UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS - UEA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROPESP
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Ramon Farias Coelho

Uma proposta para o ensino de Corpos Redondos.

Manaus

2025

Ramon Farias Coelho

Uma proposta para o ensino de Corpos Redondos.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT oferecido pela Universidade do Estado do Amazonas - UEA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Profª. Drª. Silvia Cristina Belo e Silva

Manaus - AM

2025

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROPESP
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Ata de defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade do Estado do Amazonas, no município de Manaus - AM, do discente **Ramon Farias Coelho,** matrícula nº **2391940010.**

Em 29 de agosto de 2025, às 8h30, no Laboratório Math4Grenn, localizada na Escola Normal Superior, no município de Manaus - AM, na presença da Banca Examinadora composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. Sílvia Cristina Belo e Silva, Profa. Dra. Neide Ferreira Alves e Prof. Dr. Naamã Galdino da Silva Neris, realizou-se a sessão pública de defesa de Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Amazonas - UEA, do discente **Ramon Farias Coelho**, o discente apresentou sua dissertação intitulada: **"Uma Proposta para o Ensino de Corpos Redondos".**

A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do trabalho apresentado, divulgando o resultado ao discente e aos demais presentes.

Manaus, 29 de agosto de 2025

Silvia Cristina Belo e Silva

Orientador

Neide Ferreira Alves

Membro Interno da Banca Avaliadora

Membro Externo da Banca Avaliadora

Ramon Farias Coelho

Mestrando

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

C672p Coelho, Ramon Farias
Uma proposta para o ensino de Corpos Redondos / Ramon Farias Coelho . Manaus : [s.n], 2025.
77 f.: color.; 21,0 cm.

Dissertação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2025.
Inclui Bibliografia.
Inclui Apêndice.
Inclui Anexo.
Orientador: Silvia Cristina Belo e Silva.

1. Corpos Redondos. 2. Softwares Educacionais. 3. Modelagem Matemática. 4. Políticas Públicas. 5. Educação. I. Silvia Cristina Belo e Silva (Orient.) II. Universidade do Estado do Amazonas. III. Título

CDU(1997)51(043.3)

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos são, primeiramente a Deus por ter me dado o dom da vida, pelas bençãos e por me acompanhar, proteger e me guiar por todas as jornadas que me proponho a seguir, em especial, esta que acabo de concluir.

Agradeço a meus pais Maria do Socorro Farias Coelho e Evaldo de Castro Coelho, e meus irmãos Tássia Caroline Farias e Renan Farias Coelho, pois cada fragmento de conhecimento relacionado à vida deriva em grande parte de vocês. Sou grato pelo apoio em todas as minhas batalhas, por me aturarem nos momentos turbulentos e por tudo que me ensinaram e passaram comigo em todos esses anos até chegar ao título atual de Mestre.

Meu muito obrigado a minha noiva e futura esposa Roberta Muniz Teixeira, por estar sempre me apoiando, incentivando e por me entender nos períodos de estresse por quaisquer motivos que fossem, e principalmente por aguardar um pouco mais para que pudéssemos aumentar a nossa família e nos permitir viver juntos esse agosto de 2025. Nesse mês, minha noiva se tornou Cirurgiã Dentista, está gerando nosso primogênito e finalizando o mês, me tornei Mestre em Matemática.

Estendo meus agradecimentos aos meus amigos pessoais por deixarem os meus dias mais engraçados com uma conversa descontraída, uma troca de vídeos engraçados nas redes sociais e por todos os encontros para um futebol ou para tomar uma cervejinha.

Agradeço também aos meus colegas de trabalho, em especial aos professores do primeiro piso, por terem me acolhido, pela parceria, por tornarem meus dias de trabalho mais alegres e por estarem sempre transmitindo dicas e métodos que moldaram o professor que sou hoje.

Transmito meus agradecimentos a Universidade do Estado do Amazonas – UEA, a Sociedade Brasileira de Matemática – SBM e a todos os professores do Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT, que tiveram muito êxito em me relembrar a importância de um ensino diferenciado e aprofundado dos conceitos matemáticos no Ensino Básico, pensamento esse que perdi a partir da carga de trabalho que precisamos aceitar por falta de valorização da classe dos professores.

Agradeço a minha orientadora Profª. Drª. Silvia Cristina Belo e Silva, por acreditar no meu projeto desde o início, pela dedicação nas orientações e correções da dissertação e, pela paciência que teve quando eu não consegui cumprir com algum prazo de entrega dos capítulos por algum motivo relacionado ao trabalho.

Finalizando, não posso esquecer de agradecer a turma 23 do PROFMAT pela parceria e união que tivemos nesses dois anos e meio de dedicação ao curso, em especial aos colegas Breno e Ivan que tiverem fundamental participação em minha qualificação no programa, com as inúmeras videoconferências que fizemos nos preparando para o ENQ.

A todos vocês, muito obrigado! Deus abençoe grandiosamente a cada um de vocês.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma proposta voltada ao processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de corpos redondos na Educação Básica, desenvolvida em uma escola da rede estadual no estado do Amazonas. O objetivo central é a elaboração de sequências didáticas que possibilitem aos estudantes a visualização dos elementos teóricos dos corpos redondos em relação às suas correspondências físicas, de modo a promover uma aprendizagem significativa. A pesquisa, de natureza qualitativa, busca interpretar as interações e estratégias adotadas pelos alunos ao longo desse processo. Para isso, foram empregados procedimentos metodológicos que favorecem a compreensão, a exploração e a aplicação dos conceitos relacionados aos sólidos de revolução, destacando-se a utilização da modelagem matemática e de tecnologias educacionais como ferramentas pedagógicas.

Palavras-chave: Corpos Redondos; Softwares Educacionais; Modelagem Matemática; Educação; Políticas Públicas.

ABSTRACT

This dissertation presents a proposal focused on the teaching and learning process of round solids content in Basic Education, developed in a public school within the state education system of Amazonas. The central objective is the development of didactic sequences that enable students to visualize the theoretical elements of round solids in relation to their physical counterparts, in order to promote meaningful learning. This qualitative research seeks to interpret the interactions and strategies adopted by students throughout this process. To achieve this, methodological procedures were employed that support the understanding, exploration, and application of concepts related to solids of revolution, with emphasis on the use of mathematical modeling and educational technologies as pedagogical tools.

Keywords: Round Solids; Educational Software; Mathematical Modeling; Education; Public Policy.

LISTA DE IMAGENS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Para falarmos de cone, cilindro e esfera que são conhecidos também como corpos redondos ou sólidos de revolução, precisamos falar um pouco sobre como os estudos das propriedades do círculo vieram se desenvolvendo com o passar dos anos, componente esse que é peça importante na estrutura das figuras geométricas em questão. Atualmente consideramos o raio (r) e a constante pí (π) em cálculos de perímetro, área e volume do círculo e, somos levados a pensar nos métodos que os antigos oriundos de diversas civilizações utilizavam nas construções de colunas, cúpulas, fontes entre outras estruturas que se assemelham aos corpos redondos, e nos tempos atuais, podemos observar peças de argila contendo as primeiras tentativas de disseminação do conhecimento.

Já é sabido que os povos antigos continham soluções muito criativas para problemas do cotidiano da época, entretanto, com o desenvolvimento das civilizações, e a precisão de contagem de objetos em quantidades maiores, houve a necessidade de fazer marcações de alguma forma para que informações não fossem perdidas. A partir disso, foram descobertas muitas pedras, tábulas e papiros que datam de muitos anos antes de Cristo que trazem em suas marcações simbólicas, conhecimento que podemos considerar avançados uma vez que seus recursos disponíveis eram poucos.

Segundo Eves (2011), os babilônios em cerca de 2000 a.C. possuíam uma noção boa sobre o cálculo de área do círculo, que comparadas as fórmulas atuais. basicamente utilizavam $\pi = 3$, no entanto, houve descobertas recentes de artefatos que comprovam a utilização de $\pi = 3\frac{1}{8}$, fato esse que nos mostra que os babilônios continuaram seus estudos em torno do círculo para que seus cálculos se tornassem cada vez mais precisos, porém, desenvolviam os cálculos de tronco de cones de forma equivocada.

Acerca dos conhecimentos de Boyer (2012), os egípcios possuíam uma regra que, inicialmente, buscava comparar áreas de quadrados para obter valores aproximados da área do círculo, forma essa que se assemelhava a dos pesquisadores da Mesopotâmia. Mesmo que não exista comprovações de que eles estavam em busca de uma constante de alta relevância, continuaram desenvolvendo suas ideias buscando se aproximar o máximo possível de um valor adequado para a área do círculo.

Por volta de 800 a.C. à 400 a.C., houve muitos desentendimentos políticos, situações críticas referente a superpopulações nas cidades e, por outro lado, os alimentos não eram suficientes. Contudo, um período repleto de guerras, abarca também contribuições intelectuais formidáveis que são consultadas e utilizadas até os dias atuais.

> Nas *ágoras* de Atenas e outras cidades-Estado, os filósofos ensinaram seus discípulos e lançaram novas ideias. Foi nessa época que se escreveram histórias reais pela primeira vez: a descrição otimista das gloriosas vitórias gregas sobre os invasores persas feita por Heródoto (484?-424? a.C.) e o relato angustiado da luta fratricida entre Esparta e Atenas feito por Tucídides (460?-400? a.C.). Foi também nesse período que se assistiu pela primeira vez ao emprego do raciocínio dedutivo em matemática — o que se deve a Tales de Mileto (640?-564? a.C.) e Pitágoras (586?-500? a.C.) —, que Hipócrates de Quio (a quem se deve o famoso juramento medico hipocrático) lançou os fundamentos da medicina moderna e que a lógica foi sistematizada num tratamento de Aristóteles. EVES (2011, pág. 93)

Além desses fatos, segundo Boyer (2012), após a queda de Alexandre, houveram algumas disputas por poder que acabaram nas mãos dos Ptolomeus, que eram grandes governantes macedônios. Nessa época, Alexandria passou a ter universidades e a famosa biblioteca de Alexandria com um financiamento pesado de Ptolomeu II, sendo assim o maior centro de erudição por gerações. No decorrer dos anos foram surgindo muitos matemáticos influentes que apresentavam trabalhos notáveis, porém, nenhum deles supera a obra de Euclides, que desde a Antiguidade, já estudava a geometria dentre outras áreas da matemática. O círculo e suas propriedades também faziam parte desse trabalho, onde ele estabelece conceitos básicos sobre áreas e perímetros. Os conteúdos geométricos desenvolvidos por Euclides estão disposto em 6 dos 13 livros de sua coleção denominada *Elementos*.

Archimedes foi outro matemático que conforme Boyer (2012), desenvolveu um métodos para calcular a área do círculo e o volume de sólidos baseados em círculos, como o cone, o cilindro, a esfera e as esferoides. Esse método partia da ideia de inscrever um hexágono em um círculo e, a partir daí, dobrar sucessivamente a quantidade de lados desse polígono, analisando o comportamento dos seus perímetros. Com esse método, Archimedes chegou em uma aproximação para a constante π $(3\,10/71 < \pi < 3\,10/70)$. Essas e outras propriedades, problemas e conceitos envolvidos nessas figuras espaciais então dispostas em 2 dos seus trabalhos, que com o tempo foram refinados e ampliados por matemáticos de diferentes culturas e épocas.

Durante a Idade Média e o Renascimento, o estudo do círculo e suas aplicações em sólidos geométricos continuou a evoluir, com matemáticos como François Viète que deu início ao uso das notações algébricas para descrever π. James Gregory e Gottfried Wilhelm Leibniz contribuíram com séries infinitas para calcular π, estes entre outros matemáticos da idade moderna só acrescentaram novas perspectivas sobre a relação entre a geometria e o cálculo.

Hoje, a geometria dos sólidos de revolução, que inclui o cone, o cilindro e a esfera, é bem compreendida graças ao desenvolvimento do cálculo e da geometria analítica. Esses corpos redondos são estudados em termos de suas propriedades matemáticas, como volume, área da superfície e suas relações com o círculo. Compreender as propriedades do círculo nos ajuda a calcular e analisar esses sólidos de maneira precisa, revelando a importância fundamental do círculo na matemática e na geometria.

Com isso, após verificada certa defasagem na aprendizagem desses conteúdos na Educação Básica, surgiu a ideia de compilar métodos de ensino bem sucedidos como a modelagem matemática, o uso de tecnologias digitais, a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e, também trazendo um pouco da Etnomatemática de Ubiratan D’Ambrósio que inclui conceitos de *Educação Matemática Crítica*, que em suas análises considera a matemática como um fenômeno histórico e cultural.

CAPÍTULO 1 – Referencial Teórico.

Para o ensino e aprendizagem dos corpos redondos, é importante adotar procedimentos metodológicos que estimulem a compreensão, a exploração e a aplicação dos conceitos relacionados a esses sólidos. A modelagem matemática através de materiais que permitam um certo manuseio para a construção dos mesmos, e o uso de tecnologias por meio de aplicativos podem ser ótimas opções para estabelecermos essas manipulações tanto virtual quanto práticas desses sólidos, e isto é o que pretendemos propor.

Um dos principais pesquisadores em torno da modelagem matemática, Burak (1992), se questionava sobre o porquê das crianças conseguirem muitas vezes resolver problemas com certo grau de complexidade na vida cotidiana e por outro lado, apresentarem muita dificuldade em solucionar problemas dentro da sala de aula, sendo que as duas situações cobravam o mesmo conhecimento matemático.

Segundo Margarita Matos (1996), em virtude do professor ser o pilar principal do processo de ensino e aprendizagem, ainda que se faça necessário uma capacitação mais aprofundada sobre os conhecimentos teóricos e aplicados, também é importante o conhecimento cultural e social, permitindo que a relação entre teoria e prática assim como a investigação e a ação seja feita considerando os aspectos cotidianos dos estudantes.

Esses procedimentos podem ajudar a criar um ambiente de aprendizado dinâmico e engajador, onde os alunos não só entendem, mas também apreciam a relevância dos corpos redondos em suas vidas cotidianas. A exploração e prática da modelagem, especialmente em contextos educacionais, envolvem a criação de representações físicas ou digitais de conceitos abstratos, como os dos corpos redondos. Esse processo permite que os alunos desenvolvam uma compreensão mais profunda das propriedades geométricas através da manipulação direta.

E. para que isso aconteça, se faz necessário a criação de um ambiente que atraia a atenção dos estudantes, e Burak (1992) define dois princípios básicos para o aproveitamento máximo do processo ensino e aprendizagem que são “o interesse de um grupo de pessoas envolvidas” e “obter os dados no ambiente que se localiza o interesse grupo”. A partir dessa linha de pensamento, podemos dizer a exploração dos aspectos culturais e sociais junto a prática da modelagem matemática são fundamentais para o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, pois permitem que os alunos conectem conceitos teóricos a situações reais.

A modelagem matemática envolve a criação de representações matemáticas para resolver problemas do mundo cotidiano, estimulando o raciocínio lógico e a criatividade, porém, na concepção de Bassanezi (2014), não podemos priorizar o molde dos objetos em si, precisamos sim nos atentar ao que o modelador extrai do processo, como as relações feitas entre o conteúdo (teoria) e o molde (prática), o pensamento criativo desenvolvido no processo e o pensamento crítico que irá lhe permitir investigar a situação problema de uma outra perspectiva, possibilitando uma aprendizagem mais estruturada.

Por ser um processo que busca transformar um problema real em uma representação matemática, utilizando variáveis, equações e funções, o método de modelagem matemática gera práticas que permitem os alunos compreender um pouco mais sobre a aplicação dos conceitos matemáticos em contextos práticos em outras áreas, como economia, ciências naturais, engenharia e até mesmo em artes.

> Essa forma de pensar o ensino da matemática carrega consigo a concepção de uma matemática não restrita ao seu próprio contexto mas, capaz de relacionar o que é aprendido dentro e fora da sala de aula: uma matemática constituída na interação do homem com o mundo, uma matemática histórica. BURAK (1992, pág. 55)

Nesse contexto, um dos benefícios da Modelagem Matemática é o desenvolvimento do pensamento crítico, pois ao abordar problemas complexos, os alunos aprendem a analisar, interpretar e formular soluções, desenvolvendo habilidades críticas que são essenciais em diversas áreas que permitem a integração do conhecimento promovendo a interdisciplinaridade, pois envolve conceitos de outras disciplinas, como física, biologia e ciências sociais. Isso ajuda os alunos a verem a matemática como uma ferramenta poderosa e versátil.

