RIO

PUC

Dissertação de Mestrado

Relação de Euler para poliedros convexos

Uma abordagem utilizando material concreto e o software GeoGebra para alunos do sexto ano

Hallef Julia Macabu

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Centro Técnico Científico
Departamento de Matemática

Rio de Janeiro, 01 de abril de 2026

Pontifícia
Universidade
Católica do
Rio de Janeiro

Dissertação de Mestrado

Relação de Euler para poliedros convexos

Uma abordagem utilizando material concreto e o software GeoGebra para alunos do sexto ano

Hallef Julia Macabu

Orientação: Professor Samuel Gentil Pacitti

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Rio de Janeiro, 01 de abril de 2026

Pontifícia
Universidade
Católica do
Rio de Janeiro

Relação de Euler para poliedros convexos

Uma abordagem utilizando material concreto e o software GeoGebra para alunos do sexto ano

Hallef Julia Macabu

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão examinadora abaixo:

Professor Samuel Gentil Pacitti
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Professor Filipe Bellio da Nóbrega
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Professora Gilza Santos Simão Ferreira
Faculdade Professor Miguel Ângelo da Silva Santos – FEMASS

Rio de Janeiro, 01 de abril de 2026

Pontifícia
Universidade
Católica do
Rio de Janeiro

Hallef Julia Macabu

Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal Fluminense. Possui especialização em Matemática, suas Tecnologias e o Mundo do Trabalho, pela Universidade Federal do Piauí, e em Ensino de Matemática no Ensino Médio, pela Universidade Federal do Pampa. Atua como professor efetivo de Matemática no Ensino Fundamental II, integrando as redes municipais de ensino das prefeituras de Teresópolis e Macaé.

Ficha Catalográfica

Macabu, Hallef Julia

Relação de Euler para poliedros convexos : uma abordagem utilizando material concreto e o software GeoGebra para alunos do sexto ano / Hallef Julia Macabu ; orientação: Samuel Gentil Pacitti. – 2026.

126 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2026.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Relação de Euler. 3. Atividades investigativas. 4. GeoGebra. 5. Materiais concretos. 6. Verificação matemática. I. Pacit, Samuel Gentil Pacitti. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Dedico este trabalho a todos os professores que, mesmo diante de inúmeros desafios, da constante desvalorização, de perseguições em diferentes instâncias e da ausência de direitos plenamente garantidos, seguem oferecendo uma educação de qualidade, dedicando-se continuamente à sua formação e buscando sempre oferecer o melhor aos estudantes que passam por suas salas de aula.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao meu marido Leomario Ribeiro e companheiro de turma, na graduação e agora no mestrado, pelo apoio oferecido ao longo de todo o curso, pelo incentivo para que eu continuasse mesmo nos momentos em que o cansaço se fazia presente e por ter acreditado e estimulado meu potencial diante de todas as adversidades encontradas nesse percurso. Agradeço, ainda, por ter sido um apoio emocional fundamental durante toda essa trajetória.

Agradeço à minha mãe, Nilza Julia, que, desde cedo, me incentivou a estudar e me ensinou o valor da educação e da formação como caminhos para a construção de uma trajetória marcada pela autonomia e pela realização pessoal e profissional. Foi ela quem me estimulou a dedicar-me durante toda a educação básica, oferecendo a base necessária para que eu pudesse alçar voos mais altos e chegar, agora, ao mestrado.

Agradeço à minha família, que sempre reconheceu a importância desta formação, incentivou sua realização e compreendeu o longo período de distância imposto pela necessidade de dedicar tempo ao curso.

Também deixo meu agradecimento aos professores do primeiro ano do curso, que tiveram sensibilidade para reconhecer as dificuldades vivenciadas por professores que estão no cotidiano da sala de aula e, ao mesmo tempo, se dedicam ao mestrado. Em especial, agradeço ao professor Samuel Gentil Pacitti, que aceitou a empreitada de orientar esta pesquisa e contribuiu de forma ímpar para o seu desenvolvimento e para o enriquecimento da proposta.

Agradeço ao professor Filipe Bellio, por ter aceitado compor a banca de avaliação deste trabalho, mesmo diante de diversas demandas, e à professora Gilza Simão, que também aceitou o convite e contribuiu com toda a sua experiência na formação de professores, enriquecendo o trabalho por meio de suas observações e sugestões.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Macabu, Hallef Julia. **Relação de Euler para poliedros convexos: Uma abordagem utilizando material concreto e o software GeoGebra para alunos do sexto ano.** Rio de Janeiro, 2026. 126 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho analisa o ensino da relação de Euler para poliedros convexos no contexto do ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. O ensino de Geometria é reconhecido como componente essencial pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Entretanto, observa-se que esse conteúdo, muitas vezes, é negligenciado nas práticas escolares, sendo frequentemente relegado ao final do ano letivo, o que pode gerar lacunas na aprendizagem dos alunos e comprometer o desenvolvimento de conhecimentos geométricos ao longo da escolaridade. No sexto ano, a BNCC prevê o ensino da relação de Euler para poliedros convexos; contudo, os livros do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) geralmente não abordam esse conteúdo ou o apresentam de forma limitada. Diante desse cenário, este trabalho tem como objetivo analisar as potencialidades da utilização de materiais concretos, tecnologias digitais, investigação matemática, verificação e gamificação no ensino da relação de Euler para poliedros convexos. Para isso, a pesquisa fundamenta-se em estudos teóricos sobre o ensino de Geometria e metodologias ativas, apresentando uma proposta metodológica aplicada em sala de aula, bem como a análise dos dados obtidos durante sua implementação. Os resultados evidenciam que a combinação dessas metodologias contribuiu para o engajamento dos estudantes, para o desenvolvimento da autonomia investigativa e para a aprendizagem conceitual da relação de Euler. Como contribuição, o trabalho propõe uma metodologia que pode potencializar o ensino de Geometria Espacial nos anos finais do Ensino Fundamental e disponibiliza um produto educacional destinado a professores e pesquisadores interessados no ensino da relação de Euler.

Palavras-chave

Relação de Euler; Atividades Investigativas; GeoGebra; Materiais Concretos; Verificação Matemática

Abstract

Macabu, Hallef Julia. **Euler’s Relation for Convex Polyhedra: An Approach Using Concrete Materials and GeoGebra Software for Sixth-Grade Students.** Rio de Janeiro, 2026. 126 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work analyzes the teaching of Euler’s relation for convex polyhedra within the context of Geometry education in the final years of Elementary Education. Geometry teaching is recognized as an essential component by the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC). However, this content is often neglected in school practice, frequently being postponed to the end of the academic year, which may create learning gaps and compromise the development of geometric knowledge throughout students’ schooling. In the sixth grade, the BNCC establishes the teaching of Euler’s relation for convex polyhedra; however, textbooks provided by the National Textbook Program (PNLD) generally do not address this topic or present it in a limited manner. In this context, this work aims to analyze the potential of using concrete materials, digital technologies, mathematical investigation, verification processes, and gamification in teaching Euler’s relation for convex polyhedra. The study is grounded in theoretical research on Geometry education and active learning methodologies and presents a methodological proposal implemented in the classroom, along with an analysis of the data obtained during its application. The results indicate that the combination of these methodologies contributed to student engagement, the development of investigative autonomy, and the conceptual learning of Euler’s relation. As a contribution, this work proposes a methodology that may enhance the teaching of Spatial Geometry in the final years of Elementary Education and provides an educational product intended for teachers and researchers interested in teaching Euler’s relation.

Keywords

Euler’s Relation; Investigative Activities; GeoGebra; Concrete Materials; Mathematical Verification

Sumário

Lista de ilustrações

Lista de gráficos

Lista de abreviaturas

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

PNLD – Plano Nacional do Livro Didático

V – vértices

F – Faces

A – Arestas

1
Introdução

No ingresso dos alunos no sexto ano do Ensino Fundamental, diversas mudanças passam a compor a vivência escolar. Nesse momento, os estudantes têm que se adaptar a uma nova realidade, com professores separados por disciplinas, uma nova dinâmica de quadros de horários e novos esquemas de avaliação. Diante desse cenário, observa-se, especialmente nas aulas iniciais de Matemática, a manifestação de sentimentos de aversão à disciplina ou de preocupação em relação à sua suposta dificuldade.

A transição do Ensino Fundamental I para o Ensino Fundamental II configura-se, portanto, como um período potencialmente turbulento para os alunos, podendo marcar o início de um processo de dificuldades persistentes na aprendizagem Matemática (Bento, 2007). Essas dificuldades, que são frequentemente desenvolvidas durante os anos iniciais, tendem a se intensificar quando os estudantes se deparam com conteúdos mais abstratos e com uma metodologia de ensino menos contextualizada e lúdica.

Nesse contexto, em que se destaca a dificuldade dos alunos com os novos conteúdos de Matemática, faz-se necessário buscar formas de motivar a participação e estimular que os alunos tenham desejo por aprender Matemática. Essa busca demanda propostas didáticas que valorizem a compreensão conceitual, a investigação e a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem.

Dentre os conteúdos abordados no sexto ano, pode-se destacar a dificuldade dos alunos com os conteúdos de Geometria e a falta de conhecimentos prévios desses estudantes. A Matemática é vista como uma disciplina difícil, mas destaca-se que dentre as suas áreas básicas Aritmética, Álgebra e Geometria, esta última é a que apresenta maior dificuldade de aprendizagem por parte dos alunos, sendo os conteúdos de Geometria por muitas vezes, sequer ministrados durante o Ensino Fundamental II (Filho; Tavares, 2015).

A compreensão dos conteúdos geométricos, normalmente, está atrelada à capacidade de abstração e ao desenvolvimento da percepção visual do educando. Muitas vezes, os alunos chegam ao sexto ano sem os conhecimentos básicos de Geometria, destacando-se que muitos alunos chegam a essa etapa sem conhecer as figuras geométricas planas básicas (Albuquerque, 2017).

Essa defasagem prejudica o desenvolvimento dos conteúdos previstos para essa etapa, na qual é esperado que sejam desenvolvidas as habilidades associadas à Geometria Espacial e à visualização tridimensional. Conforme estabelecido na Base Nacional

Comum Curricular (BNCC), os alunos dessa etapa devem ser capazes de "(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros." (Brasil, 2017, p. 305).

Nesse âmbito da Geometria Espacial, pode ainda ser destacada a ênfase dada pela BNCC ao estudo das relações existentes entre faces, vértices e arestas em determinados poliedros, sendo previsto que seja desenvolvida a habilidade de "quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial" (Brasil, 2017, p.305). Essa relação é conhecida como a Relação de Euler para poliedros convexos.

Buscando superar as dificuldades do cenário narrado, a presente dissertação foi desenvolvida diante do desejo de investigar uma forma inovadora de trabalhar o conteúdo de Geometria Espacial, especificamente a relação de Euler para poliedros convexos, em turmas do sexto ano do ensino fundamental. Esse conteúdo é abordado, normalmente, de forma superficial ou nem chega a ser apresentado, devido às lacunas na aprendizagem nos anos anteriores dos conteúdos de Geometria, como destacado.

Além disso, os livros do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), no período de 2024 a 2027, abordam o conteúdo apenas como exercício ou não apresentam nenhuma abordagem desse tema. Os que abordam esse conteúdo na forma de exercícios não realizam um aprofundamento teórico do conteúdo, nem demonstram preocupação com a validação dessa relação para todos os poliedros convexos.

Essa abordagem sucinta e a defasagem de aprendizagem dos conteúdos prévios resultam em uma dificuldade de aprendizagem para os alunos, criando um obstáculo que se desenvolve durante toda Educação Básica, de forma que Rogenski e Pedroso (2007) destacam que

> verifica-se que os alunos têm amplas dificuldades, primeiramente com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da geometria básica e, por conseguinte da geometria espacial. Também apresentam problemas de percepção das relações existentes entre os objetos de identificação das propriedades das figuras que formam os sólidos, dentre outros conceitos. (Rogenski; Pedroso, 2007, p. 5)

Diante dessas dificuldades identificadas no ensino da Geometria Espacial, torna-se pertinente pesquisar estratégias de ensino-aprendizagem que possam favorecer a compreensão dos alunos desses conteúdos. Assim, esta pesquisa busca responder à seguinte questão: Como o uso de metodologias ativas, materiais concretos e tecnologias digitais pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da Relação de Euler em turmas do sexto ano do Ensino Fundamental?

Para responder a essa questão de pesquisa, este trabalho teve como objetivo geral investigar o processo de aprendizagem da Relação de Euler para poliedros convexos em turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, a partir do uso de metodologias ativas, materiais concretos e tecnologias digitais.

Para alcançar esse objetivo, foram selecionadas metodologias e ferramentas, no âmbito da Geometria Espacial, que se adequassem à realidade educacional e ao conteúdo a ser ministrado e traçados os seguintes objetivos específicos.

Analisar as potencialidades dos materiais concretos no ensino da Relação de Euler para alunos do sexto ano; Avaliar a contribuição do software GeoGebra para visualização e investigação de poliedros convexos; Investigar o desenvolvimento da autonomia dos estudantes por meio de atividades investigativas; Verificar a eficácia da gamificação como instrumento de avaliação; Explorar a viabilidade de processos de verificação matemática inspirados na demonstração de Cauchy para o Ensino Fundamental.

Considerando que os alunos do sexto ano estão em processo de transição entre etapas da Educação Básica, destaca-se que, no Ensino Fundamental I, o uso de materiais concretos é recorrente. Sendo assim, é interessante que possa ser utilizado nessa fase de transição materiais concretos, que já são familiares aos alunos.

Além disso, pesquisas relatam que o uso do material concreto pode trazer ganhos pedagógicos no processo de ensino. Seu uso pode facilitar a visualização, já que propicia a manipulação por parte dos alunos e estimula a participação. Cabe destacar que "a utilização de material concreto é uma importante ferramenta que proporciona melhor desenvolvimento e envolvimento do aluno em relação ao ensino da Matemática, em especial da Geometria." (Couto *et al.*, 2017, p. 514).

De forma a complementar a utilização do material concreto, que tem suas limitações geradas pelo material utilizado e do tempo de preparação exigido, buscou-se utilizar a Tecnologia Digital, mais especificamente o software de Geometria Dinâmica GeoGebra.

Essa ferramenta vem sendo amplamente utilizada e pesquisas relatam suas potencialidades no ensino de Geometria. Conforme relatado por Oliveira e Araújo Junior

(2025), em seu trabalho que se dedicava a analisar os resultados de pesquisas desenvolvidas com o uso do GeoGebra, foi possível concluir a eficácia do uso desse software no ensino de Matemática, especialmente em sequências didáticas que envolvem conteúdos de Geometria.

Outra lacuna que se destacou como relevante foi a falta de comprovação dos conteúdos e propriedades apresentadas pelos alunos. Muitas vezes, os alunos não conseguem compreender que determinado conteúdo estudado tem validade para além dos exemplos apresentados em sala. Essa falta de compreensão, pode gerar dificuldade em aplicar o conteúdo estudado em casos diferentes daqueles já vistos.

Dessa forma, o processo demonstrativo pode ser um facilitador do processo de compreensão do aluno acerca da validade do conteúdo estudado em sala de aula. Mesmo na educação básica pode ser proveitoso desenvolver nos alunos o gosto pela argumentação e demonstração, já que sem essas deduções os conteúdos estudados podem ficar desconexos e sem uma compreensão clara de sua aplicação e relação com demais conteúdos (Freitas, 2011).

Outra metodologia que se destaca por motivar a participação e facilitar o processo de avaliação é a Gamificação. Essa metodologia ativa, destaca-se pelas suas potencialidades, tendo como foco a participação e a motivação dos alunos e vem sendo amplamente utilizada nas diversas áreas do ensino, inclusive na Matemática. As pesquisas que utilizaram essa metodologia relatam suas potencialidades, podendo ser destacado que os resultados evidenciam que a gamificação é eficiente em estimular a participação e interesse dos alunos e que esses, após sua aplicação, demonstram avaliação positiva dessa estratégia (Carvalho *et al.*, 2023).

Nas próximas seções desse trabalho, serão detalhados os referenciais teóricos de cada uma das metodologias e ferramentas utilizadas. Será feito um breve desenvolvimento teórico acerca da Relação de Euler para poliedros convexos. Na seção metodologia, será apresentado o percurso metodológico planejado para aplicação. Além disso, serão apresentados os resultados da aplicação detalhando, de acordo com o planejamento metodológico, quais etapas foram ou não exitosas. Por fim, serão apresentadas as considerações finais com as sugestões para aplicações futuras.

2
Fundamentação metodológica

Neste capítulo, apresentam-se as etapas de elaboração desta pesquisa, embasando-as nas metodologias adotadas e nas definições do conteúdo matemático abordado. Busca-se, com esta seção, fornecer subsídios para que o leitor apreenda o percurso teórico trilhado e compreenda tanto a metodologia aplicada quanto o recurso educacional elaborado.

2.1
Materiais concretos

Pesquisas na área de Educação Matemática vêm buscando identificar metodologias e ferramentas que possam propiciar um melhor desenvolvimento das aprendizagens dos conteúdos de Matemática previstos para a Educação Básica. Dentre essas investigações, destacam-se as que abordam o uso de materiais concretos manipuláveis, indicando suas potencialidades inclusive no ensino de Geometria.

Os materiais concretos manipuláveis podem ser utilizados nas aulas de Matemática, principalmente de Geometria, por favorecer a exploração ativa por parte do aluno, possibilitando a construção de significados acerca dos objetos matemáticos.

Vale destacar que o entendimento de material concreto manipulável está embasado em Vale e Barbosa (2014, p.6) que definem os materiais manipuláveis como "todo o material concreto, educacional ou do dia a dia "[...], que represente uma idéia Matemática, que durante uma situação de aprendizagem apele aos sentidos e que se caracteriza por um envolvimento ativo dos alunos".

Esses materiais podem ser utilizados nas mais diversas etapas do ensino, "favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico, coordenação motora, rapidez no pensamento dedutivo, socialização, organização do pensamento, concentração que é necessário para compreensão e resolução de problemas matemáticos" (Silva *et al.*, 2016, p. 2).

Considerando que esta pesquisa aborda uma relação que depende da visualização de sólidos geométricos, torna-se fundamental buscar estratégias que auxiliem os alunos no desenvolvimento dessa habilidade. Dessa forma, o uso do material concreto pode se tornar um aliado na construção desses conceitos. Conforme afirmam Ponte e Serrazina (2006, p. 116)

> [...] os conceitos e relações Matemáticas são entes abstractos, mas podem encontrar ilustrações, representações e modelos em diversos tipos de suportes físicos. Convenientemente orientada, a manipulação de material pelos alunos pode facilitar a construção de certos conceitos (Ponte; Serrazina, 2006, p.116)

Nesse sentido, os materiais concretos manipuláveis constituem-se como instrumentos didáticos para favorecer a visualização dos sólidos por parte dos educandos, podendo contribuir para a compreensão de conceitos que, quando estudados apenas no âmbito teórico, podem apresentar elevado grau de abstração para os estudantes.

Além disso, há pesquisas que destacam a potencialidade do uso de materiais concretos aliados a tecnologias. Bozza (2015) aponta em sua pesquisa que o ensino de Geometria Espacial pode ser auxiliado pelo uso dessas ferramentas. Em seu trabalho, a autora discorre sobre as diversas potencialidades do material concreto, destacando que "além de facilitar a aprendizagem, torna as aulas mais significativas e prazerosas, estimula o raciocínio dos alunos, desenvolve suas habilidades e a capacidade de compreender conteúdos geométricos".

Diante dessas potencialidades, torna-se relevante o uso de materiais concretos manipuláveis para o ensino da Relação de Euler para poliedros convexos, buscando-se estimular a participação dos alunos e auxiliar na construção da sua visualização geométrica.

2.2 Atividades investigativas

No ensino de Matemática, que se caracteriza pela necessidade de prática para a consolidação dos conhecimentos acerca de determinado conteúdo, as atividades investigativas destacam-se por propiciar que o aluno desenvolva de forma mais autônoma a construção do seu conhecimento.

Cunha, Oliveira e Ponte (1995) destacam as potencialidades do uso de atividades investigativas, salientando a importância do seu uso no ensino de Matemática. Esses autores afirmam que a investigação é uma parte essencial da aprendizagem Matemática, permitindo uma visão mais ampla dessa ciência, além de estimular o envolvimento dos alunos, com o intuito de possibilitar uma aprendizagem mais significativa.

Os pesquisadores apontam, ainda, que as atividades podem ser aplicadas em todas as etapas do ensino e também em níveis diferentes de desenvolvimento do educando. Além disso, auxiliam no desenvolvimento de um modo de pensamento holístico, conforme denominam os autores, por relacionar diversos tópicos, sendo essencial ao pensamento matemático.

A investigação Matemática envolve quatro momentos principais, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2019). O primeiro corresponde ao reconhecimento da situação, no qual ocorre uma exploração inicial e a formulação das primeiras questões sobre o problema. No segundo momento, são feitas as formulações de conjecturas.

Já no terceiro, são realizados os testes para verificar a validade das conjecturas elaboradas e, sendo necessário, a aprimoração dessas conjecturas. O momento final consiste na realização da argumentação, a demonstração e a avaliação do que foi desenvolvido. Os autores ainda destacam que esses momentos podem acontecer de forma simultânea, ou ocorrer mais de uma vez durante o processo de investigação.

No âmbito da sala de aula, esses pesquisadores afirmam que as investigações estão diretamente ligadas ao processo de resoluções de problemas. Para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos é necessário despertar o interesse dos alunos para a resolução das atividades propostas, de forma que o aluno mobilize seus conhecimentos prévios para desenvolver novos conhecimentos. Dessa forma, a realização de atividades investigativas em sala de aula,

> ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade Matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019, p. 20)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) prevê como competência específica para Matemática no Ensino Fundamental, “desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.” (Brasil, 2017, p. 267).

Em consonância com o preceituado na BNCC, as atividades investigativas têm o potencial de estimular o espírito de investigação dos alunos. Além disso quando tratamos do ensino de Geometria, as atividades investigativas podem ser associadas ao uso de tecnologias para auxiliar no processo de investigação, sendo destacado por Scalabrin e Mussato (2020) que esse uso

> [...] favoreceu para que o processo de aprendizagem dos alunos sobre os conceitos geométricos ocorresse de forma gradativa, partindo da informação visual dos objetos construídos e análise das propriedades, para a compreensão da lógica formal e elaboração de conjecturas. (Scalabrin; Mussato, 2020, p. 142)

Outras pesquisas associam o uso de atividades investigativas com softwares de Geometria dinâmica, destacando que esse uso combinado pode potencializar o processo de aprendizagem dos conteúdos dessa área da Matemática. Em sua pesquisa, Charleaux e Souza (2019) afirmam que a aula ministrada usando essa associação propiciou autonomia por parte dos estudantes e contribuiu para o entendimento dos alunos do conteúdo estudado.

Em suas considerações finais, Anjos (2025) discorreu sobre os resultados obtidos nesse uso combinado no ensino de Geometria, destacando os resultados positivos obtidos, defendendo que essas atividades "[...] criam uma situação de exploração de objetos de modo a permitir observação de padrões, o teste de hipóteses, a refutação e refino de conjecturas, a comunicação e a defesa da validade das afirmações observadas." (Anjos, 2025, p. 85)

Evidencia-se, portanto, a relevância da realização de atividades investigativas, já que essas podem contribuir para aprendizagem de Matemática, mais especificamente da Geometria Espacial. Em especial, esse uso associado a Tecnologias, com destaque ao *software* de Geometria dinâmica, pode criar um ambiente propício para aprendizagem dos alunos do conteúdo objeto dessa pesquisa.

2.3
Tecnologias digitais: *software* GeoGebra

Podemos observar que o ambiente escolar se destaca pelo uso da metodologia tradicional, com aulas expositivas e sem recursos tecnológicos, mesmo tendo atualmente na Educação Básica alunos que vivenciam diariamente o uso de tecnologias em seu dia a dia. Diante desse cenário, pesquisas já apontam para a necessidade da ampliação do uso de tecnologias em sala de aula.

Bittencourt e Albino (2017) afirmam que a falta de conhecimento e preparação para o uso de mídias digitais é um desafio nos espaços educacionais, que esse pode ser um fator para a não utilização das diversas novas tecnologias educacionais disponíveis. Buscando superar esse cenário, diversos autores têm buscado destacar as potencialidades do uso de tecnologias em sala de aula nas mais diversas disciplinas, buscando integrar esses recursos na sala de aula, conforme afirmado por Conte, Habowski e Rios (2019)

> Partindo de uma perspectiva integradora das tecnologias digitais que favorece as comunicações descentralizadas, a participação ativa dos sujeitos e o surgimento de novos ambientes socioculturais de educação, solidários e colaborativos, o trabalho busca aproximar as reflexões sobre os artefatos digitais da prática formativa, democratizando o acesso ao conhecimento tecnológico e proporcionando uma educação como prática de liberdade. (Conte; Habowski; Rios, 2019, p. 33)

Conforme destacado por esses autores, é importante realizar a democratização do acesso as tecnologias no ambiente escolar. Apontam ainda que a produção do conhecimento não pode ser feita isolada do mundo em que o aluno está inserido, de forma que o ambiente escolar pode ser um gerador de desigualdades caso não faça uma real inclusão tecnológica em sala de aula, oportunizando que o educando tenha oportunidade de realizar a construção do seu conhecimento e melhoria das aprendizagens.

Além disso, diante dessa importância do uso das tecnologias na BNCC é destacado que o uso de tecnologias é uma das competências gerais para educação básica.

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Brasil, 2017, p. 9)

Nesse sentido, o uso de tecnologias é de grande importância no ambiente escolar, não sendo diferente no ensino de Matemática. A aplicação das tecnologias digitais pode contribuir para melhor compreensão dos conteúdos, possibilitando aplicações que fazem sentido para os alunos, incluindo no ensino de Geometria (Lima; Rocha, 2022).

Além disso, as tecnologias digitais "ampliam as possibilidades de se ensinar e aprender, oferecendo novas e variadas formas para que esses processos ocorram, de forma que ideias para trabalhos pedagógicos que antes eram inviáveis (por limitações de custo, tempo, recursos físicos, etc.) tornam-se factíveis com o uso de tecnologias." (Maltempi, 2008, p.60)

Lima e Rocha (2022) destacam que a tecnologia a ser utilizada deve ser escolhida tendo em vista os objetivos a serem alcançados e a realidade dos alunos e as possibilidades do espaço escolar. Associando essa afirmação ao que Maltempi (2008) afirma, podemos buscar ferramentas que possam ampliar as possibilidades de aprendizagem, que especificamente no ensino de Geometria Espacial pode ser realizada pelo uso de *softwares* de Geometria dinâmica. Dentre esses se destaca o *software* GeoGebra, que tem se destacado há alguns anos devido suas potencialidades para o ensino de Matemática.

O GeoGebra é um *software* de Geometria dinâmica de Matemática, amplamente utilizado que permite trabalhar as mais diversas áreas da Matemática, incluindo álgebra, planilhas, gráficos, estatística e Geometria. O GeoGebra foi adquirido em 2021 por uma empresa de educação que garantiu a continuidade da sua oferta gratuita para o público, seguindo sob a liderança dos fundadores e desenvolvedores originais (GeoGebra, 2025).

