



# RIO

# PUC

Dissertação de Mestrado

## **O ensino do comprimento e da área da circunferência:**

**uma sequência didática com uso do GeoGebra e  
de perspectivas históricas**

**Leomario Ribeiro Maciel da Silva**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Centro Técnico Científico  
Departamento de Matemática

Rio de Janeiro, 01 de abril de 2026



Pontifícia  
Universidade  
Católica do  
Rio de Janeiro

Dissertação de Mestrado

# **O ensino do comprimento e da área da circunferência:**

uma sequência didática com uso do  
GeoGebra e de perspectivas históricas

Leomario Ribeiro Maciel da Silva

Orientação: Dr. Samuel Pacitti Gentil

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Rio de Janeiro, 01 de abril de 2026



Pontifícia  
Universidade  
Católica do  
Rio de Janeiro

# **O ensino do comprimento e da área da circunferência:**

uma sequência didática com uso do GeoGebra e de perspectivas históricas

Leomario Ribeiro Maciel da Silva

**Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão examinadora abaixo:**

**Prof. Dr. Samuel Pacitti Gentil**

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Profa. Dra. Renata Martins Rosa**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Profa. Dra. Gilza Santos Simão Ferreira**

Faculdade Professor Miguel Ângelo da Silva Santos - FeMASS

Rio de Janeiro, 01 de abril de 2026



Pontifícia  
Universidade  
Católica do  
Rio de Janeiro

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial, do trabalho é proibida sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Leomario Ribeiro Maciel da Silva

Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal Fluminense, possui especialização em Matemática, suas Tecnologias e o Mundo do Trabalho pela Universidade Federal do Piauí e em Informática na Educação pelo Instituto Federal do Espírito Santo. Atua como professor de Matemática nas redes públicas de ensino dos municípios de Rio das Ostras e Macaé.

Ficha Catalográfica

Silva, Leomario Ribeiro Maciel da

O ensino do comprimento e da área da circunferência : uma sequência didática com uso do GeoGebra e de perspectivas históricas / Leomario Ribeiro Maciel da Silva ; orientação: Samuel Pacitti Gentil. – 2026.

84 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2026.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Educação Matemática. 3. Comprimento e área da circunferência. 4. História da Matemática. 5. Tecnologias digitais. 6. Applets GeoGebra. I. Gentil, Samuel Pacitti. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

## **Agradecimentos**

Ao meu melhor amigo, companheiro e marido, Hallef, que esteve ao meu lado em todos os momentos desta jornada, compartilhando inquietações, aprendizados e conquistas. Sua parceria constante, seu incentivo e sua presença — inclusive como colega de turma — tornaram esse percurso mais leve e significativo.

Aos meus familiares, amigos e colegas de profissão, pelo incentivo e pelo apoio ao longo desta caminhada.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) e à Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), pelo compromisso com a qualificação de professores da Educação Básica, ao oportunizarem o aprimoramento acadêmico e profissional.

Aos professores do programa, pelos ensinamentos, pela dedicação e pelas contribuições que ampliaram minha visão sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. De modo especial, ao Professor Samuel, meu orientador, pela orientação segura, pela paciência, pela disponibilidade e pelas valiosas contribuições para o desenvolvimento deste trabalho; e ao Professor Filipe, coordenador do curso, pela condução do programa, pelo incentivo e pelo acolhimento ao longo dessa trajetória.

Aos meus alunos, pela participação nas atividades propostas, contribuindo de forma significativa para o desenvolvimento deste estudo.

Aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade e pelas contribuições para o aprimoramento deste trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta conquista, minha sincera e profunda gratidão.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## Resumo

SILVA, L. R. M. da. **O ensino do comprimento e da área da circunferência: uma sequência didática com uso do GeoGebra e de perspectivas históricas.** 2026. 84 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ), Rio de Janeiro, 2026.

O ensino da Matemática, em especial da Geometria, quando pautado na memorização e aplicação mecanizada de fórmulas, limita a compreensão dos alunos acerca dos processos e procedimentos matemáticos que fundamentam a formalização dos conceitos estudados. No estudo do comprimento e da área da circunferência, por exemplo, a simples apresentação das fórmulas, dissociada de sua construção conceitual, pode gerar questionamentos acerca da inserção da constante pi ( $\pi$ ) e dificultar a compreensão dos fundamentos matemáticos que estruturam o conteúdo. Esse problema pode ser superado mediante a explicitação dos caminhos percorridos, bem como dos obstáculos enfrentados no processo de criação e organização dos conhecimentos matemáticos, especialmente quando vinculados à resolução de problemas que emergiram ao longo da história. Tendo isso em vista, a presente pesquisa em Educação Matemática foi desenvolvida com o objetivo geral de investigar se e de que maneira a abordagem do cálculo do comprimento e da área da circunferência, fundamentada no contexto histórico e no uso de *applets* GeoGebra, apresenta potencial para promover melhorias nos processos educacionais. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, do tipo intervenção pedagógica, cuja implementação ocorreu em uma turma de nono ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal. A avaliação dos dados coletados apontou um avanço significativo na aprendizagem dos alunos. Além disso, foi possível inferir que a abordagem a partir da História da Matemática atuou como agente de cognição matemática, favorecendo a compreensão dos conceitos trabalhados, enquanto as Tecnologias Digitais potencializaram esse processo ao ampliarem as possibilidades de exploração, experimentação e visualização.

## Palavras-chave

Educação Matemática; comprimento e área da circunferência; História da Matemática; Tecnologias Digitais; *applets* GeoGebra.

## Abstract

SILVA, L. R. M. da. **Teaching the circumference length and area of the circle**: a didactic sequence using GeoGebra and historical perspectives. 2026. 84 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ), Rio de Janeiro, 2026.

The teaching of Mathematics, especially Geometry, when based on memorization and the mechanical application of formulas, limits students' understanding of the mathematical processes and procedures that underlie the formalization of the concepts studied. In the study of the circumference length and the area of the circle, for example, the mere presentation of formulas, detached from their conceptual construction, may raise questions regarding the introduction of the constant pi ( $\pi$ ) and hinder the comprehension of the mathematical foundations that structure the content. This issue can be overcome by making explicit the paths taken, as well as the obstacles faced in the process of creating and organizing mathematical knowledge, particularly when linked to problem-solving situations that emerged throughout history. With this in mind, the present research in Mathematics Education was developed with the general objective of investigating whether and how an approach to calculating the circumference length and the area of the circle, grounded in historical context and supported by the use of GeoGebra applets, has the potential to promote improvements in educational processes. This is a qualitative study of the pedagogical intervention type, implemented in a ninth-grade class at a municipal public school. The analysis of the collected data revealed a significant advancement in students' learning. Moreover, it was possible to infer that the approach based on the History of Mathematics acted as an agent of mathematical cognition, fostering the understanding of the concepts addressed, while Digital Technologies enhanced this process by expanding the possibilities for exploration, experimentation, and visualization.

## Keywords

Mathematics Education; length of the circumference and area of the circle; History of Mathematics; Digital Technologies; GeoGebra applets

## Lista de ilustrações

Figura 1 – Tablete YBC 7302 .....	18
Figura 2 – Parte do Papiro Matemático de Rhind.....	20
Figura 3 – Interpretação dos problemas 48 e 50 do papiro de Ahmes .....	20
Figura 4 – Demonstração do uso do Lema de Euclides no contexto da área do círculo.....	23
Figura 5 – Lados AL e LB do octógono regular inscrito e lado KM do octógono regular circunscrito obtidos, respectivamente, do quadrado inscrito ABCD e do quadrado circunscrito EFGH .....	24
Figura 6 – Polígonos de 3, 6, 12 e 24 lados inscritos em uma circunferência .....	25
Figura 7 – Polígonos de 3, 6, 12 e 24 lados circunscritos em uma circunferência.....	25
Figura 8 – Primeira imagem suporte de demonstração.....	26
Figura 9 – Segunda imagem suporte de demonstração.....	27
Figura 10 – Tela inicial do <i>applet</i> “Aproximação do comprimento da circunferência por polígonos regulares” .....	39
Figura 11 – Perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos de 5, 6, 10 e 12 lados.....	39
Figura 12 – Convergência envolvendo polígonos de 12 lados.....	40
Figura 13 – Tela inicial do <i>applet</i> “Retificação da circunferência” .....	40
Figura 14 – Retificação da circunferência de diâmetro 6 .....	41
Figura 15 – Tela inicial do <i>applet</i> “Área da circunferência” .....	41
Figura 16 – Utilização do <i>applet</i> “Área da circunferência” .....	42
Figura 17 – Aula realizada na etapa de implementação da pesquisa .....	45
Figura 18 – Exemplos de soluções apresentadas na primeira questão ...	49
Figura 19 – Exemplo de solução apresentada na segunda questão.....	50
Figura 20 – Exemplos de soluções apresentadas na terceira questão ....	51
Figura 21 – Exemplo de solução apresentada na quarta questão .....	52
Figura 22 – Exemplo de solução apresentada na quinta questão.....	53
Figura 23 – Exemplo de solução apresentada na sexta questão.....	54
Figura 24 – Exemplo de solução apresentada na sétima questão .....	55

Figura 25 – Exemplo de solução apresentada na oitava questão ..... 56

## **Lista de abreviaturas**

**a.E.C.** – antes da Era Comum

**BNCC** – Base Nacional Comum Curricular

**EM** – Educação Matemática

**HM** – História da Matemática

**IFF** – Instituto Federal Fluminense

**TD** – Tecnologias Digitais

## Sumário

1	Introdução .....	118
2	Referencial Teórico.....	16
2.1	Contexto histórico .....	16
2.1.1	Origens históricas: Babilônia e Egito.....	17
2.1.2	Grécia.....	21
2.2	Aprofundamento do Método de Arquimedes.....	26
2.2.1	Perímetro do polígono regular circunscrito em função da medida do lado do inscrito e do raio da circunferência .....	26
2.2.2	Polígono regular inscrito de $2n$ lados a partir do de $n$ lados.....	27
2.2.3	Comprimento da circunferência .....	29
2.3	Articulação entre História da Matemática e Tecnologias Digitais ....	30
3	Percursos Metodológicos .....	36
3.1	Caracterização da pesquisa .....	36
3.2	Detalhamento da pesquisa .....	38
3.2.1	Planejamento .....	38
3.2.1.1	Elaboração dos <i>applets</i> .....	38
3.2.1.2	Elaboração da apresentação.....	42
3.2.1.3	Elaboração da lista de questões.....	43
3.2.1.4	Elaboração do questionário .....	43
3.2.2	Implementação.....	44
3.2.3	Avaliação.....	48
3.2.3.1	Lista de questões.....	48
3.2.3.2	Questionário .....	58
4	Considerações finais .....	64
	Referências .....	68
	APÊNDICE A – APRESENTAÇÃO .....	70
	APÊNDICE B – LISTA DE QUESTÕES .....	75
	APÊNDICE C – GUIA PARA UTILIZAÇÃO DOS <i>APPLETS</i> .....	79

# 1 Introdução

A abordagem tradicional da Matemática na Educação Básica, em especial no ensino de Geometria, ainda se caracteriza, em muitos contextos, pela ênfase na memorização e na aplicação mecanizada de fórmulas. Tal perspectiva limita a compreensão, por parte dos estudantes, dos processos e procedimentos matemáticos subjacentes à formalização dos conceitos, o que pode levá-los a questionar a Matemática enquanto ciência. No estudo do comprimento e da área da circunferência, por exemplo, introduz-se uma constante representada por uma letra grega, cujo significado é numérico e cujas características diferem significativamente daquelas às quais os alunos estão habituados, o que dificulta sua compreensão conceitual.

Nesse aspecto, é de fundamental importância que o professor apresente, em suas aulas, uma Matemática que faça sentido, que desperte o interesse, que auxilie os alunos no processo de construção de uma aprendizagem significativa, crítica e criativa. Para tanto, uma estratégia que pode ser adotada diz respeito à busca por práticas pedagógicas que considerem os processos históricos envolvidos na construção do conhecimento matemático em estudo. Sobre isso, Lima (2016, p. 65) menciona que “[o] processo histórico, que relata uma busca por uma melhor aproximação do  $\pi$ , não deve ser negado e nem omitido, assim como os obstáculos encontrados pelos matemáticos”.

Em se tratando da História da Matemática (HM), sua utilização como recurso didático nas aulas tem potencial para promover relevantes avanços educacionais, tendo em vista sua contribuição para a desmistificação de uma Matemática concebida como pronta e acabada. Essa abordagem possibilita evidenciar os aspectos presentes na formalização de conceitos matemáticos do ponto de vista epistemológico, o que favorece uma compreensão mais profunda de sua construção (MIGUEL, 1997).

A esse respeito, Gomes e Araman (2016), cujo trabalho investigou os artigos publicados em determinados periódicos que versavam sobre a HM, baseados em autores como Miguel e Brito (1996) e Miguel e Miorim (2011), destacam que:

[...] a História da Matemática é um recurso didático que pode contribuir para o desenvolvimento da Educação Matemática. Isto se deve ao fato de que sua inserção possibilita uma compreensão substantiva e epistemológica dos aspectos conceituais, das regras e dos processos intrinsecamente ligados ao conteúdo (GOMES; ARAMAN, 2016, p. 2).

Além disso, tendo em vista o perfil dos alunos da sociedade contemporânea, fortemente marcada pelo uso das Tecnologias Digitais (TD), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)<sup>1</sup> estabelece como competência específica da Matemática para o Ensino Fundamental a utilização de “[...] processos e ferramentas matemáticas, inclusive **tecnologias digitais** disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, **validando estratégias e resultados**” (BRASIL, 2018, p. 267, grifo nosso).

Sob essa perspectiva, entende-se que recorrer a ferramentas digitais, com o objetivo de apresentar de maneira prática, intuitiva e dinâmica os procedimentos que surgiram e foram aperfeiçoados ao longo da história para a compreensão do cálculo do comprimento e da área da circunferência está em consonância com a BNCC.

Dentre as TD disponíveis, destaca-se o GeoGebra. Trata-se de um *software* de Matemática dinâmica, de código aberto e gratuito para usos não comerciais, que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Disponível em diversos idiomas, além do acesso *online*, é possível instalá-lo no computador ou em dispositivos móveis, uma vez que está disponível para Windows, macOS, Linux (desktop e portátil) e dispositivos móveis Android e iOS (GEOGEBRA, 2025). Essa facilidade de acesso possibilita seu uso por diversos membros, levando em consideração as especificidades das realidades educacionais às quais pertencem.

Cabe destacar, ainda, que o GeoGebra possui uma interface intuitiva e apresenta significativo potencial pedagógico, sendo amplamente utilizado em pesquisas

---

<sup>1</sup> Refere-se a “[...] um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). [...] Referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, a BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação” (BRASIL, 2018, p. 7 – 8).

no campo da Educação Matemática (EM) conforme evidenciado no trabalho Maia e Vasconcelos (2022). Os referidos autores realizaram uma revisão sistemática da literatura sobre o uso de TD — em especial do GeoGebra — no ensino de Geometria, ao analisarem estudos publicados entre 2011 e 2020 em quatro repositórios digitais e constataram que:

Os estudos analisados demonstram que o uso das Tecnologias, em especial o GeoGebra no Ensino de Geometria está cada vez mais presente no contexto educacional através de variadas experiências. Sua utilização vem ocorrendo, tanto em práticas pedagógicas, com alunos e professores, quanto como instrumento de comunicação no processo educacional. [...] Com relação à utilização do *software* GeoGebra no contexto educacional, os estudos apontaram o grande potencial da ferramenta no processo de ensino e aprendizagem. O conhecimento sobre o uso do GeoGebra pelos indivíduos e a rápida manipulação das ferramentas dinâmicas que ele proporciona pode colaborar significativamente na construção coletiva de saberes e aprendizagens (MAIA; VASCONCELOS, 2022, p. 22–23).

Diante desse cenário, a presente pesquisa foi realizada com o objetivo geral de investigar se e de que maneira a abordagem do cálculo do comprimento e da área da circunferência, fundamentada no contexto histórico e no uso de *applets* GeoGebra, apresenta potencial para promover melhorias nos processos educacionais. Para alcançá-lo, foram traçados os seguintes objetivos específicos em relação ao cálculo do comprimento e da área da circunferência:

- Compreender os processos históricos e metodológicos que conduziram à formalização desses conceitos;
- Explorar as potencialidades pedagógicas do GeoGebra na construção de *applets* que auxiliem na abordagem e na compreensão do porquê das fórmulas comumente utilizadas;
- Planejar uma sequência didática com *applets* GeoGebra, baseada na história por trás do desenvolvimento desses conceitos, que possa ser reproduzida em diferentes contextos educacionais;
- Promover reflexões pedagógicas acerca do uso de *applets* GeoGebra e de abordagens históricas em sala de aula.

A motivação para a realização desta pesquisa está relacionada à trajetória do pesquisador na Educação Básica, tanto no papel de aluno quanto no exercício da

docência no Ensino Fundamental, sobretudo em turmas do 9º ano. Observou-se que, embora os conceitos de área e perímetro de figuras planas sejam abordados em anos anteriores, muitos estudantes carregam consigo dificuldades persistentes na compreensão desses tópicos. No que se refere especificamente à circunferência, tais dificuldades tornam-se ainda mais evidentes, uma vez que grande parte dos alunos se limita a reconhecer sua forma geométrica e demonstra fragilidades na compreensão de seus elementos e propriedades matemáticas.

Além disso, nesse cenário, é possível constatar que a constante  $\pi$ , presente no contexto das fórmulas para o cálculo do comprimento e da área da circunferência, é pouco compreendida pelos alunos, que, em muitos casos, não reconhecem seu significado ou o contexto de sua aplicação. Essa realidade sugere que, embora as fórmulas possam ser previamente apresentadas, não há a consolidação de uma aprendizagem significativa dos conceitos envolvidos.

Experiências pedagógicas recentes, por parte do pesquisador, envolvendo o uso de *applets* GeoGebra e de recursos audiovisuais, evidenciaram que abordagens que priorizam a compreensão conceitual e a visualização dinâmica podem despertar maior interesse dos alunos e favorecer a construção de sentidos para o conhecimento matemático. Tais experiências reforçam a necessidade de repensar práticas pedagógicas excessivamente mecanizadas, que se restringem à memorização e à aplicação de fórmulas, sem a devida atenção aos processos matemáticos que as fundamentam.

Dessa forma, este trabalho busca contribuir para a superação dessas limitações no ensino da Matemática, propondo experiências didático-pedagógicas que articulem a HM e o uso de TD, com vistas a promover abordagens mais eficazes no estudo do comprimento e da área da circunferência.

Para discorrer acerca do trabalho realizado, o presente texto está estruturado em quatro capítulos. O primeiro corresponde a esta introdução, que busca justificar e apresentar argumentos ao leitor, de modo a situá-lo em relação ao problema identificado e aos meios buscados a fim de superá-lo. No segundo, encontra-se o referencial adotado na pesquisa, que contempla tanto a parte histórica do conteúdo matemático da investigação, quanto os aspectos teóricos envolvidos no campo da EM que tratam da articulação entre HM e TD. No terceiro, descrevem-se, de maneira sistemática, os percursos metodológicos traçados e percorridos ao longo da

pesquisa. Por fim, o quarto capítulo é destinado às ponderações decorrentes do estudo, a partir das considerações finais.

## 2 Referencial Teórico

Neste capítulo, apresenta-se o referencial teórico que fundamenta a pesquisa, constituindo-se como base para a interpretação dos dados e para a construção das reflexões desenvolvidas nas seções subsequentes.

Refere-se à parte do texto em que se discorre sobre contribuições históricas relevantes para a construção e a compreensão do conteúdo matemático envolvido na investigação. Além disso, analisam-se as possibilidades pedagógicas decorrentes da articulação entre HM e TD, à luz de estudos teórico-metodológicos que abordam essa temática.

A organização do capítulo foi feita em três partes: a primeira tem como objetivo apresentar o contexto histórico em que se deu a construção do conhecimento matemático relacionado ao cálculo do comprimento e da área da circunferência; a segunda visa ao aprofundamento do método desenvolvido por Arquimedes para se chegar ao comprimento de uma circunferência, no qual se destacam os procedimentos matemáticos envolvidos; já a terceira, busca estabelecer a possível relação entre a HM e as TD no processo de ensino e aprendizagem matemática.