O engajamento e a motivação dos estudantes justapostos em projetos, que frequentemente envolvem questões do mundo real, tende a despertar o interesse dos mesmos tornando o aprendizado mais relevante e estimulante. Na preparação para o futuro, as habilidades adquiridas através da modelagem matemática se tornam valiosas para a vida acadêmica e profissional. A capacidade de resolver problemas com o uso de modelos que podem ou não ser derivados de padrões é altamente importante, pois segundo BURAK (1992, pág. 60) "permanece a impressão de que a aplicação da matemática consiste, simplesmente, em encontrar e aplicar fórmulas adequadas para encontrar determinadas respostas".

Sabendo disso, com as práticas de modelagem na sala de aula, aplicadas a problemas do mundo real, permite que os professores apresentem situações cotidianas, possibilitando aos alunos a percepção de que estão inseridos nesse contexto como a análise de dados populacionais, previsão de vendas ou estudo de fenômenos naturais. A partir daí, podem formular hipóteses, estudar os dados e construir modelos a fim de chegar em soluções próprias.

No entanto, podemos também complementar esse processo com o uso de ferramentas digitais, como softwares de modelagem e simulação, que permitem que os estudantes experimentem e visualizem suas ideias de forma interativa, pois isso enriquece a prática e facilita a exploração de diferentes cenários, promovendo trabalhos colaborativos e estimulando a troca de ideias e a construção conjunta do conhecimento. Isso induz o processo de ensino e aprendizagem uns com os outros colocando em prática também suas habilidades de comunicação.

> A cultura tecnológica em que vivemos põe em jogo novas modalidades de pensamento, de comunicação e de ação que o indivíduo deverá assimilar para responder aos novos desafios da produtividade e da competitividade. A resposta a estes desafios inevitáveis vai exigir novas modalidades de aprendizagem e de modificabilidade cognitiva, e não meramente modalidades quantificáveis de conhecimento. MARGARIDA MATOS (1996, pág. 4)

Com essa abordagem, os alunos não apenas compreendem melhor os conceitos matemáticos, mas também se preparam para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo, desenvolvendo também habilidades de argumentação.

A exploração e prática da modelagem matemática são essenciais para um aprendizado significativo e contextualizado, com essa abordagem, não apenas ajuda os alunos a entenderem melhor os conceitos matemáticos, mas também os prepara para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo, onde a matemática desempenha um papel crucial em diversas áreas, e incorporando esse método na educação é um passo importante para formar pensadores críticos e inovadores.

Juntamente com a modelagem, o uso de tecnologias como simuladores e aplicativos para a manipulação 3D dos corpos redondos tem revolucionado a forma como os alunos aprendem geometria. Esses recursos digitais proporcionam uma experiência interativa e envolvente, permitindo que os estudantes visualizem e compreendam conceitos abstratos de maneira prática e intuitiva.

No entanto, Margarida Matos (1996) diz em um de seus trabalhos, que as novas tecnologias não são autossuficientes em relação ao processo de ensino e à aprendizagem, a interação pedagógica é um ponto fundamental no desenvolvimento do pensamento lógico dos alunos, e algumas das vantagens do uso de tecnologias é a visualização aumentada que os simuladores 3D oferecem no ensino e aprendizagem das mais diversas formas geométricas, no entanto, iremos dar mais ênfase aos corpos redondos, como esferas, cilindros e cones.

Utilizando dos artifícios tecnológicos, os alunos podem girar, ampliar e explorar essas formas sob diferentes ângulos, facilitando a compreensão das suas características e propriedades. Tendo melhor interação com os aplicativos de modelagem 3D, os alunos passam a criar e manipular suas próprias formas, promovendo a experimentação e a descoberta. Essa influência mútua não só torna o aprendizado mais dinâmico, mas também aumenta o engajamento dos estudantes.

Com noções mais aprimoradas através da manipulação dos corpos redondos, os alunos podem explorar conceitos como volume, área da superfície e relações entre diferentes formas. Isso proporciona uma compreensão mais profunda e contextualizada, que vai além da memorização de fórmulas. Dessa forma, podendo ter uma aprendizagem personalizada com a variação entre os aplicativos disponíveis, os alunos tendem a progredir em seu próprio ritmo, revisando conceitos conforme necessário. Isso é especialmente benéfico para diferentes estilos de aprendizagem, permitindo que cada um encontre a abordagem que melhor se adapta às suas necessidades.

“Para desenvolver a adaptabilidade e não simplesmente a adaptação, é necessário intervir a nível da cognição e não apenas a nível da assimilação pura e simples de saberes. [...]”(MARGARIDA, 1996, pág. 04). Nesse contexto, temos alguns exemplos de aplicativos e simuladores que ajudam a termos uma melhor interação dentro de sala de aula, como o Geogebra que é uma plataforma que permite a criação e manipulação de figuras geométricas tanto em 2D como em 3D e também explorar as propriedades das formas geométricas. Que pode ser utilizada no processo de ensino e aprendizagem da geometria.

O Geogebra é um software matemático dinâmico amplamente utilizado para fins educacionais e acadêmicos. Ele combina geometria, álgebra, cálculo, estatística e gráficos em uma única interface intuitiva e interativa. Criado por Markus Hohenwarter em 2001, o Geogebra é especialmente popular no ensino de matemática e ciências devido à sua capacidade de tornar conceitos abstratos mais acessíveis por meio de visualizações dinâmicas.

Este software possui como principal característica a possibilidade de criar construções geométricas, gráficos e modelos matemáticos que podem ser manipulados em tempo real. Com isso, integra várias áreas da matemática como a Álgebra, o Cálculo, a Estatística e, principalmente, a Geometria que é a área abordada neste trabalho.

O Geogebra é de uso gratuito e está disponível em várias plataformas na web, e pode ser utilizado tanto em dispositivos móveis quanto em desktops. Sua interface combina um ambiente visual com comandos matemáticos, permitindo que seus usuários iniciantes e avançados o utilizem de forma eficaz.

O software também possui diversas aplicações, como em simulações, sendo utilizado para criar simulações dinâmicas de problemas de física, matemática, entre outros; em apresentações, se tornando útil para criar materiais educativos ou apresentações interativas; e na Educação, onde professores e estudantes usam o Geogebra para explorar conceitos matemáticos de maneira prática e interativa em sala de aula.

Este software pode ser uma ferramenta altamente flexível e visual, promovendo um aprendizado mais ativo, permitindo que os usuários explorem os conceitos de maneira experimental. Para maximizar o potencial desses recursos tecnológicos, os educadores podem integrá-los em atividades práticas. Por exemplo, os alunos podem usar simuladores que utilizem diferentes corpos redondos para estudar um sólido, explorando assim suas propriedades. Além disso, a combinação de modelagem digital com atividades práticas, como a construção de modelos físicos, pode proporcionar uma experiência de aprendizado rica e variada.

Na atualidade, a tecnologia está muito presente no cotidiano dos alunos, e com uso desses simuladores e aplicativos 3D é uma estratégia eficaz para ensinar corpos redondos, promovendo a exploração, a interação e a compreensão profunda dos conceitos geométricos. Essa abordagem não só torna o aprendizado mais atraente, mas também prepara os alunos para um mundo cada vez mais digital e interconectado.

> "O papel do computador como instrumento de ajuda para a aquisição de determinados conhecimentos implica a utilização de software previamente elaborado e fornecido ao aluno para alcançar um objetivo determinado. O seu êxito depende da qualidade do software . A via mais desenvolvida é o Ensino Assistido por Computador (EAC) e abarca sistemas que vão desde os materiais clássicos programados por estímulo-resposta, muito directivos, até sistemas baseados na resolução de problemas, de tipo não-directivos". MARGARIDA MATOS (1996, pág. 26)

Com isso, o apoio para entusiasmar os alunos a investigarem problemas do mundo real envolvendo corpos redondos são práticas educacionais valiosas que conectam a teoria matemática com a aplicação prática. Esses problemas oferecem oportunidades para que os alunos desenvolvam habilidades de raciocínio lógico, análise crítica e resolução de desafios, enquanto exploram conceitos como volume, área e propriedades geométricas de formas como esferas, cilindros e cones.

Para isso, é fundamental que os educadores ajudem os alunos a identificar problemas do cotidiano que envolvam corpos redondos, podendo ser da Engenharia e Arquitetura para calcular a quantidade de material necessário para construir uma estrutura tubular, como um tanque de armazenamento ou um pilar de sustentação; nas Ciências Naturais, analisando a forma e o volume de planetas, astros, moléculas, proporção de crescimento de árvores; e em outras áreas como a Indústria Alimentícia, estudando a embalagem de produtos, como latas, copos, e determinar a quantidade de produto que pode ser armazenada.

A Etnomatemática segundo a perspectiva de D'Ambrósio (2011, p. 09), consiste na matemática "praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos". A partir disso, ao relacionar os conceitos matemáticos abordados em sala de aula com os objetos pertencentes ao cotidiano de nossos estudantes, buscamos a possibilidade da aprendizagem significativa dos mesmos fazendo com que eles percebam os sólidos de revolução dentro de suas realidades, dentro de suas culturas.

Fazendo essa relação, podemos identificar vários problemas existentes em suas realidades, e uma vez identificados os problemas, os estudantes podem se envolver em um processo de modelagem iniciando pela formulação do problema onde os estudantes precisam descrever o problema de forma clara, identificando as variáveis envolvidas e o que é necessário calcular. A coleta de dados vai depender da natureza do problema, pois os alunos vão precisar coletar os dados do contexto, como medidas de objetos, informações estruturais dentre outras para que haja a aplicação de conceitos matemáticos. Além disso, os estudantes podem aplicar fórmulas matemáticas para calcular volume, área ou outras propriedades dos corpos redondos.

Após a modelagem e aplicação das fórmulas, os alunos podem analisar os resultados e discutir suas implicações, fazendo a interpretação dos resultados para que possam validar os resultados verificando se suas soluções são razoáveis e se fazem sentido no contexto apresentado. Esse processo de investigação e descoberta não apenas ajuda os alunos a entender melhor os corpos redondos, mas também promove a reflexão crítica ao discutirem em grupo e apresentarem suas soluções, os mesmos também aprendem a argumentar suas escolhas e a considerar diferentes abordagens para resolver o mesmo problema. "Pode-se, então, dizer que a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação "ancora-se" em conceitos relevantes (subsunçores) preexistentes na estrutura cognitiva" (MOREIRA M. A. 1993, pág. 15).

A utilização de recursos visuais como materiais didáticos é uma estratégia eficaz para facilitar o ensino e a aprendizagem dos corpos redondos. Esses recursos ajudam os estudantes a visualizar e compreender melhor as propriedades geométricas, tornando conceitos abstratos mais concretos e acessíveis. Esses recursos desempenham um papel crucial no processo de aprendizagem, especialmente em matemática, onde a visualização em perspectivas diferentes é fundamental. Para isso, é preciso compreender as propriedades visualizando as formas tridimensionais, permitindo que os alunos entendam conceitos como volume, área da superfícies e relações entre diferentes figuras. Por exemplo, observar uma esfera pode ajudar a compreender como a área e o volume se relacionam.

Aprimorando os métodos para praticar os conteúdos, e combinando elementos visuais com informações escritas ou orais, pode aumentar a absorção de conhecimento. Os estudantes tendem a se lembrar melhor das informações quando podem ver e manipular representações visuais.

CAPÍTULO 2 - Definições, Teoremas e Aplicações.

Para indicarmos alguns resultados referentes aos corpos redondos, precisamos antes definir algumas ideias sobre o círculo, como a sua área e o comprimento de sua circunferência. Para isso, usaremos notações de conjuntos, onde podemos representar um círculo φ(Phi) da seguinte forma,

$$\varphi = \{P = (a,b) \in \mathbb{R}^2; d[(x,y),(x_0,y_0)] \leq r\},$$

onde temos o centro do círculo é C = (x, y); um ponto qualquer pertencente à circunferência P'= (x_0, y_0); um ponto pertencente à circunferência φ, P = (a,b) é um ponto pertencente ao círculo; e r é o raio do círculo.

Como mencionado no contexto histórico, os povos babilônicos e egípcios se esforçavam em busca de uma fórmula para expressar a área do círculo e o comprimento da circunferência, e nessa busca, foram se aproximando de um valor hoje conhecido como a constante π, determinado a partir da razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência, isto é,

$$\pi = \frac{C}{d}$$

Assim

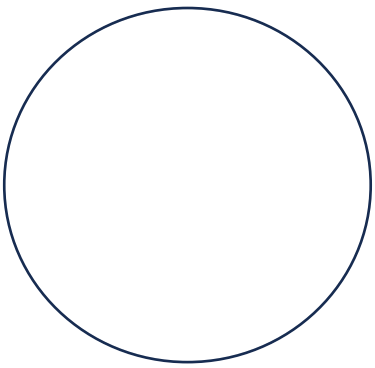
$$C = \pi d$$

Como d = 2 r, temos que:

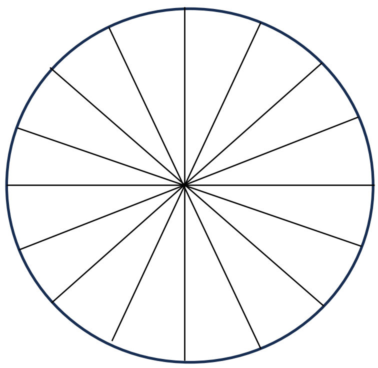
$$C = 2\pi r$$

A partir desse dado, conseguimos deduzir a fórmula da área do círculo ao desconstruí-lo em fatias. Assim, temos:

Figura 1 – Círculo *e* *Figura 2 – Círculo Subdividido*



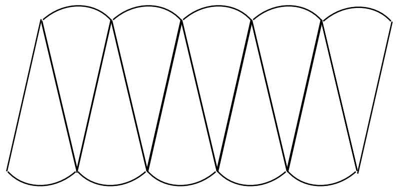
$\Rightarrow$



Fonte: Arquivo do Autor/Paint Fonte: Arquivo do Autor/ Pàint

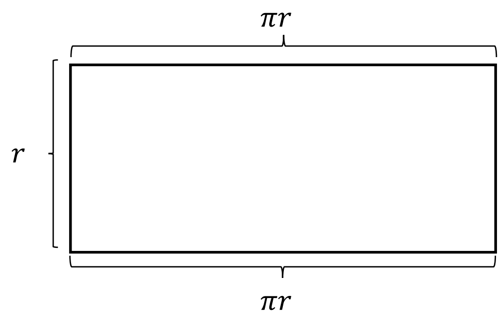
Após isso, precisamos organizar as fatias desse círculo subdividido de uma forma conveniente para que consigamos mostrar a fórmula da área do círculo.

Figura 3 – Fatias do círculo organizadas



Fonte: Arquivo do Autor/ Paint

Ao organizarmos as fatias dessa maneira, conseguimos perceber que ao dividir indefinidamente um círculo em fatias cada vez menores, aproximamo-nos da forma de um retângulo com as seguintes dimenções:



Dessa forma, fica mais fácil calcularmos a área da região, pois a fórmula usada para se calcular a área do retangulo é dada por $A_R = b.h$ e, como a base do retângulo mede πr e a altura igual a r, logo:

$$A_C = A_R = \pi r.r$$

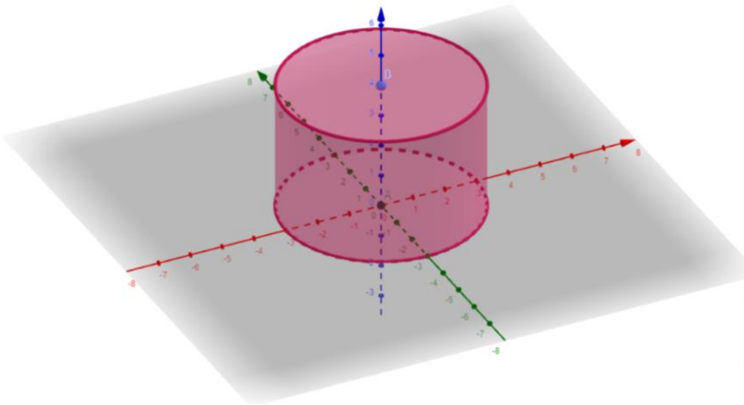
$$A_C = \pi.r^2$$

Com isso, vamos utilizar a partir de agora a fórmula $A_C = \pi.r^2$ para determinar a área de um círculo qualquer. Sendo assim, esses resultados irão nos ajudar a determinar fórmulas para expressar área da base, área lateral, área total e volume dos corpos redondos que serão estudados a seguir.