Dentre as possibilidades de uso do GeoGebra está o uso da janela de visualização 3D e o recurso de realidade aumentada (RA), que permite explorar Geometria Espacial. Com o recurso de RA é possível manipular sólidos no ambiente utilizando um dispositivo móvel. Já na janela 3D é possível realizar a criação de sólidos e sua manipulação de forma fácil e intuitiva, destacando que seu uso tem a possibilidade de potencializar a aprendizagem conforme destacado por Santiago e Santana (2024), que afirmaram que especificamente no ensino de Geometria o uso do GeoGebra gerou um avanço e assimilação dos conteúdos,

> [...] possibilitando a estruturação da percepção cognitiva do estudante, o que seria diferente se o problema aplicado fosse ao ensino tradicional, com apenas papel e lápis. O GeoGebra, por meio de seus comandos, permite construir objetos matemáticos em 2D, 3D e RA em ambientes físicos reais, sendo um recurso dinâmico que propicia a prática e experimentação de conceitos fundamentais da Geometria. (Santiago; Santana, 2014, p. 18)

Dessa forma, o GeoGebra pode ser uma ferramenta importante para auxiliar os conteúdos de Geometria Espacial, objeto dessa pesquisa. Além disso, há pesquisas que relacionam o uso desse *software* com atividades investigativas, destacando que essa associação pode potencializar o ensino de Geometria. Scalabrin e Mussato (2020), concluem que

> [...] o uso do software GeoGebra aliado as atividades propostas de cunho exploratório e investigativo, favoreceu para que o processo de aprendizagem dos alunos sobre os conceitos geométricos ocorresse de forma gradativa, partindo da informação visual dos objetos construídos e análise das propriedades, para a compreensão da lógica formal e elaboração de conjecturas. (Scalabrin; Mussato, 2020, p. 142)

Considerando a necessidade do uso de tecnologias digitais em sala de aula, conforme preceituado pela BNCC, e as potencialidades do GeoGebra, pode-se destacar que o uso dessa ferramenta pode criar um ambiente propício à aprendizagem dos conteúdos de Geometria Espacial, com destaque para a relação de Euler em poliedros convexos. Isso se justifica pelo fato de que a visualização dos sólidos auxilia na contagem dos vértices, arestas e faces, elementos necessários para a aplicação da relação.

Cabe destacar que a aplicação dessa ferramenta não garante por si só uma aprendizagem significativa, dependendo também da mediação docente e da intencionalidade pedagógica. Dessa forma, sua utilização deverá ser bem planejada e associada às demais metodologias que têm apresentado resultados positivos, como a utilização de Materiais Concretos e gamificação.

2.4 Gamificação

Embora o termo tenha surgido em 2010, a gamificação vem sendo aplicada há muito tempo, de forma não digital, podendo ser associada, por exemplo, a métodos de recompensa utilizados por professores, quando os alunos realizam atividades previstas (Fadel; Ulbricht, 2014).

Torna-se cada vez mais desafiador propor metodologias em sala de aula que atraiam a atenção dos alunos e possam facilitar o processo de aprendizagem. Quando falamos do ensino de Matemática os índices mostram o baixo desempenho dos alunos nas avaliações externas, conforme apontam dados de avaliações externas em larga escala (Alves; Carneiro; Carneiro, 2022).

Nesse sentido, a gamificação está relacionada à incorporação de elementos estruturais dos jogos, utilizando métodos e sistemática similares a de um jogo, só que fora desse ambiente (Busarello; Ulbricht; Fadel, 2014). Esses elementos, como rankings que resultam em um feedback automático para o estudante, pontuação que gera motivação nos alunos e a competição que pode possibilitar uma melhor interação entre eles, podem favorecer a aprendizagem Matemática e seu uso

> [...] representa uma abordagem inovadora e eficaz para envolver os alunos e promover o aprendizado ativo. Ao integrar elementos de jogos e interatividade, o Kahoot! oferece aos educadores uma ferramenta poderosa para criar experiências de aprendizado memoráveis e significativas em sala de aula. (Andrade, 2024, p. 6)

Podemos destacar que a gamificação se diferencia dos jogos utilizados pelos alunos no dia a dia por haver uma intencionalidade e uma proposta pedagógica envolvida. Devemos diferenciar também a gamificação dos jogos pedagógicos, já que esses últimos são criados e desenvolvidos com o objetivo de constituir um produto educacional voltado para aprendizagem, que por muitas vezes não traz mecânicas atrativas para os alunos e pode ser limitado nas suas aplicações.

A gamificação se diferencia por criar na sala de aula um ambiente similar aos dos jogos, incorporando sua mecânica durante o momento da aplicação e possibilitando sua conciliação com outras metodologias durante a aula. O que a diferencia também da aprendizagem baseada em jogos, que coloca o jogo como ambiente principal da aprendizagem.

Dessa forma, a utilização da gamificação pode ser um aliado para estimular a participação dos alunos e possibilitar uma aprendizagem mais significativa para o aluno. O professor deve utilizar essa ferramenta considerando que "[...] ao valorizar os jogos e seu caráter lúdico, o docente busca uma aprendizagem utilizando uma alternativa que possa motivar a participação do aluno frente ao conteúdo a ser trabalhado." (Alves; Carneiro; Carneiro, 2022, p. 148)

Essa perspectiva torna-se ainda mais pertinente quando se observa que os jogos digitais se popularizaram nas últimas décadas, passando a integrar o cotidiano dos estudantes, seja por meio de consoles, dispositivos móveis ou computadores. Os estudantes costumam se interessar por jogos e normalmente jogam para se entreter. Diante dessa disseminação, surgiram pesquisas que investigam a aplicação da gamificação, no contexto digital, como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem.

A BNCC destaca nas suas orientações para a área de Matemática dos anos finais que os jogos podem ser utilizados para potencializar as aprendizagens. Além disso, podemos destacar o enfoque apresentado nesse documento ao uso de tecnologias digitais e também a necessidade de possibilitar que os alunos sejam protagonistas da sua aprendizagem.

Diante da necessidade de incorporar ao ambiente da sala de aula recursos que apresentem características dos jogos, especialmente os digitais, com os quais os alunos já possuem familiaridade e que favoreçam seu protagonismo, torna-se pertinente a utilização de abordagens pedagógicas que integrem tais elementos ao processo de ensino e aprendizagem. Já que "elementos como pontuação, desafios, recompensas e narrativas imersivas tornam o aprendizado mais atrativo e interativo, transformando atividades tradicionais em experiências dinâmicas e motivadoras." (Coelho *et al.*, 2025, p. 12). Esses autores destacam ainda em sua pesquisa que

> Ferramentas como Classcraft e Kahoot! são exemplos emblemáticos de como a gamificação pode ser aplicada para promover a colaboração, a competição saudável e o desenvolvimento de habilidades

> socioemocionais, como trabalho em equipe e resiliência. (Coelho *et al.*, 2025, p. 12)

Tratando-se especificamente do Kahoot!, diversas pesquisas vêm apontado para suas potencialidades no uso em sala de aula e especificamente no ensino de Matemática, conforme apontado na pesquisa de Mesquita e Bueno (2023). O Kahoot! é uma plataforma de aprendizagem baseada em jogos que facilita a criação, o compartilhamento e a participação em jogos educativos ou quizzes de curiosidades em minutos (Kahoot, 2026).

Essa plataforma se destaca pela facilidade de utilização, sendo intuitiva e prática de usar. Está disponível em português e possui plano gratuito para professores, que amplia o número possível de participantes e oferece mais algumas ferramentas de organização das atividades gamificadas. Além disso, por ser utilizado direto no site, gera uma facilidade de acesso, não sendo necessária a instalação prévia de programas e não apresenta demanda de *hardwares* mais potentes.

O Kahoot! funciona com uma mecânica de competição individual entre os alunos, caso haja disponibilidade de dispositivos para todos, e também possibilita a competição entre turmas, podendo ser criada uma ilha para cada turma de forma que a evolução da turma pode ser acompanhada.

Os questionários montados funcionam numa lógica de pontuação por acerto e velocidade de resposta, criando um ranking no final de cada pergunta e no final do jogo, gerando um pódio. As perguntas podem ser de múltipla escolha ou verdadeiro ou falso (no plano gratuito apenas esses dois tipos são disponibilizados). O Professor, durante a organização, pode atribuir pontuação dupla a perguntas e controlar o tempo disponibilizado. Durante a partida, a plataforma automaticamente toca sons que estimulam os alunos e atribui insígnias para alto número de acertos e velocidade.

Essa plataforma, por ser tão interessante e funcional, tem apresentado resultados positivos em pesquisas já realizadas acerca de seu uso, podendo ser destacado que seu uso "não apenas oferece uma plataforma interativa e acessível para aprimorar o aprendizado, mas também proporciona uma experiência educacional envolvente e estimulante para alunos e professores." (Andrade, 2024, p. 5)

Dessa forma, incorporar essa plataforma nas aulas de Matemática, incluindo no ensino de geometria, pode auxiliar no processo de engajamento dos alunos, despertando o interesse e possibilitando uma aprendizagem mais significativa para os alunos. Especificamente no ensino de geometria, Andrade (2024) destacam que

> A utilização do Kahoot como ferramenta tecnológica revelou-se uma alternativa eficaz para superar desafios comumente encontrados no ensino tradicional. A interação dos alunos com a plataforma não apenas fortaleceu o entendimento dos conteúdos de Geometria Plana e Espacial, mas também estimulou a cooperação e a socialização entre eles. (Andrade, 2024, p. 47)

Diante desses resultados positivos, podemos avaliar que o uso do Kahoot! pode ser relevante quando conciliado com a mediação do professor. Esse deve ter um papel de motivador e orientador para que a atividade gamificada não seja motivada apenas pelo desejo de ganhar, mas tenha foco na aprendizagem. Além disso, o docente deve observar sempre a competitividade, para que essa não seja levada ao excesso, gerando problemas durante a atividade.

Portanto, quando tratamos do ensino da relação de Euler para poliedros convexos, que faz parte dos conteúdos de geometria espacial, é possível destacar que o uso do Kahoot! pode ser uma ferramenta potencializadora, podendo ser utilizada como atividade de aplicação da relação após seu estudo.

2.5 Demonstrações na Educação Básica

Nos anos finais do Ensino Fundamental ainda há predominância de aulas expositivas de Matemática, dados confirmados pela pesquisa de Silva *et al.* (2023), que fizeram um estudo com professores dessa disciplina. Nessa metodologia, os teoremas, relações e propriedades são apresentados para os alunos sem uma validação, verificação ou demonstração.

Essa forma expositiva pode gerar no aluno uma visão limitada do conteúdo estudado. Nesse sentido a BNCC prevê que nessa etapa “[...]precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem Matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação.” (Brasil, 2017). Além disso, em alguns conteúdos a Base destaca o uso das demonstrações como parte das habilidades a serem desenvolvidas.

Sendo assim, é importante estimular os estudantes realizarem uma argumentação dos conteúdos estudados nessa etapa. Apesar da orientação presente na Base, observa-se que nos livros do PNLD analisados nesta pesquisa, no momento de realização da escolha do livro didático pela unidade escolar, apresentam poucas verificações e demonstrações, não estimulam a argumentação dos alunos e ainda seguem uma lógica expositiva e mecânica, conforme verificado nos livros disponibilizados no atual período de vigência.

As demonstrações Matemáticas "possuem seu amplo valor no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, pois fazem parte da construção de conhecimento lógico dedutivo do estudioso e inerentes a esse conhecimento colaboram na construção da física, da Matemática [...]" (Medeiros *et al.*, 2024, p. 4). Esses autores destacam que pode haver dificuldade inicial na prática da demonstração por parte dos alunos, porém com o tempo os alunos evoluem e podem realizar generalizações mais formais, além de conseguirem compreender de forma mais efetiva a amplitude da Matemática.

Tratando-se especificamente do ensino de geometria, a inserção das demonstrações auxilia a aprendizagem, podendo ser utilizada de forma mais interessante, para além dos métodos tradicionais, através de materiais manipuláveis. Isso ocorre porque o processo demonstrativo em geometria espacial é facilitado com a visualização do objeto estudado (Bispo; Assis, 2021).

No contexto da educação básica devemos considerar que não é possível realizar a demonstração de todos os conteúdos estudados, tendo em vista o programa a ser cumprido. Porém Balacheff (2022) destaca a importância de estimular as demonstrações, por mais que essas não sejam necessariamente formais. O aluno deve ser estimulado a realizar produções espontâneas e escritas, além de argumentações resultantes de suas investigações e experiências (Balacheff, 2022).

Além disso, esse autor destaca que é possível realizar uma prova ou uma justificação argumentada sobre determinada propriedade. Dessa forma, nem sempre é necessário que os alunos sejam levados a realizar demonstrações estritamente formais.

Esse autor, em outra pesquisa realizada, classifica as demonstrações em quatro tipos possíveis, verificação empírica, prova pragmática, prova intelectual e demonstração formal.

A validação empírica ocorre quando o aluno testa alguns casos particulares e, a partir da regularidade observada, aceita a afirmação como verdadeira. Trata-se de uma constatação baseada na experiência ou na experimentação, ainda sem generalização lógica.

A prova pragmática, por sua vez, também se apoia em exemplos, mas envolve uma tentativa de explicação apoiada em manipulações, desenhos ou argumentos contextualizados, sendo considerada suficiente dentro do contexto da sala de aula, embora ainda não alcance o texto formal.

Já a prova intelectual caracteriza-se por um encadeamento de argumentos que busca justificar a afirmação para todos os casos, utilizando propriedades e definições Matemáticas, mesmo que com linguagem ainda não totalmente formalizada.

Por fim, a demonstração formal corresponde ao nível mais rigoroso de validação, estruturada segundo regras explícitas de dedução lógica, com organização sistemática de hipóteses, definições e conclusões, garantindo validade universal no interior do sistema matemático. Na Educação Básica, essas formas de validação não necessitam ser vistas de forma separada, mas como etapas do desenvolvimento da capacidade argumentativa dos estudantes.

Sendo assim, durante a elaboração do planejamento da aula deverá ser considerado o nível de compreensão dos alunos do processo demonstrativo e a etapa do ensino em que o estudante se encontra, podendo ser realizada uma adaptação do processo demonstrativo. Nesta pesquisa, utiliza-se o termo "verificação" para designar o conjunto de procedimentos investigativos e argumentativos que, embora não configurem uma demonstração formal, conduzem os alunos à compreensão da validade geral da propriedade estudada.

Nesse caso é possível recorrer ao processo de verificação, de forma que o aluno, a partir de sua investigação, consiga verificar a validade do tema estudado. O professor terá o papel de sistematizar e institucionalizar o conhecimento produzido de forma mais ampla, já que "Uma argumentação Matemática deve ser pelo menos potencialmente admissível segundo os padrões da aula de Matemática, ou seja, ser aceito como prova pela classe e confirmado pelo professor." (Balacheff, 2022, p. 810). Sobre essa possibilidade, Vasconcelos e Santos (2022), afirmam que

> [...] se não alcançarmos uma prova formal que avalie a afirmação, ao menos possamos construir uma explicação clara e convincente para isso. Este empoderamento da capacidade de refletir criticamente ao analisar a veracidade de uma informação é muito importante para a sociedade. (Vasconcelos; Santos, 2022, p. 11)

Diante da possibilidade de uma adaptação do processo demonstrativo para a realidade da sala de aula e considerando o uso de materiais manipuláveis, se torna interessante possibilitar que o aluno, utilizando esse tipo de material, consiga desenvolver sua argumentação e justificar a validade do objeto de estudo.

A ausência de validação formal da Relação de Euler nos livros didáticos justifica a necessidade de desenvolver, em sala de aula, processos de verificação e argumentação que conduzam à compreensão de sua validade geral.

No estudo da relação de Euler para poliedros convexos, é necessário considerar que sua compreensão envolve a verificação de que a igualdade se mantém válida independentemente do poliedro analisado. Nesse processo, a visualização desempenha papel fundamental, pois auxilia na identificação e na contagem dos elementos geométricos envolvidos. As etapas de validação dessa relação no contexto do ensino serão apresentadas e detalhadas na seção metodológica deste trabalho.

2.6 Relação de Euler para poliedros convexos

Nesta subseção, será apresentada a fundamentação matemática do objeto investigado. Inicialmente, apresenta-se um apanhado histórico sobre Leonhard Euler, baseado no texto de Ubiratan D'Ambrosio (2008), que apresenta um relato relevante sobre sua trajetória. Em seguida, desenvolve-se a base teórica fundamentada no livro A Matemática do Ensino Médio – Volume 2, de autoria de Lima *et al.* (2004).

Leonhard Euler nasceu em Basiléia, na Suíça, no dia 15 de abril de 1707. Seu pai, Paulus Euler, foi aluno da Universidade de Basiléia. Sua tese de conclusão de curso era sobre razões e proporções, indicando um contexto familiar relacionado à Matemática. Com apenas dezesseis anos, ele recebeu o título de mestre, e em seguida publicou diversos trabalhos de relevância na época, alguns na área da engenharia.

Mesmo tendo ficado cego, Euler continuou produzindo muitos trabalhos, ditando seus livros e materiais para seus auxiliares. Chegou a publicar o segundo livro de Matemática mais impresso no mundo, perdendo apenas para *Elementos* de Euclides. Euler destaca-se como um matemático de grande relevância, considerando que "sua genialidade foi reconhecida na importante obra A Mathematical and Philosophical Dictionary, por Charles Hutton, publicada na Inglaterra, em 1795" (D'Ambrosio, 2008, p. 28).

Esse matemático contribuiu para diversos campos da Matemática, tendo apresentado teoremas em diversas áreas. No campo da Geometria Espacial, é amplamente conhecida a relação que leva seu nome. Santos (2014) destaca que

> Embora os poliedros já fossem conhecidos desde a antiguidade, até o século XVIII ninguém havia percebido qualquer relação de natureza combinatória entre suas faces, arestas e vértices, até que por volta de 1750, Leonhard Euler (1707-1783) fez uma descoberta que descreveu a seu amigo também matemático, Christian Goldbach (1690-1764), em uma correspondência enviada a este. (Santos, 2014, p. 7)

Essa relação apresentada por Euler perpassou o tempo e é apresentada até hoje nos conteúdos previstos da Educação Básica, inclusive na BNCC. A permanência da relação de Euler nos currículos evidencia sua relevância para o ensino de geometria.

Segundo o texto apresentado por Lima *et al.*, poliedros podem ser definidos como uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono. Cada um desses polígonos é denominado **face** do poliedro, cada lado comum a duas faces é chamado de **aresta** e cada vértice de uma face é também chamado de **vértice** do poliedro. Essa definição pode ser refinada da seguinte forma:

> **Definição.** *Poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados *faces* onde:
> a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
> b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.
> Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma *aresta* do poliedro e cada vértice de uma face é um *vértice* do poliedro.
> c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas). (Lima *et al.*, 2004, p. 232)

Considerando essa definição, todo poliedro limita uma região do espaço chamada **interior** do poliedro. Aqui destaca-se uma definição importante: podemos afirmar que o poliedro é convexo se seu interior é convexo. Os autores apresentam a seguinte definição "Um conjunto C, do plano ou do espaço, diz-se *convexo*, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C." (Lima *et al.*, 2004, p. 233). No caso dos poliedros se torna mais interessante definir que o poliedro será convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) só o corta em no máximo dois pontos.

Utilizaremos a seguintes abreviações para faces (F), vértices (V) e arestas (A). De acordo com os autores a relação de Euler, por ser simples e bela, fascinam os alunos em seu primeiro contato. Essa relação pode ser definida da seguinte forma: $V - A + F = 2$. Essa relação não vale para todos os poliedros que seguem a definição apresentada, sendo verdadeira, contudo, para os poliedros convexos. Há várias demonstrações para essa relação, mas os autores do livro utilizam uma demonstração diferente da que será utilizada nessa pesquisa. Dessa forma, será apresentada a demonstração de Cauchy da relação de Euler.

Será utilizado como base para apresentação da demonstração o texto do professor Elon Lages Lima intitulado “O teorema de Euler sobre poliedros”, publicado na Revista Universitária em 1985.

A demonstração de Cauchy pode ser dividida em etapas para facilitar sua compreensão, segundo Lima. A primeira consiste da retirada de uma face do poliedro, o que não altera o número de vértices nem o de arestas, mas reduz em uma unidade o número de faces. Dessa forma, basta provar que $V - A + F = 1$ para o objeto resultante após a retirada da face, já que ambos os lados da igualdade foram reduzidos em uma unidade.

Na segunda etapa, considera-se que uma aresta é *livre* quando é lado de apenas uma face do poliedro. O novo poliedro resultado da primeira etapa tem as arestas livres da face que foi retirada. Ao esticar esse poliedro partindo das arestas livres, é possível achatá-lo de modo que se obtenha uma figura plana. Ao realizar esse processo, os números de cada um dos elementos da relação se mantêm constantes.

Durante este processo, os números mantêm-se constantes. Se, em particular, o poliedro era convexo, este achatamento pode ser feito de modo bastante simples, projetando-se o poliedro modificado sobre um plano, a partir de um ponto tão próximo da face omitida que nenhuma semirreta que parta desse centro de projeção contenha mais de um ponto do poliedro. Sendo a origem dessas semirretas um foco luminoso, a sombra do poliedro sobre o plano é sua projeção (Figura 1).

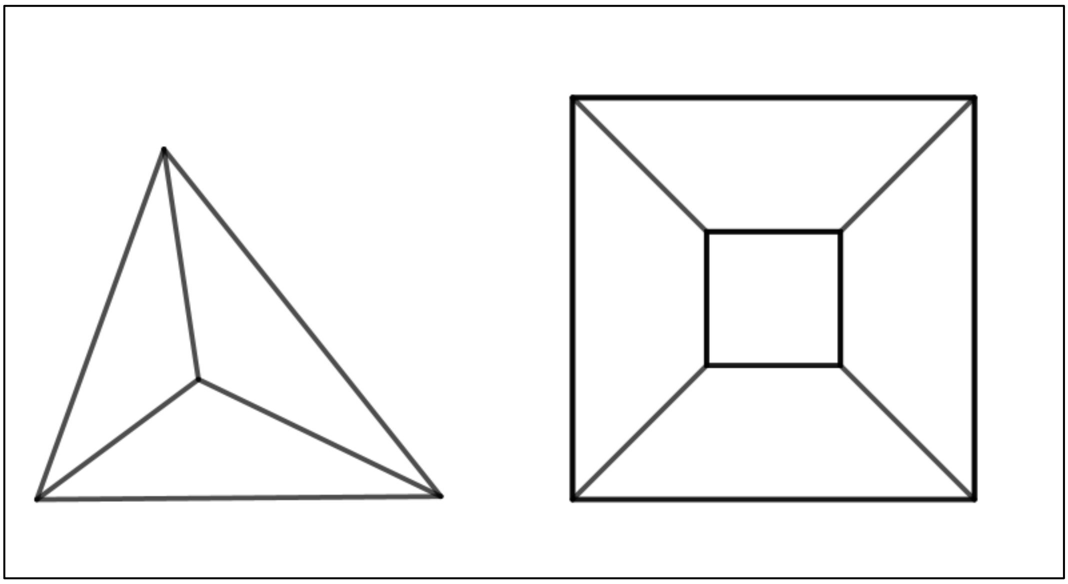


Figura 1 - Exemplos de projeção da segunda etapa.

A terceira etapa consiste em traçar diagonais que não se cortam, de forma que cada face seja transformada em triângulos. Cada vez que esse procedimento é realizado, o número de vértices não se altera, mas o número de faces e arestas aumenta em uma unidade cada. Dessa forma, a relação não é alterada. Podemos então supor que as faces são triângulos.

A fase seguinte consiste em retirar as arestas livres do poliedro planificado, retirando-se também, uma a uma, as faces que têm alguma aresta livre. Ao retirar cada uma dessas faces a igualdade $V - A + F = 1$ se mantém.

Retirando-se uma a uma as arestas livres, chega-se à etapa final que consiste em chegar a um triângulo, após as sucessivas retiradas. No triângulo é evidente a relação $V - A + F = 1$, pois neste caso $V = 3, A = 3\ e\ F = 1$. Isso conclui a demonstração.

Em seu texto, Lima faz uma análise detalhada dessa demonstração que evidencia que o argumento clássico atribuído a Cauchy, embora amplamente difundido, envolve hipóteses matemáticas que nem sempre são explicitadas em abordagens introdutórias. O autor demonstra que a validade da prova está associada a condições específicas sobre a estrutura do poliedro, particularmente no que se refere à conectividade, à organização das faces e à natureza dos ciclos presentes.

Dessa forma, Lima ressalta que a demonstração não se aplica indistintamente a qualquer poliedro, mas a uma classe particular que satisfaz determinadas propriedades combinatórias e topológicas.

Apesar disso, no contexto do ensino básico, a utilização da demonstração por meio da projeção e da planificação pode enriquecer o processo de aprendizagem, pois permite compreender a conservação das quantidades envolvidas na relação de Euler ao longo dos processos realizados.

Como destaca o autor, a projeção do poliedro sobre um plano constitui um procedimento que preserva as relações combinatórias fundamentais, possibilitando a redução do problema espacial a uma configuração plana mais acessível ao raciocínio geométrico dos estudantes.

Assim, no contexto do 6º ano do Ensino Fundamental, a demonstração assume caráter pedagógico de verificação e exploração, favorecendo a visualização e a construção intuitiva da relação $V - A + F = 2$, mesmo que o tratamento formal completo ultrapasse os objetivos dessa etapa escolar.

3
Procedimentos metodológicos

Nessa seção serão tratados os procedimentos adotados no desenvolvimento da pesquisa, discorrendo sobre o planejamento realizado, os materiais elaborados, as ferramentas utilizadas e os resultados esperados na aplicação em sala de aula. O texto busca levar o leitor a compreender os percursos percorridos até a realização da aula e conclusão do produto educacional elaborado (https://www.geogebra.org/m/vurjtgvm). O trabalho desenvolvido nessa seção está devidamente embasado nos referenciais teóricos apresentados na seção 2.

A pesquisa iniciou-se a partir da observação da não abordagem dos conteúdos de geometria na Educação Básica, mais especificamente no sexto ano. Nesse ano de escolaridade, os conteúdos de geometria ficam delegados ao final do ano letivo, sendo explorados apenas se há tempo hábil e se os conteúdos de aspecto aritmético estão concluídos.

Além disso, durante a aplicação das aulas envolvendo a relação de Euler identificou-se que os alunos apresentavam dificuldade em visualizar os poliedros, devido a limitação bidimensional do livro didático. Mesmo assim, foi possível identificar que os alunos sentiam curiosidade pelo assunto, o que pode estar relacionado à ausência de contato sistemático com conteúdos geométricos nos anos anteriores.

Experiências com o uso de tecnologias digitais, como softwares de geometria dinâmica, mostraram-se proveitosas e geram resultados positivos no processo de compreensão dos alunos, aumentando a participação e obtendo melhores resultados nas atividades propostas. Porém, esse conteúdo é abordado de forma superficial nos livros didáticos adotados no sexto ano. É necessário um planejamento mais detalhado que possa enriquecer o processo de aprendizagem.

Dessa forma, procedeu-se ao aprofundamento teórico acerca de metodologias que apresentaram resultados positivos no processo de aprendizagem, principalmente dos conteúdos de geometria. Buscou-se identificar as potencialidades de tais metodologias para compor um plano de aula para a abordagem da relação de Euler de forma a possibilitar uma aprendizagem mais significativa dos educandos.

Por se tratar de uma pesquisa desenvolvida na área da Educação, predominam investigações de natureza qualitativa. Segundo Pereira e Coutinho (2023, p. 994), esse tipo de pesquisa “[...]centra-se no embasamento empírico, que dispõe de diversos tipos e metodologias de estudos, com objetivo específico na análise dos processos de ensino-aprendizagem”.

Sendo assim, optou-se pela realização desse tipo de pesquisa, já que o interesse é analisar o processo de aprendizagem dos alunos a partir de uma intervenção pedagógica. O método de pesquisa do tipo intervenção pedagógica é definido por Damiani *et al.* (2013) quando afirma que

> Envolve planejamento e implementação de uma interferência e a avaliação de seus efeitos. Assim, como já discutido, nos relatórios desse tipo de pesquisa, na parte dedicada a apresentar o método, devem ser identificados e separados esses dois componentes principais: o método da intervenção (método de ensino) e o método da avaliação da intervenção (método de pesquisa propriamente dito). (Damiani *et al.*, 2013, p. 62)

Nas próximas subseções serão abordadas a caracterização da pesquisa, o método adotado na intervenção pedagógica e na avaliação da intervenção.

