



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



**PROFMAT**

ANDSON JOSÉ MALAQUIAS TÔRRES

# INSTRUMENTALIZAÇÃO PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE DISCRETA E GEOMÉTRICA - COM APLICAÇÃO À ESTEREOLOGIA

ORIENTADOR:

PROF. DR. ESTEBAN PEREIRA DA SILVA

Natal - RN

Fevereiro de 2026

ANDSON JOSÉ MALAQUIAS TÔRRES

INSTRUMENTALIZAÇÃO PARA O ENSINO  
DE PROBABILIDADE DISCRETA E  
GEOMÉTRICA - COM APLICAÇÃO À  
ESTEREOLOGIA

Dissertação de Mestrado apresentada à  
Comissão Acadêmica Institucional do  
PROFMAT-UFRN como requisito parcial  
para obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Esteban Pereira da  
Silva.

Natal - RN  
Fevereiro de 2026

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistema de Bibliotecas - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Tôrres, Andson José Malaquias.

Instrumentalização para o ensino de probabilidade discreta e geométrica - com aplicação à estereologia / Andson José Malaquias Tôrres. - 2026.

90f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Natal, RN, 2026.

Orientação: Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva.

1. Ensino de probabilidade - Dissertação. 2. Agulha de Buffon - Dissertação. 3. Estereologia - Dissertação. I. Silva, Esteban Pereira da. II. Título.

RN/UF/BSCCET

CDU 51:37

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATA E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ANDSON JOSÉ MALAQUIAS TÔRRES

INSTRUMENTALIZAÇÃO PARA O ENSINO  
DE PROBABILIDADE DISCRETA E  
GEOMÉTRICA - COM APLICAÇÃO À  
ESTEREOLOGIA.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva (UFRN - Orientador)

Prof. Dr. Roberto Teodoro Gurgel de Oliveira (UFRN - Membro interno)

Profa. Dra. Márcia Maria Alves de Assis (UERN - Membro externo)

Natal - RN  
Fevereiro de 2026

*Dedico o presente trabalho ao Sagrado Coração de Jesus, Nossa Senhora da Conceição,  
São José e São Miguel Arcanjo, à minha noiva, aos meus pais, minhas irmãs e avós e  
todos os colegas de turma*

# Agradecimentos

Com o coração repleto de gratidão, dedico este trabalho a Deus todo-poderoso, a Nossa Senhora, a São José e a São Miguel Arcanjo, por toda a força e inspiração concedidas.

Este projeto foi também impulsionado pelo amor e apoio incondicional da minha noiva, Brena Luyza Silva de Araújo, e dos meus pais, Rosâne Ferreira Malaquias e Edson José Dantas Torres, a quem expresso o mais profundo e sincero agradecimento.

Minha gratidão estende-se ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), pela oportunidade de desenvolvimento profissional e acadêmico. Agradeço, ainda, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), cujo suporte institucional e fomento à pesquisa são cruciais para o avanço do ensino de Matemática no país.

Por fim, sou grato a todos os meus professores, pela dedicação e sabedoria, à Comissão Examinadora, e especialmente aos meus colegas de turma, pela convivência e colaboração fraterna durante esta jornada. De forma particular, ao meu orientador, Prof. Dr. Esteban Perreira da Silva, por sua inestimável paciência, rigor científico e apoio constante, que foram fundamentais para a qualidade e o direcionamento desta dissertação.

*“Aonde fica a saída?”*  
*Perguntou Alice ao gato que ria.*  
*“Depende”, respondeu o gato.*  
*“De quê?”, replicou Alice;*  
*“Depende de para onde você quer ir...” ’*  
*Alice no país das maravilhas - Lewis Carroll*

# Resumo

Neste trabalho, propomos abordagens para o ensino de probabilidade discreta e geométrica voltadas para estudantes do Ensino Médio. A metodologia da pesquisa fundamenta-se em uma análise documental das avaliações do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e das diretrizes da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), também de pesquisas no repositório do PROFMAT e da CAPES servindo de base para o desenvolvimento de um produto educacional centrado em uma sequência didática investigativa.

A eficácia da proposta no aprendizado é garantida pela adoção de metodologias ativas, que utilizam jogos, experimentos práticos com materiais do Laboratório de Ensino Da Matemática (LabMat) e o uso do software GeoGebra para transformar abstrações matemáticas em construções tangíveis e participativas.

A interdisciplinaridade é desenvolvida por meio da conexão entre Matemática e Biologia, utilizando a Estereologia como elo condutor. A Estereologia aparece como uma aplicação prática do experimento da Agulha de Buffon, permitindo que os alunos utilizem sondas geométricas caseiras e princípios probabilísticos para estimar parâmetros tridimensionais, como a densidade de capilares e áreas superficiais em tecidos biológicos, a partir de amostras bidimensionais.

**Palavras-chave:** Ensino de Probabilidade, Agulha de Buffon, Estereologia.

# Abstract

In this work, we propose approaches for teaching discrete and geometric probability aimed at High School students. The research methodology is based on a documentary analysis of ENEM (National High School Exam) evaluations, as well as the guidelines of the BNCC (National Common Curricular Base) and the PCN (National Curriculum Parameters). It also incorporates research from the PROFMAT and CAPES repositories, serving as a basis for the development of an educational product centered on an investigative didactic sequence.

The effectiveness of the proposal in learning is ensured by the adoption of active methodologies, which utilize games, practical experiments with materials from the Mathematics Teaching Laboratory (LabMat), and the use of GeoGebra software to transform mathematical abstractions into tangible and participatory constructions.

Interdisciplinarity is developed through the connection between Mathematics and Biology, using Stereology as the conducting link. Stereology appears as a practical application of Buffon's Needle experiment, allowing students to use geometric probes and probabilistic principles to estimate three-dimensional parameters, such as capillary density and surface areas in biological tissues, from two-dimensional samples.

**Keywords:** Probability Education, Buffon's Needle, Stereology.

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1 Breve Contexto Histórico</b>	<b>4</b>
<b>2 Fundamentação Teórica Matemática</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução à Probabilidade . . . . .	7
2.2 Problema da Agulha de Buffon . . . . .	11
2.3 Emprego da Agulha de Buffon em Métodos Estereológicos. . . . .	14
<b>3 Sequência Didática</b>	<b>18</b>
3.1 Ensino de Probabilidade Discreta: Exercícios, Jogos e Experimentos. . . .	18
3.2 Probabilidade Geométrica: Exercícios e GeoGebra. . . . .	20
3.3 Estratégias de Ensino do Problema da Agulha de Buffon . . . . .	21
3.4 Aula prática e interdisciplinaridade. . . . .	22
<b>4 Procedimentos Didáticos: Planejamentos</b>	<b>23</b>
4.1 Probabilidade Discreta . . . . .	23
4.2 Probabilidade Geométrica . . . . .	24
4.3 Problema da Agulha de Buffon . . . . .	25
4.4 Aula Conjunta: Matemática e Biologia . . . . .	26
4.5 Cálculo da Nota Final . . . . .	28
4.6 Conclusão e Perspectivas . . . . .	29
4.7 Atividades . . . . .	29
4.7.1 Jogos e Experimentos - Probabilidade Discreta . . . . .	29
4.7.2 Soluções . . . . .	33
4.7.3 Prova . . . . .	40
4.7.4 Pauta de Correção . . . . .	40
4.7.5 Atividade abordando materiais do laboratório . . . . .	42
4.7.6 Soluções e pauta de correção . . . . .	43
4.7.7 Atividade escrita em dupla . . . . .	46
4.7.8 Pauta de Correção . . . . .	48
4.7.9 Lista de Exercícios - Probabilidade Geométrica . . . . .	48

	11
4.7.10 Soluções . . . . .	52
4.7.11 Prova - Probabilidade Geométrica . . . . .	55
4.7.12 Soluções e Pauta de Resolução . . . . .	56
4.7.13 Execução sequencial no GeoGebra . . . . .	57
4.7.14 Atividade da Agulha de Buffon e Aplicações à Biologia . . . . .	58
4.7.15 Resolução e Pauta de Correção . . . . .	58
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>60</b>
<b>APÊNDICES</b>	<b>66</b>
<b>A Conjuntos Admissíveis para Medida</b>	<b>66</b>
<b>B O Problema de Laplace</b>	<b>69</b>
<b>C A Lei dos Grandes Números</b>	<b>72</b>
C.1 Descrição da Lei dos Grandes Números . . . . .	72
C.1.1 Aproximação de $\pi$ . . . . .	72
C.1.2 O Uso da LGN em sala de aula com apoio de Inteligência Artificial (IA) . . . . .	73

# Lista de Figuras

2.1	Experimento de Buffon. . . . .	12
2.2	Gráfico do Espaço Amostral. . . . .	13
2.3	Gráfico do evento desejado. . . . .	13
2.4	Ilustração de estrutura linear em sonda . . . . .	14
2.5	Ilustração de superfície de tecido em sonda. . . . .	15
4.1	Diagrama de Venn . . . . .	39
4.2	Ilustração - questão 03. . . . .	49
4.3	Ilustração - questão 04. . . . .	49
4.4	Ilustração - questão 05. . . . .	50
4.5	Ilustração - questão 06. . . . .	50
4.6	Ilustração - questão 07. . . . .	51
4.7	Questão 09 - gráfico para resolução. . . . .	53
4.8	Figura da questão 02. . . . .	55
4.9	Ilustração de superfície de tecido em sonda . . . . .	58
B.1	Ilustração - Problema de Laplace. . . . .	69
C.1	Uma Aproximação de $\pi$ . . . . .	75
C.2	Uso de IA em sala de aula - etapa 1. . . . .	76
C.3	Uso de IA em sala de aula - etapa 2. . . . .	77

# Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros Estereológicos Cardíacos Reais . . . . .	16
4.1	Combinações com dois dados para a soma ser 8 . . . . .	34
4.2	Combinações com três dados para a soma ser 8 . . . . .	34
4.3	Combinações válidas para a soma ser 9 . . . . .	34
4.4	Combinações válidas para a soma ser 15 . . . . .	35
4.5	Combinações válidas para a soma ser 18 . . . . .	35
4.6	Combinações válidas para produto igual a 45 . . . . .	35
4.7	Combinações válidas para produto igual a 26 . . . . .	36
4.8	Combinações válidas para soma menor que 5 . . . . .	36
4.9	Combinações válidas para soma ser 13 . . . . .	39
4.10	Combinações válidas para soma ser 10 . . . . .	39
4.11	Distribuição por idade e gênero . . . . .	40
4.12	Combinações válidas para a soma ser 7 . . . . .	41
4.13	Soma menor que 7 . . . . .	44
4.14	Soma 25 e produto quadrado perfeito . . . . .	52
C.1	Tabela de aproximação de $\pi$ . . . . .	73

## Índice de Notação

$P(A)$	Probabilidade do evento $A$
$\bar{A}$ ou $A^c$	Complementar do conjunto $A$ (Subconjunto do Universo formado pelos elementos que não estão em $A$ )
$A \cup B$	União dos conjuntos $A$ e $B$ (Conjunto que contém estritamente todos os elementos de $A$ ou de $B$ )
$A \cap B$	Interseção dos conjuntos $A$ e $B$ (Conjunto que contém estritamente todos os elementos comuns a $A$ e a $B$ )
$A - B$	Diferença entre os conjuntos $A$ e $B$ (Subconjunto de $A$ formado por todos os elementos não comuns a $B$ )
$\emptyset$	Conjunto vazio
$n(A)$	Número de elementos (cardinalidade) do conjunto $A$
$L_V$	Comprimento por volume (estereologia)
$S_V$	Área superficial por volume (estereologia)
$\mu(A)$	Medida (cardinalidade, comprimento, área, volume) do conjunto (ou evento) $A$
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathcal{D}$	$\sigma$ -álgebra de subconjuntos de $\Omega$
$D_4, D_6, D_8, D_{12}, D_{20}$	Dados poliédricos com 4, 6, 8, 12 e 20 faces
$P_n(A)$	Probabilidade empírica após $n$ repetições
$i(n)$	Número de sucessos (interseções) após $n$ lançamentos da agulha
$V_S$	Valor saudável (em biologia/medicina)
$V_P$	Valor patológico (em biologia/medicina)
$N$	Nota final do aluno
$N_{PD}, N_{PG}, N_A, N_{AB}$	Notas de Probabilidade Discreta, Geométrica, Agulha de Buffon e Aplicação à Biologia

# INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [8] delinea as Competências e Habilidades que os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica, organizando-as de forma a garantir uma formação integral e significativa. No Ensino Médio, essas habilidades não são distribuídas por séries específicas, mas sim ao longo do processo formativo. Este cenário, favorece a relevância de propostas pedagógicas que dialoguem com a BNCC e contribuam para o desenvolvimento efetivo dessas competências em sala de aula. No presente trabalho apresentamos uma proposta didática interdisciplinar (Matemática e Biologia), focada na habilidade EM13MAT511<sup>1</sup>, a saber:

“Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.” (BRASIL, 2018, p. 533)

A escolha por abordar este tema é motivada por problemáticas levantadas por Furtado 2019 [15] sobre a negligência do ensino de probabilidade para espaços amostrais não discretos no ambiente escolar. Realizando uma análise documental dos cadernos azuis do segundo dia do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) entre 2021 e 2025, constatamos a ausência de questões de probabilidade em Ciências da Natureza e uma presença constante em Matemática, variando entre duas e três questões por edição. Tal lacuna se reflete na escassez de materiais didáticos que abordem adequadamente esse conteúdo, conforme aponta, o que compromete uma compreensão mais ampla e profunda da noção de probabilidade.

O contexto de construção deste projeto de investigação está fundamentado na minha prática docente no cotidiano em escola pública e na necessidade de viabilizar espaços de experimentação Matemática. O LabMat (Laboratório de Ensino de Matemática) surge como uma ferramenta central nesse processo, definido como um ambiente de investigação onde o estudante assume um papel ativo na construção do conhecimento por meio da manipulação de materiais concretos. A estruturação e montagem desse laboratório contaram com a colaboração fundamental de bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), que atuaram diretamente na organização física e na sistematização dos materiais didáticos sob minha coordenação entre 2023 e 2024. Embora o PIBID tenha sido essencial para a operacionalização do laboratório como espaço

---

<sup>1</sup>Esse é o código utilizado pela BNCC para tal habilidade

de apoio pedagógico, o desenvolvimento e a autoria da sequência didática interdisciplinar aqui apresentada não teve participação do PIBID.

O LabMat, embora tenha sido concebido e estruturado como um Laboratório de Ensino de Matemática e Física, servindo de suporte para ambas as áreas, teve sua aplicação nesta pesquisa direcionada à interface com a Biologia. Essa escolha deu-se por questões estritamente referenciais; durante o levantamento bibliográfico e a fase de investigação, identificamos um volume mais expressivo e robusto de referências que conectam a Probabilidade Geométrica às Ciências Biológicas do que à Física, viabilizando uma fundamentação teórica mais densa para a proposta.

O desenvolvimento das atividades teve ênfase na Resolução de Problemas, no uso de Tecnologias Digitais e na aplicação de Jogos. A proposta utiliza o LabMat para experimentos físicos e o software GeoGebra para simulações que permitem aos alunos visualizar conceitos geométricos e abstratos de forma tangível. Essa metodologia dialoga com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que recomendam o uso de jogos e materiais manipuláveis para desenvolver habilidades cognitivas sem estimular comportamentos de risco. Vale ressaltar que a sequência didática incorpora e ressignifica questões oriundas do Livro Didático adotado pela escola e de exames nacionais como o ENEM, adaptando-as para um formato investigativo que prioriza a argumentação e o raciocínio lógico em detrimento da aplicação de fórmulas.

As aplicações do material interdisciplinar foram desenhadas para superar a fragmentação do ensino. Ao conectar a Matemática com a Biologia por meio da Estereologia, a proposta oferece aos estudantes do Ensino Médio um caminho concreto para aplicar o rigor matemático em contextos reais das Ciências da Vida. Essa abordagem não apenas respeita as competências da BNCC, mas também busca despertar o interesse dos estudantes ao demonstrar a utilidade da matemática em diversas áreas do conhecimento humano.