2.1 - CILINDRO

O cilindro é um sólido geométrico pertencente aos corpos redondos, que tem como suas características duas bases circulares paralelas e congruentes, conectadas por uma superfície lateral curvada. Ele pode ser visto como o resultado do deslocamento paralelo de um círculo ao longo de uma direção perpendicular ao seu plano.

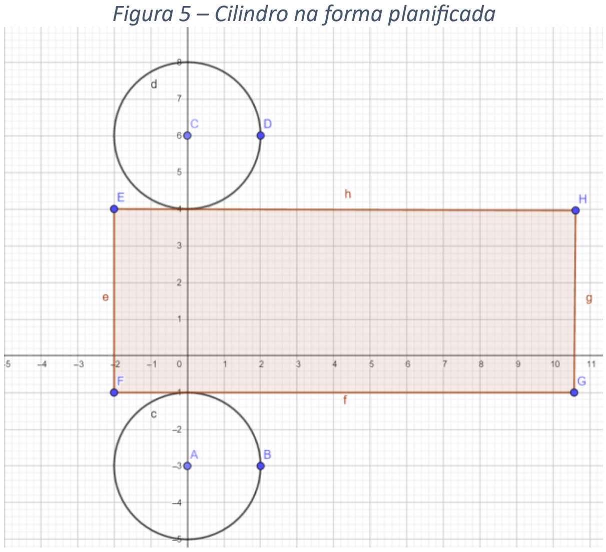
Figura 4 – Cilindro reto em formato tridimensional



Fonte: Arquivo do Autor/ Geogebra

Como podemos ver na imagem acima, as bases do cilindro são dois círculos congruentes (mesmo tamanho e forma), com raio (r) que é a distância do centro de cada círculo até qualquer ponto de sua borda; com diâmetro (d) que é o dobro do raio: d=2r; e com altura (h) que é a distância perpendicular entre os dois planos que contêm suas bases. Esses são os elementos cruciais para expressar a área da base, área lateral, área total e volume do cilindro.

Figura 5 – Cilindro na forma planificada



Fonte: Arquivo do Autor/ Geogebra

Área Lateral e da Base

Pelo fato da superfície na base do cilindro ser um círculo, sua área da base é dada pela expressão:

$$A_b = \pi . r^2$$

A superfície lateral é a parte curvada que conecta as duas bases, essa superfície pode ser "desenrolada" formando um retângulo, onde uma dimensão é a altura (h) e a outra dimensão é o comprimento da circunferência da base (2πr). Dessa forma, a área lateral é dada pela expressão:

$$A_l = 2\pi r . h$$

O eixo do cilindro é o segmento de linha reta que conecta os centros das duas bases que em um cilindro reto, o eixo é perpendicular às bases, e em um cilindro oblíquo, o eixo é inclinado em relação às bases. O cilindro também possui uma geratriz que é o segmento de reta que conecta os pontos correspondentes das circunferências que são bases. A partir das informações dos tipos de cilindro, no reto temos que a geratriz é igual à altura, enquanto no oblíquo, a geratriz forma um ângulo θ com a altura.

Por definição, o cilindro possui duas bases congruentes e paralelas afastadas a uma distância diferente de 0, e conforme a imagem 5, conseguimos ver que entre as duas bases existe uma região retangular que chamamos de área lateral. A partir disso, temos que:

$$A_t = 2A_b + A_l$$
$$A_t = 2(\pi r^2) + (2\pi r . h)$$
$$A_t = 2\pi r(r + h)$$

Dessa forma, a expressão que determina a área total do cilindro é $A_t = 2\pi r(r + h)$.

Volume do Cilindro

O volume de qualquer sólido basicamente corresponde ao espaço que ele ocupa, e com o cilindro não é diferente, precisamos apenas conhecer alguns de seus elementos estruturais, como:

r – raio da base do cilindro;

d – diâmetro da base do cilindro;

h – altura do cilindro.

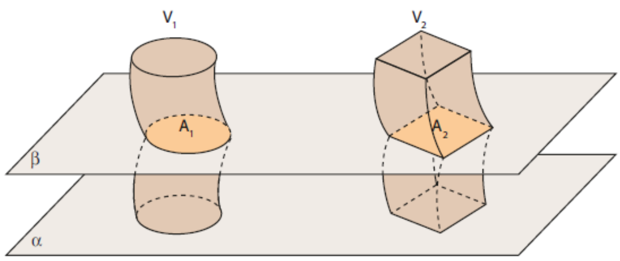
E conhecendo esses elementos estruturais e usando aproximações convenientes para a constante π, conseguimos estimar o volume de qualquer cilindro reto utilizando a seguinte expressão:

$$V_{cilindro} = A_b . h = \pi . r^2 . h$$

Princípio de Cavalieri.

Figura 6 – Princípio de Cavalieri

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).



$$A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

De modo geral, sua aplicação deve ser feita colocando-se os dois sólidos com bases em um mesmo plano, paralelo àquele em que estarão as seções de áreas iguais.

A seguir, usaremos o princípio de Cavalieri para calcular o volume de um prisma.

Fonte: Definição do Princípio de Cavalieri do livro "*Matemática: Ciência e Aplicações*" *de* Gelson Iezzi, ed. 9, 2016.

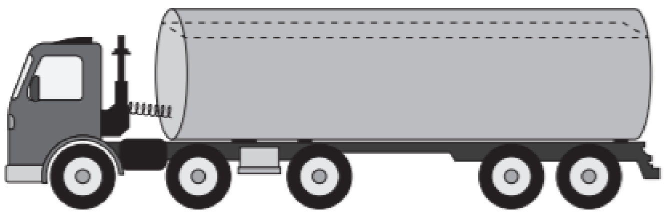
Pelo Princípio de Cavalieri, apresentado na Figura 6, o volume de cilindros oblíquos também obedecem as mesmas expressões de área e volume que os cilindros retos.

Aplicações de Cilindros

Exemplo 1:

Um tanque de armazenamento de combustível tem formato cilíndrico, com distâncias entre tampas de 5 metros e diâmetro da base de 3 metros. O tanque precisa ser pintado por fora, incluindo as laterais e as duas tampas circulares (dianteira e traseira).

Dessa forma, qual é a área total que precisará ser pintada (em metros quadrados). E se 1 litro de tinta cobre 10 m², quantos litros de tinta serão necessários?



Solução:

Passo 1: Saber que a área total do cilindro é a soma da área lateral e das duas bases circulares:

$$A_t = 2A_b + A_l$$

Área lateral:

$$A_l = 2\pi rh$$

Área de uma base:

$$A_b = \pi r^2$$

Passo 2: Determinar os valores conhecidos

Altura = 5m

Diâmetro = 3m

Raio = 1,5m

Passo 3: Calcular a área lateral

Substituindo na fórmula:

$$A_l = 2.\pi.1{,}5.5 = 15\pi$$

Usando a aproximação de $\pi = 3{,}14$, temos:

$$A_l \approx 47{,}12\ m^2$$

Passo 4: Calcular a área de uma base

$$A_b = \pi(1{,}5)^2 = 2{,}25\pi \approx 7{,}065 m^2$$

Passo 5: Calcular a área total

Incluindo as duas bases:

$$A_t = 2A_b + A_l$$

$$A_t = 2.(7{,}065) + 47{,}12$$

$$A_t = 61{,}25\ m^2$$

Passo 6: Determinar a quantidade de tinta

Sabendo que 1 litro de tinta cobre 10 m²:

$$Litros\ de\ tinta\ necessários = \frac{Área\ total\ a\ ser\ pintada}{Metros\ quadrados\ por\ litro\ de\ tinta}$$

$$Litros\ de\ tinta\ necessários = \frac{61{,}25}{10}$$

$$Litros\ de\ tinta\ necessários = 6{,}125\ L$$

Conclusão:

1. Área total a ser pintada: Aproximadamente 61,25 m².
2. Tinta necessária: Serão necessários cerca de 6,2 litros de tinta.

Esse é um exemplo prático de como calcular áreas de cilindros no planejamento de obras e manutenção.

Exemplo 2:

No lava jato Limpeza Total, houve um grande movimento hoje, tendo recebido 23 clientes para lavagem completa. No entanto, ao começar a lavar o próximo carro, a água acabou. Só então os funcionários se deram conta que a empresa fornecedora de água emitiu um alerta dizendo que devido a reparos e obras de manutenção, neste dia, não haveria abastecimento.

O dono do estabelecimento pediu um abastecimento de urgência com um caminhão pipa e a empresa fornecedora de água perguntou a capacidade do reservatório. Como era bem antigo, as indicações de capacidade havia apagado, sendo necessário fazer o cálculo a partir de suas medidas.

O reservatório é um cilindro de 4 m de altura e diâmetro de 1,80 m.

A empresa fornecedora de água possui cinco opções de entrega em caminhões pipa (8000 L, 9000 L, 10000 L, 11000 L e 12000 L). Qual opção que poderá ser solicitada pelo proprietário do lava jato, enchendo o máximo possível seu reservatório.

Dados: 1 m^3 = 1 000 L

Solução:

Passo 1: Identificar os dados.

Altura = 4m

Diâmetro = 1,80m

Raio = 0,9m

Passo 2: Calcular o volume do cilindro usando a fórmula:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

$$V_{cilindro} = \pi(0{,}9)^2.4$$

$$V_{cilindro} = 3{,}24\pi = 10{,}17m^3$$

Passo 3: Transformar volume em capacidade.

Sabendo que 1m^3 = 1000 L, logo:

$$V_{cilindro} = 10{,}17.1000\ L$$

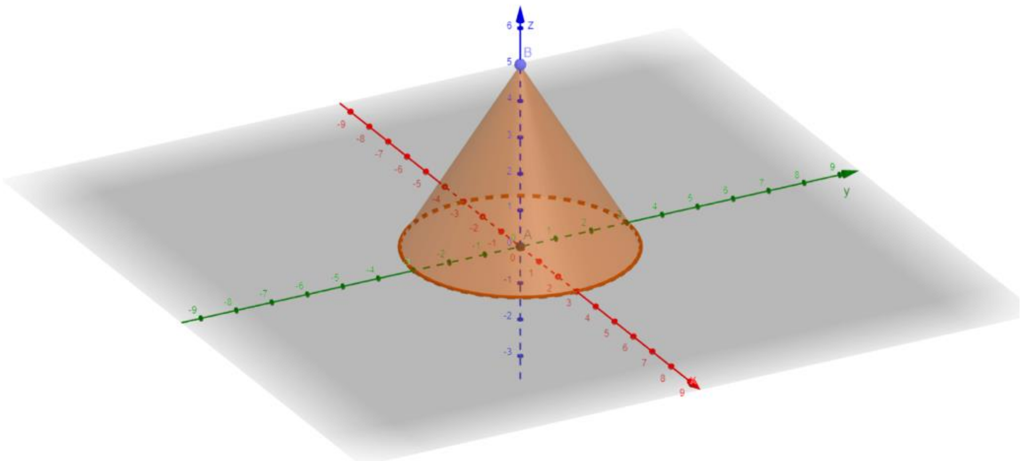
$$V_{cilindro} = 10170\ L$$

Conclusão: O lava jato deverá solicitar o caminhão pipa de 10000 L para encher seu reservatório o máximo possível.

2.2 - CONES

O cone é uma figura geométrica tridimensional que se distingue por três elementos principais: uma base circular plana, um vértice - ponto único situado fora do plano da base, posicionado acima ou abaixo desta - e uma superfície lateral curva. Essa superfície lateral conecta todos os pontos da circunferência da base ao vértice, formando, assim, uma estrutura contínua e suavemente inclinada. A disposição desses elementos confere ao cone uma forma elegante e simétrica, frequentemente observada tanto em contextos matemáticos quanto em fenômenos naturais e aplicações do cotidiano.

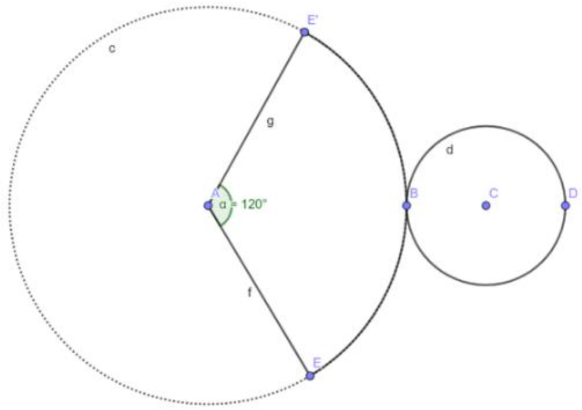
Figura 7 – Cone reto na forma tridimensional



Fonte: Arquivo do Autor/ Geogebra

A figura 7 apresenta a representação tridimensional de um cone reto. No entanto, para que possamos formular e compreender, de maneira mais clara e objetiva, as expressões matemáticas que determinam as áreas da base, da superfície lateral e o volume dessa figura, é fundamental recorrer à sua planificação. A análise da forma planificada do cone não apenas facilita a visualização das relações geométricas envolvidas, como também contribui significativamente para a construção do raciocínio matemático, sendo uma etapa essencial no processo de abstração e generalização das fórmulas.

Figura 8 – Planificação de um cone reto



Fonte: Arquivo do Autor/ Geogebra

Na figura 8 temos um cone reto onde só conhecemos o ângulo de sua superfície lateral, mas para que nós consigamos deduzir as expressões relacionadas ao cone, vamos considerar para todos os elementos estruturais do cone valores variáveis. Sendo assim, temos:

R = g – raio da circunferência maior;

r – raio da circunferência menor – base do cone;

θ – ângulo de inclinação da superfície lateral do cone;

h – é a altura do cone reto, consequentemente, é um segmento de reta perpendicular entre o vértice do cone e o centro da base;

A_l - área lateral do cone;

A_c – área do círculo maior;

A_b – área da base do cone;

A_t – área total do cone.

Áreas Lateral e da Base

Como a superfície lateral do cone pode ser encontrada através de uma relação proporcional com um círculo onde o raio é igual a geratriz do cone, e como o círculo tem 360°, então:

$$\frac{A_l}{A_c} = \frac{\theta}{360°}$$

$$A_l = \frac{\theta}{360°} A_c$$

$$A_l = \frac{\theta}{360°} (\pi g^2)$$

Essa expressão é usada quando conhecemos o ângulo da superfície lateral do cone, porém, quando não conhecemos este ângulo, precisamos de outra expressão. Assim, como o arco $\widehat{E'E}$ é igual ao comprimento da circunferência menor, logo:

$$\frac{\theta}{360°} = \frac{2\pi r}{2\pi g}$$

A partir daí, temos que:

$$A_l = \frac{2\pi r}{2\pi g}(\pi g^2),$$

e com as simplificações, chegamos a uma expressão para a área lateral do cone que depende apenas do raio da base e da geratriz do cone, logo:

$$A_l = \pi r g$$

Como já conhecemos uma expressão que nos fornece a área da base do cone e outra que nos fornece a área lateral do cone, podemos agora montar uma expressão que nos permita identificar a fórmula de área total de um cone de duas maneira distintas, dependendo dos dados que os problemas nos derem.

Segue que,

$$A_t = A_b + A_l$$

$$A_t = (\pi r^2) + (\pi r g)$$

$$A_t = \pi r(r + g)$$

Ou, considerando a expressão de área lateral que depende do ângulo da superfície lateral, temos:

$$A_t = \frac{\theta}{360°}(\pi g^2) + (\pi r^2)$$

$$A_t = \frac{\theta\pi}{360°}(g^2 + r^2)$$

Volume do Cone

Segundo Iezzi (2016) expressão que determina o volume de um cone pode decorrer da expressão que indica o volume de um tetraedro. Uma vez que com o tetraedro por ser um sólido composto por polígonos, se torna mais fácil a visualização da demonstração física que utiliza cortes em um prisma triangular de forma conveniente, até que esses cortes gerem um tetraedro.