### 2.1 Contexto histórico

Por meio desta seção, objetiva-se apresentar o assunto abordado na pesquisa do ponto de vista histórico. Evidentemente, a história dos processos que culminaram no cálculo do comprimento e da área da circunferência, além da descoberta do número  $\pi$ , não se resume ao que se encontra escrito neste texto, no qual se apresentam apenas alguns progressos históricos relativos a alguns povos.

A seção está dividida em duas partes. Na primeira versa-se sobre os babilônios e os egípcios, cujos registros acerca do cálculo de área e comprimento da circunferência são os mais antigos que chegaram aos dias atuais. Na escrita dessa parte, Beckmann (1971) foi utilizado como referencial principal, mesmo que outros trabalhos tenham sido consultados a fim de confrontar informações. Tendo isso em vista, optou-se pela não referência dessa obra reiteradamente no decorrer do texto. Partes escritas com base em outros autores foram devidamente referenciadas, com o objetivo de atribuir-lhes os devidos créditos.

Já para a escrita da segunda parte, que trata da matemática grega, o livro de Roque e Carvalho (2012) foi utilizado como referência principal. Também foram citados outros autores, mas esses foram indicados no texto.

### 2.1.1

#### Origens históricas: Babilônia e Egito

É razoável pensar que a forma peculiarmente regular do círculo despertou a atenção do homem muito antes da invenção da roda; afinal, trata-se de um formato presente nas pupilas de seus semelhantes e de outros animais, que delimita o sol e a lua cheia e que se encontra na beleza de algumas flores. Do ponto de vista matemático, os documentos históricos mostram que por volta de 2000 a.E.C. (antes da Era Comum) já eram efetuados cálculos pelos babilônios e egípcios com o objetivo de determinar o valor do comprimento e da área da circunferência, mesmo que não esteja claro como isso era feito.

Em 1936 foi escavado um tablete de argila a cerca de 320 quilômetros da Babilônia, o qual afirma que a razão entre o perímetro do hexágono regular e da circunferência do círculo circunscrito é igual a um número, na notação moderna, dado por  $\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}$  (é importante ressaltar que os babilônios usavam o sistema sexagesimal). Os babilônios evidentemente sabiam que o perímetro de um hexágono regular é igual a seis vezes o raio do círculo que o circunscribe (inclusive, é a razão pela qual escolheram dividir o círculo em 360 graus) e com isso chegaram, na notação atual, à razão  $\frac{6r}{C}$ , em que  $r$  é o raio e  $C$  o comprimento da circunferência circunscrita. A partir dessa afirmação e usando a definição de que  $\pi = \frac{C}{2r}$ , então  $\frac{6r}{C} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi} = \frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}$ , tem-se que os babilônios chegariam a uma aproximação para  $\pi$  igual a  $3 \frac{1}{8}$ , ou seja, 3,125.

Já no tablete babilônio YBC 7302 (Figura 1) datado entre 1900 e 1600 a.E.C. encontram-se uma circunferência e os números 3, 9 e 45 em representação cuneiforme sexagesimal. De acordo com Roque e Carvalho (2012), o valor 3 corresponde à circunferência, ao passo que 45 representa a sua área. Esses autores mencionam que, conceitualmente, para nós, o círculo é obtido traçando-se uma circunferência dados seu centro e raio (Axioma 3 de Euclides), entretanto, para os babilônios, ele era concebido como a figura limitada por uma circunferência. Mesmo quando

conheciam o diâmetro do círculo, eles calculavam sua área  $A$  usando o comprimento  $C$  da circunferência pela seguinte fórmula:  $A = \frac{C^2}{12}$ . O que justifica as informações presentes no tablete, dado que, em notação sexagesimal, um círculo de comprimento 3 possui, por essa fórmula, área 45.



Figura 1 – Tablete YBC 7302 (ROQUE, CARVALHO, 2012).

Roque e Carvalho (2012) mencionam que muitas traduções consideram que em uma circunferência de raio  $r$ , na linguagem atual, tem-se que  $A = \pi r^2$  e  $C = 2\pi r$ , então:

$$r = \frac{C}{2\pi}$$

$$A = \pi \frac{C^2}{4\pi^2} = \frac{C^2}{4\pi} = \frac{C^2}{12} \text{ para } \pi = 3$$

Nesse aspecto, os autores salientam que:

[A]firma-se frequentemente que a aproximação  $\pi = 3$  era padrão, para os babilônios ou que, em casos especiais, eles usavam 3,07;30 (o que, em nosso sistema é igual a  $3 + 1/8$ ). No entanto, esta interpretação é anacrônica. Conceitualmente, há uma grande diferença entre o que fazemos e os procedimentos dos babilônios. Para nós,  $\pi$  é uma constante de proporcionalidade, que relaciona a área e o quadrado do raio de um círculo qualquer, ao passo que os babilônios tinham um processo para calcular a área de círculos no qual dividiam o quadrado da circunferência do círculo por 12 (ROQUE, CARVALHO, 2012, p. 46).

Em concordância com esses autores, tomou-se o cuidado de utilizar a conjugação “chegariam” em vez de “chegaram” ao se referir ao valor de  $\pi$  a partir do

conhecimento matemático desses povos e dos egípcios, que será apresentado a seguir.

Embora os tabletas babilônios, por serem feitos de argila, sejam mais duráveis e de dezenas de milhares terem sido desenterrados, decifrá-los nunca foi um processo simples. De acordo com Boyer (2003), as informações contidas neles permaneceram indecifráveis até o século XIX, quando se descobriu que a inscrição de Behistun<sup>2</sup> corresponde a uma declaração trilingue do rei Dario I. Ainda assim, o autor menciona que a decifração e análise dos tabletas com conteúdo matemático avançou devagar e que somente no segundo quarto do século XX que a percepção das contribuições matemáticas da Mesopotâmia se tornou apreciável.

Por outro lado, em relação aos egípcios, com a descoberta da Pedra Roseta<sup>3</sup> em 1799 pela expedição de Napoleão, cuja mensagem encontrava-se em grego, demótico e hieroglífico, a decifração dos hieróglifos, que ocorrera antes da de outras culturas, possibilitou compreender mais cedo sobre a matemática egípcia em comparação com a de outros povos.

O documento egípcio mais antigo relacionado à Matemática é um rolo de papiro de 0,3 m de altura e 5 m de comprimento chamado Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes<sup>4</sup> (Figura 2). Trata-se de uma obra, com referência original datada entre 2000 e 1800 a.E.C, copiada pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.E.C em hierático – escrita mais cursiva em comparação à hieroglífica e mais adaptada ao uso de pena e tinta sobre folhas de papiro (BOYER, 2003). É possível que parte do conhecimento presente no Papiro de Ahmes, que contém 84 problemas e suas soluções, tenha sido transmitido por Imhotep, responsável por supervisionar a construção das pirâmides por volta de 3000 a.E.C.

---

<sup>2</sup> Representa a inscrição cuneiforme trilingue mais longa conhecida, escrita em persa antigo, elamita e babilônico, sendo, pois, de grande importância para a decifração da escrita cuneiforme. Mais informações a respeito desse monumental podem ser obtidas em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Behistun\\_Inscription](https://en.wikipedia.org/wiki/Behistun_Inscription).

<sup>3</sup> Encontra-se na coleção do British Museum e pode ser explorada por meio do seguinte endereço eletrônico: [https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y\\_EA24](https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA24).

<sup>4</sup> Para obter maiores informações sobre o Papiro de Rhind e ver fotos dele com mais detalhes, basta consultar as coleções *online* do British Museum e Brooklyn Museum. O primeiro guarda a maior parte do papiro utilizando os números de inventário EA10057 e EA10058. Já o segundo, possui fragmentos menores cujas informações podem ser obtidas a partir do endereço eletrônico: <https://www.brooklynmuseum.org/pt-BR/objects/118304>.



Figura 2 – Parte do Papiro Matemático de Rhind. Disponível em: [https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y\\_EA10057](https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057).

No problema nº 50 do Papiro de Rhind, assume-se que a área de um campo circular com um diâmetro de 9 unidades é a mesma de um quadrado com um lado de 8 unidades. Usando a fórmula para área do círculo conhecida atualmente, ou seja,  $A = \pi r^2$ , tem-se nesse problema que  $\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8^2$  e que, portanto, o valor que os egípcios chegariam para  $\pi$  é de aproximadamente 3,16049.

No problema nº 48, Ahmes fornece uma dica de como os egípcios poderiam ter chegado nesse valor. Na figura 3, observa-se a formação do octógono ABCDEFGH trissecando os lados de um quadrado de comprimento igual a 9 unidades. Visualmente, a área do octógono não difere muito da área do círculo inscrito no quadrado e é igual a área dos cinco quadrados sombreados, que valem 9 unidades de área cada, mais os quatro triângulos cujas áreas valem  $4\frac{1}{2}$  unidades de área cada. Isso dá um total de 63 unidades de área, o que é próximo de  $64 = 8^2$ .

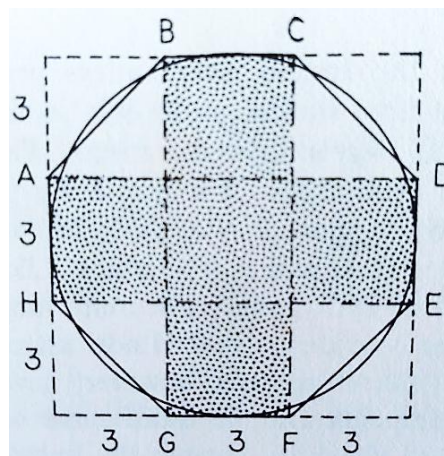


Figura 3 – Interpretação dos problemas 48 e 50 do papiro de Ahmes (BECKMANN, 1971).

Evidentemente, existem duas aproximações realizadas que culminaram no erro (na perspectiva moderna) do problema: a primeira foi considerar a área do círculo igual à do octógono e a segunda, que 63 é igual a 64. Cabe observar que tais aproximações se compensam parcialmente, o que, de certa forma, minimiza o erro do valor encontrado.

### **2.1.2 Grécia**

Segundo a narrativa histórica tradicional, Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI a.E.C., foi um dos primeiros matemáticos gregos e sua matemática foi fortemente influenciada pelos mesopotâmicos e egípcios. Todavia, as práticas desses povos, no que concerne aos cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes, são bem distintas da geometria grega.

Sem dúvida, os primeiros matemáticos gregos praticavam uma geometria baseada em cálculos de medidas, como os povos antigos. A narrativa histórica tradicional enfatiza a transição do tipo de Matemática realizada pelos babilônios e egípcios, profundamente marcada por cálculos e algoritmos, para uma Matemática teórica praticada pelos gregos, fundada em argumentações consistentes e demonstrações. Não há, contudo, uma documentação confiável que possa estabelecer a transição entre a Matemática mesopotâmica e egípcia e a Matemática grega (ROQUE, CARVALHO, 2012, p. 60-61).

Nesse contexto, enfatiza-se, conforme a narrativa histórica tradicional, a transição de uma Matemática fortemente marcada por cálculos e algoritmos, para a Matemática praticada pelos gregos, pautada em argumentações consistentes e demonstrações. Contudo, não existem indícios de que a Matemática desenvolvida na Grécia durante os séculos V e IV a.E.C. adotasse precauções quanto ao uso de procedimentos heurísticos e informais. Apesar disso, há evidências de que, no meio dos filósofos da época, questionavam-se os métodos usados pelos matemáticos.

Por volta do ano 375 a.E.C., Platão começa a tecer críticas aos geômetras por não empregarem critérios de rigor desejáveis nas práticas matemáticas. Não por acaso, o trabalho de Eudoxo se desenvolveu no seio da Academia Platônica, cujos membros debatiam o modo de descrever as disciplinas matemáticas. Esse contexto, aqui resumidamente narrado, pode ter contribuído na legitimação do saber Matemático na sua forma abstrata e na sua consolidação como uma disciplina do pensamento puro.

Por volta do ano 300 a.E.C., com Os Elementos de Euclides, evidenciam-se os esforços da Matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada que valesse para grandezas quaisquer, fossem elas comensuráveis ou incomensuráveis. Os Elementos é composto por treze livros (capítulos), que expõem resultados diversos, sistematicamente organizados, muitos deles atribuídos a outros geômetras, alguns anteriores a Euclides. Trata-se de uma obra que apresenta, de maneira organizada, a Matemática elementar que os gregos da época clássica tinham criado e desenvolvido. Além disso, constitui a mais antiga exposição organizada de Matemática que chegou ao nosso tempo e que muito influenciou no desenvolvimento do conhecimento matemático.

No Livro XII, Euclides começa por demonstrar que dois círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros, usando o método da exaustão de Eudoxo. Para tanto, um passo essencial é a proposição geralmente conhecida como Lema de Euclides:

**Lema de Euclides:** *Sejam  $a$  e  $b$ , com  $a > b$ , duas grandezas de mesma espécie. Se de  $a$  tirarmos uma parte maior do que ou igual a sua metade, do restante tirarmos uma parte maior ou igual à metade, e assim sucessivamente, então, após um certo número de repetições desse processo, obteremos uma grandeza menor do que  $b$ .*

**Demonstração (para o contexto da área do círculo):** *Seja  $AB$  o lado de um polígono regular de  $n$  lados, inscrito em uma circunferência, e  $M$  o ponto médio do arco  $AB$ . Tomando  $RS$ , congruente à  $AB$  e tangente à circunferência em  $M$ , de tal modo que  $AM = MB$  (que correspondem a lados de um polígono regular de  $2n$  lados inscritos na circunferência), a área do triângulo  $AMB$  é metade da área do quadrilátero  $ARSB$ , sendo, portanto, maior que a metade da área do segmento circular  $AMB$  (Figura 4). Assim sendo, subtraindo-se do segmento circular  $AMB$  o triângulo  $AMB$ , retiramos uma figura com área maior que metade da sua. Repetindo o mesmo procedimento, pode-se ter a diferença entre a área do círculo e a do polígono menor do que qualquer quantidade dada.*

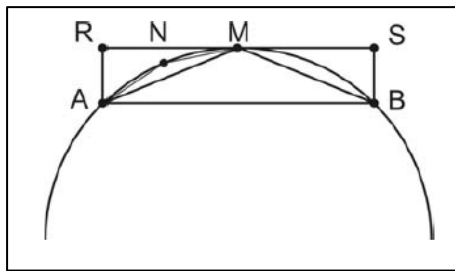


Figura 4 – Demonstração do uso do Lema de Euclides no contexto da área do círculo (ROQUE, CARVALHO, 2012).

Arquimedes, que viveu no século III a.E.C. utilizou o método da exaustão e, em uma das primeiras ocasiões nas quais o perímetro de uma curva foi utilizada no contexto da geometria grega, apresentou a seguinte proposição para se determinar a área do círculo a partir de um triângulo de mesma área:

**Proposição:** *A área de um círculo é igual à do triângulo retângulo no qual um dos lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência deste círculo.*

**Demonstração:** *Sejam  $C$  e  $T$ , respectivamente, as áreas do círculo e do triângulo. Inscrevem-se e circunscrevem-se ao círculo, respectivamente, os polígonos regulares  $I_n$  e  $C_n$ ,  $n \geq 2$ , de  $2^n$  lados, passando, sucessivamente para os de  $2^{n+1}$  lados (Figura 5). Suponhamos, inicialmente, que  $C > T$ . Nesse caso, podemos obter uma quantidade  $d$  tal que  $d = C - T > 0$ . Tendo em vista que a área de um polígono regular é igual ao produto da medida do apótema pelo semi-perímetro, então a área de  $I_n$  é igual à de um triângulo retângulo cujos catetos possuem a mesma medida do apótema e do perímetro do referido polígono. Como os apótemas e os perímetros dos polígonos inscritos são sucessivamente menores que o raio e a circunferência do círculo, ou seja, menores do que os lados correspondentes do triângulo de área  $T$ , pode-se concluir que a área de  $I_n < T < C$  para todo  $n$ . É possível obter, portanto, uma quantidade  $k_n = C - \text{área}(I_n)$ . Usando o Lema de Euclides, quando aumentamos o número de lados do polígono esta quantidade pode ser tornada menor do que qualquer quantidade dada. Logo, para  $n$  suficientemente grande, podemos obter  $k_n < d$ . Mas como  $\text{área}(I_n) < T < C$ , obtemos:  $d = C - T < C - \text{área}(I_n) = k_n$ , o que contradiz o fato de  $k_n > d$  para  $n$  suficientemente grande.*

*Para o caso em que  $C < T$ , argumenta-se de modo análogo, mas usando polígonos circunscritos ao invés de inscritos.*

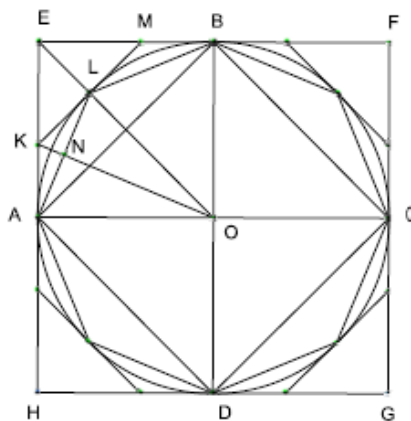


Figura 5 – Lados AL e LB do octógono regular inscrito e lado KM do octógono regular circunscrito obtidos, respectivamente, do quadrado inscrito ABCD e do quadrado circunscrito EFGH (ROQUE, CARVALHO, 2012).

No que se refere ao comprimento da circunferência, Lima (2016) descreve, com base na obra “A medida do círculo” de Arquimedes, o método conhecido como clássico para o cálculo de  $\pi$ .

Antes de apresentá-lo, é importante destacar, conforme consta em Carvalho (2011), que Arquimedes, em sua obra, designa o comprimento da circunferência pela palavra grega *περιμετρος* (perímetro). Tempos depois, em 1647, o matemático inglês William Oughtred e, mais tarde, outro matemático também inglês, Isaac Barrow, professor de Newton, abreviaram para  $\pi$  o perímetro de um círculo de raio  $r$ . Já em 1706, William Jones publicou o trabalho “A New Introduction to Mathematics” e usou a letra  $\pi$  para designar a razão entre este e seu diâmetro tal qual fazemos nos dias de hoje. Entretanto, nem todos usavam essa notação, a exemplo de Jean Bernoulli que, na mesma época, usou a letra  $c$  para designar a mesma razão. A partir de 1737, quando Leonhard Euler, com sua notoriedade, retoma o símbolo  $\pi$  na sua obra sobre séries infinitas “*Variae observationes circa series infinitas*”, foi que essa letra grega passou a ser definitivamente utilizada como inicialmente proposto por William Jones.

Voltando ao método descrito em Lima (2016)<sup>5</sup>, numa circunferência de diâmetro “ $d$ ” inscreve-se um triângulo equilátero. Posteriormente, tomam-se os pontos médios de cada um dos três arcos da circunferência – dividindo-os em duas partes iguais – e unem-se esses pontos aos vértices do triângulo. Com isso, obtém-se um

<sup>5</sup> A autora apresenta o processo considerando inicialmente uma circunferência de raio  $r$ . Neste trabalho, porém, optou-se por considerar uma circunferência de diâmetro  $d$  (posteriormente de diâmetro unitário) por motivos didáticos.

hexágono regular. Prosseguindo realizando divisões de arcos à metade, constrói-se, a partir do hexágono regular, um dodecágono regular e, continuando com o processo, polígonos regulares de 24, 48 e, finalmente, de 96 lados (Figura 6).

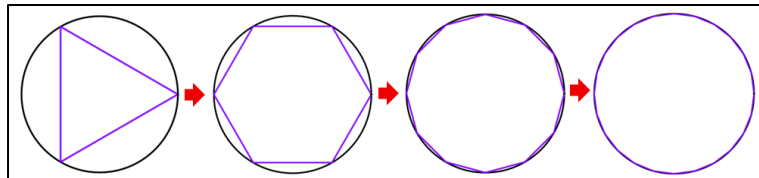


Figura 6 – Polígonos de 3, 6, 12 e 24 lados inscritos em uma circunferência.