A Estereologia, peça-chave desta conexão, é detalhada em dois momentos distintos do trabalho para garantir tanto o rigor quanto a aplicabilidade: a sua fundamentação técnica e os princípios matemáticos subjacentes são apresentados na Subseção 2.3, enquanto a sua transposição pedagógica e aplicação prática na sequência didática são exploradas na Subseção 4.4.

Essa perspectiva interdisciplinar converge com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que propõe a superação da fragmentação do conhecimento por meio da organização em áreas. Segundo o documento, a interdisciplinaridade não deve ser entendida como a eliminação dos componentes curriculares, mas sim como um diálogo que permite aos estudantes investigar causas, elaborar e testar hipóteses, e formular modelos que expliquem fenômenos naturais e processos tecnológicos. Ao integrar Matemática e Biologia, a presente proposta materializa a competência de utilizar estratégias e conceitos

de diferentes áreas para interpretar e resolver problemas complexos, promovendo uma aprendizagem que reconhece a natureza sistêmica e integrada da realidade.

A decisão por este viés interdisciplinar também se justifica pela pesquisa no Repositório do PROFMAT. Notamos que a maioria dos trabalhos voltados para a Probabilidade Geométrica limita-se à resolução de listas de exercícios ou apresentações axiomáticas. Assim, buscamos romper com esse padrão ao propor atividades práticas e experimentais que façam sentido dentro do contexto do Ensino Médio Potiguar [38], atendendo às especificidades da rede estadual de ensino do Rio Grande do Norte e promovendo o protagonismo estudantil.

Com o intuito de trazer profundidade ao estudo da probabilidade geométrica, que no Repositório do PROFMAT tende a ser focada apenas na resolução de exercícios e/ou apresentação axiomática, este trabalho buscou uma abordagem mais prática e interdisciplinar. Encontramos na Estereologia <sup>2</sup> essa possibilidade, utilizando princípios da geometria e da probabilidade, como o Problema da Agulha de Buffon, para analisar estruturas biológicas. Assim, estabelecemos um paralelo entre o problema de Buffon e os métodos estereológicos aplicados em Ciências da Vida, oferecendo aos estudantes do Ensino Médio um caminho concreto para conectar a Matemática com a Biologia.

Diante disso, este trabalho propõe um percurso didático que contempla inicialmente a contextualização histórica acerca do tema, a Fundamentação Matemática de Probabilidade e a apresentação de uma Sequência Didática acerca do estudo da Probabilidade em espaços amostrais discretos, por meio de jogos e experimentos com o objetivo de tornar o aprendizado mais concreto e acessível. Posteriormente, o conteúdo é ampliado para a probabilidade geométrica, utilizando-se lista de exercícios, ferramentas tecnológicas como o GeoGebra e abordagens interdisciplinares, especialmente com a Biologia.

O diferencial deste trabalho reside na proposta de um método estruturado e contextualizado para o ensino de probabilidade, que não apenas respeita as diretrizes da BNCC, mas também busca despertar o interesse dos estudantes e favorecer a construção de conhecimentos significativos. O produto educacional resultante, melhor descrito posteriormente, tem como público-alvo estudantes do Ensino Médio.

Organizamos o presente trabalho em cinco capítulos, no primeiro trazemos um breve contexto histórico sobre o tema, no segundo trazemos a apresentação Matemática de probabilidade bem como o clássico problema da Agulha de Buffon e um paralelo com a Biologia, no terceiro apresentamos a Teoria Didática e no quarto os planos de aula, no quinto as atividades da sequência didática. Trazemos ainda três apêndices com a finalidade de aprofundar as teorias do Capítulo 2.

---

<sup>2</sup>Método quantitativo para analisar estruturas tridimensionais a partir de amostras bidimensionais

# 1 Breve Contexto Histórico

A ideia de aleatoriedade na Antiguidade não se apresentava como um vácuo de causalidade, mas como um sistema de ordem complexa onde o acaso era domesticado por estruturas matemáticas e simbólicas. Evidências arqueológicas e etnográficas demonstram que na Mesopotâmia o uso de ossos para jogos <sup>1</sup> estabeleceu as raízes da inferência, segundo Bellhouse (1988) [6]. Na China o *I Ching* - o Livro das Mutações - operava através de uma sofisticação combinatória de 64 hexagramas <sup>2</sup> que mapeava o espaço amostral de eventos possíveis conforme Needham (1959) [33]. Na África Central e Ocidental, sistemas como o oráculo de Ifá e o jogo Mancala <sup>3</sup> revelam o uso de lógica binária e probabilidade condicional para a tomada de decisões estratégicas apontam Ascher (1991) e Zaslavsky (1999) [3] [44]. Já na América Pré-Colombiana, a gestão de riscos era exercida tanto pela precisão estatística da astronomia Maia quanto pelo uso de Quipus <sup>4</sup> Incas para prever flutuações demográficas e produtivas segundo Urton (2003) e Closs (1986) [43] [12]. Assim, a aleatoriedade antiga não era a ausência de lei, mas uma manifestação de padrões matemáticos interpretados sob uma lente teológica ou cíclica, onde ferramentas como o jogo asteca Patolli serviam de interface entre o cálculo de chances e o destino.

Ao analisar as raízes históricas do pensamento probabilístico, Raju (2011) [36] argumenta que a compreensão da probabilidade na Índia Antiga divergia fundamentalmente da tradição lógica ocidental ao integrar o empirismo e a incerteza de forma pragmática. Segundo o autor, enquanto a matemática formal moderna frequentemente se ancora em

---

<sup>1</sup>Eram lançados quatro astrágalos simultaneamente. O melhor resultado possível era o “Lançamento de Vênus”, onde cada um dos quatro ossos caía em uma face diferente.

<sup>2</sup>Figuras do sistema chinês I Ching compostas por seis linhas sobrepostas, que podem ser contínuas (Yang) ou quebradas (Yin). Matematicamente, representam um sistema de lógica binária e combinatória que totaliza 64 variações possíveis ( $2^6$ ), funcionando como um modelo exaustivo para classificar estados de mudança e probabilidades de eventos.

<sup>3</sup>Família de jogos de tabuleiro de origem africana baseados na semeadura e colheita de sementes em cavidades. Matematicamente, a Mancala é um sistema de informação perfeita que opera através de aritmética modular e análise combinatória. Diferente dos jogos de azar puros, ela exige que o jogador calcule as ramificações probabilísticas de cada movimento e antecipe as respostas do adversário, funcionando como uma ferramenta pedagógica e estratégica para o gerenciamento de estoques e previsão de excedentes em diversas sociedades tradicionais.

<sup>4</sup>Dispositivos de registro e contabilidade de origem andina, compostos por cordões de algodão ou lã com nós que variavam em cor, posição e tipo. Funcionavam como uma sofisticada base de dados estatística que permitia ao Império Inca processar informações demográficas e agrícolas. Sob a ótica da probabilidade, os quipus eram essenciais para a gestão de riscos, pois permitiam prever a variabilidade das colheitas e organizar a redistribuição de recursos, minimizando as chances de escassez em resposta a eventos climáticos adversos.

abstrações metafísicas e provas puramente dedutivas, os sistemas de conhecimento indianos antigos já operavam com conceitos de frequência e inferência estatística aplicados a contextos do mundo real. Essa perspectiva desafia a narrativa eurocêntrica sobre a origem da teoria, sugerindo que a exclusão de evidências empíricas em favor de uma “verdade matemática absoluta” foi um movimento teórico específico que preparou o terreno para o formalismo ocidental. Nesse sentido, o contraste oferecido pela abordagem oriental ilumina a transição para a sistematização europeia onde, conforme apontam Warsi (2020) e Boyer (1974), o desenvolvimento dos métodos matemáticos para o estudo da probabilidade ganhou contornos rigorosos a partir do século XVI. Foi nesse período que Gerolamo Cardano, em sua obra *Liber de Ludo Aleae* [11] (publicada postumamente em 1663), introduziu os primeiros conceitos de espaço amostral e probabilidade clássica, consolidando as bases para a análise matemática de eventos incertos sob uma nova estrutura formalista e determinística.

No século XVII, Galileu Galilei, em “Sobre os Resultados dos Dados” (1620) [16], resolveu problemas relacionados à soma de pontos no lançamento de três dados (veja Apêndice 4.7.1 - Dados iguais - problema 3.), aprofundando a compreensão sobre distribuições de probabilidade. Pouco depois, em 1654, a troca de correspondências entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat resultou na solução do “Problema dos Pontos” <sup>5</sup>, (veja Seção 4.7.1 - Dados iguais - problema 5.).

No século XVIII, Jacob Bernoulli, em “A Arte da Conjectura” (1713) [7] - publicação póstuma - formulou a Lei dos Grandes Números (LGN) demonstrando como a frequência de um evento se aproxima de sua probabilidade teórica à medida que o número de tentativas aumenta. Pouco depois, Georges-Louis Leclerc, O Conde de Buffon, em seu “Ensaio de Aritmética Moral” (1777) [10], propôs o famoso “Problema da Agulha de Buffon”, veja Seção 2.2. Usando tais resultados é possível chegar a uma aproximação de  $\pi$  (veja Apêndice C).

Também neste período, Pierre-Simon Laplace, em “Memória sobre a Probabilidade das Causas a partir dos Eventos” (1774) [26], desenvolveu métodos fundamentais para a inferência estatística, utilizando a probabilidade para identificar a causa mais provável de um evento observado (veja Seção 2.3). Além disso, fez uma ampliação do “Problema da Agulha de Buffon” agora colocando não somente linhas paralelas em um único sentido, mas formando uma malha retangular (veja Apêndice B). Paralelamente, Thomas Bayes, em “Uma Introdução à Doutrina das Chances” (1736) [5], estabeleceu os princípios da probabilidade condicional, legando à ciência o Teorema de Bayes.

---

<sup>5</sup>Dois jogadores participam de um jogo de competição dividido em várias rodadas independentes, onde o vencedor final é aquele que primeiro atingir um número pré-determinado de vitórias (pontos). Ambos os jogadores depositaram uma quantia igual para formar um prêmio total. Suponha que o jogo seja interrompido inesperadamente antes que qualquer um dos jogadores tenha alcançado o total de pontos necessário para vencer. Como o prêmio acumulado deve ser dividido entre os dois jogadores de forma justa, considerando apenas o número de pontos que cada um já acumulou e as chances que cada um teria de vencer o jogo se ele continuasse até o fim?

No início do século XX o matemático russo Andrey Kolmogorov fundamentou axiomáticamente a Probabilidade através do uso da Teoria da Medida de Lebesgue, tal apresentação pode ser consultada em Kolmogorov 1956 [25] (veja Apêndice A e Capítulo 2 ).

Ao longo do tempo, a probabilidade tem consolidado seu papel fundamental no avanço científico de diversas áreas, especialmente na medicina, onde fundamenta o desenvolvimento de ferramentas para o diagnóstico e análise de estruturas biológicas. Nesse contexto, destaca-se a estereologia, cujos modelos probabilísticos permitem a interpretação de estruturas tridimensionais a partir de amostras de menor dimensão. Um exemplo clássico dessa aplicação é a analogia entre o problema das agulhas de Buffon e os princípios da amostragem geométrica: assim como as interseções de agulhas permitem estimar grandezas geométricas, a abordagem estereológica viabiliza a quantificação de parâmetros de objetos complexos por meio de sondas estatísticas que determinam o volume, a área ou o comprimento de estruturas internas, conforme explorado adiante na Seção 2.3.

Dessa forma, a probabilidade evoluiu de um estudo centrado em jogos de azar para um campo matemático rigoroso com aplicações profundas em diversas áreas do conhecimento, tornando-se uma ferramenta indispensável para a análise da incerteza.

## 2 Fundamentação Teórica Matemática

Neste capítulo trazemos Bases Matemáticas para o estudo da probabilidade discreta e geométrica, baseando-nos na fundamentação axiomática de Kolmogorov, tomando como referência Carvalho e Morgado 2023 [31].

### 2.1 Introdução à Probabilidade

Nessa seção trazemos respectivamente a definição axiomática de probabilidade, algumas propriedades e exemplos.

**Definição 2.1.1.** *Considere o Espaço Amostral  $\Omega$ , o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória, os subconjuntos de  $\Omega$  serão chamados de Eventos.*

*Uma probabilidade é uma função  $P: \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathcal{D}$  satisfaz as seguintes propriedades<sup>1</sup>: É fechado para complementar e para a união contável (enumerável). A função  $P$  associa a cada elemento (Evento)  $A \in \mathcal{D}$  um número  $P(A)$  de maneira que*

I.  $0 \leq P(A) \leq 1$  para todo  $A \in \mathcal{D}$ ;

II.  $P(\Omega) = 1$ ;

III. Se  $A$  e  $B$  são Eventos mutuamente excludentes, ou seja, disjuntos, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

### Propriedades das Probabilidades

Nesta subseção apresentamos algumas Propriedades das Probabilidades.

i.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ , em que  $\bar{A}$  é o complementar de  $A$

ii.  $P(\emptyset) = 0$

iii.  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

iv.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

v.  $B \subset A \implies P(B) \leq P(A)$

---

<sup>1</sup>Um conjunto que goza dessas propriedades é chamado de  $\sigma$ -álgebra, veja Apêndice A

### Demonstrações

- i.  $1 = P(\Omega) = P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- ii.  $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$
- iii.  $P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B)$ , pois  $A - B$  e  $A \cap B$  são disjuntos, donde  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- iv.  $P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B] = P(A - B) + P(B)$ , pois  $A$  e  $B$  são disjuntos, logo, pelo item anterior, temos  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- v. Como  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$  e  $B \subset A$  implica  $B = A \cap B$ , temos que  $P(A - B) = P(A) - P(B)$ . Como  $0 \leq P(A - B) \leq 1$  então  $0 \leq P(A) - P(B) \leq 1$ , ou seja,  $P(B) \leq P(A)$

Tais propriedades podem ser utilizadas na resolução de problemas.

**Exemplo 2.1.1.** Tome  $\Omega$  finito com número de elementos de  $\Omega$  igual a  $k$ , isto é,  $n(\Omega) = k$ , digamos,  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  e  $\mathcal{D} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Para cada  $A \in \mathcal{D}$ , considere

$$P(A) = \frac{n(A)}{k}$$

Mostraremos que  $P$  define uma probabilidade.

### Solução

Observe inicialmente que  $\mathcal{D} = \mathcal{P}(\Omega)$  é fechado para complementar e para a união enumerável que, neste caso, resume-se a união finita. Vamos então verificar as propriedades relativas à função aqui definida.

- I. Para todo evento  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

$$A \subset \Omega \implies n(A) \leq k \implies 0 \leq \frac{n(A)}{k} \leq 1 \implies 0 \leq P(A) \leq 1$$

- II.  $P(\Omega) = 1$ . Com efeito

$$P(\Omega) = \frac{k}{k} = 1$$

- III. Se  $A$  e  $B$  são Eventos mutuamente excludentes, ou seja, disjuntos, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

De fato,

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{k}$$

Como  $A$  e  $B$  são disjuntos, então  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  logo,

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{k} = \frac{n(A) + n(B)}{k} = \frac{n(A)}{k} + \frac{n(B)}{k} = P(A) + P(B)$$

### Comentário 1

É imediato que  $P(\emptyset) = 0$ , pois a cardinalidade do vazio é zero, dado que ele não tem elementos.

### Comentário 2

Se  $A$  é um subconjunto unitário de  $\Omega$ , então

$$P(A) = \frac{1}{k}$$

**Exemplo 2.1.2.** *Sejam  $\Omega$  um conjunto finito, com  $n(\Omega) = k$ , digamos  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , e  $a_1, a_2, \dots, a_k$  constantes reais tal que  $a_i > 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  e*

$$\sum_{i=1}^k a_i = 1$$

*Considerando  $\mathcal{D} = \mathcal{P}(\Omega)$  sendo  $\mathcal{P}(\Omega)$  o conjunto das partes de  $\Omega$ . Definimos*

$$P(A) = \sum_{x_i \in A} a_i \tag{2.1}$$

### Solução

Aqui o domínio é o mesmo do exemplo anterior. No que segue vamos verificar que a igualdade 2.1 define uma Probabilidade, ou seja a função definida satisfaz a Definição 2.1.1.