A partir da dedução da expressão que determina o volume de um tetraedro, precisamos fazer relações de proporções entre áreas de base e alturas para que cheguemos na expressão a seguir que irá nos permitir calcular o volume de qualquer cone reto.

Sendo assim, o volume de um tetraedro é calculado a partir de uma proporção do volume de um prisma triangular que possui base e altura iguais as do tetraedro, essa proporção é a seguinte: em um prisma triangular podem ser organizadas 3 pirâmides de mesma base e mesma altura que o prisma, logo:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3}.V_{prisma\ triangular}$$

Com isso, pelo Princípio de Cavalieri, decorre que:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}.V_{cilindro}$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h$$

Pela definição do Princípio de Cavalieri, apresentado na Imagem 6, os cones oblíquos também obedecem as mesmas relações de área e volume que os cones retos.

Aplicações de Cones

Exemplo 1:

Algumas comunidades indígenas do interior do Amazonas frequentemente constroem malocas com tetos em formato cônico. Imagine que uma comunidade deseja calcular a quantidade de palha necessária para cobrir o teto de uma nova maloca.

O teto da maloca tem as seguintes dimensões:

- Raio da base: 5 metros (a distância do centro até a borda do teto).
- Altura do cone: 3 metros (do centro da base até o topo do teto).

Como o teto tem formato cônico, a comunidade precisa saber o volume do espaço interno do cone para estimar a ventilação e o conforto térmico, além da área lateral (área da superfície) para calcular a quantidade de palha necessária.

Solução:

Passo 1: Cálculo do volume do cone

A fórmula do volume do cone é:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h$$

Substituindo os dados da questão, temos:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}.\pi.5^2.3$$

Usando a aproximação para $\pi = 3{,}14, logo$:

$$V_{cone} = 25.3{,}14 = 78{,}5m^3$$

O volume interno do teto da maloca é aproximadamente 78,5 metros cúbicos. Esse valor ajuda a entender o espaço disponível para ventilação.

Passo 2: Cálculo da área lateral do cone

A área lateral do cone é importante para calcular a quantidade de palha necessária. Usamos a fórmula:

$$A_l = \pi r g$$

Onde g é a geratriz do cone (a distância inclinada do topo até a borda da base). Para encontrar g, usamos o teorema de Pitágoras:

$$g^2 = r^2 + h^2$$

Substituímos os valores:

$$g^2 = 5^2 + 3^2$$

$$g^2 = 25 + 9$$

$$g = \sqrt{34}$$

$$g \approx 5{,}83\, m$$

Agora, calculamos a área lateral:

$$A_l = \pi.5.5{,}83$$

$$A_l = 29{,}15.\pi$$

Usando a aproximação para $\pi = 3{,}14, logo$:

$$A_l \approx 91{,}531\, m^2$$

Conclusão

A comunidade precisa de aproximadamente 91,531 metros quadrados de palha para cobrir o teto da maloca. Além disso, o espaço interno do teto tem cerca de 78,5 metros cúbicos, o que ajuda a planejar a ventilação e o conforto da estrutura.

Exemplo 2:

Uma pequena sorveteria artesanal no interior do Amazonas está inovando na produção de sorvetes em cones para atrair turistas e moradores locais. Eles utilizam casquinhas de sorvete com formato cônico e precisam calcular a quantidade de sorvete necessária para preencher completamente cada casquinha.

Cada casquinha possui raio da base igual a 3 cm, altura igual a 10 cm e os proprietários da sorveteria querem saber quantos mililitros de sorvete cabem em cada cone, assim como quantos litros de sorvete são necessários para produzir 200 cones.

(Dados: 1 cm³ = 1 ml)

Solução:

Passo 1: Calcular o volume do cone

Usamos a fórmula do volume do cone:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h$$

Substituímos os valores:

r = 3 cm

h = 10 cm

$$V_{cone} = \frac{1}{3}.\pi.3^2.10$$

$$V_{cone} = 30\pi$$

Usando a aproximação para $\pi = 3{,}14, logo$:

$$V_{cone} \approx 94{,}2\ cm^3$$

Cada cone tem um volume de aproximadamente 94,2 cm³, ou 94,2 ml de sorvete.

Passo 2: Calcular a quantidade de sorvete para 200 cones

Para 200 cones, multiplicamos o volume de um cone por 200:

$$V_{total} \approx 94{,}2.200 \approx 18\ 840\ ml$$

Convertendo para litros:

18.840 ml=18,84 litros.

Conclusão:

1. Cada casquinha comporta cerca de 94,2 ml de sorvete.
2. Para produzir 200 cones, serão necessários aproximadamente 18,84 litros de sorvete.

2.3 - ESFERA

Uma forma alternativa e visual de demonstrar as equações de área e volume de uma esfera é utilizando métodos baseados em cálculo integral e geometria tridimensional. Abaixo, apresento uma abordagem intuitiva para ambos os casos:

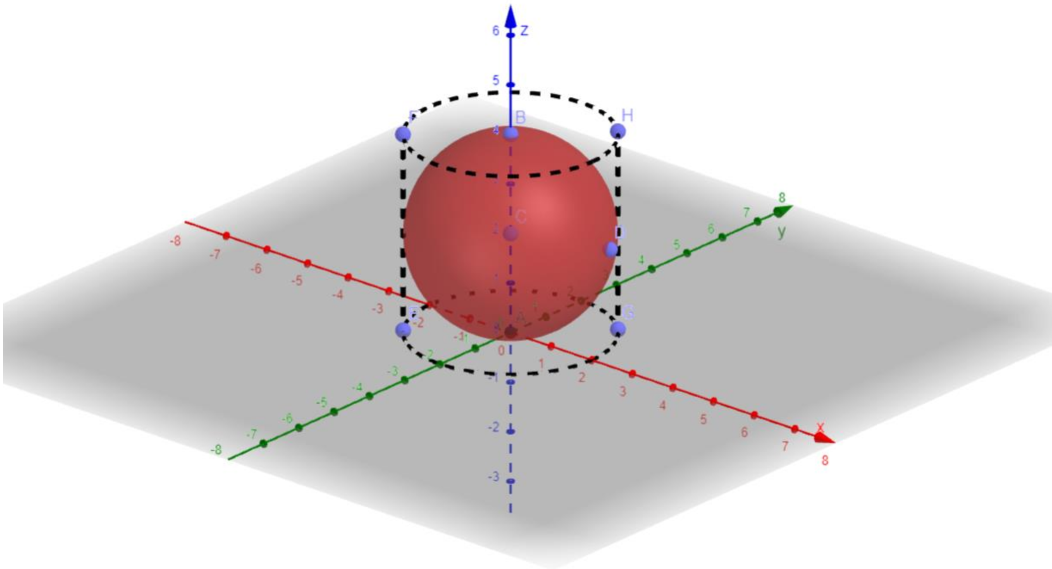
Imagine uma esfera de raio (r) inscrita dentro de um cilindro de mesma altura e mesmo raio (altura = 2r).

A área da superfície lateral do cilindro é dada por:

$$A_{cilíndro} = 2\pi r.2r = 4\pi r^2$$

Informação importante: A superfície da esfera pode ser projetada sobre a superfície lateral do cilindro de forma equivalente. Esse resultado foi demonstrado por Arquimedes, que percebeu que a área da esfera "espalhada" corresponde exatamente à área lateral do cilindro circunscrito como podemos ver na imagem abaixo. Tal demonstração pode ser encontrada no livro *Works of Archimedes* (HEATH, 1897).

Figura 9 – Esfera inscrita no cilindro de raio (r) e altura (2r)



Fonte: Arquivo do Autor/ Geogebra

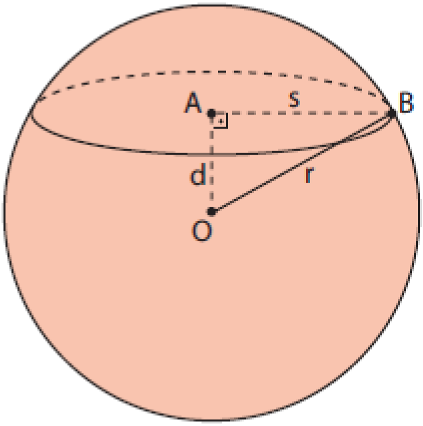
Com isso, a área da “casca” da esfera de raio (r), é sempre dada pela expressão $A = 4\pi r^2$.

Para deduzir uma expressão que determine o volume da esfera, vamos utilizar um método que usa o Princípio de Cavalieri, apresentado na Imagem 6 (que consiste em relacionar Sólidos com seções transversais equivalentes).

Passo 1: Considere uma semiesfera de raio (r) e um cone invertido com altura (r) e base de raio (r), ambos posicionados sobre uma mesma base plana.

Passo 2: Agora compare as seções transversais horizontais de ambos os sólidos a uma altura (d) acima da base, com d < r:

Figura 10 – Esfera de raio (r)



Fonte: Definição do Princípio de Cavalieri do livro "*Matemática: Ciência e Aplicações" de* Gelson Iezzi, ed. 9, 2016.

Seção da semiesfera: Um círculo de raio $\sqrt{r^2 - d^2}$, com área:

$$A_{semiesfera}(d) = \pi(r^2 - d^2)$$

Seção do cilindro com o cone removido: O cilindro tem área πr^2, mas subtraímos a seção do cone, que é proporcional à altura:

$$A_{cilindro} - A_{cone} = \pi r^2 - \pi d^2$$

$$A_{cilindro} - A_{cone} = \pi(r^2 - d^2)$$

Passo 3: Como as seções transversais horizontais da semiesfera e do cilindro com o cone removido são idênticas para qualquer altura (d), pelo Princípio de Cavalieri, os volumes também são iguais.

Passo 4: O volume do cilindro com o cone removido é dado por:

$$V_{cilindro} - V_{cone} = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}$$

$$V_{semiesfera} = V_{cilindro} - V_{cone} = \frac{2\pi r^3}{3}$$

Como a semiesfera ocupa metade da esfera completa, multiplicamos por 2:

$$V_{esfera} = 2. V_{semiesfera} = 2. \frac{2\pi r^3}{3}$$

$$V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

A área da esfera pode ser interpretada como equivalente à área lateral de um cilindro circunscrito, já o volume da esfera, pode ser demonstrado comparando seções transversais com outros sólidos utilizando o Princípio de Cavalieri. Essas demonstrações combinam geometria, visualização intuitiva e princípios fundamentais do cálculo integral, porém, precisamos ter uma forma mais simplificada para ser passado no ensino básico, pois os alunos dessa fase da educação ainda não foram iniciados no cálculo diferencial e integral.

Aplicações de Esferas

Exemplo 1:

No interior do Amazonas, Dona Maria tem um sítio onde colhe açaí para vender na feira local. Depois de colher os frutos, ela os lava em grandes tinas redondas feitas de madeira. Essas tinas têm o formato de uma esfera cortada ao meio (uma semiesfera). Dona Maria enche a tina com água até a borda para lavar o açaí. A tina tem um raio de 50 cm. Depois de encher a tina, ela percebe que gasta muita água e quer saber qual o volume de água que ela está utilizando para lavá-los. Sabendo que o volume de uma esfera é dado pela fórmula $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$, qual é o volume de água usado por Dona Maria para encher a tina (que é metade de uma esfera)?

Use $\pi \approx 3,14$.

Solução:

Passo 1: Dados da questão.

r = 50 cm

Passo 2: Calcular o volume da esfera com 50 cm de raio.

$$V = \frac{4}{3}.\pi.50^3$$

$$V = \frac{4}{3}.\pi.125000$$

$$V = \frac{500\ 000}{3}\pi$$

$$V = 166\ 666{,}67.\pi$$

Passo 3: Usando a aproximação de $\pi \approx 3{,}14$, temos.

$$V = 523\ 333{,}33\ cm^3$$

Passo 4: Como a tina é uma semiesfera, precisamos dividir o volume por 2.

$$V_{tina} = \frac{523\ 333{,}33}{2}$$

$$V_{tina} = 261\ 666{,}67\ cm^3$$

Passo 5: Sabendo que $1cm^3 = \frac{1}{1000}\ l$, então.

$$V_{tina} = 261\ 666{,}67.\frac{1}{1000}\ l$$

$$V_{tina} = 261{,}67\ l$$

Conclusão: Em cada lavagem dos açaís, Dona Maria utiliza aproximadamente 262 litros de água.

Exemplo 2:

Seu João vive na beira de um rio no interior do Amazonas e cria algumas cabeças de gado. Durante a cheia dos rios, ele precisa construir um curral flutuante para proteger os animais. Para isso, ele utiliza boias grandes feitas de plástico resistente, que têm o formato de uma esfera com um raio de 30 cm. Cada boia consegue flutuar e sustentar até 1 kg de peso para cada litro de água deslocado por ela (considerando que 1 litro de água equivale a 1 dm^3 ou 1000 cm^3). Sabendo que o volume de uma esfera é dado por $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$, qual é o peso máximo que cada boia consegue suportar antes de afundar completamente no rio?

Use $\pi \approx 3{,}14$.

Solução:

Passo 1: Dados da questão.

Cada boia esférica contém 30 cm de raio;

Cada 1 litro de água equivale a 1 dm^3 ou 1000 cm^3;

Cada boia consegue sustentar 1 kg de peso para cada litro de água deslocado.

Passo 2: Calcular o volume de cada boia esférica.

$$V = \frac{4}{3}.\pi.30^3$$

$$V = \frac{4}{3}.\pi.27\ 000$$

$$V = 36\ 000.\pi$$

Passo 3: Usando a aproximação de $\pi \approx 3{,}14$, temos.

$$V = 113\ 040\ cm^3$$

Passo 4: Fazendo a transformação de 1 cm^3 para 1 L, logo.

$$V = 113{,}04\ L$$

Conclusão: Conforme Arquimedes "todo sólido imerso parcial ou totalmente em um líquido está sujeito a uma força vertical, de baixo para cima, denominada empuxo correspondente ao tanto de líquido deslocado por este sólido". Por isso, cada boia esférica suporta cerca de 113 kg, pois o volume da boia é 113,04L.

CAPÍTULO 3 - Aspectos Metodológicos.

Neste capítulo, apresentamos as características da abordagem utilizada nesta pesquisa. Descrevemos o contexto em que a investigação foi realizada, bem como os participantes envolvidos. Além disso, apresentamos as sequências didáticas que serão implementadas em sala de aula.

3.1 - Tipos de Abordagem da Pesquisa.

Esta pesquisa adota uma abordagem qualitativa, focada na compreensão dos processos de ensino e aprendizagem relacionados ao conteúdo de corpos redondos na geometria. O estudo visa interpretar as interações, estratégias desenvolvidas pelos estudantes durante a aplicação de sequências didáticas elaboradas. Para o ensino e aprendizagem dos corpos redondos, foram adotados procedimentos metodológicos que estimulassem a compreensão, a exploração e a aplicação dos conceitos relacionados a esses sólidos. A modelagem matemática através de materiais permitiram o manuseio para a construção deles, e o uso de tecnologias por meio de aplicativos como opções para estabelecerem manipulações tanto virtual quanto práticas desses sólidos.

A estratégia de investigação escolhida é a descritiva, pois permite o estudo, a análise, o registro e a interpretação dos fenômenos observados no contexto educacional. Gil (2008, p.28) nos relata que

> "As pesquisas deste tipo têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis. São inúmeros os estudos que podem ser classificados sob este título e uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados."

A pesquisa fundamentou-se inicialmente em uma pesquisa bibliográfica, que teve como objetivo levantar e analisar produções acadêmicas, livros didáticos e documentos oficiais (como a BNCC), com vistas a embasar teoricamente tanto o conteúdo matemático quanto as metodologias de ensino utilizadas. Esse levantamento foi essencial para a construção das atividades propostas nas sequências didáticas.

Foi adotado um delineamento de estudo de caso, uma vez que a pesquisa foi realizada em escola pública da cidade de Manaus/AM, a qual já emprega dinâmicas como recurso complementar no ensino de áreas e volumes de sólidos geométricos nas aulas de Matemática.