A partir disso, Arquimedes concluiu que o valor do comprimento da circunferência é maior que o perímetro do polígono regular inscrito de 96 lados, ou seja, que  $3\frac{10}{71}d \cong 3,140845d$ .

De modo análogo, Arquimedes realizou circunscricões de polígonos regulares à circunferência, prosseguindo, também, até 96 lados (Figura 7). Com isso, ele concluiu que, o comprimento da circunferência é menor que  $3\frac{1}{7}d \cong 3,142857d$ .

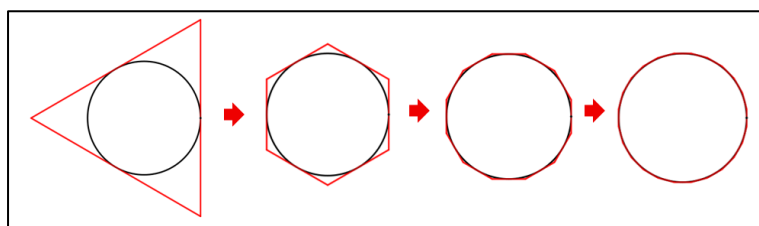


Figura 7 – Polígonos de 3, 6, 12 e 24 lados circunscritos em uma circunferência.

A partir disso, sendo  $C$  o comprimento da circunferência, tem-se que:

$$3\frac{10}{71}d < C < 3\frac{1}{7}d$$

Mas como, por definição,  $\pi = \frac{C}{d}$ , então:

$$\frac{3\frac{10}{71}d}{d} < \frac{C}{d} < \frac{3\frac{1}{7}d}{d} \quad \Leftrightarrow \quad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Importante notar que Arquimedes encontrou  $\pi$  (escrito na notação atual) dentro de um intervalo.

## 2.2 Aprofundamento do Método de Arquimedes

Como apresentado ao final da seção anterior, Arquimedes conseguiu, com seu método, encontrar um valor aproximado para a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. Para tanto, ele construiu duas sequências de números reais formadas pelos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência que convergem, uma por falta e outra por excesso, para um mesmo valor: o comprimento da circunferência.

A literatura consultada não fornece de maneira sistemática os cálculos matemáticos realizados por Arquimedes. Por conta disso, a seguir são apresentados resultados relevantes a partir do método por ele desenvolvido.

### 2.2.1 Perímetro do polígono regular circunscrito em função da medida do lado do inscrito e do raio da circunferência

Seja  $I_1I_2$  um dos lados do polígono regular, de  $n$  lados, inscrito em uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ . As tangentes à circunferência passando por  $I_1$  e  $I_2$  intersectam-se no ponto  $C_1$ , que corresponde a um vértice do polígono regular, de  $n$  lados, circunscrito à circunferência (Figura 8). Sejam  $l_n$  e  $L_n$ , respectivamente, as medidas dos lados dos polígonos regulares inscrito e circunscrito e  $M$  o ponto médio de  $I_1I_2$ . Tem-se que:  $\overline{I_2M} = \frac{l_n}{2}$ ,  $\overline{C_1I_2} = \frac{L_n}{2}$  e  $\overline{I_2O} = r$ . Como os triângulos  $OMI_2$  e  $OI_2C_1$  são semelhantes pelo caso AA, então:

$$\frac{\overline{MI_2}}{\overline{I_2C_1}} = \frac{\overline{OI_2}}{\overline{OC_1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{l_n}{2}}{\frac{L_n}{2}} = \frac{r}{\overline{OC_1}} \quad \Leftrightarrow \quad L_n = \frac{l_n \overline{OC_1}}{r}$$

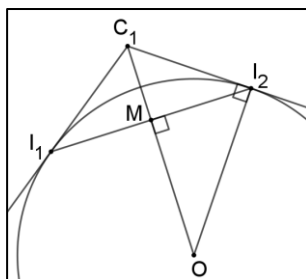


Figura 8 – Primeira imagem suporte de demonstração.

Mas pelo Teorema de Pitágoras  $OC_1 = \frac{\sqrt{L_n^2 + 4r^2}}{2}$ . Assim:

$$L_n = \frac{l_n \frac{\sqrt{L_n^2 + 4r^2}}{2}}{r}$$

$$\Leftrightarrow L_n^2 4r^2 = l_n^2 (L_n^2 + 4r^2)$$

$$\Leftrightarrow L_n^2 = \frac{l_n^2 4r^2}{4r^2 - l_n^2}$$

$$\Leftrightarrow L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

Portanto, os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos de  $n$  lados são, respectivamente,  $P_i = n \cdot l_n$  e  $P_c = n \cdot \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$ , em que  $r$  corresponde ao raio da circunferência.

### 2.2.2

#### Polígono regular inscrito de $2n$ lados a partir do de $n$ lados

Em um polígono regular, de  $n$  lados, inscrito em uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , seja  $I_1I_2$  um dos lados e  $M$  seu ponto médio. Tomando-se  $I'_1$ , que divide o arco  $\widehat{I_1I_2}$  à metade, tem-se que  $I_1I'_1$  e  $I'_1I_2$  são lados do polígono regular, de  $2n$  lados, inscrito na referida circunferência, ambos medindo  $l_{2n}$  (Figura 9).

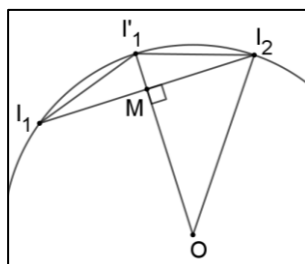


Figura 9 – Segunda imagem suporte de demonstração.

Denotando  $\overline{I'_1M} = x$ , tem-se que  $\overline{MO} = r - x$ . Como  $\overline{OI_2} = r$  e  $\overline{I_2M} = \frac{l_n}{2}$ , então no triângulo  $MOI_2$ :

$$r^2 = \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + (r - x)^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{l_n^2}{4} + r^2 - 2rx + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2rx + \frac{l_n^2}{4} = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau na incógnita  $x$  e levando em conta que  $x < r$ , então:

$$x = \frac{2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2}}{2}$$

Agora, no triângulo  $I_2I'_1M$ :

$$l_{2n}^2 = \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow l_{2n}^2 = \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow l_{2n} = \sqrt{r \left(2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2}\right)}$$

Logo, o perímetro do polígono regular inscrito de  $2n$  lados é dado por:

$$P_i = n \cdot \sqrt{r \left(2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2}\right)}$$

### 2.2.3 Comprimento da circunferência

A partir desses resultados, a medida do comprimento da circunferência pode ser obtida mediante aproximações. Para tanto, inicia-se o processo escolhendo-se um polígono regular inscrito cuja medida do lado é fácil de determinar (geralmente um triângulo, quadrado ou hexágono) e, posteriormente, basta fazer as devidas substituições nas fórmulas apresentadas em 2.2.1 e 2.2.2. Na tabela 1, apresentam-se valores encontrados na aproximação do cálculo do comprimento da circunferência de diâmetro unitário, os quais iniciam-se pelo perímetro de um hexágono de lado  $\frac{1}{2}$  (perímetro 3). Verifica-se, nessa tabela, que a partir desse polígono regular inscrito de 6 lados, é possível, de início, obter o perímetro do hexágono circunscrito e do dodecágono inscrito.

$n$	$P_i$	$P_c$
6	3	3,46410162
12	3,10582854	3,21539031
24	3,13262861	3,15965994
48	3,13935020	3,14608622
96	3,14103195	3,14271460
192	3,14145247	3,14187305
384	3,14155761	3,14166275
768	3,14158389	3,14161018
1536	3,14159046	3,14159703
3072	3,14159211	3,14159375
6144	3,14159252	3,14159293
12288	3,14159262	3,14159272
24576	3,14159265	3,14159267
...	...	...

Tabela 1 – Valores das aproximações para o comprimento da circunferência de diâmetro unitário por polígonos inscritos e circunscritos.

Observa-se que, à medida que aumenta o número de lados, o perímetro dos polígonos regulares inscritos ( $P_i$ ) cresce enquanto o perímetro dos polígonos regulares circunscritos ( $P_c$ ) decresce, permanecendo sempre  $P_i < P_c$ . Ambas as

sequências convergem a um mesmo valor, denotado por  $\pi$ . Conclui-se, pois, que o comprimento da circunferência de diâmetro unitário é igual a  $\pi$ .

Utilizando a semelhança entre circunferências, tem-se que o comprimento  $C$  de uma circunferência de diâmetro  $d$  é dado por:

$$\frac{\pi}{C} = \frac{1}{d} \quad \leftrightarrow \quad C = \pi d$$

Como o diâmetro equivale ao dobro do raio, chega-se à seguinte fórmula, comumente apresentada em livros didáticos de Matemática:  $C = 2\pi r$ .

### 2.3

#### **Articulação entre História da Matemática e Tecnologias Digitais**

Conforme aponta Araman (2011), há um consenso entre autores da área de EM acerca da relevância da HM, que se constitui em um recurso didático capaz de contribuir para os processos de aprendizagem. A autora comenta que as pesquisas que defendem tal premissa destacam a fecundidade da HM no ensino da Matemática, tendo em vista sua capacidade de favorecer a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Ela complementa, ainda, que há muitos outros elementos contributivos apontados, tais como: a capacidade de contextualização dos conteúdos, a desmistificação da Matemática e a compreensão do processo dinâmico da construção desse conhecimento.

Os documentos oficiais sinalizam aos professores de Matemática que atuam na Educação Básica que a HM é um recurso que se faz imprescindível no processo de ensino. A BNCC, por exemplo, destaca que a HM pode ser utilizada a fim de possibilitar uma abordagem em que haja um contexto significativo para os alunos, sendo esse fundamental para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento. Além disso, dentre diferentes recursos didáticos, na Base considera-se importante a inclusão da HM, que se constitui em um “[...] recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática” (BRASIL, 2018, p. 299). Contudo, é necessário que se faça isso de modo integrado a “[...] situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos” (BRASIL, 2018, p. 299).

A partir da HM é possível revisitar os momentos envolvendo os personagens que conceberam as noções matemáticas em estudo, de maneira a desafiar a capacidade dos alunos no exercício de reflexões e problematizações que visam estimular suas estratégias de pensamento. Isso propicia a produção de conhecimentos a partir da construção de significados para os objetos matemáticos na sala de aula. Trata-se de uma abordagem na qual o aluno tem a oportunidade de se inserir no contexto em que o conhecimento matemático se construiu, possibilitando argumentos mais coerentes para as noções matemáticas que ele precisa aprender (MENDES, CHAQUIAM, 2016).

Dentre as justificativas a respeito da indicação do uso didático pedagógico das informações históricas no ensino de Matemática, pode-se citar: i) a contribuição para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais da matemática; ii) as contribuições didáticas para o trabalho do professor e para o fortalecimento de suas competências formativas para o exercício de ensino; iii) o esclarecimento dos aspectos formativos, informativos e utilitários da matemática; iv) o fato de dar significado ao conhecimento matemático ensinado e aprendido; v) a condução dos estudantes ao acervo cultural da matemática, com a finalidade de desenvolver seu interesse pelo assunto e estimular a preservação dessa memória intelectual humana e vi) a possibilidade de mergulhar nos problemas que caracterizam o pensamento de certa época em toda a sua complexidade, considerando não só os fatores científicos, mas também culturais, sociais e filosóficos com o intuito de vislumbrar o ambiente em que se definiram objetos, inventaram-se métodos e estabeleceram-se resultados (BORTOLI, 2025; MENDES, CHAQUIAM, 2016).

Após experimentar e refletir por mais de duas décadas sobre uma multiplicidade de estratégias didáticas que pudessem ser associadas aos princípios investigativos, problematizadores e fundamentadores do ensino e da aprendizagem matemática, estabelecidas a partir do desenvolvimento histórico-epistemológico da Matemática, Mendes (2023) concluiu que a HM funciona como um acionador e reorganizador cognitivo na aprendizagem matemática, além de um agente de cognição no ensino de Matemática e de cognição matemática na sala de aula. Em seu trabalho, o autor argumenta que os fatos históricos matemáticos, quando explorados de forma reflexiva e articulados ao conteúdo escolar, acionam e reorganizam processos cognitivos, favorecendo uma compreensão relacional dos conceitos. Com isso, a incorporação da história, inclusive com uso de recursos digitais, funciona como um

mediador didático e epistemológico capaz de promover agenciamentos cognitivos no ensino de Matemática, ampliando a formação conceitual e a criatividade em favor da aprendizagem compreensiva.

Contudo, o processo envolvido na seleção e na forma com que a HM será inserida e apresentada no ensino é bastante complexo. A esse respeito, Mendes e Chaquiam (2016) destacam que:

[...] a história da matemática que consideramos adequada para ser inserida no desenvolvimento conceitual dos estudantes refere-se diretamente ao desenvolvimento epistemológico das ideias, conceitos e relações matemáticas ensinadas e aprendidas na Educação Básica e no Ensino Superior. Trata-se, mais concretamente, das histórias relacionadas aos aspectos matemáticos em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica, estabelecido no tempo e no espaço com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem sociocultural, científica e tecnológica, em todos os tempos e lugares (p. 19).

Essa perspectiva evidencia que a inserção da HM no ensino deve ser pautada numa abordagem pedagógica mais significativa, com vistas ao favorecimento da compreensão Matemática como produção humana historicamente situada, de modo a possibilitar que os estudantes vislumbrem os conceitos matemáticos como resultados de problemas de necessidade sociocultural, científica e tecnológica. Dessa maneira, há, inclusive, a possibilidade de estabelecer relações com a produção de conhecimento matemático da sociedade atual, a qual é fortemente marcada pela presença e influência das TD.

Destaca-se que os documentos oficiais trazem a necessidade de adequação dos currículos, de modo a viabilizar que o aluno desenvolva competências e habilidades voltadas para a utilização de TD. Nessa direção, a BNCC aponta que o aluno da Educação Básica deve ser capaz de:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 09).

As TD desempenham um papel fundamental na construção da aprendizagem matemática, devendo ser entendidas como recursos indispensáveis nesse processo.

Borba e Penteado (2019) defendem que elas se fazem necessariamente presentes para que o conhecimento seja construído, ao afirmarem que:

[...] o conhecimento só é produzido com uma determinada mídia, ou com uma tecnologia da inteligência. É por isso que adotamos uma perspectiva teórica que se apoia na noção de que o conhecimento é produzido por um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias, ou seres-humanos-com-tecnologias e não, como sugerem outras teorias, por seres humanos solitários ou coletivos formados apenas por seres humanos (p. 48).

Rodrigues (2014, p. 30) afirma que as TD possibilitam ir além da apresentação dos conteúdos de forma expositiva com utilização apenas do quadro; elas permitem “[...] manipular, alterar, ensaiar resultados em um ambiente seguro, reproduzível, dinâmico e rico em experiências, como é o ambiente virtual”.

A partir da utilização de TD em sala de aula, o professor pode oportunizar abordagens mais dinâmicas, interativas e alinhadas com as demandas da realidade educacional contemporânea. O *software* GeoGebra, por exemplo, pode ser utilizado para favorecer a visualização, contribuir para a construção do conhecimento matemático e compreensão conceitual, possibilitar a formulação de conjecturas e o estabelecimento de procedimentos que superem a mecanização. Sob essa perspectiva, o processo de ensino e aprendizagem torna-se mais significativo, atraente e acessível aos estudantes.

Vale destacar, também, que há formas e procedimentos geométricos que, mesmo para os profissionais mais habilidosos, apresentam elevado grau de complexidade para serem reproduzidos manualmente. Ainda que os fossem (por meio de imagens prontas, por exemplo), o caráter estático pode comprometer as percepções de relações, variações e propriedades dinâmicas. Diante desse cenário, as ferramentas digitais podem — e devem — ser incorporadas à prática docente, por tornarem mais ágeis, precisas e viáveis a construção, manipulação e exploração de objetos matemáticos, potencializando a investigação no processo de aprendizagem.

No que concerne à articulação entre a HM e as TD, do ponto de vista teórico, corresponde à uma temática que se tornou objeto de interesse por parte de alguns autores da área de EM (BORTOLI, 2025; SOUSA, 2023). Trata-se de uma tendência (em desenvolvimento) que se caracteriza pela elaboração de propostas didático-pedagógicas que apresentem problemas/episódios/temas históricos com apoio de recursos tecnológicos digitais, destacando as contribuições educacionais da HM e

das TD ao trabalhá-las como aliadas no processo de ensino e aprendizagem (SOUSA, 2020, 2023). “[O] cerne dessa aliança se firma para além das individualidades, atestadas importantes isoladamente, de cada tendência componente, mas se vale na forma e relevância de constituição da união proposta” (SOUSA, 2023, p. 4).

Acerca das contribuições a partir da articulação entre HM e TD, Bortoli (2025) concluiu:

[...] podemos entender que essas articulações podem ser facilitadoras da aprendizagem matemática, oportunizado [sic], inclusive, pela estética que proporcionou opções de visualização dos objetos, aumentando o interesse pelos objetos matemáticos que estavam sendo estudados. Ponderamos, ainda, que a exploração de problemas históricos, baseada no uso de tecnologias digitais é pedagogicamente potente, pois a capacidade das tecnologias digitais pode oferecer meios para que problemas matemáticos históricos sejam explorados e desdobrados de maneiras inovadoras, podendo ter, até mesmo, seus horizontes ampliados por elementos estéticos, como a possibilidade [sic] de identificar e de investigar elementos específicos sobre a linguagem/simbologia de problemas históricos, assim como tais pressupostos nos fazem refletir sobre o papel das tecnologias em oferecer possibilidades específicas de formas de investigação matemática e a constituição de maneiras alternativas de pensamento matemático (p. 16).

Dessa forma, ao trabalhar a HM com apoio de TD, o aluno não tem apenas contato com o contexto ao qual o conteúdo em estudo se originou e se desenvolveu, mas também pode explorá-lo de maneira dinâmica, ao investigar de modo mais aprofundado seus conceitos, definições, representações, simbologias. As TD, nesse sentido, não atuam somente como ferramentas de apoio, mas também como mediadoras que possibilitam novas formas de compreensão matemática, ampliando horizontes conceituais e favorecendo modos alternativos de pensar e produzir conhecimento matemático.

Além disso, sobre a abordagem histórica por TD, Mendes (2024) afirma que há:

[...] impactos de afetação cognitiva que a história como agente de cognição pode causar na forma de atividades práticas, ou seja, os modos como as dinâmicas cognitivas se organizam para a aprendizagem matemática quando os estudantes vivenciarem práticas experimentais e manipulativas, com uso de artefatos históricos ou protótipos desses artefatos, ou com a exploração de simulacros na forma de ideografias dinâmicas, que representem experiências matemáticas historicamente

escritas ou documentadas, situadas agora em ambientes virtuais por meio de softwares ou aplicativos computacionais (MENDES, 2024, p. 349).

Dessa forma, o autor defende que processos históricos sejam incluídos no ensino de Matemática, de modo a contribuírem para que as dinâmicas cognitivas dos alunos os direcionem para o processo de compreensão matemática. Essa inclusão se torna mais viável a partir da possibilidade de utilização de recursos digitais em sala de aula, em que o professor consegue, mais facilmente, inserir a HM em sua prática docente. Atualmente, por exemplo, é possível ter acesso *online* a acervos de museus ao redor do mundo, o que permite a visualização de materiais diversos e a ampliação do repertório histórico-cultural dos estudantes para além dos limites físicos da escola, enriquecendo o contexto de aprendizagem.

### 3

## Percursos Metodológicos

Neste capítulo, apresentam-se os percursos metodológicos adotados para o desenvolvimento da pesquisa, com o objetivo de explicitar as escolhas teóricas e técnicas que orientaram a construção do estudo. Para fins de organização, ele está estruturado em duas partes, que, em se tratando da pesquisa, abordam: i) a caracterização, na qual são explicitados os aspectos, tendo em vista a abordagem e o tipo de estudo realizado, além dos instrumentos de coleta de dados empregados e ii) o detalhamento, em que são descritos, sistematicamente, os procedimentos adotados em todas as etapas.