I. Para todo evento  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ; Como,

$$P(A) = \sum_{x_i \in A} a_i$$

e também

$$\sum_{i=1}^k a_i = 1$$

com  $a_i > 0$  para todo  $i$ , é imediato  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

II.  $P(\Omega) = 1$ ; Ora,

$$P(\Omega) = \sum_{x_i \in \Omega} a_i = \sum_{i=1}^k a_i = 1$$

III. Se  $A$  e  $B$  são Eventos mutuamente excludentes, ou seja, disjuntos, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Temos que

$$P(A \cup B) = \sum_{x_i \in A \cup B} a_i$$

Como  $A$  e  $B$  são disjuntos podemos escrever

$$P(A \cup B) = \sum_{x_i \in A \cup B} a_i = \sum_{x_i \in A} a_i + \sum_{x_j \in B} a_j = P(A) + P(B)$$

**Exemplo 2.1.3.** *Seja  $\Omega$  um intervalo limitado de  $\mathbb{R}$  e seja  $A \subset \mathcal{D}$ . Considere  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ , é a coleção de subconjuntos de  $\Omega$  admissíveis para a função comprimento (veja o Exemplo A.2), observe que  $\mathcal{D} \neq \mathcal{P}(\Omega)$ . Para calcular a medida  $\mu$  do segmento  $[a, b]$  use a fórmula  $\mu([a, b]) = b - a$ ; dada a função  $P: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\mathcal{D})}$$

é uma probabilidade?

### Solução

Com efeito

- I. Para todo evento  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Como  $A \subset \mathcal{D}$ , então  $\mu(A) \leq \mu(\mathcal{D})$ . Para o caso de  $a = b$  temos  $\mu([a, b]) = 0$ , daí  $P([a, b]) = 0$  portanto,  $0 \leq P(A) \leq 1$
- II.  $P(\Omega) = 1$ . Sempre verdadeiro, pois

$$P(\Omega) = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega)} = 1$$

III. Se  $A$  e  $B$  são Eventos mutuamente excludentes, ou seja, disjuntos, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{\mu(A \cup B)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(A) + \mu(B)}{\mu(\Omega)}$$

Finalmente

$$P(A \cup B) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} + \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = P(A) + P(B)$$

Portanto, a função dada é sim uma probabilidade.

**Exemplo 2.1.4.** Considere  $\Omega$  uma região admissível para área (veja o Exemplo A.3),  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  é a coleção de subconjuntos de  $\Omega$  admissíveis para a função área, considere  $A \in \mathcal{D}$ , a função  $P: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$P(A) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\Omega)} \quad (2.2)$$

é uma probabilidade ?

### Solução

Vamos verificar que a identidade (2.2) é uma probabilidade.

I. Para todo evento  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;

$$A \in \mathcal{D} \implies 0 \leq \text{area}(A) \leq \text{area}(\Omega) \implies 0 \leq \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\Omega)} \leq 1 \implies 0 \leq P(A) \leq 1$$

II.  $P(\Omega) = 1$ ;

$$P(\Omega) = \frac{\text{area}(\Omega)}{\text{area}(\Omega)} = 1$$

III. Se  $A$  e  $B$  são Eventos mutuamente excludentes, ou seja, disjuntos, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{\text{area}(A \cup B)}{\text{area}(\Omega)} = \frac{\text{area}(A) + \text{area}(B)}{\text{area}(\Omega)}$$

Pois são  $A$  e  $B$  são disjuntos, Concluimos que

$$P(A \cup B) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\Omega)} + \frac{\text{area}(B)}{\text{area}(\Omega)} = P(A) + P(B)$$

De maneira análoga, podemos definir uma probabilidade a partir do volume.

## 2.2 Problema da Agulha de Buffon

Nesta seção iremos enunciar e resolver o Problema da Agulha de Buffon baseado em Ramaley, 1969 [37], tal abordagem utiliza o seno na sua argumentação, mas existem soluções utilizando o cosseno, como pode ser visto em Gomes, Diniz e Teodoro, 2021 [18] ou usando cosseno e integral dupla como apresentada por Solomon, 1978 [41].

## Problema

Suponha que, em um salão cujo assoalho é dividido apenas por fissuras paralelas e igualmente espaçadas, alguém joga para o alto uma vareta com medida menor que o espaço entre as fissuras, e um dos jogadores aposta que ela não cruzará nenhuma das paralelas do assoalho, enquanto o outro, ao contrário, aposte que a vareta cruzará algumas dessas paralelas; qual a vantagem [probabilidade] de um jogador sobre o outro?

## Solução

Considere que a agulha tem comprimento  $l$ . Tome um Sistema de Coordenadas Cartesianas  $XY$  sendo a origem  $O = (0, 0)$  colocada no início da agulha. Seja  $y$  a distância do eixo das abcissas à fissura e  $h$  a distância do final da agulha à fissura. Admita que  $x$  é o ângulo formado pela agulha com o eixo das abcissas no sentido anti-horário. Tome ainda  $d$  como sendo o espaçamento entre cada fissura. Observe a ilustração.

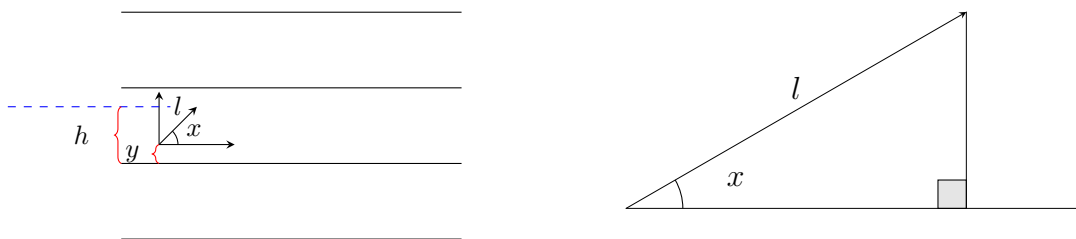


Figura 2.1: Experimento de Buffon.

Haverá cruzamento quando:  $h \leq 0$  ou  $d \leq h$ . Perceba que  $h = y + l \cdot \text{sen}(x)$ , logo:

$$h \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq -l \cdot \text{sen}(x)$$

O segundo caso é

$$d \leq h \quad \Leftrightarrow \quad y \leq d - l \cdot \text{sen}(x)$$

Seja  $\Omega$  o espaço amostral, perceba que o ângulo  $x$  varia de 0 a  $2\pi$  o valor de  $h$  é no máximo  $d$ , então a medida do espaço amostral é  $\mu(\Omega) = 2\pi \cdot d$ , observe a ilustração:

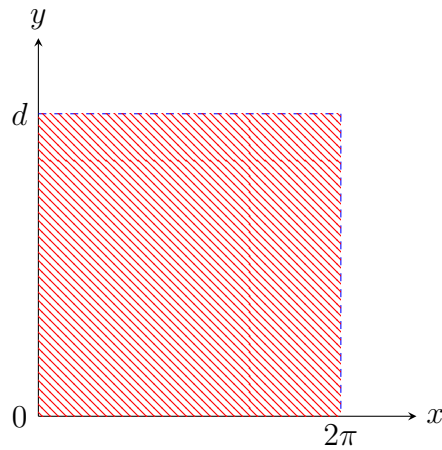


Figura 2.2: Gráfico do Espaço Amostral.

Já aqui montamos o gráfico das funções que caracterizam o cruzamento e marcamos a parte desejada, observe:<sup>2</sup>

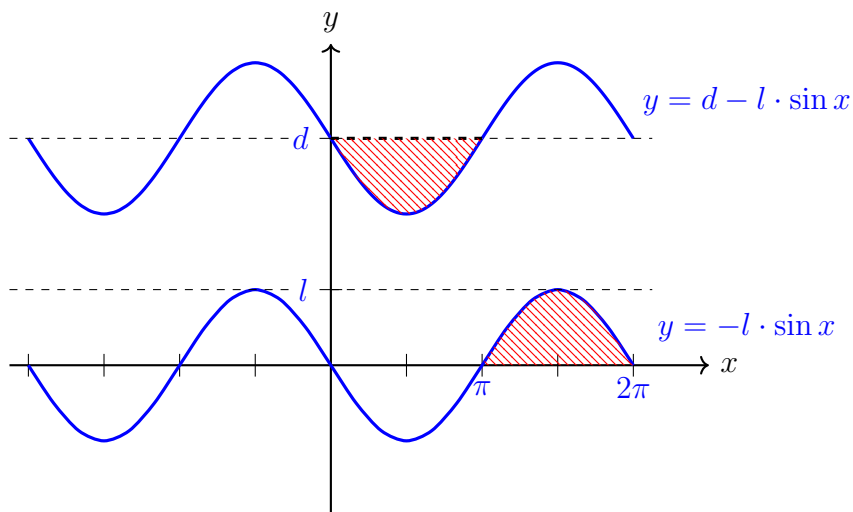


Figura 2.3: Gráfico do evento desejado.

$$2 \cdot \int_{\pi}^{2\pi} -l \cdot \sin(x) dx = 2 \cdot l \cdot \cos(x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4 \cdot l$$

Considere  $A$  o evento desejado, ou seja, cruzar a fissura. Temos o seguinte cálculo de Probabilidade:

$$P(A) = \frac{4 \cdot l}{2\pi \cdot d} \iff P(A) = 2 \cdot \frac{l}{\pi \cdot d}$$

Portanto, a probabilidade de tocar a fissura é:

$$P(A) = 2 \cdot \frac{l}{\pi \cdot d}$$

<sup>2</sup>Para os alunos do Ensino Básico, recomendamos o uso do GeoGebra para o cálculo dessa área. (veja a subseção 4.7.13).

Ao passo que a de não tocar é

$$P(\bar{A}) = 1 - 2 \cdot \frac{l}{\pi \cdot d} = \frac{\pi \cdot d - 2 \cdot l}{\pi \cdot d}$$

### Observações

- Aqui realizamos o cálculo para fissuras paralelas. É chamado Problema de Laplace e é apresentado no Apêndice B o estudo para uma malha retangular.
- No problema agora estudado consideramos  $l < d$ . O caso  $l > d$  é conhecido como o Problema da Longa Agulha de Buffon, uma outra abordagem para tal pode ser vista em Solomon, 1978 [41].

## 2.3 Emprego da Agulha de Buffon em Métodos Estereológicos.

A estereologia, campo científico interdisciplinar (Matemática e Biologia) que combina princípios da geometria, estatística e amostragem para estudar a estrutura tridimensional de objetos a partir de análises feitas em cortes ou projeções bidimensionais (Moutoun 2011)[32] permite obter *estimativas imparciais*<sup>3</sup> de comprimento e superfície em estruturas biológicas por meio da *análise sistemática*<sup>4</sup> e aleatória de imagens microscópicas. Essa abordagem utiliza *sondas geométricas*<sup>5</sup> (superfícies ou segmentos de linha) que interagem com as estruturas de interesse, como vasos sanguíneos ou membranas celulares, sob a condição fundamental de *isotropia*<sup>6</sup> — ou seja, sem favorecer orientação específica. Para melhor compreensão do texto observe a ilustração abaixo.

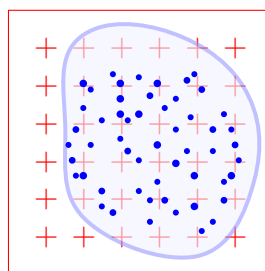


Figura 2.4: Ilustração de estrutura linear em sonda

<sup>3</sup>Referem-se a métodos quantitativos que fornecem resultados estatisticamente não desviados do valor real da característica medida (volume, número, superfície, etc.).

<sup>4</sup>Em estereologia, a análise sistemática é uma estratégia de seleção de amostras (cortes, campos microscópicos ou seções) que combina regularidade no intervalo de amostragem com aleatorização do ponto de partida.

<sup>5</sup>São ferramentas ou formas geométricas usadas para amostrar estruturas tridimensionais a partir de imagens bidimensionais (como cortes histológicos ou imagens microscópicas).

<sup>6</sup>Uma estrutura biológica é isotrópica se a distribuição espacial de suas partes é igual em todas as direções. Isso é importante para evitar viés nas estimativas feitas com sondas geométricas.

Quando um cientista está estudando determinado órgão, seja um coração, um rim ou outro qualquer, ele retira a amostra do tecido (representada em azul na figura 2.4) e na sequência coloca-a na sonda geométrica, representada pela malha vermelha. Caso seja uma estrutura linear, como um nervo ou um vaso sanguíneo temos a ilustração 2.5, a sonda é a malha vermelha e o tecido a linha azul.

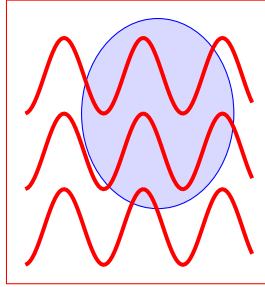


Figura 2.5: Ilustração de superfície de tecido em sonda.

Para estimar o comprimento por volume<sup>7</sup> ( $L_V$ ), veja a figura 2.4, de estruturas lineares (nervos, por exemplo), emprega-se a relação:

$$L_V = 2 \cdot \frac{Q}{A}$$

Em que:

- $Q$ : número de interseções entre os filamentos (pontos azuis) e a sonda;
- $A$ : área da superfície da amostra.

Para calcular a área de superfície por volume<sup>8</sup> ( $S_V$ ), veja a figura 2.5, de estruturas superficiais (membranas, por exemplo), emprega-se a relação:

$$S_V = 2 \cdot \frac{I}{L}$$

- $I$ : interseções entre a sonda de linha e a fronteira da superfície;
- $L$ : comprimento total das sondas de linha.

Exemplos numéricos podem ser vistos na Seção 4.7.14

A relação fundamental das fórmulas estereológicas reside na interpretação intuitiva de seus componentes: o numerador ( $Q$  ou  $I$ ), que representa o número de interseções, reflete diretamente a quantidade de estruturas presentes, onde um maior número de interseções indica uma maior densidade de elementos no volume analisado; enquanto o

<sup>7</sup>Expressa a quantidade de comprimento de uma estrutura linear existente por unidade de volume, permitindo estimar o quão densamente essa estrutura está distribuída no espaço analisado.

<sup>8</sup>expressa a quantidade de superfície exposta por unidade de volume, indicando o quão "superficialmente densa" é uma estrutura dentro do espaço analisado.

denominador (A ou L), que corresponde ao tamanho da sonda utilizada, atua como fator de normalização, pois uma sonda de maiores dimensões que intercepta o mesmo número de estruturas necessariamente implica em uma menor densidade relativa. Essa correlação inversamente proporcional entre o tamanho da sonda e a densidade estimada é tão fundamental que se manifesta até mesmo em sistemas biológicos complexos, como no comportamento de navegação de formigas (Mallon e Franks, 2000)[29], onde princípios análogos de amostragem espacial são empregados para otimizar a exploração do ambiente.

Os princípios de isotropia e aleatoriedade são essenciais para garantir estimativas precisas, pois eliminam vieses causados por orientações preferenciais durante a amostragem. A proporcionalidade direta entre o número de interseções e a quantidade real de estruturas no volume analisado estabelece uma relação quantitativa confiável. Em síntese, essas fórmulas estereológicas oferecem um método para quantificação de características microscópicas, desde que as sondas sejam aplicadas de forma isotrópica e sistemática, mantendo assim o equilíbrio adequado entre as interseções observadas e o tamanho da sonda utilizada - relação fundamental que assegura a acurácia das medições em estudos tridimensionais baseados em cortes bidimensionais.

**No contexto do problema da agulha de Buffon**, a probabilidade de uma agulha interceptar uma linha depende tanto do comprimento da agulha quanto da distância entre as linhas paralelas. Analogamente, nas fórmulas estereológicas, a densidade de estruturas ( $L_V$  ou  $S_V$ ) é estimada com base na razão entre o número de interseções e o tamanho da sonda, refletindo a mesma lógica de normalização. O fator 2 presente em ambas as fórmulas surge da consideração de que as interseções podem ocorrer em ambos os “lados” da sonda, assim como no problema de Buffon, onde a agulha pode interceptar uma linha em qualquer orientação.

