do sistema decimal de numeração destacando a importância da posição dos algarismos na representação decimal de um número inteiro. Domínio das quatro operações básicas entre números naturais. Base binária: estudo de alguns problemas de pesagens com balanças.
- Encontro 2: Algoritmo da divisão e fenômenos periódicos. Propriedades operatórias do resto de uma divisão. Múltiplos e divisores. Números primos. Crivo de Eratóstenes. Fatoração. Critérios de divisibilidade.
- Encontro 3: Resolução de alguns exemplos que motivam as definições de mdc e de mmc. Cálculo do mdc e do mmc de dois números já fatorados. Cálculo do mdc e do mmc através de uma fatoração simultânea. Aplicações variadas do mdc e do mmc.
- Encontro 4: Explorar o algoritmo de Euclides:  $\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(a, b - a)$ . Explorar o algoritmo de Euclides:  $\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(a,r)$  em que  $r$  é o resto da divisão de  $b$  por  $a$ . Resolver exercícios e explorar algumas propriedades do mdc e do mmc.

Ao estudar essa apostila junto com outras fontes acima mencionadas o aluno vai aprender a redigir soluções de problemas de aritmética com qualidade, podendo resolver questões por conta própria, sendo corrigido ou dado um feedback pelo professor.

### **Apostila: Encontros de Geometria parte 1**

**Autores: Dutenhfner, Francisco. Cadar, Luciana (2016)**

Terminando o módulo de aritmética os alunos realizam quatro encontros presenciais sobre geometria euclidiana plana: Encontro 5, Encontro 6, Encontro 7 e Encontro 8. Nesses encontros são apresentadas as definições básicas de geometria e os principais resultados compatíveis com o

nível do aluno. O planejamento, os conteúdos, exemplos resolvidos e exercícios propostos para este estudo de geometria estão reunidos nesta apostila.

Utilizamos esta apostila para ministrar as aulas de Geometria junto com material do portal da OBMEP, Provas anteriores da OBMEP, materiais do programa OBMEP na escola e questões próprias. As aulas foram divididas em 4 encontros de acordo com a divisão da apostila, onde tiveram encontros que precisaram de mais tempo devido a complexidade de alguns assuntos e exercícios. Temos nesta apostila alguns exercícios com solução e outros sem solução, o aluno é sempre estimulado a tentar resolver o exercício para só então verificar a solução apresentada na apostila, que em alguns casos pode não estar de acordo com a solução apresentada na apostila, mas está correta (uma solução alternativa). Nos casos em que não há solução do exercício na apostila a resolução é feita em sala de aula, mas no geral os exercícios com ou sem solução foram debatidos em sala de aula, ensinado como redigir uma solução, na maioria das vezes perguntando o porquê das coisas, melhorando assim a escrita. Esta apostila foi o material de estudo diário para os alunos participantes do PIC- Coruripe. Segundo Dutenhefner (2016) os encontros são divididos da seguinte forma:

- Encontro 5: Ponto, reta, segmentos, medidas de segmentos, ponto médio, semirretas, posição relativa de pontos e retas.
- Encontro 6: Ângulos, medidas de ângulos, ângulos retos, agudos e obtusos, ângulos consecutivos e adjacentes, ângulos complementares, suplementares e opostos pelo vértice.
- Encontro 7: Triângulos, elementos e classificação de triângulos: escaleno, isósceles, equilátero, retângulo, acutângulo e obtusângulo, soma dos ângulos internos de um triângulo, ângulo externo e o teorema do ângulo externo, somas dos ângulos externos, propriedades dos triângulos isósceles e equilátero.
- Encontro 8: Quadriláteros, definições e propriedades dos quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.

Ao estudar essa apostila junto com outras fontes acima mencionadas o aluno vai aprender a redigir soluções de problemas de geometria com qualidade, podendo resolver questões por conta própria, sendo corrigido ou dado um feedback pelo professor.

**Apostila: Teorema de Pitágoras e áreas**  
**Autores: Wagner, Eduardo (2017)**

A apostila trata, como o próprio nome já diz, do teorema de Pitágoras e áreas. No primeiro capítulo o autor trata do teorema de Pitágoras começando com uma breve história do teorema de Pitágoras, em seguida é feita algumas demonstrações dele, como a que utiliza semelhança por exemplo. Assim, para os alunos entenderem as demonstrações se faz necessário antes um estudo sobre as ferramentas que vão ser utilizadas, como semelhança de triângulos, por exemplo. Seguindo temos a recíproca do teorema de Pitágoras com sua respectiva demonstração; ternos pitagóricos, onde é apresentada uma fórmula que gera ternos pitagóricos; Generalizando o teorema de Pitágoras, o autor usa o fato de que a razão entre áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança ( importante demonstrar esse fato antes em sala de aula) e o teorema de Pitágoras para concluir que se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos; Construções geométricas e o triângulo retângulo, temos aqui construções com régua e compasso utilizando o triângulo retângulo.

Assim, a interpretação geométrica da média aritmética e média geométrica utilizando o triângulo retângulo inscrito numa circunferência é dada pela interpretação geométrica de uma equação do tipo  $x^2 - 2ax + b^2 = 0$ . Aqui é necessário demonstrar a fórmula que nos dá as raízes de uma equação do segundo grau e calcular o valor dessas raízes chegando assim na interpretação geométrica da equação. Dado um segmento  $a$  e um número natural  $n$  temos através do triângulo retângulo como construir segmentos  $a\sqrt{n}$ ; Construções com a unidade de medida, o autor mostra que devemos estabelecer antes uma unidade de medida, para representar  $\sqrt{a}$  ou  $a^2$  por segmentos, e saber que os resultados são diferentes para cada unidade escolhida. Utilizando 1 como unidade de medida e o segmento  $a$  é mostrado como construir o segmento  $\sqrt{a}$ , as ferramentas utilizadas são: circunferência e suas propriedades, mas especificamente propriedade das cordas em uma circunferência, daí é necessário explicar e demonstrar alguns resultados em sala de aula para que o aluno compreenda a construção geométrica de  $\sqrt{a}$ . Para a construção geométrica de  $a^2$  é necessário antes demonstrar em sala de aula as relações métricas em um triângulo retângulo.

O autor finaliza o capítulo com 24 problemas. É necessário que seja visto em sala de aula alguns assuntos para que os alunos consigam resolver os problemas, como por exemplo, áreas e perímetros de figuras planas e semelhança. Dar dicas, como quais assuntos podem ser utilizados para resolução do problema é extremamente aconselhado, visto que, temos alunos dos mais variados graus de conhecimento matemático. Em último caso, os alunos podem consultar a solução do

problema no capítulo 3 do livro. No capítulo 2 o autor trata de áreas. Para melhor entendimento é necessário antes ensinar aos alunos o que é área e como calcular área de figuras simples, como paralelogramo, retângulo e principalmente o triângulo, já que sabendo a área do triângulo não teremos dificuldades nos outros polígonos, pois afinal eles podem ser decompostos em triângulos. São trabalhadas algumas propriedades de áreas no triângulo relacionando alguns de seus elementos, como a mediana e altura por exemplo. Através dessas propriedades o autor resolve vários problemas elegantes, que aumentam o nível de matemática dos alunos. Os alunos aprendem a resolver problemas envolvendo áreas sem precisar usar fórmulas, bastando aplicar algumas propriedades. A seguir trataremos sobre a metodologia da resolução de problemas como ferramenta de ensino do princípio fundamental da contagem, objeto de estudo dessa dissertação.

### **3.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM**

A resolução de problemas apresenta-se como uma metodologia de ensino baseada na utilização dos conhecimentos prévios dos alunos para atingir um novo conhecimento. Assim, utilizando essa proposta, potencializamos a aprendizagem dos saberes matemáticos, pois, a aprendizagem ocorre de forma integral assimilando novos conhecimentos com aquilo que já é conhecido pelos alunos. Vale destacar que, resolver problemas é algo inerente ao ser humano que para além do contexto escolar resolve problemas cotidianamente. Não sendo diferente com os problemas matemáticos, no qual se propõe a explanação de situações-problemas contextualizados impulsionando o questionamento e criação de diferentes estratégias para conseguir alcançar a resolução do problema.

Por isso, SOARES e PINTO (2001, p. 04), afirmam que,

Quando se propõe aplicar a resolução de problemas no ensino da matemática, refere-se a problemas não rotineiros e algorítmicos, onde o aluno muitas vezes pergunta “a conta é de mais ou de menos?” Problemas rotineiros não avaliam, por si só, atitudes procedimentais e a forma como os alunos administram seus conhecimentos. [...] Os problemas reais podem surgir de um simples anúncio de venda de um imóvel que contenha a planta do apartamento e sua localização. A partir dele pode-se trabalhar com escala, área, orientação espacial, perímetro, custo de materiais, confecção de maquetes, sólidos geométricos, curso e tudo o que a criatividade e a motivação permitirem.

Nessa perspectiva, a metodologia de resolução de problemas supera a memorização mecânica de fórmulas ao deslocar o eixo do processo de ensino-aprendizagem para a construção conceitual. A contextualização e a interpretação crítica das situações-problema atuam como

catalisadores do raciocínio lógico, permitindo que o discente desenvolva múltiplas estratégias impulsiona a criação de mais de uma solução não somente aplicar fórmulas prontas.

Observa-se que a referida proposta vai além de se encontrar o valor da incógnita ou resolver mecanicamente e sim despertar o interesse pelo ato de pensar, questionar e agir, agir no sentido de estruturar um pensamento resolutivo com diferentes estratégias seja desenho, setas ou descrevendo os passos (a escrita). Assim, segundo DE SOUZA (2005, p. 03)

Os alunos ao resolverem problemas podem descobrir fatos novos sendo motivados a encontrarem várias outras maneiras de resolverem o mesmo problema, despertando a curiosidade e o interesse pelos conhecimentos matemáticos e assim desenvolverem a capacidade de solucionar as situações que lhes são propostas.

Vale ressaltar que, o despertar pelo interesse na resolução de problemas muitas vezes não é tarefa fácil, visto que, os alunos já estão acostumados com exercícios matemáticos mecanizados com textos curtos, por exemplo: “Resolva as operações a seguir”, isso induzindo a mecanização de procedimentos e memorização, o que difere da proposta da resolução de problemas. No mais, a metodologia supera a questão não somente do conhecimento matemático, mas também desperta o senso crítico para a interpretação dos enunciados, criatividade para imaginar as situações e possíveis soluções.

Nessa perspectiva, a presente pesquisa baseia-se na resolução de problemas relacionados as apostilas do PIC com o intuito de promover esse despertar intuitivo da interpretação, criatividade e raciocínio lógico matemático para chegar as possíveis soluções. Não é à toa também que, por meio dessa metodologia os alunos ganham voz ativa na construção do seu próprio conhecimento já que conseguem questionar e sintetizar conceitos na elaboração das soluções.

### **Apostila: Métodos de contagem e probabilidade**

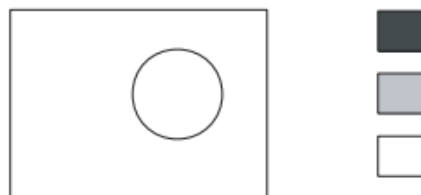
Enfim chegamos na apostila que é objetivo desta dissertação. A metodologia utilizada foi aplicada aos alunos do 6º ao 9º ano. O autor da apostila Carvalho (2017) foi aluno do professor Morgado, sendo a apostila parecida com seus escritos e aulas. O leitor pode encontrar na apostila intersecções de exercícios e passos de metodologias com o livro: A matemática do ensino médio Volume 2(Lima, Elon Lages, 2006), isso não é por acaso, pois Carvalho e Morgado também são autores desse livro, sendo a apostila em questão uma versão mais didática aproveitando alguns exercícios e metodologias de (Lima, Elon Lages, 2006). Começa argumentando que embora os métodos de contagem sejam extremamente simples, são muitas vezes considerados difíceis por alunos e professores. Uma das razões segundo o autor é que é preciso pensar para resolver problemas de contagem, mesmo os mais simples, diferente do que ocorre com outros assuntos da matemática

secundária, cujo ensino muitas vezes é fortemente baseado na aplicação de fórmulas e repetição de problemas modelo. Enfatiza que assim como outras áreas da matemática, muitas vezes aprendemos mais com os erros do que com acertos para resolver problemas de contagem.

Antes de começarmos a resolver o primeiro exemplo proposto pelo autor, precisamos fazer uma revisão das quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), especialmente a adição e a multiplicação, coisas do tipo: qual a diferença entre três vezes dois ( $3 \times 2$ ) e dois vezes três ( $2 \times 3$ )? Parece simples, mas gera dificuldade entre muitos alunos. Temos que:  $3 \times 2 = 2 + 2 + 2$  e  $2 \times 3 = 3 + 3$ , ou seja, a diferença é que em  $3 \times 2$  temos a soma de 3 parcelas de 2 e em  $2 \times 3$  temos a soma de 2 parcelas de 3, isso vai ser fundamental para os alunos entenderem o princípio fundamental da contagem e conseqüentemente a aplicação de casos específicos desse (permutação, arranjo e combinação). Antes de cada aula sugerimos reservar 10 minutos para brincadeiras que estimulem a atenção dos alunos, como por exemplo, morto-vivo, quando o professor disser morto os alunos abaixam, quando o professor disser vivo os alunos levantam, quem errar é eliminado, quem acertar todas as seqüências é o vencedor, é extremamente recomendado criar adaptações a essa brincadeira com assuntos de matemática, criando novos comandos relacionados a movimentos de partes do corpo, como por exemplo, tabuada do 2 e tabuada do 3, quando o professor disser um produto onde o primeiro número é dois ( $2 \times a$ , onde  $a$  é um número natural) os alunos levantam a mão direita, quando o professor disser um produto onde o primeiro número é 3 ( $3 \times a$ , onde  $a$  é um número natural) os alunos levantam a mão esquerda. Nessa perspectiva, iremos explanar a seguir algumas situações-problemas retiradas do Livro do PIC- Métodos de contagem e probabilidade, com o intuito de exemplificar didaticamente para os professores potencialidades na utilização desse método na sala de aula e como utilizar a resolução de problemas sem a utilização de fórmulas memorizadas.

#### Figura 4: Situação problema (1)

**Exemplo 1.** Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando duas das cores dadas.



- (a) *Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas?*  
 (b) *Quantas são as possíveis bandeiras no caso em que 4 cores estão disponíveis?*

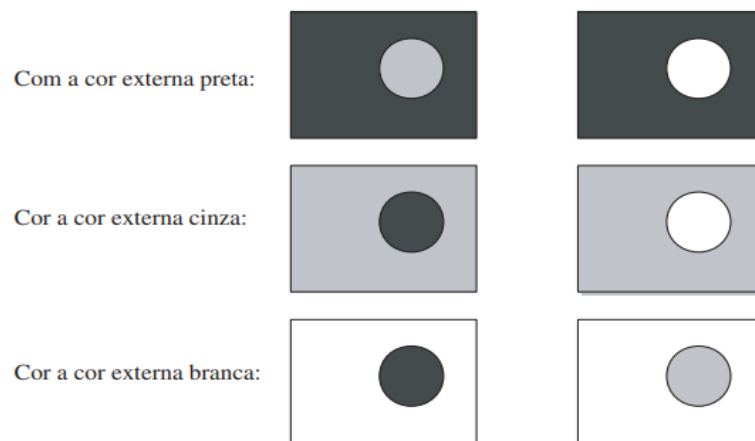
Problemas desse tipo são perfeitamente indicados para começar os métodos de contagem, antes de definirmos o princípio fundamental da contagem, visto que utiliza cores e uma bandeira, objetos esses que os alunos têm conhecimento desde a educação infantil e ensino fundamental 1. Uma parte do produto educacional foi feita inspirada nesse problema, utilizando a bandeira do Brasil e cores para elaboração de problemas, perfeitamente acessível aos alunos do 6º ano ao 9º ano.

Antes de resolvermos o item “a” devemos dar um tempo para os alunos resolverem. Podemos considerar a primeira cor como preta, a segunda como cinza e a terceira como branca. Caso os alunos não tenham como pintar a bandeira, pode ser sugerido abreviar as cores pela primeira letra: P -> cor preta, C -> cor cinza e B -> cor branca e tentar resolver o problema com essas abreviações, isso estimulará habilidades para resolver o problema. Segundo o autor Carvalho (2017)

É importante ter um procedimento sistemático para listar todas as possíveis bandeiras, sem repeti-las. Para tal, devemos identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas

Temos naturalmente dois métodos para evitar repetições na contagem: Pintar primeiro a parte externa ao círculo e em seguida pintar o círculo com as cores que sobraram ou pintar primeiro o círculo e em seguida pintar a parte externa ao círculo com as cores que sobraram. O autor começou a contagem pintando primeiramente a cor externa ao círculo, tendo assim 3 possibilidades, para cada uma dessas 3 possibilidades temos duas maneiras de pintar o círculo, observe a figura abaixo:

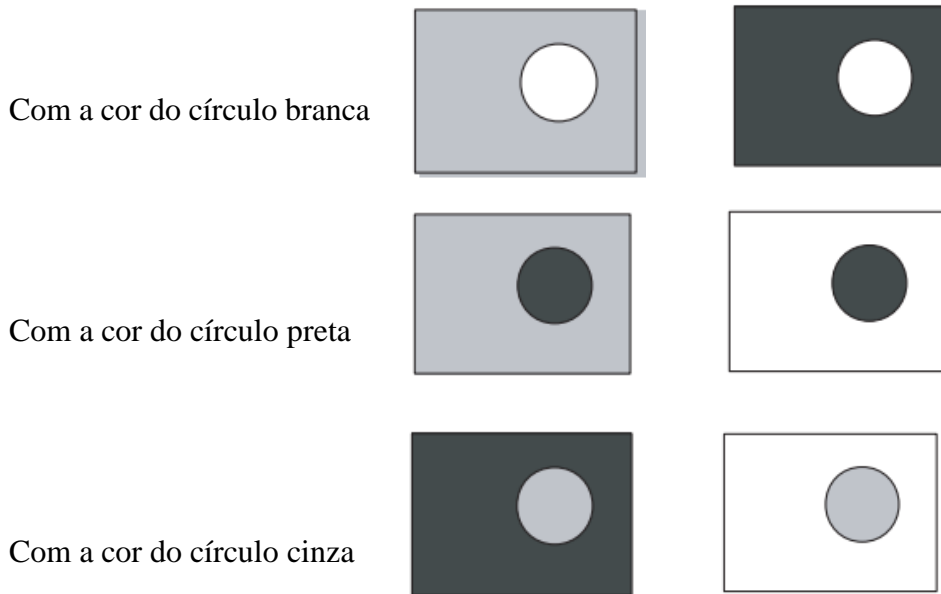
**Figura 5: Bandeiras (1)**



Fonte: Carvalho (p.01,2017)

Temos no total 6 bandeiras listadas. Podemos chegar à mesma resposta começando a contagem pelo círculo, tendo assim 3 possibilidades para pintar o círculo, para cada uma dessas 3 possibilidades temos duas maneiras de pintar a parte externa ao círculo. Observe a figura abaixo:

**Figura 6: Bandeiras (1.1)**



Fonte: O autor (2025)

Temos no total 6 bandeiras listadas. Um fato que podemos observar nessas contagens é que se começarmos pintando a parte externa ao círculo as cores disponíveis para pintar o círculo mudam dependendo da cor escolhida para parte externa ao círculo, mas a sua quantidade é sempre a mesma, pois qualquer que seja a cor externa escolhida, existe duas cores restantes para o círculo. Analogamente se começarmos pintando primeiramente o círculo. Logo, podemos contar o número de bandeiras, sem a necessidade de listá-las, como observa carvalho (2017), “A cor externa pode ser escolhida de três modos diferentes. Qualquer que seja essa escolha, a cor do círculo pode ser escolhida de dois modos. Logo, o número total de possibilidades é  $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$ ”.

Vale destacar que, se começarmos contando pelo círculo, também temos três modos diferentes de pintá-lo e para cada um desses três modos a parte externa ao círculo pode ser pintada de duas maneiras. Portanto, o número total de possibilidades é  $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$ .

Nesse sentido, os procedimentos acima ilustram o **Princípio fundamental da contagem ou Princípio Multiplicativo**, que segundo Carvalho (2017) pode ser enunciado como:

- **Se uma decisão  $D_1$  pode ser tomada de  $p$  modos e, qualquer que seja essa escolha a decisão  $D_2$  pode ser tomada de  $q$  modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1$  e  $D_2$  é igual a  $pq$ .**

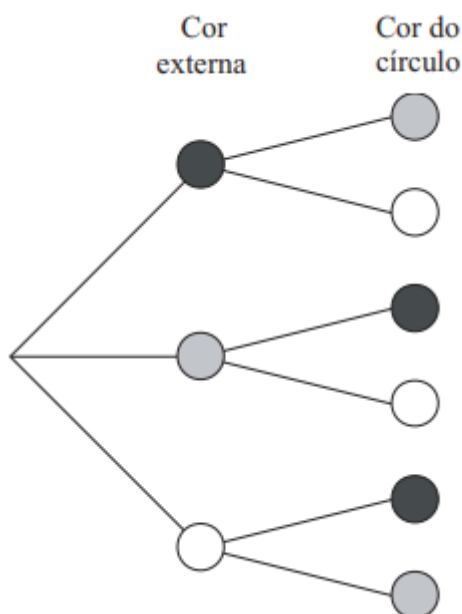
Isso pode ser estendido caso tenhamos  $n$  decisões, bastando multiplicar essas possibilidades parciais: Se  $D_1$  pode ser tomado de  $x_1$  modos e, qualquer que seja essa escolha  $D_2$  pode ser tomado de  $x_2$  modos, e qualquer que sejam as escolhas anteriores  $D_3$  pode ser tomada de  $x_3$  modos... e

qualquer que sejam as escolhas anteriores  $D_n$  pode ser tomada de  $x_n$  modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1, D_2, D_3, \dots$  e  $D_n$  é igual a  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$ . É fundamental que os alunos entendam que esses produtos vêm de somas de parcelas iguais, como o do exemplo 1, item a), a resposta é  $3 \times 2$ , pois para cada uma das 3 possibilidades de pintar a parte externa ao círculo temos duas possibilidades de pintar o círculo, daí temos o  $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$  ou diretamente pelo princípio fundamental da contagem:

- Decisão  $D_1$ : pintar a parte externa ao círculo
- Decisão  $D_2$ : pintar o círculo

$D_1$  pode ser tomada de 3 modos, qualquer que seja essa escolha  $D_2$  pode ser tomada de 2 modos, logo o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1$  e  $D_2$  é igual a  $3 \times 2 = 6$ . Tem que ficar claro para os alunos que se começarmos a contagem pelo círculo a decisão  $D_1$  passa a ser pintar o círculo e a decisão  $D_2$  pintar a parte externa ao círculo e a resposta não muda, pois não temos restrições independentes da escolha de por onde começar a pintar. Veremos que quando há restrição na escolha de alguma decisão, isto é, se ao tomarmos determinada decisão nem toda possibilidade dessa quando escolhida resultar na mesma possibilidade na decisão seguinte, teremos que adotar estratégias para utilizar o princípio fundamental da contagem. É importante fazer diagramas nos primeiros problemas resolvidos para os alunos “enxergarem” melhor o que está acontecendo na resolução do problema, como mostra Carvalho (2017) com o princípio fundamental da contagem ilustrado pela seguinte árvore de enumeração do item a):

**Figura 7: Árvore de enumeração (1)**



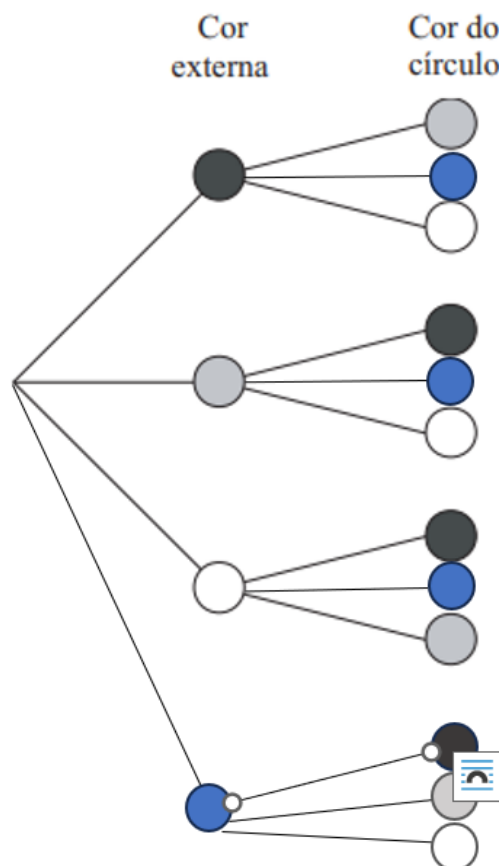
Fonte: Carvalho (p.03,2017)

Daí fica claro para os alunos as três possibilidades de pintar a cor externa e para cada uma delas as duas maneiras de pintar o círculo, dando um total de  $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$  bandeiras.

Voltemos ao item b): Quantas são as possíveis bandeiras no caso em que 4 cores estão disponíveis?

Observe que as decisões são as mesmas do item a):  $D_1$ : Pintar a parte externa ao círculo e  $D_2$ : pintar o círculo ou como já observado anteriormente podemos trocar as decisões. O que muda são apenas as possibilidades de escolha. Se considerarmos a mesmas cores do item a) e a quarta cor sendo a cor azul, para a decisão  $D_1$  temos agora 4 possibilidades de escolha, para cada uma dessas 4 possibilidades temos 3 maneiras de pintar o círculo, daí temos  $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12$  bandeiras. Observe o diagrama (árvore de enumeração) abaixo:

**Figura 8: Árvore de enumeração (1.1)**



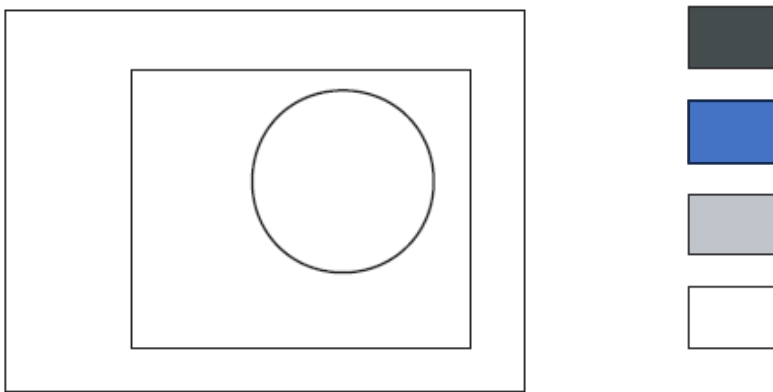
Fonte: O autor (2025)

Daí fica claro as 4 possibilidades de pintar a cor externa e para cada uma delas as três maneiras de pintar o círculo dando um total de  $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12$  bandeiras ou diretamente

pelo princípio fundamental da contagem:  $D_1$  pode ser tomada de 4 modos, qualquer que seja essa escolha  $D_2$  pode ser tomada de 3 modos, logo o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1$  e  $D_2$  é igual a  $4 \times 3 = 12$ . O processo de repetição utilizando a soma de parcelas iguais tem que ser repetido muitas vezes para que o aluno entenda de onde vem o produto utilizado no princípio fundamental da contagem. Vamos para o segundo exemplo:

### Figura 9: Situação problema (2)

**Exemplo 2.** Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre 4 dadas?



Fonte: Carvalho (p.03,2017)

No exemplo um tínhamos duas decisões a serem tomadas, já no exemplo 2 temos 3 decisões consecutivas a serem tomadas: Pintar a cor externa ao retângulo e ao círculo, pintar o retângulo e pintar o círculo. A escolha de por onde começar a pintar não importa, já que teremos 4 possibilidades de cores começando por qualquer uma das três decisões sem nenhuma restrição, tem que deixar os alunos a vontade para fazer essa escolha, escolhida a decisão 1, também não importa qual decisão tomar para segunda escolha, já que escolhida a primeira temos 3 cores que sobram para segunda decisão sem nenhuma restrição e para a terceira decisão sobram duas cores. Seguindo o raciocínio de carvalho (2017) de se tomar as 3 decisões consecutivas temos:

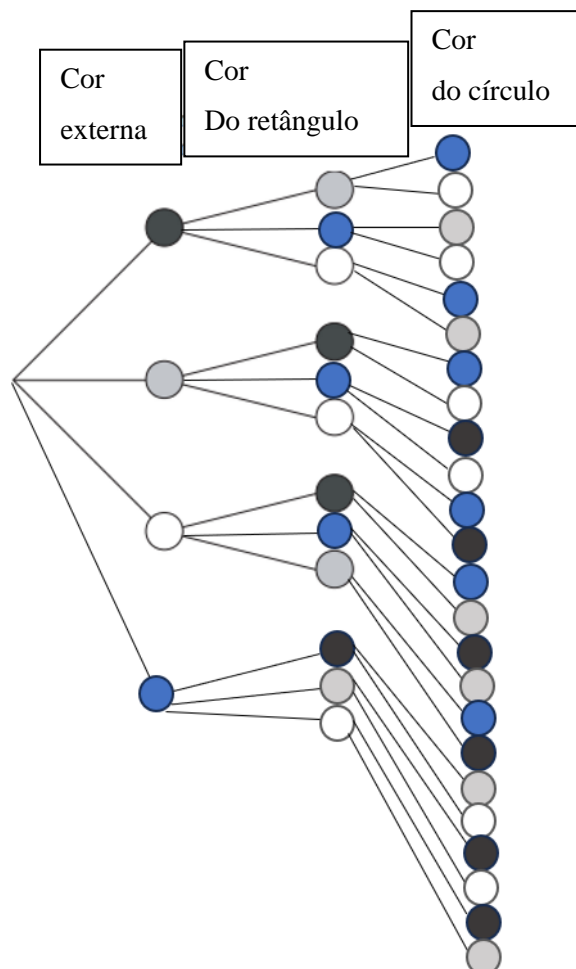
$D_1$ : pintar a cor externa ao retângulo e ao círculo

$D_2$ : Pintar o retângulo

$D_3$ : Pintar o círculo

Começando pela decisão  $D_1$  temos 4 possibilidades de pintar a cor externa, para cada uma dessas possibilidades temos três maneiras de pintar o retângulo, daí temos  $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12$  modos de pintar a parte externa combinada com pintar o retângulo ou diretamente pelo princípio fundamental da contagem:  $D_1$  pode ser tomada de 4 modos, qualquer que seja essa escolha  $D_2$  pode ser tomada de 3 modos, logo o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1$  e  $D_2$  é igual a  $4 \times 3 = 12$ . Para cada uma dessas 12 possibilidades o círculo pode ser pintado de 2 modos, daí temos  $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12 \times 2 = 24$  formas diferentes de se pintar a bandeira ou diretamente pelo princípio fundamental da contagem:  $D_1$  pode ser tomada de 4 modos, qualquer que seja essa escolha  $D_2$  pode ser tomada de 3 modos, qualquer que sejam as escolhas anteriores  $D_3$  pode ser tomada de 2 modos, logo o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  é igual a  $4 \times 3 \times 2 = 24$ . A figura abaixo mostra o passo a passo das escolhas das cores de acordo com a decisão de pintar primeiramente a parte externa ao círculo e ao retângulo, escolhida a cor, temos a decisão de pintar o retângulo, escolhida a cor, temos a decisão de pintar o círculo.