A escolha dessa abordagem buscou promover um processo de ensino-aprendizagem mais eficaz, em resposta ao baixo desempenho dos estudantes nas atividades relacionadas ao tema. A análise dos dados seguiu uma perspectiva interpretativa, valorizando os aspectos qualitativos das respostas dos estudantes, suas argumentações, dificuldades e progressos identificados ao longo da intervenção.

As sequências didáticas foram elaboradas com foco na exploração prática e conceitual dos corpos redondos, como esfera, cone e cilindro, por meio de atividades que envolvem observação, manipulação de objetos concretos, discussão coletiva e resolução de problemas. A aplicação ocorreu em sala de aula e os dados foram coletados por meio de observações, registros escritos dos alunos e produções realizadas durante as atividades.

3.2 - Contexto e Participantes da Pesquisa.

A aplicação e análise das sequências didáticas voltada ao ensino de corpos redondos especificamente, esfera, cone e cilindro foi realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio, contribuindo para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem no componente curricular de Matemática. A seleção dos participantes foi feita por amostragem intencional, tendo em vista o baixo conhecimento do conteúdo por parte dos alunos e com o objetivo de prepara-los para provas de larga escala como o Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, Sistema de Ingresso Seriado da Universidade do Estado do Amazonas – SIS e Processo Seletivo Contínuo – PSC.

Tendo em vista as necessidades e características dos estudantes, foram consideradas suas experiências prévias e diferentes ritmos de aprendizagem. Nesse contexto, a sequência didática foi estruturada em etapas progressivas, respeitando os tempos e as particularidades de cada turma.

3.3 - Sequências Didáticas para Aplicação em Sala de Aula.

As sequências didáticas são ferramentas pedagógicas estruturadas que organizam o ensino de forma gradual e articulada, visando facilitar a compreensão dos conteúdos pelos estudantes. No contexto do ensino de corpos redondos no Ensino Médio, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância de abordar as propriedades, a formulação e o cálculo de áreas e volumes desses sólidos geométricos, de modo a desenvolver competências matemáticas que integrem raciocínio espacial, análise e aplicação prática.

Segundo a BNCC (2018, p. 324), “os estudantes devem ser capazes de compreender e utilizar as propriedades das figuras geométricas para resolver problemas relacionados a situações reais, incluindo o cálculo de áreas e volumes, desenvolvendo, assim, habilidades essenciais para a vida cotidiana e para outras áreas do conhecimento”.

De acordo com Moreira (2013), “as sequências didáticas contribuem para a organização do processo de ensino-aprendizagem ao propor atividades progressivas, que possibilitam a construção gradual do conhecimento, especialmente em conteúdos complexos como os corpos redondos, ao promover a articulação entre o saber conceitual e as práticas experimentais” (p. 45).

Neste trabalho, as sequências didáticas foram elaboradas com base em referenciais teóricos que discutem o ensino e a aprendizagem de Geometria (DUARTE, 2015; LORENZATO, 2006), além de princípios da aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003) e metodologias ativas, como a resolução de problemas (PONTE et al., 2012).

A sequência será composta pelas seguintes etapas:

1. Diagnóstico prévio: levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre corpos redondos, por meio de questionário inicial e discussão oral.
2. Exploração concreta: utilização de materiais manipuláveis (modelos tridimensionais dos sólidos) e objetos do cotidiano que remetam à forma dos corpos redondos.
3. Atividades investigativas: resolução de problemas contextualizados, com foco na construção de significados e na aplicação prática dos conceitos geométricos.
4. Integração com tecnologias digitais: uso de softwares de geometria dinâmica (como GeoGebra 3D), vídeos e jogos digitais, visando ampliar o repertório visual e conceitual dos alunos.
5. Avaliação: acompanhamento contínuo da aprendizagem por meio de registros de atividades, observações feitas nos momentos das aulas sobre os corpos redondos e em discussões reflexivas com os estudantes a fim de verificar o nível de compreensão alcançado.

CAPÍTULO 4 – Sequências Didáticas.

4.1 - Sequência Didática 1: Construção do Cilindro, Cone e Esfera com o uso do GeoGebra.

Objetivo: Explorar e construir sólidos geométricos (cilindro, cone e esfera) utilizando o software GeoGebra para desenvolver a compreensão sobre suas propriedades e visualização espacial.

Aula 1: Introdução ao GeoGebra 3D e Construção do Cilindro.

- Apresentação do GeoGebra: Explicação sobre a interface do GeoGebra 3D, ferramentas básicas e comandos essenciais.
- Construção de um Cilindro:
  - Criar duas circunferências paralelas no plano 3D (uma na base e outra no topo).
  - Usar o comando Cilindro (Ponto 1, Ponto 2, raio) para gerar o sólido, onde os pontos 1 e 2 irão determinar a altura do cilindro.
  - Explorar a variação do raio e da altura do cilindro.
- Discussão: Comparação entre o cilindro construído no software e o modelo físico, enfatizando características como altura, raio e secções transversais.

Aula 2: Construção do Cone.

- Revisão dos conceitos do cilindro.
- Construção de um Cone:
  - Criar uma base circular;
  - Definir um ponto fora do plano da base para ser o vértice do cone;
  - Utilizar o comando Cone (Ponto Base, Ponto Vértice e raio);
  - Explorar a variação do raio e da altura do cone.
- Atividade prática: Construção de cones com diferentes dimensões e análise das secções transversais.
- Discussão: Comparação entre as propriedades do cone e do cilindro.

Aula 3: Construção da Esfera e Aplicações.

- Construção de uma Esfera:
  - Criar um ponto como centro;
  - Usar o comando Esfera (Ponto Central e raio);
  - Modificar o raio e observar as mudanças no sólido.

- Exploração:
  - Analisar interseções da esfera com planos;
  - Comparar a esfera com o cilindro e o cone em termos de volume e área.
- Atividade Final: Os alunos criam diferentes sólidos e apresentam suas construções à turma, destacando relações matemáticas observadas.

4.2 - Sequência Didática 2: A Esfera e a Construção da Bola de Futebol.

Público-alvo: Alunos do Ensino Básico (8º, 9º, 2º ou 3º ano)

Objetivo: Compreender as propriedades da esfera; Relacionar a matemática com a construção da Bola de Futebol (Icosaedro Truncado: contendo 12 faces pentagonais regulares e 20 faces hexagonais regulares); Explorar conceitos de geometria espacial e medidas.

1ª Aula: Introdução à Esfera.

- Apresentação de diferentes objetos esféricos, incluindo uma Bola de Futebol (com o auxílio do software Poly).
- Discussão das principais características que diferenciam a esfera de outros corpos redondos, como: ausência de arestas e vértices e possuir simetria perfeita.
- Definição matemática da esfera e comparação com outras figuras geométricas tridimensionais.
- Atividade: Identificação de objetos esféricos no cotidiano e comparação de suas características.
- Questões da Atividade:
  - 1) Liste pelo menos 3 objetos esféricos que fazem parte do seu cotidiano.
  - 2) Dê exemplos de 3 objetos do seu cotidiano que não são esferas.
  - 3) Analise dois sólidos de cada vez (um sendo esfera e o outro não), listando as características que as tornam diferentes.

2ª Aula: Medidas e Propriedades da Esfera.

- Introdução aos conceitos de raio, diâmetro e circunferência.

- Apresentação de um Princípio (de Arquimedes) para dedução da área e volume da esfera.

- Atividade prática: Medição da circunferência de uma Bola de Futebol e cálculo do raio e do volume.

    - Com o auxílio de uma fita métrica, os alunos irão medir o comprimento da circunferência (meridiano da bola) de uma Bola de Futebol, para a partir disso, encontrar o raio e determinar o volume da esfera.

3ª Aula: Construção da Bola de Futebol.

- Discorrer sobre as etapas de elaboração da uma Bola de Futebol, como: camadas de materiais, enchimento e formato.

- Apresentação do motivo pelo qual a bola é esférica e a importância de sua simetria para o quique e aerodinâmica.

- Atividade: Desenhar um modelo esquemático de uma Bola de Futebol, identificando suas partes (com o auxílio do software Poly).

    - Será projetado a imagem do icosaedro truncado;

    - Os alunos irão reproduzir o esquema em uma cartolina;

    - Após finalizado o desenho, os alunos irão montar o icosaedro truncado (Bola de Futebol) e encher com ar, de modo que a estrutura fique esférica.

Avaliação:

- Participação nas atividades e discussões.

- Resolução de problemas matemáticos envolvendo a esfera.

- Produção de um pequeno relatório sobre a relação entre a matemática e a construção da Bola de Futebol.

4.3 - Sequência Didática 3: O Cone e as Ocas dos Povos Originários.

Público-alvo: Alunos do Ensino Básico (8º, 9º, 2º ou 3º ano).

Objetivo: Compreender as propriedades do cone; Relacionar a matemática com a arquitetura das ocas indígenas; Explorar conceitos de geometria espacial e medidas.

1ª Aula: Introdução ao Cone

- Apresentação de diferentes objetos em forma de cone, incluindo modelos de ocas dos povos originários.
- Discussão sobre as características do cone: possui uma base circular e um vértice.
- Definição matemática do cone e comparação com outras figuras geométricas tridimensionais.
- Atividade: Identificação de objetos cônicos no cotidiano e comparação de suas características.
- Questões da Atividade:
    - 1) Liste pelo menos 3 objetos cônicos que fazem parte do seu cotidiano.
    - 2) Dê exemplos de 3 objetos do seu cotidiano que não são cones.
    - 3) Analise dois sólidos de cada vez (um sendo cone e o outro não), listando as características que as tornam diferentes.

2ª Aula: Medidas e Propriedades do Cone

- Introdução aos conceitos de raio da base, altura e geratriz.
- Apresentação de um Princípio de dedução da área da superfície e volume do cone.
- Atividade prática: Mensurar e calcular área total e volume de uma miniatura de oca dos povos originários construída pelos alunos.
    - Os alunos irão medir com o auxílio de uma fita métrica, as dimensões da oca dos povos origimários construída em sala de aula a fim de desenvolver cálculos de área total e volume do sólido.

3ª Aula: Construção das Ocas dos Povos Originários.

- Explicação sobre os materiais utilizados pelos povos originários na construção de suas ocas.
- Discussão sobre a escolha do formato cônico e sua eficiência térmica e estrutural.
- Atividade: Desenhar um modelo esquemático de uma oca, identificando suas partes.

4ª Aula: Aplicação e Reflexão.

- Problematização: Por que os povos originários escolhem formatos cônicos para suas moradias?
- Comparação com outras estruturas arquitetônicas baseadas no cone.
- Atividade prática: Construção de modelos de ocas baseados nas discursões das aulas anteriores com o uso de papel, cola, tesoura, compasso, régua e transferidor.
- Reflexão final: A importância da geometria na cultura e arquitetura dos povos originários.

Avaliação:

- Participação nas atividades e discussões.
- Resolução de problemas matemáticos envolvendo o cone.
- Produção de um pequeno relatório sobre a relação entre a matemática e a construção das ocas dos povos originários.

4.4 - Sequência Didática 4: O Cilindro e Elementos da Região Amazônica.

Público-alvo: Alunos do Ensino Básico (8º, 9º, 2º ou 3º ano).

Objetivo: Compreender as propriedades do cilindro relacionando a matemática com elementos culturais e naturais da região amazônica, explorando conceitos de geometria espacial e medidas.

1ª Aula: Introdução ao Cilindro

- Apresentação de diferentes objetos cilíndricos, incluindo troncos de árvores, tambores e tipitis da Amazônia.
- Discussão sobre as características do cilindro: possui duas bases circulares e uma superfície lateral curva.
- Definição matemática do cilindro e comparação com outras figuras geométricas tridimensionais.
- Atividade: Identificação de objetos cilíndricos no cotidiano e comparação de suas características.
- Questões da Atividade:
    - 1) Liste pelo menos 3 objetos cilíndricos que fazem parte do seu cotidiano.
    - 2) Dê exemplos de 3 objetos do seu cotidiano que não são cilindros.
    - 3) Analise dois sólidos de cada vez (um sendo cilindro e o outro não), listando as características que as tornam diferentes.

2ª Aula: Medidas e Propriedades do Cilindro

- Introdução aos conceitos de raio da base, altura e geratriz.
- Explicação sobre o cálculo da área da superfície e do volume do cilindro.
- Atividade prática: Medição e cálculo do volume de um tronco de árvore ou tambor amazônico.

3ª Aula: Elementos Amazônicos em Forma de Cilindro

- Explanação sobre a construção de tipitis assim como elementos arquitetônicos amazônicos baseados no cilindro.
- Discussão sobre a escolha do formato cilíndrico para objetos de armazenamento de alimentos, tambores musicais, entre outros.

- Atividade: Os alunos desenham um modelo esquemático de um elemento cilíndrico amazônico, identificando suas partes.

4ª Aula: Aplicação e Reflexão.

- Problematização: Por que alguns elementos da Cultura Amazônica possuem formato cilíndrico?
- Comparação com outras estruturas baseadas no cilindro.
- Atividade prática: Construção de modelos cilíndricos utilizando alguns materiais disponibilizados pelo professor e outros materiais trazidos pelos próprios estudantes.
- Reflexão final: A importância da geometria na natureza e na Cultura da Amazônia.

Avaliação:

- Participação nas atividades e discussões.
- Resolução de problemas matemáticos envolvendo o cilindro.
- Produção de um pequeno relatório sobre a relação entre a matemática e os elementos cilíndricos da Região Amazônica.

4.5 - Sequência Didática 5: Formas Geométricas e a Cultura do Norte do Brasil.

Objetivo Geral: Explorar e aprender sobre formas geométricas (cilindro e esfera) através de contextos culturais e ambientais presentes no Norte do Brasil, utilizando recursos práticos e criativos.

1ª Aula: Introdução ao Conteúdo (30 minutos).

- Objetivos Específicos:
  - Identificar e compreender as propriedades do cilindro e da esfera.
  - Relacionar as formas geométricas com elementos do cotidiano e da cultura local.

- Atividade:
  - Iniciar a aula mostrando imagens de objetos que possuem a forma de cilindro e esfera. Exemplos:
    - Cilindro: coqueiros, troncos de árvores, construções de algumas materiais no Norte (como os Tipitis).
    - Esfera: frutas típicas como o bacaba, ouriço castanha e açaí.
- Discussão:
  - O que são cilindros e esferas? Quais são suas características principais (se possuem faces, arestas, vértices)?
  - Relacionar essas formas com o cotidiano da Região Norte, como a forma do coqueiro (cilindro) ou as frutas (esferas), pedindo que os alunos listem mais alguns exemplos.

2ª Aula: Trabalhando com Materiais Artificiais: Construindo Modelos (60 minutos).

- Objetivo Específico:
  - Aplicar o conceito de cilindro e esfera na construção de modelos com materiais diversos.
- Atividade:
  - Construção de modelos tridimensionais: Utilizar rolos de papelão (cilindros) e modelos diferentes de esferas para construir modelos simples de objetos que estão presentes na Região Norte.
    - Exemplo de construção:
      - Esfera e cilindro: Criar um modelo de cesto de frutas cilíndrico utilizando esferas para representar o açaí, a bacaba ou o ouriço de castanha (o modelo citado pode ser alterado dependendo da participação da turma, ou seja, caso a turma indique outro modelo a ser construído).

- Objetivo Prático:
    - A ideia é que os alunos compreendam como as formas geométricas podem ser usadas para representar objetos pertencentes à cultura local.
- Discussão:
    - Como esses materiais e objetos se relacionam com a vida cotidiana no Norte do Brasil? Quais adaptações as formas geométricas oferecem para essas culturas?

3ª Aula: Arte e Cultura: A Representação das Formas Geométricas na Arte Popular (45 minutos)

- Objetivo Específico:
    - Investigar a presença de formas geométricas na Arte Popular do Norte do Brasil.
- Atividade:
    - Exibir imagens de arte popular do Norte do Brasil, como as cerâmicas marajoaras, módulos alegóricos do Festival de Parintins, que fazem uso de formas geométricas. Os alunos podem observar como esferas, cones e cilindros são representados nas peças artísticas.
    - Criação de uma arte: Os alunos podem, então, criar suas próprias obras utilizando essas formas, como o modelo de uma cesta de frutas com o formato esférico ou a construção de um modelo de arquitetura usando cilindros, cones ou esferas.
- Material:
    - Tinta, pincéis, papel kraft ou cartolina, tesoura, cola, fitas.