A interpretação unificada dessas fórmulas destaca a importância da normalização pelo tamanho da sonda e a relação direta entre interseções e densidade, conceitos fundamentais tanto na estereologia quanto em problemas clássicos de Probabilidade Geométrica, a partir desses estudos é possível detectar doenças mediante a análise de dados.

**Tabela Com Valores de Referência Reais** Valor Saudável (VS) é uma abreviação

Parâmetro	Tipo de Tecido	VS (Saudável)	VP (Patológico)	Referência
Densidade de capilares ( $L_V$ )	Ventrículo esquerdo (rato)	$2.800 \pm 250 \text{ mm/mm}^3$	$< 2.100 \text{ mm/mm}^3$ (Hipertrofia Cardíaca)	[30]
Densidade de miócitos ( $L_V$ )	Ventrículo esquerdo (humano)	$220 \pm 35 \text{ mm/mm}^3$	$< 160 \text{ mm/mm}^3$ (Cardiomiopatia Dilatada)	[35]
Densidade de superfície ( $S_V$ )	Miocárdio (mamífero médio)	$65 \pm 10 \text{ mm}^2/\text{mm}^3$	$< 45 \text{ mm}^2/\text{mm}^3$ (Insuficiência Cardíaca)	[2]

Tabela 2.1: Parâmetros Estereológicos Cardíacos Reais

viação que representa a média de um parâmetro biológico ou fisiológico dentro de uma faixa considerada normal, geralmente expressa como a média mais ou menos o desvio

padrão. Essa variação indica os valores esperados em indivíduos saudáveis, refletindo a dispersão estatística dos dados em uma população sem alterações relevantes. Por outro lado, Valor Patológico (VP) refere-se a resultados que estão fora dessa faixa de normalidade, indicando a possível presença de doenças, disfunções ou alterações no organismo. Enquanto o VS serve como referência para avaliar o estado de saúde, o VP sinaliza a necessidade de investigação clínica mais aprofundada, pois pode estar associado a condições adversas que requerem intervenção médica. Ambos os conceitos são essenciais para a interpretação de exames e parâmetros clínicos.

Essa conexão evidencia como princípios probabilísticos simples, como os explorados no problema da agulha de Buffon, podem ser estendidos para métodos quantitativos sofisticados em estereologia, permitindo a inferência de propriedades tridimensionais a partir de medidas bidimensionais ou unidimensionais. Mais à frente traremos uma sequência didática como proposta de trabalho.

## 3 Sequência Didática

As Sequências Didáticas desempenham um papel central atuando como ferramentas pedagógicas essenciais para organizar e otimizar o processo de aprendizagem (Sousa, 2025)[42]. A estratégia adotada será descrita em quatro partes, em correspondência a cada subproduto gerado. A saber:

- 3.1 Ensino de Probabilidade Discreta: Exercícios, Jogos e Experimentos;
- 3.2 Probabilidade Geométrica: Exercícios e GeoGebra;
- 3.3 Ensino do Problema da Agulha de Buffon;
- 3.4 Aula prática e interdisciplinaridade.

Iremos nos deter agora em cada uma das partes separadamente.

### 3.1 Ensino de Probabilidade Discreta: Exercícios, Jogos e Experimentos.

Os fundamentos teóricos expostos por Grinstead e Snell (2006) [19], Carvalho e Morgado (2023)[31] e a coleção Conexões da Ed. Moderna [27], o livro didático do aluno, constituíram a base conceitual para o trabalho desenvolvido com o material didático do LabMat. Este material, recebido pela Escola Estadual Interventor Ubaldo Bezerra de Melo em dois mil e vinte e dois no contexto da implementação do Novo Ensino Médio, foi objeto de estudo e adaptação por parte da equipe. Em dois mil e vinte e três, sob coordenação do professor Andson Torres, autor desta dissertação, e com a colaboração de bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), realizamos a sistematização e aplicação da parte relativa à Matemática. A componente de Física, por sua especificidade, demandaria posterior intervenção de docente especializado, considerando que o Laboratório foi concebido para atender integralmente ambos os componentes curriculares.

As atividades foram desenvolvidas com base em metodologias ativas de aprendizagem, permitindo que os estudantes construam o conhecimento de maneira participativa

e investigativa. Cada jogo ou experimento é planejado para ser trabalhado em duas aulas, favorecendo uma exploração aprofundada das situações propostas. A condução das aulas será pautada por uma abordagem exploratória: os estudantes participam dos jogos enquanto o(a) professor(a) atua como mediador, promovendo questionamentos e incentivando a formulação de hipóteses e a argumentação matemática. a seguir apresentaremos brevemente as atividades que estamos propondo, para mais detalhes veja Capítulo 4.7.1

A primeira atividade proposta envolve o lançamento de dois dados comuns de seis faces, nos quais os jogadores somam os valores obtidos. Essa atividade permite uma introdução ao conceito de espaço amostral e à contagem de eventos possíveis, favorecendo a discussão sobre simetria, equiprobabilidade e variações nas somas possíveis. Na sequência, é introduzido uma atividade com dois dados de formatos diferentes, tais como D4, D6, D8, D12 e D20. Nesse jogo, cada jogador escolhe dois dados de diferentes formatos e os lança simultaneamente, vencendo aquele que obtiver a maior soma. A diversidade de faces amplia o espaço amostral e favorece a análise combinatória de possibilidades, além de estimular o pensamento probabilístico em contextos não usuais.

A terceira atividade consiste no lançamento conjunto de um dado e uma moeda, explorando eventos compostos e independentes. A integração desses dois elementos permite trabalhar de forma clara os conceitos de interseção e união de eventos, bem como o cálculo de probabilidades em situações compostas por experimentos distintos. Outra atividade envolve o uso de dados coloridos e uma roleta, onde a cor sorteada na roleta determina qual dado deverá ser lançado. A roleta é dividida igualmente em quatro setores com cores distintas, e os dados utilizados possuem o mesmo código de cores. Essa atividade possibilita a abordagem da probabilidade condicional e a análise de experimentos aleatórios em etapas sucessivas, aproximando os estudantes da ideia de árvore de possibilidades.

A atividade utilizando o baralho comum foi planejada com o objetivo de explorar a organização do conjunto de cartas e as possíveis modificações no espaço amostral, como a retirada de cartas com números ímpares ou com letras. A partir dela, os estudantes são incentivados a refletir sobre como alterações no conjunto total impactam as probabilidades associadas aos eventos. Além disso, a atividade possibilita a análise de retiradas com e sem reposição, o que contribui para a compreensão de como as condições do experimento influenciam os eventos subsequentes, promovendo uma análise mais profunda da dinâmica probabilística.

Entretanto, é importante esclarecer que o uso desses materiais nesse contexto não visa, de forma alguma, promover ou incentivar práticas associadas a jogos de azar. Ao contrário, trata-se de um recurso pedagógico que busca proporcionar aos estudantes uma vivência prática das noções probabilísticas em um ambiente controlado e sem caráter de risco. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p. 48)[9] destacam que as atividades com jogos devem ser planejadas para desenvolver habilidades cognitivas, jamais para estimular comportamentos de risco.

O(a) professor(a) deve estar atento(a) ao contexto e ao modo de condução dessas atividades, adotando uma postura mediadora que guie os alunos para uma compreensão crítica e matemática dos conceitos envolvidos. A mediação do(a) professor(a) é essencial para manter o caráter educacional da atividade, assegurando que os alunos compreendam a matemática por trás dos jogos e, ao mesmo tempo, adquiram uma visão crítica sobre a utilização de jogos em contextos diversos.

A utilização de bolinhas coloridas em urnas constitui outra atividade proposta. A urna contém bolinhas de diferentes cores, com repetições de algumas delas. As retiradas podem ser feitas com ou sem reposição, e o objetivo é estimular os estudantes a identificarem e calcularem a probabilidade de eventos envolvendo características específicas das bolinhas, como cor ou ordem de retirada.

Por fim, propomos o uso de bolinhas numeradas de 1 a 20, com retiradas feitas de forma aleatória. Essa atividade permite explorar propriedades matemáticas dos números, como paridade e primalidade, associando essas características ao cálculo de probabilidades em retiradas sucessivas. Trabalhar com retiradas sem reposição reforça a percepção de que o espaço amostral se altera ao longo do experimento, o que exige dos estudantes uma reavaliação constante das possibilidades e estratégias.

Essas atividades foram planejadas com o intuito de promover um ensino investigativo, lúdico e significativo da probabilidade discreta. Elas contribuem para o desenvolvimento de competências previstas na BNCC, como o raciocínio lógico, a argumentação, a resolução de problemas e a tomada de decisões fundamentadas em dados. Além disso, criam um ambiente de aprendizagem no qual o estudante assume um papel ativo na construção do conhecimento, favorecendo o engajamento e a compreensão profunda dos conceitos probabilísticos. Tal perspectiva alinha-se à função central das Sequências Didáticas como ferramentas pedagógicas que organizam e otimizam o processo de aprendizagem, permitindo uma mediação docente que guia o aluno em uma exploração aprofundada das situações propostas, Sousa; Gutierrez, 2025 [42].

## **3.2 Probabilidade Geométrica: Exercícios e GeoGebra.**

Como parte das estratégias didáticas adotadas nesta pesquisa, será utilizada uma atividade prática com o objetivo de explorar o conceito de probabilidade geométrica com os estudantes. A proposta consiste em uma situação-problema que relaciona medidas geométricas com a ideia de probabilidade, permitindo que os alunos compreendam esse conteúdo por meio de uma abordagem contextualizada e investigativa. A atividade é pensada para ser aplicada em sala de aula como recurso para promover a aprendizagem ativa, Dewey 1938 [14], estimulando os estudantes a formularem hipóteses, realizarem experimentações e construir significados a partir da análise de comprimentos, áreas

e volumes. Essa metodologia visa contribuir para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e da autonomia intelectual dos alunos, além de favorecer a articulação entre conteúdos de geometria e probabilidade de forma significativa.

Com o objetivo de potencializar a aprendizagem significativa e proporcionar uma representação dinâmica e interativa das situações-problema, optamos pela utilização do software GeoGebra como recurso tecnológico mediador, pois essa ferramenta permite aos alunos explorarem visualmente conceitos geométricos e analisarem representações gráficas, transformando abstrações matemáticas em construções tangíveis como aponta Hohewarter, 2009[20].

A atividade será dividida em três etapas principais, de acordo com as grandezas geométricas abordadas: comprimento de segmentos, medida de áreas e cálculo de volumes. Na primeira etapa, os alunos irão trabalhar com segmentos em uma reta ou em figuras lineares, analisando a probabilidade de um ponto, escolhido aleatoriamente em um intervalo, pertencer a uma determinada subparte desse intervalo. Na segunda etapa, o foco será o cálculo de áreas de figuras planas, como quadrados, círculos ou figuras compostas. Os estudantes deverão determinar a probabilidade de um ponto, escolhido ao acaso dentro de uma região maior, pertencer a uma sub-região específica. Por fim, a terceira etapa abordará o conceito de volume, desafiando os alunos a pensar em situações espaciais tridimensionais. A proposta envolve a determinação da probabilidade de um ponto, escolhido aleatoriamente dentro de um sólido geométrico, pertencer a uma região interna delimitada por outro sólido.

Essas três etapas compõem uma sequência didática, que permite aos alunos construir gradualmente o conceito de probabilidade geométrica, sempre relacionando os aspectos métricos das figuras com as ideias de aleatoriedade e proporcionalidade. A atividade será acompanhada de momentos de discussão coletiva e reflexão, incentivando a comunicação matemática e a validação dos resultados por diferentes estratégias. Dessa forma, pretendemos oferecer uma experiência de aprendizagem rica, desafiadora e coerente com os princípios da Educação Matemática crítica e investigativa, utilizando a tecnologia digital de maneira pontual e estratégica no processo de ensino e aprendizagem.

### **3.3 Estratégias de Ensino do Problema da Agulha de Buffon**

A presente seção aponta a abordagem didática adotada para a exploração do Problema da Agulha de Buffon em sala de aula, utilizando a base teórica da Seção 2.2. A metodologia proposta articula uma dupla abordagem, a saber: exposição teórica e modelagem computacional com uso do GeoGebra, sua importância já foi citada na Seção 3.2, visando proporcionar uma compreensão integral do fenômeno probabilístico. A grande

razão do uso desse para esse contexto *software* é o cálculo da área entre a função seno e o Eixo das Abscissas, detalhado em 4.7.13, tópico não estudado no Ensino Básico.

### **3.4 Aula prática e interdisciplinaridade.**

O sistema cardiovascular é a rede responsável pelo transporte de sangue, oxigênio e nutrientes por todo o corpo, sendo o coração o seu órgão central e propulsor, conforme Amabis 2016 [1]. Para estudar a anatomia cardíaca, o coração de boi serve como um modelo ideal, pois apresenta a mesma estrutura básica de todos os mamíferos. Para iniciar a dissecação, são necessários alguns materiais, citamos todos em 4.4 . Inicia-se então o procedimento, apresentamos as estruturas biológicas e na sequência fazemos uma secção fazendo alusão à figura 2.5.

# 4 Procedimentos Didáticos: Planejamentos

Neste capítulo iremos descrever o caminho utilizado para unir toda a parte teórica, explanada no capítulo 3, à prática em sala de aula, os códigos citados ao longo dos dessa proposta de ensino são retirados da BNCC [8].

## 4.1 Probabilidade Discreta

A definição de Probabilidade Discreta está no início do trabalho 3.1. Abaixo trazemos uma abordagem didática de tal componente.

### **Competência Específica 03:**

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

### **Habilidades:**

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

### **Objeto de Conhecimento:**

Probabilidade Discreta

**Objetivos Específicos:**

Promover a experiência em resolver problemas que envolvem probabilidade.

**Estratégias de Interação:**

Resolução de exercícios do livro didático;

Aulas no laboratório de Matemática abordando jogos e experimentos descritos no Apêndice 4.7.1;

**Proposta de Atividade Avaliativa:**

Atividade escrita e em dupla, veja 4.7.7 - 3,0 pontos

Atividade abordando materiais do laboratório, veja 4.7.5 – 2,0 pontos

Prova escrita, veja 4.7.3 - 5,0 pontos

**Referências:**

MODERNA (ed.) 2020 [27] BNCC 2018 [8]

## 4.2 Probabilidade Geométrica

Nesta seção iremos abordar os planos de aula sobre Probabilidade Geométrica, a definição desse conceito pode ser vista em 3.2

**Competência Específica 05:**

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

**Habilidades:**

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades

**Objeto de Conhecimento:**

Probabilidade Geométrica

**Objetivos Específicos:**

Promover a experiência em resolver problemas que envolvem probabilidade.

**Estratégias de Interação:**

Resolução de exercícios da lista da Seção 4.7.9;

Aulas no Laboratório de Ensino de Matemática e no Laboratório de Informática de acordo com a lista de exercícios da Seção 4.7.9.

**Proposta de Atividade Avaliativa:**

Prova - 5,0 pontos

**Referências:**

BNCC 2018 [8], SILVA 2017 [39], SILVA 2013 [40],  
KAYSER 2023 [24], NEVES 2011 [34].

## 4.3 Problema da Agulha de Buffon

**Competência Específica 05:**

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

**Habilidades:**

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades

**Objeto de Conhecimento:**

Probabilidade Geométrica

**Objetivos Específicos:**

Compreender o problema da Agulha de Buffon

**Estratégias de Interação:**

Análise gráfica da situação<sup>1</sup> no Geogebra - veja Apêndice 4.7.13

**Proposta de Atividade Avaliativa:**

Atividade escrita - 2,5 pontos.

**Referências:**

RAMALEYY 1969,[37] HOHENWAR 2009,[20] DEWEY 1979 [14]

## 4.4 Aula Conjunta: Matemática e Biologia

**Competências Específicas:****Matemática - n°05**

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

**Biologia - n°03** Analisar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

**Habilidades:**

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades

(EM13CNT301) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

(EM13CNT302) Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos – interpretando gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, elaborando textos e utilizando diferentes

---

<sup>1</sup>A situação a qual nos referimos é a já realizada acima na subseção 2.2

mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) –, de modo a promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural.

**Objeto de Conhecimento:**

Probabilidade Geométrica, Sistema Cardíaco.