3.1 Caracterização da pesquisa

A pesquisa caracteriza-se como qualitativa, conforme o apresentado por Pereira e Coutinho (2024, p. 999), que defendem "[...] que na pesquisa científica o mais importante é produzir conhecimento que, além de útil, esteja voltado para a subjetividade e orientado pelo caráter humanista, como estabelecido na área da Educação." Esses autores destacam a importância de uma abordagem qualitativa em pesquisas voltadas para a Educação, o que exige a delimitação dos métodos e das avaliações a serem realizadas.

A intervenção pedagógica fundamentada no referencial teórico apresentado visa promover uma abordagem diferenciada do conteúdo, possibilitando a análise dos resultados obtidos ao longo e após sua aplicação. Segundo Damiani *et al.* (2013, p. 61), as pesquisas desse tipo "[...] poderiam ser consideradas como estímulos auxiliares que os professores-pesquisadores utilizam para resolver situações-problema, tais como a insatisfação com o nível e a qualidade das aprendizagens de seus alunos/sujeitos em determinados contextos pedagógicos."

3.2
Método da intervenção pedagógica

A intervenção foi planejada para ser aplicada em uma escola pública pertencente à rede municipal de ensino do município de Teresópolis, localizada na Barra do Imbuí. A escola atua no segundo segmento do Ensino Fundamental, que compreende do sexto ao nono ano. O ano de escolaridade da intervenção foi o sexto, sendo duas turmas com alunos na faixa etária de 10 aos 12 anos e aproximadamente trinta alunos em cada sala.

A pesquisa foi desenvolvida para a disciplina de Matemática. O planejamento da intervenção considerou uma semana letiva, correspondendo a seis horas-aula por turma. Foi considerada a possibilidade de utilização dos recursos disponíveis na unidade escolar, que incluem televisores, laboratório de informática e tablets, além dos recursos tradicionais.

A intervenção pedagógica foi elaborada para a área da geometria, mais especificamente a geometria espacial, sendo o conteúdo abordado a relação de Euler para poliedros convexos. Sua elaboração teve como objetivo promover a aprendizagem desse conteúdo de forma significativa e proporcionar uma experiência inovadora.

Para que esse objetivo fosse alcançado se recorreu às tecnologias digitais, sendo utilizado *software* de geometria dinâmica para auxiliar na visualização. Também foram planejados o uso de materiais concretos manipuláveis e o desenvolvimento de uma verificação da relação para auxiliar na abstração.

Com isso, espera-se que os alunos consigam compreender de forma mais clara essa relação e consigam aplicar esses conhecimentos em problemas e atividades futuras. Além disso, deseja-se que esse conteúdo se torne um conhecimento solidificado que sirva de conhecimento prévio para os futuros estudos de geometria espacial desses alunos.

A intervenção pedagógica foi elaborada seguindo uma organização em quatro etapas, pensadas para o desenvolvimento gradual do conteúdo e com o objetivo de favorecer a compreensão dos alunos. Essas etapas foram desenvolvidas para permitir a articulação entre momentos de explanação, exploração, aplicação e verificação, permitindo que o aluno possa desenvolver de forma gradual sua aprendizagem.

A primeira etapa consiste na apresentação das definições de poliedros e corpos redondos, utilizando slides como material de apresentação para os alunos. Para auxiliar na compreensão e facilitar a visualização, serão utilizados sólidos em acrílico para que os alunos observem as diferenças entre os poliedros e os corpos redondos. Nesse momento, o livro didático adotado pela unidade escolar será utilizado como material de apoio. Além disso, foi proposta uma atividade de classificação de sólidos, poliedros e corpos redondos.

Ainda nessa etapa, será apresentada a definição de poliedros, bem como seus principais tipos, utilizando o livro didático, os slides elaborados e os sólidos geométricos como apoio. Os conceitos de vértices, faces e arestas serão introduzidos com o auxílio de um sólido como referência e de imagens projetadas, a fim de facilitar a compreensão dos alunos. Nesse momento, será realizada oralmente a indagação aos alunos acerca do número desses elementos de alguns sólidos com o objetivo de favorecer a compreensão inicial.

Tendo concluído a etapa expositiva, será dado início à segunda etapa, em que os alunos receberão uma atividade investigativa, previamente elaborada e fundamentada nos princípios da investigação Matemática, que será desenvolvida em conjunto com o GeoGebra. Os estudantes serão conduzidos a conjecturar a relação de Euler para poliedros convexos, realizando a observação dos números de vértices, faces e arestas de diversos poliedros. Nessa etapa, espera-se que os alunos consigam estabelecer a relação de Euler de forma menos formal, percebendo alguma relação entre a quantidade de cada um desses elementos.

Após a realização desta atividade por todos os alunos, estes serão incentivados a compartilhar suas constatações de forma a ser elaborada uma definição coletiva mais formal da relação identificada. Nesse momento caberá ao professor a orientação do processo, guiando os alunos a comporem a partir de suas observações essa definição. Neste momento, espera-se que os alunos, em conjunto e com orientação, apresentem a relação correta entre o número de faces, arestas e vértices, mesmo que não seja apresentada formalmente como enunciada em livros.

Tendo sido apresentada a relação, na terceira etapa será o momento de questionar a sua validade para todos os poliedros convexos, buscando conduzir os alunos à investigação da validade. A partir dessa discussão, será proposta a realização de uma verificação baseada na demonstração de Cauchy da relação de Euler, utilizando o material concreto manipulável que consistirá na montagem, pelos alunos em grupos, de um poliedro utilizando jujubas e palitos. Em seguida será realizada a projeção em uma cartolina, para então realizar a triangulação, seguindo o processo proposto por Cauchy, com o objetivo de que os alunos consigam verificar a validade dessa relação a partir desse processo.

Tendo sido realizado esse processo de verificação prática, na quarta etapa será formalizado para os alunos, por meio de uma abordagem expositiva, que esse procedimento pode ser feito para todos os poliedros convexos, comprovando a validade da relação para os mesmos. Essa formalização será realizada de forma simplificada, devido à faixa etária da turma.

Cabe ressaltar que todos os recursos digitais utilizados nessa metodologia foram organizados em um único material, utilizando o livro do GeoGebra, com o intuito de gerar o produto educacional desejado. Essa ferramenta possibilita a organização dos materiais de forma clara e acessível, os quais podem ser acessados em qualquer dispositivo que possua navegador.

A implementação das etapas descritas constituiu a intervenção pedagógica proposta. Na subseção seguinte, serão apresentados os procedimentos adotados para a avaliação da intervenção.

3.3 Avaliação da intervenção

A avaliação dessa intervenção pedagógica será realizada por meio de quatro procedimentos. O primeiro consiste na observação durante toda a aplicação e o registro dos aspectos relevantes para a pesquisa. Como destacado por Rodrigues, Oliveira e Santos (2021, p. 159), a pesquisa qualitativa “[...] é complexa, dialoga com a diversidade e a flexibilidade e está arraigada a tendências fundamentadas em raízes filosóficas.”. Esses autores destacam que a observação é um processo muito importante nesse tipo de pesquisa, sendo valorizadas a descrição dos eventos e a análise de casos específicos.

Além da observação, as atividades realizadas pelos alunos servirão de material de análise, com o intuito de observar indícios do processo de aprendizagem ao longo das etapas da intervenção. Tanto as respostas às atividades investigativas, as respostas apresentadas oralmente durante a intervenção e os registros do processo de verificação serão analisadas cuidadosamente.

Como terceiro procedimento avaliativo, será aplicada uma atividade final na plataforma Kahoot! com o intuito de gerar dados que subsidiarão a análise do processo de aprendizagem dos alunos. As perguntas desse questionário serão objetivas, sendo necessária a aplicação do conteúdo trabalhado durante a intervenção.

Por fim, os alunos serão convidados a responder um questionário no Google Forms para colher as impressões e percepções dos alunos acerca da intervenção aplicada. Esse formulário trará perguntas objetivas e discursivas, possibilitando que os alunos, em algumas questões, discorram sobre suas observações. Esses procedimentos produzirão os dados que serão analisados para a construção dos resultados da pesquisa.

A análise dos dados coletados será realizada embasada no referencial teórico apresentado na seção 2, buscando identificar evidências de aprendizagem, dificuldades enfrentadas, contribuições da intervenção pedagógica para o processo de ensino e aprendizagem e indicações para investigações futuras.

4
Aplicação e resultados

Esta seção apresenta o relato da aplicação da intervenção pedagógica e do produto educacional, que consiste no conjunto de atividades disponibilizadas no livro do GeoGebra. Além disso, apresenta os resultados de cada etapa com embasamento no referencial teórico adotado.

4.1
Contexto da aplicação

A aplicação da intervenção pedagógica e do produto educacional ocorreu nos dias 20 e 21 de outubro de 2025, nas turmas 2603 e 2604, do Centro Educacional Beatriz Silva. Foram utilizados os seis tempos previstos para a intervenção. Durante esses dias, estiveram presentes 20 alunos da turma 2603 e 26 alunos da turma 2604.

Devido à necessidade do uso dos recursos tecnológicos, optou-se pelo uso do laboratório de informática (Figura 2), que conta com televisor para apresentação do professor e dezesseis computadores para uso dos alunos.

Figura 2 - Início da aula no laboratório de informática

Inicialmente, previa-se a utilização dos tablets para que os alunos pudessem realizar as atividades de forma individual. Porém, devido ao bloqueio do sistema realizado pela Secretaria Municipal de Educação, não foi possível acessar o site do GeoGebra. Dessa forma, optou-se pelo uso dos computadores em dupla para que todos os alunos pudessem realizar as atividades.

4.2 Resultados da primeira etapa

O desenvolvimento dessa etapa iniciou-se com a apresentação dos slides elaborados (Figura 3). Levando em consideração a importância da contextualização dos conteúdos apresentados, utilizou-se um evento ocorrido próximo ao dia da aplicação que teve grande repercussão. Dessa forma, foi apresentada inicialmente a imagem do museu do Louvre, que havia sido alvo de ampla repercussão midiática nas semanas anteriores, devido a um roubo realizado, e possui uma estrutura associada a um poliedro.

Figura 3 - Parte dos slides apresentados

Essa imagem inicial despertou o interesse dos alunos. Diversos estudantes trouxeram falas sobre o caso ocorrido. Esse momento foi aproveitado para direcionar o questionamento acerca da forma do museu. Como esperado, muitos alunos associaram a forma do museu à figura geométrica plana triângulo, confirmando a pouca familiaridade com conteúdos geométricos, conforme discutido no referencial teórico.

Em seguida, iniciou-se o momento da diferenciação de corpos redondos e poliedros, ainda utilizando os slides e apresentando os sólidos de acrílico (Figura 4), que são materiais concretos manipuláveis, disponíveis na Unidade Escolar. Esses foram utilizados de forma expositiva inicialmente e depois entregues aos alunos para manipulação e observação das diferenças entre os sólidos.

Figura 4 - Sólidos de acrílico utilizados

Os sólidos atraíram a atenção dos alunos, que ficaram empolgados com a possibilidade de manipular os sólidos. Muitos alunos relataram já terem visto os sólidos nos armários, mas acreditavam que não podiam ser utilizados. Esse resultado evidencia a importância da utilização dos recursos disponíveis para tornar as aulas mais dinâmicas.

Durante a manipulação dos sólidos pelos alunos, as observações realizadas confirmam resultados apresentados no referencial teórico, que afirmam que os sólidos despertam o interesse dos alunos e auxiliam na visualização dos objetos estudados.

Em seguida foi apresentada a definição formal de poliedros, para que os alunos compreendessem o significado da palavra e as características desses sólidos. Utilizando o slide, foram definidos vértices, arestas e faces de um poliedro. Os sólidos de acrílico novamente foram utilizados para indagar aos alunos os números desses elementos e alguns poliedros. Os alunos responderam adequadamente, demonstrando compreensão inicial dos conceitos apresentados.

Para finalizar essa etapa, foi apresentada a definição de poliedro convexo, que é de grande importância para compreensão da aplicação da relação de Euler. A conclusão dessa primeira etapa permitiu identificar os conceitos prévios dos alunos acerca dos conteúdos de geometria. A utilização dos sólidos e a contextualização inicial aumentaram o engajamento e a participação dos alunos, criando condições para o desenvolvimento da etapa a seguir, que consiste na atividade investigativa.

4.3 Resultados da segunda etapa

A segunda etapa teve como objetivo conduzir os alunos à investigação da relação de Euler, permitindo que identificassem padrões a partir da observação de diferentes poliedros no GeoGebra. Para dar início a essa etapa, as atividades investigativas (Apêndice B) foram distribuídas para os alunos, que já estavam separados em duplas. Foi solicitado que os alunos acessassem o link que direcionava ao livro do GeoGebra (Figura 5).

Nesse livro os alunos foram instruídos a abrir a seção “Atividades” (Figura 6), que continha os poliedros a serem utilizados nas atividades investigativas. Cada sólido era uma construção desenvolvida no GeoGebra que permitia que os alunos, utilizando as caixas de seleções, exibissem ou ocultassem os vértices, faces e arestas (Figura 7). Foi apresentado na televisão o processo de utilização desse recurso, em seguida os alunos foram orientados a dar seguimento nas atividades da apostila.

Por se tratarem de atividades investigativas, os alunos foram orientados a prosseguir de forma autônoma na realização das atividades. Sendo esclarecido que poderiam tirar dúvidas que surgissem acerca dos enunciados ou de problemas com as construções.

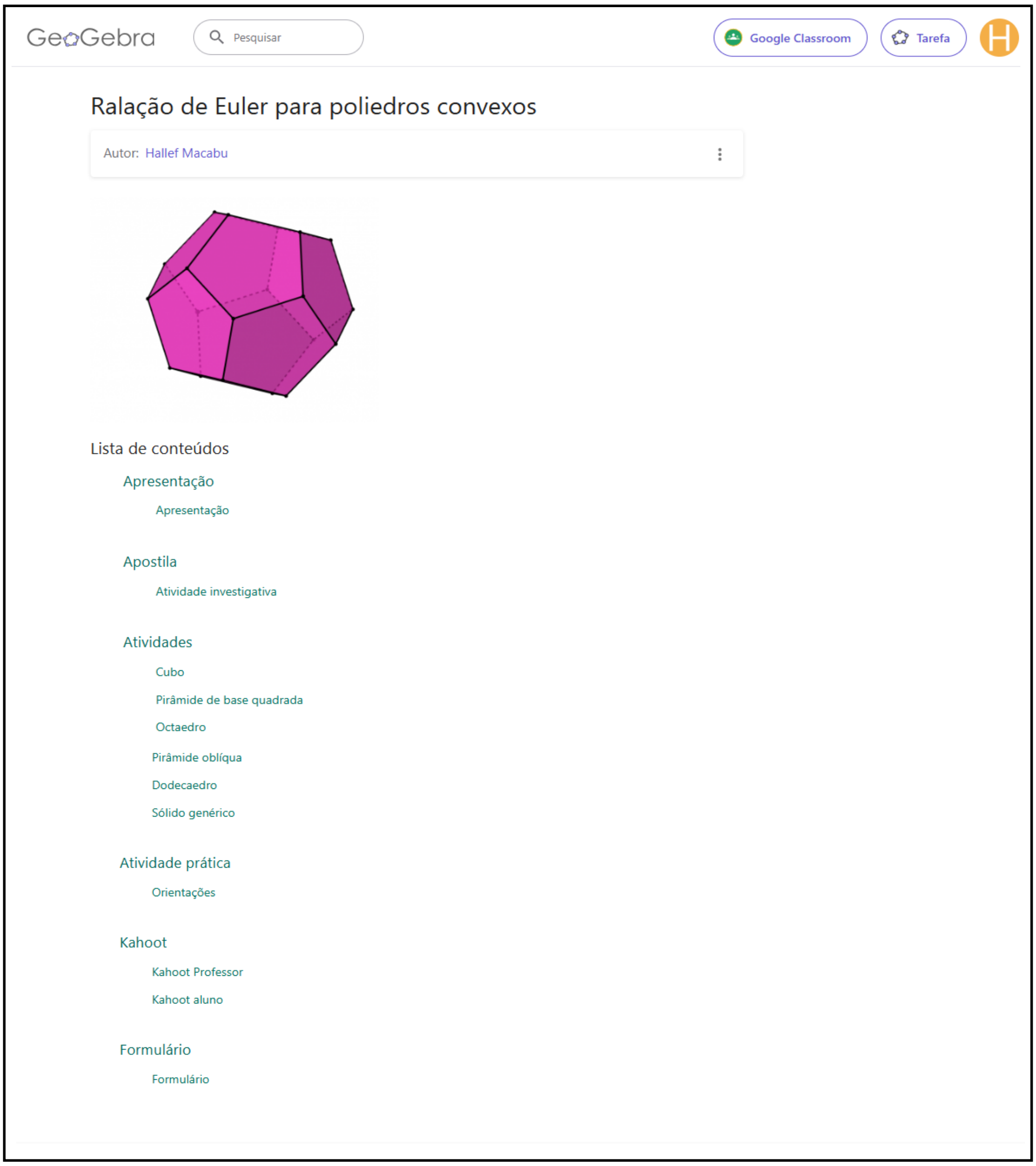


Figura 5 - Livro do GeoGebra

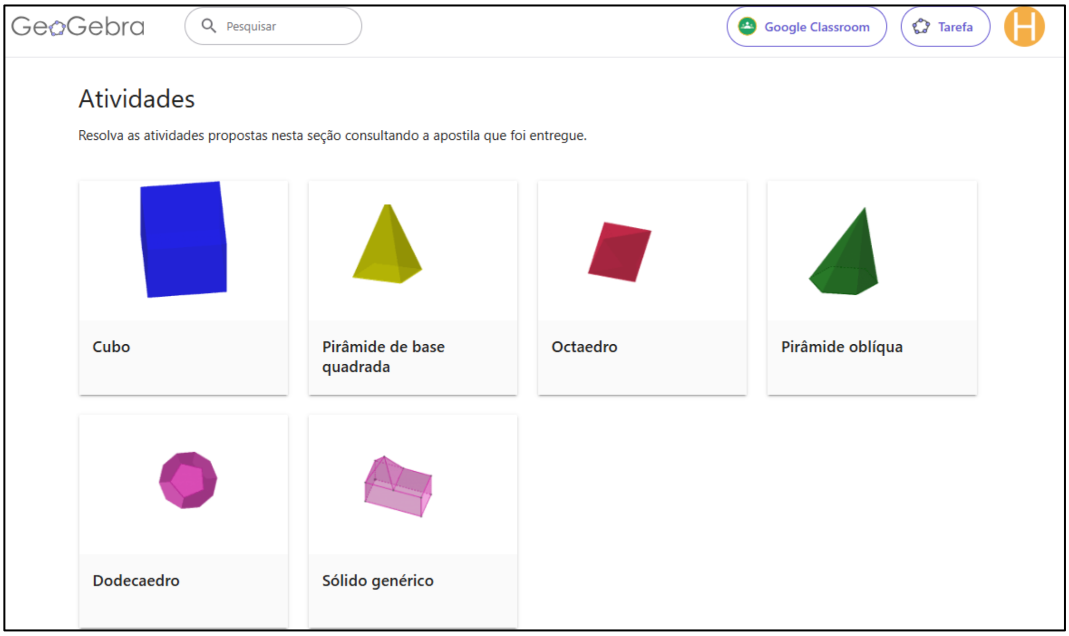


Figura 6 - Seção atividades livro do GeoGebra

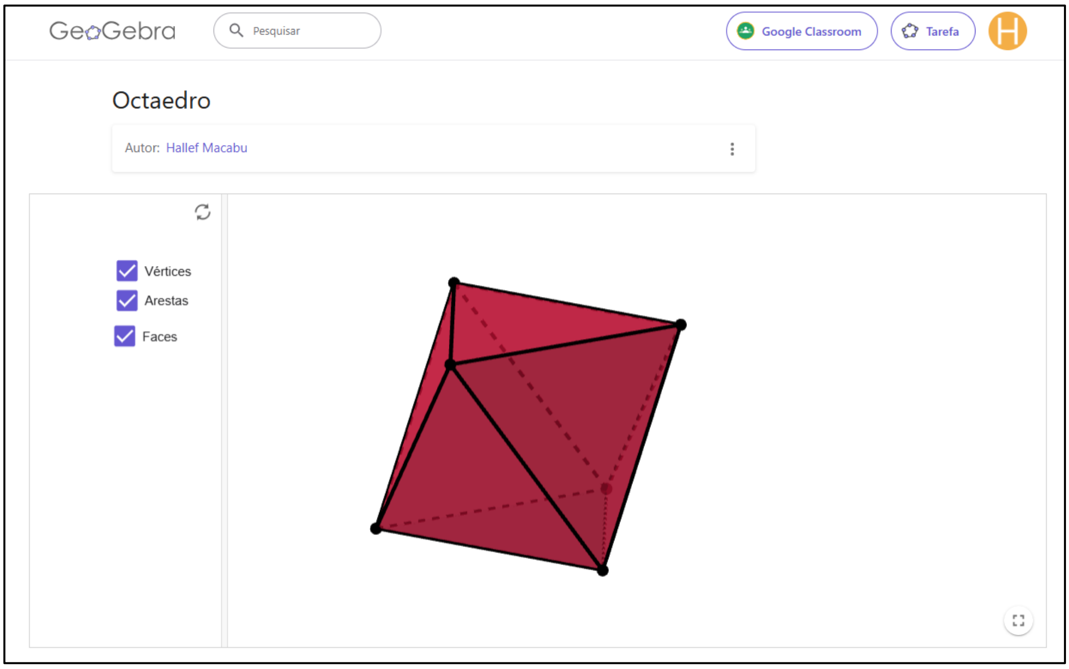


Figura 7 - Exemplo de construção utilizada na atividade investigativa

Os alunos se mostraram extremamente engajados durante as atividades. Foi possível identificar que o uso do GeoGebra despertou o interesse dos alunos, que utilizaram as construções de forma extremamente proveitosa, manipulando a construção de diversas formas: rotacionando, ampliando e reduzindo (Figura 8).

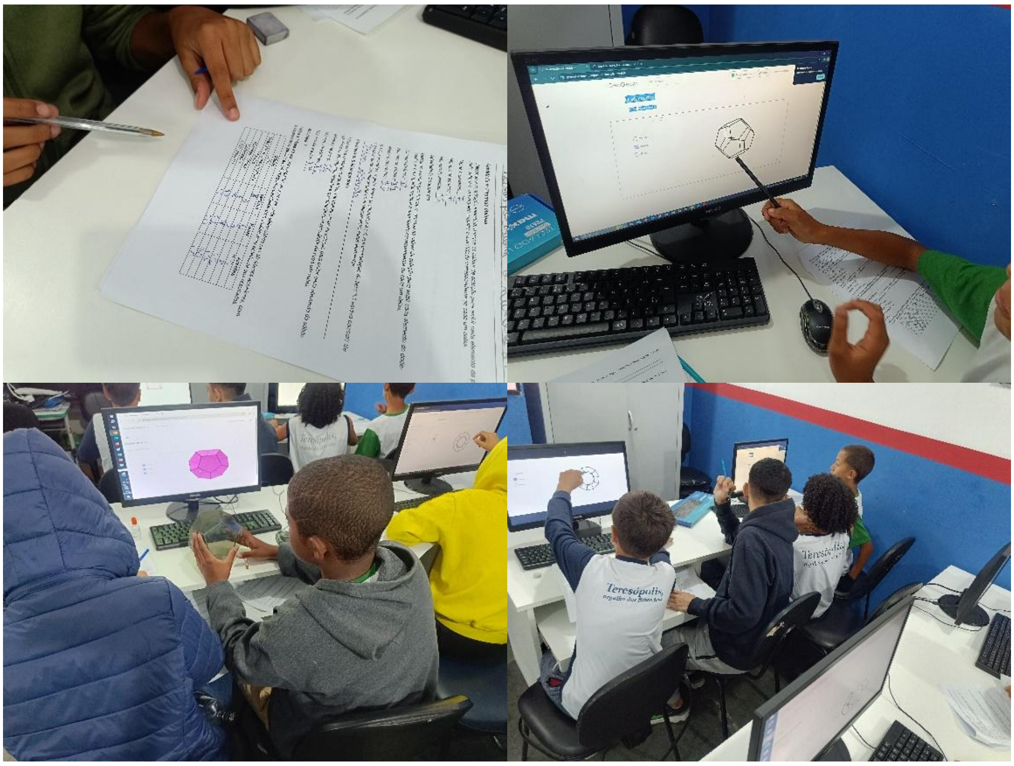


Figura 8 - Alunos utilizando as construções

Foi possível identificar, conforme referenciado, que o GeoGebra potencializa a realização das atividades investigativas, auxiliando os alunos no processo de investigação.

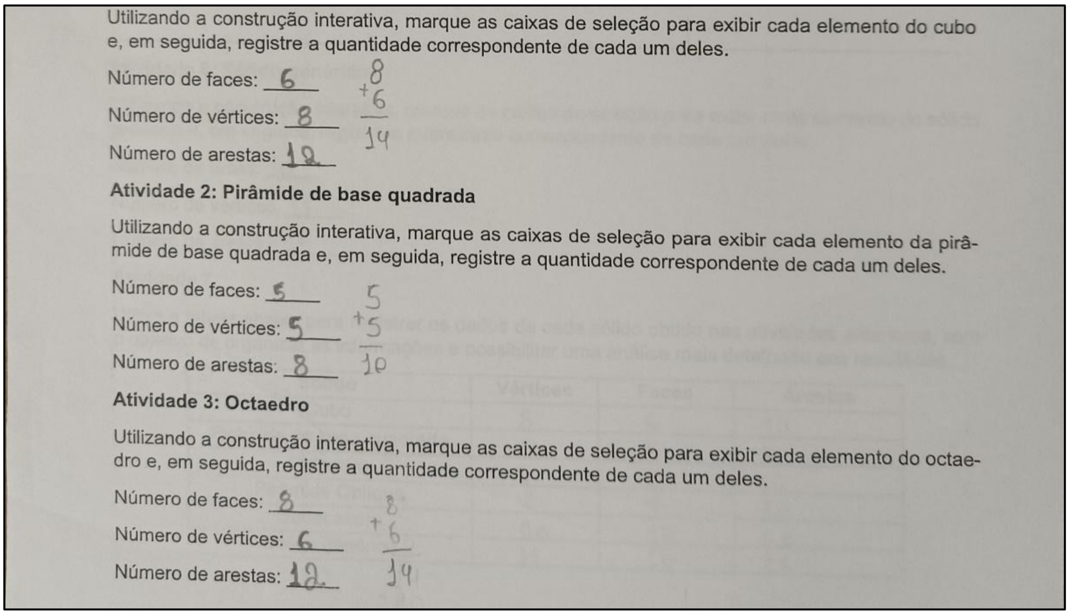
Cabe ressaltar que alguns alunos solicitaram os sólidos de acrílico para utilizarem no processo de investigação (Figura 9). Esse fato se relaciona diretamente com a familiaridade dos alunos com materiais concretos, que são utilizados durante os anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa familiaridade já era esperada, conforme apresentado na seção sobre materiais concretos manipuláveis.

Essa utilização não prejudicou o desenvolvimento da atividade investigativa, sendo considerado seu uso um ponto positivo que auxiliou os alunos na realização da investigação.

Figura 9 - Aluno utilizando sólido e GeoGebra

Durante a observação da investigação, identificou-se que os alunos apresentavam dificuldade em realizar atividades de forma autônoma. Foi recorrente a solicitação de respostas ou orientações mais objetivas. Esse comportamento evidencia a pouca familiaridade dos alunos com propostas investigativas, indicando uma predominância prévia de práticas mais expositivas no ensino de Matemática. Coube ao professor direcionar os alunos a compreenderem o caráter investigativo das atividades.

Após compreenderem o aspecto investigativo da proposta, observou-se maior autonomia na realização das atividades. Muitos alunos, já nos primeiros sólidos, começaram a elaborar conjecturas. Alguns alunos realizaram a soma de faces e vértices (Figura 10), mesmo não tendo sido solicitado nessa etapa.