4ª Aula: Conclusão e Reflexão (30 minutos)

- Objetivo Específico:
    - Consolidar o aprendizado sobre as formas geométricas e sua relação com a cultura local.

- Atividade:
  - Realizar um bate-papo final sobre o que os alunos aprenderam.
  - Reflexão: Como os cilindros e esferas são fundamentais na vida cotidiana e na Cultura do Norte do Brasil? Como essas formas influenciam tanto a natureza quanto a arte e a arquitetura local?
- Avaliação:
  - Avaliar os estudantes por meio da participação nas atividades práticas, bem como pela criatividade ao criar os modelos e obras de arte.

4.6 - Sequência Didática 6: Cone e Cilindro: Explorando a Ampulheta e seus Conceitos Geométricos.

Objetivo Geral: Compreender as formas geométricas do cone e do cilindro a partir do estudo de objetos culturais, como a ampulheta e outros utensílios semelhantes, reconhecendo suas propriedades geométricas e aplicando esse conhecimento em atividades práticas.

Objetivos Específicos:

- Identificar as propriedades do cone, da esfera e do cilindro.
- Relacionar essas formas geométricas com objetos culturais da região norte do Brasil.
- Desenvolver atividades práticas de construção e modelagem baseadas em conceitos geométricos.
- Refletir sobre a importância cultural e funcional de objetos como a ampulheta.

1ª Aula: Introdução ao Conteúdo e Contextualização Cultural

Atividade 1: Exposição e Discussão

- Objetivo: Apresentar o conceito de cone, esfera e cilindro, relacionando-os com a ampulheta.

- Desenvolvimento:
    - Inicie a aula apresentando imagens de ampulhetas e outros objetos semelhantes da cultura do norte do Brasil ou utensílios tradicionais de cerâmica.
    - Explique porque a ampulheta é composta por duas formas geométricas principais: um cone invertido e um cilindro, usados para armazenar a areia que mede o tempo.
    - Relacione essas formas geométricas com o cotidiano dos alunos, destacando como elas aparecem no design de diversos objetos, especialmente na cultura popular.

Discussão Guiada:

- Pergunte aos alunos se eles já viram ampulhetas ou objetos similares.
- Levante questões como: "O que esses objetos têm em comum em termos de forma?" ou "Como as formas geométricas ajudam na funcionalidade desses objetos?"

2ª Aula: Estudo das Propriedades Geométricas do Cone e Cilindro

Atividade 2: Definição e Propriedades

- Objetivo: Explorar as propriedades do cone e do cilindro de forma teórica.
- Desenvolvimento:
    - Explique as características do cone: base circular, altura, geratriz (linha que liga a base ao vértice), e a diferença entre o cone reto e oblíquo.
    - Em seguida, explique o cilindro: base circular, altura, e a relação entre o raio da base e a altura.
    - Use exemplos do cotidiano para ilustrar essas formas, como latas de refrigerante (cilindro), chapéus de festas (cones) e etc.

Atividade Prática:

- Distribua materiais (como cola, papel e tesoura) para que os alunos possam construir uma representação tridimensional de um cone e um cilindro.

- Ao construir, eles deverão calcular o volume e a área das formas.

3ª Aula: A Ampulheta e Suas Formas Geométricas

Atividade 3: Observação e Análise da Ampulheta

- Objetivo: Identificar como o cone e o cilindro se aplicam ao design da ampulheta.

- Desenvolvimento:

  - Peça aos alunos que observem uma ampulheta de perto, ou uma imagem ampliada.

  - Analise como o cone e o cilindro interagem na estrutura do objeto. A parte superior e inferior da ampulheta geralmente tem forma de cone (invólucro cônico), enquanto a área central, onde a areia é armazenada e se move, possui a forma cilíndrica.

  - Discuta com os alunos como essas formas são essenciais para o funcionamento do objeto, pois a areia precisa cair de maneira controlada pelo cilindro e pela passagem do cone.

Desafio Criativo:

- Proponha que os estudantes projetem um novo objeto que integre também dois dos três sólidos de revolução, usando suas próprias ideias para misturar ou modificar formas geométricas. Eles podem adicionar elementos novos, mas a forma básica dos corpos redondos deve ser mantida.

4º Aula: Atividade de Conclusão:

- Peça aos alunos que apresentem seus modelos, expliquem o processo de construção e discutam a relação entre as formas geométricas e a funcionalidade do objeto.

Avaliação:

- Avalie o envolvimento dos alunos nas atividades práticas e teóricas.

- Observe a compreensão das propriedades geométricas do cone e do cilindro e sua aplicação na construção do objeto.

- Avalie a criatividade e a capacidade de reflexão cultural ao apresentar suas ideias sobre as formas geométricas e sua importância nos objetos.

Essa sequência didática combina teoria, prática e reflexão cultural, permitindo aos alunos aprender sobre formas geométricas com foco na ampulheta e objetos derivados.

CAPÍTULO 5 - Diagnóstico Inicial e Aplicação das Sequências Didáticas.

Antes de iniciarmos a aplicação das sequências didáticas, realizamos a coleta de dados diagnósticos sobre os conhecimentos prévios dos estudantes em relação aos corpos redondos. Os resultados obtidos foram preocupantes e confirmaram nossa hipótese inicial: o conteúdo de corpos redondos encontra-se bastante defasado no ensino básico. Por meio da aplicação de um questionário, pudemos comprovar essa defasagem e reforçar a importância das sequências didáticas para contribuir no processo de aprendizagem dos nossos estudantes.

A seguir, traremos comentários de uma breve análise das dez questões do questionário, por serem de natureza mais objetiva.

A **primeira questão** solicitava que os alunos identificassem, entre quatro sólidos geométricos, aquele que pertence à categoria dos corpos redondos. A resposta correta era a esfera, e 96% dos participantes acertaram. No entanto, 4% indicaram opções como o cubo e o prisma. Apesar do alto índice de acertos, esta foi a questão com melhor desempenho, o que evidencia a necessidade de uma atenção especial à qualidade do ensino de matemática nas séries anteriores.

Na **segunda questão**, foi perguntado: “Qual das seguintes figuras possui uma base circular e uma única face lateral curva que converge para um vértice?”. O índice de acerto caiu para 77%. A presença de outras figuras da mesma categoria como alternativas pode ter gerado confusão, possivelmente devido à dificuldade dos alunos em diferenciar os corpos redondos entre si.

A **terceira questão** apresentou maior índice de erro (85%), ao perguntar sobre a quantidade de faces planas do cilindro. Apenas 15% dos estudantes assinalaram corretamente que o cilindro possui duas bases planas e uma face lateral curva, totalizando três faces. A maioria dos erros consistiu na escolha da alternativa “duas faces planas”, possivelmente pela ausência da percepção da planificação do sólido.

As **questões quatro e cinco**, que tratavam das descrições da esfera e do cilindro, tiveram índices semelhantes de acertos, em torno de 79%. No entanto, observamos respostas preocupantes, como a afirmação de que a esfera possui arestas e vértices, ou que o cilindro se assemelha a um prisma hexagonal. Tendo em vista que os alunos estão no 3º ano do Ensino Médio, essas respostas demonstram lacunas conceituais importantes.

As questões seguintes foram do tipo verdadeiro ou falso. Ainda assim, alguns estudantes não souberam julgar corretamente as afirmações apresentadas. A primeira afirmava que “a esfera possui uma face plana e uma curva”. Embora 87% tenham respondido corretamente que essa afirmativa é falsa, 13% erraram, e um terço destes afirmou não saber a resposta.

A afirmação de que “o cone possui uma base circular” foi corretamente identificada por 96% dos alunos, sendo um dos dados mais positivos do diagnóstico.

Por outro lado, a frase “o cilindro não possui vértices” revelou um dado alarmante: 56% dos estudantes marcaram como falsa. Isso indica que mais da metade dos participantes não reconhecem a ausência de vértices no cilindro - uma falha conceitual relevante, que pode estar relacionada tanto à interpretação textual quanto à compreensão geométrica.

As duas últimas questões de verdadeiro ou falso apresentaram bons índices de acertos, embora ainda cerca de 25% dos alunos tenham respondido incorretamente que todos os corpos redondos possuem pelo menos uma base plana, além de haver dúvidas quanto à característica de superfície totalmente curva da esfera.

Início das aplicações das sequências didáticas

As sequências didáticas foram iniciadas na primeira semana de junho, abordando os três sólidos conhecidos como corpos redondos (esfera, cone e cilindro), apresentados separadamente para cada uma das turmas do 3º ano da Escola Estadual Eng. Prof. Sérgio Alfredo Pessoa Figueiredo. No entanto, as atividades precisaram ser temporariamente interrompidas em virtude do período de realização do festival cultural da escola.

Durante esse intervalo, foi possível observar uma dificuldade generalizada por parte dos estudantes em resolver problemas envolvendo sólidos de revolução.

Essa dificuldade não se restringiu apenas aos corpos redondos, mas se estende a outros conteúdos de geometria. Como os sólidos trabalhados nesta pesquisa envolvem conceitos relacionados ao círculo, a complexidade percebida pelos alunos tende a aumentar, tornando o processo de aprendizagem mais desafiador.

Figura 11 – Aplicação das Sequências Didáticas

Fonte: Arquivo do Autor.

As aulas expositivas, como podemos notar na figura 11 acima, tiveram suas estruturas moldadas com o uso do Power Point e do software educacional GeoGebra. As imagens dos sólidos em três dimensões e planificados não foram apenas construídas para amostragem, em sala de aula também mostramos como podemos modelar os corpos redondos utilizando as ferramentas do aplicativo, fato esse que será comentado a seguir. Em virtude da curiosidade dos estudantes, apresentamos também outras possibilidade de uso do GeoGebra, tendo como objetivo despertar o raciocínio, o pensamento crítico e a imaginação dos alunos.

Inicialmente, os estudantes foram convidados a identificar objetos do cotidiano que se assemelhassem à esfera, cone e cilindro. Em seguida, discutimos as partes constituintes desses objetos, para que posteriormente, os estudantes pudessem construir os sólidos com base em suas próprias referências.

Durante esse processo, ficou evidente a dificuldade de muitos alunos em estabelecer essa conexão com o cotidiano, apesar de os exemplos estarem presentes no próprio ambiente escolar (garrafas, bolas, canetas, caixas d'água, etc.). Acreditamos que essa dificuldade esteja relacionada à ausência de memorização dos conteúdos teóricos, o que também foi observado em outras aulas com conteúdos que exigem fórmulas e regras.

Essas análises sobre os objetos ocorreram nas 3 primeiras aulas que trataram de esfera, cone e cilindro separadamente em turmas diferentes. Foram feitas demonstrações das fórmulas do perímetro e da área do círculo, das áreas de base e lateral do cone e cilindro, das área da superfície esférica e dos volumes do cone, do cilindro e da esfera. Com as fórmulas demonstradas, foram resolvidos alguns exemplos práticos presentes no CAPÍTULO 2 deste trabalho, para que pudessem visualizar as aplicações dos conteúdos trabalhados.

ESFERA

A primeira sequência foi aplicada na turma do 3º ano 1, com o conteúdo da esfera. Em aula expositiva, utilizamos um slide montado em Power Point com demonstrações de fórmulas contidas no CAPÍTULO 2, algumas imagens oriundas de sites da internet para relacionar objetos, frutas entre outras construções esféricas da região amazônica para tentar ampliar o leque de informações dos estudantes sobre o conteúdo.

Foram também utilizadas imagens produzidas no GeoGebra como a projeção tridimensional da esfera, que pode ser modelada indo no campo "JANELA 3D" após abrirmos o GeoGebra, em seguida conseguimos visualizar um botão na barra de ferramentas do software que possui um desenho de esfera. Em seguida o aplicativo nos mostra duas opções, a primeira consiste em construirmos uma esfera indicando onde será seu centro e um ponto pertencente à superfície esférica (Esfera: Centro & Ponto), e a outra pede que você indique onde será o centro da esfera e o tamanho do seu raio (Esfera: Centro & Raio). A partir das informações que temos, fazemos a escolha da ferramenta e modelamos nosso sólido.

A parte de planificação da esfera para construção física na dinâmica, levamos em consideração o poliedro Icosaedro-Truncado, um sólido de Arquimedes que remete às Bolas de Futebol mais antigas, podendo trazer um pouco mais a atenção dos estudantes para a atividade e a tornando um pouco mais simples. Com o uso do software educacional Poly, foi feita a mostra da projeção tridimensional do poliedro assim como sua forma planificada, para servir de base aos estudantes no momento de desenvolvimento da dinâmica.

Utilizando régua, compasso, papel kraft, cola e tesoura, os estudantes construíram um Icosaedro-Truncado. Após a construção, inflaram um balão no interior do poliedro para simular o formato da esfera, com isso, a atividade gerou grande engajamento, promovendo o aprendizado de forma lúdica e concreta, como pode ser observado a seguir:

Figura 12 – Sequência Didática sobre esfera

Fonte: Arquivo do Autor.

CONE

Na segunda sequência, abordamos o cone. Assim como na atividade anterior, os alunos foram estimulados a pensar em objetos com formato cônico. As pontas de lápis, tampas de garrafas e sólidos disponíveis na sala foram algumas das associações feitas. Após o debate, aprofundamos os elementos estruturais do cone (raio, altura, geratriz), e explicamos as diferenças entre cones retos e oblíquos. Em seguida, apresentamos imagens de sua planificação e projeção 3D modeladas no software educacional GeoGebra, assim como mostramos em sala de aula como podemos construir os modelos utilizando as ferramentas do aplicativo.

A princípio, para construirmos a planificação de um cone reto clicamos no botão remetente a ângulo e escolhemos a ferramenta de "Ângulo com Amplitude Fixa", onde precisamos indicar a posição de dois pontos (A e B) no plano cartesiano e em seguida acrescentamos o ângulo, assim, o aplicativo se encarrega de fazer a marcação do terceiro ponto (A') definindo os vértices da área lateral planificada do cone. O próximo passo é traçar segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BA'}$ utilizando a ferramenta "Segmento" formando o ângulo $\hat{B}$, e para fecharmos a área lateral, precisamos gerar um arco clicando no botão "Arco Circular" que nos permite modelar um arco a partir de 3 pontos.

Como construímos 1/3 de um círculo de raio 6, o comprimento do arco gerado é igual a 4π, sendo assim o raio do círculo que será base desse cone é igual a 2, por consequência da expressão que determina o comprimento de uma circunferência. Por fim, precisamos ir até a ferramenta "Círculo: Centro & Raio" para construirmos a base de nosso cone indicando o centro e o raio respectivamente.

Seguindo esse processo, modelamos a projeção 3D do mesmo cone que possui raio da base igual a 2 e geratriz igual a 6, que por consequência do teorema de Pitágoras temos um cone de altura igual a $\sqrt{32}$ ou $4\sqrt{2}$. A partir daí, so precisamos ir no campo de “Janela de Visualização 3D” e encontrar a ferramenta “Cone”, onde vamos precisar indicar o centro da base, o vértice do cone e por fim, o raio da base. Após esses processos, utilizamos as imagens para realizar a demonstração das fórmulas de áreas e volume, com base no Princípio de Cavalieri, destacando a proporção de volumes entre o cone e o cilindro.

Pelo Princípio foi possível perceber que a proporção de volume entre um cone e um cilindro de mesma base e mesma altura é idêntica à proporção entre prisma e pirâmide que possuem a proporção de 1 para 3 (um prisma possui o volume de 3 pirâmides de mesma base e mesma altura), da mesma forma que o cilindro possui o volume de 3 cones de mesma base e mesma altura.

A atividade culminou na construção de Ocas indígenas em formato cônico. Os estudantes, divididos em grupos, escolheram modelos diferentes, estimulando a criatividade e a autonomia. A conexão entre cultura e geometria fortaleceu o interesse dos alunos e contribuiu para uma aprendizagem mais significativa.

Figura 13 - Oca Indígena 1

Fonte: Arquivo do Autor.

As imagens acima mostram o processo de construção de uma das Ocas que possui um formato específico característico de povos originários nômades da América do Norte que costumavam montar suas tendas cônicas em planícies para facilitar o transporte das mesmas segundo Felipe Carreira.