**Objetivos Específicos:**

Compreender uma aplicação do problema da Agulha de Buffon;

Compreender o funcionamento do Sistema Cardíaco.

**Estratégias de Interação:**

Aula prática e interdisciplinar de Matemática e Biologia - dissecação de um coração

**Materiais:**

- Coração bovino;
- Uma bandeja;
- Luvas;
- Avental;
- Bisturi;
- Tesoura;
- Pinças

**Descrição da Confecção da Sonda Estereológica Artesanal**

Diante da inexistência de sondas comerciais para a aplicação prática dos métodos estereológicos na escola, optamos pela confecção de um protótipo artesanal. O equipamento consiste em uma estrutura de suporte e uma interface de medição, descritas a seguir:

**Estrutura (Caixa de Inspeção):** Utilizou-se uma caixa de MDF (madeira prensada) para servir de base e suporte para a amostra biológica.

**Interface de Medição (Tampa de Sondagem):** A tampa da caixa foi confeccionada em acrílico transparente, material que permite a visualização direta da estrutura a ser analisada.

**Gravação da Sonda:** Sobre a superfície do acrílico, realizamos a plotagem manual ou gravação dos desenhos das sondas geométricas discutidas na fundamentação teórica. Dependendo do parâmetro a ser estimado, utilizamos:

- Sondas de Cruz: Compostas por interseções de linhas para a estimativa do comprimento por volume ( $L_V$ ).
- Sondas Curvas: Desenhos sinuosos utilizados para o cálculo da área superficial por volume ( $S_V$ ).

Este recurso didático permite que os estudantes simulem o procedimento realizado em laboratórios de biologia celular, posicionando o tecido biológico (ou um modelo representativo) no interior da caixa e sobrepondo a tampa de acrílico. Através da contagem das interseções entre a estrutura biológica e o desenho na tampa, os alunos aplicam as fórmulas baseadas no Problema da Agulha de Buffon, concretizando a conexão entre a geometria e as ciências da vida

### Procedimento

Observar as estruturas externas do coração, incisão longitudinal, isto é um corte na vertical, na parede da artéria aorta e incisão na parede do ventrículo esquerdo. Após aberto observar as estruturas internas.

### Proposta de Atividade Avaliativa:

Atividade escrita - 2,5 pontos.

## 4.5 Cálculo da Nota Final

O cálculo da nota final do aluno será feito da seguinte forma

$$N = \frac{N_{PD} + N_{PG} + N_A + N_{AB}}{2}$$

Em que

- $N$  = Nota Final
- $N_{PD}$  = Nota de Probabilidade Discreta;
- $N_{PG}$  = Nota de Probabilidade Geométrica;
- $N_A$  = Nota da Agulha de Buffon;
- $N_{AB}$  = Nota da Aplicação à Biologia.

O fato da divisão por dois se dá pois  $N_{PD}$  varia de 0 a 10, e também a soma  $N_{PG} + N_A + N_{AB}$  varia de 0 a 10

## 4.6 Conclusão e Perspectivas

Os planos de aula apresentados neste capítulo demonstram como a probabilidade geométrica, em especial o problema da Agulha de Buffon, pode ser trabalhada de forma interdisciplinar com a Biologia, proporcionando uma abordagem prática e contextualizada. Ao relacionar conceitos matemáticos com a análise do sistema circulatório — seja por meio da dissecação de um coração real ou da simulação de padrões vasculares —, busca-se não apenas consolidar o aprendizado teórico, mas também estimular nos alunos uma visão integrada da ciência

## 4.7 Atividades

A confecção das atividades desse Produto Educacional foram baseadas em Silva 2017 [39], Silva 2013 [40], Moderna 2020, [27] Kayser [24] e Enem (2011-2012)[21, 22], Unicamp 2024 [13]

### 4.7.1 Jogos e Experimentos - Probabilidade Discreta

Abaixo a descrição de alguns jogos/experimentos que serão utilizados em sala de aula, a aula será conduzida da seguinte forma, os alunos irão jogando e o professor irá propondo os questionamentos da seção “Perguntas a serem feitas”. Cada jogo desse será trabalhado em sala de aula.

#### Jogo de dois dados iguais

##### Material:

Dois dados quaisquer de um único formato, por exemplo, dois dados D6, dois dados D12, dois dados D20.

##### Modo de jogar:

Joga-se dois dados e soma-se o valor que der em cada um. Quem obtiver o maior resultado ganha.

##### Perguntas a serem feitas:

1. No lançamento de um único dado D6, qual a probabilidade de:
  - (a) Sair o número 4?
  - (b) Sair um número par?
  - (c) Sair um número primo?

2. Alice e Ana estão jogando esse jogo com dados D6s. A soma dos dados de Alice deu 8 e o de Ana deu 5.
  - (a) Quem ganhou a partida?
  - (b) Qual a probabilidade da soma do resultado de dois dados ser 8?
3. Ao lançar três dados D6 não viciados, qual a probabilidade de a soma dos números ser igual a 8?
4. **(Para casa)** Manoel e Ângelo estão jogando esse jogo. A soma dos dados de Manoel deu 9 e a de Ângelo deu 10.
  - (a) Quem perdeu a partida?
  - (b) Qual a probabilidade da soma dos resultados de dois dados dar 9 ?
5. Lançando apenas um dado D6 oito vezes, qual a probabilidade de pelo menos uma vez o número seis cair voltado para cima ?

### Jogo de dois dados diferentes

**Material:** Dados em formatos variados (D4, D12, D20, D6, D8)

**Modo de jogar:** cada jogador toma dois dados com formatos diferentes, porém se um jogador toma um dado D20 e um D6 o oponente deve tomar dados do mesmo formato. Jogam-se os dados, quem tiver a maior soma dos valores obtidos ganha.

**Perguntas a serem feitas:**

- 1 Ao jogarmos um dado D6 e um dado D12, qual a probabilidade da soma dos resultados ser 15?
- 2 **(Para casa)** Ao jogarmos um dado D20 e um dado D6, qual a probabilidade de a soma ser 18?
- 3 **(Para casa)** João e Maria estão jogando o jogo de dados diferentes, eles estão usando o dado D20 e o dado D12, o dado de João deu 13 e 4 e o de Maria deu 15 e 6, primeiro se joga o dado D20, depois o D12, nessa ordem. Responda:
  - (a) Quem ganhou a partida?
  - (b) Qual a probabilidade desses dados acontecerem?
- 4 João jogou um dado D6 e um D20, os números deram 3 e 4 respectivamente, qual a probabilidade de isso acontecer?
- 5 Lançamos dois dados com vinte faces e outro com 12 faces. Qual a probabilidade de lançar cada dado e o produto ser 45?

- 6 (Para casa) Lançamos dois dados com vinte faces e outro com 12 faces. Qual a probabilidade de lançar cada dado e o produto ser 26?
- 7 Lançamos dois dados comuns. Qual a probabilidade de a soma ser menor que 5?

### Experimento de um dado e uma moeda

**Material:** Moedas, preferencialmente sem valor monetário, e dados.

**Processo:** Lança-se uma quantidade pré-estabelecida de moedas e uma quantidade pré-estabelecida de dados.

**Perguntas a serem feitas:**

- 1 Uma moeda e dois dados são lançados aleatoriamente.
  - (a) Qual a probabilidade de sair cara e a soma dos números ser 8?
  - (b) (Para casa) Qual a probabilidade de sair cara ou o produto dos números ser 12?

### Experimento dados e roleta coloridos

**Material:** Uma roleta dividida em setores de igual área com quatro cores diferentes, os dados devem ser de tipos diferentes com cores correspondentes às da roleta.

**Processo:** Gira-se a roleta e joga-se o dado da cor respectiva em que a roleta parar.

**Perguntas a serem feitas:**

- 1 Uma roleta circular é dividida igualmente em 4 partes iguais, uma de cada cor: azul, amarelo, verde e vermelho. Existem 4 dados: um D6 azul, um D20 amarelo, um D8 verde e um D12 vermelho. Pedro irá girar a roleta e a cor sorteada será a cor do dado que ele irá lançar. Responda:
  - (a) Qual a probabilidade de cair o número 8 voltado para cima?
  - (b) Qual a probabilidade de cair o número 3 voltado para cima?
  - (c) Qual a probabilidade do dado D6 ser lançado? E do dado D20?
  - (d) (Para casa) Qual a probabilidade do dado D8 ser lançado? E do D12?
  - (e) (Para casa) Qual a probabilidade de cair o número 10 voltado para cima?
  - (f) (Para casa) Qual a probabilidade de cair o número 15 voltado para cima?

### Experimento com Baralho

**Material:** Baralho comum

**Processo:** Aprender os naipes e como eles são organizados.

**Perguntas a serem feitas:**

- 1 Em um baralho retira-se todas as cartas com números ímpares. Qual a probabilidade de sair um rei de qualquer naipe?
- 2 (Para casa) De um baralho puxa-se uma carta, qual a probabilidade dessa carta possuir uma letra?
- 3 (Para casa) Retira-se todas as cartas com números do baralho, responda
  - (a) Qual a probabilidade de sair uma carta vermelha?
  - (b) Caso não houvesse sido retirada nenhuma carta inicialmente, qual seria a probabilidade de se retirar uma carta vermelha?
  - (c) Os resultados são iguais ou diferentes?
  - (d) No caso de igualdade explique o porquê.
- 4 De um baralho são retirados exatamente três cartas sem reposição, qual a probabilidade de sair um número ímpar, um valete e um rei nessa ordem?

### Experimento com Bolinhas coloridas

**Material:** Uma caixa fechada com bolinhas coloridas. É importante que hajam mais de uma bolinha da mesma cor.

**Processo:** O aluno vai colocar a mão na caixa e retirar uma bola, esse processo pode ser repetido com ou sem reposição

#### Perguntas a serem feitas:

- 1 Em uma urna há 4 bolas brancas, 3 verdes, duas azuis e uma preta. Responda:
  - (a) Se Pedro faz uma retirada, qual a probabilidade de sair uma bolinha branca ou preta?
  - (b) (Para casa) Se Alice faz uma retirada, qual a probabilidade de sair uma bolinha de cor azul?
  - (c) (Para casa) Maria vai fazer duas retiradas com reposição, qual a probabilidade de ela tirar uma bola preta e uma azul nessa ordem?
  - (d) Carlos vai fazer duas retiradas com reposição, qual a probabilidade de ela tirar uma bola verde e uma branca em qualquer ordem?
  - (e) Márcia vai fazer duas retiradas sem reposição, qual a probabilidade de ela retirar uma bola verde e uma branca em qualquer ordem?
  - (f) (Para casa) Brenna vai fazer duas retiradas sem reposição, qual a probabilidade de ela retirar uma bola azul e uma preta em qualquer ordem?
  - (g) João vai fazer duas retiradas sem reposição, qual a probabilidade de ela retirar uma bola verde ou uma branca?

## Experimento com Bolinhas Numeradas

**Material:** Uma caixa fechada com bolinhas numeradas de forma única. **Processo:** O aluno vai colocar a mão na caixa e retirar uma bola, esse processo pode ser repetido com ou sem reposição.

### Perguntas a serem feitas:

- 1 Uma urna possui 20 bolinhas numeradas de 1 a 20. Responda:
  - (a) João tem menos de 20 anos de idade, qual a probabilidade de ele fazer uma retirada e sair o número da sua idade?
  - (b) Bruno tem 13 anos de idade, qual a probabilidade de ele fazer duas retiradas sem reposição e os números que sair ser a soma da sua idade?
  - (c) (Para casa) Jonatan tem 10 anos de idade, qual a probabilidade de ele fazer duas retiradas sem reposição e os números que sair ser a soma da sua idade?
  - (d) Quais são os números primos de 1 a 20?
  - (e) (Para casa) Qual a probabilidade de, em duas retiradas sem reposição, Tássio obter dois números primos?
  - (f) Qual a probabilidade de, em duas retiradas sem reposição, Maria obter um número par maior que dois e um número primo?
  - (g) Rodrigo faz uma retirada, qual a probabilidade de sair um número primo ou um número par?
  - (h) (Para casa) Qual a probabilidade de, em duas retiradas sem reposição, sair dois números pares?

## 4.7.2 Soluções

### Jogo de dois dados iguais

1.

a.

$$P = \frac{1}{6}$$

b.

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c.

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2.

a.

Alice

b.

As possibilidades totais são  $6 \cdot 6 = 36$ , ao passo que as possibilidades desejadas são as seguintes:

Dado 1	Dado 2
2	6
6	2
5	3
3	5
5	3
4	4

Tabela 4.1: Combinações com dois dados para a soma ser 8

Donde

$$P = \frac{5}{36}$$

3.

A questão não informa o tipo de dado, quando isso ocorre é natural deduzir que será o D6. O total de possibilidades é dado por  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ , as possibilidades desejadas são:

Dado 1	Dado 2	Dado 3
1	1	6
1	2	5
1	3	4
2	2	4
2	3	3

Tabela 4.2: Combinações com três dados para a soma ser 8

Agora calculamos as permutações para cada caso, pois não foi definida nenhuma ordem de números pela questão.

$$3 \cdot P_3^2 + 2 \cdot P_3 = 21$$

Portanto,

$$P = \frac{21}{216} = \frac{7}{72}$$

4.

a.

Manoel

b.

As possibilidades totais são  $6 \cdot 6 = 36$ , ao passo que as possibilidades desejadas são as seguintes:

Dado 1	Dado 2
5	4
5	4
3	6
6	3

Tabela 4.3: Combinações válidas para a soma ser 9

Donde

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

5.

A probabilidade de não sair nenhum número seis em oito jogadas é

$$P = \left(\frac{5}{6}\right)^8$$

O resultado procurado, utilizando a probabilidade complementar, é:

$$P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0,767$$

### Jogo de dois dados diferentes

1.

O cálculo das possibilidades totais é  $6 \cdot 12 = 72$ , já as possibilidades desejadas são

Dado 1 (D6)	Dado 2 (D12)
3	12
4	11
5	10
6	9

Tabela 4.4: Combinações válidas para a soma ser 15

Donde:

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

2.

O cálculo das possibilidades totais é  $20 \cdot 6 = 120$ , já as possibilidades desejadas são

Dado 1 (D6)	Dado 2 (D20)
1	17
2	11
3	15
4	14
5	13
6	12

Tabela 4.5: Combinações válidas para a soma ser 18

Donde:

$$P = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

3.

a.

Maria

b.

A probabilidade da jogada de João resultar em 13 e 4 é

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{240}$$

Para Maria temos

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{240}$$

A probabilidade resultante será:

$$P = \frac{1}{240^2}$$

4.

O “respectivamente” se refere à ordem dos resultados para com os dados, isto é, o D6 resultou 3 e o D20 resultou 4, todavia, não fala na ordem de lançamento dos dados, por isso ele pode primeiro lançar o D6 e em seguida o D20, ou ao contrário, logo

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{20} \cdot 2 = \frac{1}{60}$$

5.

A quantidade total é  $20 \cdot 12 = 240$ , as possibilidades desejadas são

Dado 1 (D20)	Dado 2 (D12)
9	5
5	9
15	3

Tabela 4.6: Combinações válidas para produto igual a 45

Donde

$$P = \frac{3}{240} = \frac{1}{80}$$

6.

Calculo da quantidade total de possibilidades

$$20 \cdot 20 \cdot 12 = 4800$$

Possibilidades desejadas

D20	D20	D12
1	13	2
13	1	2
13	2	1
2	13	1

Tabela 4.7: Combinações válidas para produto igual a 26

Donde a probabilidade será:

$$P = \frac{4}{4800} = \frac{1}{1200}$$

7.

A questão menciona dados comuns, ou seja, dados D6. A quantidade total de possibilidades é  $6 \cdot 6 = 36$ .

A quantidade de possibilidades desejadas é:

Dado 01	Dado 02	Soma
1	1	2
1	2	3
2	1	3
1	3	4
2	2	4
3	1	4

Tabela 4.8: Combinações válidas para soma menor que 5

Portanto

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

**Comentário:** Optamos por essa solução, pois são menos casos para analisar, caso o problema fosse com um número maior, por exemplo, a probabilidade da soma ser menor que dez, valeria mais a pena utilizar a probabilidade complementar  $P(A) = 1 - P(A)$ .