Utilizando a construção interativa, marque as caixas de seleção para exibir cada elemento do cubo e, em seguida, registre a quantidade correspondente de cada um deles.

Número de faces: 6

Número de vértices: 8

Número de arestas: 12

8 + 6 = 14

Atividade 2: Pirâmide de base quadrada

Utilizando a construção interativa, marque as caixas de seleção para exibir cada elemento da pirâmide de base quadrada e, em seguida, registre a quantidade correspondente de cada um deles.

Número de faces: 5

Número de vértices: 5

Número de arestas: 8

5 + 5 = 10

Atividade 3: Octaedro

Utilizando a construção interativa, marque as caixas de seleção para exibir cada elemento do octaedro e, em seguida, registre a quantidade correspondente de cada um deles.

Número de faces: 8

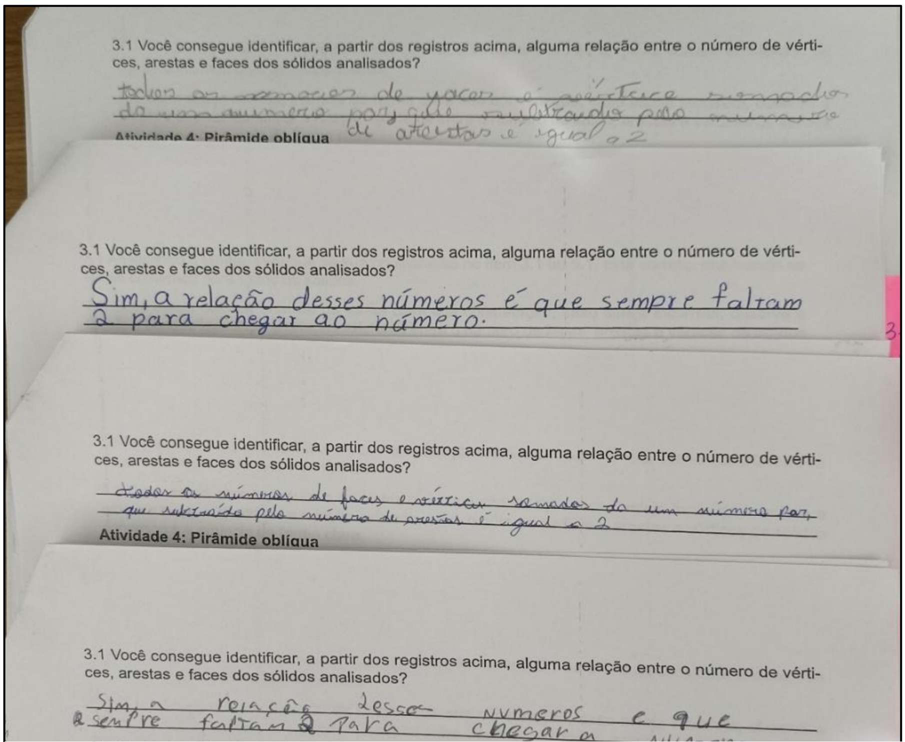
Número de vértices: 6

Número de arestas: 12

8 + 6 = 14

Figura 10 - Registro de resposta de um aluno

O primeiro item que solicitava uma conjectura inicial (Figura 11) apresentou respostas que já encaminhavam para a relação correta, alguns alunos perceberam a presença da diferença de duas unidades entre a soma das faces e vértices e a quantidade de arestas. Alguns alunos não apresentaram hipóteses corretas, esse fato já é esperado em atividades investigativas.


3.1 Você consegue identificar, a partir dos registros acima, alguma relação entre o número de vértices, arestas e faces dos sólidos analisados?

todos os números de faces e vértices somados dá um número par que subtraído pelo número de arestas é igual a 2

Atividade 4: Pirâmide oblíqua

3.1 Você consegue identificar, a partir dos registros acima, alguma relação entre o número de vértices, arestas e faces dos sólidos analisados?

Sim, a relação desses números é que sempre faltam 2 para chegar ao número.

3.1 Você consegue identificar, a partir dos registros acima, alguma relação entre o número de vértices, arestas e faces dos sólidos analisados?

todos os números de faces e vértices somados dá um número par, que subtraído pelo número de arestas é igual a 2

Atividade 4: Pirâmide oblíqua

3.1 Você consegue identificar, a partir dos registros acima, alguma relação entre o número de vértices, arestas e faces dos sólidos analisados?

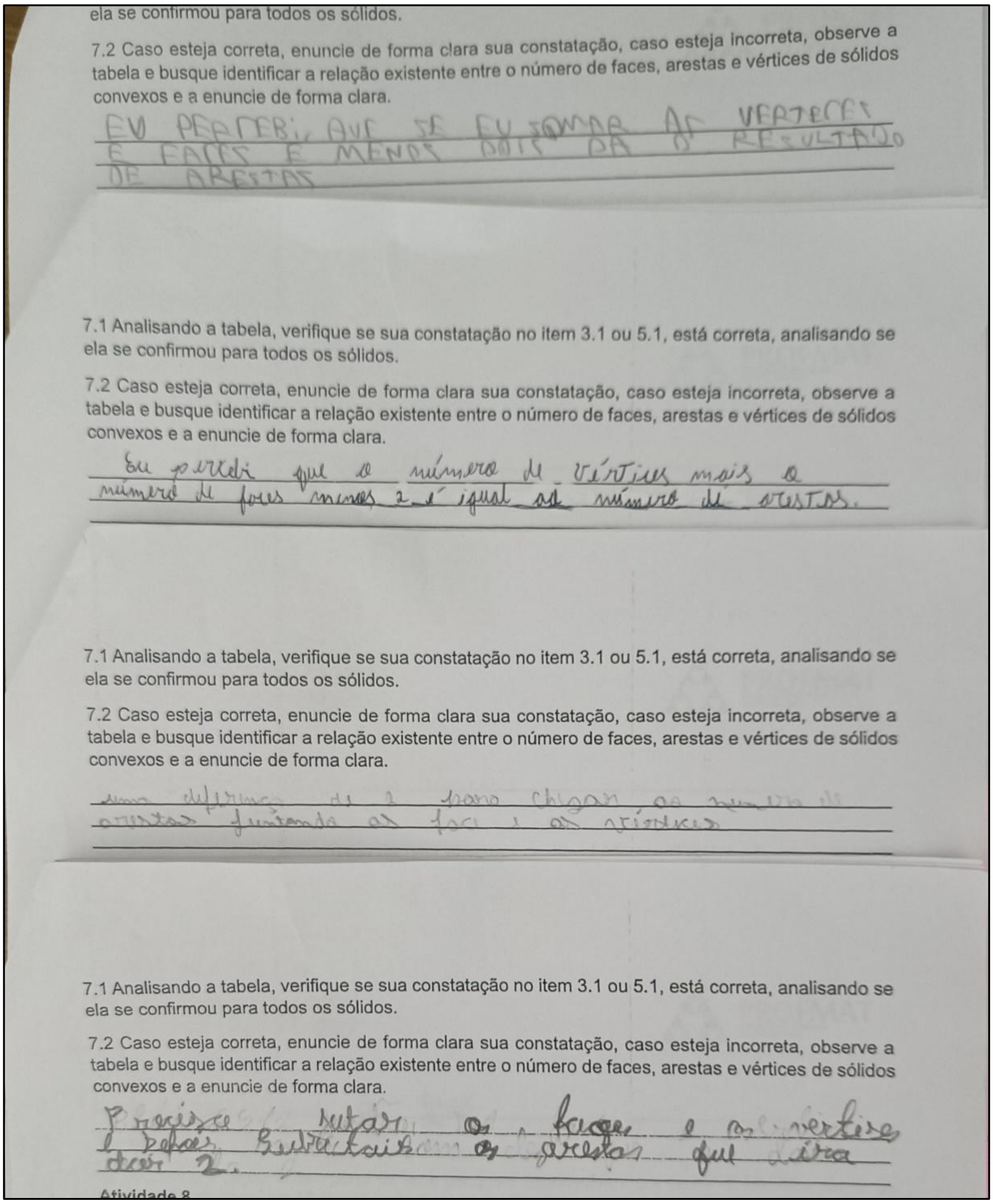
Sim, a relação desses números é que sempre faltam 2 para chegar a

Figura 11 - Respostas do item 3.1 da atividade investigativa

A atividade seguinte solicitava uma verificação da relação apresentada. Nessa etapa da verificação da relação, foi possível perceber que os alunos identificaram falhas em suas afirmações e buscaram retornar nos itens anteriores para realizar mais observações e tentar perceber uma nova relação. Porém, foi solicitado pelo professor que não fossem alterados os registros feitos, já que essas respostas contribuem para a análise das atividades.

O item seguinte da atividade, após a verificação, direcionava os alunos à construção de uma tabela do número de faces, vértices e arestas dos sólidos já analisados. Nessa etapa da atividade, foi possível perceber que muitos alunos conseguiram conjecturar de forma mais clara a relação existente. Alguns alunos se mostraram empolgados a constatarem a validade da sua conjectura inicial ao observarem os valores organizados na tabela.

Após o preenchimento da tabela, o item seguinte solicitava uma formalização da relação observada, muitos alunos apresentaram a relação correta (Figura 12), utilizando uma linguagem simplificada e de acordo com sua faixa etária. A quantidade de respostas que apresentavam uma relação correta evidencia o potencial das atividades investigativas.



ela se confirmou para todos os sólidos.

7.2 Caso esteja correta, enuncie de forma clara sua constatação, caso esteja incorreta, observe a tabela e busque identificar a relação existente entre o número de faces, arestas e vértices de sólidos convexos e a enuncie de forma clara.

EU PERCEBI QUE SE EU SOMAR AS VERTICES E FACES E MENOS DOIS DA O RESULTADO DE ARESTAS

7.1 Analisando a tabela, verifique se sua constatação no item 3.1 ou 5.1, está correta, analisando se ela se confirmou para todos os sólidos.

7.2 Caso esteja correta, enuncie de forma clara sua constatação, caso esteja incorreta, observe a tabela e busque identificar a relação existente entre o número de faces, arestas e vértices de sólidos convexos e a enuncie de forma clara.

Eu percebi que o número de vértices mais o número de faces menos 2 é igual ao número de arestas.

7.1 Analisando a tabela, verifique se sua constatação no item 3.1 ou 5.1, está correta, analisando se ela se confirmou para todos os sólidos.

7.2 Caso esteja correta, enuncie de forma clara sua constatação, caso esteja incorreta, observe a tabela e busque identificar a relação existente entre o número de faces, arestas e vértices de sólidos convexos e a enuncie de forma clara.

uma diferença de 2 para chegar ao número de arestas juntando as faces e os vértices

7.1 Analisando a tabela, verifique se sua constatação no item 3.1 ou 5.1, está correta, analisando se ela se confirmou para todos os sólidos.

7.2 Caso esteja correta, enuncie de forma clara sua constatação, caso esteja incorreta, observe a tabela e busque identificar a relação existente entre o número de faces, arestas e vértices de sólidos convexos e a enuncie de forma clara.

Precisa somar as faces e os vertices e depois subtrair as arestas que dará dar 2.

Atividade 8

Figura 12 - Relações apresentadas pelos alunos na atividade investigativa

Na análise das relações apresentadas, nenhum dos alunos citou a limitação da relação aos poliedros convexos. Porém, alguns alunos destacaram a limitação da relação para “alguns sólidos”, mostrando uma interessante percepção da existência de uma limitação da relação de Euler.

A atividade final da apostila de atividades investigativas solicitava uma aplicação da relação conjecturada em um exercício. Todos os alunos que apresentaram a relação correta conseguiram desenvolver a questão de forma clara e com respostas corretas.

Para fechamento dessa etapa, foi realizado o momento de construção coletiva da definição da relação, esse momento é importante para possibilitar que aqueles alunos que não chegaram à relação correta, consigam compreender a relação para dar segmento nas atividades. Esse momento de socialização das respostas foi enriquecedor, pois os alunos debateram suas versões das relações e chegaram a uma definição bem próxima da definição formal.

Nessa etapa, foi possível identificar que os alunos inicialmente apresentaram uma postura dependente, característica do costume com aulas expositivas, mas essa postura foi alterada, a partir da orientação do professor, para um posicionamento investigativo. Essa nova postura resultou na formulação de conjecturas e na identificação da relação de Euler, o que preparou o grupo para a etapa seguinte de verificação e formalização.

Embora os alunos tenham conseguido conjecturar e aplicar a relação de Euler a partir da atividade investigativa, a compreensão obtida até esse momento ainda se baseava na observação de casos particulares.

Dessa forma, tornou-se necessário avançar para uma etapa de verificação, conforme o planejamento metodológico, permitindo que os estudantes compreendessem que a relação identificada não se limita a exemplos isolados, mas possui validade matemática para os poliedros convexos. Assim, a etapa seguinte foi dedicada à realização de um processo de verificação inspirado na demonstração apresentada por Cauchy.

4.4 Resultados da terceira e quarta etapa: verificação e formalização da relação de Euler

A aplicação dessa etapa se iniciou com a reorganização dos alunos em grupos, cada grupo recebeu uma cartolina, palitos de dente e jujubas. Esse momento gerou grande empolgação nos alunos, principalmente devido a presença do doce. Para manter o foco na atividade, foi combinado que os materiais seriam utilizados inicialmente para a construção proposta, sendo os doces disponibilizados aos alunos ao final da etapa.

Os alunos foram instruídos a construir um poliedro utilizando os palitos e as jujubas e orientados a analisar qual poliedro seria construído devido as dificuldades que poderiam ser encontradas em poliedros com muitas faces.

Essa etapa teve como objetivo conduzir os alunos a verificação da relação de Euler, para que fosse possível que os estudantes transitassem da observação da relação para uma compreensão mais ampla da sua validade.

Foi possível identificar que a etapa da construção dos sólidos despertou o interesse dos alunos, os grupos trabalharam de forma engajada na execução do processo. Os educandos tiveram cuidado ao executar a tarefa (Figura 13), para que o sólido ficasse bem estruturado e similar aos sólidos visualizados no GeoGebra ou nos sólidos em acrílico.

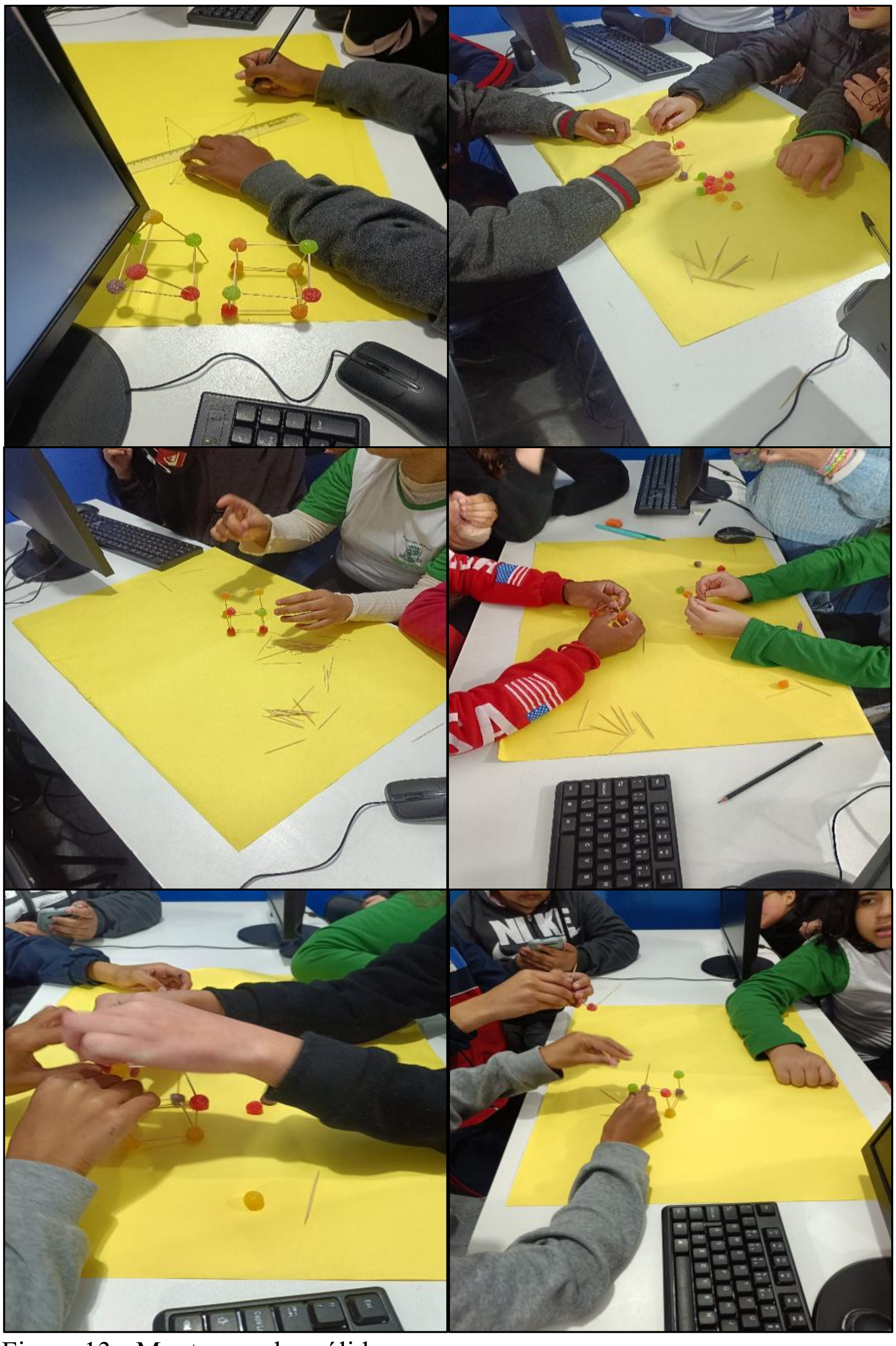


Figura 13 - Montagem dos sólidos

Após todos os grupos terem concluído a montagem dos sólidos, os alunos foram orientados a realizar a projeção. Para esse processo foram utilizadas as lanternas dos celulares, réguas, lápis e borracha. Houve, inicialmente, um pouco de dificuldade dos alunos em posicionar os sólidos de forma que fosse possível realizar a projeção de forma adequada.

Os grupos foram auxiliados pelo professor nesse processo de projeção. Após essas orientações, os alunos iniciaram o traçado da projeção (Figura 14), se mostrando focados na realização da tarefa. Houve também muito interesse por parte deles em compreender o resultado que seria alcançado ao final do processo.

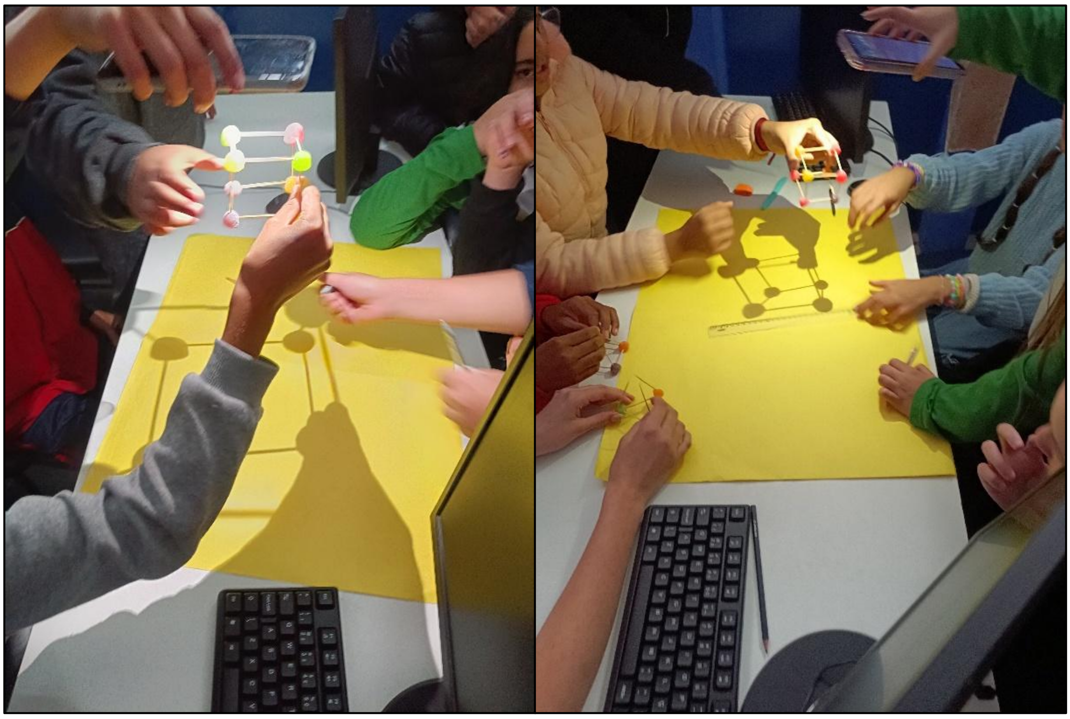


Figura 14 - Alunos projetando o sólido

Após a finalização do processo de projeção, os alunos iniciaram o processo de triangulação da figura plana gerada, foi esclarecido que esse era o início da verificação da relação de Euler. Os estudantes ficaram curiosos e intrigados com a atividade a ser desenvolvida, alguns questionaram como uma figura plana iria servir para verificar a relação em sólidos.

Esse questionamento evidenciou a transição dos alunos entre a percepção concreta dos sólidos e a compreensão de que propriedades geométricas podem ser analisadas por meio de representações planas. A projeção e a triangulação possibilitaram visualizar que a relação entre faces, vértices e arestas permanece invariável ao longo do processo.

Em seguida, os educandos foram orientados a iniciar o processo de retirada dos lados livres (Figura 15). Houve um pouco de dificuldade na compreensão da retirada inicial da face superior que não é projetada. Superada essa dificuldade, os alunos iniciaram o processo de retirada.

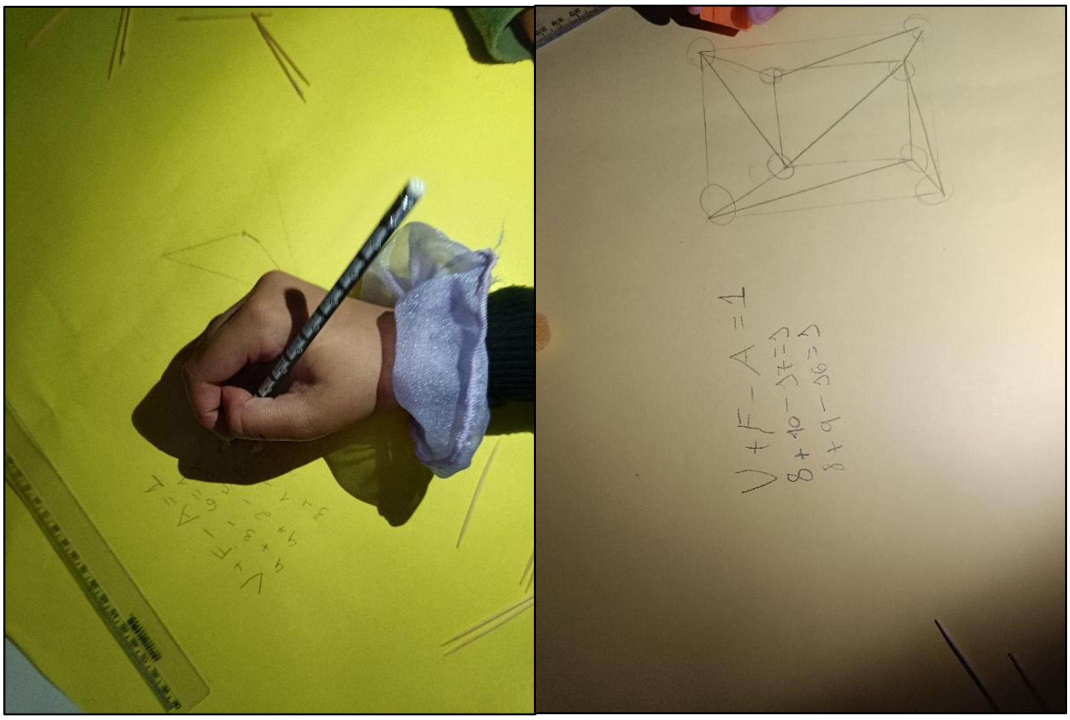


Figura 15 - Processo de retirada dos lados livres

Foi possível perceber que os alunos ficaram surpresos pela invariância da relação, os grupos trocaram questionamentos para verificarem se estava ocorrendo com todos, indicando compreensão do caráter geral da propriedade. Quando os grupos começaram a chegar ao triângulo final (Figura 16), alguns grupos comemoraram o resultado, sendo possível identificar que houve compreensão do processo realizado.

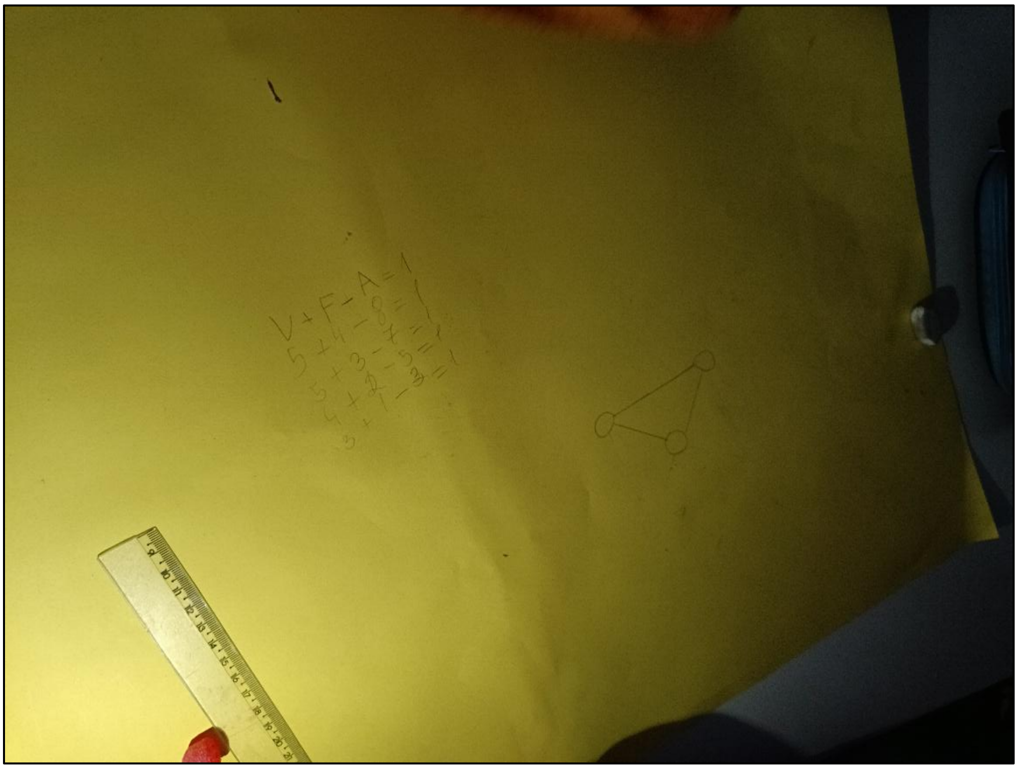


Figura 16 - Resultado final do processo de verificação

Concluída a etapa de verificação prática, iniciou-se o momento de formalização do processo, com a apresentação dos elementos centrais da demonstração de Cauchy.

Muitos alunos questionaram se o que haviam realizado era uma demonstração, foi explicado que o processo realizado foi uma verificação, mas que é a base para uma demonstração. Foi possível perceber o sentimento de realização dos alunos, compreendendo-se como sujeitos de sua aprendizagem e tendo potencial de realizar uma verificação matemática.