Este estilo de Oca da imagem a seguir, já pode ser encontrada na região amazônica e a inspiração para que os alunos a construíssem pode estar relacionada à aula de apresentação do cone, que tratavam de suas características e propriedades entre outras coisas. A dinâmica de construção nessa turma era especificamente sobre construção de Ocas indígenas com o formato cônico, e quando a turma foi dividida em dois grupos para o início das atividades, os grupos escolheram imediatamente modelos diferentes para produzir, deixando um pouco mais interessante o processo, pois um grupo não se preocupava com o outro, e a criatividade dos estudantes precisou ser acionada.

Figura 14 – Oca Indígena 2

Fonte: Arquivo do Autor.

A parte criativa dos alunos é de muita importância dentro do processo de resolução de problemas, principalmente quando esses são relacionados à matemática e mais ainda quando tratamos da geometria.

CILINDRO

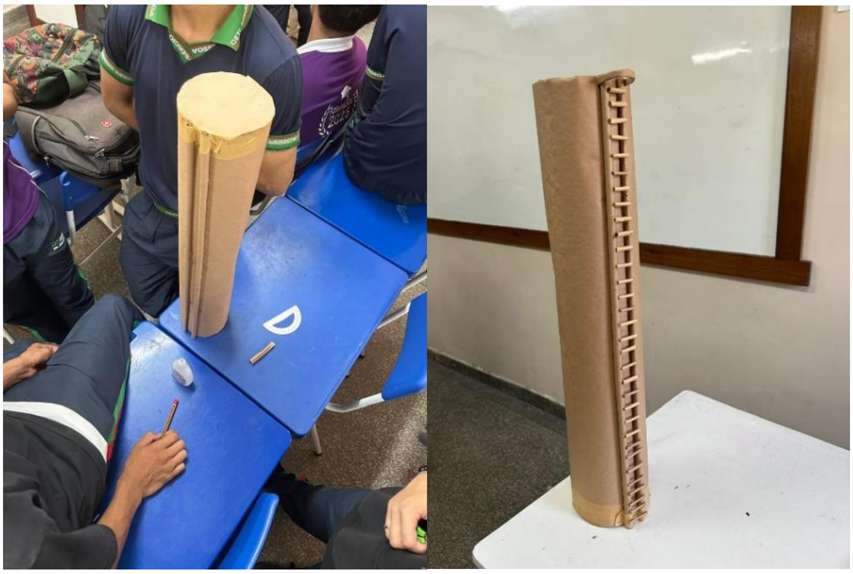
Na terceira sequência, exploramos as características e propriedades do cilindro, a partir de modelos produzidos no software educacional GeoGebra onde não apenas mostramos as imagens criadas, mas também os ensinamos a modelar utilizando as ferramentas do aplicativo, algo que iremos detalhar a seguir. Na construção da planificação do cilindro, por ser mais simples de modelar, precisamos inicialmente definir o tamanho do raio da base e sua altura, para que tenhamos dimensões mais aproximadas dos valores reais.

Foram definidas então as dimensões de raio igual a 3 e altura igual a 4, sendo assim, pela consequência da expressão de comprimento da circunferência, precisamos moldar um retângulo com largura igual a 4 e comprimento igual a 6π, medida essa que aproximamos para

18,8. Com isso, partimos para o Geogebra para a construção da planificação do cilindro indo em direção da ferramenta “Segmento”. Essa opção nos permite traçar todos os segmentos da forma que nos for conveniente, dessa forma, traçamos dois segmentos de tamanho 4 e dois de tamanho 18,8 dispostos em formato retangular com o comprimento no sentido horizontal, e para finalizar o molde da planificação, foi preciso utilizar a ferramenta “Círculo: Centro & Raio” para construir um círculo tangenciando a parte superior do retângulo e o outro na parte inferior.

Seguindo o processo, partimos para a “Janela de Visualização 3D” para construirmos a projeção 3D do cilindro, nos direcionando à ferramenta “Cilindro” que nos permite modelar o mesmo indicando apenas o centro da base inferior, o centro da base superior e o raio da base. Após o processo de modelagem da planificação e projeção 3D do cilindro, comentando cada detalhe o passo subsequente se tornou um pouco mais simples, onde trouxemos as demonstrações de suas fórmulas de áreas de base e lateral assim como a formula de volume do mesmo, mencionando o Princípio de Cavalieri que é de grande importância.

Figura 15 – Projeto da caixa d’água da escola



Fonte: Arquivo do Autor.

As imagens apresentadas acima mostram o processo de construção de um modelo cilíndrico. O objeto construído foi a caixa d'água da escola, escolhida pelos próprios alunos por ser de fácil representação e visualização. O grupo que a construiu finalizou a tarefa mais rapidamente, demonstrando domínio da forma cilíndrica.

O outro grupo, inspirado por vivências regionais, produziu um paneiro, objeto tradicional utilizado em comunidades amazônicas sendo um cesto tradicionalmente trançado à mão, muito utilizado por populações indígenas e ribeirinhas da região amazônica. Produzido com fibras naturais, o paneiro é leve, resistente e possui formato cilíndrico ou cônico, com alças que permitem seu transporte nas costas, semelhante a uma mochila. Sua usabilidade está fortemente ligada à vida cotidiana das comunidades amazônicas. Ele é utilizado para carregar alimentos, produtos da roça, pescados, artesanato e outros itens durante deslocamentos em trilhas ou de barco. Além de sua função prática, o paneiro carrega um valor cultural significativo, sendo símbolo de saberes tradicionais, sustentabilidade e conexão com a natureza. Sua produção artesanal representa uma forma de renda para muitas comunidades e contribui para a preservação do patrimônio cultural amazônico.

Figura 16 - Paneiro

Fonte: Arquivo do Autor.

Nas imagens acima, podemos ver momentos onde os alunos tecem o paneiro já finalizado. Nesse processo, enquanto professor, ofereci suporte inicial aos alunos na construção do objeto uma vez que, embora tivessem familiaridade prévia e imagens mentais deles, demonstravam certa confusão e insegurança quanto à forma adequada de representá-lo.

O paneiro foi o objeto que precisou de mais tempo pra ser produzido, todos os outros objetos levaram cerca de duas aulas para ficarem prontos, porém o paneiro levou 4 aulas para ser finalizado pois se desmanchava com facilidade e tinham alunos participando da construção que não possuíam jeito algum para a tarefa, por isso, precisei intervir para que a atividade não se alongasse mais.

Após a finalização das construções, realizamos medições das dimensões dos sólidos produzidos e aplicamos os cálculos de áreas e volumes com base nas fórmulas estudadas. Esse processo de articulação entre teoria e prática mostrou-se essencial para a assimilação dos conteúdos.

Para dar continuidade às sequências, as turmas que ainda não trabalharam determinados sólidos receberão novas atividades voltadas a esses conteúdos, garantindo que todos os estudantes tenham acesso às três temáticas abordadas: esfera, cone e cilindro.

Iniciando as aplicações das últimas sequências didáticas, complementamos o conhecimento das turmas em relação aos corpos redondos, detalhando com cada uma delas os sólidos que ainda não haviam sido trabalhados. Por exemplo, no 3º ano 1, foi apresentado na primeira sequência os conceitos de esfera, com isso, na segunda abordamos as noções de áreas e volume do cone e do cilindro, apresentando suas construções e demonstrações de suas fórmulas. Essa mesma lógica também foi aplicada nas turmas do 3º ano 2 e 3º ano 3.

As apresentações dessas ultimas sequências didáticas seguiram a mesma lógica das primeiras, com um diálogo inicial sobre o formato dos sólidos, relacionando-os com objetos pertencentes ao cotidiano dos alunos e também, apresentando utensílios e construções regionais que obedecem a mesma regra.

A sequência número 4 foi aplicada na turma do 3º ano 2 e se tratava sobre cilindro e esfera, pois nas aulas anteriores o conteúdo de cone já havia sido abordado. Demos início à sequência pedindo que os alunos buscassem na memória elementos que fossem pertencentes aos seus cotidianos e que se assemelhassem aos sólidos trabalhados, da mesma forma que iniciamos todas as aulas, tentando estimular a memória e a imaginação dos estudantes, para que em seguida, fizéssemos um diálogo dinâmico sobre as estruturas desses corpos redondos.

No diálogo, foi percebido que os estudantes tinham mais familiaridade com os sólidos, ou pelo menos que o cilindro e a esfera foram são mais facilmente percebidos do que o cone. Ainda no contexto do diálogo, pudemos falar um pouco sobre algumas características do cilindro como raio, altura e sobre não possuir um vértice, e também sobre especificidade da esfera por ser uma superfície totalmente curvada, não contendo faces nem vértices.

Em seguida iniciamos as demonstrações das expressões que nos permitem calcular áreas de base a lateral do cilindro, assim como a área da superfície esférica e também os volumes dos dois sólidos. Essas demonstrações foram feitas com base nas imagens planificadas e projeções tridimensionais produzidas no GeoGebra, assim como mencionado nos comentários das sequências anteriores, detalhando o processo de construção das imagens e mencionando também os Princípios de Arquimedes e Cavalieri, que são de fundamental importância para o entendimento dessas demonstrações desenvolvidas no ensino básico.

Em seguida, partimos para a atividade prática onde os estudantes precisaram se dividir em dois grupos e discutir sobre o modelo que iriam construir. As regras eram que os estudantes poderiam projetar um objeto que utilizasse dois dos três corpos redondos, mas também, poderiam acrescentar outros poliedros da escolha do grupo para complementar a estrutura.

Figura 17 – Produção dos modelos do 3º ano 2

Fonte: Arquivo do Autor.

Nas imagens apresentadas, observa-se que os grupos optaram por desenvolver diferentes tipos de objetos. O grupo à esquerda escolheu construir uma figura humanoide, enquanto o grupo à direita optou por modelar um pinguim. Para a confecção das esferas utilizadas nos projetos, ambos os grupos adotaram a técnica de moldar bolas de papel amassado, ajustando-as manualmente até que se aproximassem da forma esférica desejada. À medida que o tempo avançava, foi possível acompanhar a materialização dos modelos, resultado da criatividade e da capacidade de improvisação dos estudantes na elaboração dos sólidos geométricos.

Figura 18 – Projetos do 3º ano 2

Fonte: Arquivo do Autor.

Como podemos ver as imagens acima, conseguimos observar o pinguim na cor rosa contendo duas esferas representando corpo e cabeça, o cone representando o bico da ave e o cilindro formando sua cartola. Já na imagem da direita, os estudantes representaram uma boneca humanoide onde os braços e pernas foram modelados em formato de cilíndrico, o corpo em formato cônico e a cabeça esférica. Nos dois objetos construídos pelos estudantes, não podemos deixar de observar que os mesmos deram asas à imaginação para que esses modelos se tornassem arte a partir da modelagem matemática.

A aplicação da sequência didática número 5, foi realizada na turma do 3º ano 1 abordando os sólidos cone e cilindro, complementando assim os conceitos relacionados aos três corpos redondos, pois a turma já havia participado da sequência didática específica de esfera. O processo de desenvolvimento das aulas se deu nos mesmos moldes trabalhados nas apresentações anteriores, com o diálogo entre professor e alunos em relação aos formatos e elementos característicos desses sólidos de revolução.

Em seguida, iniciamos o processo de demonstração das fórmulas que tornam práticos os cálculos de áreas de base, lateral e total, assim como o volume do cilindro e do cone. Para isso foram utilizadas imagens dos sólidos compiladas no software educacional GeoGebra, com o intuito de facilitar a interpretação geométrica dos estudantes enquanto fixavam suas atenções nas explicações de onde surgiam os termos pertencentes às fórmulas e o porquê. Pode-se perceber o fato de que nas demonstrações das expressões relacionadas ao cone e ao cilindro, os estudantes apresentaram menos dificuldades em compreender os conceitos necessários para tal tarefa.

Outro fato percebido foi que os estudantes tem menos interesse nessa parte do processo de ensino-aprendizagem, fato que não podemos dar certezas do(s) motivo(s) desse acontecimento, mas uma das possibilidades disso é muito discutido nas aulas do PROFMAT por professores e acadêmicos, que diz respeito a uma falha no processo de ensino, onde os professores podem não desenvolver as demonstrações de fórmulas caso o conteúdo trabalhado exija. Essa falta de costume em ver as demonstrações, unida com a falta de curiosidade dos estudantes em tentar entender o porquê de deles usarem certas fórmulas, podem ser os principais motivos para o baixo interesse nesta etapa do processo. Mesmo após essa observação, continuamos acreditando que as demonstrações das expressões dos conteúdos trabalhados podem ser fundamentais para um melhor entendimento dos estudantes em relação aos conceitos.

Figura 19 – Produção dos modelos do 3º ano 1

Fonte: Arquivo do Autor.

Na aula seguinte, deu-se início a atividade prática que consistia em construir com a utilização de dois ou três corpos redondos, um objeto que os relacionasse. A sala de aula foi dividida em dois grandes grupos e a partir daí, os estudantes começaram a projetar seus modelos para identificarem os materiais que utilizariam a mais do que os que foram disponibilizados, como tesoura, compasso, régua, transferidor, lápis, borracha, papel cartão, cola, apontador e esquadro.

Na construção, os estudantes sempre vinham retirar alguma dúvida como “Professor, como podemos desenhar a área lateral de um cone a partir desse círculo?”, “É obrigatório iniciar a construção do cone pela base?”, ou “É obrigado iniciar a construção do cilindro pela base?”. A partir desses questionamentos, esclarecíamos aos alunos que a construção dos sólidos pode ser iniciada por qualquer uma de suas faces, e que os cálculos subsequentes dependerão da escolha realizada.

No caso do cone, ao iniciar a construção pela base, torna-se necessário determinar o comprimento da circunferência e considerar o grau de abertura do sólido, avaliando se este deverá ser mais ou menos alongado em sua extremidade superior da mesma, esclarecemos sobre as etapas de construção do cilindro. Por conta do período curto que tivemos para desenvolver as atividades práticas, e pela complexidade da construção, optaram por produzir a esfera amassando papéis até que se aproximassem de seu formato original.

Figura 20 – Projetos do 3º ano 1

Fonte: Arquivo do Autor.

Nas imagens acima, estão os resultados dos dois modelos produzidos pela turma do 3º ano 1, onde na imagem da esquerda temos um modelo fazendo referência ao Boi Bumbá Caprichoso (um dos dois bois que disputam o festival folclórico de Parintins), que utilizaram apenas o cilindro dos corpos redondos que foi complementado com o círculo e outras formas geométricas. Na imagem da direita, podemos ver o uso dos 3 corpos redondos, o cone e a esfera combinados formando a estrela, e o cone e cilindro combinados representando o formato da árvore de natal.

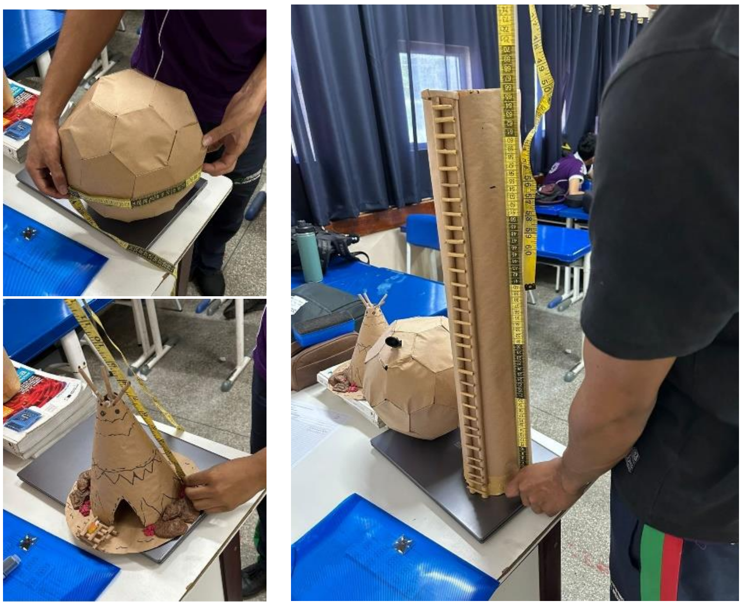
Já a sequência didática número 6, é a mais completa, pois aborda todos os 3 corpos redondos. A mesma foi aplicada na turma do 3º ano 3 e nos permitiu fazer uma revisão do conteúdo trabalhado com os estudantes antes do período do Festival Cultural e do recesso escolar, fato esse que baseado na teoria de David Ausubel pode ter causado uma aprendizagem mais significativa dos conceitos de cone, conteúdo esse que que foi revisado na aplicação desta sequência.