**Figura 10: Árvore de enumeração (2)**



Fonte: O autor (2025)

O processo de mostrar aos alunos a soma de parcelas iguais bem como diagramas com todas as possibilidades deve ser bem trabalhado em sala nos primeiros exercícios para que os alunos entendam o porquê de multiplicar as possibilidades de cada decisão no princípio fundamental da contagem. Outro fato a ser observado é que nem sempre poderemos escolher começar a contagem por qualquer decisão, existem casos que temos alguma restrição dependendo da decisão a ser tomada, sendo necessário adotar estratégias para resolução do problema, como veremos no exemplo a seguir.

### Figura 11: Situação problema (3)

**Exemplo 3.** Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores distintas?



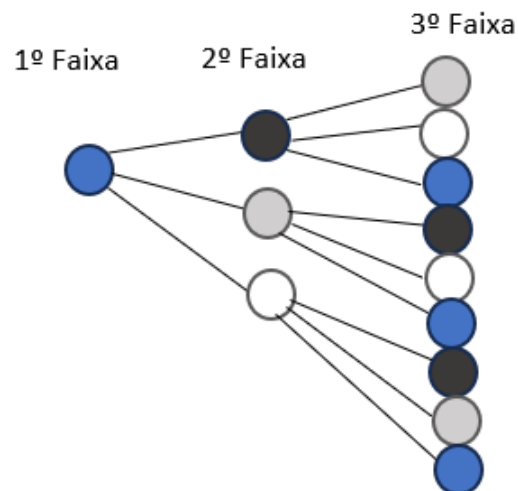
Fonte: Carvalho (p.05,2017)

Observamos nesse exemplo que não podemos tomar as decisões em qualquer ordem e aplicar diretamente o princípio fundamental da contagem, pois temos a restrição que faixas adjacentes tenham cores distintas, daí faixas não adjacentes podem ter cores iguais. Enumerando as faixas em ordem de cima para baixo, temos que a 1ª faixa e a 2ª faixa não podem ter cores iguais bem como a 2ª faixa e a 3ª faixa, pois são adjacentes, mas a 1ª faixa e 3ª faixa podem ter cores iguais, pois não são adjacentes. Observe a figura abaixo:

**Figura 12: Enumeração das faixas**

Fonte: O Autor (2025)

Se começarmos a pintar pela 1ª faixa (primeira decisão), teremos 4 possibilidades de pintá-la, e qualquer que seja a escolha da cor pintada na 1º faixa, se escolhermos pintar a 2ª faixa em seguida(segunda decisão) teremos 3 possibilidades de pintá-la, já que a 1ª faixa e a 2ª faixa não podem ter cores iguais, e qualquer que sejam as escolhas anteriores, para terceira decisão: pintar a 3º faixa, teremos 3 possibilidades, pois vão sobrar duas cores, sendo que podemos repetir a cor da 1º faixa, daí para terceira decisão temos 3 possibilidades. Pelo princípio fundamental da contagem temos  $4 \times 3 \times 3 = 36$  modos de pintar a bandeira. Os alunos têm dificuldade de entender o porquê da terceira faixa termos 3 possibilidades e não duas, para ficar mais claro devemos fazer a seguinte árvore de enumeração:

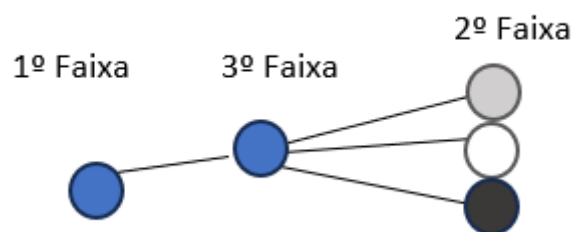
**Figura 13: Árvore de enumeração (3)**

Fonte: O Autor (2025)

Se pintarmos a primeira faixa de azul, sobrarão 3 cores para pintar a segunda faixa, para cada uma dessas três cores, teremos 3 possibilidades para pintar a 3ª faixa, pois poderemos repetir a cor azul, já que a 1ª faixa e a 3ª faixa podem ter cores iguais. Daí como temos 4 possibilidades de cores para pintar a 1ª faixa (Na árvore de enumeração só colocamos uma, por questão de espaço) e para cada uma delas temos 3 possibilidades de pintar a 2ª faixa, daí temos  $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12$  maneiras de pintar a 1ª faixa e a 2ª faixa, para cada uma dessas maneiras temos 3 possibilidades de pintar a 3ª faixa daí temos  $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 12 \times 3 = 36$  modos de pintar a bandeira ou diretamente pelo PFC:  $4 \times 3 \times 3 = 36$ .

Caso escolhamos, começar a pintar pela primeira faixa (primeira decisão) e em seguida pintarmos a 3ª faixa (segunda decisão), a quantidade de possibilidades de pintar a 2ª faixa (terceira decisão) vai depender das cores escolhidas na 1ª e 2ª decisões. Resolvendo o problema dessa maneira temos: 4 possibilidades de pintar a primeira faixa, qualquer que seja a escolha da cor a ser pintada na 1ª faixa temos 4 possibilidades de pintar a 3ª faixa, pois podemos repetir a cor pintada na 1ª faixa, e para pintar a 2ª faixa quantas possibilidades temos? A resposta é depende. Se escolhermos a mesma cor na 1ª faixa e na 3ª faixa teremos 3 possibilidades de pintar a 2ª faixa, já que a 2ª faixa é adjacente a 1ª faixa e a 3ª faixa, não podendo assim ter cores iguais a essas faixas. Observe a figura:

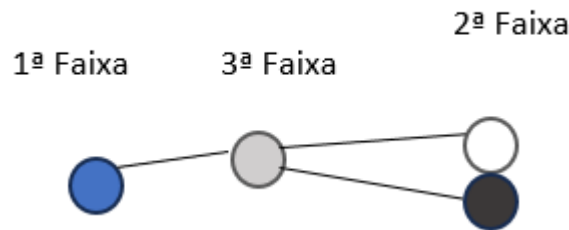
**Figura 14: Árvore de enumeração (3.1)**



Fonte: O autor (2025)

Pintando a primeira faixa e a terceira faixa de azul sobram três cores para pintar a segunda faixa. Analogamente se começarmos a pintar a primeira faixa e a segunda faixa com outras cores iguais. Se escolhermos cores diferentes para pintar a 1ª faixa e a 3ª faixa, teremos 2 possibilidades de pintar a 2ª faixa já que a 2ª faixa é adjacente a 1ª faixa e a 3ª faixa, não podendo assim ter cores iguais a essas faixas. Observe a figura abaixo:

**Figura 15: Árvore de enumeração (3.2)**



Fonte: O autor (2025)

Pintando a primeira faixa de azul e a terceira faixa de cinza sobram duas cores para pintar a segunda faixa, analogamente se começarmos a pintar a primeira e a terceira faixa com outras cores diferentes, sobrarão duas cores para pintar a segunda faixa.

Não podemos aplicar diretamente o PFC fazendo a contagem dessa maneira, devemos dividir o problema em casos: primeiro fazemos a contagem com todas as cores diferentes e depois fazemos a contagem quando as cores da 1ª faixa e da 3ª faixa forem iguais. Para o primeiro caso temos: 4 possibilidades de pintar a 1ª faixa, qualquer que seja a cor a ser pintada na 1ª faixa temos 3 possibilidades de pintar a 3ª faixa, qualquer que sejam as escolhas anteriores (pintar a 1ª faixa e a 3ª faixa) temos 2 possibilidades de pintar a 2ª faixa, pelo PFC temos  $4 \times 3 \times 2 = 24$ . Para o segundo caso (primeira e segunda faixa pintadas com cores iguais) temos 4 possibilidades de pintar a primeira e a terceira faixa, qualquer que sejam essas possibilidades temos 3 possibilidades de pintar a segunda faixa, pelo PFC temos  $4 \times 3 = 12$ . Somando as possibilidades nos dois casos temos:  $24 + 12 = 36$ . No segundo caso os alunos podem não entender o porquê de a primeira faixa e a terceira faixa terem 4 possibilidades, para ficar mais claro fixamos a mesma cor na primeira faixa e na terceira faixa, temos assim uma possibilidade de pintar a primeira faixa e uma possibilidade de pintar a terceira faixa, para segunda faixa sobram 3 cores, pois não pode ser igual a primeira faixa e a terceira faixa, pelo PFC temos:  $1 \times 1 \times 3 = 3$  para uma mesma cor fixada na primeira faixa e na terceira faixa, como temos 4 cores, temos 4 possibilidades de escolha para primeira e terceira faixa, daí temos  $4 \times 3 = 12$ .

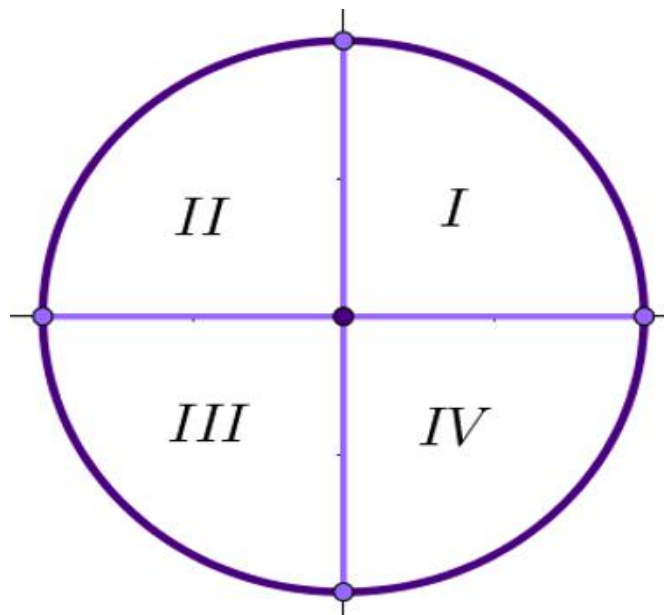
Observe que resolver o problema começando pela primeira faixa e pela terceira faixa dá mais trabalho do que resolvermos começando pela primeira e segunda faixa. Daí devemos raciocinar e evitar as dificuldades, se tivéssemos tentado resolver o problema primeiramente da segunda maneira, deveríamos tentar resolver de outras maneiras e verificar se podemos usar o PFC de uma

maneira mais rápida. Vemos nesse problema o quão importante é escolher as decisões sucessivas que devemos tomar para resolver o problema mais rapidamente.

Nos próximos exemplos vamos utilizar diretamente o PFC, sem expor a soma de parcelas iguais, presumindo que os alunos já ganharam “maturidade” para entender o porquê multiplicamos as possibilidades no PFC.

- Vamos agora para o exercício 7 do capítulo 1, Carvalho (p.12,2017), **situação problema (4)** que tem o seguinte enunciado:

Exercício 7: Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante de uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor?



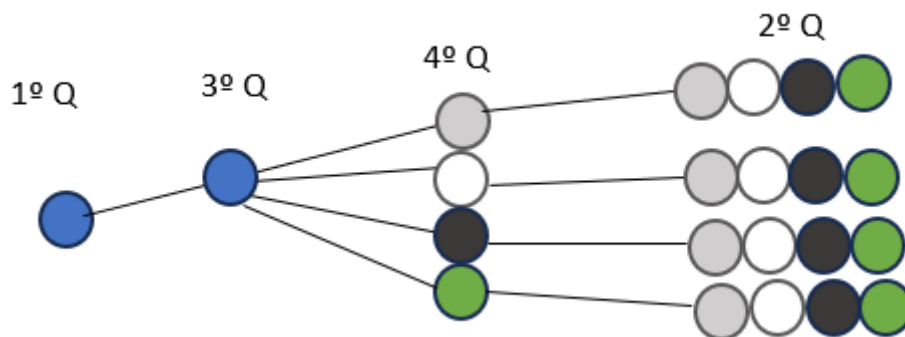
Primeiro observamos quais são os quadrantes que podem ter cores iguais e quais devem ter cores diferentes, como os quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber a mesma cor, temos que os quadrantes 1 e 3 (quadrantes ímpares) podem ter cores iguais e os quadrantes 2 e 4 (quadrantes pares) podem ter cores iguais, daí os quadrantes 1 e 2, 1 e 4 tem que ter cores diferentes bem como os quadrantes 3 e 4, e 3 e 2. Precisamos tomar a primeira decisão de pintar algum quadrante, vamos começar pintando o quadrante 1 e ir pintando no sentido horário do círculo, daí temos 5 possibilidades de pintar o primeiro quadrante, como os quadrantes 1 e 4 devem ter cores distintas temos 4 possibilidades de pintar o quarto quadrante, como o terceiro quadrante pode ter a mesma cor do primeiro quadrante e deve ter cor diferente do quarto quadrante temos 4 possibilidades de pintar o terceiro quadrante, agora que surge uma dificuldade, de quantas maneiras

podemos pintar o segundo quadrante? A resposta é: depende. Se tivermos pintado o primeiro e o terceiro quadrante da mesma cor o segundo quadrante pode ser pintado de 4 maneiras, já que pode ter cor igual a do quarto quadrante e cores diferentes do primeiro e terceiro quadrantes. Se tivermos pintado o primeiro e o terceiro quadrantes de cores diferentes, o segundo quadrante pode ser pintado de 3 maneiras já que pode ter cor igual a do quarto quadrante e cores diferentes do primeiro e terceiro quadrantes.

Assim temos que, dividir a contagem quando o primeiro e o terceiro quadrantes tem cores iguais e quando tem cores diferentes. Observe que se tentarmos começar as decisões de pintar os quadrantes do círculo de outra maneira, como por exemplo no sentido anti-horário, teremos também que dividir o problema em casos.

Pintando o primeiro e o terceiro quadrantes com a mesma cor, temos: 5 possibilidades de pintar o primeiro e o terceiro quadrante, qualquer que seja essa escolha temos 4 possibilidades de pintar o quarto quadrante e quaisquer que sejam as escolhas anteriores temos 4 possibilidades de pintar o segundo quadrante, daí pelo PFC temos:  $5 \times 4 \times 4 = 80$ . Observe a figura abaixo.

**Figura 16: Árvore de enumeração (3.3)**



Fonte: O autor (2025)

Imagine que as 5 cores sejam: azul, cinza, branco, preto e verde. No diagrama acima começamos pintando o primeiro e o terceiro quadrantes de azul, daí o quarto quadrante pode ser pintado de 4 maneiras: cinza, branco, preto e verde, como o segundo quadrante pode ter cor igual a do quarto quadrante e cores diferentes do primeiro e terceiro quadrantes, temos 4 maneiras de pintar o segundo quadrante: cinza, branco, preto e verde (as mesmas do quarto quadrante). Analogamente se começarmos a pintar o primeiro e terceiro quadrantes de qualquer uma das outras 4 cores. Por questão de espaço colocamos as possibilidades de pintar o segundo quadrante em fila.

Pintando o primeiro e o terceiro quadrantes de cores diferentes, temos 5 possibilidades de pintar o primeiro quadrante, qualquer que seja a escolha anterior temos 4 possibilidades de pintar o terceiro quadrante, quaisquer que sejam as escolhas anteriores temos 3 possibilidades de pintar o quarto quadrante, quaisquer que sejam as escolhas anteriores temos 3 possibilidades de pintar o segundo quadrante, daí pelo PFC temos:  $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ . Aqui fica inviável fazer um diagrama completo. Vamos tornar esse caso mais claro conforme a figura abaixo:

**Figura 17: Exemplos de cores**

1º Q	3º Q	4º Q	2º Q
Azul	Cinza	Branco	Branco
Cinza	Branco	Preto	Preto
Branco	Preto	Verde	Verde
Preto	Verde		
Verde			

Fonte: O autor (2025)

Imaginemos novamente que as cinco cores sejam: Azul, cinza, branco, preto e verde. Conforme a figura acima há cinco maneiras de pintar o primeiro quadrante com as cinco cores, pintando o primeiro quadrante de azul sobram quatro cores para pintar o terceiro quadrante, pintando o terceiro quadrante de cinza sobram três cores para pintar o quarto quadrante, agora vem a parte que gera mais dúvida nos alunos: pintando o quarto quadrante com qualquer uma das cores que sobraram (branco, preto e verde) quantas cores sobram para pintar o segundo quadrante? Resposta: sobram as mesmas cores do quarto quadrante, pois o segundo e quarto quadrante podem ser pintados de cores iguais. Analogamente se escolhermos começar a pintar os quadrantes com outras cores.

Perceba que além de diagramas, como a árvore de enumeração, podemos dar exemplos para o aluno visualizar o que acontece em cada passagem do problema, caso seja necessário mostramos a soma de parcelas iguais resultando assim no princípio fundamental da contagem, isso deve ser feito com repetição nos primeiros problemas.

Vamos agora seguir para o exemplo 4:

**Figura 18: Situação problema (5)**

**Exemplo 4.** Quantos são os números de três algarismos distintos?

Fonte: Carvalho (p.06,2017)

O primeiro passo nesse problema é mostrar que temos 10 algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9 que vão ser distribuídos em 3 posições: primeiro algarismo, segundo algarismo e terceiro algarismo. O segundo passo é por onde começar a contagem, vamos escolher os dois caminhos que dão mais trabalho para que o aluno veja o porquê não devemos começar por eles. Primeiro caminho é começar pela escolha do terceiro algarismo, daí temos 10 possibilidades de escolha para o terceiro algarismo, temos que tomar a segunda decisão: escolher o primeiro algarismo ou o segundo algarismo. Se escolhermos o segundo algarismo como os 3 algarismos são distintos temos 9 possibilidades de escolha para o segundo algarismo, agora que surgiu uma dificuldade: de quantas maneiras podemos escolher o primeiro algarismo (terceira decisão)? A resposta é depende.

Se o zero não tiver sido escolhido no terceiro ou segundo algarismo teremos 7 possibilidades para escolha do primeiro algarismo, pois ele não pode ser zero e tem que ser diferente do terceiro e segundo algarismos. Se o zero tiver sido escolhido no terceiro ou segundo algarismo, teremos 8 possibilidades para escolha do primeiro algarismo. Daí precisamos dividir o problema em casos. Caso em que o zero não é usado na contagem: temos 9 possibilidades para o terceiro algarismo, 8 possibilidades para o segundo algarismo e 7 possibilidades para o primeiro algarismo. Daí pelo PFC, ficamos com  $9 \times 8 \times 7 = 504$ . Se o zero tiver sido escolhido no terceiro ou segundo algarismo teremos oito possibilidades para a escolha do primeiro algarismo. Nesse último caso não podemos usar o PFC diretamente, precisamos dividir esse caso em duas partes: quando o zero é escolhido para o terceiro algarismo e quando o zero é escolhido para o segundo algarismo.

Na primeira parte temos uma possibilidade para o terceiro algarismo, 9 para o segundo algarismo e 8 para o primeiro algarismo, pelo PFC temos  $1 \times 9 \times 8 = 72$ . Na segunda parte temos 9 possibilidades para o terceiro algarismo, uma possibilidade para o segundo algarismo e 8 possibilidades para o primeiro algarismo, pelo PFC temos:  $9 \times 1 \times 8 = 72$ . Agora somamos os casos:  $504 + 72 + 72 = 648$ . Observe a figura abaixo:

**Figura 19: Exemplo- caso zero não escolhido no terceiro ou segundo algarismo**

Primeiro	Segundo	Terceiro
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
	8	8
		9

Temos nessa figura um exemplo do primeiro caso, no terceiro algarismo escolhemos o nove, assim sobram os oito algarismos para escolha do segundo algarismo, independente da escolha do terceiro algarismo sobram oito algarismos para o segundo algarismo. Escolhendo o algarismo oito para o segundo algarismo, sobram os 7 algarismos para o primeiro algarismo.

A solução acima é muito trabalhosa, existe uma maneira mais rápida de resolver o problema em questão, como mencionamos anteriormente, temos que tomar decisões consecutivas de maneiras diferentes e verificar se existem escolhas que tornam a solução do problema mais rápida. Se começarmos pela escolha do primeiro algarismo temos nove possibilidades, pois o primeiro algarismo não pode ser zero, em seguida se tomarmos a decisão de escolher o segundo algarismo temos nove possibilidades, pois tem que ser diferente do primeiro algarismo (oito possibilidades) e pode ser zero. Por último temos oito possibilidades para o terceiro algarismo, pois tem que ser diferente do primeiro e segundo algarismos, daí pelo PFC temos:  $9 \times 9 \times 8 = 648$ .

- Vamos agora para o exercício 17 do capítulo 1, Carvalho (p.12,2017), **situação problema (6)** que tem o seguinte enunciado: *Quantos são os inteiros positivos de 4 algarismos nos quais o algarismo 5 figura?*

Se tentarmos resolver esse problema calculando as possíveis posições do algarismo cinco vamos ter bastante trabalho: Vamos ter que calcular as possibilidades em que o algarismo cinco aparece uma vez, duas vezes, três vezes e quatro vezes no número, o que pode acarretar erros na contagem. Precisamos pensar numa estratégia que resolva o problema mais rapidamente. Uma maneira rápida e elegante de resolver esse problema é utilizar um raciocínio destrutivo: Contando a quantidade total de inteiros positivos de quatro algarismos e subtraindo desse valor a quantidade de inteiros positivos de quatro algarismos na qual o algarismo cinco não está presente. Como temos dez algarismos e o primeiro algarismo não pode ser zero, temos nove possibilidades para escolha do primeiro algarismo, como podemos repetir os algarismos usados na escolha do primeiro algarismo e o número zero pode ser utilizado, temos dez possibilidades de escolha para o segundo algarismo, dez possibilidades para escolha do terceiro algarismo e dez possibilidades de escolha para o quarto algarismo, daí pelo PFC temos  $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$  números inteiros positivos de quatro algarismo.

Retirando o algarismo cinco das possibilidades, ficamos com nove algarismos, daí temos oito possibilidades de escolha para o primeiro algarismo, pois o primeiro algarismo não pode ser zero, como podemos repetir os algarismos usados na escolha do primeiro algarismo e o número zero

pode ser utilizado, temos nove possibilidades de escolha para o segundo algarismo, nove possibilidades de escolha para o terceiro algarismo e nove possibilidades de escolha para o quarto algarismo, daí pelo PFC temos  $8 \times 9 \times 9 \times 9 = 5832$  inteiros positivos nos quais o algarismo cinco não está presente. Logo a quantidade de inteiros positivos de quatro algarismos nos quais o algarismo cinco figura é:  $9000 - 5832 = 3168$ . Observe que calculamos o complementar do conjunto procurado no problema e o retiramos do total de números positivos possíveis de quatro algarismos para chegar de uma maneira mais rápida na solução do problema. Isso precisa ser ensinado com exercícios que tenham resoluções similares ao desse problema para os alunos terem essa estratégia em mente e resolver mais rapidamente o problema. Seguindo essa linha de pensamento e visualização do problema, observe o exercício do produto educacional: em uma loja temos 8 lâmpadas que podem ficar acesas ou apagadas. De quantas maneiras podemos ter pelo menos uma lâmpada acesa? Se pensarmos que as acesas são algo positivo e a apagada negativo temos pelo uso do raciocínio lógico a seguinte resposta  $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) - 1 = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$ .

### Figura 20: Situação problema (7)

**Exemplo 5.** O código Morse usa duas letras, ponto e traço, e as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?

Fonte: Carvalho (p.06,2017)

Os símbolos ponto e traço representam duas letras no código Morse, por exemplo, ponto(.) é uma palavra do código Morse de uma letra, o traço (-) é uma palavra do código Morse de uma letra. O símbolo: ponto(.) traço (-) é uma palavra de duas letras e assim sucessivamente. Vemos que é inviável contar todas as palavras do código Morse de uma por uma. A estratégia aqui é separar a contagem em quatro etapas: palavras com uma letra, palavras com duas letras, palavras com três letras e palavra com quatro letras e depois somar as possibilidades. Aqui pode haver uma confusão com as letras do alfabeto, no código Morse temos duas letras que são representadas por ponto e traço. Assim para palavra de uma letra temos duas possibilidades (traço ou ponto), para palavra de duas letras a primeira letra pode ser ponto ou traço, daí temos 2 possibilidades para primeira letra, a segunda letra também pode ser ponto ou traço, daí temos duas possibilidades, pelo PFC temos  $2 \times 2 = 4$  possibilidades. Para palavra de três letras temos pelo PFC:  $2 \times 2 \times 2 = 8$ . Para palavra de quatro letras temos pelo PFC:  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ , somando esses valores temos  $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ .

Observando os problemas resolvidos anteriormente podemos tirar algumas estratégias para resolver problemas de contagem, de acordo com (Carvalho, 2017) são elas:

1. **Postura:** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada no problema e ver que decisões devemos tomar.
2. **Divisão:** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes as diversas etapas do processo de decisão.
3. **Não adiar dificuldades.** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Na situação problema 1, 2 e 3 a nossa **postura** foi nos colocar no lugar da pessoa que deveria colorir a bandeira. **Dividimos** esses problemas em pintar cada região, na situação problema 3 observamos que a escolha das decisões sucessivas pode tornar o problema mais trabalhoso ou mais rápido dependendo da escolha, a escolha das decisões sucessivas que resolvem o problema mais rapidamente consiste em **não adiar dificuldades**, escolhendo as faixas não adjacentes como decisões sucessivas, surgiu a dificuldade para as possibilidades de pintar a segunda faixa depender das cores pintadas na primeira e terceira faixas, não podendo assim utilizar o PFC diretamente. Há problemas que mesmo tentando resolver tomando decisões sucessivas diferentes para encontrar uma maneira mais rápida de solução, teremos que dividi-los em casos para depois usarmos o PFC, como por exemplo a situação problema 4. Na situação problema 5, a ordem das tomadas de decisões pode tornar a resolução do problema mais trabalhosa ou mais fácil. Para resolver mais rapidamente devemos começar a contagem pela escolha mais restrita de escolher o algoritmo (a escolha do primeiro algoritmo) não adiando assim dificuldades, observamos o trabalho que dá se deixarmos essa escolha para ser contada por último.