Dessa forma, a etapa evidenciou a relevância da introdução de processos demonstrativos já no Ensino Fundamental. Observou-se que, quando adequadamente mediados, os alunos conseguem participar ativamente de processos de verificação Matemática, ampliando sua compreensão do objeto estudado e atribuindo significado às relações observadas.

Cabe destacar que não foi realizada a demonstração formal completa. Considerando o ano de escolaridade e a maturidade dos estudantes, foi feita uma explicação simplificada, mas com elementos suficientes para justificar a validade da relação para todos os poliedros convexos.

Nesse momento, alguns alunos resgataram, da atividade investigativa, o sólido genérico, afirmando que a relação teve sua validade mantida nesse sólido devido a esse fato demonstrado. Já que aquele não era um sólido, nas palavras deles, “normal”. Essa constatação dos alunos, mostrou que houve compreensão do processo de verificação e demonstração, resultando em uma aprendizagem mais clara da relação de Euler.

4.5 Resultados das avaliações

Esta subseção sistematiza os resultados obtidos a partir dos instrumentos de avaliação adotados, que consistiram na observação, na análise das atividades realizadas pelos alunos, na atividade gamificada no Kahoot! e no formulário final. Esses instrumentos serviram como base para a análise qualitativa dos dados referentes ao processo de desenvolvimento dos alunos durante a aplicação da metodologia.

A observação evidenciou que os alunos se mantiveram engajados durante toda a aplicação. Desde o momento em que identificaram que a aula teria uma abordagem diferente da tradicionalmente adotada, observou-se maior curiosidade e interesse. Esse resultado pode ser relacionado, inicialmente, ao uso da contextualização adotada na aula e bem como à utilização dos sólidos de acrílico, evidenciando que esses recursos podem potencializar o envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem.

A observação também possibilitou um acompanhamento da execução, por parte dos estudantes, das atividades investigativas. A partir dessa análise, foi possível identificar o desenvolvimento da autonomia dos estudantes durante o processo investigativo. Os alunos que inicialmente adotaram uma postura de espectadores, por não terem familiaridade com a metodologia, foram gradualmente desenvolvendo maior autonomia investigativa.

A análise das atividades investigativas desenvolvidas pelos alunos evidenciou indícios de aprendizagem conceitual da relação de Euler a partir do processo investigativo, uma vez que vários estudantes conseguiram apresentar uma definição correta da relação ao final da atividade. O encaminhamento proposto pela atividade investigativa mostrou-se consistente na condução do processo de aprendizagem do conteúdo estudado.

A atividade gamificada realizada no Kahoot!, realizada em duplas, foi um momento de grande empolgação dos alunos. Nela os alunos deveriam aplicar, em questões de múltipla escolha, o conteúdo estudado e verificado durante a aula.

A análise dos resultados do relatório gerado pela plataforma (Figura 17), confirmaram que os alunos conseguiram aplicar de forma satisfatória o conteúdo estudado, demonstrando que a metodologia adotada contribui para o processo de construção do conhecimento dos alunos acerca da relação de Euler.

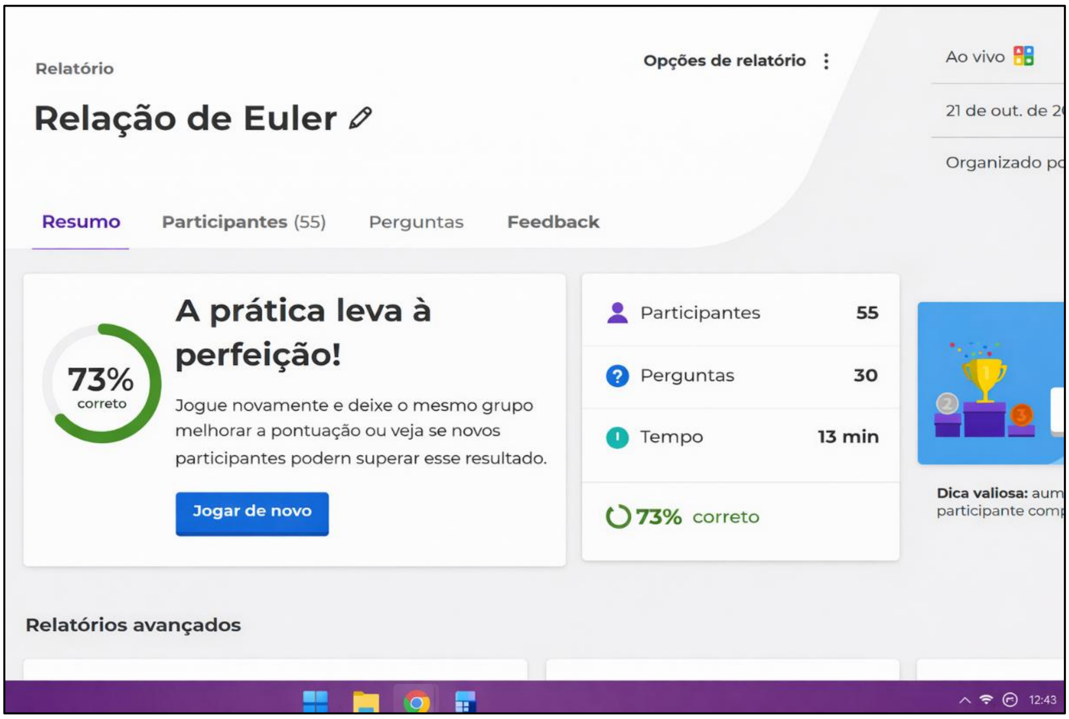


Figura 17 - Relatório da plataforma Kahoot!

Ainda na análise do relatório, foi possível identificar que algumas perguntas apresentaram alto percentual de acerto (Figura 18). Tais perguntas mostraram que os alunos conseguiram compreender a definição e também foram capazes de aplicar a relação de Euler em exercícios.

Pergunta		Tipo	Correto/incorreto
3	O que representa a letra F na relação de Euler?	Quiz	100%
20	Por que a relação de Euler é importante?	Quiz	93%
2	O que representa a letra A na relação de Euler?	Quiz	87%
30	Um poliedro tem 6 faces e 8 vértices. Quantas arestas ele possui?	Quiz	80%
14	Se um sólido tiver "buracos", a relação de Euler ainda vale?	Quiz	80%
12	Qual dessas figuras não é um poliedro convexo?	Quiz	73%
13	Os palitos na construção dos poliedros representam:	Quiz	73%
4	A relação de Euler é válida para:	Quiz	67%
19	A relação de Euler mostra que os elementos do poliedro estão:	Quiz	67%
11	Um sólido tem 10 arestas e 6 faces. Quantos vértices ele deve ter?	Quiz	60%

Figura 18 - Relatório individualizado das perguntas

O uso da ferramenta Kahoot! para realização de atividade gamificada se mostrou relevante, conforme apontado em pesquisas desenvolvidas. O uso dessa metodologia estimula a participação e o engajamento dos alunos. Ainda durante a aplicação foi possível identificar o espírito competitivo despertado nos alunos pela atividade, conforme também apontado no referencial teórico.

Sendo assim, a atividade gamificada enriqueceu a metodologia adotada, propiciando um fechamento dinâmico e atrativo da aula desenvolvida.

Após a finalização dessa atividade, os alunos foram convidados a responder um questionário de avaliação da aula aplicada (Apêndice F). Esse formulário foi preenchido de forma individual, para possibilitar a identificação das impressões de cada aluno e auxiliar na análise em conjunto dos demais instrumentos (Apêndice G).

Esse formulário mostrou-se uma rica fonte de análise, possibilitando uma compreensão detalhada das opiniões dos alunos que participaram da aplicação. Uma das perguntas realizadas questionava os alunos acerca da compreensão do conteúdo trabalhado. Aproximadamente 96% dos alunos compreenderam em algum grau o conteúdo, sendo que aproximadamente 61% afirmaram terem entendido bem (Gráfico 1).

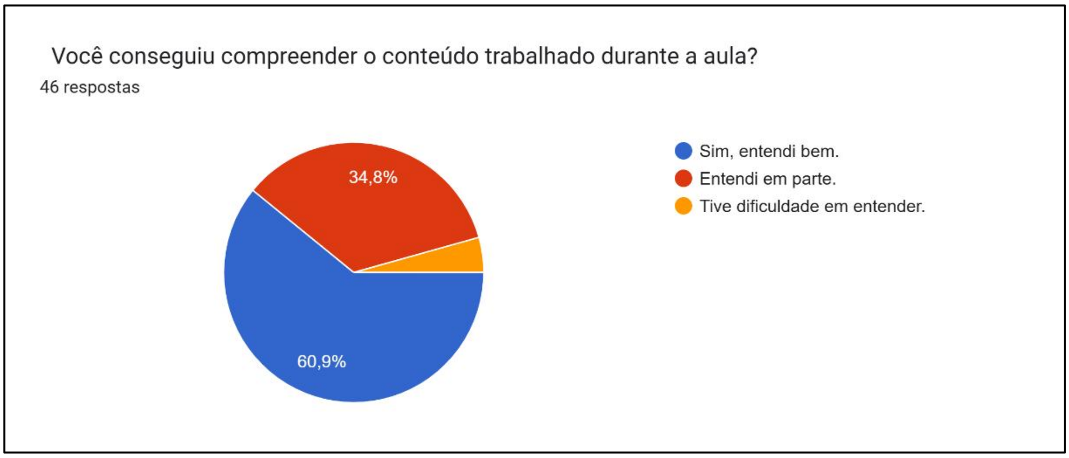


Gráfico 1 - Dados das respostas ao formulário de avaliação (I)

Esse resultado confirma que o conjunto das metodologias adotadas durante a aula contribuiu para o processo de compreensão da relação de Euler. Acerca da atividade investigativa, mesmo diante da resistência inicial, os resultados mostraram que essa atividade despertou o interesse dos alunos. Cerca de 80% dos alunos relataram ter achado a atividade investigativa interessante (Gráfico 2).

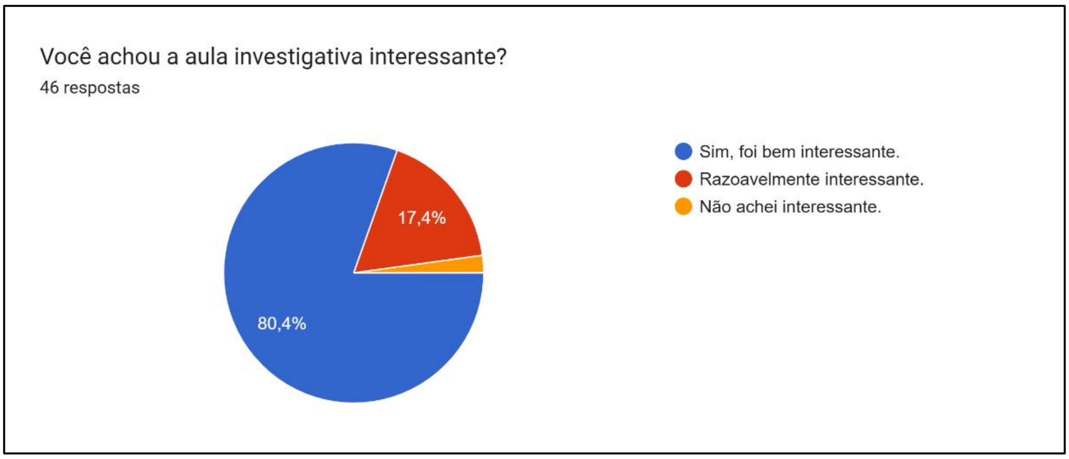


Gráfico 2 - Dados das respostas ao formulário de avaliação (II)

Diferentemente do esperado, o uso de materiais concretos e do *software* GeoGebra obteve uma porcentagem menor que 70% (Gráfico 3) nas perguntas que questionavam sua contribuição para a compreensão da relação de Euler. Já o processo demonstrativo, com o qual os alunos não tinham familiaridade, obteve 74%. Esse fato corrobora com os dados apresentados acerca da importância do processo de demonstração na Educação Básica.

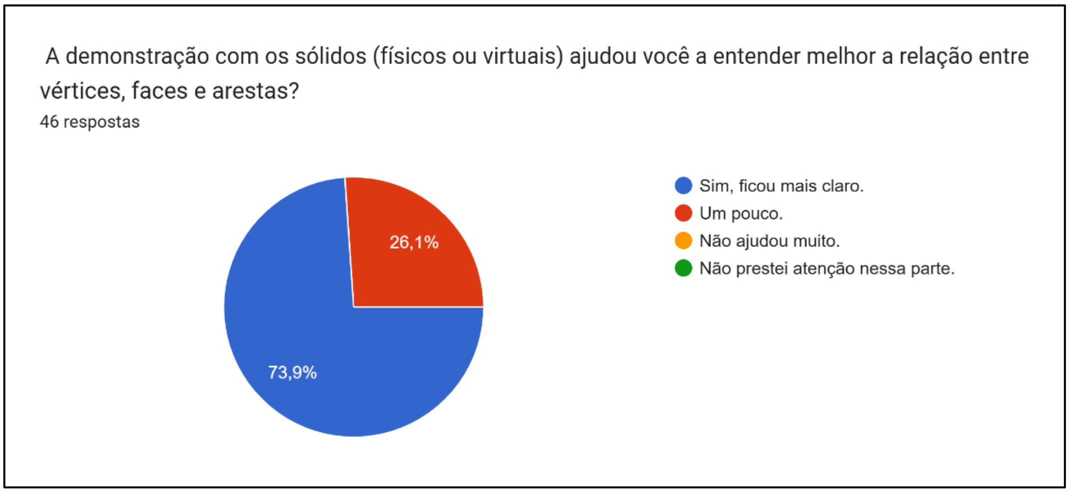


Gráfico 3 - Dados das respostas ao formulário de avaliação (III)

Os dados sugerem que os alunos conseguiram compreender a importância dessa metodologia, já que, conforme defendido, a demonstração contribui para consolidação do processo de aprendizagem e pode ampliar a compreensão dos estudantes acerca da sua aplicabilidade. Esse fato não configura uma limitação ou dificuldade do processo de aplicação da metodologia, mas reafirma a importância do processo demonstrativo combinado com outras metodologias.

Outra pergunta que mostrou um resultado positivo questionava os alunos sobre o interesse em aulas com formato investigativo. Aproximadamente 90% dos alunos afirmou ter interesse em mais aulas nesse formato (Gráfico 4). Esse dado confirma os resultados de pesquisas anteriores, que afirmam que as atividades investigativas motivam os alunos e geram mais autonomia.

Gráfico 4 - Dados das respostas ao formulário de avaliação (IV)

Mesmo considerando que os resultados obtidos foram em sua maioria positiva, cabe destacar que a aplicação da aula elaborada enfrentou limitações. Destaca-se que o trabalho em dupla, durante a atividade investigativa, impossibilitou uma análise mais individualizada das respostas dadas pelos alunos. Esse fato foi consequência do número insuficiente de computadores e o bloqueio dos tablets.

Além disso, durante o processo de verificação da relação de Euler, houve dificuldade no atendimento de todos os grupos devido a quantidade de alunos por turma. Seria necessário que a turma possuísse menos alunos ou houvesse um professor auxiliar para contribuir no processo de auxílio aos alunos. Se houvesse possibilidade de um trabalho mais individualizado, talvez fosse possível obter um resultado mais positivo.

No formulário, quando questionados sobre sua visão acerca da Matemática após a aula, aproximadamente 68% dos alunos afirmaram achá-la mais interessante e próxima do cotidiano. De forma geral, os resultados indicam que a combinação entre investigação matemática, recursos tecnológicos, materiais manipuláveis e momentos de verificação/demonstração contribuiu para o desenvolvimento conceitual e investigativo dos alunos. Além disso, essa combinação despertou o interesse dos mesmos por mais aulas nesse formato e apresentou avaliação positiva por parte de alguns deles. Aproximadamente 94% dos alunos atribuíram nota maior ou igual a quatro para a aula (Gráfico 5).

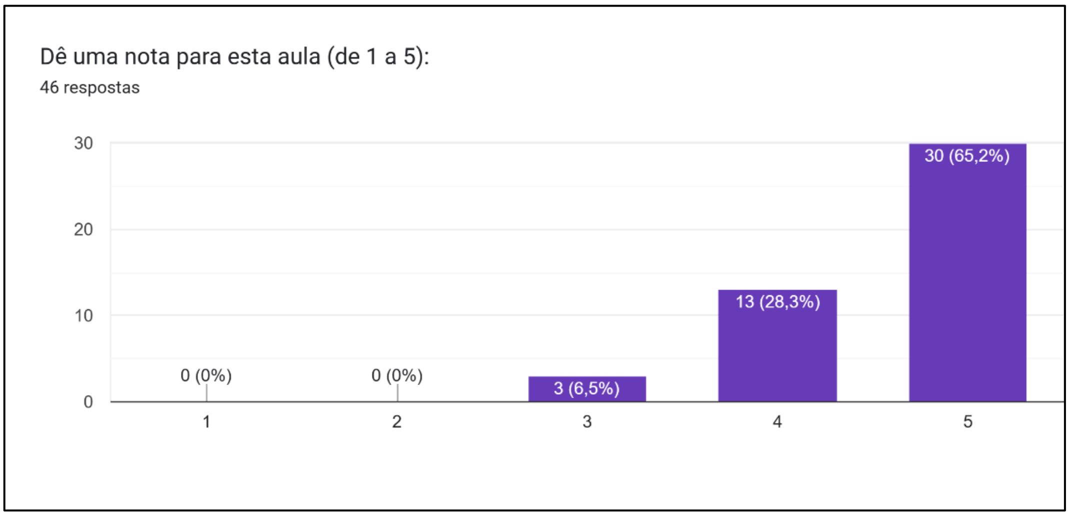


Gráfico 5 - Dados das respostas ao formulário de avaliação (V)

Além da avaliação da aula, as perguntas abertas realizadas no formulário, que permitiam que os alunos apresentassem suas opiniões sobre a metodologia adotada e a compreensão dos conteúdos, trouxe respostas positivas (figura 19).

A verificação com o geogebra e os trabalho das jujubas ajudaram bastante, foi uma das minhas materias favoritas.
SIM , ME AJUDOU APRENDER AS COISAS QUE EU NAO SABIA FAZER Aprendi muita coisa, tipo formas geometricas mais complexas, vertices, faces e etc.
com eu e minha dupla com a ajuda do geogebra ficou muito mais facil para responder
com eu e minha dupla com a ajuda do geogebra ficou muito mais facil para responder

Figura 19 - Respostas dos alunos as perguntas abertas

Os resultados obtidos permitem refletir não apenas sobre a eficácia da intervenção proposta, mas também sobre as potencialidades e desafios envolvidos na implementação de metodologias investigativas no contexto da Educação Básica, aspectos que serão retomados nas considerações finais deste trabalho.

5
Considerações finais

Em um cenário em que se destacam as dificuldades com os conteúdos de Geometria encontradas no sexto ano do Ensino Fundamental, torna-se importante buscar formas de superar os obstáculos enfrentados e tornar o ensino dessa área da Matemática mais atrativa e interessante. Nesse sentido, este trabalho se dedicou a responder à questão de pesquisa proposta, que investigava as potencialidades do uso de metodologias ativas, materiais concretos e tecnologias no ensino da relação de Euler.

De modo geral, os resultados obtidos evidenciaram que o uso combinado dessas metodologias e ferramentas potencializou o processo de ensino-aprendizagem, criando um ambiente propício para a compreensão do conteúdo estudado. Foi possível identificar que os estudantes ficaram estimulados a participar e se dedicaram à realização das atividades.

A análise dos dados permitiu ainda identificar uma maior compreensão da relação de Euler por parte dos alunos, sendo perceptível o desenvolvimento da visualização espacial dos sólidos estudados. Outro resultado relevante foi o desenvolvimento da verificação por parte dos alunos, que demonstrou a possibilidade de aplicação desse tipo de atividade para alunos do Ensino Fundamental.

Em relação à questão de pesquisa proposta, os resultados evidenciam que o uso de materiais concretos, tais como sólidos de acrílico e a construção de sólidos, contribuiu significativamente para a visualização espacial dos estudantes. Esses materiais possibilitaram uma visualização tridimensional dos sólidos, que normalmente são apresentados de forma bidimensional nos materiais tradicionais.

As atividades investigativas mostraram-se eficazes em estimular a participação dos alunos e desenvolver sua autonomia diante da exploração e verificação das conjecturas realizadas. Esse fato se confirma pela mudança de postura dos alunos do início para o final da atividade, assim como pelas respostas que apresentavam a relação desejada corretamente.

A verificação da relação de Euler, baseada na demonstração de Cauchy, utilizando as projeções, apresentou potencialidades no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, incentivando o desenvolvimento de conjecturas e estimulando o desejo pelo fazer matemático.

A utilização da gamificação como instrumento avaliativo mostrou-se eficaz, estimulando a aplicação dos conteúdos estudados, tendo possibilitado a socialização e competição saudável entre os alunos. Os resultados obtidos nessa atividade podem ser considerados positivos devido à quantidade de acertos obtidos por boa parte dos estudantes.

Entre as contribuições, observa-se que o estudo favorece o ensino de Geometria ao disponibilizar uma metodologia combinada de recursos que potencializam o desenvolvimento do ensino, criando um ambiente propício para a aprendizagem. Além disso, o estudo apresenta a possibilidade de contribuir para a prática docente dos professores dessa etapa de ensino que tenham o interesse em aplicar metodologias diferenciadas em sala de aula, com o objetivo de enriquecer o processo de ensino.

Um resultado importante desta pesquisa é o reconhecimento do papel do professor como mediador das metodologias adotadas, assumindo papel central na condução das atividades de forma a possibilitar que suas potencialidades sejam exploradas. Na realização de cada etapa da metodologia foi importante o esclarecimento e orientação acerca da realização das atividades e o acompanhamento de seu desenvolvimento. Ressalta-se que esse acompanhamento próximo não reduz a autonomia dos alunos, apenas direciona seus esforços para o caminho mais adequado.

Apesar dos resultados positivos, cabe destacar que a pesquisa realizada possui limitações quanto aos resultados apresentados, uma vez que se baseia em dados aplicados em duas turmas em uma unidade escolar que dispõe de estrutura adequada para a aplicação das atividades. Esses fatores podem influenciar a generalização dos resultados.

Como sugestão para trabalhos futuros, propõe-se a possibilidade de a aplicação ser realizada utilizando mais tempos de aula, entre nove a doze aulas, para que as atividades possam ser desenvolvidas de forma mais detalhada e com mais atenção aos estudantes. Outro ponto relevante é a verificação da possibilidade de disponibilização de dispositivos suficientes para a realização de forma individual das atividades investigativas. Considerando a possibilidade de utilização de um tempo maior, seria positivo o uso de uma atividade escrita avaliativa para complementar a avaliação feita no Kahoot!, para que fossem gerados registros dos cálculos desenvolvidos pelos alunos.

Faz-se relevante justificar a apresentação das atividades em forma de apêndice neste trabalho, devido ao desenvolvimento do produto educacional ter sido realizado no site do GeoGebra, utilizando a ferramenta livro para sua organização. Pode haver indisponibilidade de acesso futuro, dessa forma optou-se pela disponibilização dos materiais que compõem o produto educacional na forma de apêndice com links de acesso ao Google Drive, para que os professores que tenham interesse na aplicação dessa proposta possam fazer uso do material.

Conclui-se, portanto, que o ensino de Geometria na Educação Básica é de suma importância, conforme destacado na BNCC e nas pesquisas de Educação Matemática, sendo importante que os professores busquem inserir essa área da Matemática em seus planejamentos. Esses conteúdos não devem ser negligenciados ou delegados ao final do período letivo, apenas na existência de tempo.

Deve-se haver uma preocupação em despertar o interesse dos alunos para o estudo dos conteúdos geométricos que, como afirmado, estão presentes na vida dos alunos, podendo ser observado em seu dia a dia.

Dessa forma, é importante que seja dado prosseguimento em trabalhos que busquem potencializar o ensino dos conteúdos, não sendo esse trabalho uma prática isolada, mas sim parte do desenvolvimento de uma prática pedagógica focada no uso de metodologias que potencializem a aprendizagem.

Essa pesquisa contribui para a compreensão das potencialidades do uso de metodologias ativas, materiais concretos, tecnologias digitais no ensino de Geometria, que podem ser consideradas para o ensino dos demais conteúdos de Matemática. Além disso, o papel do professor como mediador mostra-se central, sendo o responsável por guiar o processo de aprendizagem. Espera-se que esse trabalho contribua para que outros professores reflitam sobre a importância de se buscarem formas de estimular os alunos e despertar o interesse deles para a Matemática, reconhecendo que existem diversas limitações, principalmente em escolas públicas.

Referências

ALBUQUERQUE, Erenilda Severina da Conceição. **Geometria e arte**: uma proposta metodológica para o ensino de geometria no sexto ano. 2017. 93 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2017. Disponível em: https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/1745/1/Geometria%20e%20arte%20-%20uma%20proposta%20metodol%C3%B3gica%20para%20o%20ensino%20de%20geometria%20no%20sexto%20ano.pdf. Acesso em: 28 jan. 2026.

ALVES, Dieime Machado; CARNEIRO, Raylson dos Santos; CARNEIRO, Rogério dos Santos. Gamificação no ensino de matemática: uma proposta para o uso de jogos digitais nas aulas como motivadores da aprendizagem. **ReDoc – Revista Docência e Cibercultura**, Rio de Janeiro, v. 6, n. 3, p. 146-164, maio/ago. 2022. DOI: https://doi.org/10.12957/redoc.2022.65527. Disponível em: https://www.e-publicacoes.uerj.br/re-doc/article/view/65527/43436. Acesso em: 20 fev. 2026.

ANDRADE, Adriana de Fátima. Kahoot no ensino da matemática. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO E TECNOLOGIAS E EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 2024, São Carlos. **Anais [...]**. São Carlos: UFSCar, 2024. Disponível em: https://ciet.ufscar.br/submissao/index.php/ciet/article/view/2730/2752. Acesso em: 23 jan. 2026.

ANJOS, Pitágoras Vasconcelos dos. **Uma proposta de estímulo à produção de provas por meio de atividades investigativas em ambientes de geometria dinâmica**. 2025. 133 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2025. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/bitstream/ri/42251/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o_Anjos_2025.pdf. Acesso em: 01 fev. 2026.

ARCANJO FILHO, M.; TAVARES, A. H. de C. A educação matemática e o ensino-aprendizagem de geometria: causas e consequências da deficiência e como fazer a excelência. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**, Mossoró, v. 2, n. 4, p. 55-63, jul./out. 2016. Disponível em: https://periodicos.apps.uern.br/index.php/RECEI/article/view/594/503. Acesso em: 26 jan. 2026.

ARCANJO FILHO, M.; TAVARES, A. H. de C. O ensino de geometria numa perspectiva interdisciplinar como iniciativa para uma abordagem transdisciplinar. **Revista Brasileira da Educação Profissional e Tecnológica**, Natal, v. 1, n. 4, p. 1-11, abr. 2011. Disponível em: https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/RBEPT/article/view/3178/1363. Acesso em: 24 jan. 2026.

BALACHEFF, Nicolas. A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. Tradução de Saddo Ag Almouloud e Méricles Thadeu Moretti. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 24, n. 1, p. 770-815, 2022. DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p770-815. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57664/39411. Acesso em: 12 jan. 2026.

BALACHEFF, Nicolas. Controle, prova e demonstração: três regimes de validação. Tradução de Saddo Ag Almouloud e Méricles Thadeu Moretti. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 24, n. 1, p. 816-871, 2022. DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p816-871. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57668/39412. Acesso em: 26 jan. 2026.

BENTO, António V. Efeitos das transições de ciclo e mudanças de escola: perspectivas dos alunos do 5º ano (2º ciclo). In: SOUSA, J.; FINO, C. (org.). **A escola sob suspeita**. Porto: Edições Asa, 2007. p. 375-384. Disponível em: https://digituma.uma.pt/entities/publication/f760c800-f70e-4445-abad-141fe120a475. Acesso em: 03 jan. 2026.