No entanto, as aulas obedeceram ao mesmo padrão de desenvolvimento, fazendo com que as 3 turmas tivessem acesso a experiências semelhantes em relação aos corpos redondos. Nessa turma, o processo de demonstração das expressões de área e volume do cilindro foi bem fluido, com menos percalços, já quando o assunto foi a demonstração das expressões de área da superfície esférica e volume da esfera, foi observada uma grande dificuldade na assimilação dos conceitos assim como observado nas outras turmas.

Mesmo com a apresentação das imagens modeladas no GeoGebra, modificando a angulação das mesmas para termos diferentes pontos de vista, reexplicando o Princípio de Cavalieri e apresentando a eles o Princípio de Arquimedes, a compreensão dos estudantes sobre o tema esfera pode não ter sido o esperado. Acreditamos que esse fato pode estar ocorrendo em virtude de três aspectos não estarem alinhados, a curiosidade, a criatividade (imaginação) e o raciocínio lógico dos estudantes, pois a curiosidade é o desejo intenso de ver e conhecer algo novo; a criatividade já é a capacidade de gerar, avaliar ou mesmo de aprimorar algo a partir de ideias próprias; e o raciocínio lógico organizaria tudo isso e dá-los-ia a capacidade cognitiva para avaliar contextos a fim de resolver problemas, tomar decisões e chegar em conclusões lógicas.

Em virtude desse fato, uma das atividades desenvolvidas com a turma foi de utilizar objetos desenvolvidos nas sequências didáticas anteriores para medir comprimentos de circunferências, alturas e no caso da esfera, o meridiano. Na sequência dessas medições praticas, partimos para o processo de cálculo de áreas de base, áreas laterais, área de superfície e volume dos sólidos construídos pelos estudantes, a bola de futebol, a caixa d’água da escola e uma oca inspirada em moradias de povos originários dispostos nas imagens a seguir.

Figura 21 – Medições dos objetos construídos pelos estudantes



Fonte: Arquivo Autor.

Nas medições, extraímos em relação ao cilindro: altura e comprimento da circunferência de base; em relação ao cone: a geratriz e o comprimento da circunferência de base; e da esfera, apenas o meridiano. Na mesma aula, foi possível desenvolver todos os cálculos de áreas e volume do cilindro, respondendo todos os questionamentos dos estudantes.

Na figura 22, com a devida aproximação, conseguimos observar na lateral direita do quadro branco as anotações dos dados obtidos através da medição dos objetos que representam os corpos redondos, onde:

Os dados do cilindro são: altura = 66 cm, e Comprimento da circunferência = 41 cm;

Os dados do cone: a geratriz = 23 cm, e Comprimento da circunferência = 46 cm;

Os dados da esfera: meridiano = 82 cm.

Figura 22 – Cálculos de áreas e volumes dos objetos medidos

Fonte: Arquivo do Autor.

Os cálculos de áreas e volumes relacionados ao cilindro estão todos alinhados na lateral esquerda do quadro contido na figura 22, onde na região central se encontram alguns cálculos referentes ao cone e algumas multiplicações e divisões necessárias em virtude de revisão esses conceitos em se tratando de números racionais.

Já os cálculos de altura e volume do cone só foram feitos em uma aula posterior, pois o volume necessitava do valor referente à altura do cone, e essa informação para ser encontrada carecia de um pouco mais de tempo por conta do uso do teorema de Pitágoras com números decimais. Por isso, foram finalizados apenas na próxima aula juntamente com os cálculos de área da superfície e volume da esfera.

Em seguida, para finalizar a aplicação da sequência didática, partimos para atividade prática de modelagem que consistia em aplicar os conhecimentos adquiridos para construir um boneco utilizando pelo menos dois dos três corpos redondos, onde disponibilizamos os mesmos materiais utilizados com as outras turmas.

Figura 23 – Construção dos modelos do 3º ano 3

Fonte: Arquivo do Autor.

Nas imagens acima podemos visualizar o início das construções dos bonecos pelos dois grupos em que a sala foi dividida, e pelos projetos comentados pelos grupos, os dois bonecos vão ser um pouco diferentes. O grupo da foto à esquerda decidiu utilizar apenas dois sólidos de revolução juntamente com alguns poliedros tendo como base um personagem de Minecraft, já o grupo da foto à direita, decidiu utilizar os três corpos redondos em sua modelagem.

Assim como ocorreu nas demais turmas, no 3º ano 3 o processo de construção dos sólidos seguiu dinâmica semelhante. Sempre que os estudantes demonstravam dificuldades na projeção e modelagem das figuras, recorriam à mediação docente em busca de esclarecimentos sobre os procedimentos de construção. Para tornar as explicações mais compreensíveis, realizávamos conjuntamente as medições necessárias, de modo a viabilizar os cálculos envolvidos, ao mesmo tempo em que explicitávamos o propósito de cada etapa do processo.

Figura 24 – Projetos dos 3º ano 3

Fonte: Arquivo do Autor.

Como podemos ver nas imagens anteriores, os dois grupos não utilizaram os sólidos de revolução da mesma forma, a imagem da esquerda é uma adaptação de um personagem do Minecraft, porém, com algumas modificações como por exemplo o corpo e as pernas no formato cilíndrico assim como um chapéu cônico. Na imagem da direita, a equipe utiliza os três sólidos usando o cilindro como corpo, o cone como braços e pernas, e a cabeça com o formato esférico.

Pudemos perceber que nas aplicações dessas sequências didáticas que esse formato de atividade desperta um engajamento diferente na maioria dos estudantes, é uma pena que não consigamos atingir todos os participantes da mesma forma para que despertasse neles a dedicação adequada para assimilar os conceitos matemáticos relacionados a esses sólidos.

Buscando diversificar as abordagens dos conceitos, foi elaborada a sétima sequência que utiliza estritamente a tecnologia para efetuar o processo de ensino e aprendizagem dos corpos redondos com o uso do software educacional Geogebra. Nesta, iniciamos com a apresentação devida do cilindro, cone e esfera, mostrando imagens de objetos com esses formatos e esclarecendo as características específicas de cada um deles.

Em seguida, utilizamos uma aula para construir cone, cilindro e esfera separadamente, detalhando esse processo e apresentando as ferramentas do Geogebra para os estudantes. Em se tratando do cone, construirmos a planificação de um cone reto, clicamos no botão remetente a ângulo e escolhemos a ferramenta de "Ângulo com Amplitude Fixa", onde precisamos indicar a posição de dois pontos (A e B) no plano cartesiano e em seguida acrescentamos o ângulo, assim, o aplicativo se encarrega de fazer a marcação do terceiro ponto (A') definindo os vértices da área lateral planificada do cone. O próximo passo é traçar segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BA'}$ utilizando a ferramenta "Segmento" formando o ângulo $\hat{B}$, e para fecharmos a área lateral, precisamos gerar um arco clicando no botão "Arco Circular" que nos permite modelar um arco a partir de 3 pontos.

Como construímos 1/3 de um círculo de raio R, o comprimento do arco gerado é igual a 2πR/3, sendo assim o raio do círculo que será base desse cone é igual a R/3, por consequência da expressão que determina o comprimento de uma circunferência. Por fim, precisamos ir até a ferramenta "Círculo: Centro & Raio" para construirmos a base de nosso cone indicando o centro e o raio respectivamente.

Seguindo esse processo, modelamos a projeção 3D do mesmo cone que possui raio da base igual a R/3 e geratriz igual a R, que por consequência do teorema de Pitágoras temos um cone de altura igual a $\frac{2R\sqrt{2}}{3}$. A partir daí, só precisamos ir no campo de "Janela de Visualização 3D" e encontrar a ferramenta "Cone", onde vamos precisar indicar o centro da base, o vértice do cone e por fim, o raio da base. Após esses processos utilizamos as imagens para realizar a demonstração das fórmulas de áreas e volume, com base no Princípio de Cavalieri, destacando a proporção de volumes entre o cone e o cilindro.

Na aula seguinte, desenvolvemos o mesmo processo só que em relação ao cilindro, que na construção de sua planificação, por ser mais simples de modelar, precisamos inicialmente definir o tamanho do raio da base e sua altura, para que tenhamos dimensões mais aproximadas dos valores reais.

Foram definidas então as dimensões de raio igual a r e altura igual a h, sendo assim, pela consequência da expressão de comprimento da circunferência, precisamos moldar um retângulo com largura igual a h e comprimento igual a 2πr, medida essa que pode ser aproximada. Com isso, partimos para o GeoGebra para a construção da planificação do cilindro indo em direção da ferramenta "Segmento". Essa opção nos permite traçar todos os segmentos da forma que nos for conveniente, desse modo, traçamos dois segmentos de tamanho h e dois de tamanho 2πr dispostos em formato retangular com o comprimento no sentido horizontal, e para finalizar o molde da planificação, foi preciso utilizar a ferramenta “Círculo: Centro & Raio” para construir um círculo tangenciando a parte superior do retângulo e o outro na parte inferior.

Seguindo o processo, partimos para a “Janela de Visualização 3D” para construirmos a projeção 3D do cilindro, nos direcionando à ferramenta “Cilindro” que nos permite modelar o mesmo indicando apenas o centro da base inferior, o centro da base superior e o raio da base. Após o processo de modelagem da planificação e projeção 3D do cilindro, comentando cada detalhe o passo subsequente se tornou um pouco mais simples, onde trouxemos as demonstrações de suas fórmulas de áreas de base e lateral assim como a fórmula de volume do mesmo, mencionando o Princípio de Cavalieri que é de grande importância.

E para finalizar as aplicações, desenvolvemos uma última aula para mostrar como a esfera pode ser construída acessando a “Janela 3D” do software GeoGebra e localizando a ferramenta “Esfera: Centro e Ponto”, em que precisamos indicar a localização do ponto central da esfera e em seguida indicar um outro ponto pertencente a superfície esférica, ou “Esfera: Centro e Raio” onde precisamos apenas indicar a localização do ponto central e a medida do raio da esfera. Após o término dessa etapa, fizemos uma breve revisão das aulas passadas utilizando os documentos construídos e salvos nas apresentações anteriores, e assim concluímos as aplicações das sequências didáticas.

CONCLUSÃO

Dessa forma, conclui-se que, embora a integração entre a modelagem matemática e as tecnologias educacionais represente um caminho promissor para a inovação no ensino, seu potencial transformador depende de uma abordagem mais ampla e articulada. Para que esses recursos impactem de maneira significativa a aprendizagem, é fundamental que sejam acompanhados por políticas públicas consistentes, que promovam a equidade no acesso e incentivem o uso pedagógico adequado dessas ferramentas.

Nesse contexto, torna-se essencial que as instâncias responsáveis pela gestão da educação atuem com maior responsabilidade, garantindo que nenhuma escola fique sem professores e que haja investimentos na construção de novas unidades escolares, a fim de atender à demanda e contribuir para a redução do número excessivo de estudantes por sala de aula.

Além disso, é indispensável investir na formação continuada dos profissionais da educação, assegurando que estejam preparados para utilizar as tecnologias de forma crítica, criativa e alinhada às demandas do século XXI.

Outro ponto importante é o estímulo ao interesse dos estudantes pelos estudos. O uso de tecnologias digitais, aliado à construção e manipulação de objetos físicos, tem se mostrado eficaz nesse sentido, promovendo maior engajamento, autonomia e participação ativa nas aulas. Ainda assim, desafios relevantes permanecem, como o acesso desigual às tecnologias e a disparidade na compreensão conceitual entre alunos com diferentes níveis de proficiência.

Criar ambientes escolares mais motivadores, inclusivos e desafiadores pode ser a chave para despertar a curiosidade e o protagonismo dos estudantes.

Assim, conclui-se que, embora promissoras, as práticas que envolvem a modelagem matemática e o uso de tecnologias educacionais exigem a participação de políticas públicas efetivas, a formação contínua dos profissionais da educação e estratégias que despertem o interesse dos estudantes. Somente com a articulação desses elementos será possível explorar plenamente o potencial dessas ferramentas como instrumentos de transformação educacional, avançando rumo a uma educação básica de qualidade.

ANEXO 1 - **QUESTIONÁRIO: CORPOS REDONDOS**

Parte 1: Questões Objetivas (Múltipla Escolha)

1. Qual das opções abaixo é um exemplo de corpo redondo?
A) Cubo
B) Prisma
C) Esfera
D) Pirâmide

2. Qual das seguintes figuras possui uma base circular e uma única face lateral curva que converge para um vértice?
A) Cilindro
B) Cone
C) Cubo
D) Esfera

3. Um cilindro possui quantas faces planas?
A) Nenhuma
B) Uma
C) Duas
D) Três

4. A esfera difere dos outros corpos redondos por:
A) Ter arestas curvas
B) Ter apenas uma base
C) Ter uma superfície totalmente curva, sem faces planas
D) Ter vértices

5. Qual dos seguintes corpos redondos pode ser descrito como tendo duas bases circulares paralelas e uma superfície lateral curva?
A) Cone
B) Esfera
C) Cilindro
D) Prisma hexagonal

Parte 2: Verdadeiro ou Falso

6. ( ) A esfera possui uma face plana e uma curva.
7. ( ) O cone tem uma base circular.
8. ( ) O cilindro não possui vértices.
9. ( ) Todos os corpos redondos possuem pelo menos uma base plana.
10. ( ) A superfície da esfera é totalmente curva.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. *A Aprendizagem Significativa: a teoria de David Ausubel*. São Paulo: Centauro, 2003.

BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 2011.

BOYER, C. B. *História da matemática*, Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

BURAK, D. *Modelagem Matemática: Ações e Interações no processo de ensino e Aprendizagem*. Campinas – SP, 1992. p. 17–95.

CARREIRA, F. *Casas das Tribos Nativas Americanas*. Grupos de Estudos Americanistas. Disponível em: https://geaciprianobarata.blogspot.com/2014/07/casas-das-tribos-nativas-americanas.html. Acesso em: 03 jul. 2025.

COELHO, R. F. *O Uso do Software Educacional Poly e Modelagem Matemática como Recursos Pedagógicos para o Ensino e Aprendizagem de Poliedros*. Repositório da UEA, 2017.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática - elo entre as tradições e a modernidade*. 4. ed. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

D'AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática se Ensina?*. Bolema, Rio Claro – SP, v. 3, n. 4, 1988. p. 1–3.

DUARTE, N. R. *Educação Matemática: Fundamentos e Métodos para o Ensino da Geometria*. Campinas: Papirus, 2015.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*; [tradução Hygino H. Domingues]. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GIL, A. C. *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HEATH, T. L. *The Works of Archimedes*. Londres: Cambridge University Press, 1897.

IEZZI, G. *Matemática: Ciência e Aplicações: ensino médio*, volume 2 / Gelson Iezzi...[et. al.]. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

KÖCHE, J. C. *Fundamentos de Metodologia Científica: Teoria da Ciência e Iniciação à Pesquisa*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

KRÄMER, P.; NESSLER, S. H.; SCHLÜTER, K. Teacher Students' Dilemmas When Teaching Science Through Inquiry. *Research in Science and Technological Education*, Adingdon, UK, v. 33, n. 3, p. 325–343, 2015.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. *Fundamentos de Metodologia Científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LORENZATO, S. *Os Saberes Necessários ao Professor de Matemática*. Campinas: Autores Associados, 2006.

MATOS, M. M. F. R. M. *Novas Tecnologias, Novas Pedagogias? Contributo para a reflexão sobre a utilização pedagógica das novas tecnologias em sala de aula*.

MOREIRA, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel*. In: *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula*. Brasília: UnB, 2007. p. 13–43.

OLIVEIRA, D. et al. *O Método Hipotético Dedutivo no Ensino Fundamental: Uma Proposta Prática Para o Ensino de Ciências Naturais no Tema Transpiração das Plantas*. *Revista REAMEC*, 2018, p. 37–50.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigar para Aprender Matemática*. Porto: Edições ASA, 2012.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. *Metodologia do Trabalho Científico [recurso eletrônico]: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico*. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

THIOLLENT, M. *Metodologia da Pesquisa-Ação*. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011.