A próxima situação problema, é um exemplo em que mesmo começando a contagem pelas restrições não poderemos usar o PFC diretamente, teremos que dividi-la em casos.

### Figura 21: Situação problema (8)

**Exemplo 6.** Quantos são os números pares de três algoritmos distintos?

Fonte: Carvalho (p.08,2017)

Observe que temos duas restrições: a escolha do primeiro algoritmo não pode ser zero e a escolha do terceiro algoritmo fica restrita aos algoritmos: 0, 2, 4, 6 ou 8, pois os números são pares. Por onde devemos começar a contagem? Como vimos uma das estratégias para resolver problemas de contagem é não adiar dificuldades, daí devemos começar a contagem por uma das restrições (primeiro algoritmo ou terceiro algoritmo). Caso não comecemos a contagem por uma delas, a resolução fica mais complicada, pois teremos 10 possibilidades para a escolha do segundo

algarismo, as maneiras de escolha do primeiro algarismo vão depender se o zero foi ou não contado, já a escolha do terceiro algarismo vai depender se algum algarismo par foi utilizado nas possibilidades anteriores. Já começando a contagem pelo primeiro algarismo, teremos 9 possibilidades (não pode ser zero), para o segundo algarismo teremos 9 possibilidades (tem que ser diferente do primeiro e pode ser zero), já para o terceiro algarismo vai depender se algum algarismo par foi utilizado nas escolhas anteriores, se dois algarismos pares forem utilizados, para o terceiro algarismo teremos 3 possibilidades, se um foi utilizado teremos 4 possibilidades, nesse caso as escolhas para o primeiro e segundo algarismos mudariam, teríamos que dividir em vários casos. Começando a escolha pelo terceiro algarismo (a escolha mais restrita), teremos 5 possibilidades para o terceiro algarismo, 9 possibilidades para o segundo algarismo, a quantidade de possibilidades para o primeiro algarismo vai depender se o zero foi ou não utilizado, daí teríamos que calcular as possibilidades em que o zero aparece na última posição, na segunda posição e quando ele não aparece no número. Já se tomarmos a primeira decisão de escolher o terceiro algarismo e segunda decisão escolher o primeiro algarismo (restrição de não poder ser zero), teremos 5 possibilidades para o terceiro algarismo, já a escolha do primeiro algarismo vai depender se o zero foi ou não utilizado na terceira decisão, daí temos que dividir o problema em dois casos: números que terminam em zero e os números que não terminam em zero. Começando pelos que terminam em zero, temos uma possibilidade para o terceiro algarismo, 9 possibilidades para o primeiro algarismo e 8 possibilidades para o segundo algarismo, pelo PFC temos:  $1 \times 9 \times 8 = 72$  números de 3 algarismos distintos que acabam em zero.

Para os que não terminam em zero, temos 4 possibilidades para o terceiro algarismo, 8 possibilidades para o primeiro algarismo (tem que ser diferente do terceiro e não pode ser zero) e 8 possibilidades para o segundo algarismo (tem que ser diferente do terceiro e do primeiro e pode ser zero), temos pelo PFC:  $4 \times 8 \times 8 = 256$  números de 3 algarismos distintos que não acabam em zero.

Daí a solução do problema é  $72 + 256 = 328$ .

Existe uma outra maneira de resolver o problema que consiste em calcular as possibilidades incluindo o zero no primeiro algarismo (ignoramos a restrição de não poder começar por zero), daí teríamos que subtrair dessas possibilidades o caso em que o primeiro algarismo é zero para chegar à resposta correta. Esse raciocínio é chamado de **destrutivo**. Vejamos: Incluindo a possibilidade de escolher o zero no primeiro algarismo e começando a contagem pelo terceiro algarismo, temos 5 possibilidades para o terceiro algarismo (0, 2, 4, 6 ou 8), 9 possibilidades para o primeiro algarismo (tem que ser diferente do terceiro algarismo podendo ser zero) e 8 possibilidades para o segundo algarismo (tem que ser diferente do terceiro e primeiro algarismos), daí pelo PFC, temos:  $5 \times 9 \times 8 = 360$  números, incluindo os que começam em zero. Agora precisamos subtrair desse valor a

quantidade de “números” que começam por zero (esses “números” foram contados a mais na contagem), para calcular os números que começam com zero temos 4 possibilidades para o terceiro algarismo (2, 4, 6 ou 8), uma possibilidade para o primeiro algarismo (tem que ser zero), 8 possibilidades para o segundo algarismo (tem que ser diferente do terceiro e primeiro algarismos), temos pelo PFC:  $4 \times 1 \times 8 = 32$  números que começam por zero. Logo a resposta correta é  $360 - 32 = 328$ .

Segundo (Lima, Elon Lages, 2006), não devemos dar preferência a **raciocínios destrutivos**, raciocínios do tipo contar a mais e depois descontar o que não servia e foi contado indevidamente. Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de combinatória são essencialmente construtivos. Dominando primeiro estes raciocínios os alunos se sentirão mais seguros, podendo resolver aqueles de maneira mais consciente. Assim o aluno deve primeiro tentar resolver o problema de maneira construtiva, utilizando o PFC ou dividindo em casos se necessário, caso a solução dê muito trabalho utilizando essas estratégias devemos observar se um raciocínio destrutivo resolve mais rapidamente o problema, como fizemos na situação problema 6 e na segunda solução da situação problema 8.

A próxima situação problema nos permitirá definir permutações simples de  $n$  objetos distintos e o fatorial de  $n$ .

### Figura 22: Situação problema (9)

**Exemplo 7.** De quantos modos diferentes 6 pessoas podem ser colocadas em fila?

Fonte: Carvalho (p.10,2017)

Podemos resolver facilmente esse problema utilizando o PFC, como temos 6 pessoas podemos ordená-las em: primeiro da fila, segundo da fila, terceiro da fila, quarto da fila, quinto da fila e sexto da fila. Para o primeiro da fila temos 6 possibilidades, para o segundo da fila temos 5 possibilidades(escolhido o primeiro da fila sobram 5 pessoas), para o terceiro da fila temos 4 possibilidades(escolhido o primeiro e o segundo da fila sobram 4 pessoas), para o quarto da fila temos 3 possibilidades(escolhido o primeiro, o segundo e o terceiro da fila sobram 3 pessoas), para o quinto da fila temos 2 possibilidades( escolhido o primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto da fila sobram 2 pessoas) e para o sexto da fila temos 1 possibilidade(escolhido o primeiro, o segundo, o terceiro, o quarto e o quinto da fila sobra uma pessoa).

Pelo PFC temos:  $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ . O que acabamos de fazer é o que chamamos de permutações simples de 6 objetos distintos. De modo geral, o número de modos de ordenar  $n$  objetos distintos é igual a  $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$ , que é representado por  $n!$  (lê-se  $n$  fatorial). Vimos

na seção 2.2 que o número de permutações simples de  $n$  objetos distintos é igual ao número de modos de ordenar  $n$  objetos distintos, é representado por  $P_n$ . Daí  $P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1 = n!$ . Cada ordenação dos  $n$  objetos é chamada de uma permutação simples de  $n$  objetos. No problema acima temos que  $P_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ . Aqui alguns alunos têm o primeiro contato com a notação de fatorial e um caso específico do PFC: as permutações simples de  $n$  objetos distintos. Podemos aproveitar e trabalhar os exemplos de permutações simples usados na seção 2.2, bem como introduzir exercícios que envolvam anagramas de palavras que não possuam letras repetidas, como por exemplo: Quantos são os anagramas da palavra “tia”? Facilmente resolvemos esse problema utilizando o PFC, mais especificamente as permutações simples, podemos ordenar a palavra em: primeira letra, segunda letra e terceira letra. Existem 3 possibilidades de escolha para primeira letra, para segunda letra temos 2 possibilidades (escolhida a primeira letra sobram 2 letras), para terceira letra temos uma possibilidade (escolhida a primeira e a segunda letra sobra 1 letra), daí pelo PFC temos  $3 \times 2 \times 1 = 6$  anagramas ou mais rapidamente por permutações simples  $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ . São eles: “tia”, “tai”, “iat”, “ita”, “ait” e “ati”. Quantos são os anagramas da palavra “caro”? Facilmente resolvemos esse problema utilizando o PFC, mais especificamente as permutações simples, podemos ordenar a palavra em: primeira letra, segunda letra, terceira letra e quarta letra. Existem 4 possibilidades de escolha para primeira letra, para segunda letra temos 3 possibilidades (escolhida a primeira letra sobram 3 letras), para terceira letra temos 2 possibilidades (escolhida a primeira e a segunda letra sobram 2 letras), para a quarta letra sobra uma possibilidade (escolhida a primeira, a segunda e a terceira letra sobra uma letra), daí pelo PFC, temos  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  anagramas com as letras da palavra caro ou mais rapidamente por permutação simples:  $P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ . Quantos são os anagramas da palavra “mandei”? Pelas permutações simples temos  $P_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$  anagramas, deve ser estimulado a utilização das permutações simples para problemas que envolvam o número de modos de ordenar  $n$  objetos distintos, caso o aluno tenha dificuldade de resolver dessa forma podemos utilizar a aplicação do PFC detalhado para eles “enxergarem” melhor o que acontece em cada passo, até que se familiarizem em usar diretamente as permutações simples. Quantos são os anagramas da palavra matemática? Antes de resolvermos o problema dos anagramas com letras repetidas, vamos para próxima situação problema que nos permitirá definir uma combinação simples.

### Figura 23: Situação problema (10)

**Exemplo 8.** De quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol para representá-lo em uma cerimônia de premiação?

Considerando que o time de futebol tenha 11 jogadores, podemos aparentemente usar o PFC para resolver facilmente o problema. Vamos ordenar a escolha dos jogadores em: primeiro jogador, segundo jogador e terceiro jogador. Temos 11 possibilidades de escolher o primeiro jogador, 10 possibilidades de escolher o segundo jogador (escolhido o primeiro jogador sobram 10 jogadores), 9 possibilidades de escolher o terceiro jogador (escolhido o primeiro e o segundo jogador sobram 9 jogadores), daí pelo PFC temos  $11 \times 10 \times 9 = 990$ . Contudo essa solução está errada. O aluno deve ser estimulado a encontrar o erro. Suponhamos que tivéssemos escolhido, sucessivamente os jogadores Ronaldo, Ronaldinho e Rivaldo. A comissão de representantes assim formada seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro Ronaldinho, depois Ronaldo e depois Rivaldo, ou seja, a comissão (Ronaldo, Ronaldinho, Rivaldo) é igual a comissão (Ronaldinho, Ronaldo, Rivaldo), a **ordem** que os jogadores são escolhidos **não importa**, porém, na nossa contagem utilizando o PFC contamos como se fossem comissões diferentes. Podemos aproveitar o nosso raciocínio e consertá-lo para chegar à resposta correta. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo, a comissão (Ronaldo, Ronaldinho, Rivaldo) vai surgir, em nosso processo de enumeração,  $3 \times 2 \times 1 = 6$  vezes, isso corresponde as permutações simples de 3 elementos distintos:  $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ , ou seja, cada comissão de 3 jogadores é contada 6 vezes. Daí temos  $(6 + 6 + 6 + \dots + 6) = 11 \times 10 \times 9$ , como temos uma soma finita de parcelas iguais, sendo C a quantidade de parcelas (colocando 6 em evidência:  $6(1 + 1 + 1 \dots + 1)$ ), Observamos que a quantidade de parcelas é igual à soma finita do número 1, que é justamente a soma de cada possibilidade contada uma única vez, temos que  $C \times 6 = 11 \times 10 \times 9 \rightarrow 6C = 11 \times 10 \times 9 \rightarrow C = \frac{11 \times 10 \times 9}{6} = \frac{990}{6} = 165$ . O que acabamos de calcular foi a combinação simples de 11 tomados 3 a 3. Segundo (Carvalho,2017):

“De modo geral, o número de modos de escolher p dentre n objetos é representado por  $C_n^p$  ( lê-se: combinação de n tomados p a p) e é igual a  $\frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1)}{p(p-1) \cdot \dots \cdot 1}$  .”

Como vimos na seção 2 problemas de combinações simples consistem em determinar todos os subconjuntos de p elementos do conjunto de n elementos. Como boa parte dos alunos vai estar vendo pela primeira vez esses conceitos convém definir o que é um conjunto e mostrar que, por exemplo, o conjunto (x, y, z) é igual ao conjunto (x, z, y), e também é igual a todos os outros conjuntos que possuam como elementos apenas x, y e z em qualquer ordem. No total temos  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  conjuntos iguais com os elementos x, y e z. Outras notações para representar o número total de combinações simples de n tomados p a p são  $C_{n,p}$  e  $\binom{n}{p}$ . Assim no problema anterior temos:

$C_{11}^4 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = \frac{990}{6} = 165$ . Podemos resolver em sala o problema que utilizamos para introduzir combinação simples na seção 2: o da escolha dos alunos para representar a equipe. Bem como outros exemplos que envolvam escolher  $p$  dentre  $n$  objetos.

Observamos que, (Carvalho, 2017) não defini o que é um arranjo simples, isso se deve pelo fato de um arranjo simples ser um caso específico do PFC como vimos na seção 2. Para completar o estudo ao público do 6º ano ao 9º ano podemos utilizar o problema dos pódios da seção 2 resolvendo com o PFC e definindo o que é um arranjo simples pelo PFC, sem mostrar a fórmula utilizando fatoriais e mostrando que a diferença para a combinação é que a **ordem** em que os elementos são colocados na contagem **importa**. Também podemos observar que o autor não utiliza a fórmula de fatoriais na definição de combinação simples, recomendamos fortemente a demonstração e utilização das fórmulas utilizando fatoriais de Arranjo simples e combinação simples para alunos mais avançados. O objetivo inicial aqui é mostrar que o PFC resolve a maioria dos problemas de contagem.

- Vamos agora para o exercício 21 do capítulo 1, Carvalho (p.14,2017), **situação problema (11)** que tem o seguinte enunciado: *Cada peça de um dominó apresenta um par de números de 0 a 6, não necessariamente distintos. Quantas são as peças? E se os números forem de 0 a 8?*

Observe que temos 7 números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Uma peça de dominó é dividida em duas partes com números que podem ser iguais ou não. Vamos dividir as peças em dois lados: lado 1 e lado 2. Começando a contagem pelo lado 1 temos 7 possibilidades de escolha, para o lado 2 temos 7 possibilidades de escolha, utilizando o PFC temos  $7 \times 7 = 49$ , essa solução está incorreta, pois por exemplo a peça (1,2) é igual a peça (2,1), mas na contagem foram contadas como se fossem diferentes. Aqui a ordem não importa. Uma estratégia para resolver o problema é separar em dois casos: peças do dominó com números iguais (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) e em peças com número diferentes, observe que esse último caso trata de uma combinação simples de 7 elementos tomados 2 a 2, devemos escolher 2 números dentre 7:  $\frac{7 \times 6}{2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = \frac{42}{2} = 21$ . Temos 7 peças com números iguais e 21 peças com números diferentes, logo a resposta é  $7 + 21 = 28$  peças.

Os exercícios do capítulo 1 devem ser utilizados como tarefa para casa, os alunos tem que tentar ao máximo resolve-los, no último capítulo da apostila tem as soluções de todos eles, o que em muitos casos não ajuda caso o aluno não tenha entendido bem a parte teórica, deve ser estimulado várias tentativas antes deles olharem a resposta no final da apostila. Deve ser feita a correção dos

exercícios. Em sala de aula deve ser feita a resolução de todos os exercícios (22 no total), caso não tenha tempo disponível para resolver todos, sugerimos a solução dos exercícios que envolvam o contexto dos alunos bem como aqueles que já tenham caído questões semelhantes na OBMEP como por exemplo, o exercício 11 que é uma versão mais difícil da questão 7 da primeira fase da OBMEP 2006 (nível 1) como veremos na próxima seção. É extremamente recomendado estimular os alunos a irem ao quadro resolver os exercícios, caso ninguém se disponha podemos selecionar algum aluno ou alguns alunos para darem ideias de como resolver o problema, essa discussão em sala estimulará o aluno na construção do próprio conhecimento. Ensinar utilizando o porquê de cada passo utilizado para chegar a resposta do exercício é fundamental para construção de uma boa base e consequentemente uma ótima escrita da resolução dos problemas.

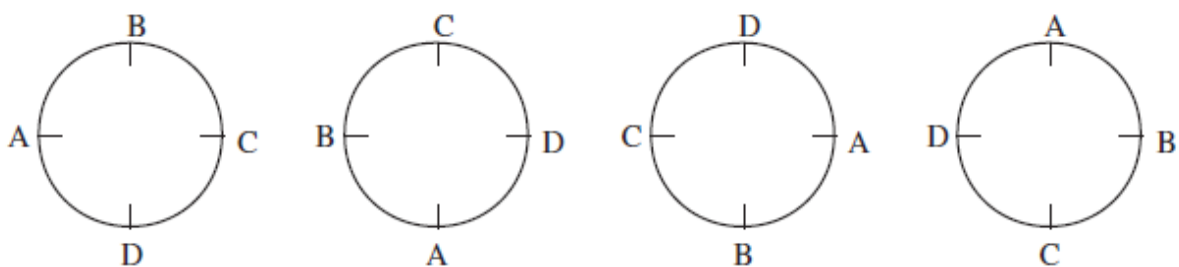
Vamos agora ao capítulo 4 da apostila que trata de mais permutações e combinações. (Carvalho,2017), começa enfatizando que é possível resolver um grande número de questões de contagem sem utilizar fórmulas, apenas utilizando adequadamente as quatro operações, como foi feito nos exemplos e exercícios do capítulo 1. Existem, no entanto, certos problemas que ocorrem com frequência e que não são imediatos, como o problema das combinações simples, para os quais é interessante conhecer a fórmula que expressa sua solução, para emprega-la em outros problemas. Veremos nos próximos exemplos: permutação circular, combinação simples e permutação com repetição.

#### Figura 24: Situação problema (12)

##### Exemplo 1. De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

Fonte: Carvalho (p.30,2017)

Podemos intuitivamente considerar uma ordem para as 4 crianças e calcular a permutação de 4 objetos:  $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ . Só que esse raciocínio está errado, mas podemos corrigi-lo para chegar à resposta correta. Como observa (Carvalho,2017), as rodas ABCD, BCDA, CDAB e DABC mostradas na figura abaixo são iguais, já que cada uma resulta da anterior por uma “virada” de 1/4 de volta.



Ou seja, nesse caso apenas giramos a roda, ela continua a mesma. Cada roda na nossa contagem acima foi contada 4 vezes, portanto temos  $(4 + 4 + \dots + 4) = 24 \rightarrow 4(1 + 1 \dots + 1) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \rightarrow (1 + 1 \dots + 1) = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4}$ , essa soma de números uns é a soma de cada possibilidade de roda contada individualmente (a resposta para o problema), vamos chama-la de  $PC_4$  (Lê-se permutações circulares de 4 objetos), logo temos  $PC_4 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4} = 3 \times 2 \times 1 = 6$ . Uma outra maneira de resolver o problema é fixar uma das crianças, vamos fixar a criança A na posição à esquerda (em qualquer roda A pode ficar nesta posição). Agora podemos permutar as três crianças que sobraram, daí temos o total de rodas, logo temos:  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  rodas.

De um modo geral, segundo (Carvalho, 2017), o número de modos de colocar  $n$  objetos em círculo, considerando-se iguais disposições que coincidam por rotação (ou seja, o número de permutações circulares de  $n$  objetos) é  $PC_n = (n - 1)!$ . Considerando o nosso raciocínio de calcular a quantidade de rodas pelas permutações simples de  $n$  objetos, para obter a resposta correta precisamos dividi-las pela quantidade que cada roda foi contada ( $n$  vezes), observe que para  $n$  objetos permutados, cada roda é contada  $n$  vezes, daí temos  $PC_n = \frac{n!}{n} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times 1}{n} = (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \dots \times 1 = (n - 1)!$ . Assim por exemplo, a quantidade de maneiras de formarmos uma roda com 7 pessoas é de:  $PC_7 = (7 - 1)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$  ou  $PC_7 = \frac{7!}{7} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ . Tem alguns exercícios do capítulo 4 que os alunos podem tentar resolver para praticar permutação circular.

### Figura 25: Situação problema (13)

#### Exemplo 3. Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

Fonte: Carvalho (p.32,2017)

(Carvalho, 2017) apresenta duas resoluções para esse problema. Uma utilizando combinações simples e a outra utilizando permutações simples divididas pela quantidade que cada uma foi contada. Vamos utilizar essa última para chegarmos na definição de permutações com repetição. Aquela pode ser utilizada como exercício para os alunos praticarem combinações simples.

Antes da resolução vamos definir o que é um anagrama: Anagrama é a permutação das letras de determinada palavra formando novas palavras que podem ou não fazer sentido na língua portuguesa. Por exemplo, um anagrama da palavra beijo é “jeibo”, para calcular o total de anagramas

dessa palavra de letras diferentes basta calcular as possíveis ordenações de suas letras, ou seja, calcular as permutações simples do número de letras, como temos 5 letras, ficamos com:  $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  anagramas. Já na palavra vela, como temos 4 letras diferentes, ficamos com:  $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  anagramas. Agora voltemos ao problema, podemos intuitivamente utilizar o mesmo raciocínio para calcular a quantidade de anagramas da palavra “MATEMATICA”, como temos 10 letras chegamos à conclusão que temos:  $P_{10} = 10!$  anagramas, só que essa resposta está errada, pois consideramos letras iguais como se fossem distintas. Como observa (Carvalho, 2017), é como se considerássemos as permutações de  $A_1, A_2, A_3, M_1, M_2, T_1, T_2, E, I, C$ .

“ Para corrigir a contagem, basta contar quantas vezes cada anagrama foi contado. Por exemplo, o anagrama AAAMMTTEIC foi contado várias vezes: um como  $A_1A_2A_3M_1M_2T_1T_2EIC$ , o outro como  $A_2A_1A_3M_1M_2T_1T_2EIC$  etc. Na verdade, ele foi contado tantas vezes como os modos de ordenar os 3 A, os 2 M e os 2 T, que é igual a  $3! \times 2! \times 2!$ . O número de anagramas é, então,  $\frac{10!}{3! \times 2! \times 2!} = 151200$ .”

Uma dúvida muito comum entre os alunos é: por que cada anagrama é contado  $3! \times 2! \times 2!$  vezes? E por que dividimos  $10!$  por este produto para encontrar a resposta correta?. Para explicar melhor vamos dar outros exemplos de anagramas: MATAMETICA, TATEMIMACA, AMAMTATEIC e CEITATMAMA. Observe que considerando cada anagrama e as letras iguais como diferentes, permutando as letras A entre as suas respectivas posições, temos  $3!$  Possibilidades, para cada uma dessas permutações temos  $2!$  permutações entre as letras T nas suas respectivas posições, logo pelo PFC temos  $3! \times 2!$  Possibilidades de combinar as letras A e T nas suas respectivas posições, para cada uma dessas possibilidades temos  $2!$  permutações entre as letras M nas suas respectivas posições, daí pelo PFC temos  $3! \times 2! \times 2!$  possibilidades de combinar as letras A, T e M nas suas respectivas posições, como as letras C, E e I não tem repetições nos anagramas só existe uma possibilidade para cada uma, portanto pelo PFC temos  $3! \times 2! \times 2! \times 1 \times 1 \times 1 = 3! \times 2! \times 2!$  possibilidades que cada anagrama foi contado. Assim cada anagrama foi contado  $3! \times 2! \times 2!$  vezes na contagem que usamos a permutação das 10 letras ( $10!$ ). Logo temos  $(3! \times 2! \times 2! + 3! \times 2! \times 2! \dots + 3! \times 2! \times 2!) = 10!$ , como temos uma soma finita de parcelas iguais, sendo P a quantidade de parcelas(colocando  $3! \times 2! \times 2!$  em evidência:  $3! \times 2! \times 2!(1 + 1 + 1 \dots + 1)$ , observamos que a quantidade de parcelas é igual a soma finita do número 1, que é justamente a soma de cada possibilidade contada uma única vez), daí temos  $3! \times 2! \times 2!(1 + 1 \dots + 1) = 10! \rightarrow P \times (3! \times 2! \times 2!) = 10! \rightarrow (3! \times 2! \times 2!) \times P = 10! \rightarrow (3! \times 2! \times 2!)P = 10! \rightarrow P = \frac{10!}{3! \times 2! \times 2!}$ . O raciocínio é semelhante ao que fizemos para combinação simples.

Podemos generalizar o raciocínio feito acima: Seja  $n$  a quantidade de objetos nem todos distintos, o número de permutações de  $n$  objetos, nem todos distintos, em que um deles aparece  $n_1$  vezes, outro  $n_2$  vezes, e assim por diante, é  $P_n^{n_1, n_2, \dots} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$ . No caso acima temos:  $P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3! 2! 2!}$ . Depois de os alunos entenderem o raciocínio para chegar na expressão geral de permutações com repetição, eles precisam praticar. Podemos fazer isso com várias palavras que possuem letras repetidas e calcular a quantidade de anagramas dessas palavras, bem como resolver outros exercícios que não envolvam anagramas para os alunos não acharem que só podemos utilizar permutações com repetição em problemas que envolvam anagramas. O exemplo 4 da página 34 de (Carvalho, 2017) é um problema que podemos utilizar permutações com repetição, mas com cuidado, já que utilizando essa ferramenta contamos casos a mais. Na lista de exercícios do capítulo temos alguns que envolvem permutações com repetição que podem ser resolvidos em sala com os alunos.

No item b) do exemplo 5 da página 34 de (Carvalho, 2017) temos um problema de combinação completa, esse problema só deve ser resolvido com os alunos mais avançados devido ao grau de dificuldade de entendimento para alunos do 6º ao 9º ano em geral. Os exercícios que envolvam combinações simples podem ser resolvidos com os alunos, como o item a) do exemplo em questão.

Nessa perspectiva, a metodologia de resolução de problemas apresenta-se como um caminho para ensinar o princípio fundamental da contagem, visto que, por meio da resolução os alunos podem conhecer as estratégias, organizar os pensamentos e utilizar conhecimento prévios para resolver as questões. Além disso, ao resolver e explicitar diferentes percursos para encontrar o resultado os alunos visualizam várias possibilidades entendendo que, conhecendo os fundamentos não necessita decorar fórmulas para resolver as questões. Só depois de conhecido o raciocínio para chegar na expressão geral das combinações simples, permutações simples, permutação circular e permutações com repetição é que os alunos podem utilizar as fórmulas, pois assim eles resolverão mais rapidamente os problemas que necessitem utilizá-las, e caso não lembrem podem utilizar o PFC para chegar nas expressões. Como veremos na próxima seção o PFC resolve a maioria dos problemas de contagem das provas da OBMEP.

### **3.3 CENÁRIOS E CONTEXTO DA OBMEP: APLICABILIDADE DOS PROBLEMAS DE CONTAGEM**

Análise combinatória é uma disciplina que é vista com mais rigor no segundo ano do ensino médio, mas como vimos na BNCC problemas de contagem devem ser incluídos desde o 4º e 5º ano

do ensino fundamental 1 e devem inicialmente estar restritos àquelas cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativos e aditivos. Sendo assim vamos utilizar o método da resolução de problemas para resolver alguns problemas de contagem que já caíram na OBMEP e como aproveitar o conhecimento obtido na seção anterior para resolvê-los, identificando alguns padrões nessas questões. Esse método foi aplicado a alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, como podemos observar na resolução a seguir.