### 3.1

#### Caracterização da pesquisa

Quanto à abordagem metodológica, esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa, uma vez que se fundamenta na análise descritiva dos dados coletados, sem a preocupação com aspectos métricos, priorizando, portanto, a interpretação crítica dos fenômenos decorrentes do processo investigado (SILVEIRA, CÓRDOVA, 2009). Nesse aspecto, cabe salientiar que:

Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens. Na pesquisa qualitativa, o cientista é ao mesmo tempo o sujeito e o objeto de suas pesquisas. O desenvolvimento da pesquisa é imprevisível. O conhecimento do pesquisador é parcial e limitado. O objetivo da amostra é de produzir informações aprofundadas e ilustrativas: seja ela pequena ou grande, o que importa é que ela seja capaz de produzir novas informações (SILVEIRA, CÓRDOVA, 2009, p. 32).

Esta pesquisa qualitativa é do tipo intervenção pedagógica, que é definida por Damiani *et al.* (2013) como:

[...] uma pesquisa que envolve o **planejamento** e a **implementação** de interferências (mudanças, inovações pedagógicas) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior **avaliação** dos efeitos dessas interferências (p. 01, grifo nosso).

As intervenções pedagógicas são importantes no campo educacional e são regidas pelo paradigma qualitativo. Assim, corresponde a uma pesquisa em que não houve preocupação com o controle de variáveis externas que poderiam afetar os efeitos da intervenção, ou seja, não se buscou estabelecer relações de causa e efeito, fazer generalizações ou predições exatas a partir dos seus achados, mas sim, descrever detalhadamente os procedimentos realizados, avaliando-os e produzindo explicações plausíveis fundamentadas nos dados e em teorias pertinentes (DAMIANI *et al.*, 2013).

As intervenções são defendidas por Damiani *et al.* (2013) como pesquisa tendo em vista: i) o intuito de produzir mudanças; ii) a tentativa de resolução de um problema; iii) o caráter aplicado; iv) a necessidade de diálogo com um referencial teórico e v) a possibilidade de produzir conhecimento.

Para a coleta de dados, utilizaram-se a observação e um questionário, aplicados durante a etapa de implementação da intervenção. Ademais, foram consideradas as resoluções apresentadas pelos sujeitos participantes da pesquisa nas questões propostas em uma lista.

A escolha pelo uso de um questionário composto por perguntas abertas, fechadas e mistas se deu com o objetivo de levantar aspectos relevantes relativos à situação vivenciada pelos sujeitos participantes da pesquisa tais como opiniões, percepções, interesses, expectativas e sugestões (GERHARDT *et al.*, 2009). Além disso, cabe apontar que o referido instrumento de coleta de dados: i) possibilita atingir grande número de pessoas mais rapidamente; ii) permite o anonimato dos participantes, o que propicia mais uniformidade na avaliação; iii) apresenta custo relativamente baixo; iv) viabiliza que os participantes respondam em um momento mais favorável e v) minimiza os riscos de distorções, pela não influência do pesquisador (GERHARDT *et al.*, 2009).

Contudo, faz-se necessário frisar que não há garantia de que todas as perguntas de um questionário sejam respondidas satisfatoriamente, uma vez que o respondente pode não compreender claramente o que lhe é perguntado. Tendo isso em vista, as observações realizadas pelo pesquisador no momento da implementação também foram consideradas. Por conseguinte, foi necessário o uso dos sentidos em busca de coletar informações; isso porque a observação “[...] consiste em ver, ouvir e examinar os fatos, os fenômenos que se pretende investigar. A técnica da observação desempenha importante papel no contexto da descoberta e obriga o

investigador a ter um contato mais próximo com o objeto de estudo” (GERHARDT *et al.*, 2009, p. 74).

Por fim, considerou-se imprescindível a análise das resoluções apresentadas pelos estudantes nas questões propostas, com o intuito de compreender os procedimentos, técnicas, estratégias, dificuldades e raciocínios mobilizados. Tal análise mostra-se essencial, uma vez que possibilita identificar os avanços cognitivos potencialmente promovidos pela intervenção realizada.

## **3.2 Detalhamento da pesquisa**

Por se tratar de uma intervenção pedagógica, a pesquisa seguiu etapas bem definidas e sistematizadas, as quais envolveram o planejamento e a implementação de uma sequência didática, bem como a posterior avaliação de seus efeitos nos alunos participantes. Nas seções a seguir, descreve-se cada etapa percorrida.

### **3.2.1 Planejamento**

Nesta etapa, que diz respeito à fase inicial da pesquisa, realizou-se o estudo teórico mais aprofundado do assunto a ser abordado e a produção dos recursos educacionais a serem utilizados, que correspondem aos *applets* elaborados no GeoGebra com o objetivo de dinamizar a aula e auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, foi elaborada uma apresentação, a fim de facilitar a abordagem histórica inicial da aula, bem como uma lista de questões e um questionário, que se configuram instrumentos de coleta de dados utilizados na pesquisa.

#### **3.2.1.1 Elaboração dos *applets***

Tendo em vista que o método de Arquimedes para aproximação do perímetro da circunferência segue um processo sequencial e tem caráter geométrico, foi elaborado o *applet* GeoGebra denominado “Aproximação do comprimento da circunferência por polígonos regulares” (Figura 10) que visa à compreensão do referido método e ao estabelecimento de conjecturas a respeito do valor de  $\pi$ .

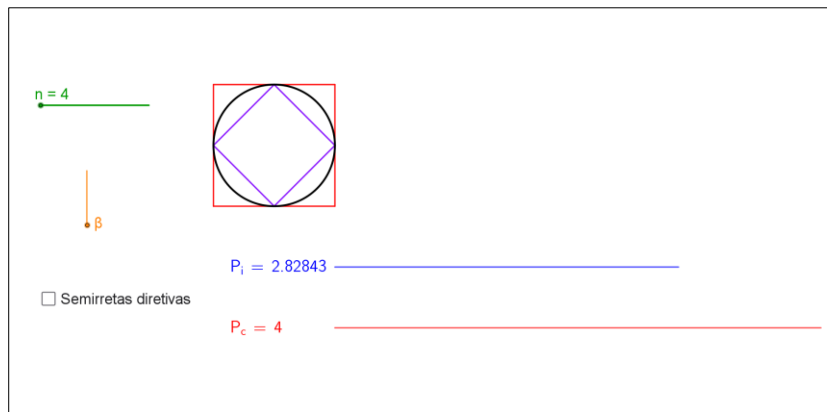


Figura 10 – Tela inicial do *applet* “Aproximação do comprimento da circunferência por polígonos regulares”. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/gkvgfsnt>.

Nesse *applet*, está representada uma circunferência de diâmetro unitário na cor preta e dois polígonos regulares, sendo um inscrito e outro circunscrito a ela, respectivamente nas cores azul e vermelha (de início, ambos possuem 4 lados). Logo abaixo, apresenta-se a medida do perímetro de cada um desses polígonos com sua referida representação linear. Há, ainda, dois controles deslizantes: o “n”, associado à quantidade de lados dos polígonos regulares, e o “β”, que possibilita a retificação da circunferência. A caixa de seleção “Semirretas diretivas”, neste texto, será explorada mais adiante.

Na figura 11, observa-se que ao aumentar a quantidade de lados dos polígonos regulares (ao modificar o valor do controle deslizante “n”) o perímetro do inscrito ( $P_i$ ) aumenta e o do circunscrito ( $P_c$ ) diminui. Em ambos os casos, o aluno pode ser levado a notar que, do ponto de vista geométrico, o formato dos polígonos se aproxima do da circunferência.

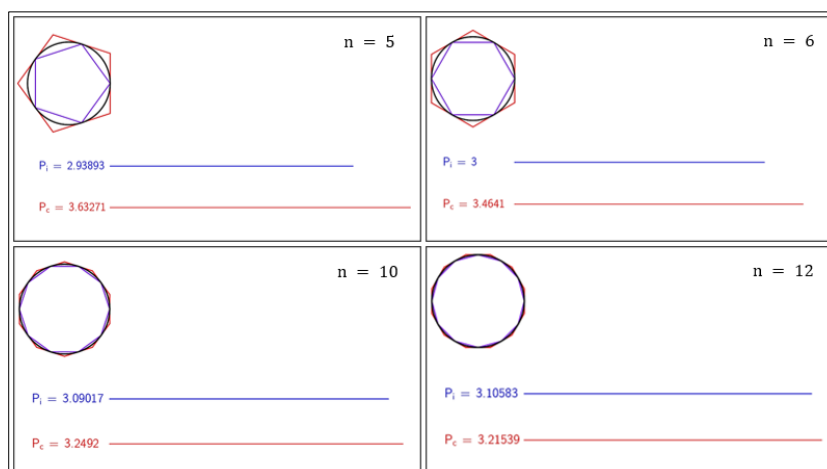


Figura 11 – Perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos de 5, 6, 10 e 12 lados.

Ao movimentar o controle deslizante “ $\beta$ ” até o final, observa-se na tela do *applet* a retificação completa da circunferência. Marcando a caixa de seleção “Semirretas diretivas”, é possível ver que, à medida que o número de lados dos polígonos aumenta, seus perímetros convergem para o comprimento da circunferência, que em relação ao polígono interno constitui um limite superior, enquanto o do polígono externo corresponde a um limite inferior. Na figura 12, exemplifica-se o uso desses recursos para polígonos de 12 lados.

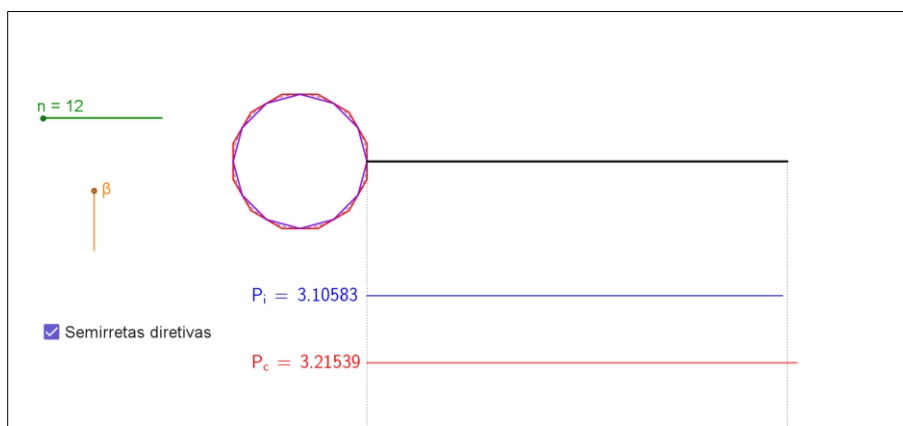


Figura 12 – Convergência envolvendo polígonos de 12 lados.

Com o objetivo de possibilitar que os alunos investiguem e compreendam melhor a relação entre o comprimento da circunferência e o valor da constante  $\pi$ , foi feita uma adaptação do *applet* “Retificação da circunferência” (Figura 13), que se encontrava disponível na seção Materiais do *site* do GeoGebra.



Figura 13 – Tela inicial do *applet* “Retificação da circunferência”. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/uqq8cbc>.

Mediante o uso do controle deslizante “ $d$ ” (vertical) é possível determinar o diâmetro da circunferência a ser analisada. Já com o controle deslizante “Retificar” (horizontal), faz-se a retificação da referida circunferência sobre a semirreta

graduada, a fim de verificar a medida do seu comprimento, cujo valor é exibido na tela ao final do processo. Na figura 14, a título de exemplo, é mostrada a retificação da circunferência de diâmetro 6.

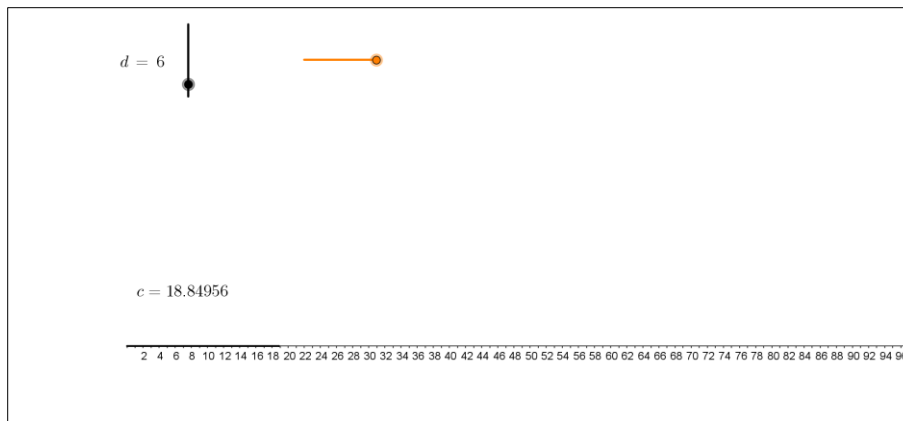


Figura 14 – Retificação da circunferência de diâmetro 6.

Com o objetivo de explorar o cálculo da área da circunferência, foi elaborado o *applet* “Área da circunferência” (Figura 15). Nele, leva-se em consideração que, a partir do círculo, é possível formar um triângulo retângulo no qual a medida de um cateto corresponde à do seu raio, enquanto a do outro, à do seu comprimento. Essa constatação foi feita por Arquimedes e apresentada como proposição em seu texto intitulado *KYKΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ* (Kyklou Métrēsis) – A Medida do Círculo, cuja tradução encontra-se disponível no trabalho de Grudtner, Bertato e D'Ottaviano (2021).

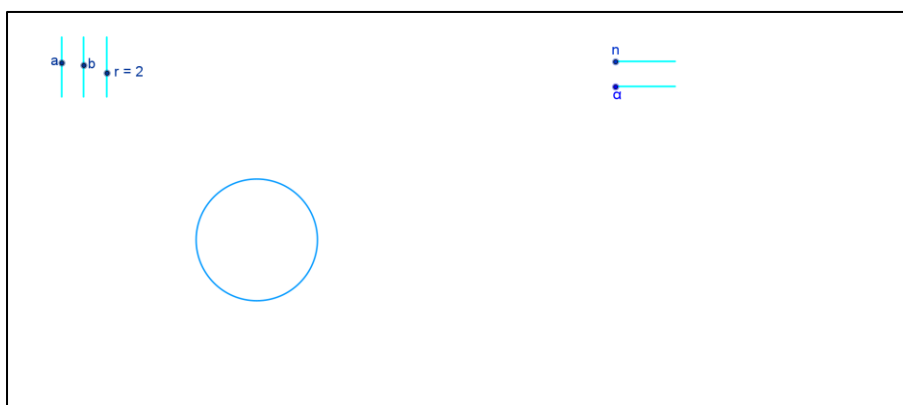


Figura 15 – Tela inicial do *applet* “Área da circunferência”. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/pmznbbgu>.

Os controles deslizantes “a” e “b” servem para alterar, respectivamente, a posição horizontal e vertical da circunferência na tela, enquanto “r” possibilita

trocar a medida do raio. Ao movimentar o controle “n”, formam-se circunferências internas à que se encontra inicialmente na tela, com o intuito de “preenchê-la”. Por meio de “ $\alpha$ ”, é possível retificar todas as circunferências que tenham sido representadas, de modo a permitir a formação de uma figura que se aproxima de uma região triangular limitada por um triângulo retângulo de catetos medindo  $r$  e  $2\pi r$  (Figura 16).

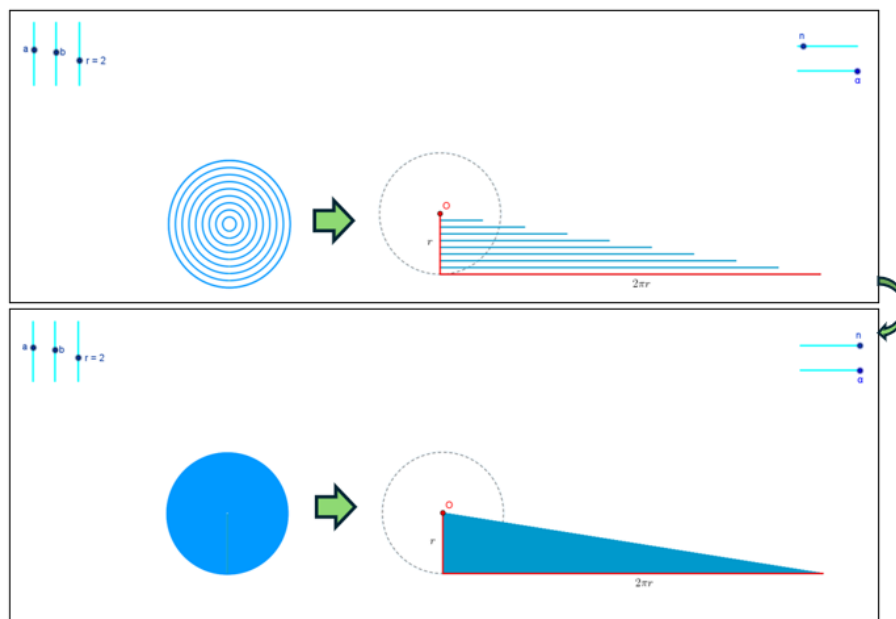


Figura 16 – Utilização do *applet* “Área da circunferência”.

### 3.2.1.2 Elaboração da apresentação

Com o objetivo de facilitar a abordagem do conteúdo em sua dimensão histórica, bem como de despertar a curiosidade dos alunos e envolvê-los no processo de aprendizagem por meio da exposição e análise de fatos e imagens, foi elaborada uma breve apresentação intitulada “Cálculo do comprimento e da área da circunferência: origens históricas” (APÊNDICE A). Por se tratar de uma abordagem da história antiga, foi pertinente primeiramente destacar, baseado em Roque e Carvalho (2012), que a escassez e condições de conservação mais desgastadas das fontes pode comprometer o estudo e a clara compreensão desse período. Em se tratando da circunferência, tendo em vista que os registros mais antigos envolvendo o cálculo de seu comprimento e de sua área diz respeito aos babilônios e egípcios, foi importante apresentar essas regiões no contexto geográfico, além da escrita

matemática utilizada por eles, no intuito de evidenciar que correspondiam a culturas distintas que desenvolveram “matemáticas” diferentes.

Em relação aos babilônios, na apresentação foi inserida uma imagem do Tablete YBC 7302, a fim de mostrar seu conteúdo aos alunos e destacar a forma com que a referida civilização realizava seus registros. Além disso, acrescentou-se uma explicação acerca da maneira com que eles costumavam calcular a área de uma circunferência.

No que diz respeito aos egípcios, adicionou-se uma imagem que contém parte do papiro de Ahmes, de maneira a possibilitar que os alunos pudessem vê-lo no momento da explicação do que se trata, além de visualizarem seu estado de deterioração. Ainda, nessa apresentação, incluiu-se a relação feita entre a área de um quadrado de lado 8 e uma circunferência de diâmetro 9, que se encontra presente no problema de número 50 do referido papiro.

### **3.2.1.3 Elaboração da lista de questões**

A lista de questões (APÊNDICE B) foi elaborada com o objetivo de avaliar a aprendizagem dos alunos em relação ao conteúdo abordado. Ela é composta por 8 questões (algumas adaptadas) de provas anteriores para ingresso ao Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense (IFF). A seleção dessas questões se deu tendo em vista o perfil da turma escolhida para implementação da sequência didática, que foi um 9º ano integral com ênfase na preparação para a realização desse processo seletivo.

### **3.2.1.4 Elaboração do questionário**

O questionário utilizado nesta pesquisa foi elaborado no Google Formulários, por se tratar de uma ferramenta eficiente e de fácil manuseio, que possibilita coletar de modo prático os dados e acessá-los de maneira organizada. As perguntas foram formuladas visando clareza e objetividade, buscando garantir a compreensão dos respondentes e a obtenção de informações pertinentes aos objetivos do estudo. O instrumento contemplou perguntas fechadas e abertas, para identificar o perfil dos participantes, a relação que já possuíam com o conteúdo trabalhado, além das

percepções que tiveram (no papel de aluno) relativas ao uso de *applets* e de abordagens históricas em aulas de Matemática.

### 3.2.2 Implementação

Ocorreu durante o mês de novembro de 2025 em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de uma rede municipal de ensino na qual estavam presentes 18 alunos em todos os três encontros ocorridos. No quadro 1, apresentam-se informações referentes a essa etapa.

Encontro	Data	Número de aulas (50 min cada)	Descrição
1º	12/11/2025	2	Apresentação do conteúdo e aplicação do questionário
2º	19/11/2025	2	Resolução da lista de questões
3º	26/11/2025	1	Retorno relativo às soluções apresentadas

Quadro 1 – Informações relativas à etapa de implementação.