BITTENCOURT, Priscilla Aparecida Santana; ALBINO, João Pedro. O uso das tecnologias digitais na educação do século XXI. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 12, n. 1, p. 205-214, 2017. DOI: https://doi.org/10.21723/riaee.v12.n1.9433. Disponível em: https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/9433/6260. Acesso em: 17 jan. 2026.

BISPO, Thamires de Oliveira; ASSIS, Priscila de. O uso de materiais manipuláveis como estratégia para o ensino de Geometria Espacial. **REMat**, São Paulo, v. 18, p. e021028, 2021. DOI: https://doi.org/10.37001/remat2526-9062v18id519. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/519. Acesso em: 03 jan. 2026.

BOZZA, Morgana. Pensando o ensino de geometria espacial: estratégias didáticas que utilizam o software GeoGebra e materiais concretos. **Scientia Cum Industria**, Caxias do Sul, v. 3, n. 3, p. 134-138, 2015. Disponível em: https://sou.ucs.br/etc/revistas/index.php/scientiacumindustria/article/view/4115/pdf_527. Acesso em: 06 fev. 2026.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 05 jan. 2026.

BUSARELLO, Raul Inácio; ULBRICHT, Vania Ribas; FADEL, Luciane Maria. A gamificação e o engajamento de usuários: uma análise dos elementos estruturais dos jogos. *In*: FADEL, Luciane Maria *et al.* (org.). **Gamificação na Educação**. São Paulo: Pimenta Cultural, 2014. p. 11-37. Disponível em: https://www.pimentacultural.com/gamificacao-na-educacao. Acesso em: 14 fev. 2026.

CARVALHO, Augusto Schwager de; DUARTE, Taís Ferraz; COSTA, Renata Marques; TOMAZ, Adriana da Silva Lisboa. Transformando conteúdo em desafio: a gamificação no ensino de matemática. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 11., 2025, Vitória. **Anais [...]**. Campina Grande: Realize Editora, 2025. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2025/TRABALHO_COMPLETO_EV214_ID16141_TB7329_14102025091038.pdf. Acesso em: 08 jan. 2026.

CHARLEAUX, Milena; SOUZA, Antonio Carlos de. Ensinando geometria por meio de atividades investigativas. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Aracaju, v. 4, n. 2, p. 89-103, 2019. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v4i2.11373. Disponível em: https://ufs.emnuvens.com.br/ReviSe/article/view/11373/9421. Acesso em: 15 fev. 2026.

COELHO, Naura Letícia Nascimento; WILLIMA, Kleverson Gonçalves; FERREIRA, Claudienne da Cruz; SOUZA, Lívia Barbosa Pacheco. Gamificação na educação contemporânea: estratégia de engajamento e personalização do ensino. **Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro**, Teófilo Otoni, v. 3, 2025. Disponível em: https://remunom.ojsbr.com/multidisciplinar/article/view/3571/3599. Acesso em: 13 jan. 2026.

CONTE, Elaine; HABOWSKI, Adilson Cristiano; RIOS, Míriam Benites. Ressonâncias das tecnologias digitais na educação. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 14, n. 1, p. 31-45, jan./mar. 2019. DOI: https://doi.org/10.21723/riaee.v14i1.11110. Disponível em: https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/11110/7869. Acesso em: 05 jan. 2026.

COUTO, Maria Socorro Duarte da Silva; SILVA, Ingrid Portilho da; NUNES, Ana Clara Alves; MENEZES, Ruimar Calaça de. Material concreto: uma alternativa no ensino de geometria. In: ENCONTRO GOIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2017, Urutaí. **Anais [...]**. Urutaí: Instituto Federal Goiano, 2017. p. 513-523. Disponível em: https://anais.sbem-go.com.br/index.php/EnGEM/article/view/63. Acesso em: 26 jan. 2026.

CUNHA, Helena; OLIVEIRA, Hélia; PONTE, João Pedro da. Investigações matemáticas na sala de aula. In: ENCONTRO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 1995, Lisboa. **Actas [...]**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1995. p. 161-167. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/242306039_Investigacoes_matematicas_na_sala_de_aula/link/0deec5303188c7114d000000/download?_tp=eyJjb250ZXh0Ijp7ImZpcnN0UGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIiwicGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIn19. Acesso em: 15 fev. 2026.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Euler, um matemático multifacetado. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 9, n. 17, p. 13-31, 2009. Disponível em: https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/167/153. Acesso em: 17 jan. 2026.

DAMIANI, Magda Floriana *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, Pelotas, n. 45, p. 57-67, maio/ago. 2013. Disponível em: https://periodicos.ufpel.edu.br/index.php/caduc/article/view/3822/3074. Acesso em: 16 fev. 2026.

FADEL, Luciane Maria; ULBRICHT, Vania Ribas; BATISTA, Claudia Regina; VANZIN, Tarcísio (org.). **Gamificação na educação**. São Paulo: Pimenta Cultural, 2014.

FREITAS, Pedro J. **A demonstração matemática no ensino básico e secundário**. In: ENCONTRO PROFMAT, 2011. [S. l.]: [s. n.], 2011. Disponível em: https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~pjfreitas/pdfs/Dem_ProfMat.pdf. Acesso em: 31 jan. 2026.

GEOGEBRA. **Sobre o GeoGebra**. [S. l.]: GeoGebra, [2024]. Disponível em: https://www.geogebra.org/about. Acesso em: 15 jan. 2026.

KAHOOT!. **About Kahoot!**. [S. l.]: Kahoot!, [2026]. Disponível em: https://kahoot.com/about/. Acesso em: 15 fev. 2026.

LIMA, Marta Gomes; ROCHA, Adriano Aparecido Soares da. As tecnologias digitais no ensino de matemática. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, São Paulo, v. 8, n. 5, p. 729-739, maio 2022. DOI: https://doi.org/10.51891/rease.v8i5.5513. Disponível em: https://periodicorease.pro.br/rease/article/view/5513. Acesso em: 16 fev. 2026

LIMA, Elon Lages. O teorema de Euler sobre poliedros. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 2, p. 57-74, dez. 1985. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n02_Artigo03.pdf. Acesso em: 02 fev. 2026.

MALTEMPI, Marcus Vinicius. Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n. 1, p. 59-67, jan./jun. 2008. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/78. Acesso em: 01 fev. 2026.

MEDEIROS, Tâmara Kadidja Silva de *et al.* Um percurso histórico sobre a utilização das demonstrações no ensino de matemática. **COGNITIONIS – Scientific Journal**, Barra do Bugres, v. 7, n. 2, p. 1-20, 2024. DOI: https://doi.org/10.38087/2595.8801.491. Disponível em: https://revista.cognitioniss.org/index.php/cogn/article/view/491/402. Acesso em: 19 fev. 2026.

MESQUITA, Letícia de Oliveira; BUENO, Maria Edileuza de Oliveira. O uso do Kahoot! como estratégia didática no ensino de Matemática: uma revisão sistemática de literatura. **Revemat**, Florianópolis, v. 18, p. 1-22, 2023. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2023.e92554. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/92554. Acesso em: 26 jan. 2026.

OLIVEIRA, Andrey Nario de Souza; ARAUJO JUNIOR, Francisco de Paula Santos de. O uso do software GeoGebra na perspectiva da formação inicial: uma revisão sistemática sobre o ensino de geometria espacial. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, [s. l.], v. 14, n. 2, p. 64-86, 2025. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/71972/48765. Acesso em: 17 jan. 2026.

PEREIRA, Cíntia; COUTINHO, Diógenes José Gusmão. Pesquisa qualitativa na área da educação. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, São Paulo, v. 9, n. 3, p. 992-1001, mar. 2023. DOI: https://doi.org/10.51891/rease.v9i3.8803. Disponível em: https://periodicorease.pro.br/rease/article/view/8803/3493. Acesso em: 11 fev. 2026.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.
PONTE, João Pedro da; SERRAZINA, Maria de Lurdes. **Didáctica da matemática do 1º ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2006.

RODRIGUES, Tatiane Daby de Fátima Faria; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; SANTOS, Josely Alves dos. As pesquisas qualitativas e quantitativas na educação. **Revista PRISMA**, Rio de Janeiro, v. 2, n. 1, p. 154-174, 2021. Disponível em: https://revistaprisma.emnuvens.com.br/prisma/article/view/49/41. Acesso em: 28 jan. 2026.

ROGENSKI, Maria Lucia Cordeiro; PEDROSO, Sandra Mara Dias. **O ensino da geometria na educação básica**: realidade e possibilidades. Paraná: Secretaria de Estado da Educação; Universidade Estadual de Maringá, 2007. 33 f. (Artigo PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf. Acesso em: 27 jan. 2026.

SANTIAGO, Paulo Vitor da Silva; SANTANA, José Rogério. Proposta para o ensino de Geometria: sólidos no GeoGebra. **Debates em Educação**, Maceió, v. 16, n. 38, e15862, 2024. DOI: https://doi.org/10.28998/2175-6600.2024v16n38pe15862. Disponível em: https://ufal.emnuvens.com.br/debateseducacao/article/view/15862/11333. Acesso em: 09 fev. 2026.

SANTOS, Odilon Júlio dos. **A relação de Euler para poliedros**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/server/api/core/bitstreams/a63ea317-419b-4d03-a4f6-0e265c5779b5/content. Acesso em: 21 jan. 2026.

SCALABRIN, Ana Maria Mota Oliveira; MUSSATO, Solange. Geometria espacial com o software GeoGebra: uma proposta de atividades investigativas para o ensino de pirâmides. **Boletim do Museu Integrado de Roraima**, Boa Vista, v. 13, n. 1, p. 123-145, 2020. Disponível em: https://periodicos.uerr.edu.br/index.php/bolmirr/pt_BR/article/view/883/541. Acesso em: 10 jan. 2026.

SILVA, Francisca Marlene da; SILVA, Aline Araújo da; CUNHA, Déborah Almeida; HAIASHIDA, Keila Andrade. O uso do material concreto no ensino da matemática. In: FÓRUM INTERNACIONAL DE PEDAGOGIA, 5., 2013, Vitória da Conquista. **Anais [...]**. Campina Grande: Realize Editora, 2013. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/3649. Acesso em: 25 jan. 2026.

SILVA, Letícia Rodrigues da; PINHEIRO, Niusarte Virginia; ALVES, Wederson Marcos; GUIMARÃES, Patrícia Baldow. Estratégias didáticas utilizadas por docentes que ensinam matemática: a avaliação formativa em questão. **EBR – Educação Básica Revista**, Mogi das Cruzes, v. 9, n. 2, p. 107-126, 2023. Disponível em: https://www.educacaobasicarevista.com.br/index.php/ebr/article/view/192/117. Acesso em: 12 jan. 2026.

VALE, Isabel; BARBOSA, Ana. Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria. **Boletim GEPEM**, n. 65, p. 3-16, jul./dez. 2014. DOI: https://doi.org/10.4322/gepem.2015.011. Disponível em: https://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2015.011. Acesso em: 12 fev. 2026.

VASCONCELOS, Anthonny Ewerton Marinho de; SANTOS, Marcílio Ferreira dos. Quantos cisnes brancos precisamos ver para acreditar que todos os cisnes são brancos? A importância das demonstrações matemáticas na Educação Básica. In: ENCONTRO PERNAMBUCANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2022, Caruaru. **Anais [...]**. Caruaru: SBEM-PE, 2022. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Anthonny-Vasconcelos/publication/361757539. Acesso em: 03 fev. 2026.

Apêndice A – Slides utilizados na aula

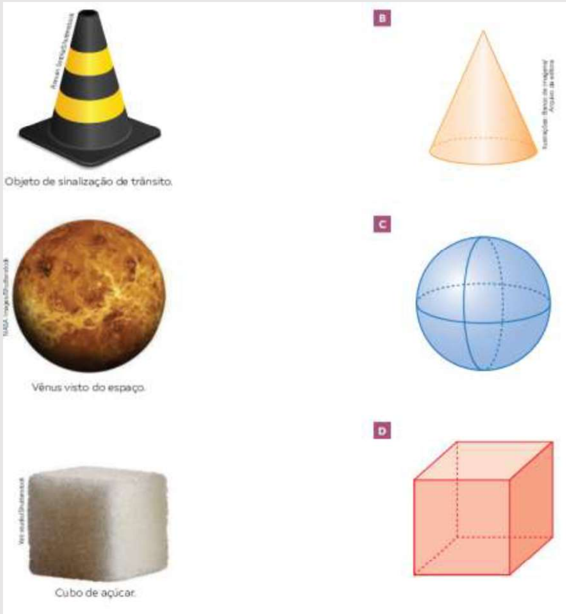
RELAÇÃO DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

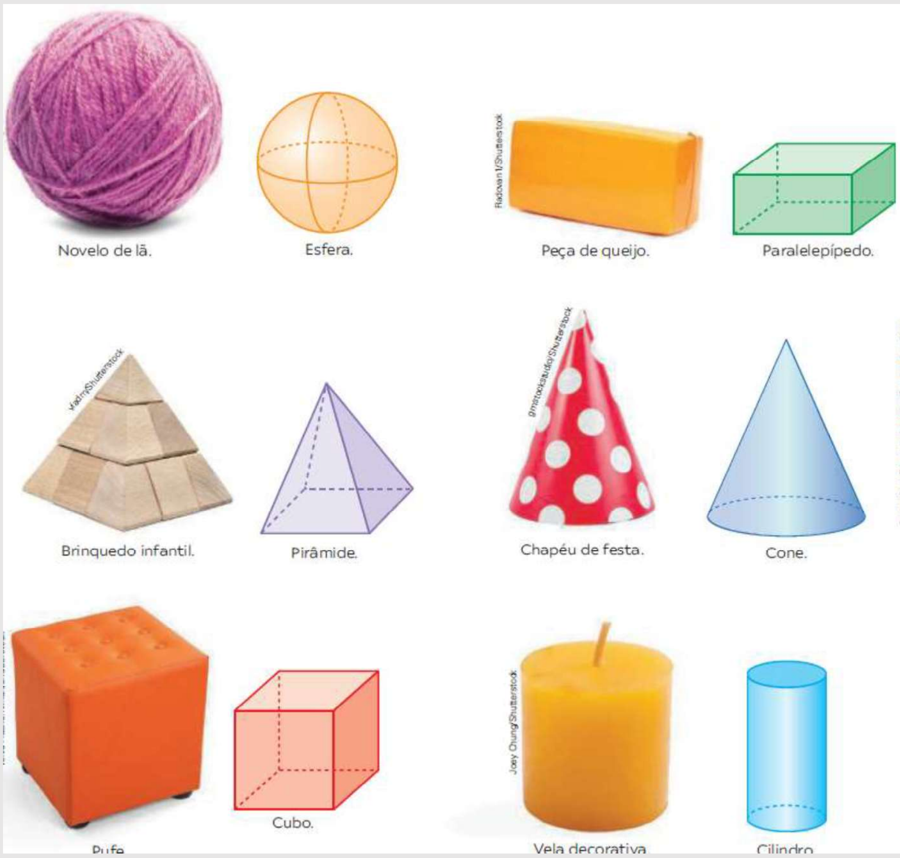
PROFESSOR: HALLEF J. MACABU
ORIENTADOR: SAMUEL PACITTI

Sólidos geométricos

O museu do Louvre, na França, possui uma pirâmide de vidro formada por 603 losangos e 70 triângulos

Muitos objetos e construções, naturais ou feitos pelo ser humano, lembram figuras geométricas conhecidas como **sólidos geométricos.**





Poliedros e corpos redondos

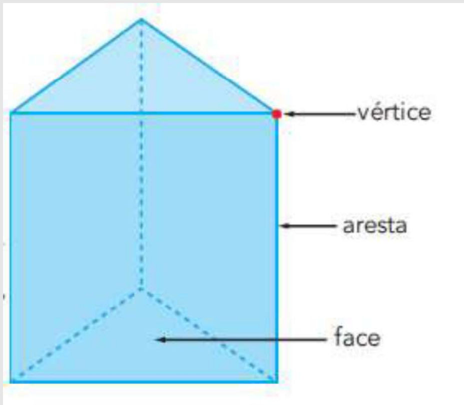
Os sólidos geométricos que têm apenas faces planas são chamados **poliedros**, e os sólidos geométricos que têm pelo menos uma parte não plana, ou seja, arredondada, são chamados **corpos redondos**.

Poli significa muitos; *edros* significa faces. **Poliedro** significa objeto com muitas faces.

Elementos de um poliedro: vértice, face e aresta

Examine este poliedro. Ele tem 6 vértices, 5 faces e 9 arestas.

- Cada vértice é um ponto.
- Cada aresta é um segmento de reta.
- Cada face é uma região plana.
- Neste poliedro, cada vértice é o encontro de 3 arestas.
- Cada aresta é o encontro de 2 faces.
- Este poliedro tem 2 faces triangulares e 3 faces retangulares



Poliedro convexo

Diz-se que o poliedro é convexo se sua superfície (compreendendo suas faces, arestas e vértices) não se intercepta e o segmento de linha que une quaisquer dois pontos do poliedro está contido no interior ou na superfície.

LINK

https://www.geogebra.org/m/vurjtgvm

Relação de Euler

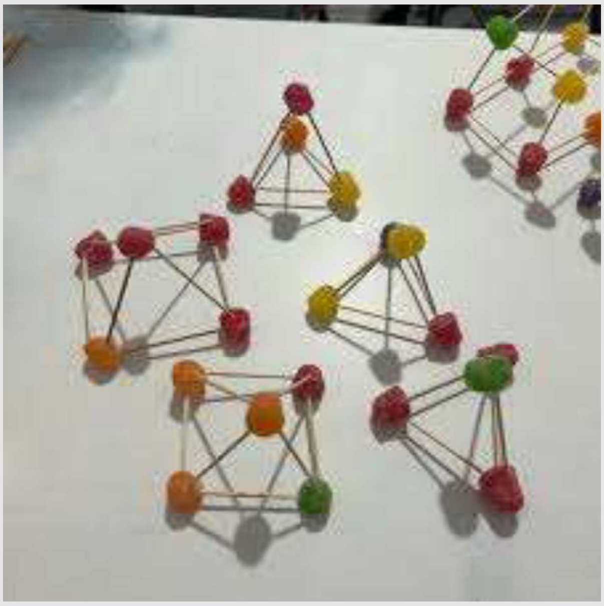
Relação de Euler: é uma regra que mostra uma ligação entre o número de **vértices (V)**, **arestas (A)** e **faces (F)** de um **sólido geométrico** (como cubos e prismas).

A fórmula é:

👉 $\boldsymbol{V + F - A = 2} \qquad \boldsymbol{V + F = A + 2}$

Isso quer dizer que, se você contar quantos vértices, arestas e faces tem um sólido, e colocar esses números nessa conta, o resultado sempre será **2** (para sólidos convexos, como cubos, prismas e pirâmides).

Construção dos sólidos

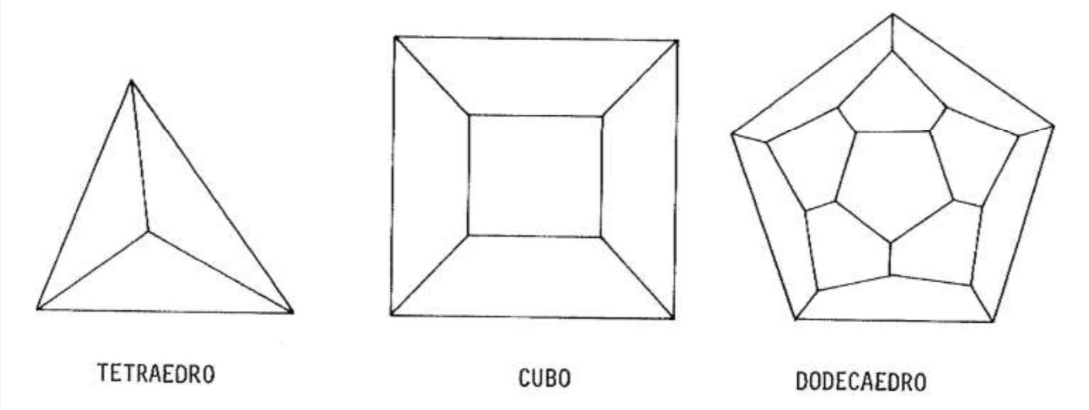


A demonstração de Cauchy

Retira-se uma face do poliedro. Isto não altera os números de Vértices e Arestas, mas diminui o número de Faces de uma unidade. Basta então provar que o poliedro modificado cumpre a condição $V - A + F = 1$.

Diz-se que uma aresta do poliedro é livre quando é lado de apenas uma face. O poliedro modificado possui arestas livres, a saber: os lados da face retirada. Esticando-se o poliedro a partir das arestas livres, pode-se achatá-lo de modo que ele se transforme numa figura plana. Durante este processo, os números V, A e F mantêm-se constantes.

Exemplos dessa planificação



Traçando diagonais que não se cortam, decompõe-se cada face em triângulos. Cada vez que se traça uma diagonal que não intersecta as outras, o número V não muda, enquanto A e F aumentam de uma unidade, logo $V - A + F$ não se altera. Podemos então supor que todas as faces do poliedro são triângulos.

Começa-se a "despetalar" o poliedro plano (cujas faces agora são triângulos), retirando-se uma a uma as faces que têm alguma aresta livre. Ao retirar cada uma dessas faces, o número $V - A + F$ não se altera.

Retirando, uma a uma, as faces que têm alguma aresta livre chega-se, finalmente, à última, que é um triângulo, para o qual se tem evidentemente $V - A + F = 1$. Isto conclui a demonstração.

Referência

- O Teorema de Euler sobre Poliedros **Autor:** Elon Lages Lima **Publicação (Nota na p. 57):** Uma versão preliminar deste trabalho foi publicada no "Noticiário da Sociedade Brasileira de Matemática" (Ano XII, Número 2, Outubro de 1982.).

Apêndice B – Atividades investigativas

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática

Nome: ____

Turma: ___________

As atividades a seguir fazem parte de uma pesquisa desenvolvida por Hallef J. Macabu, aluno do Mestrado Profissional em Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, sob orientação da prof. Samuel Pacitti.

Orientação

Estas atividades devem ser realizadas com o auxílio dos *applets* elaborados no GeoGebra e disponibilizados em https://www.geogebra.org/....

Atividade 1: Cubo

Na seção atividades clique na atividade intitulada "**cubo**".

Observe a forma tridimensional exibida na janela da direita, você pode movimentá-la para observar melhor, rotacionar ou ampliar e reduzir.

Observação: caso precise que a figura volte a sua forma original basta clicar no botão reiniciar na parte superior da janela da esquerda.

Utilizando a construção interativa, marque as caixas de seleção para exibir cada elemento do cubo e, em seguida, registre a quantidade correspondente de cada um deles.

Número de faces: _____

Número de vértices: _____

Número de arestas: _____

Atividade 2: Pirâmide de base quadrada

Utilizando a construção interativa, marque as caixas de seleção para exibir cada elemento da pirâmide de base quadrada e, em seguida, registre a quantidade correspondente de cada um deles.

Número de faces: _____

Número de vértices: _____

Número de arestas: _____

Atividade 3: Octaedro

Utilizando a construção interativa, marque as caixas de seleção para exibir cada elemento do octaedro e, em seguida, registre a quantidade correspondente de cada um deles.

Número de faces: _____

Número de vértices: _____

Número de arestas: _____

3.1 Você consegue identificar, a partir dos registros acima, alguma relação entre o número de vértices, arestas e faces dos sólidos analisados?

____

____

Atividade 4: Pirâmide oblíqua

Utilizando a construção interativa, marque as caixas de seleção para exibir cada elemento da pirâmide oblíqua e, em seguida, registre a quantidade correspondente de cada um deles.

Número de faces: _____

Número de vértices: _____

Número de arestas: _____

Atividade 5: Dodecaedro

Utilizando a construção interativa, marque as caixas de seleção para exibir cada elemento do dodecaedro e, em seguida, registre a quantidade correspondente de cada um deles.

Número de faces: _____

Número de vértices: _____

Número de arestas: _____

5.1 Observando o registro feito nas atividades 4 e 5, sua constatação do item 3.1 estava correta? Se não está, tente identificar uma nova relação entre esses elementos.

____

Atividade 6: Sólido genérico

Utilizando a construção interativa, marque as caixas de seleção para exibir cada elemento do sólido genérico e, em seguida, registre a quantidade correspondente de cada um deles.

Número de faces: _____

Número de vértices: _____

Número de arestas: _____

Atividade 7

Utilize a tabela abaixo para registrar os dados de cada sólido obtido nas atividades anteriores, com o objetivo de organizar as informações e possibilitar uma análise mais detalhada dos resultados.

Sólido	**Vértices**	**Faces**	**Arestas**
Cubo			
Pirâmide de base quadrada			
Octaedro			
Pirâmide Oblíqua			
Dodecaedro			
Sólido genérico			

7.1 Analisando a tabela, verifique se sua constatação no item 3.1 ou 5.1, está correta, analisando se ela se confirmou para todos os sólidos.

7.2 Caso esteja correta, enuncie de forma clara sua constatação, caso esteja incorreta, observe a tabela e busque identificar a relação existente entre o número de faces, arestas e vértices de sólidos convexos e a enuncie de forma clara.

____
____
____

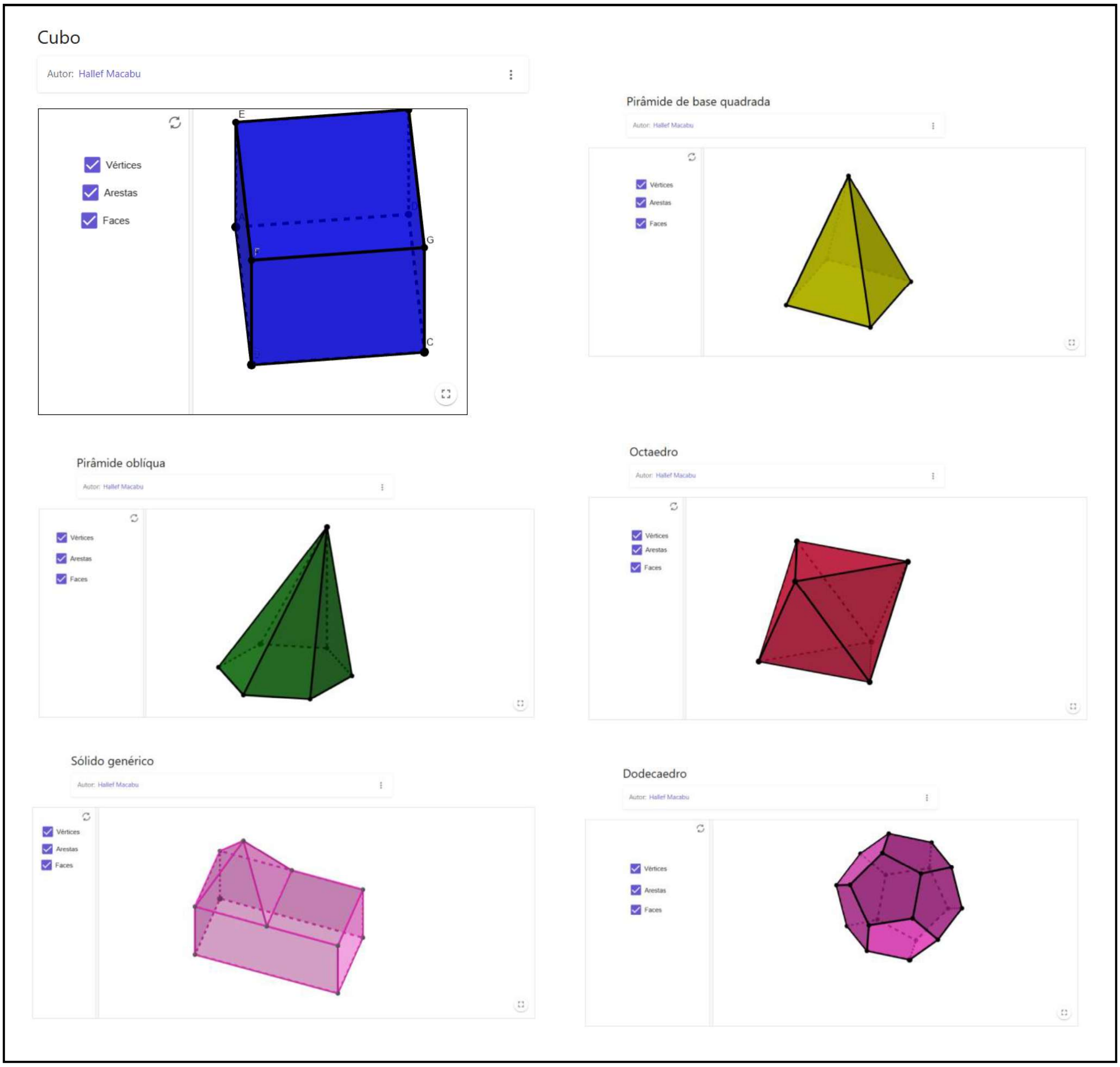
Atividade 8

Considerando seu enunciado acima, determine o número de vértices do Icosaedro, que é um sólido que tem 20 faces triangulares e possui 30 arestas.