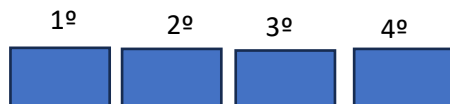
**Figura 26:** Questão 7 da OBMEP 2006(Prova 1ª fase- nível 1)

7. Dois casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os quatro podem sentar-se no banco, de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

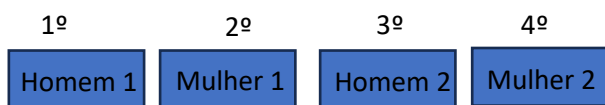
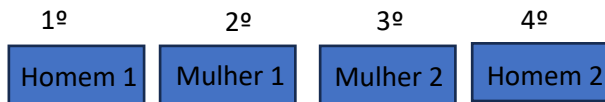
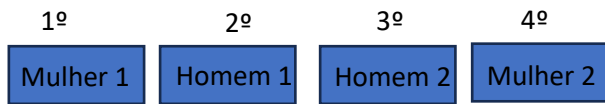
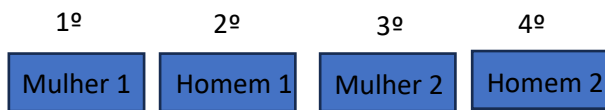
- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 8



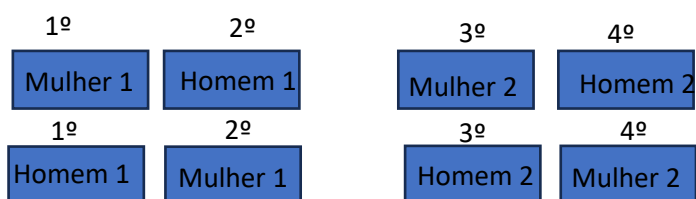
Uma maneira de resolver o problema é listando alguns casos e chegar a um padrão de contagem que nos permita contar todos os casos. Para isso podemos dividir o banco em 4 partes: primeiro lugar, segundo lugar, terceiro lugar e quarto lugar:



Observe que não podemos ter um mesmo casal sentando-se no segundo e terceiro lugares, pois no outro casal o namorado não estaria ao lado da namorada (teríamos um se sentando no primeiro lugar e outro no quarto lugar). Vamos chamar o casal 1: mulher 1 e homem 1 e o casal 2: mulher 2 e homem 2. Assim temos as seguintes possibilidades para os casais: o casal 1 se senta no primeiro e segundo lugares e o casal 2 no terceiro e quarto lugares ou casal 2 senta no primeiro e segundo lugares e casal 1 no terceiro e quarto lugares. Vejamos:



Com o casal 1 sentando no primeiro e segundo lugares e o casal 2 sentando no terceiro e quarto lugares temos 4 possibilidades de os casais sentarem, analogamente para o casal 2 sentando no primeiro e segundo lugares e o casal 1 sentando no terceiro e quarto lugares. Daí temos no total  $4 + 4 = 8$  possibilidades de os casais sentarem-se. Podemos resolver o problema de outra maneira mais rapidamente utilizando o PFC. Temos duas possibilidades de o casal 1 sentar-se no primeiro e segundo lugares e para cada uma dessas possibilidades temos duas possibilidades de o casal 2 sentar-se no terceiro e quarto lugares:



Pelo PFC temos  $2 \times 2 = 4$  possibilidades de o casal 1 sentar-se no primeiro e segundo lugares e o casal 2 sentar-se no terceiro e quarto lugares. Analogamente para o casal 2 sentar-se no primeiro e segundo lugares e o casal 1 sentar-se no terceiro e quarto lugares, pelo PFC temos  $2 \times 2 = 4$ . Daí temos um total de  $4 + 4 = 8$  possibilidades de os casais sentarem-se. Uma outra maneira de resolver pelo PFC, é permutar os casais, temos duas ordens distintas (casal 1, casal 2) e (casal 2, casal 1):





Cada casal pode sentar-se de duas maneiras distintas: com namorado a direita ou à esquerda da namorada. Sendo assim para cada uma dessas duas ordens possíveis para os casais, temos pelo PFC:  $2 \times 2 = 4$  possibilidades. Logo o número de ordens distintas em que as quatro pessoas podem sentar-se é  $2 \times 4 = 8$ .

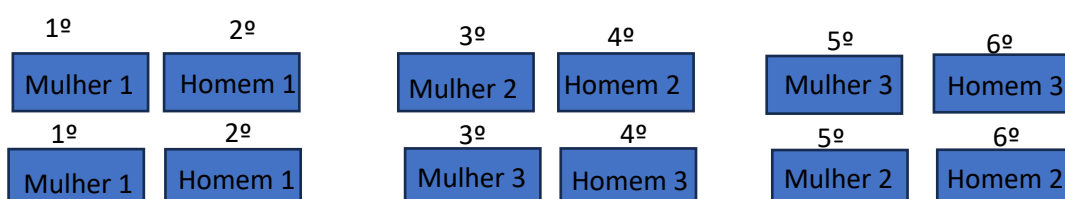
**Figura 27:** Questão 15 da OBMEP 2006 (Prova 1ª fase- nível 2)

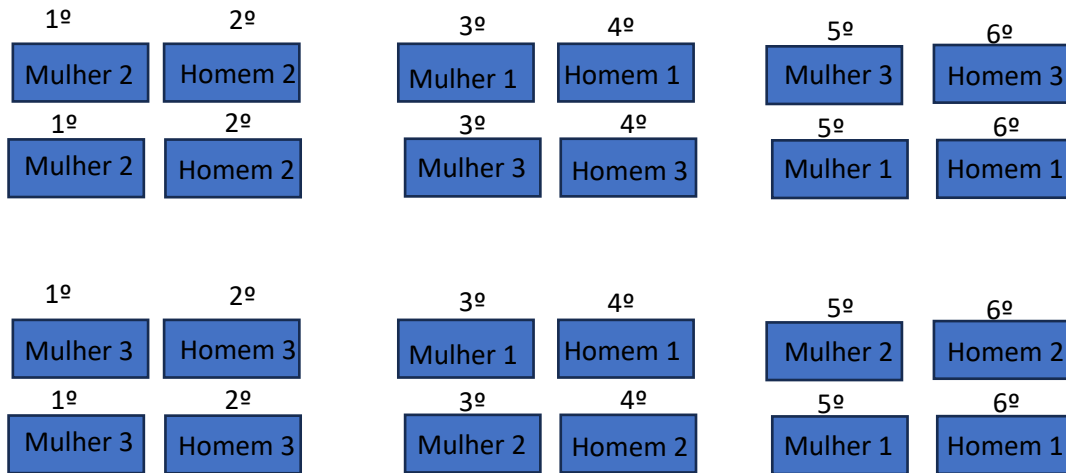
**15.** Três casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os seis podem sentar-se de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?



- (A) 6
- (B) 12
- (C) 44
- (D) 46
- (E) 48

Observe que, essa questão é semelhante ao problema anterior, a diferença é que agora temos três casais. Vamos resolvê-la do modo mais rápido utilizando o PFC. Sejam os três casais: casal 1, casal 2 e casal 3 e suas composições respectivamente (Homem 1, Mulher 1), (Homem 2, Mulher 2) e (Homem 3, Mulher 3). Dividindo os lugares em 6 partes temos: primeiro lugar, segundo lugar, terceiro lugar, quarto lugar, quinto lugar e sexto lugar. Os casais podem sentar-se em seis ordens distintas (permutação simples de 3 objetos:  $3 \times 2 \times 1 = 6$ ): (casal 1, casal 2, casal 3), (casal 1, casal 3, casal 2), (casal 2, casal 1, casal 3), (casal 2, casal 3, casal 1), (casal 3, casal 1, casal 2) e (casal 3, casal 2, casal 1):





Cada casal pode sentar-se de duas maneiras distintas: com o namorado a direita ou à esquerda da namorada. Daí em cada uma das 6 ordens possíveis para os casais temos pelo PFC:  $2 \times 2 \times 2 = 8$  possibilidades. Logo o número de ordens diferentes em que as 6 pessoas podem sentar-se é  $6 \times 8 = 48$ .

**Figura 28:** Questão 18 da OBMEP 2008 (Prova 1ª fase- nível 1)

**18.** Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?

- (A) 12
- (B) 15
- (C) 17
- (D) 18
- (E) 20

Nesse problema, podemos utilizar o raciocínio construtivo ou destrutivo utilizando o PFC. Raciocínio construtivo: Como não podemos ter camisa e calça com cores iguais, vamos dividir o problema em casos: escolhendo a camisa preta de mangas curtas e a preta de mangas compridas temos duas possibilidades, para cada uma dessas escolhas temos três modos de escolher as calças (não pode ser preta), daí pelo PFC temos  $2 \times 3 = 6$  maneiras de se vestir. Escolhendo a camisa azul

temos uma possibilidade de escolha para camisa, e três possibilidades de escolha para a calça (não pode ser azul), daí pelo PFC temos  $1 \times 3 = 3$  maneiras de se vestir. Observe que começamos a contagem pelas camisas que tem cores iguais com alguma das calças e na nossa contagem descartamos a possibilidade que termos as cores das camisas e das calças iguais. Sobraram as camisas cinza e branca, escolhendo-as temos 2 possibilidades, para cada uma dessas escolhas temos 4 modos de escolher as calças, daí pelo PFC temos  $2 \times 4 = 8$  maneiras de se vestir. Logo temos no total  $6 + 3 + 8 = 17$  maneiras que Fábio pode se vestir.

Utilizando o raciocínio destrutivo: Dividimos o problema em escolher o número de camisas e o número de calças e fazemos a combinação dessas possibilidades utilizando o PFC, incluindo nessa contagem as possibilidades de termos camisas e calças com cores iguais para depois descontarmos esses casos do total. Sendo assim temos 5 camisas e 4 calças, pelo PFC temos no total  $5 \times 4 = 20$  maneiras de se vestir, desse total temos 3 casos em que as combinações resultam em cores iguais: camisa preta de mangas curtas e calça preta, camisa preta de mangas compridas e calça preta, camisa azul e calça azul, daí o total de maneiras que Fábio pode se vestir com camisas e calças de cores diferentes é de  $20 - 3 = 17$ .

**Figura 29:** Questão 5 da OBMEP 2012 (Prova 2ª fase- nível 1)

5. Vítor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes. Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.

a) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões azuis de modo que a soma de seus números seja igual a 9?



b) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

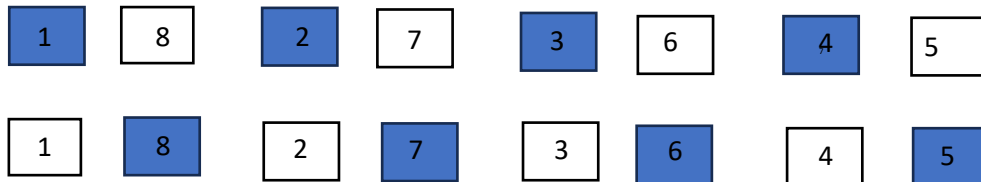
c) De quantas maneiras Vítor pode escolher 3 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

O item “a” pode ser resolvido facilmente, como os cartões azuis estão numerados de 1 a 8 basta saber quantas são as somas utilizando esses números cujo resultado é igual a 9. Temos que  $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$ . A ordem de escolha dos cartões não altera sua soma. Logo, Vítor pode escolher dois cartões azuis cuja soma é 9 de 4 maneiras diferentes.

O item “b” pode ser resolvido pelo PFC. Como visto no item anterior existem 4 somas com números de 1 a 8 cujo resultado é 9. Para não adiar dificuldades temos que separar o problema em dois casos: os dois cartões têm a mesma cor ou os dois cartões tem cores diferentes. Se os dois cartões forem da mesma cor teremos para cada uma das quatro somas 3 possibilidades de escolha

para as cores, daí pelo PFC, temos  $4 \times 3 = 12$  maneiras de escolher dois cartões de mesma cor cuja soma de seus números é igual a 9. Outra forma de chegar nessa resposta é contar os casos em que as cores são iguais individualmente: Se os dois cartões forem azuis teremos 4 somas cujo resultado é 9. Se os dois cartões forem brancos também teremos 4 somas cujo resultado é 9, analogamente se os dois cartões forem verdes teremos 4 somas cujo resultado é 9, logo temos  $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$ .

Se os dois cartões forem diferentes para cada uma das 4 somas temos 3 possibilidades de escolher a primeira cor, 2 possibilidades de escolher a segunda cor (tem que ser diferente da primeira), daí pelo PFC temos  $4 \times 3 \times 2 = 24$  maneiras de escolher dois cartões de cores diferentes cuja soma de seus números é igual a 9. Observe que quando escolhemos os números cuja soma resultam 9, por exemplo 1 e 8, e em seguida escolhemos a primeira e a segunda cor, a primeira cor ficará representada pelo número 1 e a segunda cor representada pelo número 8, por exemplo, se escolhermos primeiro a cor azul, ela ficará representada pelo número 1 e se escolhermos a segunda cor como branca, ela ficará representada pelo número 8, quando a cor branca for escolhida primeiro ela ficará representada pelo número 1, e se escolhermos a cor azul como segunda ela será representada pelo número 8. Observe:



Na primeira fileira temos a cor azul escolhida como primeira e a cor branca como segunda, e os respectivos valores cuja soma é 9. Na segunda fileira temos a cor branca escolhida como primeira e a cor azul como segunda, e os respectivos valores cuja soma é 9. Outra maneira de resolver o segundo caso é observar que para cada duas cores diferentes escolhidas temos 8 possibilidades de a soma resultar 9. Daí  $8 + 8 + 8 = 3 \times 8 = 24$ . Portanto a quantidade de maneiras de escolher 2 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9 é:  $12 + 24 = 36$ .

Uma solução alternativa é observar que para cada uma das 4 somas cujo resultado é 9 temos 3 possibilidades de escolha para cor com menor número e 3 possibilidades de escolha para cor com maior número (pode ser igual a do menor número), daí pelo PFC, temos  $4 \times 3 \times 3 = 36$ .

O item “c” é mais trabalhoso. Para não adiar dificuldades, vamos dividi-lo em 3 casos:

- **Os três cartões têm a mesma cor:** as somas cujo resultado é 9 são  $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$ . Para cada uma dessas 3 possibilidades temos 3 cores, daí pelo PFC:  $3 \times 3 = 9$  maneiras de escolher 3 cartões iguais de modo que a soma de seus números seja igual a 9.
- **Dois cartões de uma cor e o terceiro de uma cor diferente:** as somas dos números dos cartões de mesma cor não podem ser iguais a 9, pois temos um terceiro número para somar, logo temos 12 somas:  $3 = 1 + 2$ ;  $4 = 1 + 3$ ;  $5 = 1 + 4 = 2 + 3$ ;  $6 = 1 + 5 = 2 + 4$ ;  $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ ;  $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$ . Para cada uma dessas possibilidades temos uma maneira de escolher o número do cartão de cor diferente de modo que a soma resulte 9, observe que o terno de números da soma  $1 + 7 + 1$  é diferente dos ternos de números das somas de  $2 + 6 + 1$  e  $3 + 5 + 1$  representando assim possibilidades diferentes, embora tenham o mesmo número do cartão de cor diferente. Temos 3 possibilidades para os cartões de mesma cor e 2 para o de cor diferente, logo pelo PFC, temos  $12 \times 1 \times 3 \times 2 = 72$  nesse caso. Por exemplo,  $1 + 2$  (ambos os números de cor azul), daí temos 2 possibilidades para o cartão de cor diferente: número 6 de cor branca ou número 6 de cor verde.
- **Os três cartões têm cores diferentes:** temos 7 possíveis somas cujo resultado é 9:  $9 = 1 + 1 + 7 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$ . Observe que podemos dividir os trios dos números das cartas em 3 tipos:
  - $(3,3,3)$  – as três cartas com números iguais
  - $(1,2,6)$ ,  $(1, 3, 5)$  e  $(2, 3, 4)$  – as três cartas com números diferentes
  - $(1, 1, 7)$ ,  $(1, 4, 4)$  e  $(2, 2, 5)$  – duas cartas com números iguais e uma com número diferente

Para o primeiro tipo temos apenas uma possibilidade. No segundo tipo observe que basta permutar cada trio para encontrar todas as possibilidades, por exemplo:

A B V

$(1, 2, 6)$

Onde A é a abreviação de azul, B de branco e V de verde, como temos 3 números, permutando - o temos  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  maneiras diferentes são elas  $(1, 2, 6)$ ,  $(1, 6, 2)$ ,  $(2, 1, 6)$ ,  $(2,$

6, 1), (6, 1, 2) e (6, 2, 1), analogamente para os outros dois trios. Temos no total  $6 + 6 + 6 = 18$  possibilidades. Já no terceiro tipo temos para cada trio 3 maneiras diferentes, por exemplo:

$$\begin{array}{c} A B V \\ (1, 1, 7) \end{array}$$

Temos (1, 1, 7), (1, 7, 1) e (7, 1, 1), analogamente pra os outros dois trios. Daí temos no total  $3 + 3 + 3 = 9$ . Logo para o terceiro caso temos um total de  $1 + 18 + 9 = 28$  possibilidades. Somando as possibilidades dos 3 casos temos  $9 + 72 + 28 = 109$  maneiras de Vitor escolher três cartões de modo que a somas de seus números seja igual a 9.

**Figura 30:** Questão 5 da OBMEP 2012 (Prova 2ª fase- nível 2)

5. Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura ao lado, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

2013

- a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de  $3 \times 2 \times 2$  maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?
- b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?
- c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?



Observe que essa questão é parecida com o problema de pintar as bandeiras da seção 3.2. No item a) Como o algarismo 1 está dividido em duas partes:



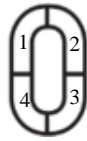
Temos 3 possibilidades de pintar a primeira parte, como regiões vizinhas não podem ser pintadas com cores iguais, temos 2 maneiras de pintar a segunda parte, daí pelo PFC, temos  $3 \times 2 = 6$  maneiras de Juca pintar o algarismo 1.

No item b) o algarismo 3 está dividido em 5 partes:



Para não adiar dificuldades vamos começar a pintar pela terceira parte, existem 3 possibilidades para pintar a terceira parte, duas para segunda parte (é vizinha a terceira), uma possibilidade para pintar a quarta parte (é vizinha a terceira e a segunda), duas possibilidades de pintar a primeira parte (pode ter cor igual a primeira e a quarta) e duas possibilidades de pintar a

quinta parte (pode ser igual a terceira, segunda e primeira), daí pelo PFC, temos  $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 24$  maneiras de Juca pintar o algarismo 3. No item c) o algarismo 0 está dividido em 4 partes:



Não temos aqui uma decisão mais restrita, podemos começar a pintar por qualquer uma das partes. Começando pela primeira parte temos 3 possibilidades, para segunda parte duas possibilidades (é vizinha a primeira parte), para terceira parte duas possibilidades (é vizinha a segunda e pode ter a mesma cor da primeira), para quarta parte a resposta é depende, se tivermos pintado a primeira e a terceira partes da mesma cor teremos duas possibilidades, se tivermos pintado elas de cores diferentes, teremos uma possibilidade. Assim precisamos dividir o problema em dois casos:

- As cores da parte 1 e da parte 3 são iguais: Nesse caso temos 3 possibilidades de cores para as partes 1 e 3. duas possibilidades para parte 2 (tem que ser diferente de 1 e 3) e duas possibilidades para a para parte 4 (tem que ser diferente de 1 e 3, pode ser igual a parte 2), daí pelo PFC, temos  $3 \times 2 \times 2 = 12$  maneiras distintas.
- As cores da parte 1 e da parte 3 são diferentes: Nesse caso temos 3 possibilidades de cores para a parte 1, duas possibilidades para parte 3 (tem que ser diferente da parte 1), uma possibilidade para parte 2 (tem que ser diferente da parte 1 e da parte 3) e uma possibilidade para parte 4 (tem que ser diferente da parte 1 e da parte 3, e pode ser igual a parte 2), daí pelo PFC, temos  $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$  maneiras distintas.

Segue pelo princípio aditivo de que o algarismo 0 pode ser pintado de  $12 + 6 = 18$  maneiras distintas.

**Figura 31:** Questão 13 da OBMEP 2013 (Prova 1ª fase- nível 1)

**13.** Carlinhos escreveu OBMEP2013 em cartões, que ele colocou enfileirados no quadro de avisos de sua escola. Ele quer pintar de verde ou amarelo os cartões com letras e de azul ou amarelo os cartões com algarismos, de modo que cada cartão seja pintado com uma única cor e que cartões vizinhos não tenham cores iguais. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer a pintura?



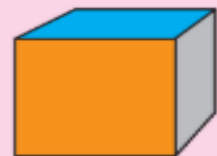
- A) 2
- B) 3
- C) 6
- D) 7
- E) 12

Podemos utilizar o PFC com cuidado. Para os cartões com letras temos para a sigla OBMEP: 2 possibilidades para pintar a letra O, uma possibilidade para pintar a letra B (tem que ser diferente da cor da A), uma possibilidade para pintar a letra M (tem que ser diferente da cor da letra B, só sobra uma cor), uma possibilidade para pintar a letra E (tem que ser diferente da cor da letra M, só sobra uma cor), e uma possibilidade para a letra P (tem que ser diferente da cor da letra E, só sobra uma cor), daí pelo PFC, temos  $2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$  maneiras diferentes de pintar os cartões com letras. Já para os cartões com algarismos temos: 2 possibilidades para pintar o algarismo 2, uma possibilidade para pintar o algarismo 0 (tem que ser diferente da cor do algarismo 2), uma possibilidade para pintar o algarismo 1 (tem que ser diferente da cor do algarismo 0, só sobra uma cor) e uma possibilidade para pintar o algarismo 3 (tem que ser diferente do algarismo 1, só sobra uma cor), daí pelo PFC, temos  $2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$  maneiras de pintar os cartões com algarismos. Para cada uma das 2 maneiras de pintar os cartões com letras temos 2 maneiras de pintar os cartões com algarismos, pelo PFC, temos  $2 \times 2 = 4$  maneiras de pintar os cartões com letras e os cartões com algarismos, mas essa resposta está errada, como não podemos ter cartões vizinhos com cores iguais, temos que ver dessas 4 possibilidades quantas aparecem com algum cartão vizinho com cores iguais. Observe que na contagem das possibilidades dos cartões com letras, contamos todas as possibilidades corretamente e na contagem das possibilidades dos cartões com algarismos também, o problema está quando juntamos essas duas possibilidades. Indicando amarelo por A, azul por Z e verde por V, todas as maneiras são: AVAVAAZAZ, AVAVAZAZA, VAVAVZAZA, VAVAVAZAZ, logo temos que retirar da nossa contagem a sequência AVAVAAZAZ. Portanto a resposta é  $4 - 1 = 3$ . Aqui temos um raciocínio destrutivo. Poderíamos primeiro resolver o problema escrevendo as 4 possibilidades sem utilizar o PFC (listando uma por uma) e em seguida descartar a possibilidade que temos a cor azul na letra P e a cor azul no algarismo 2, essa forma é a mais didática.

**Figura 32:** Questão 16 da OBMEP 2013 (Prova 1ª fase- nível 2)

**16.** Heloísa tem um cubo com faces pintadas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode escrever os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, um em cada face, de modo que a soma dos números em faces opostas seja sempre 7?

- A) 6
- B) 24
- C) 48
- D) 120
- E) 720



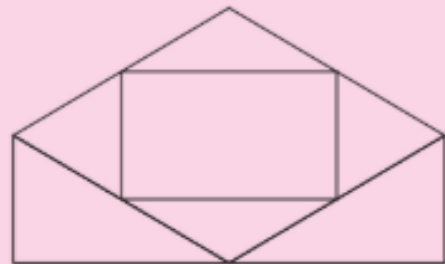
Para soma ser sempre 7, temos que as faces opostas tem que ser representadas pelos pares (1,6), (2,5) e (3,4). Fixando cada par em faces opostas, temos pelo PFC,  $3 \times 2 \times 1 = 6$  maneiras diferentes de alocar os pares no cubo, observe que nessa contagem não trocamos a ordem de cada par nas respectivas faces opostas, por exemplo só consideramos o par (1,6), o par (6,1) não foi considerado. Sendo assim para cada uma dessas 6 maneiras, temos 2 possibilidades para o par (1,6) nas duas faces opostas: (2,6), (6,2), 2 possibilidades para o par (2,5): (2,5), (5,2) e 2 possibilidades para o par (3,4): (3,4), (4,3), pelo PFC, temos  $6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$  maneiras de escrever os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Outra maneira de resolver o problema é começar a contagem por algum dos números, vamos começar pelo número 1, existem 6 maneiras de alocar o número 1 nas faces do cubo sendo que para cada uma dessas possibilidades o número 6 vai estar na face oposta, escolhida uma dessas 6 maneiras sobram 4 faces para alocar o número 2, daí existem 4 possibilidades de alocar o número 2 nas faces do cubo sendo que para cada uma delas o número 5 vai estar na face oposta, escolhida uma dessas 4 possibilidades, sobram 2 faces para alocar o número 3, existem 2 possibilidades de alocar o número 3 nas faces do cubo sendo que para cada uma delas o número 4 vai estar na face oposta, logo pelo PFC, temos  $6 \times 4 \times 2 = 48$ .

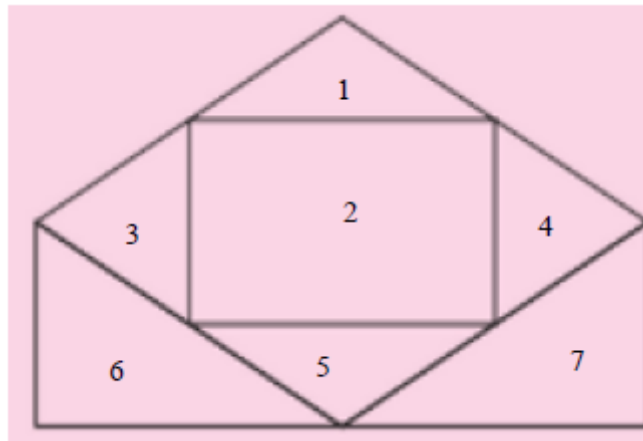
**Figura 33:** Questão 19 da OBMEP 2013(Prova 1ª fase- nível 2)

**19.** De quantas maneiras diferentes é possível pintar a figura, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?

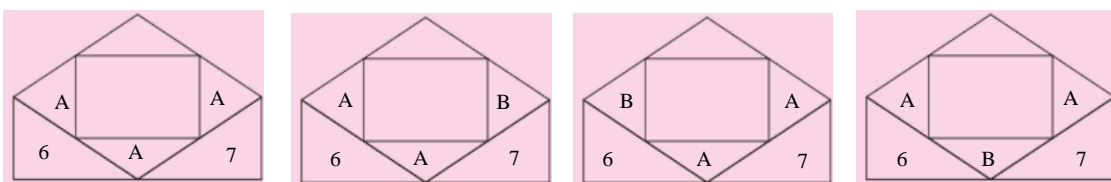
- A) 68
- B) 96
- C) 108
- D) 120
- E) 150



Primeiramente para resolver esse problema precisamos saber por onde começar a contar. Vamos dividir a figura da questão em partes:



Observe que começando a pintar pela parte 1 ou pela parte 2 temos menos dificuldades, começando pela parte 1, temos 3 maneiras de pintá-la, em seguida pintando a parte 2 temos 2 possibilidades (tem que ser diferente da cor pintada na parte 1), podemos continuar a contagem escolhendo qualquer uma das partes 3, 4 ou 5, pois a parte 2 tem um seguimento comum a cada uma delas, escolhendo a parte 3 temos 2 possibilidades de pintá-la (a cor tem que ser diferente da parte 2, mas pode ser igual a da parte 1), para a parte 5 temos 2 possibilidades e para a parte 4 temos 2 possibilidades, para pintar as partes 6 e 7 vai depender das cores escolhidas nas partes 3, 4 ou 5, por exemplo se as partes 3 e 5 forem pintadas da mesma cor vão sobrar duas cores para pintar a parte 6, caso sejam pintadas de cores diferentes vai sobrar uma cor para pintar a parte 6. Precisamos dividir o problema em casos para chegar à resposta correta. Para as partes 1 e 2, pelo PFC, temos  $3 \times 2 = 6$  maneiras diferentes de pintá-las. Precisamos verificar as possibilidades de pintar as partes 3, 4 ou 5, existem 4 casos:



Caso 1

Caso 2

Caso 3

Caso 4

As letras maiúsculas A e B indicam cores diferentes. Como pintamos a parte 1 e a parte 2, restam duas cores para pintar os retângulos menores.

- Caso 1: Temos duas escolhas para A; Uma vez feita essa escolha, podemos pintar a parte 6 com duas cores, bem como a parte 7. Pelo PFC, isso pode ser feito de  $2 \times 2 \times 2 = 8$  maneiras diferentes.