Ao chegar à sala de aula no primeiro encontro, foi necessário organizar o espaço, com o objetivo de projetar a apresentação e posteriormente os *applets*, para, com isso, viabilizar que toda a turma enxergasse e acompanhasse as explicações. Importante comentar que a Unidade Escolar não dispunha de infraestrutura e de recursos didático-pedagógicos necessários para favorecer o trabalho docente e promover um ambiente mais propício à aprendizagem: as salas não possuíam acesso à internet; eram excessivamente iluminadas, sem qualquer tipo de bloqueio à luz solar que adentrava pelas janelas; e não havia projetor disponível, o que levou ao improviso com a utilização de um equipamento de uso pessoal (Figura 17).



Figura 17 – Aula realizada na etapa de implementação da pesquisa.

Apesar da difícil visualização da projeção, deu-se início à aula com a abordagem histórica do conteúdo a partir da apresentação dos *slides* desenvolvidos com essa finalidade. Os alunos se mostraram muito atentos e participativos e foi um momento muito produtivo e interessante, no qual eles puderam compartilhar seus conhecimentos históricos, sobretudo os adquiridos no sexto ano, quando estudaram sobre diferentes sistemas de numeração. Importante destacar que a grande maioria desconhecia a relevância histórica dos babilônios para a Matemática. Alguns alunos mencionaram que haviam estudado um pouco sobre as contribuições dos egípcios e que foram marcados pelo estudo do sistema de numeração romano.

Sobre os babilônios, foi falado acerca da utilização de tabletes de argila e da escrita cuneiforme em seus registros. Nesse momento, apresentou-se o tablete YBC 7302 e explicaram-se os registros que nele constam. Os alunos se mostraram impressionados e alguns questionaram como que os babilônios conseguiam calcular um valor tão próximo para a área da circunferência a partir de um método que tanto difere do utilizado na atualidade. Diante disso, foi necessário ressaltar mais uma vez acerca da escassez de fontes que possibilitem compreender melhor os procedimentos matemáticos adotados por civilizações mais antigas.

A respeito dos egípcios, os alunos ficaram intrigados com o problema de nº 50 presente no papiro de Ahmes. Nesse momento uma aluna indagou: “Mas tem a mesma área?” e um outro aluno logo respondeu que não, pois ele já havia feito os cálculos e os valores deram diferentes. Importante notar que esse aluno demonstrou que já sabia calcular área de circunferência e ele questionou o porquê de os egípcios fazerem tal associação entre as áreas das duas figuras. Nesse momento, houve a

necessidade de frisar o período em questão e de exaltar que mesmo naquela época, as civilizações apresentadas já viam a necessidade de calcular a área da circunferência e que conseguiram isso com certa margem de erro.

Dando continuidade à aula, ressaltou-se que foram necessários vários séculos e que importantes matemáticos viveram e morreram até que Arquimedes, que viveu no século III a.E.C., conseguiu desenvolver um método capaz de proporcionar um valor significativamente próximo para o cálculo da área da circunferência. Dito isso, apresentou-se o primeiro *applet* “Aproximação do comprimento da circunferência por polígonos regulares”.

Primeiramente, foi explicado o objetivo do *applet* de calcular o valor do comprimento de uma circunferência de diâmetro unitário utilizando polígonos inscritos e circunscritos a ela. Ao serem perguntados sobre o que acontecia à medida que se aumentava a quantidade de lados dos polígonos, uma aluna logo respondeu que “Eles estavam ficando próximos do formato circular.”. A partir disso, a turma foi induzida a analisar os valores dos perímetros desses polígonos e, após algum tempo, um aluno disse que “Estavam ficando próximos de  $\pi$ .”. Com isso, frisou-se para todos os presentes que os perímetros dos polígonos em questão convergem a um mesmo valor (o do inscrito de maneira crescente e o circunscrito, decrescente), o que levou à conclusão de que aumentando-se infinitamente o número de lados dos polígonos, o perímetro de ambos se aproxima do comprimento da circunferência de diâmetro unitário, cujo valor é constante e, atualmente, denotado pela letra grega  $\pi$ .

Sobre essa constante, aproveitou-se para falar que se trata de um número irracional e foi apresentado um novo recorde a seu respeito presente no *Guinness World Records* disponível em: <https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/66179-most-accurate-value-of-pi>. Trata-se das trezentas trilhões de casas decimais de  $\pi$  descobertas em 02 de abril de 2025 pelo Linus Media Group (Canadá) e pela KIOXIA (EUA) cujo trabalho levou 226 dias para ser concluído. Os alunos ficaram fascinados e empolgados com esse fato, inclusive alguns comentaram que iriam desenvolver um supercomputador capaz de superar o referido recorde.

Prosseguindo com a aula, um aluno foi convidado a ir ao quadro para fazer alguns registros. Nesse momento, utilizou-se o *applet* “Retificação da circunferência” para representar diferentes circunferências de diferentes diâmetros. Após serem expressos no quadro alguns comprimentos a partir de diâmetros diversos, os alunos conseguiram observar que havia uma relação de proporcionalidade entre essas

grandezas, cuja constante de proporcionalidade é o próprio  $\pi$ . Com isso, eles foram capazes de, coletivamente, concluir que o comprimento da circunferência é dado pelo produto de  $\pi$  pelo diâmetro dela. Nesse momento, um aluno falou: “Ué, mas o comprimento não é  $2\pi r$ ?” e ele foi levado a observar que bastava considerar que o diâmetro de uma circunferência é igual ao dobro do raio.

Após isso, foi mencionado aos alunos que Arquimedes observou que a área de uma circunferência é equivalente à de um triângulo retângulo cujos catetos correspondem ao raio e ao comprimento dela. Eles ficaram intrigados e muitos questionaram essa relação. Nesse momento, utilizou-se o *applet* “Área da circunferência”, para mostrar o processo que justifica tal equivalência. Os alunos ficaram impressionados e, mediante o cálculo da área de um triângulo retângulo, conseguiram concluir que a área de uma circunferência é dada pelo produto de  $\pi$  pelo quadrado de seu raio.

Finalizada a etapa de abordagem do conteúdo, os alunos foram convidados a responderem ao questionário da pesquisa. Por conta dos problemas estruturais já mencionados, houve a necessidade de compartilhar dados de internet do professor para possibilitar o acesso ao formulário via *QR code* usando celulares dos próprios alunos. Como nem todos da turma possuíam celular, foi necessário que algum colega que tinha e que já tivesse finalizado emprestasse aos que não tinham, o que acabou tomando um pouco mais de tempo para a conclusão do preenchimento.

O segundo encontro foi destinado à resolução da lista de questões. Tratou-se de um momento muito produtivo, no qual os alunos se mostraram muito empenhados, motivados e dispostos a cumprir a tarefa que lhes foi proposta.

Nesse momento, salientou-se acerca da importância de todos tentarem fazer, a partir do que foi abordado no encontro da semana anterior, cada uma das questões propostas e se utilizarem de estratégias próprias para chegarem a uma resposta. Foi notória a dedicação de todos, além do trabalho colaborativo que foram desenvolvendo ao longo da aula. Em alguns momentos, houve a necessidade da intervenção do professor, para esclarecer eventuais dúvidas que porventura surgiam, sobretudo em relação à interpretação dos enunciados. Porém, com relação ao conteúdo trabalhado, enquanto observava a turma trabalhando e ao fazer as mediações individuais ou coletivas, já era possível vislumbrar uma boa aceitação e compreensão do assunto estudado.

O terceiro encontro foi destinado à análise e comentários junto à turma acerca do desempenho geral nas questões. Conforme apresentado na próxima seção, algumas poucas questões exigiram maior tempo e intervenções do professor, pois não foram muito bem compreendidas pelos alunos.

### 3.2.3 Avaliação

Nesta seção, discorre-se acerca da etapa de avaliação, na qual foi feita a análise das soluções apresentadas pelos alunos em cada questão da lista e das respostas dadas no questionário. Objetiva-se, com isso, interpretar os dados coletados na pesquisa, de modo alinhado às teorias pertinentes, para se chegar aos resultados pretendidos.

#### 3.2.3.1 Lista de questões

Na análise das questões, foi realizada uma abordagem interpretativa, à luz dos objetivos da pesquisa e do referencial teórico adotado, de tudo o que os alunos produziram para se chegar a uma resposta. Buscou-se, nesse processo, identificar indícios de compreensão conceitual, utilização adequada de argumentos matemáticos e evidências de superação de práticas mecanizadas. A seguir, apresenta-se o enunciado de cada questão e comenta-se acerca do desempenho e dos procedimentos adotados pelos alunos para resolvê-la.

<i>Primeira questão (IFF, 2011)</i>	
<p>Na figura abaixo, cada arco pertence a uma circunferência de raio de 5 cm. O perímetro da figura sombreada no interior do quadrado é, em cm:</p> <p>a) <math>5\pi</math>  b) <math>10\pi</math>  c) <math>20\pi</math>  d) <math>25\pi</math>  e) <math>30\pi</math></p>	

Foi resolvida corretamente por todos, sem grandes dificuldades. Nela, houve dois tipos de soluções diferentes: enquanto alguns conseguiram observar que o comprimento da figura em questão é equivalente ao de uma circunferência de raio 5 cm (Figura 18a), outros calcularam o comprimento de um quarto de circunferência e multiplicaram o resultado obtido por quatro (Figura 18b). Em ambos os casos, os alunos demonstraram compreensão do cálculo do comprimento de circunferência, inclusive em problemas que tratam de suas partes.

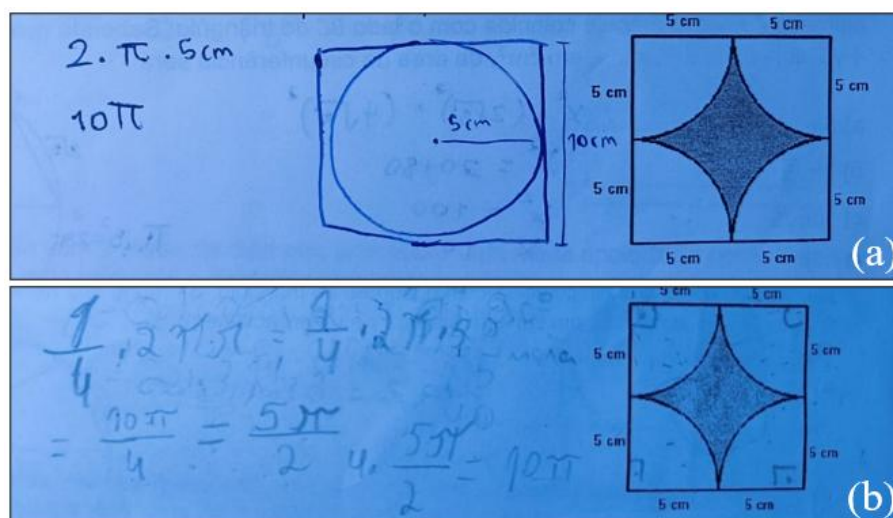
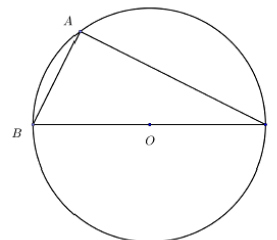


Figura 18 – Exemplos de soluções apresentadas na primeira questão.

### Segunda questão (IFF, 2015)

Na figura a seguir, temos um triângulo inscrito em uma circunferência de modo que o diâmetro da circunferência coincida com o lado  $\overline{BC}$  do triângulo. Sabendo que  $AB = 2\sqrt{5}$  cm e  $AC = 4\sqrt{5}$  cm, então, a medida, em  $\text{cm}^2$ , da área da circunferência será:

- $5\pi$
- $5\pi\sqrt{5}$
- $10\pi\sqrt{5}$
- $25\pi$
- $50\pi$



Durante a implementação da lista, foi necessário explicar à turma que o ângulo  $\hat{A}$  é reto. Como não houve essa especificação na questão, os alunos apresentaram certa dificuldade para iniciá-la, o que demonstra certa falta de conhecimentos

relativos a conceitos geométricos. Dito isso, todos conseguiram perceber a necessidade do Teorema de Pitágoras para determinar o valor do diâmetro BC e concluíram qual a medida do raio. Por fim, de maneira correta, a turma inteira conseguiu chegar ao valor solicitado (Figura 19) e apresentou domínio para o cálculo de área de circunferência em um problema que não forneceu explicitamente o valor do raio.

Figura 19 – Exemplo de solução apresentada na segunda questão.

**Terceira questão (IFF, 2016)**

Pedro possui um terreno murado retangular de 8 metros de largura por 16 metros de comprimento conforme a figura abaixo.

Para proteger sua propriedade, ele prende um cachorro em cada um dos pontos A, B, C, D, E e F utilizando uma corrente com 4 metros de comprimento, fixada ao solo, para cada animal, como indicado na figura. Considerando que os cachorros consigam andar livremente, sendo apenas limitados pelo comprimento da corrente e pelos muros do terreno, qual é a área do terreno não alcançada pelos cachorros? (Considere  $\pi = 3$ ).

a)  $16 \text{ m}^2$       b)  $32 \text{ m}^2$       c)  $56 \text{ m}^2$       d)  $80 \text{ m}^2$       e)  $104 \text{ m}^2$

Não se observaram grandes dificuldades por parte dos alunos e essa questão foi resolvida corretamente por todos de duas maneiras diferentes: enquanto alguns observaram que a área em questão é equivalente à de duas circunferências de quatro metros de raio (Figura 20a), outros foram encontrando a área de cada pedaço, ou seja, a dos dois semicírculos e a dos quatro setores que correspondem a um quarto de círculo, para somar no final (Figura 20b). Nos dois casos, pode-se constatar que os alunos entenderam com clareza o conceito e o cálculo da área de circunferência, inclusive em problemas que tratam de suas partes.

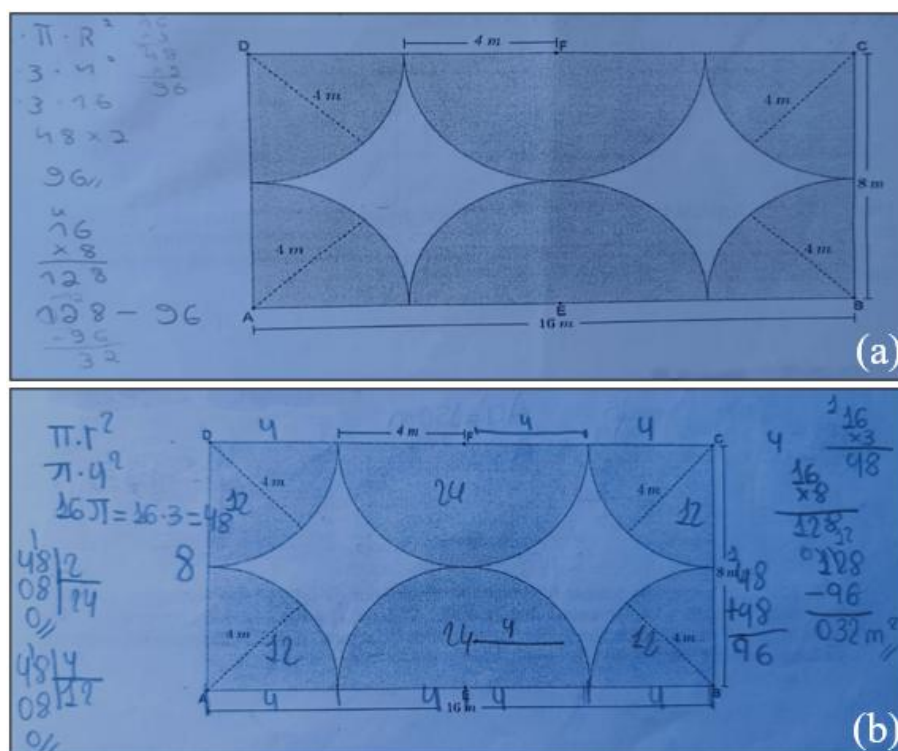
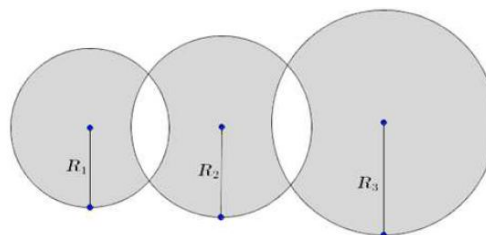


Figura 20 – Exemplos de soluções apresentadas na terceira questão.

#### Quarta questão (IFF, 2016)

Determine o perímetro da região hachurada sabendo que  $R_1 + R_2 + R_3 = 12$ .

- a)  $12\pi$
- b)  $18\pi$
- c)  $24\pi$
- d)  $32\pi$
- e)  $36\pi$



Alguns alunos apresentaram dificuldade para iniciar a questão. Nesse momento, foi necessária a intervenção do professor que os orientou a contornar a região cujo perímetro pretendiam calcular. Com isso, eles conseguiram visualizar que a referida medida corresponde à soma dos perímetros das três circunferências dadas e todos chegaram facilmente ao resultado correto (Figura 21), o que evidencia que compreenderam o conceito e o cálculo de comprimento de circunferência a partir do seu raio.

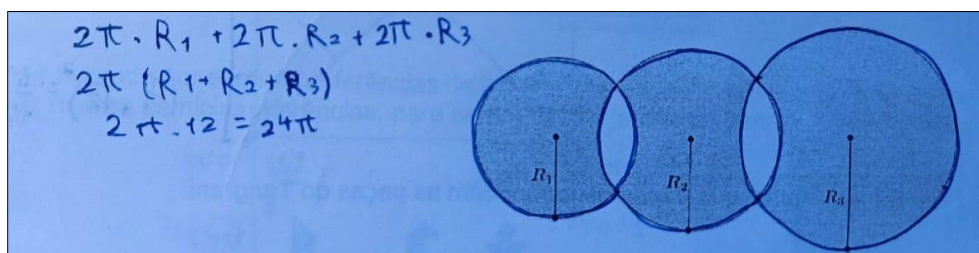


Figura 21 – Exemplo de solução apresentada na quarta questão.

#### Quinta questão (IFF, 2017)

Uma roda com 1 metro de diâmetro está sobre uma mesa apoiada no ponto A. Uma criança a empurrou e a roda rolou até o ponto B como mostra a figura.



Sabendo-se que a distância entre o ponto A e B é de 4710 centímetros, o número de voltas completas que a roda deu para rolar do ponto A até o ponto B foi de (Utilize  $\pi = 3,14$ )

- a) 15      b) 16      c) 17      d) 18      e) 19

Todos conseguiram sem grandes dificuldades chegar à conclusão que se trata de um problema de comprimento de circunferência e apresentaram o resultado correto. Alguns alunos realizaram mais cálculos que o necessário para chegar ao valor do comprimento da roda, isso porque usaram a fórmula  $2\pi r$  e fizeram a multiplicação na ordem, ou seja, primeiro calculou-se o dobro de  $\pi$  e depois multiplicou-se

esse valor por 50 (Figura 22). Por mais que esteja correto, ao comentar as questões com a turma no encontro de retorno, foi necessário enfatizar que esse caminho, por ser mais trabalhoso, pode levar mais facilmente ao erro. Nesse momento, destacou-se que considerar o comprimento da circunferência como sendo o produto de seu diâmetro por  $\pi$ , tal qual apresentado em aula e seguido por alguns alunos nessa questão, é mais vantajoso.

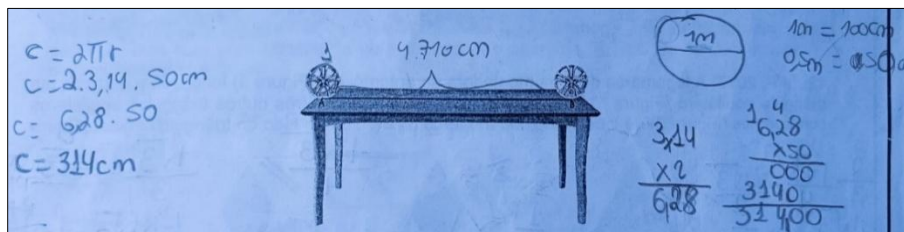
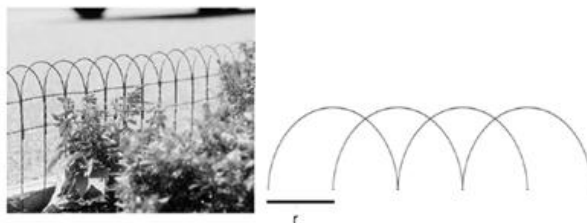


Figura 22 – Exemplo de solução apresentada na quinta questão.