## Experimento de um dado e uma moeda

### Soluções

1.

a.

Já vimos que a probabilidade referente aos dados é  $\frac{5}{36}$  logo a probabilidade procurada é

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{72}$$

b.

O produto é doze no lançamento de dois dados se os resultados são  $3 \cdot 4$  ou  $4 \cdot 3$ , em um total de 36 possibilidades, já para

obtermos uma cara temos uma chance em duas, logo

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{36} = \frac{1}{36}$$

### Experimento dados e roleta coloridos

1.

a.

A probabilidade de cada dado ser lançado é  $\frac{1}{4}$  possuem o número 8 o D20, o D8 e o D12, logo, a probabilidade é

$$P = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right) = \frac{31}{480}$$

b.

O raciocínio é análogo, temos

$$P = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \right) = \frac{17}{160}$$

c.

A probabilidade de qualquer dado ser lançado é  $\frac{1}{4}$

d.

$$\frac{1}{4}$$

e.

Raciocínio análogo aos itens a e b, porém só há face 10 no D20 e D12, então

$$P = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{30}$$

f.

Só há face 15 no D20

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{80}$$

### Experimento com Baralho

1.

Um naipe tem 13 cartas, das quais 4 são ímpares, então restam 9 cartas por naipe, como são 4 naipes, temos um total de 36 cartas, em cada naipe há um rei, logo:

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

2.

Em um naipe há 4 cartas com letras, como são 4 naipes, há um total de 16 cartas com letras no baralho, donde

$$P = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

3.

a.

Nesse caso restam apenas as cartas com letras, ou seja 16, sendo 8 vermelhas e 8 pretas

$$P = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

b.

$$P = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

c.

Iguais.

d.

As frações são equivalentes.

4.

$$P = \frac{16}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} = \frac{32}{16575}$$

### Experimento com bolinhas coloridas

1.

a.

Há um total de  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  bolinhas na urna. Cores neutras presentes na urna são branco e preto, donde

$$P = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

b.

$$P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

c.

$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{50}$$

d.

$$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot 2 = \frac{6}{25}$$

e.

$$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{4}{15}$$

f.

$$P = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot 2 = \frac{2}{45}$$

g.

Vamos usar a probabilidade complementar

Probabilidade de não ser retirado uma bola verde ou branca

$$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

$$P = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

### Experimento com bolinhas coloridas

1.

a.

$$P = \frac{1}{20}$$

b.

O total de possibilidades é  $20 \cdot 19 = 380$ , as possibilidades desejadas são

Primeira bolinha	Segunda bolinha
1	12
12	1
2	11
11	2
3	10
10	3
4	9
9	4
5	8
8	5
6	7
7	6

Tabela 4.9: Combinações válidas para soma ser 13

Logo,

$$P = \frac{12}{380} = \frac{3}{95}$$

c.

O total de possibilidades é  $20 \cdot 19 = 380$ , as possibilidades desejadas são

Primeira bolinha	Segunda bolinha
1	9
9	1
2	8
8	2
3	7
7	3
4	6
6	4
5	5

Tabela 4.10: Combinações válidas para soma ser 10

Logo,

$$P = \frac{9}{380}$$

d.

Os números primos entre 1 e 20 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19.

e.

$$P = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{14}{95}$$

f.

$$P = \frac{9}{20} \cdot \frac{8}{19} \cdot 2 = \frac{36}{95}$$

g.

Existem

- 8 números primos;
- 10 números pares;
- 1 número primo e par.

Logo, podemos montar o seguinte diagrama

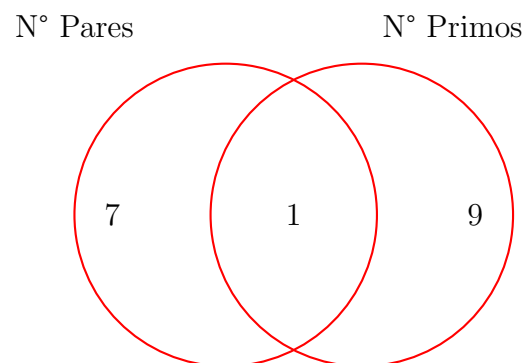


Figura 4.1: Diagrama de Venn

Donde,

$$P = \frac{7 + 1 + 9}{20 \cdot 19} = \frac{17}{380}$$

h.

$$P = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38}$$

i.

$$P = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{10}{38}$$

### 4.7.3 Prova

Abaixo a prova para ser aplicada aos , individual e sem consulta.

1. Em uma caixa há 10 bolas: 4 vermelhas, 3 azuis e 3 verdes. Duas bolas são retiradas sucessivamente sem reposição.

- Qual a probabilidade de ambas serem vermelhas?
- Qual a probabilidade de sair uma verde e uma azul nessa ordem?

2. Um dado D6 é lançado duas vezes.

a) Qual a probabilidade de obter um número par no primeiro lançamento e um número maior que 4 no segundo?

- Qual a probabilidade de a soma dos resultados ser 7?

3. Haverá um sorteio em uma sala de aula para saber quem irá ganhar uma caixa de chocolates, as idades e o gênero dos alunos estão descritos na tabela abaixo Qual a

	15 anos	16 anos	17 anos	Total
Masculino	2	3	7	12
Feminino	4	6	3	13
Total	6	9	10	25

Tabela 4.11: Distribuição por idade e gênero

probabilidade de uma menina de pelo menos 16 anos ganhar?

### 4.7.4 Pauta de Correção

#### Questão 01

a

$$P = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

- Escrever corretamente a expressão com as duas probabilidades [0,5]
- Realizar a multiplicação corretamente [0,5]

b

$$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{10}$$

Dado 1	Dado 2
1	6
6	1
3	4
4	3
2	5
5	2

Tabela 4.12: Combinações válidas para a soma ser 7

- Escrever corretamente a expressão com as duas probabilidades [0,5]
- Realizar a multiplicação corretamente [0,5]

**Questão 02**

a

$$P = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

- Escrever corretamente a expressão com as duas probabilidades [0,5]
- Realizar a multiplicação corretamente [0,5]

b

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- Escrever corretamente a tabela das combinações válidas para a soma ser 07 [0,5]
- Efetuar o cálculo da probabilidade corretamente [0,5]

**Questão 03**

Há  $6 + 3 = 9$  meninas com pelo menos 16 anos em um total de 25 alunos.

$$P = \frac{9}{25}$$

- Encontrar o número do evento desejado [0,5]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,5]

### 4.7.5 Atividade abordando materiais do laboratório

Previamente o professor recorta as questões abaixo apresentadas e as coloca em envelopes de modo que cada envelope contemple apenas questões de um tipo de material, divide-se a sala em grupos com dois ou três componentes, preferencialmente, mas essa quantidade de participantes pode variar de acordo com a necessidade. O professor em uma urna coloca papéis com os nomes dos objetos do laboratório usado nas aulas (dados, baralho, urna com bolas numeradas, urna com bolas coloridas), um componente da dupla retira um papel e isso dirá qual objeto ele irá utilizar, na sequência recebe a atividade, a qual valerá dois pontos.

#### Baralho

##### QUESTÃO 1

Cada naipe possui 13 cartas ao todo, sendo elas: ás (A), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valete (J), dama (Q) e rei (K). Sabendo que todas juntas formam um baralho com 52 cartas, imagine que você queira tirar ao acaso uma carta de ás (A). Qual a probabilidade de que essa carta retirada ao acaso fosse a de ás?

##### QUESTÃO 2

Retire cinco cartas de cada naipe e embaralhe tudo, sendo que no final as cartas não estarão com a frente viradas para você. Imagine que você queira tirar ao acaso uma carta de ouros do baralho que resta. Qual a probabilidade de retirar uma carta de ouros ao acaso?

##### QUESTÃO 3

Retire de cada naipe as cartas ás, valete, dama e rei e embaralhe tudo. Sem as cartas estarem voltadas a você, pense que você queira tirar, ao acaso, uma carta de número ímpar. Qual a probabilidade de retirar uma carta ímpar ao acaso?

#### Dados

##### QUESTÃO 1

Um dado comum não viciado é lançado duas vezes sucessivamente e é anotada a sequência de faces obtidas. Qual a probabilidade do primeiro número obtido nesses lançamentos ser 3 e o segundo ser par?

##### QUESTÃO 2

Um dado D6 é lançado duas vezes. Qual a probabilidade da soma dos pontos obtidos ser menor que 7?

##### QUESTÃO 3

Um dado D6 e um D12 são lançados cada um uma vez, qual a probabilidade do produto dos pontos obtidos igual a 14 ?

### Urna com bolas numeradas

#### QUESTÃO 1

Você e um de seus colegas irão retirar algumas bolinhas da caixa, sabendo que são quarenta bolas numeradas de 1 a 40. Agora imagine, você e seu colega vão retirando as bolinhas ao acaso, qual a probabilidade de, caso os dois tirassem uma bola cada sem reposição, o produto desses números ser igual a dez?

#### QUESTÃO 2

Qual a probabilidade de retirar uma bolinha que tenha um número maior que 18?

#### QUESTÃO 3

Considerando uma caixa com bolas numeradas de 1 a 40, Viviane já retirou 15 bolas e Beatriz sua colega de classe também tirou 2, sendo todas essas bolinhas com números pares e essas retiradas sem reposição. Qual a probabilidade de sair uma bola de número ímpar?

### Urna com bolas coloridas.

#### QUESTÃO 1

De uma urna com 10 bolas vermelhas, 5 verdes e 3 azuis, retire, sem reposição, duas bolas seguidas. Qual a probabilidade de as duas serem verdes?

QUESTÃO 2 Você tem uma urna com 60 bolas: 25 rosas, 20 cinzas, 15 marrons, retirando dez bolas rosas, qual a probabilidade de sortear uma bola rosa?

QUESTÃO 3 De uma urna com 10 bolas vermelhas, 5 verdes e 3 azuis, retire, sem reposição, três bolas seguidas. Qual a probabilidade de as duas serem retiradas duas vermelhas e uma azul em qualquer ordem ?

## 4.7.6 Soluções e pauta de correção

### Baralho

1.

Das 52 cartas, 4 são de às

$$P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

- Identificar o número de elementos do Evento  $[0,2]$ ;
- Identificar o número de elementos do Espaço Amostral  $[0,20]$ ;
- Calcular corretamente a probabili-

dade  $[0,20]$

2.

Ao todo serão retiradas  $5 \cdot 4 = 20$  cartas, restando  $52 - 20 = 30$  cartas, portanto

$$P = \frac{30}{52} = \frac{15}{26}$$

- Identificar o número de elementos do Evento  $[0,2]$ ;
- Identificar o número de elementos do Espaço Amostral  $[0,20]$ ;

- Calcular corretamente a probabilidade [0,20]

3.

Retirando as cartas citadas temos as seguintes 9 cartas para um naipe  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , das quais 4 são ímpares, donde:

$$P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- Identificar o número de elementos do Evento [0,25];
- Identificar o número de elementos do Espaço Amostral [0,25];
- Calcular corretamente a probabilidade [0,3]

### Dados

1.

O segundo lançamento pode ser qualquer número do dado, já o primeiro só pode ser 3.

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento e a quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,20];
- Calcular corretamente cada probabilidade [0,20];
- Efetuar o produto [0,20]

2.

Primeiro	Segundo	Soma
1	1	2
1	2	3
2	1	3
2	2	4
3	2	5
2	3	5
2	4	6
4	2	6
3	3	6

Tabela 4.13: Soma menor que 7

O total de possibilidade é  $6 \cdot 6 = 36$ , portanto

$$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento [0,5];
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,15]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,15].

3.

Sabemos que  $14 = 2 \cdot 7 = 7 \cdot 2$ , portanto há duas combinações possíveis, de um total de  $12 \cdot 6 = 72$ , logo

$$P = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento [0,20];
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,20]

- Calcular corretamente a probabilidade  $[0,20]$ .

### Urna com bolinhas numeradas

1.

Ora,  $10 = 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$ , portanto há duas combinações possíveis, de um total de  $40 \cdot 39 = 1560$ , logo

$$P = \frac{2}{1560} = \frac{1}{780}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento  $[0,20]$ ;
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral  $[0,20]$
- Calcular corretamente a probabilidade  $[0,20]$ .

2.

Há  $40 - 18 = 26$  números maiores que 18, portanto

$$P = \frac{26}{40} = \frac{13}{20}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento  $[0,20]$ ;
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral  $[0,20]$
- Calcular corretamente a probabilidade  $[0,20]$ .

3.

Inicialmente, haviam vinte números pares e vinte números ímpar, todavia foram

subtraídos dezessete números pares, resultando em apenas vinte e três bolinhas na caixa, das quais vinte são ímpares, portanto

$$P = \frac{20}{23}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento  $[0,25]$ ;
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral  $[0,25]$
- Calcular corretamente a probabilidade  $[0,3]$ .

### Urna com bolinhas coloridas

1.

$$P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento  $[0,20]$ ;
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral  $[0,20]$
- Calcular corretamente a probabilidade  $[0,20]$ .

2.

Retirando-se dez bolas rosas sobram quinze bolas rosas, de um total de cinquenta, nessas condições

$$P = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento  $[0,20]$ ;

- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,20]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,20].

3.

Há um total de  $10 + 5 + 3 = 18$  bolas, como a ordem pode ser diversa é necessário multiplicar pela permutação de três elementos com dois repetidos, daí

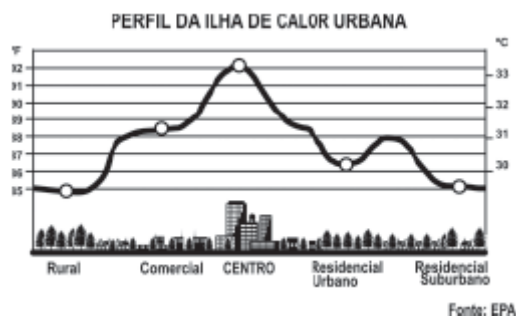
$$P = \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{17} \cdot \frac{3}{16} \cdot P_3^2 = \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{17} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{5}{136}$$

- Identificar corretamente a quantidade de elementos do Evento [0,20];
- Identificar corretamente quantidade de elementos do Espaço Amostral [0,20]
- Identificar a necessidade da permutação [0,20]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,20].

#### 4.7.7 Atividade escrita em dupla

Nesta subseção desejamos descrever como se dará essa atividade em dupla, embora haja esse nome, pode ser feita em trio, pode haver mais de um trio, porém nunca um grupo com quatro pessoas, pois um grupo com quatro pessoa é visto como duas duplas, cada aluno recebe uma folha de atividade e faz em conjunto com os demais componentes da sua dupla ou trio, ambos entregam a atividade que não deverá ter consulta e embora hajam questões objetivas, os cálculos deveram estar presentes para a correção.

1. (Enem [21]) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a  $31^\circ\text{C}$ . Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:

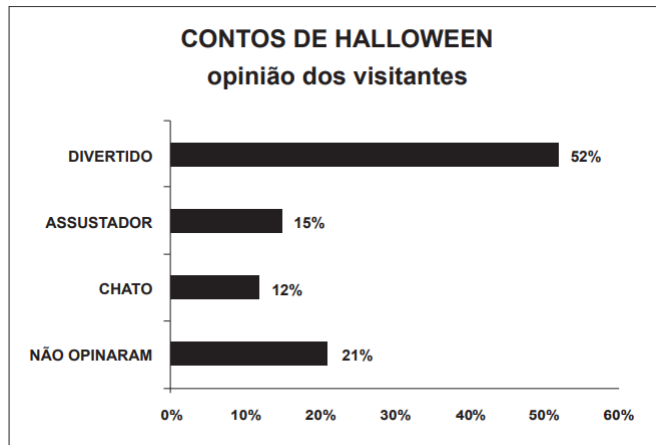


Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

- A.  $1/5$
- B.  $1/4$
- C.  $2/5$
- D.  $3/5$

E.3/4

2. (Enem [22]) Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em: “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”.

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por

- A. 0,09.
- B. 0,12.
- C. 0,14.
- D. 0,15.
- E. 0,18.