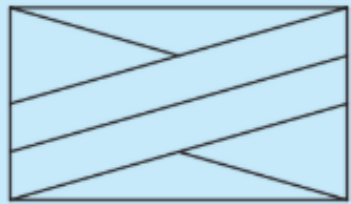
- Caso 2: Temos duas escolhas para A e uma para B; feitas essas escolhas, podemos pintar a parte 6 com duas cores e a parte 7 com apenas uma. Pelo PFC, isso pode ser feito de  $2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$  maneiras diferentes.
- Caso 3: Observe que esse caso é idêntico ao caso 2. Dáí temos pelo PFC,  $2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$  maneiras diferentes.
- Caso 4: Temos duas escolhas para A e uma para B. Feitas essas escolhas, só há uma possibilidade para pintar a parte 6 e a parte 7. Pelo PFC temos:  $2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$  maneiras diferentes.

Combinando cada um dos casos com as escolhas da parte 1 e da parte 2, temos pelo PFC e pelo princípio aditivo:  $6 \times 8 + 6 \times 4 + 6 \times 4 + 6 \times 2 = 6 \times (8 + 4 + 4 + 2) = 6 \times 18 = 108$  maneiras diferentes de pintar a figura.

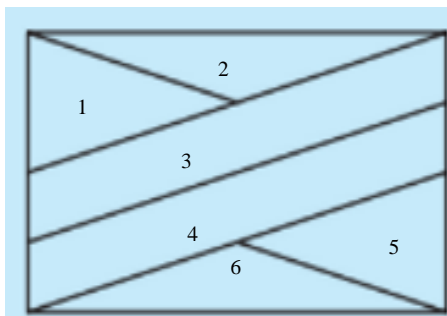
**Figura 34:** Questão 17 da OBMEP 2013(Prova 1ª fase- nível 3)

**17.** Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. De quantas maneiras ele pode pintar as regiões da bandeira da figura, cada uma com uma única cor, de modo que cada cor apareça pelo menos uma vez e que regiões adjacentes sejam pintadas com cores diferentes?

A) 336  
B) 420  
C) 576  
D) 864  
E) 972



O raciocínio destrutivo resolve de maneira mais rápida o problema que o raciocínio construtivo. Dividindo a figuras em 6 partes, temos:



Vamos calcular todas as possibilidades: incluindo a que cada cor apareça pelo menos uma vez ou não. Dáí temos 4 maneiras de pintar a parte 1, 3 maneiras de pintar a parte 2, 2 maneiras de


pintar a parte 3, 3 maneiras de pintar a parte 4, 3 maneiras de pintar a parte 5 e 2 maneiras de pintar a parte 6, daí pelo PFC temos  $4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 432$  maneiras de pintar as regiões da bandeira aparecendo cada cor pelo menos uma vez ou não (total de possibilidades).

Teremos que retirar todos os casos que não utilizem todas as cores. Utilizando duas cores vemos que não é possível, pois pintando por exemplo a parte 1 de verde e a parte 2 de amarelo, não teremos cor para pintar a parte 3, logo teremos que usar 3 cores. Sendo assim temos 3 possibilidades para parte 1, 2 possibilidades para parte 2, uma possibilidade para parte 3, 2 possibilidades para parte 4, 2 possibilidades para parte 5 e uma possibilidade para parte 6, daí pelo PFC temos  $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 = 24$  maneiras sem usar uma das cores. Como temos 4 cores o total de maneiras sem usar uma das cores é de  $4 \times 24 = 96$ . Como temos no total 432 maneiras, retirando desse valor os casos que não são utilizadas todas as cores, ficamos com  $432 - 96 = 336$ .

**Figura 35:** Questão 18 da OBMEP 2015 (Prova 1ª fase- nível 2)

**18.** Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

A) 20  
B) 30  
C) 60  
D) 90  
E) 120



Vamos mostrar 3 soluções para esse problema. A Primeira consiste em separar a premiação dos dois participantes em medalhas diferentes e medalhas iguais. Considerando o primeiro premiado e o segundo premiado, e sabendo que temos 3 possibilidades de medalhas: ouro, prata e bronze, pelo PFC, temos  $3 \times 2 = 6$  maneiras diferentes de premiar dois participantes com medalhas diferentes, fixando Aldo como primeiro da dupla, o segundo da dupla pode ser escolhido de 4 maneiras ((Aldo, Beto), (Aldo, Carlos), (Aldo, Diogo) e (Aldo, Elvis)), daí temos pelo PFC  $4 \times 6 = 24$  maneiras diferentes. Agora fixando Beto como primeiro da dupla, o segundo da dupla pode ser escolhido de 3 maneiras ((Beto, Carlos), (Beto, Diogo) e (Beto, Elvis)), daí temos pelo PFC  $3 \times 6 = 18$  maneiras diferentes. Fixando Carlos como primeiro da dupla, o segundo da dupla pode ser escolhido de duas maneiras ((Carlos, Diogo) e (Carlos, Elvis)), pelo PFC temos  $2 \times 6 = 12$  maneiras diferentes. Fixando Diogo como primeiro da dupla, o segundo da dupla pode ser escolhido de uma maneira (Diogo, Elvis), pelo PFC temos  $1 \times 6 = 6$  maneiras diferentes. Pelo princípio aditivo temos:  $4 \times 6 +$

$3 \times 6 + 2 \times 6 + 1 \times 6 = 24 + 18 + 12 + 6 = 60$  maneiras diferentes de premiar dois participantes com medalhas diferentes dentre os cinco participantes. Agora considerando que a dupla receba medalhas iguais temos 3 possibilidades: ou as duas são de ouro ou as duas são de prata ou as duas são de bronze. Pelo PFC e pelo princípio aditivo temos  $3 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 1 = 12 + 9 + 6 + 3 = 30$  maneiras diferentes de premiar dois participantes com medalhas iguais dentre os cinco participantes. Portanto pelo princípio aditivo temos  $60 + 30 = 90$  maneiras diferentes de a premiação ocorrer.

A segunda solução consiste em calcularmos todas as possibilidades dos dois premiados dentre os 5 participantes e calcularmos todas as maneiras de premia-los. Chamando cada participante pela primeira letra de seu nome, as possibilidades de escolha dos dois premiados são: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, ou seja, temos 10 possibilidades. As possibilidades de escolha das duas premiações são: ((Ouro, Ouro), (Ouro, Prata), (Ouro, Bronze), (Prata, Ouro), (Prata, Prata), (Prata, Bronze), (Bronze, Ouro), (Bronze, Prata), (Bronze, Bronze), ou seja, temos 9 possibilidades. Pelo PFC, as diferentes formas de premiações são  $10 \times 9 = 90$ . Por exemplo, para (Aldo, Beto) temos 9 possibilidades de premia-los: (Aldo Ouro, Beto Ouro), (Aldo Ouro, Beto Prata), (Aldo Ouro, Beto Bronze), (Aldo Prata, Beto Ouro), (Aldo Bronze, Beto Bronze).

Na terceira solução existem dois casos a considerar: ou os dois meninos premiados ganharam medalhas iguais, ou ganharam medalhas diferentes. Se as medalhas são iguais, como já vimos temos 3 possibilidades: ou as duas são de ouro ou as duas são de prata ou as duas são de bronze. Sabendo que dos 5 meninos apenas 2 receberam medalhas, a escolha dos meninos pode ser feita pela combinação simples de 5 tomado 2 a 2:  $C_{5,2} = \frac{5 \times 4}{2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$ . Observe que aqui a ordem não importa, escolhendo por exemplo primeiro Aldo e depois Beto é a mesma escolha que escolher primeiro Beto e depois Aldo. Logo pelo PFC, temos  $3 \times 10 = 30$  possibilidades para a premiação de dois desses meninos com medalhas iguais. No segundo caso, se as medalhas recebidas pelos 2 meninos são diferentes como vimos na segunda solução existem  $3 \times 2 = 6$  possibilidades de escolha por dupla, como temos 10 possibilidades de escolher os dois meninos dentre os cinco, temos pelo PFC,  $6 \times 10 = 60$ . Portanto pelo princípio aditivo o número total de formas diferentes de ocorrer a premiação é  $30 + 60 = 90$ .

**Figura 36:** Questão 6 da OBMEP 2015 (Prova 2ª fase- nível 1)

6. Apertando teclas de zero a nove de um cofre, Pedro cria uma senha de 11 algarismos.



- a) Quantas são as senhas que começam com 20152015?
- b) Quantas são as senhas que contêm todos os algarismos juntos e em ordem crescente, isto é, quantas são as senhas que contêm o bloco 0123456789?
- c) Pedro quer criar uma senha de forma que, quando se exclui um de seus algarismos, restam os algarismos de 0 a 9 em ordem crescente. Por exemplo, 80123456789 e 01234456789 são senhas possíveis, mas 01324567890 não. Nessas condições, quantas senhas Pedro pode criar?

Para responder o item a) basta observar que a senha deve conter 11 algarismos e que 8 destes já estão preenchidos, restando apenas escolher os 3 últimos algarismos: 20152015\_\_ para escolha do antepenúltimo algarismo temos 10 possibilidades (pode ser qualquer um dos algarismos de 0 a 9), para escolha do penúltimo temos também 10 possibilidades (podemos repetir o algarismo escolhido na antepenúltima posição) e para escolha do último algarismo temos 10 possibilidades (podemos repetir os algarismos utilizados nas escolhas anteriores), como temos uma possibilidade de escolha para os 8 primeiros algarismos (20152015) temos pelo PFC:  $1 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000$  possibilidades de senhas que começam com o bloco 20152015.

No item b) o bloco 0123456789 possui 10 algarismos, restando apenas um algarismo para completar a senha, existem dois casos que podemos alocar esse algarismo no bloco: No caso 1, quando ele é o primeiro algarismo: \_0123456789, daí temos 10 possibilidades para o primeiro algarismo e uma possibilidade para os 10 algarismos seguintes (0123456789), daí pelo PFC temos  $10 \times 1 = 10$ . No caso 2 quando ele é o último algarismo: 0123456789\_, daí temos 10 possibilidades para o último algarismo e uma possibilidade para os 10 algarismos anteriores (0123456789), daí pelo PFC temos  $1 \times 10 = 10$ . Pelo princípio aditivo, temos  $10 + 10 = 20$  senhas diferentes que contêm o bloco 0123456789.

No item c) temos 11 espaços possíveis para inserir um dos dez algarismos, ou a direita, ou a esquerda ou entre os algarismos do bloco 0123456789: \_0\_1\_2\_3\_4\_5\_6\_7\_8\_9\_ Existem 10 possibilidades para o algarismo à esquerda do bloco e uma possibilidade para a escolha dos demais números, pelo PFC temos  $10 \times 1 = 10$ . Existem 9 possibilidades para o algarismo entre 0 e 1, pois

não pode ser zero já que no caso anterior já contamos a possibilidade: 00123456789, como temos uma possibilidade para os demais algarismos, pelo PFC temos  $9 \times 1 = 9$ . Analogamente para os outros 9 casos (teremos 9 possibilidades para cada um deles). Com isso pelo princípio aditivo, temos:  $10 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 10 + 10 \times 9 = 10 + 90 = 100$  senhas que Pedro pode criar com as condições descritas. Podemos utilizar um raciocínio destrutivo para resolver o problema de outra maneira, ou seja, vamos contar todas as possibilidades e descontar as repetições depois: Temos 10 possibilidades de senha escolhendo o algarismo à direita, 10 possibilidades de senha escolhendo o algarismo entre 0 e 1, e 10 possibilidades de senha para cada um dos outros 9 casos, temos pelo princípio aditivo:  $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 11 \times 10 = 110$  possibilidades de criar senhas. Porém algumas dessas senhas assim criadas são repetidas. Precisamos descontá-las da nossa contagem. Observemos um exemplo: a senha 00123456789 pode ser obtida de duas maneiras diferentes:


- 00123456789(colocando-se 0 à esquerda do bloco 0123456789)
- 00123456789(colocando-se 0 entre 0 e 1 no bloco 0123456789)

Cada um dos algarismos pode gerar somente uma duplicação de senha. Logo devemos descontar da contagem inicial uma senha para cada algarismo. Existem, portanto,  $110 - 10 = 100$  senhas.

**Figura 37:** Questão 18 da OBMEP 2016(Prova 1ª fase- nível 3)

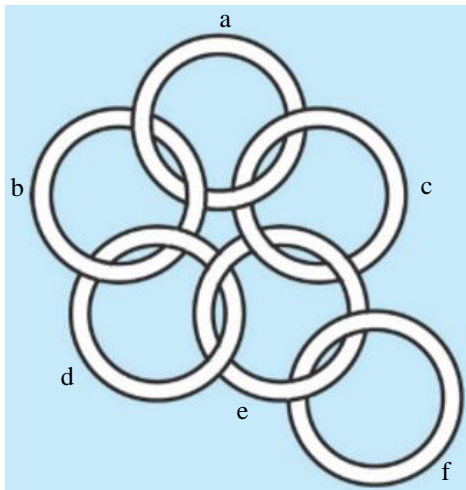
**18.** O símbolo proposto para os Jogos Escolares de Quixajuba é formado por seis anéis entrelaçados como na figura. Cada um dos anéis deve ser pintado com uma das três cores da bandeira da cidade (azul, verde ou rosa), de modo que quaisquer dois anéis entrelaçados tenham cores diferentes. Quantas são as maneiras de pintar esse símbolo?

A) 24  
B) 36  
C) 48  
D) 60  
E) 72



Primeiro precisamos saber por onde começar a contar e a ordem da contagem. Depois de algumas tentativas percebemos que independente da escolha que fizermos teremos que dividir o

problema em casos. O mais natural é começarmos a contar de cima para baixo, vamos ordenar a nossa contagem:



Começando a contagem pelo ponto a e seguindo em ordem alfabética temos 3 possibilidades para pintar a, 2 possibilidades para pintar b (tem que ser diferente de a), 2 possibilidades para pintar c (pode ser igual a cor de b. A quantidade de possibilidades de pintar d vai depender se as cores pintadas em b e c são iguais ou diferentes, caso sejam iguais teremos 2 possibilidades, caso sejam diferentes teremos uma possibilidade. Precisamos dividir o problema em 3 casos:

- 1) O anel c deve ser pintado com a mesma cor que o anel b, o que garante que os anéis c e d tenham cores diferentes, logo, pelo PFC, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores

a	b	c	d	e	f
3	2	1	2	1	2

$$3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 = 24$$

- 2) O anel c deve ser pintado com cor diferente do anel b e o anel d com a mesma cor que o anel c. Logo, pelo PFC, temos as seguintes possibilidades de cores:

a	b	c	d	e	f
3	2	1	1	2	2

$$3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 24$$

- 3) O anel c deve ser pintado com cor diferente do anel b e o anel d com cor diferente do anel c. Logo, pelo PFC, temos as seguintes possibilidades de cores:

a	b	c	d	e	f
3	2	1	1	1	2


$$3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 12$$

Pelo princípio aditivo temos  $24 + 24 + 12 = 60$  maneiras possíveis de pintar o símbolo. Agora vamos resolver as questões de contagem da OBMEP (níveis 1 e 2) da primeira e segunda fase das provas de 2017, 2018 e 2019.

**Figura 38:** Questão 17 da OBMEP 2017(Prova 1ª fase- nível 1)

**17.** Após digitar um número de seis algarismos em sua calculadora, Cecília observou que dois algarismos 9 que ela havia digitado não apareceram no visor; o que apareceu foi 2017. Quantas são as possibilidades para o número que ela digitou?

A) 6  
B) 9  
C) 10  
D) 15  
E) 18



Vamos resolver o problema de três maneiras diferentes. Primeiro vamos dar alguns exemplos de possíveis números que Cecília digitou: 920179, 299017 ou 290197. Podemos fazer uma listagem organizada de todas as possibilidades, fixamos o primeiro algarismo 9 em uma posição e variamos o segundo algarismo 9, observe: 992017, 929017, 920917, 920197, 920179, 299017, 290917, 290197, 290179, 209917, 209197, 209179, 201997, 201979, 201799. Temos no total 15 possibilidades de números. Podemos resolver a questão de uma maneira mais rápida sem listar todos os casos possíveis através de dois raciocínios destrutivos utilizando o PFC.

A segunda maneira consiste em observar que dada uma sequência de 6 algarismos devemos decidir onde os algarismos deveriam estar. Uma vez decidido, os algarismos 2, 0, 1 e 7 preenchem as posições restantes nessa ordem. Existem 6 posições para colocarmos o primeiro algarismo 9.

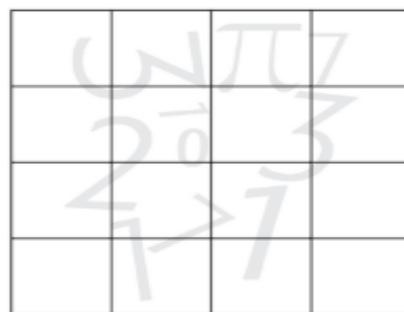
Feito isso, há cinco posições para colocarmos o segundo algarismo 9, daí pelo PFC temos  $6 \times 5 = 30$  escolhas. Observe que na nossa contagem cada possibilidade foi contada duas vezes a mais, por exemplo, quando o primeiro 9 foi escolhido como primeiro algarismo e o segundo 9 foi escolhido como segundo algarismo: 992017 é a mesma possibilidade quando o segundo número 9 foi escolhido como primeiro algarismo e o primeiro número 9 foi escolhido como segundo algarismo. Logo temos que dividir o resultado por 2. Assim há  $\frac{30}{2} = 15$  possibilidades para o número digitado por Cecília.

A terceira maneira consiste em dividir o problema em dois casos: Quando os dois 9's aparecem juntos ou quando eles ficarem separados. Observe: \_2\_0\_1\_7\_. Para o primeiro caso, podemos colocar dois 9's juntos em qualquer dos espaços vazios, temos 5 possibilidades. No segundo caso, escolhemos primeiramente um lugar para colocar o primeiro dos algarismos 9, temos 5 possibilidades, para a escolha do lugar do segundo algarismo 9 temos 4 possibilidades, daí pelo PFC temos  $5 \times 4 = 20$  possibilidades. Aqui como na maneira anterior cada possibilidade foi contada duas vezes, pois os dois números 9's são indistinguíveis, logo precisamos dividir esse resultado por 2. Logo temos  $\frac{20}{2} = 10$  possibilidades para o caso dos 9's aparecerem separados. Pelo princípio aditivo temos  $5 + 10 = 15$  possibilidades.

**Figura 39:** Questão 11 da OBMEP 2017(Prova 1ª fase- nível 2)

**11.** De quantas maneiras diferentes é possível pintar de preto algumas casas do quadriculado abaixo de modo que, em cada linha e em cada coluna, fiquem pintadas de preto exatamente três casas?

- A) 4
- B) 6
- C) 16
- D) 24
- E) 32



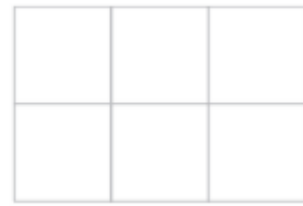
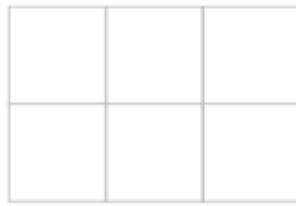
Observe que em cada linha e cada coluna teremos uma casa do quadriculado que ficará em branco, sendo assim mais fácil contar as possibilidades de casas vazias que contar as maneiras utilizando exatamente as 3 casas pintadas de preto. Temos que existem 4 maneiras de deixar uma das casas em branco na primeira linha, há 3 maneiras na segunda linha, na terceira linha, duas escolhas e na última linha apenas uma escolha. Logo pelo PFC temos  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  maneiras de escolher as casas vazias com exatamente uma delas em cada linha e em cada coluna. Escolhidas as casas

vazias, é só pintar as demais. Portanto existem 24 maneiras de pintar as casas de modo que em cada linha e cada coluna apareçam exatamente três casas pintadas de preto.

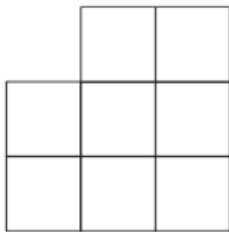
**Figura 40:** Questão 5 da OBMEP 2017(Prova 2ª fase- nível 1)

5. Marcela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros quadriculados com peças retangulares e cada uma dessas peças cobre exatamente duas casas do tabuleiro.

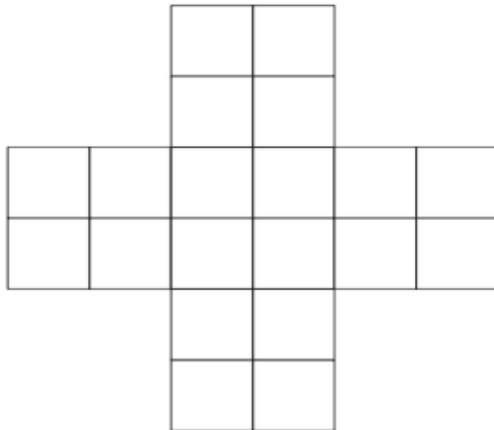
a) A figura abaixo mostra uma maneira de cobrir um tabuleiro  $2 \times 3$  utilizando três peças. Desenhe as outras duas maneiras de cobrir com três peças o mesmo tabuleiro.



b) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com quatro peças o tabuleiro abaixo?

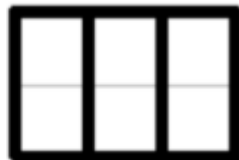


c) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com dez peças o tabuleiro abaixo?



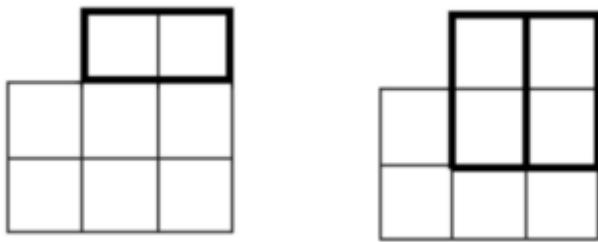
Essa questão também foi colocada nas provas da segunda fase da OBMEP 2017 do nível 2 e nível 3, ou seja, tivemos uma mesma questão de contagem que foram colocadas nos 3 níveis, daí a importância do estudo mais rigoroso desse assunto.

No item a) As outras duas maneiras são:



Temos no total 3 possibilidades de cobrir um tabuleiro  $2 \times 3$ : duas peças na horizontal e uma peça vertical à direita, duas peças na horizontal e uma peça vertical à esquerda e três peças na vertical. Observe que não podemos ter três peças na horizontal.

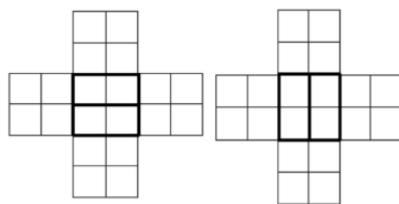
No item b) uma boa estratégia é começar a cobrir os quadrados superiores. Temos duas possibilidades: cobri-los com uma peça na horizontal ou cobri-los com duas peças verticais, observe:



O primeiro caso é análogo ao do item a), sendo assim temos 3 maneiras. No segundo caso só temos uma maneira de terminar cobertura: um retângulo na vertical e outro na horizontal. Portanto, o número de possibilidades é:  $3 + 1 = 4$ .

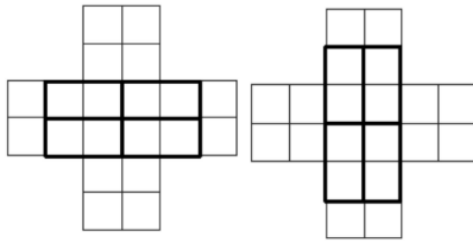
No item c) podemos contar as possibilidades utilizando quadrados  $2 \times 2$  (só existe duas maneiras de cobrir cada um deles). Depois de algumas tentativas de resolução recaímos na contagem de cobrir o quadrado central  $2 \times 2$ , daí para não haver confusão vamos começar a contagem por ele. Temos 3 casos a considerar:

- Primeiro caso: O quadrado central é coberto de modo que às peças retangulares usadas não invadam as regiões vizinhas. Isso pode ser feito usando duas peças horizontais ou duas peças verticais. Observe:



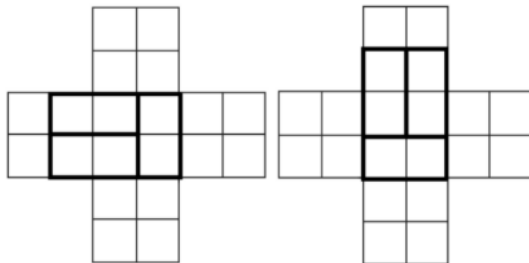
Em ambos os casos, cada um dos outros quadrados pode ser coberto de dois modos (com peças horizontais ou verticais). Temos pelo PFC para o caso em que o quadrado central é coberto com duas peças na horizontal:  $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  possibilidades de cobertura. Já no caso de termos ele coberto por duas peças verticais temos pelo PFC:  $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  possibilidades de cobertura. Logo pelo princípio aditivo temos no total  $16 + 16 = 32$  possibilidades de cobertura.

- Segundo caso: O quadrado central é coberto de modo a invadir dois quadrados opostos. Isso acontece quando são usadas quatro peças horizontais ou quatro peças verticais. Observe:



Em cada um desses casos os quadrados invadidos só podem ter sua cobertura completada de um modo, enquanto os outros dois podem ser cobertos de dois modos. Logo para o caso do quadrado central coberto com quatro peças horizontais temos pelo PFC:  $1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 4$  possibilidades. Já no caso de termos ele coberto com quatro peças verticais temos pelo PFC:  $1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 4$  possibilidades. Pelo princípio aditivo temos no total  $4 + 4 = 8$  possibilidades de cobertura.

- Terceiro caso: O quadrado central é coberto de modo a invadir somente um dos outros quadrados. Isso pode ser feito quando são usadas duas peças horizontais e uma vertical ou duas verticais e uma horizontal. Observe:



Para hipótese de termos duas peças horizontais e uma vertical temos duas possibilidades: ou as peças horizontais invadem a esquerda do quadrado central ou invadem a direita (preste atenção que a possibilidade de termos as duas peças horizontais cobrindo o quadrado central e a peça na vertical invadindo um dos quadrados já foi contada no primeiro caso): Temos para cada uma das possibilidades pelo PFC:  $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$ . Pelo princípio aditivo temos no total  $8 + 8 = 16$  possibilidades.

Para a hipótese de termos duas peças na vertical e uma na horizontal temos duas possibilidades: ou as peças verticais invadem o quadrado de cima do quadrado central ou invadem o quadrado de baixo (preste atenção que a possibilidade de termos duas peças na vertical cobrindo o quadrado central e a peça na horizontal invadindo um dos quadrados já foi contada no primeiro caso): Temos para cada uma das possibilidades pelo PFC:  $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$ . Pelo princípio aditivo

temos no total  $8 + 8 = 16$  possibilidades. Portanto a quantidade de maneiras de marcela cobrir o tabuleiro com 10 peças é pelo princípio aditivo:  $32 + 8 + 16 + 16 = 32 + 8 + 32 = 72$ .

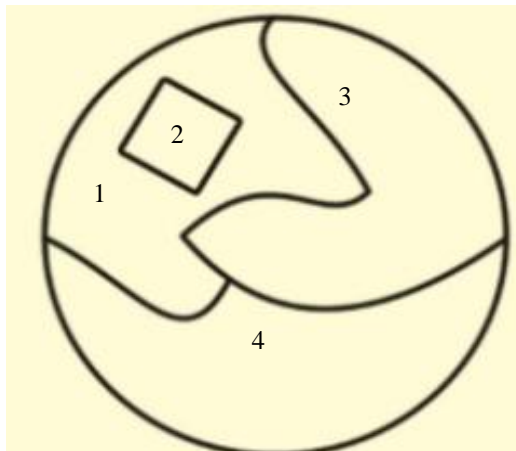
**Figura 41:** Questão 17 da OBMEP 2018(Prova 1ª fase- nível 1)

**17.** Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. Ele quer pintar cada região da figura de uma cor de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?

- A) 16
- B) 24
- C) 64
- D) 72
- E) 256



O círculo está dividido em quatro regiões, vamos numerá-las para organizar a nossa contagem, observe:



Se começarmos a contagem em ordem crescente teremos 4 possibilidades para região 1, 3 possibilidades para região 2(a cor tem que ser diferente da região 1), 3 possibilidades para região 3(tem que ser diferente da cor da região 1, mas pode ser igual a cor da região 2), 2 possibilidades para região 4(tem que ser diferente das cores das regiões 1 e 3, mas pode ser igual a da região 2). Logo pelo PFC, temos  $4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$  possibilidades.