### Sexta questão (IFF, 2018, adaptada)

O senhor Adalto, responsável pela conservação da praça localizada em frente à sua casa, resolveu fazer um jardim retangular com 6 m de comprimento e 2 m de largura. Para proteger o jardim, ele resolveu cercá-lo utilizando uma cerca, conforme a figura abaixo:



Fonte da imagem: <<https://www.elo7.com.br/10-m-de-cerca-para-jardim-em-arame/dp/9EAF81#sum=0&smsm=0&dl=d&fp=0&rps=0&cpr=0&ucrq=1&uss=1&sac=0&upo=0&sr=0&uso=m&sd r=0>>. Acesso em: 24 set 2017.

O topo da cerca é formado por semicircunferências de 0,5 m de raio. Qual o comprimento, em metros, de arame utilizado, apenas nessas semicircunferências, para cercar todo o jardim do senhor Adalto? (Utilize  $\pi = 3,14$ )

- a) 21,98      b) 25,12      c) 43,96      d) 50,24      e) 87,92

Trata-se de uma questão cuja interpretação do enunciado gerou grandes dificuldades, o que levou ao erro de todos. Alguns, por exemplo, consideraram apenas

as semicircunferências que, a partir da primeira, se unem por suas extremidades para formarem a cerca (Figura 23) e, com isso, cometeram o equívoco de desconsiderarem as outras 14 semicircunferências presentes na composição da estrutura.

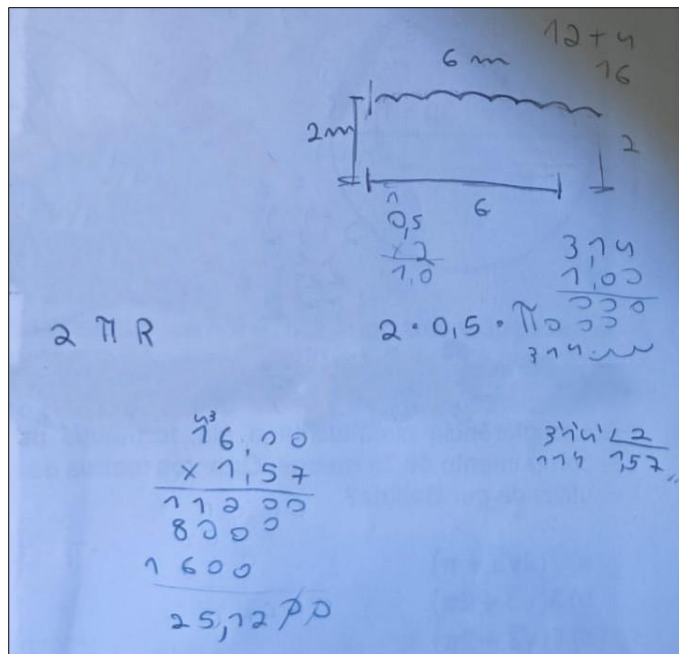
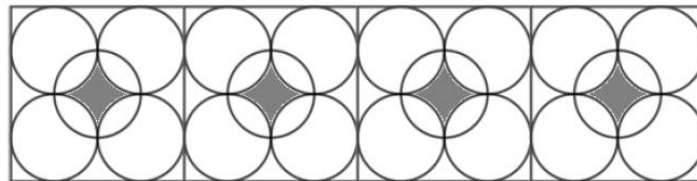


Figura 23 – Exemplo de solução apresentada na sexta questão.

De modo geral, a análise das soluções da sexta questão evidenciou problemas na contagem das semicircunferências que formam o topo da cerca. Cabe destacar que essa dificuldade não está diretamente relacionada aos conceitos matemáticos que constituem o foco desta pesquisa e que todos conseguiram assimilar que precisavam utilizar o cálculo do comprimento da semicircunferência para resolverem a questão. No encontro de retorno, foi realizada uma explicação detalhada do enunciado e, a partir disso, os alunos demonstraram ter compreendido o erro que cometeram.

#### ***Sétima questão (IFF, 2019)***

João procurou um serralheiro para construção do portão da sua residência. Ao mostrar o projeto do portão, João pediu ao serralheiro para que colocasse o detalhe abaixo centralizado no portão.



A figura a seguir ilustra parte do detalhe mostrado por João. Um quadrado de lado 12 cm com cinco circunferências dentro dele, quatro delas tangentes entre si e, também, tangentes aos lados do quadrado. Para dar o orçamento, o serralheiro precisa calcular a área da figura hachurada no centro da peça, pois esta será construída com a chapa de alumínio. A área da figura hachurada, em centímetros quadrados, é:

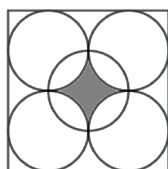


Figura hachurada

- a)  $9(4 - \pi)$     b)  $12(4 - \pi)$     c)  $15(4 - \pi)$     d)  $18(4 - \pi)$     e)  $21(4 - \pi)$

Foi resolvida corretamente por metade da turma. Todos os que erraram consideraram que a área da região é dada pela diferença entre a do quadrado de lado 12 cm e de quatro circunferências de raio 3 cm. Os que conseguiram apresentar a solução correta observaram que tal diferença não correspondia à área da região hachurada, mas sim ao seu quádruplo, conforme é possível observar na figura 24, em que a aluna fez divisões no quadrado maior em quatro quadrados menores. Com isso, ela conseguiu observar que, para determinar a área solicitada, havia a necessidade de tomar a quarta parte da medida da área que corresponde à diferença entre a área do quadrado e das quatro circunferências que tangenciam seus lados internamente.

$$\frac{144 - 36\pi}{4} = 36 - 9\pi$$

$$9(4 - \pi)$$

$$9 \cdot 4 = 36$$

$$a_{\square} = 12 \cdot 12 = 144$$

$$a = \pi \cdot r^2$$

$$a = \pi \cdot 3^2$$

$$a = \pi \cdot 9$$

$$a = 9\pi$$

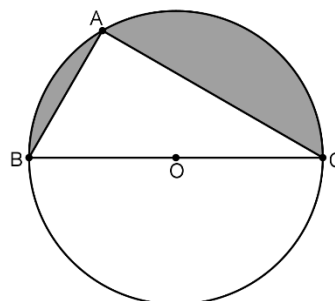
Figura 24 – Exemplo de solução apresentada na sétima questão.

Em relação aos alunos que erraram a questão, é válido comentar que demonstraram compreensão dos conceitos abordados ao calcularem corretamente a área de uma circunferência de raio 3 cm. Além disso, observaram a necessidade e apresentaram adequadamente a subtração na resolução do problema. Contudo, não perceberam que somente esse procedimento não conduzia à determinação da área da região hachurada.

**Oitava questão (IFF, 2024, adaptada)**

Na figura a seguir, tem-se um triângulo inscrito numa circunferência de centro O. Considerando que  $AB = 2$  cm e  $AC = 2\sqrt{3}$  cm, podemos afirmar que a área sombreada, em  $\text{cm}^2$ , é de:

- a)  $2(\pi - \sqrt{3})$
- b)  $2(2\pi - \sqrt{3})$
- c)  $2(8\pi - \sqrt{3})$
- d)  $2(\pi - 2\sqrt{3})$
- e)  $4(\pi - \sqrt{3})$



Foi resolvida corretamente por 10 alunos. Dos demais, 5 resolveram de maneira errada e 3 entregaram em branco. Cabe salientar que foi a única questão da lista entregue sem solução por alguns, talvez por falta de tempo ou por cansaço. Dos que resolveram corretamente, todos fizeram da mesma forma (Figura 25). Já os que erraram, encontraram o dobro da resposta correta, pois não se atentaram à necessidade de calcular o valor da área da semicircunferência para chegar ao valor correto da questão. Com isso, encontraram equivocadamente a área do triângulo ABC.

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 2^2 + (2\sqrt{3})^2 \\
 x^2 &= 4 + 12 \\
 x^2 &= 16 \\
 x &= \sqrt{16} \\
 x &= 4 //
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \pi \cdot 2^2 &= 4\pi \\
 \frac{4\pi}{2} &= 2\pi \quad A_{sc} = \frac{\pi r^2}{2} \\
 2\pi - 2\sqrt{3} \\
 2(\pi - \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

Figura 25 – Exemplo de solução apresentada na oitava questão.

De modo geral, os alunos apresentaram bom desempenho na resolução das questões propostas, conforme resumido no gráfico 1. Com isso, é possível conjecturar que a abordagem didático-pedagógica que explorou aspectos histórico-epistemológicos do cálculo de comprimento e área de uma circunferência a partir de recursos digitais apresentou contribuições significativas no processo de compreensão matemática, tal qual sinalizado no referencial teórico adotado na pesquisa.

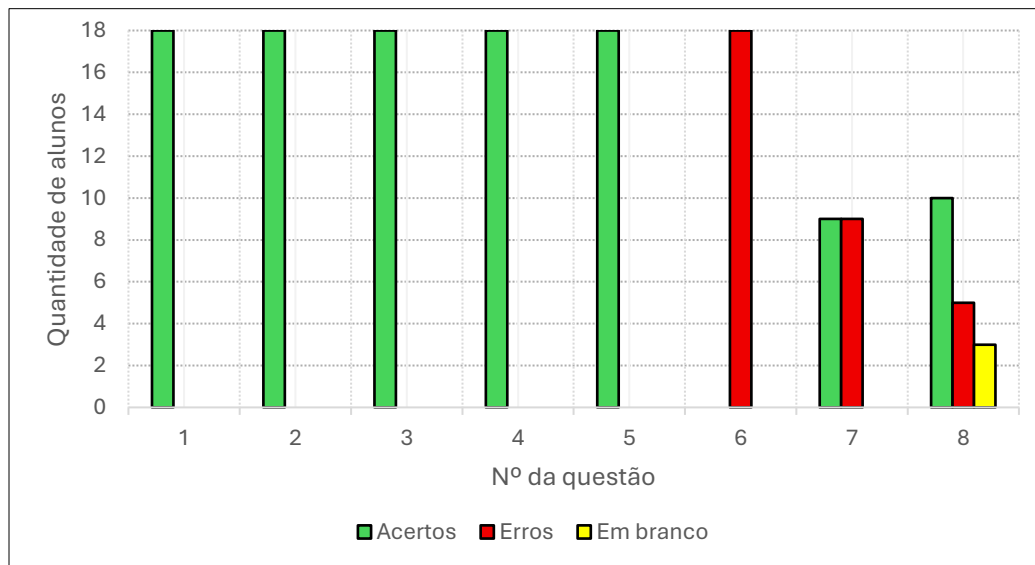


Gráfico 1 – Desempenho dos estudantes na atividade proposta.

A análise das soluções indicou como principal dificuldade a interpretação dos enunciados, o que evidencia uma lacuna no ensino de Matemática na Educação Básica, historicamente marcado pelo uso excessivo de fórmulas e algoritmos dissociados de problemas contextualizados. As dúvidas pontuais que surgiram durante a realização da lista foram esclarecidas e, a partir disso, os alunos conseguiram avançar na atividade, utilizando estratégias coerentes e demonstrando organização do raciocínio matemático, o que indica compreensão satisfatória dos conteúdos trabalhados.

É importante destacar que, na condição de professor regente da turma, foi possível evidenciar avanços significativos por parte de todos os alunos. O trabalho com a resolução de listas de exercícios, contemplando os conteúdos abordados em sala de aula, vinha sendo desenvolvido desde o início do ano letivo. No entanto, na lista utilizada nesta pesquisa, os estudantes demonstraram maior engajamento e disposição para resolvê-la integralmente. Tal fato pode estar associado à prática e ao

hábito adquiridos ao longo do ano, uma vez que a resolução de questões de provas anteriores do IFF integrou o processo de preparação da turma durante todo o período letivo. Ainda assim, ressalta-se que, em nenhuma outra lista — inclusive na trabalhada anteriormente — foi observado um nível de participação e desempenho tão satisfatório.

Dessa forma, é razoável ponderar, tal qual Bortoli (2025), que a abordagem adotada se mostrou pedagogicamente potente ao produzir efeitos positivos por favorecer a compreensão dos conteúdos trabalhados, de modo a oportunizar a satisfatória resolução de diferentes problemas que exploraram o assunto estudado.

### **3.2.3.2 Questionário**

Dos 18 participantes da pesquisa, 8 preferiram não se identificar. Oportunizar o anonimato aos alunos no momento de responderem ao questionário foi de grande importância, para possibilitar que ficassem mais à vontade e conseguissem expor com melhor qualidade suas percepções acerca da aula que lhes foi dada.

No que diz respeito à reprovação em alguma disciplina enquanto aluno do Ensino Fundamental, apenas três responderam de modo afirmativo, sendo dois deles na disciplina de Matemática e um em Língua Portuguesa.

Já quando perguntados sobre o nível de dificuldade em Matemática, apenas quatro alunos informaram que não possuíam, enquanto os demais julgaram que têm algum grau de dificuldade na referida disciplina. Os obstáculos que a maioria dos alunos indicou ter ao se deparar com a disciplina de Matemática vão ao encontro do problema que se constata em nível nacional. Por exemplo, conforme apresentado pela Diretoria de Avaliação da Educação Básica, mediante notas dos resultados obtidos no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa)<sup>6</sup> de 2022, no

---

<sup>6</sup> “O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) avalia o conhecimento e as habilidades dos estudantes na faixa etária dos 15 anos em matemática, leitura e ciências. Os testes exploram a capacidade dos estudantes de resolver problemas complexos, pensar criticamente e se comunicar de forma eficaz. O Pisa apresenta uma noção de como os sistemas educacionais preparam os estudantes para os desafios da vida real e para o sucesso futuro. O Brasil participou pela primeira vez do Pisa em 2000. Ao comparar os resultados

Brasil apenas 27% dos estudantes conseguiram atingir pelo menos o Nível 2 de proficiência em Matemática, o que é significativamente inferior à média dos países membros da OCDE, que é de 69%. Isso quer dizer que esses estudantes só conseguem, no mínimo, interpretar e reconhecer, sem instruções diretas, como uma situação simples pode ser representada matematicamente (por exemplo, comparar a distância total de duas rotas alternativas ou converter preços em uma moeda diferente). Já os que atingiram os níveis 5 e 6, entre os estudantes brasileiros, representam somente cerca de 1%.

Sobre os conteúdos abordados na aula, 50% dos alunos informaram que não haviam estudado em anos anteriores. Dos que já haviam visto, três alunos sinalizaram que foi por meio de estudos individuais, em ambientes fora da escola. Vale aqui destacar que, na BNCC, a *medida do comprimento da circunferência* já aparece no 7º ano do Ensino Fundamental como objeto de conhecimento, cuja habilidade a ser desenvolvida é a EF07MA33 que corresponde ao estabelecimento do *número  $\pi$  como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica*. Já no 8º ano, no estudo de áreas de figuras planas, na Base também consta a *área do círculo e comprimento de sua circunferência* como objeto de conhecimento que deve ser trabalhado, em que a habilidade EF08MA19 é a de *resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos*. Esses resultados mostram certa negligência no que diz respeito à abordagem dos referidos conteúdos na Educação Básica.

Dos alunos que já haviam tido contato prévio com o conteúdo, apenas um sinalizou possuir bastante domínio e conhecer/compreender satisfatoriamente todos os conceitos que foram apresentados. Quanto aos demais, dois indicaram que não os compreendiam muito bem e, o restante, não se lembrava. Esse cenário evidencia fragilidades no processo de ensino e aprendizagem do comprimento e da área da circunferência, fortemente marcado pela exposição e memorização de fórmulas, o que reforça a necessidade de reflexões sobre práticas pedagógicas que busquem a

---

internacionais, os formuladores de políticas e educadores do Brasil podem aprender com as políticas e práticas de outros países” (BRASIL, 2022, p. 06).

superação de obstáculos recorrentes no estudo desses tópicos matemáticos. Por exemplo, a natureza irracional de  $\pi$  e seu entendimento como uma razão constante são conceitos abstratos que precisam ser cuidadosamente apresentados para os alunos, a fim de não tornar o aprendizado mecânico, sem sentido e superficial.

Em relação ao uso dos *applets*, os participantes avaliaram, em uma escala de 1 a 5, o grau de importância desse recurso para a compreensão dos conceitos abordados, sendo a média das respostas igual a 4,5. Esse resultado demonstra uma boa receptividade por parte deles. Ainda, ao serem questionados se em estudos anteriores houve a utilização do referido recurso, apenas um participante respondeu de modo afirmativo, porém ele apontou que os *applets* utilizados possuíam má qualidade. Apresentam-se, a seguir, alguns comentários dos participantes em relação aos *applets* elaborados no âmbito desta pesquisa.

- *Os Applets auxiliam na aprendizagem.*
- *Quando você compreende o porquê aquela fórmula é assim, tudo fica mais claro.*
- *Com eles a compreensão fica muito mais clara e objetiva!*
- *Eu me interessei mais.*
- *Foi mais prática no aprendizado.*

A partir desses comentários, evidencia-se que os *applets* cumpriram seu papel de: i) auxiliar no processo de ensino e aprendizagem; ii) superar a abordagem mecanizada do assunto; iii) tornar o aprendizado mais claro, prático e dinâmico e iv) despertar o interesse dos alunos.

Em relação à abordagem histórica do assunto, também considerando uma escala de 1 a 5, os alunos avaliaram o quanto as informações apresentadas na aula foram importantes para eles, sendo 4,3 a média das respostas registradas. Conforme exemplificado a seguir, a partir de dois comentários dados, houve clareza na explicação e a abordagem despertou o interesse dos discentes pelo assunto tratado.

- *É interessante, explica as origens e conceitos antigos. Desperta o interesse.*
- *História muito bem feita, explicada de forma clara e interessante... Dá pra ver o cuidado e o propósito em cada parte... Excelente trabalho.*

Ademais, os participantes foram questionados acerca da presença de uma contextualização histórica em abordagens anteriores sobre o cálculo do

comprimento e da área da circunferência, bem como sobre as principais diferenças por eles percebidas. De forma unânime, relataram que tal contextualização não havia sido realizada. Alguns, inclusive, destacaram — conforme exemplificado a seguir — a relevância dessa abordagem e o interesse que lhes foi despertado.

- *É sempre interessante aprender as origens.*
- *Não. Com essas informações, o conteúdo fica mais interessante, fazendo os alunos se interessarem mais!*
- *Foi mais fácil e prático o aprendizado.*
- *É diferente, porque ficou mais interessante por ditar sobre a matemática nos anos antigos.*

Assim sendo, é possível observar que a abordagem histórica contribuiu significativamente para o processo de ensino e aprendizagem, ao contextualizar os conceitos matemáticos a partir de suas origens e de seu desenvolvimento dinâmico ao longo do tempo (ARAMAN, 2011). A apresentação clara e cuidadosamente estruturada contribuiu para tornar o conteúdo mais interessante e acessível, despertando o engajamento dos alunos, além de instigá-los, conduzi-los e aproximá-los do acervo histórico-cultural de ‘anos antigos’ em sua complexidade, considerando os fatores que podem ter influenciado na construção do conhecimento matemático (BORTOLI, 2025; MENDES, CHAQUIAM, 2016).

Por fim, os participantes fizeram a análise geral da aula e todos responderam de modo afirmativo ao serem perguntados se foi interessante a forma com que a aula ocorreu. Além disso, ao avaliarem a compreensão dos conceitos que foram apresentados, os alunos apontaram entendimento claro e satisfatório do assunto, conforme destacado em alguns comentários a seguir:

- *Muito boa, conseguir entender, mas algumas coisas n consigo por em prática.*
- *Tive uma ótima compreensão sobre os conceitos, os conceitos foram muito bem apresentados e explicados.*
- *Consegui entender todos os conceitos*
- *Melhorou muito*
- *Um tema complicado porém a explicação do professor foi objetiva e interessante*
- *Eu achei bem, a explicação foi ótima e bem entretido.*

Mediante a análise dos comentários apresentados, observa-se que os alunos tiveram uma percepção e aceitação bastante positivas da aula, ao destacarem uma

boa compreensão dos conceitos trabalhados, além da clareza, da objetividade e do caráter interessante da explicação do professor, mesmo diante de um tema considerado complexo. A maioria afirmou que conseguiu entender os conceitos apresentados, em que houve, inclusive, melhoras em relação ao conhecimento prévio do assunto. Esses relatos estão em conformidade com o trabalho de Mendes (2023), pelo fato de o autor defender que a incorporação da HM nas aulas de Matemática, inclusive com mediação de TD, aciona e reorganiza processos cognitivos, o que favorece a compreensão relacional dos conceitos.