Resposta: ____

Apêndice C – Construções do GeoGebra

Construções desenvolvidas no GeoGebra



Link de acesso: https://drive.google.com/drive/folders/1AbbtlcQ-uVlhL7T1-9KTQWkiXGU_oK_8?usp=sharing

Apêndice D – Orientações para o processo de verificação

Orientação para verificação da validade da relação de Euler

Este texto apresenta uma orientação prática para realizar a verificação da relação de Euler em poliedros convexos, com base na demonstração de Cauchy, que utiliza a projeção da sombra do poliedro.

Materiais necessários:

- Jujubas;
- Palitos de dente;
- Cartolina branca;
- Lanterna;
- Lápis;
- Régua;
- Borracha.

Execução da atividade

Inicialmente os alunos deverão ser separados em grupos de quatro a seis participantes. Cada grupo deverá receber cerca de vinte jujubas, quarenta palitos de dentes, uma cartolina, régua, lápis e borracha.

Em seguida, os alunos deverão ser orientados a escolher um dos poliedros convexos conhecidos para montar, usando as jujubas e palitos entregues. Nesse momento os alunos deverão ser instruídos a escolher o poliedro, já pensando nas dificuldades da execução do desenho da projeção na cartolina. Esse ponto é importante para que não sejam montados poliedros que exijam muito trabalho para executar a projeção e desenho.

Após o término da montagem por todos os grupos, os alunos serão instruídos a usar a lanterna do celular, ou a disponibilizada pelo professor, para projetar o sólido na cartolina. Nesse momento é aconselhável apagar as luzes da sala e incentivar o trabalho coletivo do grupo, de forma que cada aluno execute uma parte do processo, sendo necessário um aluno para posicionar o sólido, um para utilizar a lanterna e os demais executarem o desenho usando a régua e lápis.

Tendo todos os grupos concluído o desenho, deverá ser apresentado e explicado aos alunos o processo de triangulação das “faces” planificadas, explicando que a triangulação facilita a contagem das partes do desenho e ajuda a verificar como as faces se ligam. Deverá ser disponibilizado tempo para que os alunos realizem a triangulação, deverá ser verificado pelo professor se os grupos executaram as triangulações de forma correta. Devendo após esse momento ser efetuada a contagem dos vértices, faces e arestas pelos alunos e apresentar que a igualdade parecerá afetada pela ausência de uma face na projeção.

Por fim, os alunos deverão ser orientados a colocar na folha os números iniciais de vértices, faces e arestas e montar a relação de Euler considerando a informação acima. Deverá ser explicado o processo de remoção das arestas livres e que a cada retirada deverá ser atualizada a relação. O objetivo final dessa atividade é chegar a um único triângulo onde será possível verificar a relação de forma que:

$$F = 1, V = 3, A = 3 \; e \; V + F - A = 1 \Leftrightarrow 3 + 1 - 3 = 1$$

Verificando, assim, a validade da relação de Euler. Após esse momento deverá ser apresentado para os alunos a generalização dessa verificação, de forma que seja provada a validade da relação para todos poliedros convexos. E apresentado que ao removermos uma face e projetarmos o poliedro, estamos fazendo o mesmo que Cauchy fez: observando a sombra para entender como vértices, arestas e faces se relacionam.

Apêndice E – Kahoot professor

Kahoot

Relação de Euler

Perguntas (30)

1 - Quiz

O que representa a letra V na relação de Euler?

- ▲ Faces
- ◆ Volume
- ● Vértice ✓
- ■ Arestas

2 - Quiz

O que representa a letra A na relação de Euler?

- ▲ Faces
- ◆ Arestas ✓
- ● Área
- ■ Vértice

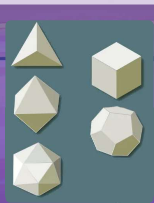
3 - Quiz

O que representa a letra F na relação de Euler?

- ▲ Arestas
- ◆ Vértices
- ● Faces ✓
- ■ Forma

4 - Quiz

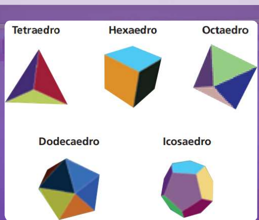
A relação de Euler é válida para:



- ▲ Todos os sólidos, inclusive não convexos.
- ◆ Apenas os sólidos convexos. ✓
- ● Somente os prismas.
- ■ Somente as pirâmides.

5 - Quiz

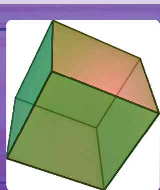
Qual é a fórmula da relação de Euler?



- ▲ V + A + F = 2
- ◆ V + F - A = 2 ✓
- ● V + F - A = 1
- ■ V - F + A = 3

6 - Quiz

Um cubo tem 8 vértices, 12 arestas e 6 faces. Qual é o valor de V - A + F?



- ▲ 0
- ◆ 1
- ● 2 ✓
- ■ 3

7 - Quiz

Um prisma triangular tem 6 vértices e 9 arestas. Quantas faces ele tem?

- ▲ 4
- ◆ 6
- ● 5 ✓
- ■ 7

8 - Quiz

Uma pirâmide quadrangular tem 5 vértices e 8 arestas. Quantas faces ela possui?

- ▲ 3
- ◆ 5 ✓
- ● 4
- ■ 6

9 - Quiz

O valor de V + F - A é sempre:

- ▲ 1
- ◆ 2 ✓
- ● 0
- ■ 3

10 - Quiz

Um tetraedro tem 4 vértices e 6 arestas. Quantas faces ele tem?

- ▲ 4 ✓
- ◆ 3
- ● 6
- ■ 5

11 - Quiz

Um sólido tem 10 arestas e 6 faces. Quantos vértices ele deve ter?

- ▲ 6 ✓
- ◆ 7
- ● 8
- ■ 9

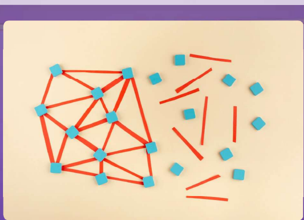
12 - Quiz

Qual dessas figuras não é um poliedro convexo?

- ▲ Cubo
- ◆ Prisma pentagonal
- ● Pirâmide quadrangular
- ■ Estrela de cinco pontas ✓

13 - Quiz

Os palitos na construção dos poliedros representam:



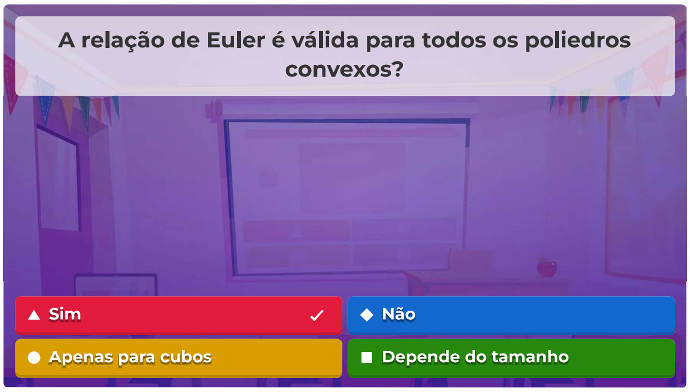
- ▲ Vértices
- ◆ Arestas ✓
- ● Faces
- ■ Lados

14 - Quiz

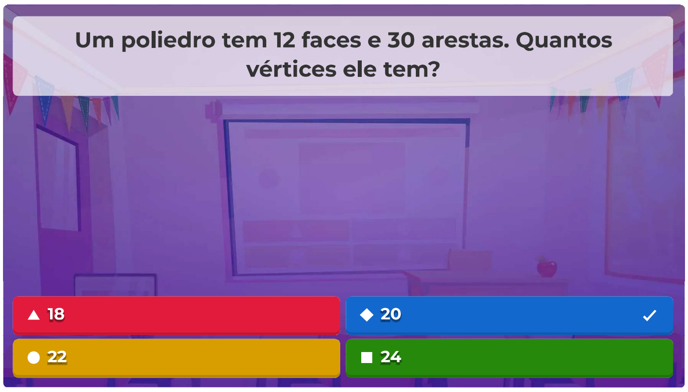
Se um sólido tiver "buracos", a relação de Euler ainda vale?

- ▲ Sim, sempre
- ◆ Não, pois deixa de ser convexo ✓
- ● Sim, mas o resultado muda
- ■ Só se for um cubo

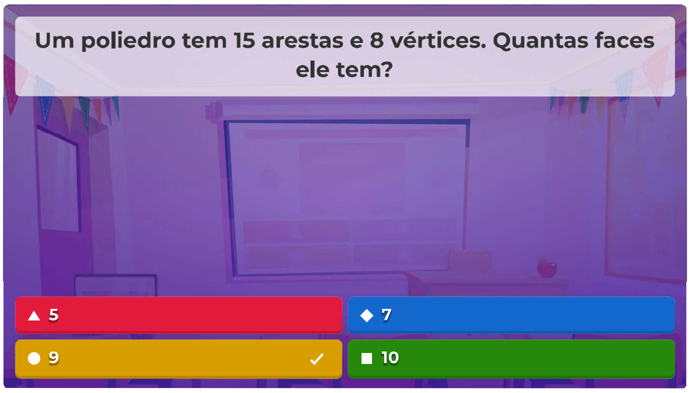
15 - Quiz



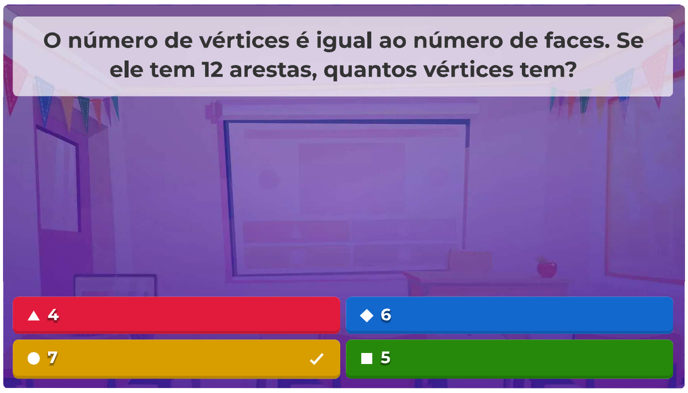
16 - Quiz



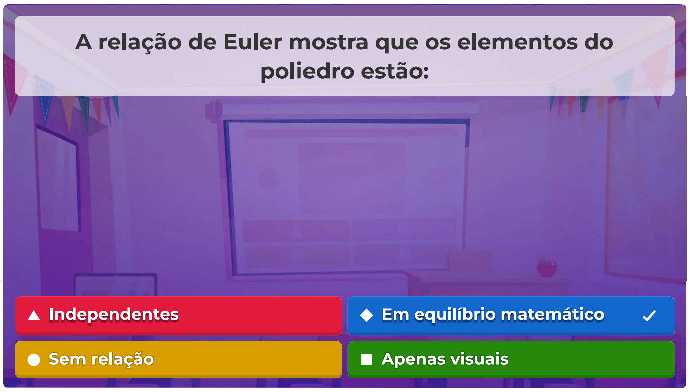
17 - Quiz



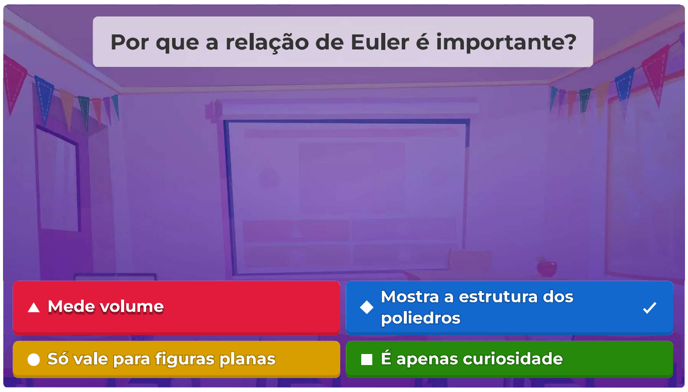
18 - Quiz



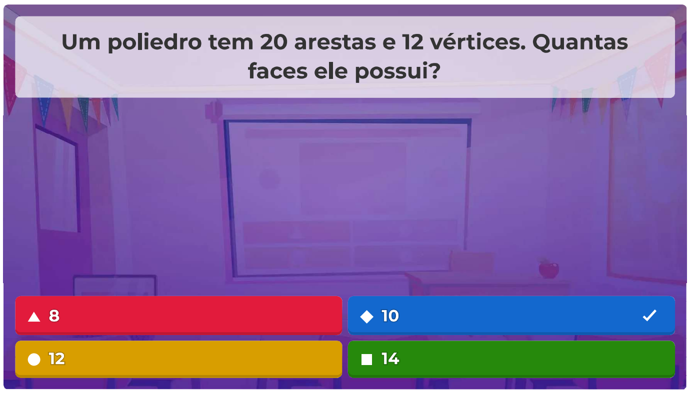
19 - Quiz



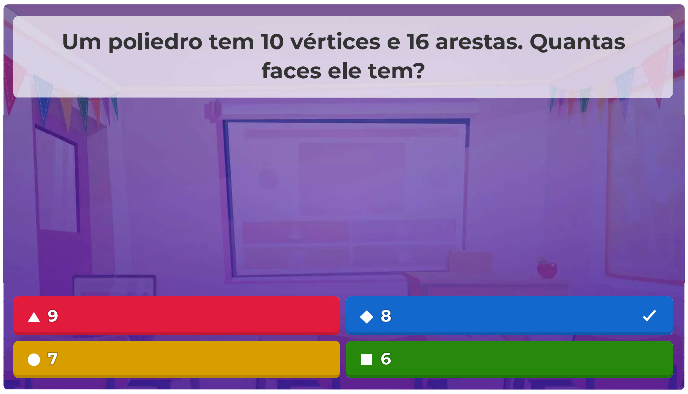
20 - Quiz



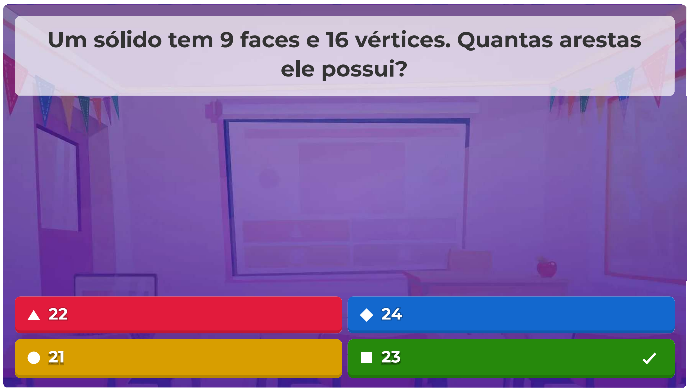
21 - Quiz



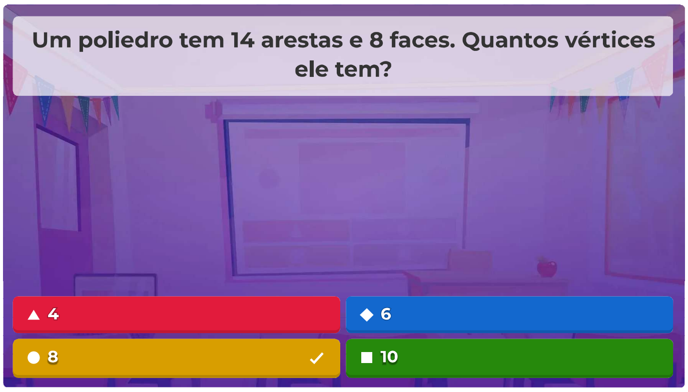
22 - Quiz



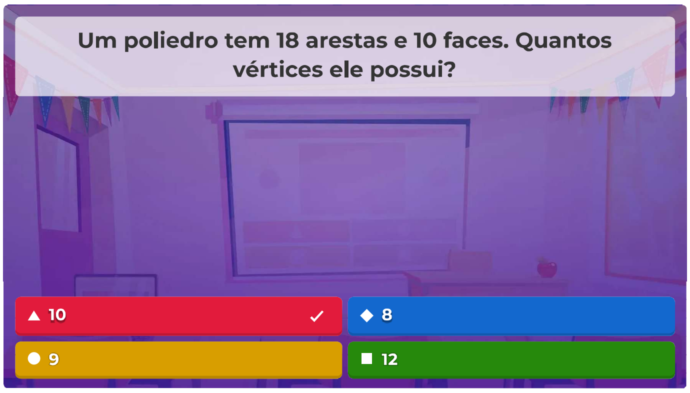
23 - Quiz



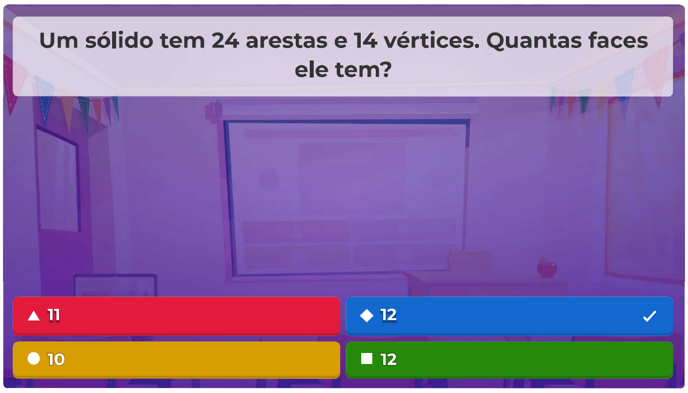
24 - Quiz



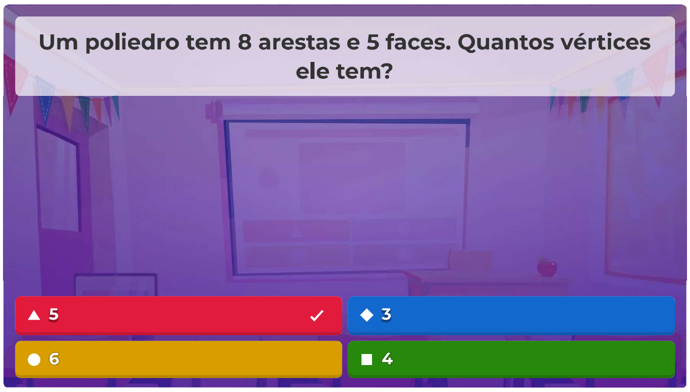
25 - Quiz



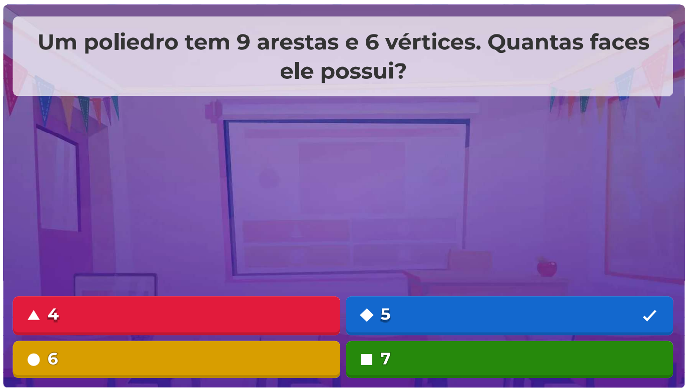
26 - Quiz



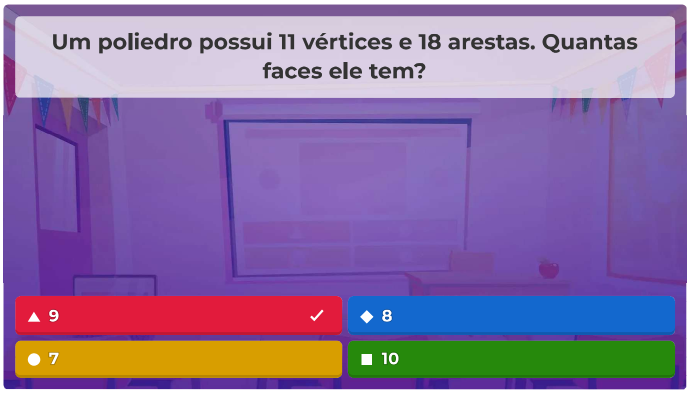
27 - Quiz



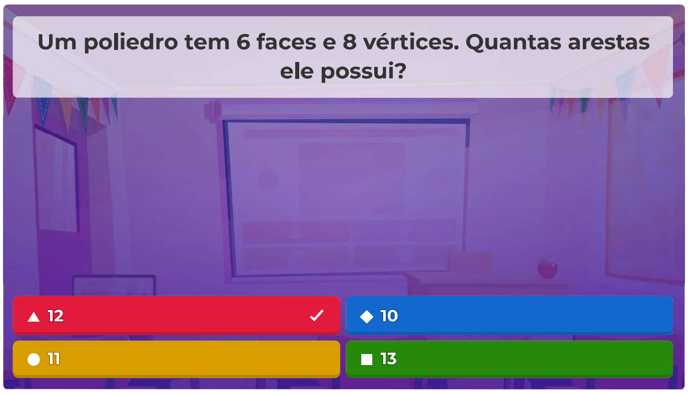
28 - Quiz



29 - Quiz



30 - Quiz



Detalhes

Máx. 40 participantes. Faça upgrade para ter mais

Atualizado: há 4 meses • Visibilidade: Público

Créditos de mídia

13. Viorela Florescu/iStock/Getty Images

Avaliação da aula minsitrada sobre Relação de Euler

Prezado(a) participante,

Eu, **Hallef J. Macabu**, aluno do curso de **Mestrado Profissional em Matemática da PUC-Rio**, estou realizando uma pesquisa no âmbito de minha **dissertação de mestrado**, sob a orientação do **Prof. Dr. Samuel Pacitti**.

Para esta pesquisa, solicito sua colaboração por meio do **preenchimento deste questionário**.

Na publicação dos resultados, **sua identidade será mantida em sigilo**, garantindo o caráter confidencial das informações fornecidas. Ressalto que esta pesquisa tem **finalidade exclusivamente acadêmica**, não havendo qualquer ganho financeiro envolvido.

Em caso de dúvidas ou para obter mais informações sobre o estudo, estou à disposição pelo e-mail: hallef_j@hotmail.com.

Desde já, **agradeço pela sua valiosa participação e colaboração**.

Atenciosamente,

Hallef J. Macabu

Mestrando – PUC-Rio

* Indica uma pergunta obrigatória

1. Nome (opcional):

____

2. Turma: *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) 2602
- ( ) 2604

3. O objetivo da atividade ficou claro para você? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Sim, totalmente.
- ( ) Mais ou menos.
- ( ) Não entendi muito bem.

4. Você conseguiu compreender o conteúdo trabalhado durante a aula? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Sim, entendi bem.
- ( ) Entendi em parte.
- ( ) Tive dificuldade em entender.

5. A forma de investigar e descobrir por conta própria ajudou você a aprender? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Sim, ajudou muito.
- ( ) Ajudou um pouco.
- ( ) Prefiro quando o professor explica tudo primeiro.

6. Como foi a sua participação na atividade? *

Marcar apenas uma oval.

- Participei ativamente com meu grupo.
- Contribuí um pouco.
- Fiquei mais observando.

7. O trabalho em grupo ajudou na sua aprendizagem? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim, aprendi mais com meus colegas.
- Um pouco.
- Não fez muita diferença.

8. Você achou a aula investigativa interessante? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim, foi bem interessante.
- Razoavelmente interessante.
- Não achei interessante.

9. O uso de materiais concretos (como sólidos apresentados) ajudou você a compreender o conteúdo? *

Marcar apenas uma oval.

- Ajudou muito.
- Ajudou um pouco.
- Não fez diferença.

10. O uso do GeoGebra facilitou a visualização dos sólidos e a compreensão da relação de Euler? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim, facilitou muito.
- Um pouco.
- Não ajudou.

11. A demonstração com os sólidos (físicos ou virtuais) ajudou você a entender melhor a relação entre vértices, faces e arestas? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim, ficou mais claro.
- Um pouco.
- Não ajudou muito.
- Não prestei atenção nessa parte.

12. Entre os recursos utilizados, qual você considera mais importante para o seu aprendizado nesta aula? *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Materiais concretos.
- [ ] GeoGebra.
- [ ] Verificação com projeção.
- [ ] Explicação do professor.
- [ ] Discussão em grupo

13. O que foi mais fácil para você durante a atividade? *

14. O que foi mais difícil ou o que você não entendeu bem? *

15. Você acha que aprendeu algo novo com essa atividade? Se sim, o quê? *

16. Dê uma nota para esta aula (de 1 a 5): *

Marcar apenas uma oval.

1	2	3	4	5
⬭	⬭	⬭	⬭	⬭

17. O que você mais gostou na aula? *

18. O que poderia ser melhor nas próximas atividades investigativas? *

19. Depois dessa aula, como você vê a matemática? *

Marcar apenas uma oval.

- ⬭ Mais interessante e próxima do cotidiano.
- ⬭ Igual a antes.
- ⬭ Ainda acho difícil entender.