Poderíamos ter começado a contagem em outra ordem, mas temos que ter cuidado na escolha. Por exemplo, se começássemos a contagem na ordem: 4, 2, 1 e 3, teríamos 4 possibilidades para região 4, 4 possibilidades para região 2(podemos repetir a cor usada na região 4), para pintar a região 1 a resposta é depende, se pitássemos as regiões 2 e 4 da mesma cor teríamos 3 possibilidades


para região 1, caso pintássemos as regiões 2 e 4 de cores distintas teríamos 2 possibilidades para região 1, para resolver o problema dessa forma precisamos dividir em casos.

Caso 1: As regiões 2 e 4 são pintadas da mesma cor: Temos 4 possibilidades para pintar a região 4, uma possibilidade para pintar a região 2 (tem que ser a mesma cor da região 4), 3 possibilidades para pintar a Região 1 (tem que ser diferente das regiões 2 e 4) e 2 possibilidades para pintar a região 3, daí pelo PFC, temos  $4 \times 1 \times 3 \times 2 = 24$  possibilidades.

Caso 2: As regiões 2 e 4 são pintadas de cores diferentes: Temos 4 possibilidades para pintar a região 4, 3 possibilidades para pintar a região 2 (tem que ser diferente da cor da região 4), duas possibilidades para pintar a região 1 (tem que ser diferente das cores das regiões 2 e 4) e duas possibilidades para pintar a região 3 (pode ser igual a cor da região 2), logo pelo PFC, temos:  $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$  possibilidades. Logo pelo princípio aditivo temos no total:  $24 + 48 = 72$  possibilidades.

**Figura 42:** Questão 19 da OBMEP 2018 (Prova 1ª fase- nível 1)

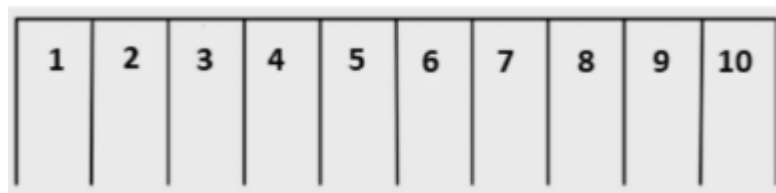
**19.** Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?



A) 56  
B) 70  
C) 71  
D) 72  
E) 80

Essa questão também foi colocada na prova da primeira fase dos níveis 2 e 3 do mesmo ano.

Para resolver o problema vamos numerar as vagas, observe:



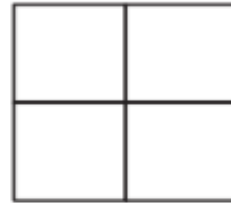
Depois de algumas tentativas de resolver o problema percebemos que existem várias maneiras de resolução. Vamos apresentar 3 soluções.

- Solução 1: escolhemos um carro para começar a contagem, digamos o carro preto. Vamos estacioná-lo na vaga 1 ou na vaga 10. Temos 8 possibilidades para estacionar o carro rosa para cada uma dessas maneiras de estacionar o carro preto, logo temos  $8 + 8 = 16$  possibilidades. Agora vamos estacionar o carro preto em uma das vagas marcadas com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Para cada uma dessas escolhas temos 7 possibilidades de estacionar o carro rosa, logo pelo PFC, temos  $8 \times 7 = 56$  maneiras diferentes de estacionar os carros. Portanto pelo princípio aditivo temos um total de  $16 + 56 = 72$  possibilidades. Observe que o carro rosa estacionado na primeira vaga foi contado quando o carro preto estava nas vagas 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 analogamente nas outras possibilidades de estacionar o carro rosa em uma vaga. Perceba que ao escolher começar a contagem pelo carro preto da maneira que fizemos, estamos consequentemente contando as possibilidades de posição do carro rosa.
- Solução 2: Vamos começar estacionar o carro preto na vaga 1 e seguir estacionando até a vaga 10 de modo que o carro rosa esteja sempre a direita do carro preto. Estacionando o carro preto na vaga 1 temos 8 possibilidades de estacionar o carro rosa a direita, estacionando o carro preto na vaga 2 temos 7 possibilidades de estacionar o carro rosa a direita, estacionando o carro preto na vaga 3 temos 6 possibilidades de estacionar o carro rosa a direita, seguindo esse raciocínio até estacionar o carro preto na vaga 8 (na vaga 9 e na vaga 10 não tem como ficar pelo menos uma vaga livre a direita) temos pelo princípio aditivo:  $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ . Analogamente se começarmos a contagem pelo carro rosa com o mesmo raciocínio, daí teremos novamente pelo princípio aditivo  $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ . Logo teremos no total  $36 + 36 = 72$  maneiras diferentes de estacionar os carros na condição do problema.
- Solução 3: Podemos usar um raciocínio destrutivo contando todos os casos possíveis de estacionar os carros e descontando os casos que os carros são estacionados um do lado do outro. Assim temos 10 maneiras de estacionar o primeiro carro, para cada uma dessas temos 9 maneiras de estacionar o segundo carro, daí pelo PFC, temos  $10 \times 9 = 90$  possibilidades de estacionar os carros. Para o caso que eles estarão estacionados um do lado do outro basta observar que temos 9 pares de vagas, podendo um carro está a direita ou a esquerda nesses pares, daí temos um total de  $9 \times 2 = 18$  possibilidades de estacionar os carros. Como queremos que haja pelo menos uma vaga livre temos no total  $90 - 18 = 72$  possibilidades.

**Figura 43:** Questão 14 da OBMEP 2018(Prova 1ª fase- nível 2)

**14.** João tem lápis nas cores verde, amarela e preta e quer colorir o tabuleiro da figura, de modo que:

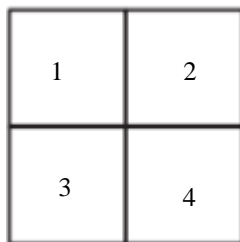
- cada quadradinho deve ser colorido com uma única cor;
- quaisquer dois quadradinhos com um lado comum devem ser coloridos com cores diferentes.



De quantas maneiras diferentes ele pode colorir esse tabuleiro?

- A) 12
- B) 18
- C) 24
- D) 54
- E) 81

Vamos numerar os quadradinhos:



Depois de algumas tentativas recaímos em contar os casos em que as cores são iguais ou diferentes nos quadrados 1 e 4 ou nos quadrados 2 e 3 dependendo da ordem que começamos a contar. Vamos contar na seguinte ordem 1, 4, 3 e 2, considerando dois casos:

Caso 1: Os quadrados 1 e 4 tem cores diferentes. Temos 3 possibilidades de pintar o quadrado 1, 2 possibilidades de pintar o quadrado 4 (tem que ser diferente da cor do quadrado 1), uma possibilidade para o quadrado 3 (tem que ser diferente da cor do quadrado 1 e do quadrado 2), uma possibilidade para o quadrado 2 (pode ser igual à do quadrado 3, mas diferente dos outros). Logo pelo PFC, temos  $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

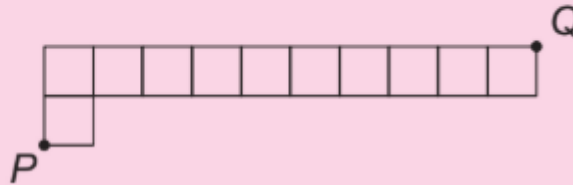
Caso 2: Os quadrados 1 e 4 tem cores iguais. Temos 3 possibilidades de pintar o quadrado 1, uma possibilidade de pintar o quadrado 4 (tem que ser igual a do quadrado 1), 2 possibilidades para o quadrado 3 (tem que ser diferente do quadrado 1 e do quadrado 4), 2 possibilidades para o quadrado 2 (pode ser igual a cor do quadrado 3, mas tem que ser diferente das cores dos quadrados 1 e 4. Daí pelo PFC temos  $3 \times 1 \times 2 \times 2 = 12$ .

Portanto pelo princípio aditivo temos  $6 + 12 = 18$  maneiras diferentes de colorir o tabuleiro.

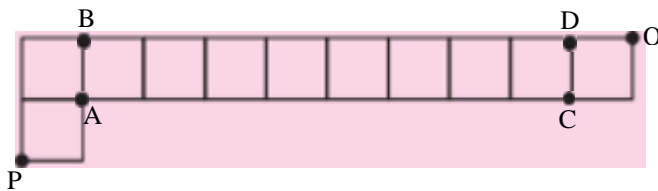
**Figura 44:** Questão 19 da OBMEP 2018(Prova 1ª fase- nível 2)

**19.** Para fazer um percurso do ponto  $P$  ao ponto  $Q$  da figura, uma formiguinha deve andar sobre os segmentos horizontais sempre para a direita e nunca passar duas vezes por um mesmo segmento vertical. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer esse percurso?

- A) 3
- B) 10
- C) 20
- D) 1024
- E) 1536



Após algumas tentativas de resolver esse problema o consideramos difícil. Para contornar essa dificuldade precisamos encontrar um padrão de contagem, para isso vamos marcar os pontos A, B, C e D no percurso conforme a figura abaixo:



Vamos dividir o problema em dois casos

- Caso 1: Existem duas maneiras distintas de a formiga sair de  $P$  até  $A$  (horizontal/vertical ou vertical/horizontal) sem andar pelo segmento vertical  $AB$ . Temos uma maneira de a formiga sair de  $P$  até  $B$ (vertical/vertical/horizontal) sem andar pelo segmento  $AB$ .
- Caso 2: Considerando que a formiga possa andar pelo segmento  $AB$ , e partindo do ponto  $A$ , fazendo percursos do tipo  $H$  (horizontal) ou  $VH$  (vertical – horizontal), para cada quadrado partindo do ponto  $A$  até chegarmos aos pontos  $C$  ou  $D$  (sem passar pelo segmento  $CD$ ) temos duas possibilidades de caminhos, como temos 8 quadrados pelo  $PFC$  temos  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$  caminhos que a formiga chega até um dos pontos  $C$  ou  $D$ . Além disso, a partir de cada ponto  $C$  ou  $D$  há duas formas distintas de chegar até  $Q$ (Sendo permitido agora passar pelo segmento  $CD$ ). Portanto pelo  $PFC$  temos  $2^8 \times 2 = 2^9$  caminhos distintos que a formiga pode fazer partindo de  $A$  até  $Q$ . Com um raciocínio semelhante temos  $2^9$  caminhos distintos que a formiga pode fazer partindo de  $B$  até  $Q$ .

Logo considerando os casos 1 e 2 temos pelo PFC e pelo princípio aditivo um total de  $1 \times 2^9 + 2 \times 2^9 = 2^9 + 2^9 = 2 \times 2^9 = 2 \times 512 = 1024$  caminhos diferentes que a formiga pode fazer para sair de P e chegar a Q. Seguindo as regras do problema.

**Figura 45:** Questão 2 da OBMEP 2018(Prova 2ª fase- nível 2)

2. Um número inteiro positivo é chamado de *interessante* quando termina com um algarismo que é igual ao produto de seus demais algarismos. Por exemplo, 326 e 1020 são interessantes, pois  $3 \times 2 = 6$  e  $1 \times 0 \times 2 = 0$ .

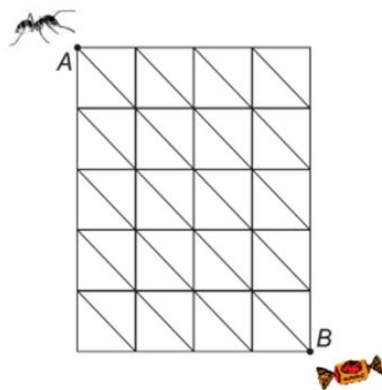
- 
- a) Qual deve ser o valor do algarismo A para que o número 14A8 seja interessante?
- b) Quantos números interessantes de quatro algarismos terminam com o algarismo 6?
- c) Quantos números interessantes de cinco algarismos terminam com o algarismo 0?

Essa questão também foi colocada na prova do nível 3 do mesmo ano. Observe que os assuntos necessários para a resolver são aritmética e métodos de contagem. O item A é simples de resolver, é só seguir as regras e montar uma equação. Os itens B e C são parecidos com questões resolvidas em (Carvalho, 2017), utilizamos aritmética e o princípio fundamental para resolvê-los. Deixamos o leitor a vontade para tentar resolver o problema e verificar como o livro do PIC de contagem ajuda na solução.

**Figura 46:** Questão 12 da OBMEP 2019(Prova 1ª fase- nível 1)

12. A formiguinha da OBMEP está no ponto A e quer ir até o doce que está no ponto B. Ela anda sobre as linhas da figura e faz um caminho com o menor comprimento possível. Quantos são esses caminhos de menor comprimento?

- A) 1  
B) 2  
C) 3  
D) 4  
E) 5



Há várias formas de resolver esse problema, uma delas é observar que em um triângulo cada lado é menor que a soma dos outros dois lados e a menor distância entre dois pontos é uma linha reta, sendo assim a menor distância de A até o ponto acima do ponto B (usemos C para esse ponto) é a união das diagonais dos quadrados em linha reta partindo de A até C. Usando novamente que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta, a menor distância de C até B é o lado do quadrado (descendo de C até B). Denotando D para diagonal e L para o lado do quadrado (no sentido de cima para baixo), temos um possível caminho DDDDL, para calcular todos os caminhos basta calcular as permutações de 5 elementos com repetição de 4, temos  $\frac{5!}{4!} = 5$ . Caso não conseguíssemos perceber esse raciocínio poderíamos contar cada possibilidade: São elas DDDDL, DDDL, DDLDD, DLDDD, LDDDD. Lembrando que embora seja uma questão nível 1, os alunos já tiveram conhecimento do que é uma permutação com repetição nas aulas preparatórias para OBMEP.

**Figura 47:** Questão 16 da OBMEP 2019(Prova 1ª fase- nível 2)

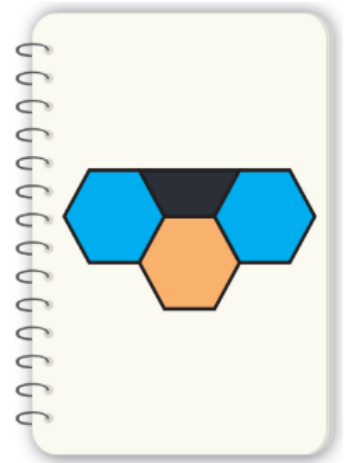
**16.** Uma mesa circular tem seis lugares com cadeiras de cores diferentes. De quantos modos três casais de namorados podem ocupar esses seis lugares de forma que os três rapazes fiquem juntos e as três moças também, mas nenhum rapaz fique junto de sua namorada?

A) 36  
 B) 54  
 C) 72  
 D) 108  
 E) 144

Vale destacar que, as questões apresentadas e discutidas com resolução são objetos de pesquisa dessa dissertação sendo encontradas no banco de dados da OBMEP entre os anos de 2006-2019. Durante a pesquisa bibliográfica do banco de questões de provas anteriores da OBMEP entre os anos de 2021-2025 foram encontradas questões relacionadas ao princípio fundamental da contagem, elas serão apresentadas a seguir, mas não serão discutidas por meio de resolução, pois não foram aplicadas em sala de aula.

**Figura 48:** Questão 5 da OBMEP 2021(Prova 2ª fase- nível 1)

5. Maria pinta, em seu caderno, figuras formadas por trapézios e hexágonos. Cada hexágono pode ser pintado de azul, bege ou cinza, e cada trapézio, de azul ou preto. Polígonos com um lado em comum não podem ter a mesma cor. A figura ao lado é um exemplo de uma pintura feita por Maria.



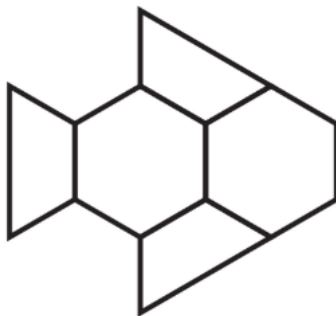
a) De quantas maneiras Maria pode pintar a figura abaixo?



b) De quantas maneiras Maria pode pintar a figura abaixo?



c) De quantas maneiras Maria pode pintar a figura abaixo?

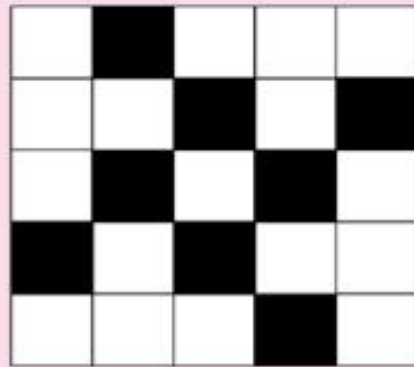


Essa questão também foi colocada nas provas da segunda fase dos níveis 2 e 3 do mesmo ano. Os alunos que participaram do PIC – Coruripe de 2017 a 2019, e que foram para segunda fase da OBMEP em 2021, tiveram uma excelente base para responder com êxito esse problema, pois nas aulas foram ministrados vários problemas de colorir regiões que já caíram na OBMEP como visto nas questões anteriores, bem como questões de pintar regiões do livro PIC e questões próprias.

**Figura 49:** Questão 17 da OBMEP 2022(Prova 1ª fase- nível 2)

**17.** A figura abaixo mostra um tabuleiro 5 x 5 formado por 25 quadrados pretos ou brancos. Observe que esse tabuleiro não se altera quando girado de  $90^\circ$ . Quantos tabuleiros 5 x 5 formados por quadrados pretos ou brancos não se alteram quando girados de  $90^\circ$ ?

- (A) 25
- (B) 30
- (C) 64
- (D) 128
- (E) 192

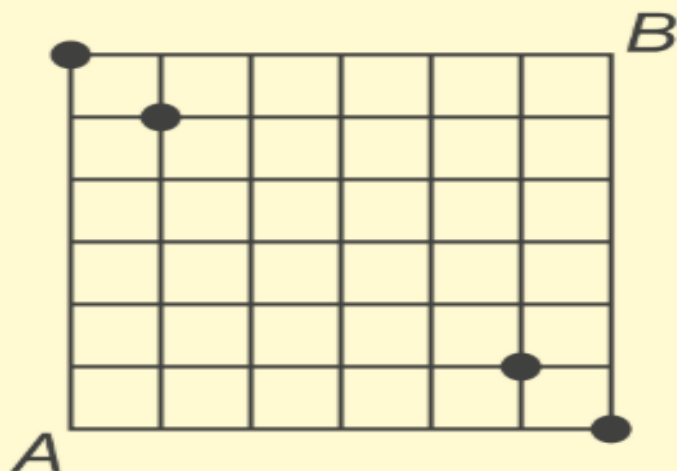


Essa questão também foi colocada na prova o nível 3 do mesmo ano.

**Figura 50:** Questão 20 da OBMEP 2023(Prova 1ª fase- nível 1)

**20.** Uma formiga, inicialmente no vértice  $A$ , anda sobre as linhas do quadriculado da figura, sempre para a direita ou para cima, até chegar ao vértice  $B$ . De quantas maneiras ela pode fazer isso passando por algum dos quatro pontos destacados?

- (A) 4
- (B) 32
- (C) 36
- (D) 64
- (E) 74



Essa questão também foi colocada nas provas da primeira fase dos níveis 2 e 3 do mesmo ano.

**Figura 51:** Questão 11 da OBMEP 2023(Prova 1ª fase- nível 2)

**11.** Quantos são os números  $\underline{A} \underline{B} \underline{C}$  de três algarismos distintos tais que o número  $\underline{A} \underline{B}$ , de dois algarismos, seja divisor de  $\underline{A} \underline{B} \underline{C}$ ?

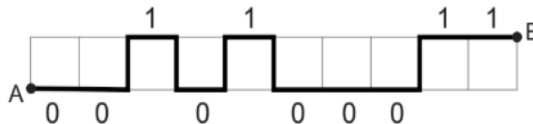
- (A) 1
- (B) 36
- (C) 72
- (D) 80
- (E) 144

**Figura 52:** Questão 5 da OBMEP 2023(Prova 2ª fase- nível 1)

**5.** A formiguinha da OBMEP caminha do ponto A até o ponto B ao longo dos lados dos 10 quadradinhos da figura abaixo.



Ela só pode andar para a direita, para cima ou para baixo, sem passar por onde já passou. Para representar um caminho, ela inventou o seguinte código: para cada quadradinho, da esquerda para a direita, se ela passar por baixo, escreve 0 e se passar por cima, escreve 1. Na figura a seguir observamos o caminho representado por 0010100011.

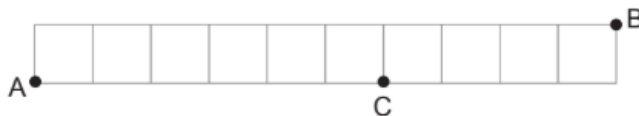


a) Desenhe o caminho representado por 1001001100.



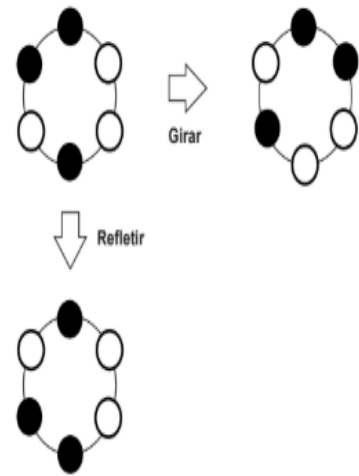
b) De quantas maneiras diferentes a formiguinha pode ir de A até B?

c) De quantas maneiras diferentes a formiguinha pode ir de A até B passando pelo ponto C?

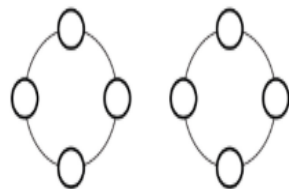


**Figura 53:** Questão 4 da OBMEP 2023(Prova 2º fase- nível 2)

4. Isabel faz pulseiras com bolinhas pretas e brancas igualmente espaçadas entre si. Girar ou refletir a pulseira não produz uma pulseira diferente. A figura mostra uma mesma pulseira em três posições diferentes sobre uma mesa.



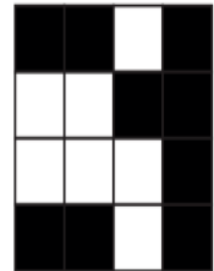
a) Com duas bolinhas pretas e duas brancas, Isabel consegue fazer apenas duas pulseiras diferentes. Represente essas pulseiras na figura abaixo pintando as bolinhas pretas.



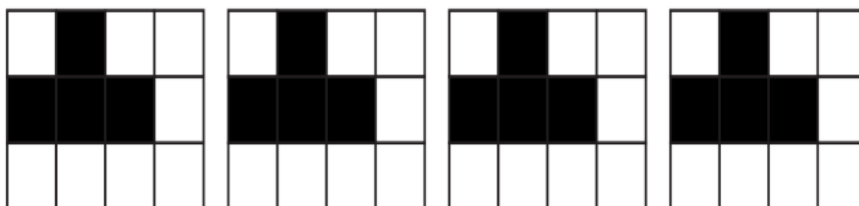
- b) Quantas pulseiras diferentes Isabel pode fazer usando três bolinhas pretas e três bolinhas brancas?
- c) Quantas pulseiras diferentes Isabel pode fazer usando quatro bolinhas pretas e quatro bolinhas brancas?

**Figura 54:** Questão 6 da OBMEP 2023(Prova 2ª fase- nível 3)

6. Pedro deseja pintar quadradinhos de tabuleiros de modo que a quantidade de quadradinhos pintados em qualquer subtabuleiro  $3 \times 3$  seja sempre um número ímpar. Veja um exemplo em um tabuleiro  $4 \times 4$  na figura ao lado.



a) Pedro já pintou as duas primeiras linhas de um tabuleiro  $3 \times 4$ . Indique as 4 maneiras diferentes de completar a pintura desse tabuleiro pintando somente casas da última linha.



- b) De quantas maneiras ele pode pintar um tabuleiro  $3 \times 4$ ?
- c) De quantas maneiras ele pode pintar um tabuleiro  $4 \times 4$ ?
- d) De quantas maneiras ele pode pintar um tabuleiro  $2023 \times 2023$ ?

**Figura 55:** Questão 12 da OBMEP 2024(Prova 1ª fase- nível 1)

**12.** A figura mostra os algarismos de 0 a 9 construídos com palitos idênticos e com eles podemos formar números. Por exemplo, para formar o número 1531 são usados 14 palitos. Quantos números de quatro algarismos podem ser formados com 10 palitos ou menos?



- (A) 10
- (B) 2
- (C) 15
- (D) 20
- (E) 6

**Figura 56:** Questão 17 da OBMEP 2024(Prova 1ª fase- nível 1)

**17.** Cada um dos círculos desenhados no quadro deve ser pintado de azul, verde ou preto de modo que círculos ligados por um segmento tenham cores diferentes. De quantas maneiras podemos fazer essa pintura?

- (A) 27
- (B) 8
- (C) 24
- (D) 18
- (E) 12

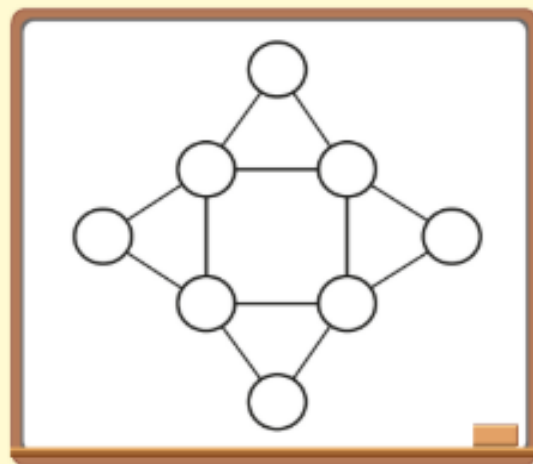


Figura 57: Questão 15 da OBMEP 2024(Prova 1ª fase- nível 2)

**15.** A formiguinha da OBMEP mora em um formigueiro com túneis horizontais e verticais, conforme mostrado na figura. Quantos são os caminhos possíveis para a formiguinha ir do ponto A ao ponto B, sempre percorrendo os túneis verticais de cima para baixo e sem passar mais de uma vez pelo mesmo lugar nos túneis horizontais?

- (A) 18
- (B) 36
- (C) 12
- (D) 24
- (E) 10

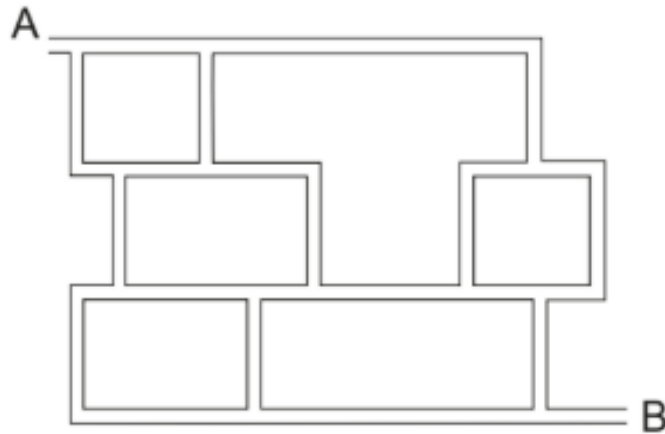


Figura 58: Questão 6 da OBMEP 2024(Prova 2ª fase- nível 1)

**6.** Uma tabela 4×4, preenchida com os números 0 e 1, é *equilibrada* quando, somando os números em cada linha, obtemos todos os inteiros de 1 a 4, o mesmo ocorrendo com as somas dos números de cada coluna. Por exemplo, a tabela ao lado é equilibrada.

1	1	1	1	→ 4
1	1	1	0	→ 3
0	1	1	0	→ 2
0	1	0	0	→ 1
↓	↓	↓	↓	
2	4	3	1	

**a)** Preencha as tabelas abaixo de modo que elas sejam equilibradas, com as linhas e colunas tendo as somas indicadas.

				→ 4
				→ 3
				→ 2
				→ 1
↓	↓	↓	↓	
1	2	3	4	

				→ 2
				→ 4
				→ 1
				→ 3
↓	↓	↓	↓	
3	1	4	2	

**b)** Quantas são as tabelas equilibradas com a soma de cada linha indicada abaixo?

				→ 4
				→ 3
				→ 2
				→ 1
↓	↓	↓	↓	

**c)** Quantas são as tabelas equilibradas?

**Figura 59:** Questão 13 da OBMEP 2025(Prova 1ª fase- nível 1)

**13.** Michel faz sopas com três ou mais dos seguintes ingredientes: alho, cebola, salsinha, batata e cenoura. Seu filho Gabriel pede sopa sem salsinha e seu filho Rafael pede sopa com alho. De quantas maneiras Michel pode escolher os ingredientes para fazer uma única sopa que atenda aos pedidos de seus filhos?