Cabe aqui salientar que as dificuldades na aplicação prática de certos conceitos, tal qual sinalizado por um participante, podem ter surgido tendo em vista que o questionário foi disponibilizado antes da lista, cujas questões poderiam ter contribuído para a superação desse problema.

Na avaliação geral da aula, surgiram comentários que destacam a importância do preparo do professor na realização do seu trabalho, como é possível ver a seguir:

- *As aulas do professor Leomario sempre são boas, consigo aprender coisas que eu não tinha aprendido antes*
- *Uma boa aula, o professor sempre explica bem e sempre dá atenção as dúvidas*
- *Excelente. O professor Leomario explica de forma clara e objetiva e as aulas são muito legais e interessantes.*
- *Excelente. Tudo bem explicado, e exemplificado.*
- *Foi uma ótima explicação, e bem informativa*
- *Eu amei a aula de hoje, professor explica severamente bem*
- *A aula foi boa, leve e interessante.*
- *Achei a aula boa no geral, bem explicada... Teve algumas partes um pouco complicadas pra mim, mas deu pra entender a maior parte do conteúdo*

Mediante a análise dos dados, à luz do referencial teórico adotado, conclui-se que a abordagem do cálculo do comprimento e da área da circunferência, fundamentada no contexto histórico e no uso de *applets* GeoGebra, apresenta potencial para promover melhorias significativas nos processos educacionais. Observou-se que a proposta despertou o interesse dos participantes e favoreceu reflexões acerca das dimensões conceituais envolvidas, bem como do processo de construção e organização do conhecimento matemático. A inserção dos participantes no contexto sociocultural em que o conteúdo matemático se desenvolveu mostrou-se particularmente relevante, pois possibilitou a compreensão da Matemática em seu caráter

histórico e humanístico, contribuindo para a superação da concepção de uma ciência pronta, estática e inalcançável.

Na intervenção realizada, marcada pela articulação entre HM e TD, constatou-se melhoria na compreensão conceitual por parte dos alunos. Em consonância com Mendes (2023), pode-se inferir que a abordagem histórica atuou como agente de cognição matemática, favorecendo a compreensão dos conceitos trabalhados, enquanto os recursos digitais potencializaram esse processo ao ampliarem as possibilidades de exploração, experimentação e visualização.

Destaca-se, ainda, que os *applets* GeoGebra, que constituem os recursos educacionais produzidos no âmbito desta pesquisa (APÊNDICE C), cumpriram seu papel de possibilitar a visualização e de dinamizar – com precisão, facilidade e agilidade – os procedimentos adotados historicamente. A apresentação do método de Arquimedes, por exemplo, sem a utilização de recursos digitais, além de demandar tempo, possivelmente não teria bons resultados pedagógicos, tais quais os obtidos nesta pesquisa.

#### 4. Considerações finais

O ensino do comprimento e da área da circunferência, tal como tradicionalmente realizado, apresenta limitações. A insistência em práticas pedagógicas pautadas em procedimentos mecanizados e memorização de fórmulas não produz efeitos significativos no processo de aprendizagem. Embora ainda recorrente em muitos contextos escolares, tais práticas tendem a restringir a compreensão conceitual dos estudantes, dificultando a construção de significados mais profundos acerca dos conceitos envolvidos.

Diante disso, a presente pesquisa qualitativa, do tipo intervenção pedagógica, foi desenvolvida com o objetivo geral de investigar se e de que maneira a abordagem do cálculo do comprimento e da área da circunferência, fundamentada no contexto histórico e no uso de *applets* GeoGebra, apresenta potencial para promover melhorias nos processos educacionais.

Para alcançar o referido objetivo geral, foram traçados quatro objetivos específicos relativos ao cálculo do comprimento e da área da circunferência. O primeiro, que foi o de “*Compreender os processos históricos e metodológicos que conduziram à formalização desses conceitos*”, culminou em estudos aprofundados sobre o tema. A partir disso, foi possível pensar em uma abordagem clara e objetiva, levando em conta o perfil dos participantes da pesquisa. Esse processo foi de grande importância, tendo em vista que forneceu, ao pesquisador, maior segurança para tratar do assunto, indo ao encontro das contribuições didáticas para o trabalho do professor e para o fortalecimento de suas competências formativas para o exercício de ensino, conforme apontado por Mendes e Chaquiam (2016). Isso possibilitou apresentar, aos sujeitos participantes da pesquisa, uma Matemática em seus aspectos formativos, informativos e utilitários como resultado da construção humana, marcada por tentativas, aproximações e avanços graduais com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem sociocultural (MENDES, CHAQUIAM, 2016). Essa perspectiva pode ter contribuído para a desmistificação da ideia de uma ciência pronta e acabada, favorecendo uma compreensão mais crítica do conhecimento matemático.

Já o segundo objetivo específico, que foi o de “*Explorar as potencialidades pedagógicas do GeoGebra na construção de applets que auxiliem na abordagem e*

*na compreensão do porquê das fórmulas comumente utilizadas*”, resultou na criação de três *applets*, os quais viabilizaram a visualização dinâmica dos processos geométricos, a partir da aproximação do comprimento da circunferência por meio de polígonos regulares inscritos e circunscritos; a investigação precisa da razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência a partir de sua retificação; além da relação entre a área de uma circunferência e a de um triângulo retângulo cujos catetos são expressos pela medida de seu raio e de seu comprimento. Por meio desses *applets*, os participantes puderam compreender o porquê das fórmulas comumente utilizadas na Educação Básica, indo além da simples memorização. Ressalta-se, ainda, que a manipulação dos controles deslizantes e a observação da convergência dos perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos favoreceram a construção de significados para a constante  $\pi$ , tornando mais evidente seu caráter de limite e de razão entre grandezas. Além disso, dada a precisão, possibilitada com uso de recursos digitais, as conjecturas estabelecidas acerca do referido número irracional estão menos sujeitas a interpretações equivocadas.

O terceiro objetivo específico, que foi o de “*Planejar uma sequência didática com applets GeoGebra, baseada na história por trás do desenvolvimento desses conceitos, que possa ser reproduzida em diferentes contextos educacionais*”, se consolidou a partir dos recursos desenvolvidos para serem utilizados por educadores que dispõem, pelo menos, de um computador e um projetor. Claramente, em contextos escolares nos quais os alunos possam manipular os *applets*, com acesso à internet e a TD para fins pedagógicos, o potencial formativo do material desenvolvido nesta pesquisa tende a ser ampliado significativamente. Isso porque passa a haver a possibilidade de exploração com maior autonomia, em ambientes digitais, dos princípios investigativos, problematizadores e fundamentadores do ensino e da aprendizagem matemática, estabelecidos a partir do desenvolvimento histórico-epistemológico da Matemática (MENDES, 2023).

Em se tratando do último objetivo específico, que se refere a “*Promover reflexões pedagógicas acerca do uso de applets GeoGebra e de abordagens históricas em sala de aula*”, é necessário destacar que mesmo diante de limitações estruturais durante a implementação — como a ausência de recursos tecnológicos e de estrutura adequada na unidade escolar — a intervenção revelou alto nível de engajamento dos estudantes. A participação ativa nas discussões históricas, os questionamentos levantados durante as explicações e o envolvimento na resolução das

atividades indicam que a proposta despertou interesse e promoveu maior interação com o conteúdo. As respostas ao questionário e a análise das resoluções apresentadas sugerem avanços na compreensão conceitual e maior segurança na aplicação dos conhecimentos trabalhados. Essas conclusões evidenciam que a articulação entre HM e TD configura-se como estratégia pedagogicamente potente, uma vez que os recursos digitais possibilitam que a abordagem histórica contribua no processo de ensino e aprendizagem matemática de maneira inovadora (Bortoli, 2025). Com isso, reforça-se a necessidade de refletir sobre um trabalho docente que integre HM e TD como estratégia estruturante de propostas didáticas voltadas à construção conceitual e à ampliação dos significados matemáticos.

Contudo, é fundamental reconhecer que a intervenção foi realizada em um contexto específico, com número restrito de participantes, os quais já estavam habituados ao professor, bem como ao modelo de avaliação utilizado (questões de provas anteriores de um processo seletivo para o qual a turma estava se preparando ao longo do ano), o que impede qualquer pretensão de generalização dos resultados.

Do ponto de vista teórico, esta pesquisa contribui para o campo da EM ao ampliar o debate acerca da articulação entre HM e TD como estratégia didática para a promoção da compreensão conceitual. Ao integrar elementos históricos com recursos dinâmicos contemporâneos, evidencia-se que tradição e inovação não são perspectivas antagônicas, mas complementares no processo formativo. Tal articulação amplia o debate sobre metodologias que valorizam o significado dos conceitos e a mobilização cognitiva do aluno na construção da aprendizagem.

Como desdobramentos futuros, sugerem-se trabalhos que ampliem a aplicação da proposta para realidades educacionais que viabilizem a exploração dos *applets* por parte dos alunos ou que abarquem outros conteúdos matemáticos da Educação Básica. Ademais, estudos voltados à formação inicial e continuada de professores para o uso pedagógico de HM e TD constituem um campo promissor a ser explorado.

Conclui-se, portanto, que a integração entre HM e TD, em especial o GeoGebra, constitui uma alternativa viável e promissora para o ensino do cálculo do comprimento e da área da circunferência, haja vista que pode contribuir para a construção de aprendizagens mais significativas, para o desenvolvimento do pensamento matemático e para o fortalecimento de práticas pedagógicas que valorizem a compreensão matemática como construção histórica, cultural e humana.

Por fim, espera-se que este trabalho possa incentivar outros docentes a explorarem a HM e a usarem TD como aliados em suas práticas, ampliando as possibilidades de uma EM crítica, contextualizada, criativa e transformadora.

## Referências

ARAMAN, E. M. de O. **Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática**. 2011. 228 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Londrina, 2011.

BECKMANN, P. **The history of pi**. 3. ed. Boulder: Golem Press, 1971.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

BORTOLI, A. de. Movimentos de pesquisa que caracterizam a articulação entre História da Matemática e Tecnologias Digitais em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 39, e240185, 2025.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 24 nov. 2025.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Notas sobre o Brasil no Pisa 2022**. Brasília, DF: Inep, 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa/resultados>. Acesso em: 22 jan. 2026.

CARVALHO, S. P. de. A área e o perímetro de um círculo. *In*: COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUDESTE, 1., 2011, São João del-Rei, MG. **Anais [...]**. 2011.

DAMIANI, M. F. *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, Pelotas, n. 45, p. 57-67, mai./ago. 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822>. Acesso em: 07 jan. 2026.

GEOGEBRA, 2025. **Ferramentas e recursos do GeoGebra**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 24 nov. 2025.

GERHARDT, T. E. *et al.* Estrutura do projeto de pesquisa. *In*: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (org.). **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Rio Grande do Sul: Editora da UFRGS, 2009. p. 65-88.

GOMES, L. F.; ARAMAN, E. M. de O. História da matemática no ensino de matemática: um mapeamento dos artigos publicados em alguns periódicos nacionais na última década. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1–12.

GRUDTNER, G. L.; BERTATO, F. M.; D'OTTAVIANO, I. M. L. A Medida do Círculo: uma tradução do texto KYKΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ de Arquimedes. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 21, n. 42, p. 1-13, 2021.

LIMA, L. dos S. O método de aproximação de Arquimedes com o uso do GeoGebra: uma abordagem histórica e didática. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 5, n. 1, p. 52–66, 2016.

MAIA, L. E. de O.; VASCONCELOS, F. H. L. O uso das tecnologias digitais, em especial o GeoGebra, para o ensino de geometria: uma revisão sistemática de literatura. **Revista Prática Docente**, v. 7, n. 1, e031, p. 1–27, jan./abr. 2022.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. 1. ed. Belém: SBHMat, 2016. 124 p.

MENDES, I. A. História como um agente cognitivo de aprendizagem matemática compreensiva. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 25, n. 2, p. 329–355, 2023.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, Campinas, v. 5, n. 9, p. 73–89, jan./jun. 1997.

RODRIGUES, G. L. **A formação do professor de Matemática para o uso das Tecnologias Digitais em sala de aula em cursos superiores de tecnologia**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Tuiuti do Paraná, Curitiba, 2014.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2012.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. **A pesquisa científica**. In: GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (org.). Métodos de pesquisa. Rio Grande do Sul: Editora da UFRGS, 2009. p. 31-42.

SOUSA, G. C. de. **Aliança entre História da Matemática e Tecnologias via Investigação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

SOUSA, G. C. de. História da Matemática em alianças com Tecnologias Digitais. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 44, e2023005, 2023.

## APÊNDICE A – APRESENTAÇÃO



# CÁLCULO DO COMPRIMENTO E DA ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA: ORIGENS HISTÓRICAS



## O QUE A HISTÓRIA NOS DIZ?



As fontes para o estudo das civilizações muito antigas são escassas e fragmentadas. (ROQUE, CARVALHO, 2012).



Mapa da Mesopotâmia. Disponível em: <https://seguindopassoshistoria.blogspot.com/2016/03/mesopotamia-o-berco-das-cidades.html>

# SISTEMA DE NUMERAÇÃO DA BABILÔNIA

┘	1	┘┘	2	┘┘┘	3	┘┘┘┘	4
┘┘┘	5	┘┘┘┘	6	┘┘┘┘┘	7	┘┘┘┘┘┘	8
┘┘┘┘	9	<	10	<┘	11	<┘┘	12
<┘┘┘	13	<┘┘┘	14	<┘┘┘┘	15	<┘┘┘┘┘	16
<┘┘┘┘	17	<┘┘┘┘┘	18	<┘┘┘┘┘┘	19	<<	20
<<<	30	<<┘	40	<<┘┘	50	┘	60

Algarismos do sistema sexagesimal da antiga Babilônia (ROQUE, CARVALHO, 2012).

# SISTEMA DE NUMERAÇÃO DO EGITO ANTIGO

I	II	III	IIII	IIIII	IIIIII	IIIIIII	IIIIIII	IIIIIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000			

Algarismos do sistema de numeração do antigo Egito (ROQUE, CARVALHO, 2012).



# OS BABILÔNIOS

(c. 2000 a.E.C.)

Em seus cálculos para a área de um círculo, eles tomavam o quadrado do comprimento e dividiam por 12.



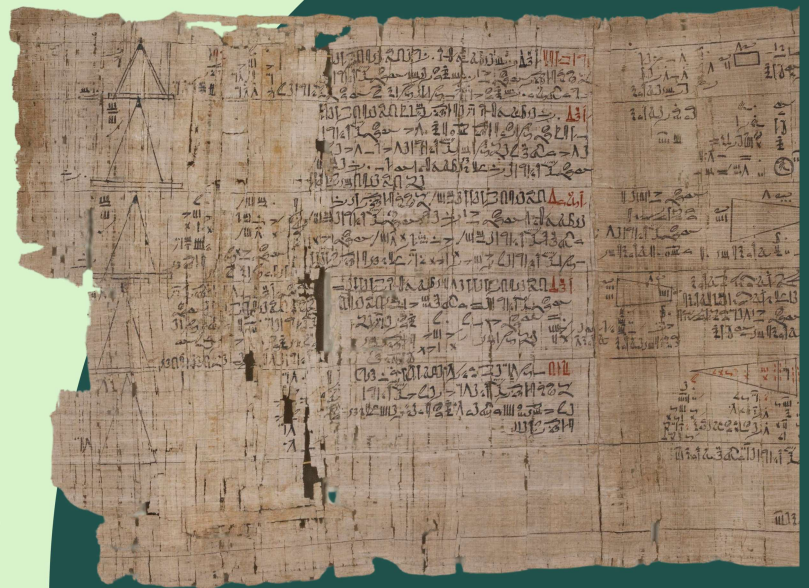
Tablete YBC 7302 (ROQUE, CARVALHO, 2012).



# OS EGÍPCIOS

(c. 1650 a.E.C.)

No problema nº 50 presente no papiro de Rhind/Ahmes, assume-se que a área de um campo circular com um diâmetro de 9 unidades é a mesma área de um quadrado com um lado de 8 unidades.



Parte do papiro de Ahmes/Rhind.  
Disponível em: [https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y\\_EA10057](https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057).



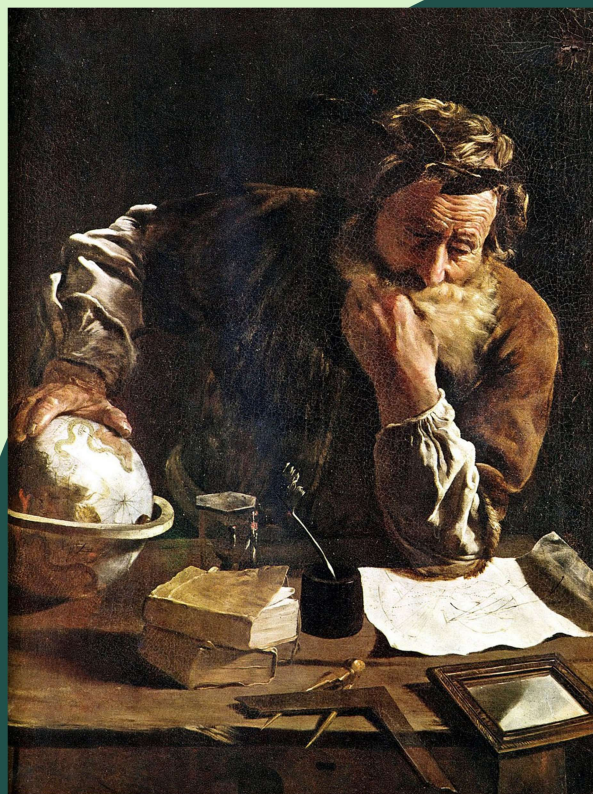
# ALGUNS SÉCULOS DEPOIS...



## ARQUIMEDES

(c. 250 a.E.C.)

Utilizou o método da exaustão, por meio da construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência, com o objetivo de determinar uma aproximação para o seu comprimento.



Pintura de Arquimedes feita por Domenico-Fetti por volta de 1620. Disponível em:

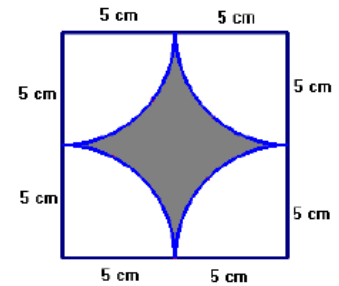
[https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Domenico-Fetti\\_Archimedes\\_1620.jpg](https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Domenico-Fetti_Archimedes_1620.jpg).