20. Você gostaria de ter mais aulas nesse formato investigativo? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim, com certeza!
- Talvez.
- Não

Apêndice F – Formulário de avaliação da aula

Apêndice G – Respostas ao formulário de avaliação

Avaliação da aula minsitrada sobre Relação de Euler

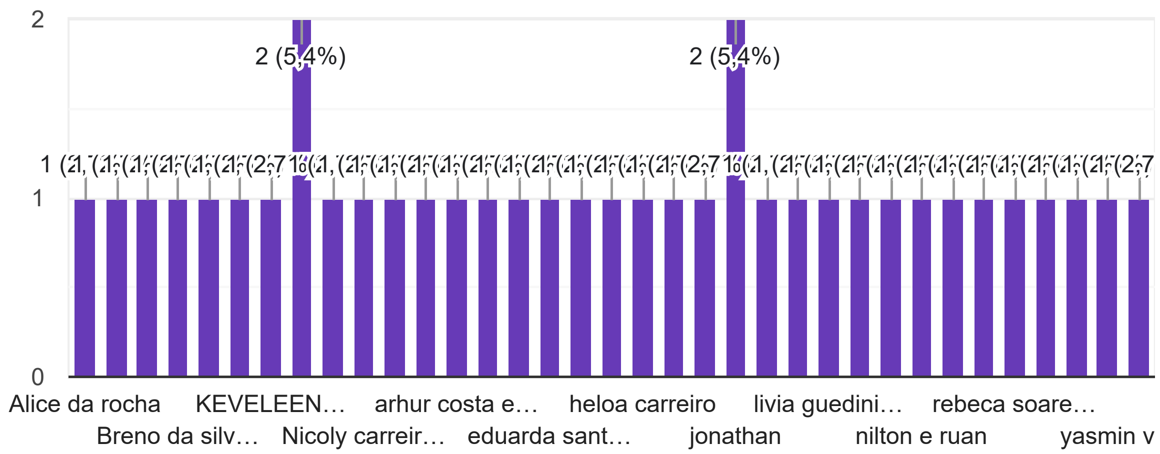
46 respostas

Publicar análise

Nome (opcional):

Copiar

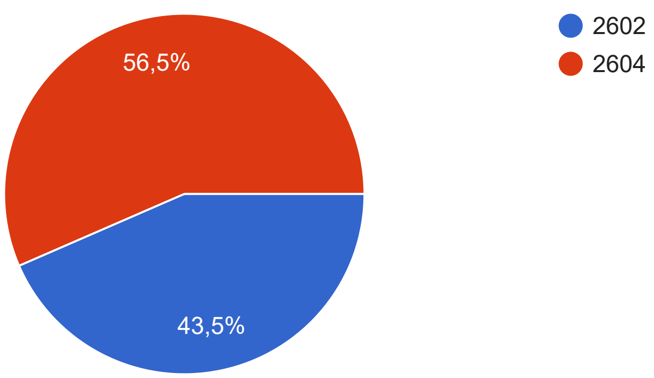
37 respostas



Turma:

Copiar

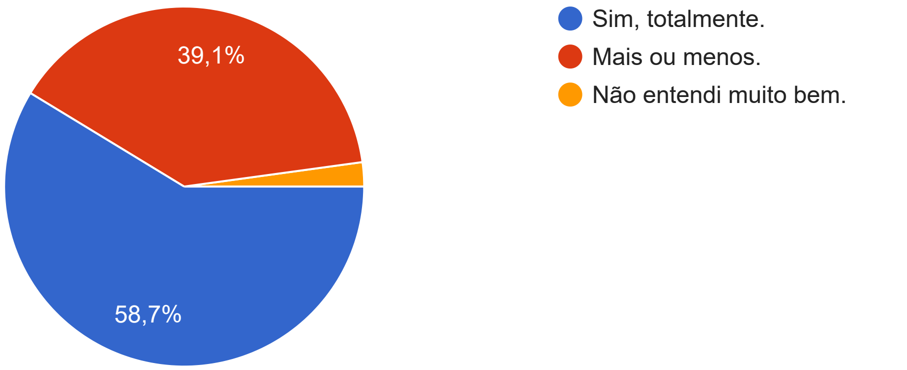
46 respostas



O objetivo da atividade ficou claro para você?

Copiar

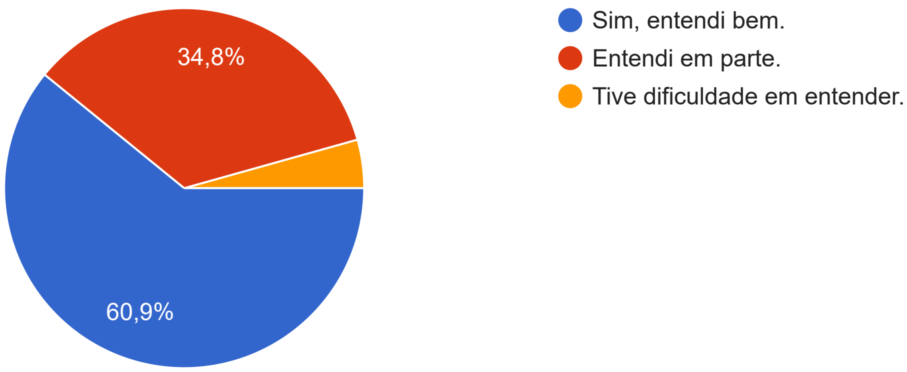
46 respostas



Você conseguiu compreender o conteúdo trabalhado durante a aula?

Copiar

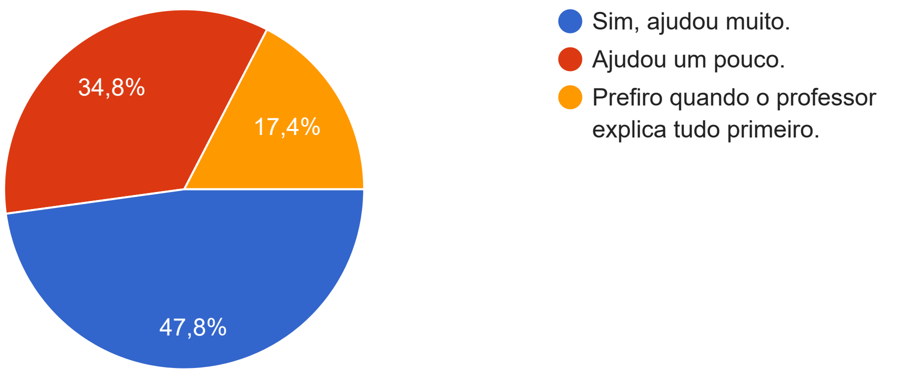
46 respostas



A forma de investigar e descobrir por conta própria ajudou você a aprender?

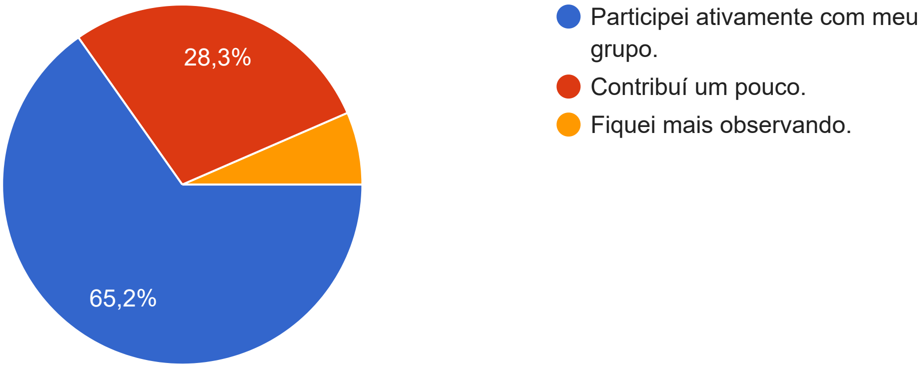
Copiar

46 respostas



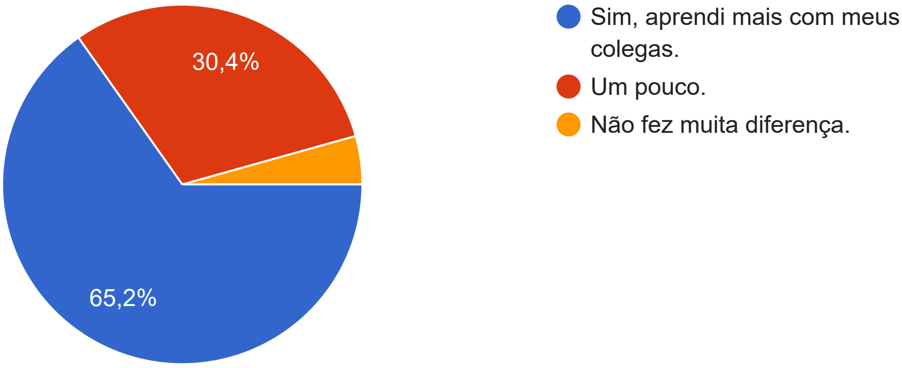
Como foi a sua participação na atividade? Copiar

46 respostas



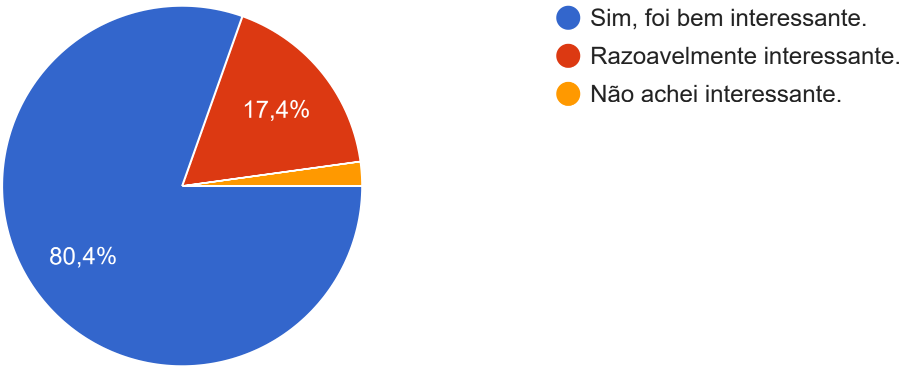
O trabalho em grupo ajudou na sua aprendizagem? Copiar

46 respostas



Você achou a aula investigativa interessante? Copiar

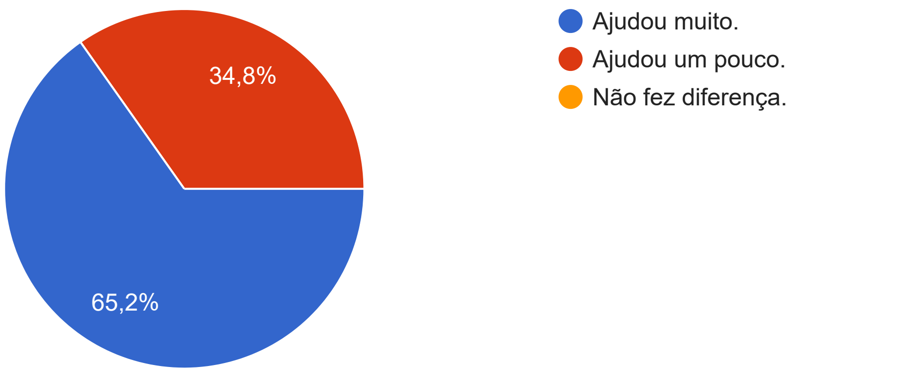
46 respostas



O uso de materiais concretos (como sólidos apresentados) ajudou você a compreender o conteúdo?

Copiar

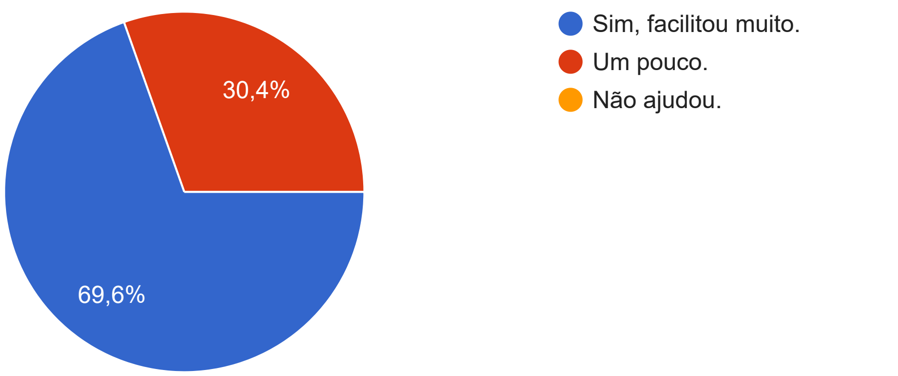
46 respostas



O uso do GeoGebra facilitou a visualização dos sólidos e a compreensão da relação de Euler?

Copiar

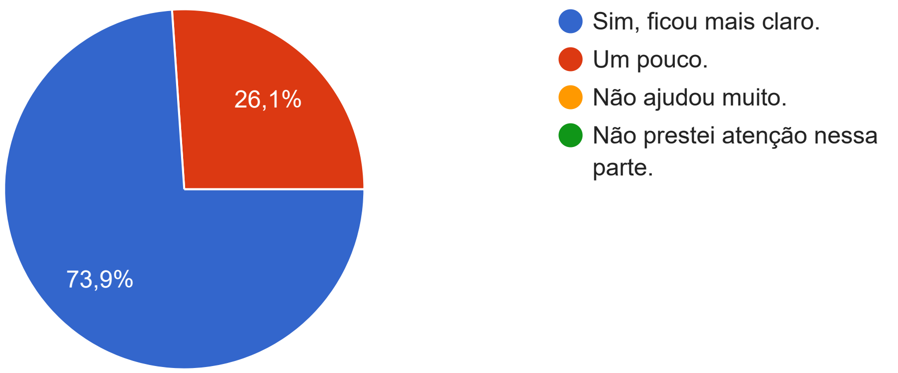
46 respostas



A demonstração com os sólidos (físicos ou virtuais) ajudou você a entender melhor a relação entre vértices, faces e arestas?

Copiar

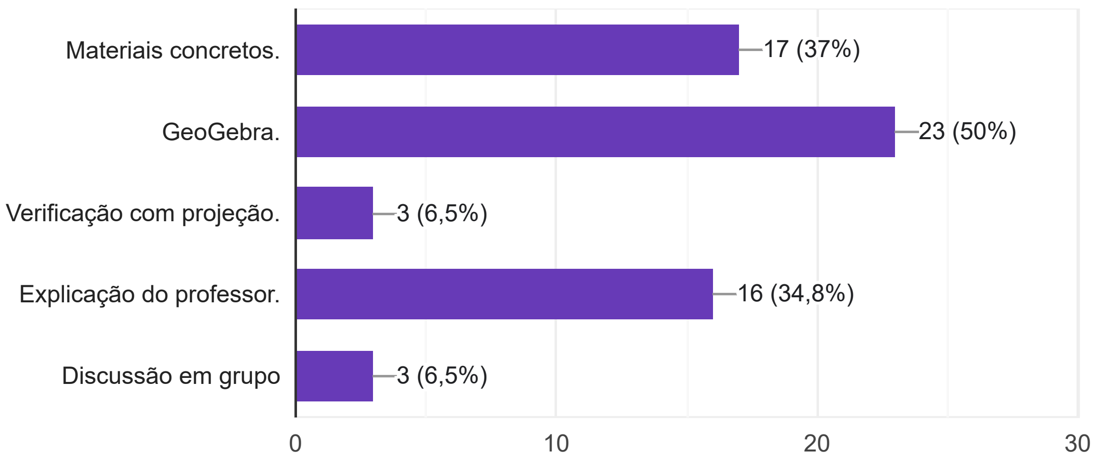
46 respostas



Entre os recursos utilizados, qual você considera mais importante para o seu aprendizado nesta aula?

Copiar

46 respostas



O que foi mais fácil para você durante a atividade?

46 respostas

fases

nada

a parte da que agente fez com as jujubas montando o cubo

montar os solidos

desenhar o poliedro

criar o cubo

a atividade de ver quantas vertices,faces e arestas

montar a forma geometrica

o das jujubas

desenha

montar o cubo

fazer as formas geometricas

desenhar

tudo

montar o cubo

foi mais facil fazer com o goegebra

geogebra

colocara a lanterna e colocar as jujubas

A de montar o cubo com jujuba

MATERIAIS CONCRETOS

a parte da jujuba e da montagem

na hora de desenhar o objeto

a ultilizacao com os materias

Fazer a montagem dos solidos .

etedera esplicasao do meu grupo

as faces, arrasta e

a parte de fazer a conta

O QUE FOI MAIS FACIO FOI AS CONTAS DE F V A

A verificação com o geogebra e os trabalho das jujubas ajudaram bastante, foi uma das minhas materias favoritas.

app geogebra

o desenho

ver quantas vertices,arestas e faces.

o trabalho de montar formas geometricas com jujuba

comer

O USO DE MATERIAIS CONCRETOS.

tudo

as pergustas

com eu e minha dupla com a ajuda do geogebra ficou muito mais facil para responder

explicacao do professor

usar o geogebra

os nomes das formas geometricas

foi a geogebra

enteder a relaçao de euler

as fases,arestas e vertises

calcular as faces vertices araste

obeservar o Professor atentamente

O que foi mais difícil ou o que você não entendeu bem?

46 respostas

nada

a numero 8.1

á matematica dos numeros

a parte da vertice aresta face

montar o poliedro

nao confundir faces com arestas

eu não entendi as de "V+F-A=2"

o euler

a atividade de folhas

as contas

na hr de desenhar

montar

a parte que repitil os numeor s

fazer as outras contas

as questoes 7.1 7.2

materias

as contas

A de f multiplicacao

GEOGEBRA

a parte do euler

a conta que teve que fazer e bem dificil umas perguntas

Bom eu nao entendi a parte do euler .

meu grupo

sobre as formas

a parte de desenhar

O QUE FOI MAIS DIFICIO FOI ENTENDER COMO SE FAZ AS LINHAS DAS FASES

As contas de vertices, eu achei meio complexo.

contas de vertices arestas faces

a 8

nenhuma

o negosio da regua

NENHUM.

nada

o tramalho

a atividade do octaedro, porque minha dupla não entendeu muito bem

atividade 7.2

um pouco dos vertices arestas e faces

euler

a parte que tem que descobrir o numero de fases

os numeros

não entendi direito --lc

Você acha que aprendeu algo novo com essa atividade? Se sim, o quê?

46 respostas

nao

sim

sim por causado metudo de aprender

sim a relaçao de euler

sim por que foi melho e consegui entender mas sobre matematica

sim.aprender sobre as arrestas faces e vertices

sim, as formas

aprendi bastante as formas

aprendi sobre as faces,arestas e vertices

não

tudo

o trabalho com os colegas

sim montar um cubo com jujuba por que eu nunca ouvir falar diso

sim as formas geometricas

sim

sim, eu aprendi q fazer as contas

sim, ja que eu nao sabia muito sobre as formas geometricas

ajuda

so um pouco

As arestas faces e vertices

NAO MUITO

sim,aprendi sobre a geometria e os solidos

nao

os formas mas formal

sim, a geometria e o solidos geometricos

sim a aula foi muito

eu acho que sim

SIM , ME AJUDOU APRENDER AS COISAS QUE EU NAO SABIA FAZER

Aprendi muita coisa, tipo formas geometricas mais complexas, vertices, faces e etc.

mas sobre as formas

sim a faze o trabalho juntos com os colegas

aprendi mais sobre as arestas,vertices e faces

sim, a relaçao de euler

NÃO.

sim por que foi interesante

porque eu e minha dupla aprendemos mais das formas geometricas, como faces vertices e arestas

sim pq foi interesante

sim geogebra

sim as formas geometricas que eu naõ sabia

sim aprendi formas

eu aprendi geogebra e formas geometricas

sim por causa da relaçao de euler

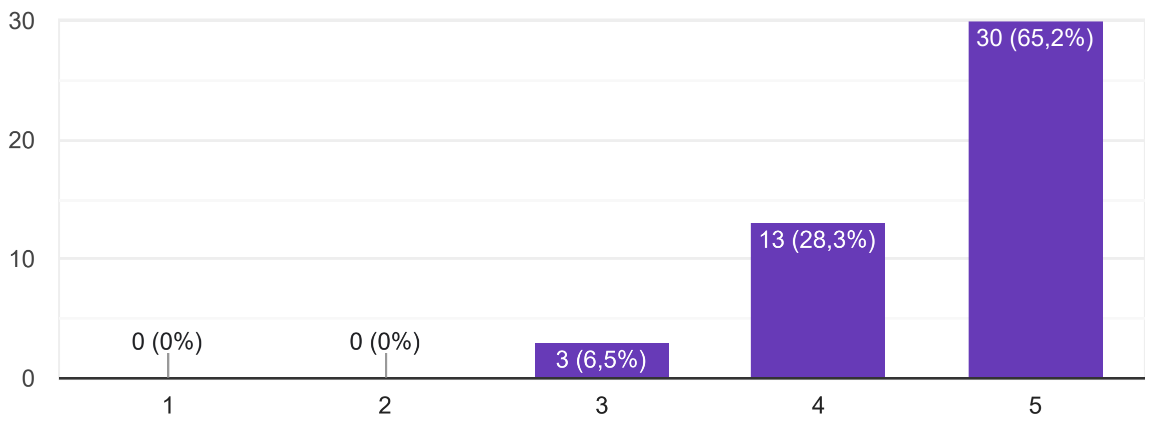
sim, eu aprendi as formas

eu não sei muito oque falar. --heber

Dê uma nota para esta aula (de 1 a 5):

Copiar

46 respostas



O que você mais gostou na aula?

46 respostas

tudo

geogebra

das jujubas

tudo

nao sei

a parte de montar a o cubo com as jujubas

fazer o cubo

de desenhar o cubo na cartolina

montar a forma geometrica

montar o cubo

na hora de fazer as formas geometricas

jujubas

de comer as jujubas

a parte que o professor mostrou

as jujuba

de fazer o cubo com jujuba

MATERIAS CONCRETOS

os objetos geometricos

de comer a jujuba

ultilizando as formas

tudo e mais ainda de mecher nos objetos

a partisipa que meus amigos

sobre as faces

a parte de comer a jujuda

DAS CONTAS DAS FASES ARESTAS E VERTICES E ETC

O trabalho das jujubas.

da jujuba

o trabalho com jujubas

como as jujuba

DE CONSTRUIR O CUBO DE JUJUBA.

o tramalho em grupo

poder usar os computadores novamente

tudo

trabalho com jujuba

o trabalho das jujubas

de aprender

as formas --Lc

O que poderia ser melhor nas próximas atividades investigativas?

46 respostas

nada

mais atividades com comida

nao sei

nada

nada ja esta muito bom

sim

esse mesmo conteudo

nao sei

o grupo

fazer em grupos tambem

não sei

botar goranar

-

grupo

nao botar numeor repitido

o professor explicar com as formas

poderia melhor com perguntas um pouco mais facil pq a 7.1 e a 7.2 eu achei muito dificio

n sei

NADA PODIA SER A MESMA COISA

kaooht

por mim poderia mudar nada achei legal e divertido mmais a tividades

aprender mais sobre isso

VARIAS COISAS

Trabalho artesanal, massinha, papel laminado e papel.

mas investigacao

ter salgado

mais aulas com o geogebra

mais doce

NADA,PODIA SER A MESMA AULA QUE ANTES.

n sei

fazer mais trabalhos mostrando mais das formas, suas faces e etc

usar mais o geogebra

massinha papel e dobraduras

formas

mais formas geometricas

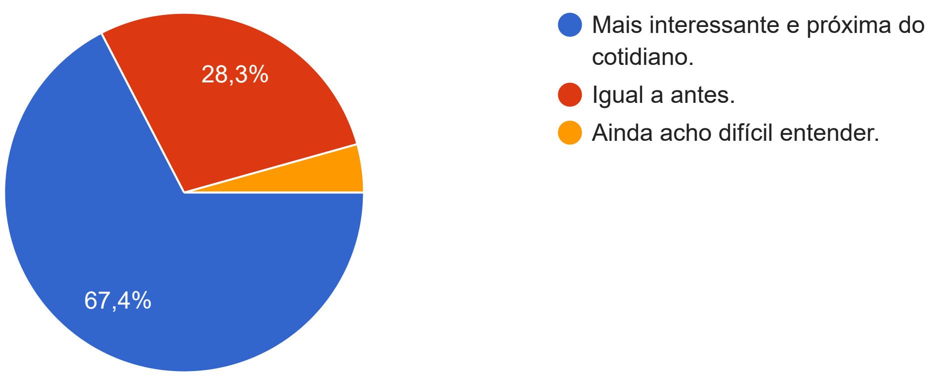
kapott

uma aula mais direta e bem explicativa. --Heber

Depois dessa aula, como você vê a matemática?

Copiar

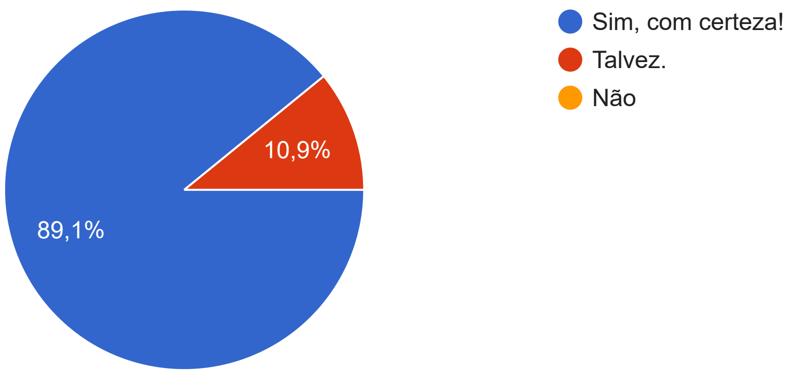
46 respostas



Você gostaria de ter mais aulas nesse formato investigativo?

Copiar

46 respostas



Apêndice H – Plano de aula

PROFMAT PUC-RIO

PLANO DE AULA

Escola: Centro Educacional Beatriz Silva – Rede Municipal de Teresópolis

Professor: Hallef J. Macabu

Orientador: Samuel Pacitti

Turma: 2602

Data: A definir

Duração: 6 horas/aula, podendo ser estendido para 9 horas/aulas.

1. Tema da Aula

Relação de Euler para poliedros convexos

2. Objetivos de Aprendizagem

Propiciar a compreensão e demonstrar a validade da relação de Euler para poliedros convexos.

3. Conteúdos

- Sólidos geométricos: poliedros e corpos redondos;
- Poliedros convexos;
- Relação de Euler para Poliedros convexos.

4. Metodologia/Desenvolvimento

A aula será iniciada com a exploração das definições de poliedros e corpos redondos. Para auxiliar na compreensão e facilitar a visualização, serão utilizados sólidos em acrílico para que os alunos observem as diferenças entre os poliedros e os corpos redondos. Nesse momento, o livro didático adotado pela unidade escolar, será utilizado como material de apoio. Será realizada uma atividade de classificação de alguns sólidos e poliedros e corpos redondos.

Em seguida, será apresentada a definição de poliedros, bem como seus principais tipos, utilizando o livro didático e sólidos geométricos como apoio. Os conceitos de vértices, faces e arestas serão introduzidos com o auxílio de um sólido como referência e de imagens projetadas, a fim de facilitar a compreensão dos alunos.

Tendo concluído a etapa expositiva, os alunos receberão uma atividade investigativa que será desenvolvida em conjunto com o GeoGebra, de forma que os alunos, de forma autônoma, poderão conjecturar a relação de Euler para poliedros convexos, realizando a observação dos números de vértices, faces e arestas de diversos poliedros. Nessa etapa, espera-se que os alunos consigam conjecturar a relação de Euler de forma menos formal, percebendo alguma relação entre a quantidade de cada um desses elementos.

Após a realização por todos alunos, desta atividade, os alunos serão incentivados a compartilhar suas constatações de forma a ser elaborada uma definição coletiva formal da relação identificada. Neste momento, espera-se que os alunos em conjunto apresentem a relação correta entre o número de faces, arestas e vértices.

Tendo sido apresentada a relação, será o momento de questionar a sua validade para todos poliedros convexos, desejando-se que os alunos busquem por uma prova de tal resultado. A partir dessa discussão, será proposto a realização da demonstração de Cauchy da relação de Euler, utilizando o material concreto que consistirá na montagem, pelos alunos em grupos, de um poliedro utilizando jujubas e palitos e sua posterior projeção em uma cartolina, para então realizar a triangulação para seguir o processo proposto por Cauchy em sua demonstração.

Tendo sido realizado esse processo de demonstração prática, será formalizado para os alunos, de forma expositiva, que esse processo consiste em uma demonstração que prova a validade da relação para todos os poliedros convexos. Essa formalização será realizada de forma simplificada, devido a faixa etária da turma.

Por fim, com o intuito de avaliar a compreensão do conteúdo explorado pelos alunos, de forma diferenciada e dinâmica, será proposta uma atividade gamificada na plataforma do *Kahoot,* que consistirá de perguntas envolvendo a relação de Euler, de forma que o aluno seja estimulado a aplicar a relação para resolver de forma mais rápida os problemas apresentados. Antes do encerramento da aula, os alunos responderão um questionário no Google Forms em que poderão fazer uma avaliação da aula e suas impressões sobre cada uma das atividades realizadas.

5. Recursos Didáticos

- Sólidos geométricos em acrílico;
- GeoGebra;
- Televisão (apresentação);
- Cartolinas;
- Material concreto: sólidos construídos com jujuba e palitos;
- Lanterna para projeção;
- Apostila de atividades.

6. Estratégias de Avaliação

A avaliação será realizada ao longo de toda a aula, por meio da observação e registro do desenvolvimento das atividades. Serão analisadas as respostas apresentadas pelos alunos na atividade proposta e, ao final, será disponibilizado um formulário de avaliação via *Google Forms*, para que os alunos registrem suas considerações sobre a aula.