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 5
- (E) 6

Ao resolver questões de contagem da OBMEP observamos que problemas que envolvem colorir regiões de figuras com determinadas condições são frequentes. Assim como no estudo para concursos públicos devemos conhecer as questões que já foram cobradas em provas anteriores da OBMEP, embora as questões não se repitam, as metodologias de resolução de questões anteriores podem ser aplicadas em outras questões, temos casos de questões que tiveram o enunciado parecido ou o enunciado estendido. O uso do raciocínio lógico com o Princípio Fundamental da Contagem e o princípio aditivo resolvem a maioria dos problemas de contagem. Na seção seguinte iremos discorrer sobre a proposta realizada no município de Coruripe entre os 2017-2019 com as turmas do 6º ao 9º ano.

#### **4. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: Experiência, produção e análise de dados**

A utilização dos livros do PIC para o ensino e aprendizagem do PFC impulsiona a democratização do acesso aos conhecimentos matemáticos principalmente no segmento do Fundamental 2, já que os alunos do 6º ano passam por uma transição brusca do 5º para o 6º ano. Percebe-se que esses alunos têm mais dificuldades em compreender a didática entrelaçada entre as matérias já que anteriormente só tinha um único professor para ministrar todas as disciplinas e agora, eles têm um professor para cada matéria. Vejamos que, a aplicabilidade das questões encontradas no livro do PIC só foi possível mediante olhar atento do pesquisador e a liberdade em ministrar oficinas específicas para os alunos. Vale destacar que, o projeto de oficinas para a prova OBMEP

no contraturno teve início em 2013, onde alguns alunos se interessavam pelas oficinas de resolução de problemas. Com o objetivo de atrair mais alunos e instigar os mesmos na obtenção de bons resultados foi iniciado em 2017 uma repaginação nas oficinas agora intitulada “PIC- CORURIFE”. Assim, mediante oficinas de contextualização sobre os fatores históricos da OBMEP e sua importância, foi idealizado juntamente com a comunidade escolar, gestão e professores de Matemática da escola municipal de educação básica Liege Gama Rocha, o projeto PIC- CORURIFE com o intuito de aproximar o alunado do que mais era cobrado na prova da OBMEP e metodologias que impulsionam o ensino e aprendizagem de Matemática desses alunos de maneira dinâmica e eficiente.

Diante disso, a escola pesquisada vivenciou uma inserção dos alunos no universo das questões da OBMEP tendo como foco a utilização dos princípios e raciocínio lógico matemático com o objetivo de desmistificar a matemática como somente memorização de fórmulas prontas. Assim, para a composição das salas de aula foi feito uma divulgação na escola apresentando o projeto e convidando os alunos que desejassem aprender mais sobre a matemática e desenvolver habilidades na resolução de problemas que compunham a prova da OBMEP e outras seleções. Destaca-se que, esse projeto ocorreu no horário contrário as aulas como popularmente foi conhecido pela comunidade escolar como: “reforço de matemática” na escola Liege Gama Rocha em Coruripe, as aulas eram ministradas no período da tarde duas vezes por semana. Para melhor eficácia do projeto, foi realizada uma seleção por nível (1 e 2), sendo o pesquisador responsável pelo nível 2 no período da tarde, pela manhã ficou responsável por ambos os níveis com a restrição de apenas uma aula de 50 minutos em cada turma do 6º ao 9º ano. Todos os alunos foram convidados a participar das aulas no contraturno, não ficando restrito a quem conseguiu alguma premiação na OBMEP em anos anteriores. Antes das aulas, no período contrário, foram feitas brincadeiras utilizando assuntos de matemática para estimular os alunos.

Observou-se que, mesmo com aulas no contraturno desde 2013, alguns alunos ainda apresentavam dificuldades em princípios básicos que foram sanados a partir de 2017. Destaca-se que, com o desenvolvimento das aulas e metodologia diferenciada, em 2017 a escola ganhou 10 medalhas, sendo 9 de bronze e uma de prata, esta última como primeira prata da escola, um marco inédito para a comunidade escolar. Outro ponto foi às várias menções honrosas. E como professor, fui premiado pela OBMEP em 2017 e 2018 pelo desempenho dos meus alunos, assim, ganhei o prêmio de honra ao mérito da prefeitura de Coruripe e um bônus como professor comprometido.

Esses aspectos reforçam o desenvolvimento intelectual dos estudantes sobre o conhecimento Matemático, visto que, ao participar da oficina relacionada a OBMEP os alunos conseguiram compreender mais sobre fundamentos e princípios, para além das fórmulas, o que impulsionou a

resolução de diferentes questões e contexto elevando o nível de pontuação em provas externas como, por exemplo: SAEB e conseqüentemente no IDEB da escola.

Vale destacar que, o primeiro contato do pesquisador com a OBMEP começou quando teve a oportunidade de trabalhar como secretário dela em alagoas, além de ter sido corretor das provas da segunda fase em alguns anos, tendo assim experiência nessa área. Com os resultados obtidos em 2017, somados ao currículo lattes, o pesquisador vislumbrou novas oportunidades escrevendo a escola no POTI, sendo a escola selecionada como polo. Assim, o pesquisador teve a oportunidade de ser coordenador e professor do projeto em 2018. Para um maior entendimento sobre as oficinas e como as aulas foram ministradas discutiremos a seguir sobre a experiência exitosa do projeto.

#### **4.1 PIC- CORURIFE: Uma produção de sucesso**

O contexto educacional corriqueiro da sala de aula direciona o ensino por meio das habilidades pertinentes a faixa etária e ano, utilizando recursos limitados como espaço físico e livros. Ao adentrar nesse espaço educacional em 2017, observei que mesmo com aulas de Matemática no contraturno, alguns alunos ainda apresentavam dificuldades em operações e princípios básicos como é o caso do PFC. Motivado a superar essas dificuldades e buscar um maior entendimento para o alunado sobre a funcionalidade da Matemática no cotidiano entrei em contato com o professor regente do contraturno e juntos reelaboramos estratégias didáticas para que os alunos pudessem por meio do raciocínio lógico resolver as questões.

Além disso, por meio dessa estratégia dividimos os alunos por nível, para isso realizamos uma avaliação diagnóstica com o intuito de catalogar os alunos por nível e trabalhar em cima das suas dificuldades. No contraturno (horário da tarde) dividimos as turmas em dois níveis: Nível 1 (6º e 7º ano) e nível 2 (8º e 9º ano), nesse período fiquei responsável pelo nível 2. Já no horário normal das aulas (turno da manhã) foi reservada uma aula de matemática de 50 minutos em cada turma do 6º ao 9º ano para resolução de questões voltadas à OBMEP (todas de responsabilidade do pesquisador dessa dissertação). Isso fez aumentar o número de alunos no turno contrário, pois os alunos eram estimulados a comparecer no período da tarde para um aperfeiçoamento dos estudos. A direção forneceu total apoio para o projeto, disponibilizando: Datashow, xerox de atividades, espaço confortável e climatizado, alimentação, dentre outras coisas. Tive a maior parte da minha carga horária de trabalho voltada para OBMEP, esse contexto despertou em mim um estímulo/valorização, isso foi possível graças a confiança da gestão no meu trabalho devido a minha experiência com a OBMEP e ter ficado em primeiro lugar no concurso para professor efetivo do município de Coruripe-Al.

A partir disso estruturei as aulas para desenvolver conceitos e reforço nas operações básicas mesclando com aplicabilidade na resolução de problemas que já foram temas da OBMEP. Observou-se que ao ser apresentada uma situação problema os alunos aguardavam que o docente informasse qual operação deveria ser realizada para resolver a questão, assim iniciamos um estudo sobre a interpretação das questões focando que o alunado pudesse identificar as palavras chaves e assim desenvolver seu raciocínio sem necessitar prioritariamente de aplicar alguma fórmula para resolver as questões como é o caso das questões que envolvem o PFC.

Nessa perspectiva iniciei as oficinas com o tema de contagem demonstrando para eles os caminhos possíveis para solução utilizando somente raciocínio lógico, as quatro operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) e diagramas. Também ao resolver as questões ampliei o entendimento dos alunos sobre o que é uma solução já que a mesma pode ser apresentada em texto escrito explanando seu raciocínio, por meio de desenhos e diagramas ou utilizando algoritmos, como o da divisão. Destaco que, para solução escrita os alunos ficaram surpresos já que não tinham conhecimento de como redigir uma solução de um problema matemático, pois entendiam que deveriam armar e efetuar os algoritmos para encontrar o resultado sem necessidade de escrever seu raciocínio lógico passo a passo. Foi mostrado que ao escrever seu raciocínio na questão, mesmo não conseguindo a tempo chegar na resposta final, eles poderiam receber alguma pontuação pelo raciocínio desenvolvido na prova da segunda fase da OBMEP (a redação da resolução é importante).

Essas questões com soluções escritas são de suma importância para a segunda fase da OBMEP já que diferente da primeira fase, as questões são abertas sem a presença de múltipla escolha. Assim para a turma foi mostrado que na primeira fase bastava resolver o problema sem a necessidade de escrever o raciocínio, pois bastava apenas marcar uma das alternativas, a qual apenas uma estava correta, economizando tempo na resolução da prova, pois a correção é feita pelo gabarito oficial, não sendo avaliado o que o aluno escreveu na prova. Já na correção das provas da segunda fase há dependência de uma pauta para os corretores, que pode considerar o que os alunos escreveram na prova mesmo não chegando na resposta final, desde que o processo de resolução esteja correto. Dependendo da questão, pode até ser considerado com pontuação total ou parcial apenas a escrita da resposta final. Assim os alunos foram estimulados a escrever seu raciocínio sempre considerando o horário de início e de fim da prova, evitando perda de tempo.

Nesse sentido, as oficinas basearam-se no tratamento de conceitos e princípios, como é o caso do princípio fundamental da contagem, de modo que os alunos pudessem compreender o princípio e sua aplicabilidade em diferentes questões, com ramificação para explicação de permutações simples e combinações simples como já exemplificadas no capítulo anterior, fazendo uma relação das questões trabalhadas no livro do PIC com as da OBMEP. No intuito de dinamizar

as aulas foram propostas diferentes metodologias como por exemplo separar os alunos em grupos e questões com tempo determinado para que eles em grupo pudessem dialogar e resolver as questões propostas, posteriormente apresentar no quadro para os demais colegas. Vale destacar, que na divisão dos integrantes dos grupos, o pesquisador tinha o cuidado de colocar separadamente os que estavam avançados, assim criando grupos dinâmicos e impulsionando a aprendizagem significativa por meio do diálogo e resolução de problemas, onde um aluno aprendia com o outro e também eram impulsionados a exibir sua resolução no quadro explicando para os demais como chegou a determinado resultado. Antes das aulas eram feitas brincadeiras com assuntos de matemática para estimular os alunos, que duravam em média 10 minutos. Uma delas era morto/vivo com adaptação de movimentos do corpo com assuntos de matemática, por exemplo, se o professor falasse um múltiplo de dois os alunos tinham que levantar o braço direito, se fosse um múltiplo de 3 o braço esquerdo, caso o múltiplo fosse comum tinham que levantar os dois braços. Isso estimulava o raciocínio rápido e a atenção.

Durante essa dinâmica ocasionou algumas situações, como por exemplo, soluções diversas para o mesmo problema. Nesse caso, o pesquisador explicava que existem diferentes caminhos para chegar a solução do problema, podendo utilizar o PFC de maneiras diferentes para chegar a mesma solução de um problema de contagem. Por exemplo, o problema de colorir uma bandeira com 3 cores resolvido no capítulo 2, tínhamos duas figuras na bandeira: um retângulo e um círculo, começando a contagem por qualquer uma das figuras chegamos na mesma resposta. Mostramos também que nem sempre podemos começar a contagem de maneira arbitrária, existem problemas em contagem que tem restrições, e precisamos dividi-los em casos, a escolha feita inicialmente na contagem influencia na forma de resolver mais rapidamente o problema, evitando erros.

Outro ponto importante que foi realizado durante as oficinas refere-se aos simulados com questões mescladas da OBMEP, IFAL (Instituto Federal de Alagoas) e SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica). Os exercícios voltados para o IFAL e para o SAEB foram resolvidos após a segunda fase da OBMEP. Como nas aulas voltadas para OBMEP foram abordados assuntos do sexto ao nono ano em nível mais elevado de dificuldade, os alunos participantes do projeto não sentiram dificuldades em resolver as questões dos exames mencionados acima.

Vale destacar que os materiais utilizados para ministrar as aulas foram: Alguns Livros do PIC, Provas anteriores e banco de questões da OBMEP, materiais da OBMEP na escola e do POTI, alguns livros da coleção do professor de matemática da SBM, alguns materiais do portal da OBMEP e materiais e questões próprias. Participei da OBMEP na escola em 2017 e 2018, sendo as aulas ministradas a cada 15 dias presencialmente com os mesmos alunos do PIC- Coruripe. Em 2018 fui

coordenador e professor do POTI no polo de Coruripe, tendo ministrado aulas não só para os alunos da escola que atuava, mas também para alunos de escolas de outros municípios.

Com o trabalho em equipe os resultados apareceram no primeiro ano do projeto (em 2017), somente à escola Liege Gama conquistou 10 medalhas, sendo 9 de bronze e uma de prata, além de 11 menções honrosas, sendo a escola mais vitoriosa entre as escolas municipais e estaduais de Alagoas no público do 6º ao 9º ano, tendo ganhado mais medalhas que a soma das medalhas conquistadas pelas escolas estaduais de Alagoas nos níveis 1 e 2 da OBMEP, bem como das escolas municipais comparando-a com cada município individualmente, ou seja, o maior total da rede estadual e municipal. Esse feito histórico foi divulgado para a comunidade em vários meios de comunicação. Fui premiado pela OBMEP devido ao desempenho dos meus alunos.

Diante dessa perspectiva, foi observado na construção da análise de dados os avanços significativos na aprendizagem dos alunos no qual foi mensurado pelo aumento da nota de matemática da prova SAEB, do IDEB da escola e das premiações na prova da OBMEP. Assim, elaboramos um mapeamento desses níveis que será apresentado a seguir com o quadro e tabela.

**Quadro 3:** Premiação Escola Municipal Liege Gama Racha de 2013 a 2025

P	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2021	2022	2023	2024	2025
Ouro	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Prata	0	0	0	0	1	0	1	2	1	0	1	0
Bronze	0	3	4	5	9	5	6	1	0	1	2	2
M. Honrosa	4	11	10	15	11	16	9	12	12	5	10	9

Fonte: O autor (2025)

Por meio desse quadro observa-se que nos anos de 2017, 2018 e 2019 que foram os anos de aplicação da sequência didática e pesquisa dessa dissertação houve um aumento em relação à conquista de medalhas e Menções honrosas, sendo o período com maior número de medalhas conquistadas pelos alunos da escola. Vale destacar, que os dados apresentados no quadro 3 foram obtidos no site da OBMEP, na opção premiados. Observa-se que nos dados apresentados não consta o ano de 2020, pois neste período não houve a realização da prova da OBMEP devido à pandemia de COVID 19, sendo as provas remar cadas para o ano de 2021.

Outro dado importante pesquisado foi relacionado a prova SAEB da referida escola pesquisada. Para melhor entendimento e visualização, apresentamos a seguir o quadro 4 onde consta a evolução da nota SAEB por período.

**Quadro 4:** Evolução da nota Saeb



Fonte: Ideb 2023, Inep.

Fonte: INEP

Salientamos que, os dados apresentados da evolução da escola na prova SAEB foi o resultado de um trabalho em equipe tendo as oficinas contribuído para o resultado já que nos encontros era propostos situações problemas em níveis elevados de dificuldades para além dos conteúdos propostos nessas provas. Assim, as oficinas realizavam um estudo aprofundado sobre princípios básicos e assim poder resolver questões para além da memorização de fórmulas e sim desenvolver um pensamento resolutivo sobre os problemas apresentados. Essa metodologia estimula o desenvolvimento do pensamento lógico matemático e a criação de estratégias resolutivas de forma individual ou coletiva.

É nítido perceber que a partir desses resultados apresentados e análise de dados, as oficinas de resolução de problemas obteve resultados positivos, pois conseguiram despertar o interesse pelo conhecimento matemático para além das aplicações de fórmulas prontas e promoveu o engajamento dos alunos entre si facilitando a aquisição de conhecimento já que nos diálogos discursivos em grupo sobre questões os alunos analisavam e elaboravam coletivamente uma solução, ao mesmo tempo que explorava entre si os saberes já conhecidos e impulsionando novos pela troca entre os alunos. A pesquisa aponta que a maioria dos alunos participantes desconheciam o PFC e possuíam uma visão minimalista sobre a resolução de problemas, por exemplo não conhecia a resolução de

questões por meio de solução escrita o que foi aprendido durante os encontros. Contudo, é necessário destacar que os resultados foram atingidos por meio de um desenvolvimento gradual nos níveis dos problemas apresentados para a turma e a diversificação da metodologia, pois o pesquisador buscava atividades que possibilitassem o engajamento e o melhor entendimento das questões apresentadas, sendo possível até apresentação de soluções inovadoras no quadro ao tempo que eles apresentavam e aprendiam uns com os outros.

Diante do exposto, a presente pesquisa realizada traz ganhos significativos demonstrados nos dados apresentados nesta seção e também na seção anterior, já que a sequência de problemas apresentados foram os mesmos trabalhados nas oficinas junto com o produto educacional, o que possibilita o desenvolvimento de diversas práticas metodológicas em sala de aula, assim, este trabalho apresenta uma sequência de atividades que poderão ser colocadas em prática para os futuros professores que terão acesso a este material. Outro ponto relevante da pesquisa refere-se a utilização dessa prática como ferramenta de engajamento e motivação para o desenvolvimento da aprendizagem já que os alunos conseguiram elaborar estratégias resolutivas, questionamentos e buscaram meios de encontrar as soluções das questões.

Como observado as questões são como as fases de um jogo já que elas começam fáceis e ao logo do caminho os níveis são aumentados, assim, cada conjunto de questões são como fases a serem superadas, ou seja, cada fase superada eleva o nível e conhecimento e obtém-se novos conhecimentos. Nesse contexto o professor apresenta-se como mediador do conhecimento, motivador e questionador permitindo que os alunos raciocinem sobre o que está sendo proposto, também sana algumas dúvidas e instiga a participação na tomada de decisões de qual caminho seguir para resolver a situação problema.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A presente dissertação, intitulada “Princípio Fundamental da Contagem: Uma experiência com o PIC-OBMEP”, culminou na criação do caderno de atividades (produto educacional) consultivas para os professores que poderão acessar via plataforma acadêmica ou no final desta dissertação. Espera-se que este trabalho impulse novas pesquisas relacionadas a potencialidade da prática pedagógica baseadas nos livros do PIC e nos bancos de questões da OBMEP.

Diante disso, destaca-se que a pesquisa conseguiu atingir o objetivo sobre a ótica do seguinte questionamento: Como as questões relacionadas ao Princípio Fundamental da Contagem estão apresentadas no livro PIC e sua aplicabilidade na OBMEP e quais estratégias o professor pode utilizar para ampliar a compreensão sobre a temática? No qual, evidenciou a contribuição da

**metodologia de resolução de problemas** relacionado ao PFC por meio do desenvolvimento das oficinas no contraturno e seus impactos na vivência escolar do alunado, já que, por meio das oficinas os alunos conseguiram vislumbrar novos horizontes por meio da apropriação do conhecimento matemático e as estratégias resolutivas.

Vale destacar que o objetivo geral desta pesquisa foi analisar a aplicabilidade no ensino de contagem por meio da resolução de problemas do livro Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) e questões da OBMEP no segmento do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental 2. Os resultados evidenciados durante as práticas metodológicas nas oficinas demonstraram que os alunos desenvolveram habilidades antes latentes, como a capacidade de registrar escritas resolutivas e o uso de estratégias interpretativas mais sofisticadas. Tais evidências foram exploradas ao longo deste trabalho e corroboradas por meio dos comparativos entre o desempenho inicial e a evolução observada na obtenção de medalhas e menções honrosas da OBMEP, após a realização das oficinas no contraturno.

Quanto aos objetivos específicos, a presente dissertação buscou discutir sobre as estratégias de ensino por meio da resolução de problemas relacionados a contagem; proporcionar ao aluno por meio da resolução de problemas a construção do seu próprio conhecimento; compreender o contexto interpretativo das questões apresentadas no livro/apostilha trabalhadas no programa PIC e os caminhos resolutivos; e criar uma sequência didática com a finalidade de consulta para os professores no futuro. Essa proposta sistematiza as práticas aplicadas nas oficinas com o intuito de promover uma apropriação profunda e autônoma do raciocínio combinatório, transcendendo a mera mensuração de resultados em premiações.

Nesse sentido, verificou-se que a sequência didática aplicada nas oficinas PIC- Coruripe contribuiu significativamente para o desenvolvimento da aprendizagem, conforme demonstrado nos dados explanados neste trabalho. Constatou-se que as oficinas atingiram o objetivo de desenvolver o pensamento lógico-matemático e ampliar as estratégias resolutivas de forma colaborativa onde a troca de experiências entre os pares fortaleceu o aprendizado. Além disso, as brincadeiras envolvendo matemática antes das aulas e a apresentação de soluções no quadro proporcionaram novas experiências pedagógicas, permitindo que os alunos relacionassem o conteúdo a situações-problemas reais e dominassem o PFC sem a necessidade de memorização de fórmulas prontas.

Destacamos que o caderno de atividades, Produto Técnico-Tecnológico (PTT) desta pesquisa, constitui-se como uma ferramenta consultiva de futuros professores que desejem ampliar o entendimento do alunado sobre o PFC, pois oferece roteiros estruturados que aliam a teoria à prática de sala de aula. Esse material não apenas sistematiza as questões da OBMEP e do PIC, mas também orienta o docente na aplicação da resolução de problemas, garantindo que o ensino de

combinatória seja acessível, dinâmico e focado no protagonismo do estudante. Nos aspectos pesquisas futuras, essa dissertação apresenta em seu corpo de análise de dados que as questões relacionadas ao PFC foram recorrentes nos documentos analisados, destacando-se que, em 2017 ano de início desta pesquisa foi observado que uma mesma questão de contagem foi cobrada nos 3 níveis da prova da 2ª fase da OBMEP evidenciando o tratamento da temática em diferentes níveis.

Nessa perspectiva, acreditamos que a pesquisada desenvolvida contribuiu na discussão relacionado ao ensino do PFC para além da memorização de fórmulas prontas, no qual observa-se que nas questões da OBMEP só com o entendimento do princípio, raciocínio lógico e engenhosidade os alunos conseguiram resolver a maioria dos problemas apresentados. Outros aspectos relacionam a recorrência de questões da OBMEP sobre a temática, está recorrência justifica a centralidade do tema da pesquisa reafirmando a relevância da sequência didática proposta como produto. Os resultados indicam que as oficinas focadas na resolução de problemas de contagem promoveram o desenvolvimento de competências cognitivas transversais. Tais habilidades refletiram-se positivamente no desempenho acadêmico geral dos alunos, evidenciando uma correlação direta com a melhoria de indicadores educacionais externos, como o IDEB da instituição. Em suma, esta dissertação demonstra que o ensino de combinatória, quando pautado na construção do conhecimento e na autonomia, é um caminho eficaz para elevar a qualidade da educação básica e fortalecer o raciocínio lógico-matemático dos alunos.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRAFICA

ARAÚJO, Larissa Sene et al. Análise combinatória: um estudo usando a história da matemática em sala de aula / Larissa Sene Araújo, Mônica de Cássia Siqueira Martines. – 1. ed. – **São Paulo: Livraria da Física**, 2021. – (Histórias da matemática em estudos e no ensino; 10)

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acessado em: 23 de Jan 2025.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Métodos de contagem e probabilidade, Rio de Janeiro, IMPA. 2017

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, Volume único/ 1ª ed. São Paulo: Ática, 2005.

DE SOUSA, Ariana Bezerra. A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática, 2005. Disponível em:

IMPA, regulamento da OBMEP, disponível em [www.obmep.org.br](http://www.obmep.org.br). Acessado em: 29 de março de 2025.

Lima, Elon Lages. A matemática do ensino médio volume 2. -6.ed.- Rio de Janeiro: SBM 2006.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. Análise combinatória e probabilidade. **Rio de Janeiro: Graftex**, 1991.

MOTA, Antonio Batista. Princípios de contagem e aplicação do princípio aditivo: o problema de contagem dos quadrados em uma quadrícula e o código qq. 2017.

PAIVA, M. Matemática. 1ed. São Paulo: Moderna, 2009.

ROQUE, Tatiana. De Carvalho, João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. – **Rio de Janeiro: SBM**, 2012. 467 p. (Coleção PROFMAT; 03)

SOARES, Maria Teresa Carneiro; PINTO, Neuza Bertoni. **Metodologia da resolução de problemas**. 24ª Reunião, 2001.

# APÊNDICES

## Apêndice A – Autorização da Escola



Prefeitura Municipal de Coruripe  
Secretaria Municipal de Educação  
**EMEB LIEGE GAMA ROCHA**



### DECLARAÇÃO

**CNPJ. 01.934.312/0001-35**

ATO AUTORIZATIVO N° 01/2007  
CME. PORT. 02/2007 GSM  
ESC. MUL. DE EDUC. BÁSICA  
LIEGE GAMA ROCHA  
RUA DR. IZAÍAS ARANDA, 558  
CENTRO - CEP: 57.230-000  
FONE: (82) 3273-1132  
CORURIFE - ALAGOAS

Declaramos para os devidos fins de direito que, JOSÉ ALBUQUERQUE MATOS NETO, brasileiro(a), solteiro(a), portador(a) do RG n.º 2002006046341 - SESP/AL e inscrito(a) no CPF sob n.º 013.999.604-40, ministrou aulas preparatórias de Matemática para a OBMEP no período de fevereiro de 2017 à junho de 2019, nesta Unidade de Ensino.

As informações são verdadeiras e dou fé.

Coruripe/AL, 15 de agosto de 2025

  
*Alexandrina Ferreira Gouveia*  
Gestora Escolar - Portaria n.º 14/2023

## Apêndice B – Certificado OBMEP na escola 2017

# CERTIFICADO



Certificamos que JOSÉ ALBUQUERQUE MATOS NETO participou com aproveitamento do programa de formação de professores  
 OBMEP na Escola realizado na cidade CORURUPE/AL no ano de 2017, com carga horária de 112 horas.

Rio de Janeiro, dezembro de 2017



**Claudio Landim**  
 Coordenador - Geral - OBMEP

**APOIO**





**REALIZAÇÃO**





Verifique a originalidade deste certificado no site <https://dmpnaescola.obmep.org.br/certificado/validar> - Código de Validação: 5WQD-DX78-9Q4G-SOBW





A metodologia do Programa OBMEP na Escola foi a do ensino de matemática por meio da resolução de problemas. Neste programa foram estudados conteúdos de aritmética, contagem e geometria além de problemas variados de olimpíadas de matemática. Os participantes deste programa de formação de professores estudaram os materiais disponibilizados e ministraram aulas para alunos convidados. A carga horária foi assim distribuída:

- Encontros com o coordenador para a formação do professor	28
- Estudo e preparação das aulas	28
- Aulas ministradas para alunos convidados	56

## Apêndice C – Certificado OBMEP na escola 2018

**CERTIFICADO**



Certificamos que **JOSÉ ALBUQUERQUE MATOS NETO** participou com aproveitamento do programa de formação de professores OBMEP na Escola realizado na cidade **CORURUPE/AL** no ano de 2018, com carga horária de 112 horas.