3. (UNICAMP [13]) João e Maria estão passeando pela floresta. Para não se perderem no caminho, levaram consigo uma sacola com 100 pedrinhas, sendo 60 pedrinhas brancas e 40 pedrinhas pretas. A cada 5 passos eles retiram aleatoriamente uma pedrinha da sacola e jogam-na no chão para marcar o caminho. Quando eles pararam para fazer um lanche, notaram que já tinham sido jogadas 35 pedrinhas brancas e 25 pedrinhas pretas. Qual a probabilidade de as próximas duas pedrinhas jogadas serem brancas?

- a)  $7/13$ .
- b)  $5/13$ .
- c)  $11/52$ .
- d)  $7/52$ .

### 4.7.8 Pauta de Correção

#### 1. Enem

Das quatro opções que ele tem para se mudar ele pode escolher 3, logo

$$P = \frac{3}{4}$$

- Identificar corretamente número de elementos do espaço amostral e do evento desejado [0,25]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,25]

#### 2. Enem

Os que não opinaram não concorrem ao sorteio., portanto,  $n(\Omega) = 0,52 + 0,15 + 0,12 = 0,79$ , ao passo que chato são 0,12, donde

$$P = \frac{0,12}{0,79} \approx 0,15$$

- Identificar corretamente número de elementos do espaço amostral e do evento desejado [0,25]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,25]

#### 3. Unicamp

O total de pedrinhas brancas é  $60 - 35 = 25$ , já o de pedrinhas pretas é  $40 - 25 = 15$ , portanto  $n(\Omega) = 15 + 25 = 40$  logo:

$$P = \frac{25}{40} \cdot \frac{24}{39} = \frac{5}{13}$$

- Identificar corretamente número de elementos do espaço amostral e do evento desejado [0,15]
- Escrever a multiplicação das duas probabilidades [0,2]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,15]

### 4.7.9 Lista de Exercícios - Probabilidade Geométrica

#### Segmentos

1. Um segmento possui comprimento medindo 30 cm, qual a probabilidade de um ponto P estar nos 5 cm iniciais?

2. (Para casa) Qual a probabilidade de, em uma corda de comprimento 2 m, um ponto pertencer exatamente aos 10 cm iniciais?

**DICA:** transforme metros em centímetros.

### Figuras Planas

3. Suponha que o triângulo  $ABC$  seja um triângulo retângulo com hipotenusa  $AB$ , que  $CD$  seja uma altura do triângulo  $ABC$  e que  $AB$  é igual a 25. Se  $AD$  é um número inteiro, qual a probabilidade de  $CD$  seja um número inteiro?

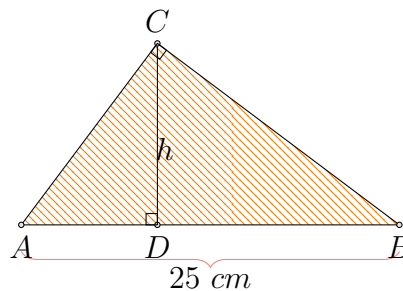


Figura 4.2: Ilustração - questão 03.

4. (Para casa) Em um lançamento de dardos o alvo é quadrado de lado 9cm como na figura,  $Q_1$  e  $Q_2$  são áreas, sabendo que  $Q_1$  é igual a  $27\text{ cm}^2$  calcule:

- O valor de  $Q_2$
- A probabilidade de lançar um dado ele acertar um ponto do quadrado de área  $Q_1$
- A probabilidade de lançar um dado ele acertar um ponto da figura de área  $Q_2$

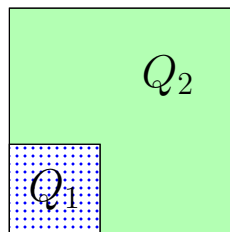


Figura 4.3: Ilustração - questão 04.

5. Um ultraleve sobrevoa uma determinada área do vale de Ceará-Mirim, cuja vista superior é aproximadamente semelhante à figura ao lado. Sabendo que  $ABCD$  é um quadrado de lado 8 km e que  $S_1 + S_2 + S_3 = 36\text{ km}^2$ , qual a probabilidade do avião pousar na região  $S_4$ ?

### Teorema dos Carpetes

Teorema dos Carpetes, citado na RPM 86 por Nunes (2014)

**Teorema 4.7.1.** *Colocamos dois carpetes em um dormitório. Se a soma das áreas dos carpetes é igual a área do dormitório, então a área da intersecção dos carpetes é igual a área da região não coberta por carpetes.*

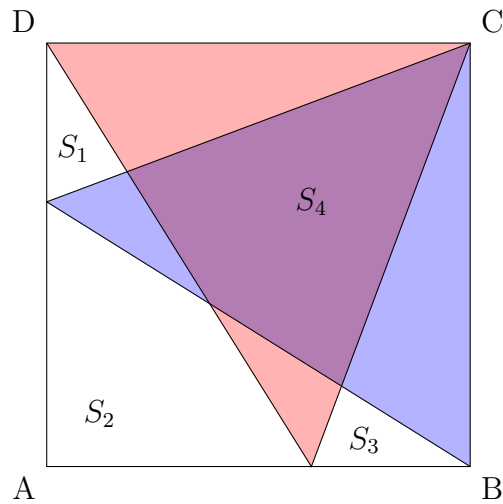


Figura 4.4: Ilustração - questão 05.

6. (Para casa) Considere o círculo desenhado no plano cartesiano abaixo e responda.

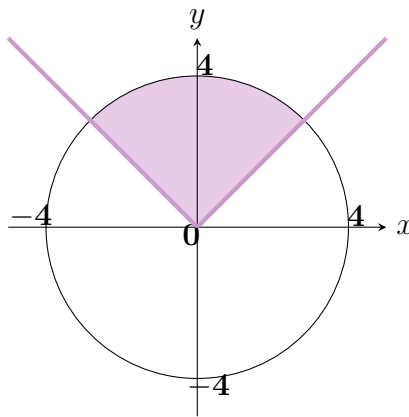


Figura 4.5: Ilustração - questão 06.

- Qual o valor do raio?
  - Qual o valor da área do círculo inteiro?
  - A região lilás é um setor circular cujo arco mede  $90^\circ$ , qual a sua área?
  - Qual a probabilidade de um ponto estar na área lilás?
7. (Para casa) Na figura abaixo cada círculo tem o raio maior uma unidade que o anterior, por exemplo, o círculo menor de todos tem raio um, o segundo tem raio dois, o terceiro tem raio três e assim sucessivamente. Responda

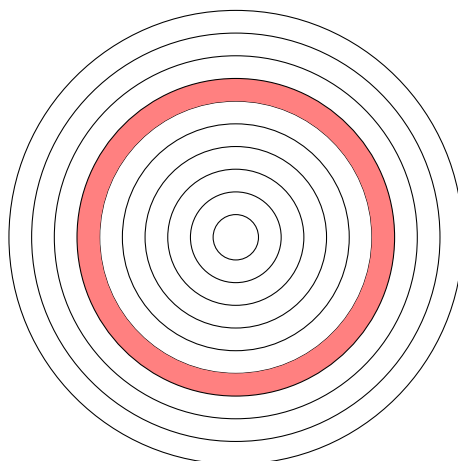


Figura 4.6: Ilustração - questão 07.

- a. Qual a área do círculo maior de todos?
- b. Qual a área da coroa circular destacada?
- c. Qual a probabilidade de ao lançar um dardo ele cair justamente na coroa circular destacada?

8. Durante o recesso de dezembro, pai e filho resolveram descansar da rotina da cidade grande em uma fazenda da família. Chegando lá, buscaram entretenimento em jogos que potencializam a concentração e criatividade, dentre eles, o xadrez e o lançamento de dardos. Em se tratando desse último, havia um alvo representado por um disco vermelho de raio 9 cm, e no seu interior um disco preto de raio igual 6 cm ao do anterior. Admitindo que o dardo lançado pelo filho atinja o alvo, qual a probabilidade do lançamento acertar o disco preto?

9. (Resolver no GeoGebra, em sala) João e Miguel, que não são pessoas muito pontuais, marcaram um encontro às 19 horas. Se cada uma delas chegar ao encontro em um instante qualquer entre 19 horas e 20 horas e se um se dispõe a esperar no máximo 10 minutos pelo outro, qual é a probabilidade deles se encontrarem?

### Sólidos Geométricos

10. (Para Casa) Um cubo de aresta 4 cm possui uma esfera circunscrita nele. Qual é a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?

11. Um cubo de lado  $2 \cdot a$  possui uma esfera circunscrita nele. Qual é a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?

12. Tome todos os vértices de um prisma de base pentagonal e os combine dois a dois. Sorteando uma dessas combinações, qual é a probabilidade de ela ser diagonal do prisma?

13. (Para Casa) Tome todos os vértices de um prisma de base hexagonal e os combine dois a dois. Sorteando uma dessas combinações, qual é a probabilidade de ela ser diagonal do prisma?

14. A figura abaixo mostra uma pirâmide de base quadrada inscrita num cilindro cuja altura e o diâmetro medem 20cm, use  $\sqrt{2} = 1,4$ . Responda.

a. Sabendo que o lado da base dessa pirâmide é de aproximadamente 14 cm, calcule seu volume arredondando para cima.

b. Calcule o volume do cilindro, use  $\pi = 3,14$ .

c. Calcule a probabilidade de um ponto ser interior ao cilindro e externo à pirâmide.

#### 4.7.10 Soluções

1

$$P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

2

$$P = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$$

3 Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$$

Todavia,  $\overline{AD} + \overline{DB} = 25$ . Desejamos que  $\overline{CD}$  seja um número inteiro, para tanto, devemos ter que o produto  $\overline{AD} \cdot \overline{DB}$  seja um número quadrado perfeito, podemos montar a seguinte tabela para melhor visualização

$\overline{AD}$	$\overline{DB}$	Produto	Favorável?
1	24	$2^3 \cdot 3$	Não
24	1	$2^3 \cdot 3$	Não
2	23	$2 \cdot 23$	Não
23	2	$2 \cdot 23$	Não
3	22	$3 \cdot 2 \cdot 11$	Não
22	3	$3 \cdot 2 \cdot 11$	Não
4	21	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	Não
21	4	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	Não
5	20	$10^2$	Sim
20	5	$10^2$	Sim
6	19	$2 \cdot 3 \cdot 19$	Não
19	6	$2 \cdot 3 \cdot 19$	Não
7	18	$2 \cdot 3^2 \cdot 7$	Não
18	7	$2 \cdot 3^2 \cdot 7$	Não
8	17	$2^3 \cdot 17$	Não
17	8	$2^3 \cdot 17$	Não
9	16	$2^4 \cdot 3^2$	Sim
16	9	$2^4 \cdot 3^2$	Sim
10	15	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	Não
15	10	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	Não
11	14	$2 \cdot 7 \cdot 11$	Não
14	11	$2 \cdot 7 \cdot 11$	Não
12	13	$2^2 \cdot 3 \cdot 13$	Não
13	12	$2^2 \cdot 3 \cdot 13$	Não

Tabela 4.14: Soma 25 e produto quadrado perfeito

Portanto,

$$P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

4 a

$$A = 9^2 - 27 = 54\text{cm}^2$$

b

$$P = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

c

$$P = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$$

5

$$P = \frac{36}{8^2} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

6 a O raio mede 4cm

b

$$A = 4^2\pi = 16\pi$$

c

$$A = \frac{1}{4} \cdot 4^2\pi = 4\pi$$

d

$$P = \frac{4\pi}{14\pi} = \frac{1}{4}$$

7 a

$$A = 10^2\pi = 100\pi$$

b

$$A = (7 - 6)^2\pi = \pi$$

c

$$P = \frac{\pi}{100\pi} = \frac{1}{100}$$

8

$$P = \frac{(9^2 - 6^2)\pi}{9^2\pi} = \frac{1}{9}$$

9 Digamos que João chegou em um instante  $x$  e Miguel em um instante  $y$ , para que haja encontro devemos ter  $|x - y| \leq 10\text{min}$ , daí:

$$-10 \leq x - y \leq 10 \implies$$

$$y \leq x + 10$$

ou

$$y \geq x - 10$$

Ora, eles chegaram entre 19 e 20 horas, então  $0 \leq x \leq 60\text{min}$  e  $0 \leq y \leq 60\text{min}$ , dessa maneira podemos considerar o seguinte gráfico.

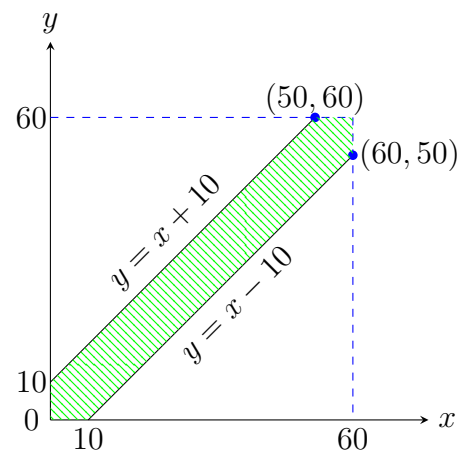


Figura 4.7: Questão 09 - gráfico para resolução.

Portanto o cálculo da área em destaque é

$$60^2 - \frac{(60 - 10)^2}{2} \cdot 2 = 3600 - 2500 = 1100$$

Cálculo da probabilidade

$$P = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}$$

**Construção no GeoGebra da Figura 4.7**

Digite  $y = x + 10$ ) e clique enter;

Digite  $y = x - 10$  e clique enter;

Digite  $x = 60$  e clique enter;

Digite  $y = 60$  e clique enter;

Clique em **ferramentas**, na seção de **ponto** clique em **interseção de dois objetos**;

No gráfico clique na reta  $y = x + 10$  e no eixo  $y$ ;

Clique na reta  $y = x + 10$  e na reta  $y = 60$ ;

Clique na reta  $y = 60$  e na reta  $x = 60$ ;

Clique na reta  $y = x - 10$  e na reta  $x = 60$ ;

Clique na reta  $y = x - 10$  e no eixo  $x$ ;

Clique no eixo  $y$  e no eixo  $x$ ;

Em **ferramentas**, na seção de **polígonos** clique em **polígono**;

Trace um polígono clicando nos pontos obtidos a partir das interseções;

Em **ferramentas**, na seção **medições**, clique em **áreas**;

Clique no polígono;

Em **ferramentas**, na seção **mídia**, clique em **texto**;

Clique na opção **fórmula LaTeX**;

Digite  $P = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}$

e clique em **ok**.

Disponibilizamos o *link* para conferência.

- 10 O raio da esfera é metade da diagonal do cubo, logo

$$R = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Portanto o volume da esfera é

$$V = \frac{4(2\sqrt{3})^3\pi}{3} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 3\sqrt{3}}{3} = 32\sqrt{3}$$

Logo a probabilidade vale

$$P = \frac{4^3}{32\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- 11 O raio ( $R$ ) da esfera será igual a metade da diagonal do cubo, donde

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

e seu volume será igual a

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^3}{\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

**Comentário:** A ideia é que o aluno perceba que independente da aresta do cubo a probabilidade será sempre a mesma.

- 12 São dez vértices, sendo cinco em cada face, o número de elementos do Espaço Amostral é

$$\frac{10 \cdot 9}{2!} = 45$$

O número de elementos do Evento é

$$\frac{5 \cdot 4}{2!} = 10$$

Portanto a probabilidade é

$$P = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

- 13 São doze vértices, sendo seis em cada face, o número de elementos do Espaço Amostral é

$$\frac{12 \cdot 11}{2!} = 66$$

O número de elementos do Evento é

$$\frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$$

Portanto a probabilidade é

$$P = \frac{15}{66} = \frac{5}{22}$$

- 14 a O diâmetro do círculo é igual a diagonal do quadrado, donde

$$l \cdot \sqrt{2} = 20 \implies l \approx 14\text{cm}$$

A altura do cilindro é igual à al-

tura da pirâmide, portanto denotando  $V_p$  para volume da pirâmide, temos:

$$V_p = \frac{20 \cdot 14^2}{3} \approx 1306,7\text{cm}^3$$

- b Denotando  $V_c$  para volume do cilindro, temos:

$$V_c = \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot 20 = 6280\text{cm}^3$$

c

$$P = \frac{6280 - 1306,7}{6280} = \frac{4973,3}{6280}$$

#### 4.7.11 Prova - Probabilidade Geométrica

- 1) Um segmento de reta de 12 cm de comprimento é dividido aleatoriamente em dois outros segmentos, com o maior medindo 9cm. Qual a probabilidade de um ponto estar no segmento menor?
- 2) Em um alvo circular de raio 7 cm, há um quadrado inscrito, cujo lado mede 10 cm, pintado de vermelho. Se um dardo atingir o alvo aleatoriamente, qual a probabilidade de acertar fora do quadrado vermelho? (Use  $\pi = 3$ )

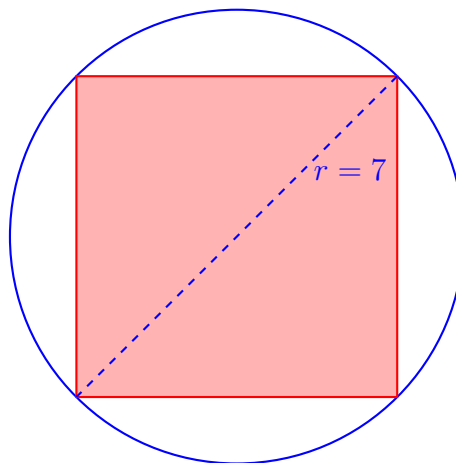


Figura 4.8: Figura da questão 02.