## APÊNDICE B – LISTA DE QUESTÕES

## LISTA DE QUESTÕES SOBRE COMPRIMENTO E ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA

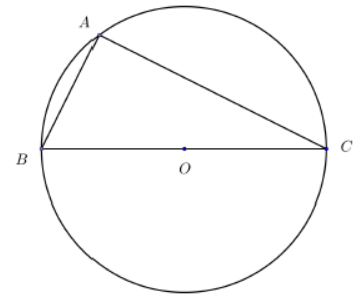
1. (IFF, 2011) Na figura abaixo, cada arco pertence a uma circunferência de raio de 5 cm. O perímetro da figura sombreada no interior do quadrado é, em cm:

- a)  $5\pi$
- b)  $10\pi$
- c)  $20\pi$
- d)  $25\pi$
- e)  $30\pi$

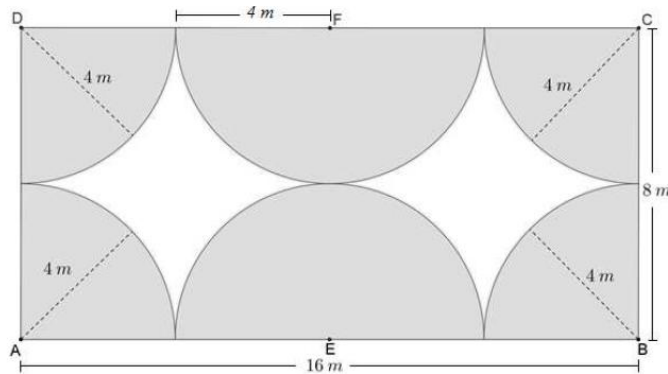


2. (IFF, 2015) Na figura a seguir, temos um triângulo inscrito em uma circunferência de modo que o diâmetro da circunferência coincida com o lado  $\overline{BC}$  do triângulo. Sabendo que  $AB = 2\sqrt{5}$  cm e  $AC = 4\sqrt{5}$  cm, então, a medida, em  $\text{cm}^2$ , da área da circunferência será:

- a)  $5\pi$
- b)  $5\pi\sqrt{5}$
- c)  $10\pi\sqrt{5}$
- d)  $25\pi$
- e)  $50\pi$



3. (IFF, 2016) Pedro possui um terreno murado retangular de 8 metros de largura por 16 metros de comprimento conforme a figura abaixo.

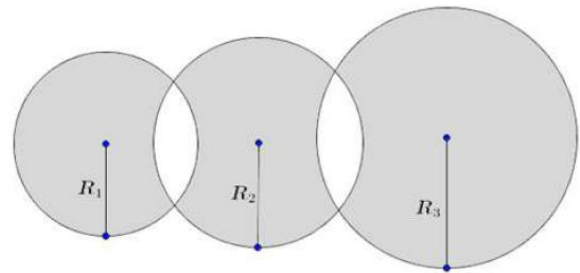


Para proteger sua propriedade, ele prende um cachorro em cada um dos pontos A, B, C, D, E e F utilizando uma corrente com 4 metros de comprimento, fixada ao solo, para cada animal, como indicado na figura. Considerando que os cachorros consigam andar livremente, sendo apenas limitados pelo comprimento da corrente e pelos muros do terreno, qual é a área do terreno não alcançada pelos cachorros? (Considere  $\pi=3$ ).

- a)  $16 \text{ m}^2$
- b)  $32 \text{ m}^2$
- c)  $56 \text{ m}^2$
- d)  $80 \text{ m}^2$
- e)  $104 \text{ m}^2$

4. (IFF, 2016) Determine o perímetro da região hachurada sabendo que  $R_1 + R_2 + R_3 = 12$ .

- a)  $12\pi$
- b)  $18\pi$
- c)  $24\pi$
- d)  $32\pi$
- e)  $36\pi$



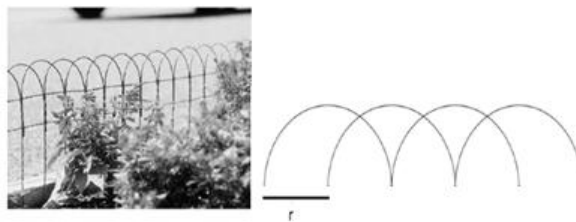
5. (IFF, 2017) Uma roda com 1 metro de diâmetro está sobre uma mesa apoiada no ponto A. Uma criança a empurrou e a roda rolou até o ponto B como mostra a figura.



Sabendo-se que a distância entre o ponto A e B é de 4710 centímetros, o número de voltas completas que a roda deu para rolar do ponto A até o ponto B foi de: (Utilize  $\pi = 3,14$ )

- a) 15
- b) 16
- c) 17
- d) 18
- e) 19

6. (IFF, 2018, adaptada) O senhor Adalto, responsável pela conservação da praça localizada em frente à sua casa, resolveu fazer um jardim retangular com 6 m de comprimento e 2 m de largura. Para proteger o jardim, ele resolveu cercá-lo utilizando uma cerca, conforme a figura abaixo:

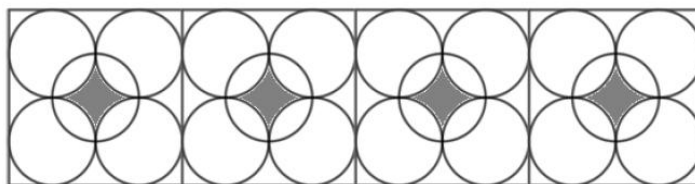


Fonte da imagem: <<https://www.elo7.com.br/10-m-da-cerca-para-jardim-em-arama/dp/9EAF81#sum=0&smsm=0&dl=d&fp=0&rps=0&cpr=0&ucrq=1&uss=1&sa=0&upo=0&sr=0&uso=m&sd=r=0>>. Acesso em: 24 set 2017.

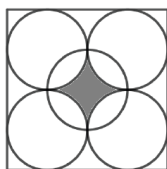
O topo da cerca é formado por semicircunferências de 0,5 m de raio. Qual o comprimento de arame utilizado, apenas nessas semicircunferências, para cercar todo o jardim do senhor Adalto? (Utilize  $\pi = 3,14$ )

- a) 21,98 m
- b) 25,12 m
- c) 43,96 m
- d) 50,24 m
- e) 87,92 m

7. (IFF, 2019) João procurou um serralheiro para construção do portão da sua residência. Ao mostrar o projeto do portão, João pediu ao serralheiro para que colocasse o detalhe abaixo centralizado no portão.



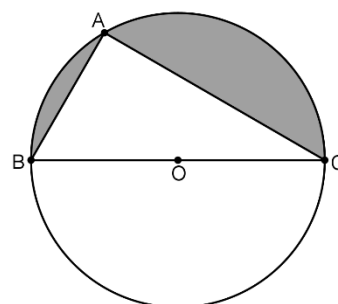
A figura a seguir ilustra parte do detalhe mostrado por João. Um quadrado de lado 12 cm com cinco circunferências dentro dele, quatro delas tangentes entre si e, também, tangentes aos lados do quadrado. Para dar o orçamento, o serralheiro precisa calcular a área da figura hachurada no centro da peça, pois esta será construída com a chapa de alumínio. A área da figura hachurada em centímetros quadrados, é:



- a)  $9(4 - \pi)$
- b)  $12(4 - \pi)$
- c)  $15(4 - \pi)$
- d)  $18(4 - \pi)$
- e)  $21(4 - \pi)$

8. (IFF, 2024, adaptada) Na figura a seguir, tem-se um triângulo inscrito numa circunferência de centro  $O$ . Considerando que  $AB = 2$  cm e  $AC = 2\sqrt{3}$  cm, podemos afirmar que a área sombreada, em  $\text{cm}^2$ , é de:

- a)  $2(\pi - \sqrt{3})$
- b)  $2(2\pi - \sqrt{3})$
- c)  $2(8\pi - \sqrt{3})$
- d)  $2(\pi - 2\sqrt{3})$
- e)  $4(\pi - \sqrt{3})$



## APÊNDICE C – GUIA PARA UTILIZAÇÃO DOS *APPLETS*



## GUIA DO PROFESSOR

Prezado(a) Professor(a),

Este guia foi elaborado com o objetivo de auxiliá-lo(a) na utilização dos *applets* GeoGebra desenvolvidos na pesquisa de dissertação intitulada “*O ensino do comprimento e da área da circunferência: uma sequência didática com uso do GeoGebra e de perspectivas históricas*”.

A referida pesquisa teve Leomario Ribeiro Maciel da Silva como autor e Samuel Pacitti Gentil como orientador, sendo desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

Os *applets* podem ser utilizados *online* ou, alternativamente, baixados para acesso *offline*. Você pode projetá-los e manipulá-los junto à turma ou permitir que os próprios alunos os explorem de maneira interativa.

A seguir, esses *applets* são apresentados em sequência, acompanhados de orientações de uso e sugestões didático-pedagógicas que visam favorecer a formulação de conjecturas e a dedução das fórmulas para o cálculo do comprimento e da área da circunferência.

### **Materiais necessários**

- Computador(es)/dispositivos móveis;
- Projetor.

### **Orientações gerais**

- Público-alvo: anos finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio;
- Habilidades de acordo com a BNCC: EF07MA33 e EF08MA19;
- Pré-requisitos: noções de raio, diâmetro, perímetro e área;
- Organização: trabalho coletivo com momentos investigativos;
- Sugestão: incentive os alunos a registrarem suas observações (tabelas, anotações, hipóteses).

**Sugestão de fala inicial:** Vejamos como funciona o método desenvolvido por Arquimedes no século III a.E.C. para o cálculo do comprimento da circunferência. Para tanto, utilizaremos um *applet* elaborado no *software* de Matemática dinâmica GeoGebra.

### **Primeiro *applet***

*Aproximação do comprimento da circunferência por polígonos regulares*

### **Objetivos de aprendizagem**

- Compreender o método de Arquimedes para aproximação do comprimento da circunferência;
- Identificar aproximações para o valor de  $\pi$ ;
- Formular conjecturas a partir da análise dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência.

**Disponível em:** <https://www.geogebra.org/m/gkvgfsnt>.

### **Descrição de uso**

**1.** Apresente os elementos da tela inicial:

- i. circunferência de diâmetro unitário;
- ii. polígonos regulares inscrito e circunscrito;
- iii.  $P_i$  e  $P_c$ , que correspondem aos perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito, respectivamente.

*Obs.: Ao falar sobre os perímetros, resalte tanto o valor numérico quanto sua representação linear.*

**2.** Mova o controle deslizante “n” para aumentar a quantidade de lados dos polígonos regulares.

*Perguntas orientadoras: O que acontece com o formato dos polígonos? O que acontece com os valores de  $P_i$  e  $P_c$ ?*

**3.** Volte o controle deslizante “n” para o início, ou seja,  $n = 4$ .

**4.** Mova o controle deslizante “ $\beta$ ” até o fim e faça a retificação completa da circunferência.

5. Marque a caixa de seleção “Semirretas diretivas” e compare o tamanho do comprimento da circunferência com os perímetros dos polígonos regulares.

*Pergunta orientadora: O comprimento da circunferência está entre quais valores?*

6. Aumente novamente o controle deslizante “n”.

*Perguntas orientadoras: Em relação ao comprimento da circunferência, o que está acontecendo com as medidas dos perímetros dos polígonos regulares? E quanto aos valores de  $P_i$  e  $P_c$ , o que é possível observar?*

7. Conclua que o comprimento de uma circunferência de diâmetro unitário é igual a  $\pi$ .

**Sugestão de transição didática:** Agora que já vimos que o comprimento da circunferência de diâmetro unitário é  $\pi$ , investigaremos como esse resultado se relaciona com circunferências de outros diâmetros.

### Segundo *applet*

#### *Retificação da circunferência*

### Objetivos de aprendizagem

- Identificar a relação entre comprimento e diâmetro;
- Compreender  $\pi$  como constante de proporcionalidade.

**Disponível em:** <https://www.geogebra.org/m/uqyq8cbc>.

### Descrição de uso

1. Proponha que os alunos registrem organizadamente os dados obtidos em uma tabela que conste a medida do diâmetro (d), o comprimento C e a razão C/d, tendo como referência as diferentes circunferências que serão apresentadas no *applet*.

2. Mova “d” para 2 e realize a retificação da circunferência sobre a semirreta graduada movendo o controle laranja até o fim.

*Perguntas orientadoras: O que aconteceu com o comprimento? Ele dobrou também?*

3. Faça a mesma análise para outros valores de diâmetro.

*Pergunta orientadora: A razão  $C/d$  muda ou permanece constante?*

4. Conduza os alunos a constatarem que o comprimento da circunferência é diretamente proporcional ao diâmetro e que  $\pi$  é a constante de proporcionalidade.

5. Formalize que  $C = \pi d$ .

6. Relacione com o raio ( $r$ ) e mostre que  $C = 2\pi r$ .

**Sugestão de transição didática:** Agora que já conhecemos o comprimento da circunferência, podemos investigar como determinar sua área.

### Terceiro *applet*

Área da circunferência

### Objetivos de aprendizagem

- Relacionar a área da circunferência à de um triângulo retângulo;
- Compreender a dedução da fórmula para o cálculo da área da circunferência.

**Disponível em:** <https://www.geogebra.org/m/pmznbbgu>.

### Descrição de uso

1. Apresente os controles:

- i. “a” e “b” que deslocam a figura;
- ii. “r” que altera a medida do raio.

2. Mova o controle “n”, para formar circunferências internas.

*Obs.: Nesse momento, não utilize tantas circunferências internas, deixe espaços entre elas.*

3. Mova o controle deslizante “ $\alpha$ ” e mostre que ele serve para retificar todas as circunferências que tenham sido representadas. Depois, volte-o para o início.

4. Mova o controle “n”, com o objetivo de preencher a circunferência inicial com várias outras internas a ela.

5. Mova o controle deslizante “ $\alpha$ ” para retificá-las.

*Perguntas orientadoras: Que figura está sendo formada? Você sabe calcular sua área?*

6. Conclua que a área da circunferência é igual a de um triângulo retângulo cuja base mede  $r$  e altura mede  $2\pi r$ .

7. Dê um tempo para que os alunos concluam que a área  $A$  de uma circunferência de raio  $r$  é dada por:  $A = \pi r^2$ .



# RIO

# PUC

Dissertação de Mestrado

Produto Educacional

## **O ensino do comprimento e da área da circunferência: uma sequência didática com uso do GeoGebra e de perspectivas históricas**

**Leomario Ribeiro Maciel da Silva**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Centro Técnico Científico  
Departamento de Matemática

Rio de Janeiro, 01 de abril de 2026



Pontifícia  
Universidade  
Católica do  
Rio de Janeiro

Produto Educacional de Pesquisa de Dissertação de Mestrado

# **O ensino do comprimento e da área da circunferência:**

uma sequência didática com uso do  
GeoGebra e de perspectivas históricas

Leomario Ribeiro Maciel da Silva

Orientação: Dr. Samuel Pacitti Gentil

Produto educacional desenvolvido no âmbito da pesquisa de dissertação de mestrado, apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Rio de Janeiro, 01 de abril de 2022



## GUIA DO PROFESSOR

Prezado(a) Professor(a),

Este guia foi elaborado com o objetivo de auxiliá-lo(a) na utilização dos *applets* GeoGebra desenvolvidos na pesquisa de dissertação intitulada “*O ensino do comprimento e da área da circunferência: uma sequência didática com uso do GeoGebra e de perspectivas históricas*”.

A referida pesquisa teve Leomario Ribeiro Maciel da Silva como autor e Samuel Pacitti Gentil como orientador, sendo desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

Os *applets* podem ser utilizados *online* ou, alternativamente, baixados para acesso *offline*. Você pode projetá-los e manipulá-los junto à turma ou permitir que os próprios alunos os explorem de maneira interativa.

A seguir, esses *applets* são apresentados em sequência, acompanhados de orientações de uso e sugestões didático-pedagógicas que visam favorecer a formulação de conjecturas e a dedução das fórmulas para o cálculo do comprimento e da área da circunferência.

### **Materiais necessários**

- Computador(es)/dispositivos móveis;
- Projetor.

### **Orientações gerais**

- Público-alvo: anos finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio;
- Habilidades de acordo com a BNCC: EF07MA33 e EF08MA19;
- Pré-requisitos: noções de raio, diâmetro, perímetro e área;
- Organização: trabalho coletivo com momentos investigativos;
- Sugestão: incentive os alunos a registrarem suas observações (tabelas, anotações, hipóteses).

**Sugestão de fala inicial:** Vejamos como funciona o método desenvolvido por Arquimedes no século III a.E.C. para o cálculo do comprimento da circunferência. Para tanto, utilizaremos um *applet* elaborado no *software* de Matemática dinâmica GeoGebra.

### **Primeiro *applet***

*Aproximação do comprimento da circunferência por polígonos regulares*

### **Objetivos de aprendizagem**

- Compreender o método de Arquimedes para aproximação do comprimento da circunferência;
- Identificar aproximações para o valor de  $\pi$ ;
- Formular conjecturas a partir da análise dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência.

**Disponível em:** <https://www.geogebra.org/m/gkvgfsnt>.

### **Descrição de uso**

**1.** Apresente os elementos da tela inicial:

- i. circunferência de diâmetro unitário;
- ii. polígonos regulares inscrito e circunscrito;
- iii.  $P_i$  e  $P_c$ , que correspondem aos perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito, respectivamente.

*Obs.: Ao falar sobre os perímetros, resalte tanto o valor numérico quanto sua representação linear.*

**2.** Mova o controle deslizante “n” para aumentar a quantidade de lados dos polígonos regulares.

*Perguntas orientadoras: O que acontece com o formato dos polígonos? O que acontece com os valores de  $P_i$  e  $P_c$ ?*

**3.** Volte o controle deslizante “n” para o início, ou seja,  $n = 4$ .

**4.** Mova o controle deslizante “ $\beta$ ” até o fim e faça a retificação completa da circunferência.

5. Marque a caixa de seleção “Semirretas diretivas” e compare o tamanho do comprimento da circunferência com os perímetros dos polígonos regulares.

*Pergunta orientadora: O comprimento da circunferência está entre quais valores?*

6. Aumente novamente o controle deslizante “n”.

*Perguntas orientadoras: Em relação ao comprimento da circunferência, o que está acontecendo com as medidas dos perímetros dos polígonos regulares? E quanto aos valores de  $P_i$  e  $P_c$ , o que é possível observar?*

7. Conclua que o comprimento de uma circunferência de diâmetro unitário é igual a  $\pi$ .

**Sugestão de transição didática:** Agora que já vimos que o comprimento da circunferência de diâmetro unitário é  $\pi$ , investigaremos como esse resultado se relaciona com circunferências de outros diâmetros.

### Segundo *applet*

#### *Retificação da circunferência*

### Objetivos de aprendizagem

- Identificar a relação entre comprimento e diâmetro;
- Compreender  $\pi$  como constante de proporcionalidade.

**Disponível em:** <https://www.geogebra.org/m/uqyq8cbc>.

### Descrição de uso

1. Proponha que os alunos registrem organizadamente os dados obtidos em uma tabela que conste a medida do diâmetro (d), o comprimento C e a razão C/d, tendo como referência as diferentes circunferências que serão apresentadas no *applet*.

2. Mova “d” para 2 e realize a retificação da circunferência sobre a semirreta graduada movendo o controle laranja até o fim.

*Perguntas orientadoras: O que aconteceu com o comprimento? Ele dobrou também?*

3. Faça a mesma análise para outros valores de diâmetro.

*Pergunta orientadora: A razão  $C/d$  muda ou permanece constante?*

4. Conduza os alunos a constatarem que o comprimento da circunferência é diretamente proporcional ao diâmetro e que  $\pi$  é a constante de proporcionalidade.

5. Formalize que  $C = \pi d$ .

6. Relacione com o raio ( $r$ ) e mostre que  $C = 2\pi r$ .

**Sugestão de transição didática:** Agora que já conhecemos o comprimento da circunferência, podemos investigar como determinar sua área.

### Terceiro *applet*

Área da circunferência

### Objetivos de aprendizagem

- Relacionar a área da circunferência à de um triângulo retângulo;
- Compreender a dedução da fórmula para o cálculo da área da circunferência.

**Disponível em:** <https://www.geogebra.org/m/pmznbbgu>.

### Descrição de uso

1. Apresente os controles:

- i. “a” e “b” que deslocam a figura;
- ii. “r” que altera a medida do raio.

2. Mova o controle “n”, para formar circunferências internas.

*Obs.: Nesse momento, não utilize tantas circunferências internas, deixe espaços entre elas.*

3. Mova o controle deslizante “ $\alpha$ ” e mostre que ele serve para retificar todas as circunferências que tenham sido representadas. Depois, volte-o para o início.

4. Mova o controle “n”, com o objetivo de preencher a circunferência inicial com várias outras internas a ela.

5. Mova o controle deslizante “ $\alpha$ ” para retificá-las.

*Perguntas orientadoras: Que figura está sendo formada? Você sabe calcular sua área?*

6. Conclua que a área da circunferência é igual a de um triângulo retângulo cuja base mede  $r$  e altura mede  $2\pi r$ .

7. Dê um tempo para que os alunos concluam que a área  $A$  de uma circunferência de raio  $r$  é dada por:  $A = \pi r^2$ .