Rio de Janeiro, dezembro de 2018

  
**Claudio Landim**  
 Coordenador - Geral - OBMEP

REALIZAÇÃO

 **impa**

APOIO

 **Itaú Social**

 **CNPq**  
 Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

 **SBM**

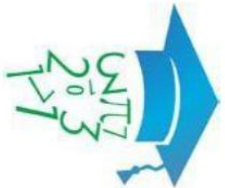
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO



Verifique a originalidade deste certificado no site <https://obmepnaescola.obmep.org.br/certificado/validar> - Código de Validação 2CL8V6Y1-TP9C-C888





A metodologia do Programa OBMEP na Escola foi a do ensino de matemática por meio da resolução de problemas. Neste programa foram estudados conteúdos de aritmética, contagem e geometria além de problemas variados de olimpíadas de matemática. Os participantes deste programa de formação de professores estudaram os materiais disponibilizados e ministraram aulas para alunos convidados. A carga horária foi assim distribuída:

- Encontros com o coordenador para a formação do professor	28
- Estudo e preparação das aulas	28
- Aulas ministradas para alunos convidados	56

**Apêndice D** – Declaração coordenador/ professor do POTI- 2018**DECLARAÇÃO**

Declaramos para os devidos fins que o (a) professor (a)

***José Albuquerque Matos Neto***

participou do POTI - Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo, coordenado pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, na qualidade de coordenador e professor do polo voluntário de Coruripe – Alagoas no ano de 2018.

Rio de Janeiro, 18 de novembro de 2019

Claudia Vasconcelos  
Coordenação de Programas de Extensão Acadêmica

## Apêndice E – Diploma de premiação OBMEP- 2017

# Diploma

**JOSE ALBUQUERQUE MATOS NETO**

NOSSA HOMENAGEM por sua contribuição à formação matemática de seus alunos e por seu desempenho na 13ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP 2017.

Rio de Janeiro, Dezembro de 2017.

*Claudio Landim*  
**Claudio Landim**  
 Coordenador Geral OBMEP

*Marcelo Viana*  
**Marcelo Viana**  
 Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

**13ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS OBMEP 2017**  
 Somando novos talentos para o Brasil

**APÓIO**

BIÊNIO DA MATEMÁTICA BRASIL 2016-2017

CAPEs

CNPq  
 Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

SBM

**REALIZAÇÃO**

Impa

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

BRASIL

## Apêndice F – Honra ao mérito Coruripe



**PRODUTO TÉCNICO-TECNOLÓGICO**  
**(PTT)**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA- IM  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL (PROFMAT)

JOSÉ ALBUQUERQUE MATOS NETO

**PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: Uma experiência com o PIC-  
OBMEP**

Maceió  
2026

JOSÉ ALBUQUERQUE MATOS NETO

**PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: UMA EXPERIÊNCIA COM O PIC-  
OBMEP**

Produto Técnico- Tecnológico (PTT) apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede (PROFMAT) da Universidade Federal de Alagoas (Ufal), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

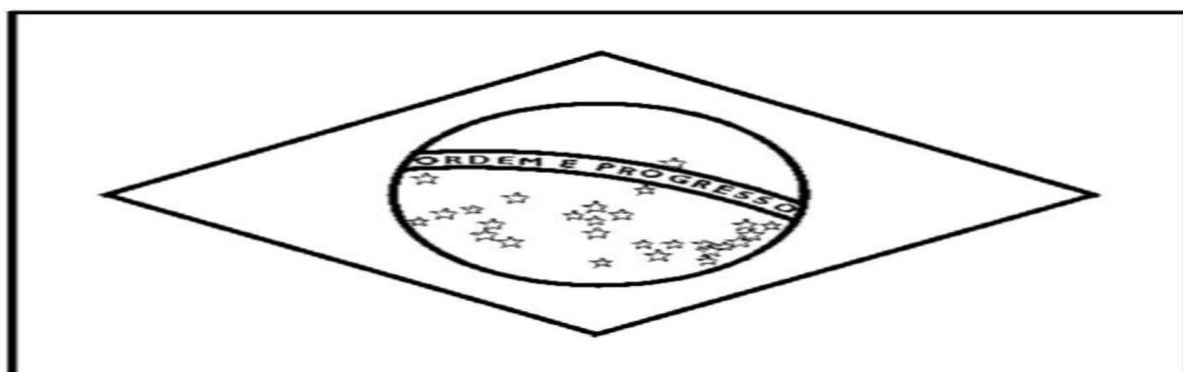
## APRESENTAÇÃO

Este produto técnico-tecnológico (PTT) é fruto da pesquisa desenvolvida durante as oficinas da PIC-CORURIFE no qual o pesquisador abordou a temática sobre os métodos de contagem no tratamento de diferentes situações problemas na sala de aula. Nesse sentido, apresentamos a seguir o material contendo as sequências didática utilizadas durante o período de aplicação da proposta. Assim, evidenciamos nesse material aos futuros leitores estratégias metodologia para o tratamento da temática e como impulsionar os alunos para atingir o conhecimento e conquistar diferentes méritos como por exemplo: hora ao mérito, medalhas e outros. Desejo a todos os leitores que desfrute da proposta elaborada e que consiga aplicar com êxito na sala de aula.

### PROPOSTA APLICADA AO ENSINO DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

A partir dos estudos desenvolvidos foi elaborada uma sequência didática de contagem tendo como referência o livro do PIC e as questões já cobradas na OBMEP, vale destacar que alguns dos exercícios da sequência foram elaborados pelo pesquisador para auxiliar professores nas aulas do PAESP (programa de apoio aos estudantes das escolas públicas do estado), quando foi bolsista do programa de 2012 a 2015, sendo aproveitados no PIC – CORURIFE. Demos sugestões de resoluções nas questões 1, 2 e 3. Focamos em questões de colorir regiões devido a grande quantidade de questões desse aspecto terem sido cobradas em provas anteriores da OBMEP.

- 1) A bandeira do Brasil é composta de três figuras geométricas: retângulo, losango e círculo, isso desconsiderando as estrelas e a parte em que está escrito: ordem e progresso. Observe a figura



- a) Com as cores azul, verde e amarela quantas bandeiras do Brasil de cores diferentes podemos formar? Considere que as estrelas e a parte em que está a expressão ordem e progresso seja pintada da cor branca e que as figuras não tenham a mesma cor em nenhuma hipótese.
- b) Se acrescentarmos a cor vermelha nas condições do item *a*, quantas bandeiras diferentes podemos formar?
- c) Se acrescentarmos mais seis cores nas condições do item *a*, quantas bandeiras diferentes poderemos formar?
- d) Quantas bandeiras do Brasil podemos formar com as cores verde, azul, amarelo, vermelho e rosa mantendo o retângulo pintado de verde e sem repetir as cores nas outras figuras? e se acrescentarmos a cor roxa? e se pudermos repetir qualquer uma das cores incluindo a cor roxa e deixando a cor verde fixa no retângulo, mas podendo repeti-la nas outras figuras? As estrelas e a expressão ordem e progresso não serão coloridas.
- e) Refaça os itens *a*, *b*, e *c* considerando que as cores do círculo e retângulo possam ser iguais.
- f) Usando as cores azul e amarela para colorir a bandeira, quantas bandeiras poderemos formar considerando que podemos repeti-las nas figuras. As estrelas e a expressão ordem e progresso não serão coloridas.
- g) Quantas bandeiras do Brasil podemos formar com as cores verde, azul e amarela, onde a única restrição é que a bandeira não possua uma cor só. As estrelas e a expressão ordem e progresso não serão coloridas.

**Respostas:**

- a) Como são 3 cores podemos listar todas as possibilidades. Observe a tabela abaixo:

Retângulo	Losango	Círculo
Verde	Azul	Amarela
Verde	Amarela	Azul
Amarela	Verde	Azul
Amarela	Azul	Verde
Azul	Amarela	Verde
Azul	Verde	Amarela

Portanto são seis possibilidades com essas 3 cores. Utilizando o princípio fundamental da contagem resolveríamos rapidamente: Começando a contagem pelo retângulo podemos pintá-lo com 3 cores, em seguida pintando o losango sobram duas cores, pois utilizamos uma

das cores no retângulo e não podemos repeti-la, para o círculo sobra uma cor, pois já utilizamos as outras duas no retângulo e no losango, além de não podermos repeti-las. Daí utilizando o PFC ficamos com  $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6$  bandeiras do Brasil. Para cada uma das 3 possibilidades no retângulo, temos 2 possibilidades no losango, daí  $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2 = 6$ . Para cada uma dessas 6 possibilidades temos uma possibilidade no círculo daí  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \cdot 1 = 6$  bandeiras do Brasil. Observe que nesse item podemos começar a contagem por qualquer figura, preferimos iniciar pelo retângulo.

- b) Agora temos 4 cores: verde, azul, amarelo e vermelho. Começando a contagem pelo retângulo temos 4 possibilidades de pintá-lo, em seguida pintando o Losango temos 3 possibilidades de pintá-lo (pois foi utilizada uma cor no retângulo e não podemos repeti-la), para o círculo temos 2 possibilidades de cores (pois as outras duas foram utilizadas no retângulo e losango e não podemos repeti-las). Logo a quantidade de bandeiras do Brasil com 4 cores diferentes é pelo PFC:  $\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} = 24$  bandeiras do Brasil. Para cada uma das 4 possibilidades no retângulo, temos 3 possibilidades no losango, daí  $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$ . Para cada uma dessas 12 possibilidades temos duas possibilidades no círculo daí:  $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12 \cdot 2 = 24$  bandeiras do Brasil. Observe que nesse item podemos começar a contagem de qualquer figura, preferimos começar do retângulo.
- c) Acrescentando mais 6 cores ficamos com um total de 9 cores. Temos: 9 possibilidades de cores para pintar o retângulo, 8 possibilidades de cores para pintar o losango e 7 possibilidades de cores para pintar o círculo, daí pelo PFC ficamos com:  $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$  bandeiras do Brasil.
- d) Temos no total 5 cores. Fixando a cor verde no retângulo ficamos com: uma possibilidade no retângulo, 4 possibilidades de cores no losango e 3 possibilidades de cores no círculo. Daí pelo PFC temos:  $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$  bandeiras do Brasil. Observação: Como não podemos mais utilizar a cor verde nas outras figuras ficamos com 4 cores para distribuí-las no losango e no círculo. Acrescentando a cor roxa ficamos com o total de 6 cores, mantendo o retângulo pintado de verde ficamos com: uma possibilidade de cor para pintar o retângulo, 5 possibilidades de cores para pintar o losango e 4 possibilidades de cores para pintar o círculo, daí pelo PFC temos  $1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$  bandeiras do Brasil. Observação: Como não podemos mais utilizar a cor verde nas outras figuras ficamos com 5 cores para pintar o losango e o círculo.

Considerando as cores verde, azul, amarelo, vermelho, rosa e roxa, fixando a cor verde no retângulo e podendo repetir as cores no losango e círculo (incluindo a cor verde), ficamos com: uma possibilidade de cor para pintar o retângulo, 6 possibilidades de cores para pintar o losango (podemos repetir a cor verde), 6 possibilidades de cores para pintar o círculo (podemos repetir qualquer uma das cores), daí pelo PFC temos:  $1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$  bandeiras do Brasil.

- e) Refazendo o item a considerando que as cores do retângulo e do círculo possam ser iguais e começando a contagem do retângulo ficamos com: 3 possibilidades de cores para pintar o retângulo, 2 possibilidades de cores para pintar o losango (tem que ser diferente da cor pintada no retângulo) e 2 possibilidades de cores para pintar o círculo (tem que ser diferente da cor pintada no losango, mas pode ser igual a cor pintada no retângulo). daí pelo PFC temos  $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$  bandeiras do Brasil.

Refazendo o item b considerando que as cores do retângulo e do círculo possam ser iguais e começando a contagem pelo retângulo ficamos com: 4 possibilidades de cores para pintar o retângulo, 3 possibilidades de cores para pintar o losango (tem que ser diferente da cor pintada no retângulo) e 3 possibilidades de cores para pintar o círculo (tem que ser diferente da cor pintada no losango, mas pode ser igual a cor pintada no retângulo). Daí pelo PFC temos  $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$  bandeiras do Brasil.

Refazendo o item c considerando que as cores do retângulo e do círculo possam ser iguais e começando a contagem pelo retângulo ficamos com: 9 possibilidades de cores para pintar o retângulo, 8 possibilidades de cores para pintar o losango (tem que ser diferente da cor pintada no retângulo) e 8 possibilidades de cores para pintar o círculo (tem que ser diferente da cor pintada no losango, mas pode ser igual a cor pintada no retângulo). Daí pelo PFC temos  $9 \cdot 8 \cdot 8 = 576$  bandeiras do Brasil.

- f) Começando a contagem do retângulo ficamos com: 2 possibilidades de cores para pintar o retângulo, 2 possibilidades de cores para pintar o losango (pode ser igual a do retângulo) e 2 possibilidades de cores para pintar o círculo (pode ser igual a cor pintada no retângulo e a cor pintada no círculo), daí pelo PFC temos:  $\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 2^3 = 8$  Bandeiras.
- g) Como a única restrição é que a bandeira não possua uma cor só, podemos repetir as cores nos demais casos. O problema é resolvido mais rapidamente utilizando o raciocínio destrutivo, ou seja, vamos calcular todas as possibilidades de colorir a bandeira e depois subtrair dessa quantidade as bandeiras que tenham uma única cor. Começando a contagem pelo retângulo ficamos com: 3 possibilidades de cores para pintar o retângulo, 3 possibilidades de cores para pintar losango (podemos repetir a cor pintada no retângulo) e 3 possibilidades de cores para pintar o círculo (podemos repetir as cores pintadas no retângulo e no círculo), daí pelo PFC temos:  $\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 3^3 = 27$  Bandeiras. No resultado anterior também foram contados os casos em que a bandeira foi pintada com uma única cor. Os casos em que a bandeira foi pintada com uma única cor são 3: (Azul, Azul, Azul), (Verde, Verde, Verde), (Amarelo, Amarelo, Amarelo), logo a quantidade de bandeiras é  $27 - 3 = 24$ .

- 2) Você está em seu quarto e observa que precisa pintá-lo. Na sua casa você dispõe de 8 tintas de cores diferentes (azul, verde, amarelo, laranja, roxa, preta, marrom, e rosa) para pintar as quatro paredes do mesmo. Responda as questões abaixo:
- De quantas maneiras diferentes podemos pintar o quarto sem repetir as cores?
  - De quantas maneiras diferentes podemos pintar o quarto com a mesma cor?
  - De quantas maneiras diferentes podemos pintar o quarto podendo repetir as cores, mas não pintando o quarto de uma cor só.
  - De quantas maneiras diferentes podemos pintar o quarto deixando uma parede pintada de rosa e outra de azul, sem repetidas cores? e se pudermos repetir as cores? e se pudermos repetir as cores exceto a cor rosa e a cor azul?
  - De quantas maneiras diferentes podemos pintar o quarto de modo que a primeira parede possa ser pintada somente de verde ou rosa sem repetir as cores? E se pudermos repetir as cores?

**Respostas:**

- Escolhendo uma parede como referência e começando por ela ficamos com: 8 possibilidades de pintar primeira parede, 7 possibilidades de pintar a segunda parede(a cor tem que ser diferente da pintada na primeira parede), 6 possibilidades de pintar a terceira parede(a cor tem que ser diferente da pintada na primeira e segunda parede), 5 possibilidades de pintar a quarta parede(a cor tem que ser diferente da primeira, segunda e terceira parede) daí pelo PFC temos:  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$  maneiras de pintar o quarto.
- Como temos 8 cores, existem 8 possibilidades de pintar o quarto da mesma cor, por exemplo, todo de azul.
- Como a única restrição é não pintar o quarto de uma cor só, podemos repetir as cores nos demais casos. Vamos utilizar o raciocínio destrutivo para resolver mais rapidamente o problema, ou seja, vamos calcular todas as possibilidades de pintar o quarto e depois subtrair dessa quantidade os casos em que o quarto foi pintado de uma única cor. Temos 8 possibilidades de pintar a primeira parede, 8 possibilidades de pintar a segunda parede (podemos pintá-la da mesma cor da primeira parede), 8 possibilidades de pintar a terceira parede (podemos pintá-la da mesma cor da primeira e segunda parede), 8 possibilidades de pintar a quarta parede(podemos pintá-la da mesma cor da primeira, segunda e terceira parede), daí pelo PFC temos:  $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 = 4096$  possibilidades de pintar o quarto podendo repetir as cores. Como resolvido no item anterior temos 8 possibilidades de pintar o quarto de uma única cor, logo o total de maneiras de pintar o quarto sem pintá-lo de uma única cor é de  $4096 - 8 = 4088$ .

- d) Temos no total 4 paredes. Vamos ordenar as paredes: primeira parede, segunda parede, terceira parede e quarta parede. Devemos ter uma parede pintada de rosa e outra de azul. Considerando a primeira e a segunda paredes, temos duas possibilidades de pintá-las de rosa e azul: a primeira parede de azul e a segunda de rosa, a segunda de rosa e a primeira de azul, para cada uma dessas possibilidades temos 6 possibilidades de pintar a terceira parede (não podemos repetir as cores pintadas na primeira e segunda paredes) e 5 possibilidades de pintar a quarta parede (não podemos repetir as cores pintadas na primeira, segunda e terceira paredes), daí pelo PFC temos  $2 \times 6 \times 5 = 60$ . Observe que o resultado encontrado é considerando a primeira e segunda paredes pintadas de azul e rosa, temos outros casos a considerar: primeira e terceira paredes pintadas de azul e rosa, primeira e quarta paredes pintadas de azul e rosa, segunda e terceira paredes pintadas de azul e rosa, segunda e quarta paredes pintadas de azul e rosa e terceira e quarta paredes pintadas de azul e rosa, ou seja, temos mais 5 casos a considerar, sendo cada um deles com a mesma quantidade de possibilidades:  $2 \times 6 \times 5 = 60$ . Pelo PFC e pelo princípio aditivo temos um total de  $2 \times 6 \times 5 + 2 \times 6 \times 5 + 2 \times 6 \times 5 + 2 \times 6 \times 5 + 2 \times 6 \times 5 + 2 \times 6 \times 5 = 6 \times 2 \times 6 \times 5 = 6 \times 60 = 360$  maneiras de pintar o quarto com uma parede pintada de azul e outra pintada de rosa, sem repetir as cores. Se pudermos repetir as cores teremos pelo PFC e pelo princípio aditivo:  $2 \times 8 \times 8 \times 8 + 2 \times 8 \times 8 \times 8 + 2 \times 8 \times 8 \times 8 + 2 \times 8 \times 8 \times 8 + 2 \times 8 \times 8 \times 8 + 2 \times 8 \times 8 \times 8 = 6 \times 2 \times 8 \times 8 \times 8 = 6 \times 1024 = 6144$  maneiras de pintar o quarto com uma parede pintada de azul e outra pintada de rosa, podendo repetir as cores. Se pudermos repetir as cores exceto as cores azul e rosa teremos pelo PFC e pelo princípio aditivo:  $2 \times 6 \times 6 \times 6 + 2 \times 6 \times 6 \times 6 + 2 \times 6 \times 6 \times 6 + 2 \times 6 \times 6 \times 6 + 2 \times 6 \times 6 \times 6 + 2 \times 6 \times 6 \times 6 = 6 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6 = 2592$  maneiras de pintar o quarto.
- e) Como a primeira parede só pode ser pintada de verde ou rosa e não podemos repetir as cores, temos duas possibilidades de pintá-la, para a segunda parede temos 7 possibilidades de pintá-la (tem que ser diferente da cor pintada na primeira parede), 6 possibilidades de pintar a terceira parede (tem que ser diferente das cores pintadas na primeira e segunda paredes), 5 possibilidades de pintar a quarta parede (tem que ser diferente das cores pintadas na primeira, segunda e terceira paredes), daí pelo PFC temos  $2 \times 7 \times 6 \times 5 = 420$  maneiras de pintar o quarto com a primeira parede pintada de verde ou rosa e não repetindo as cores. Se pudermos repetir as cores teremos pelo PFC  $2 \times 8 \times 8 \times 8 = 1024$  maneiras de pintar o quarto.
- 3) É época de festa e o estacionamento do shopping está lotado restando apenas 4 vagas. Quatro carros de modelos diferentes se aproximam para disputar as vagas. Quantas maneiras diferentes esses carros podem ser estacionados nessas vagas? E se forem cinco vagas? se forem três vagas? se forem duas vagas?

**Respostas:**

Vamos ordenar as vagas: primeira vaga, segunda vaga, terceira vaga e quarta vaga. Temos 4 possibilidades de estacionar os carros na primeira vaga, estacionando um carro na primeira vaga temos 3 possibilidades de estacionar os carros na segunda vaga, estacionando um carro na primeira vaga e um carro na segunda vaga temos 2 possibilidades de estacionar os carros na terceira vaga, estacionando um carro em cada uma das vagas anteriores temos uma possibilidade de estacionar os carros na quarta vaga, daí pelo PFC temos  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  maneiras diferentes de estacionar os quatro carros nas quatro vagas. Se forem cinco vagas teremos uma vaga que ficará vazia na nossa contagem. Precisamos dividir o problema em 5 casos: A primeira vaga vazia e as demais ocupadas, a segunda vaga vazia e as demais ocupadas, a terceira vaga vazia e as demais ocupadas, a quarta vaga vazia e as demais ocupadas e a quinta vaga vazia e as demais ocupadas. Para cada um desses casos temos pelo PFC:  $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  maneiras de estacionar os carros, pelo princípio aditivo ficamos com:  $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 24 = 120$  maneiras de estacionar os 4 carros nas 5 vagas, outra maneira de resolver é distribuir as vagas para cada carro, existem 5 maneiras de estacionar o primeiro carro, 4 maneiras de estacionar o segundo carro, 3 maneiras de estacionar o terceiro carro e 2 maneiras de estacionar o quarto carro, daí pelo PFC temos  $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ . Se forem 3 vagas teremos um carro que não poderemos estacionar em cada uma das possibilidades, temos 4 possibilidades de estacionar os carros na primeira vaga, estacionando um carro na primeira vaga temos 3 possibilidades de estacionar os carros na segunda vaga, estacionando os carros na primeira e segunda vagas temos 2 possibilidades de estacionar os carros na terceira vaga, daí pelo PFC temos  $4 \times 3 \times 2 = 24$  maneiras de estacionar 4 carros nas 3 vagas. Se forem 2 vagas teremos dois carros que não poderemos estacionar em cada uma das possibilidades. Temos 4 possibilidades de estacionar os carros na primeira vaga, estacionando um carro na primeira vaga temos 3 possibilidades de estacionar os carros na segunda vaga, logo pelo PFC temos  $4 \times 3 = 12$  maneiras de estacionar 4 carros nas duas vagas. Observe que mesmo nos casos em que o número de carros é maior que o número de vagas podemos usar o PFC.

- 4) Responda as alternativas abaixo
- a) Quantos são os números naturais de dois algarismos distintos? E se os algarismos puderem ser iguais?
  - b) Quantos são os números naturais de três algarismos distintos? E se os algarismos puderem ser iguais?

- c) Quantos são os números naturais de quatro algarismos distintos? E se os algarismos puderem ser iguais?
  - d) Quantos são os números naturais pares de dois algarismos distintos? E se os algarismos puderem ser iguais?
  - e) Quantos são os números naturais pares de três algarismos distintos? E se os algarismos puderem ser iguais?
  - f) Quantos são os números naturais pares de quatro algarismos distintos? E se os algarismos puderem ser iguais?
  - g) Quantos são os números naturais ímpares de dois algarismos distintos? E se os algarismos puderem ser iguais?
  - h) Quantos são os números naturais ímpares de três algarismos distintos? E se os algarismos puderem ser iguais?
  - i) Quantos são os números naturais ímpares de quatro algarismos distintos? E se os algarismos puderem ser iguais?
- 5) Em uma loja temos 8 lâmpadas que podem ficar acesas ou apagadas. De quantas maneiras podemos ter pelo menos uma lâmpada acesa?
- 6) Sete pessoas estão aguardando para receber autógrafa. De quantas maneiras diferentes podemos colocá-las em fila?
- 7) Uma sala de aula possui 30 alunos, todos bons em matemática, O professor de matemática precisa escolher Três alunos para representar a turma em uma olimpíada promovida pela escola. De quantas maneiras o professor pode escolher esses alunos?
- 8) Em um restaurante temos 3 opções de escolha para uma refeição: 1º opção (salada, arroz, macarrão), 2º opção (frango, carne, peixe) e 3º opção(panqueca, lasanha, feijão). Sabendo que só podemos fazer uma escolha em cada opção responda os itens abaixo.
- a) De quantos modos se pode fazer uma refeição nesse restaurante?
  - b) Supondo que na primeira opção uma pessoa só possa comer salada e nas outras opções possa comer de tudo, de quantas maneiras essa pessoa pode escolher a sua refeição?
  - c) Supondo que na primeira opção uma pessoa só possa comer salada ou arroz e nas outras possa comer de tudo, de quantas maneiras essa pessoa pode escolher a sua refeição?
  - d) Supondo que na primeira opção uma pessoa só pode comer salada, na segunda opção só frango e na terceira opção ela possa comer de tudo, de quantas maneiras essa pessoa pode fazer uma refeição nesse restaurante?
- 9) Ciço e Josivaldo estão brincando de lançar dois dados não viciados para ver quantas combinações de resultados existem, Garibalde estudante de Matemática descobre rapidamente

quantas combinações existem e ainda por diversão encontrou o total de somas que eles podem obter.

- a) Qual o número de combinações de resultados encontrados por Garibalde?
  - b) Quantas são as possíveis somas encontradas por Garibalde?
- 10) Em uma escola é dia de Teste. Cada disciplina possui 10 questões de múltipla escolha com 5 alternativas cada.
- a) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão?
  - b) Em quantos destes gabaritos a letra A aparece exatamente uma vez?
  - c) Em quantos a letra A não aparece?
  - d) Se tivermos  $n$  questões de múltipla escolha com 5 alternativas cada, quantos serão os gabaritos possíveis? E se forem  $m$  alternativas?
- 11) De quantos modos 4 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?
- 12) Em um aeroporto existem 5 bancos de 2 lugares. Um grupo de 10 pessoas, sendo 5 homens e 5 mulheres, vai sentar-se nesses bancos.
- a) Supondo que nesse grupo as pessoas sejam casadas, tendo assim 5 casais, e que os mesmos não possam se separar, ou seja, devem sentar-se no mesmo banco e formar um único casal, além disso o mais velho do casal só pode sentar-se a direita do mais novo, de quantos modos esses casais podem sentar-se nos bancos?
  - b) Supondo que nesse grupo as pessoas sejam casadas, tendo assim 5 casais, e que eles não possam se separar, ou seja, devem sentar-se no mesmo banco e formar um único casal, de quantos modos esses casais podem sentar-se nos bancos?
  - c) De quantos modos esses 5 homens e 5 mulheres podem sentar-se nos bancos, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?
- 13) De quantas maneiras podemos formar uma sequência de quatro dígitos em que pelo menos um dígito é ímpar.
- 14) Uma sala tem 6 mulheres e 8 homens.
- a) De quantas maneiras podemos escolher uma pessoa?
  - b) De quantas maneiras podemos escolher um casal formado por homem e mulher?
  - c) De quantas maneiras podemos escolher uma dupla independente do sexo?
- 15) Em uma escola temos 14 crianças por turma. Na hora da alimentação as crianças são colocadas em 2 filas com cada fila possuindo 7 crianças, de quantas maneiras podemos formar essas filas considerando uma turma de cada vez?

- 16) Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los em um mesmo número) podemos formar com os algarismos 1 , 3 e 5?
- 17) Para realização de uma propaganda de TV uma família de 6 pessoas precisa ser alocada em um banco de 6 lugares, suponha que o casal Paula e Henrique façam parte desse grupo e não possam ficar separados, ou seja, um deve ficar ao lado do outro. De quantas maneiras essas pessoas podem sentar-se nesses bancos?
- 18) Em uma empresa temos 40 candidatos para assumir a direção da empresa. Sabendo que a diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretoria?
- 19) Em um torneio de artes marciais existem 30 participantes. Serão premiados os 3 primeiros lugares. O primeiro lugar receberá R\$ 100.000,00 o segundo lugar receberá R\$ 50.000, 00 e o terceiro lugar receberá R\$ 25.000,00. De quantas maneiras diferentes os três primeiros lugares podem ser ocupados, sabendo que uma pessoa pode ocupar apenas um desses lugares.
- 20) Um técnico de um time de futebol já escolheu jogadores para nove posições da equipe, restando apenas uma posição de atacante e outra de meio campo, sobraram 15 jogadores para ocupar essas vagas, de quantas maneiras o técnico pode escolher os jogadores para essas posições?
- 21) De quantas maneiras diferentes quatro alunos podem sentar-se em uma sala de aula que tem 30 carteiras?