- 3) Duas placas retangulares, cada uma com área de  $24 \text{ m}^2$ , são colocadas sobre um piso de  $48 \text{ m}^2$  formando uma região não coberta pelas placar de  $12 \text{ m}^2$ . Acidentalmente, derramou-se tinta no chão, qual a probabilidade de essa tinta ficar somente na região de sobreposição das placas? Dica: Aplique o Teorema dos Carpetes mencionado no exercício 5 da lista.

- 4) Um cubo de aresta 6 cm está inscrito em uma esfera de raio  $3\sqrt{3}$  cm está inscrita em um cubo de aresta 6 cm. Se um ponto interno da esfera for escolhido aleatoriamente, qual a probabilidade de que ele esteja fora do cubo? (Use  $\pi = 3$ )
- 5) Um reservatório cilíndrico de raio 4 m e altura 10 m contém uma esfera maciça de raio 3 m colocada aleatoriamente em seu interior. Se um ponto dentro do reservatório for escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que esse ponto esteja na esfera? (Use  $\pi = 3$ )

#### 4.7.12 Soluções e Pauta de Resolução

- 1) Ora, o menor lado mede  $12 - 9 = 3$ cm, portanto

$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

- Calcular a medida do menor lado [0,5]
- Calcular corretamente a probabilidade [0,5]

- 2) Cálculo da área do quadrado  $A_q = 10^2 = 100$  cm<sup>2</sup>.

Cálculo da área do círculo  $A_c = \pi \cdot 7^2 = 49 \cdot 3 = 147$  cm<sup>2</sup>.

Cálculo da área da região desejada  $A = 147 - 100 = 47$  cm<sup>2</sup>.

Donde

$$P = \frac{47}{147}$$

- Calcular corretamente a área do quadrado [0,25]
- Calcular corretamente a área do círculo [0,25]
- Calcular corretamente a área desejada [0,25]
- Calcular corretamente probabilidade [0,25]

- 3) Pelo Teorema, temos que a área de sobreposição é igual a área não coberta, logo

$$P = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

- Aplicar corretamente o Teorema [0,5];
- Calcular corretamente a probabilidade [0,5].

- 4) Cálculo do Volume da esfera

$$V_E = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot (3\sqrt{3})^3 = 324$$

Cálculo do Volume do cubo

$$V_C = 6^3 = 216$$

Cálculo do Volume da região desejada

$$V = 324 - 216 = 108$$

Portanto

- Calcular corretamente o volume da esfera [0,25]
- Calcular corretamente o volume da do cubo [0,25]
- Calcular corretamente o volume desejado [0,25]
- Calcular corretamente probabilidade [0,25]

5) Cálculo do volume da Esfera

$$V_e = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot (3)^3 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 27 = 4 \cdot 27 = 108$$

Cálculo do volume do Cilindro

$$V_C = \pi r^2 h = 3 \cdot (4)^2 \cdot 10 = 3 \cdot 16 \cdot 10 = 480$$

Portanto

$$P = \frac{108}{480} = \frac{9}{40}$$

- Calcular corretamente o volume da esfera [0,35]
- Calcular corretamente o volume da do cilindro [0,35]
- Calcular corretamente probabilidade [0,3]

### 4.7.13 Execução sequencial no GeoGebra

Nessa subseção iremos mostrar como usar o GeoGebra, versão on-line, para plotar o gráfico da figura 2.3. Como o *software* trabalha com número reais iremos fixar valores para  $l$  e  $d$ , respectivamente, 1 e 5. Observe o algoritmo:

Digite  $y = -\text{sen}(x)$  e clique enter;

Digite  $y = 5 - \text{sen}(x)$  e clique enter;

Digite **IntegralEntre**( $y = -\text{sen}(x)$ ,  $y = 0, \text{pi}, 2\text{pi}$ ) e clique enter;

Digite **IntegralEntre**( $y = 5, y = 5 - \text{sen}(x), 0, \text{pi}$ ) e clique enter;.

Disponibilizamos o *link* para conferência.

Como falado na seção 3.2 o GeoGebra torna o processo mais participativo e acessível no que se refere à área de regiões entre curvas.

#### 4.7.14 Atividade da Agulha de Buffon e Aplicações à Biologia

- 1) Utilizando a teoria desenvolvida em sala de aula acerca da Agulha de Buffon resolva o seguinte problema: Em um salão cujo assoalho é dividido apenas por fissuras paralelas e igualmente espaçadas em 40 cm alguém joga para o alto uma agulha de 5 cm, qual a probabilidade de ela tocar a fissura ?
- 2) Em uma análise estereológica de tecido biológico, foram utilizadas duas sondas diferentes para estimar parâmetros geométricos.
  - a Em um primeiro experimento, aplicou-se uma malha de sondagem sobre uma área de 100 mm<sup>2</sup>. A estrutura analisada consistia em fibras lineares, que interceptaram a sonda em 250 pontos. Determine o valor do  $L_v$
  - b Na segunda situação, ao colocar o tecido na sonda viu-se algo como na figura abaixo

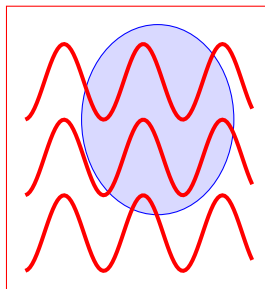


Figura 4.9: Ilustração de superfície de tecido em sonda

Calcule o valor do  $S_v$ , sabendo que cada curva vermelha mede 7mm.

#### 4.7.15 Resolução e Pauta de Correção

- 1 Vimos em sala que a probabilidade de tocar a fissura é dado por

$$P = 2 \cdot \frac{l}{\pi \cdot d}$$

Portanto

$$P = 2 \cdot \frac{5}{\pi \cdot 40} = \frac{1}{4 \cdot \pi}$$

- Evocar o caso geral da Agulha de Buffon [0,35];
- Substituir corretamente os valores [0,35];
- Calcular corretamente a probabilidade [0,3].

- 2 a

$$L_v = 2 \cdot \frac{Q}{A} = 2 \cdot \frac{250}{100} = 5$$

- Substituir corretamente os valores [0,65];

- Efetuar o cálculo corretamente [0,6].

b

$$S_v = 2 \cdot \frac{I}{L} = 2 \cdot \frac{6}{21} = \frac{12}{21}$$

- Substituir corretamente os valores [0,65];
- Efetuar o cálculo corretamente [0,6].

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho propomos abordagens didáticas inovadoras e contextualizadas para o ensino de probabilidade discreta e geométrica na Educação Básica, focando na habilidade EM13MAT511 da BNCC, que trata da investigação de diferentes tipos de espaços amostrais e suas implicações no cálculo de probabilidades. Buscamos superar a lacuna identificada na negligência do ensino de probabilidade em espaços amostrais não-discretos, conforme apontado por Furtado, através de uma Sequência Didática estruturada. Esta sequência iniciou com a probabilidade discreta, utilizando o material didático do Laboratório de Ensino da Matemática (LabMat) com jogos e experimentos lúdicos, e progrediu para a probabilidade geométrica, incorporando listas de exercícios, o software GeoGebra, e culminando no Problema da Agulha de Buffon e suas aplicações na Estereologia, promovendo uma atividade interdisciplinar.

Nossa Sequência Didática se distingue pela articulação de atividades investigativas e o uso estratégico de tecnologia e interdisciplinaridade, promovendo o raciocínio probabilístico e a autonomia intelectual dos estudantes. A integração da probabilidade geométrica, com destaque para o experimento da Agulha de Buffon, permitiu a conexão do conteúdo com as Ciências da Vida através da Estereologia. A utilização de sondas geométricas para estimar parâmetros em estruturas biológicas, como a densidade de capilares ou a área superficial, demonstra de forma clara a relevância prática e interdisciplinar destes conceitos matemáticos. As fórmulas estereológicas, que estimam densidades (como  $L_V$  ou  $S_V$ ) com base na razão entre o número de intersecções e o tamanho da sonda, revelam uma lógica de normalização análoga ao princípio do problema de Buffon, onde o fator 2 em ambas as fórmulas destaca a possibilidade de intersecção em “ambos os lados”. Essa abordagem não apenas cumpriu o objetivo de enriquecer o ensino de probabilidade, mas também demonstrou como conceitos aparentemente abstratos podem ser ferramentas vitais na análise de sistemas biológicos complexos, como ilustrado na Tabela 2.19.

Por fim, o produto educacional gerado — a Sequência Didática com material de apoio, jogos e atividades práticas com GeoGebra — constitui um recurso valioso para professores do Ensino Médio, alinhado às diretrizes da BNCC e dos PCN. O trabalho não apenas oferece um método processual para o ensino da habilidade EM13MAT511, mas também estimulou a reflexão crítica sobre o uso da matemática como ferramenta de análise e tomada de decisão em diversos contextos. Esperamos que esta trabalho contribua

para a valorização do estudo da probabilidade em espaços amostrais contínuos e inspire futuras pesquisas e práticas pedagógicas que explorem a riqueza da matemática em uma perspectiva interdisciplinar e engajadora.

Diante do potencial pedagógico observado e da relevância dos materiais desenvolvidos, pretende-se submeter os resultados desta pesquisa e o Produto Educacional para apresentação e discussão em eventos científicos e encontros de Educação Matemática.

# Bibliografia

- [1] José Mariano Amabis e Gilberto Rodrigues Martho. *Biologia moderna*. 1<sup>a</sup> ed. 3 vol. São Paulo: Moderna, 2016.
- [2] Piero Anversa, Giorgio Olivetti e Alden V. Loud. “Morphometric study of early postnatal development in the left and right ventricular myocardium of the rat”. Em: *Circulation Research* 46.4 (1980), pp. 503–512. DOI: 10.1161/01.RES.46.4.503.
- [3] Marcia Ascher. *Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1991.
- [4] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: Wiley Interscience, 1995.
- [5] Thomas Bayes. “An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances”. Em: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 53 (1763). Publicado postumamente por Richard Price, pp. 370–418. DOI: 10.1098/rstl.1763.0053.
- [6] David R. Bellhouse. “The Probability Background to Dice Games”. Em: *The History of Statistics* (1988). Disponível em coletâneas sobre história da estatística.
- [7] Jacob Bernoulli. *Ars Conjectandi*. Latim. Publicado postumamente por seu sobrinho Nicholas Bernoulli. Basileae: Thurnisius, 1713.
- [8] Brasil. *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 11 jun. 2025. Brasília, DF, 2018.
- [9] Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental, 1997.
- [10] Comte de Buffon Georges-Louis Leclerc. *Essai d'Arithmétique Morale*. Francês. Vol. 4. Supplément à l'Histoire Naturelle. Contém o famoso Problema da Agulha”. Paris: de l’Imprimerie Royale, 1777, pp. 46–148.
- [11] Gerolamo Cardano. *Liber de Ludo Aleae*. Vol. 1. Opera Omnia. Publicado postumamente; escrito c. 1564. Lugduni: Ioannis Antonii Huguetan & Marci Antonii Ravaud, 1663.
- [12] Michael P. Closs, ed. *Native American Mathematics*. Austin: University of Texas Press, 1986.

- [13] Comissão Permanente para os Vestibulares da Unicamp (Comvest). *Prova da 1ª Fase do Vestibular Unicamp 2024*. PDF disponível no site da Comvest. Aplicada em 29 de outubro de 2023. 2023.
- [14] John Dewey. *Experiência e Educação*. Trad. por Renata de Almeida Prada. Vol. 45. Biblioteca universitária. Série 2ª. Original publicado em 1938. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979.
- [15] Artálio Barbosa Furtado. “Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Médio: uma abordagem com o auxílio do software GeoGebra”. Dissertação (Mestrado em Matemática para professores). Porto: Universidade do Porto, 2019.
- [16] Galileo Galilei. “Sopra le scoperte dei dadi”. Em: *Le Opere di Galileo Galilei*. Ed. por Antonio Favaro. Vol. 8. Publicado postumamente nas obras completas. Firenze: Barbèra, 1898, pp. 591–594.
- [17] Filippo Ghiglieno et al. “Geradores de números aleatórios: da pseudoaleatoriedade à verdadeira aleatoriedade na era da segunda revolução quântica”. Em: *Revista Brasileira de Ensino de Física* 47 (2025), e20240469. DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0469. URL: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0469>.
- [18] Carlos Gomes, Iesus C. Diniz e Roberto Teodoro. *Matemática discreta: conjuntos, recorrência, combinatória e probabilidade: volume 1*. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.
- [19] Charles M. Grinstead e J. Laurie Snell. *Introduction to Probability*. 2nd. Versão digital revisada em 2006, disponível no CHANCE Project. American Mathematical Society, 2003.
- [20] Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter e Zsolt Lavicza. “Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of GeoGebra”. Em: *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* 28.2 (2009), pp. 135–146.
- [21] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Prova do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), edição 2011*. Disponível online via portal do INEP ou Diário Oficial da União. 2011.
- [22] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Prova do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), edição 2012*. Disponível online via portal do INEP ou Diário Oficial da União. 2012.
- [23] Barry R. James. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Segunda. Projeto Euclides. Traduzido por: [Nome do Tradutor, se conhecido]. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1996. 304 pp.

- [24] Tatiane Aline Rodrigues Kayser. “Probabilidade Geométrica: Contribuições para o Ensino de Matemática na Educação Básica”. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal do Rio Grande, 2023. Orientador: Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior. Diss. de mestr. Santo Antônio da Patrulha, RS: Universidade Federal do Rio Grande, 2023.
- [25] Andrey Nikolaevich Kolmogorov. *Foundations of the Theory of Probability*. Trad. por Nathan Morrison. 2nd English ed. With an added bibliography by A. T. Bharucha-Reid. New York: Chelsea Publishing Company, 1956.
- [26] Pierre-Simon Laplace. “Mémoire sur la probabilité des causes par les événements”. Francês. Em: *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences de Paris* 6 (1774), pp. 621–656.
- [27] Fábio Martins de Leonardo, ed. *Conexões: Matemática e suas Tecnologias: Manual do Professor*. 1<sup>a</sup> ed. 6 vol. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. São Paulo: Editora Moderna, 2020.
- [28] Athina Lorentziadi. “Calculation of  $\pi$  with a needle”. Em: *The Mathematical Gazette* 103.556 (2019), pp. 111–116. DOI: 10.1017/mag.2019.13.
- [29] E. B. Mallon e N. R. Franks. “Ants estimate area using Buffon’s needle”. Em: *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* 267.1445 (2000), pp. 765–770. DOI: 10.1098/rspb.2000.1069. URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspb.2000.1069>.
- [30] Carlos Alberto Mandarim-de-Lacerda. “Stereological tools in biomedical research”. Em: *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 75 (2003), pp. 469–486.
- [31] Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho. *Matemática Discreta*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2023.
- [32] Peter R. Mouton. *Unbiased Stereology: A Concise Guide*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2011. URL: <https://www.press.jhu.edu/books/title/11944/unbiased-stereology>.
- [33] Joseph Needham. *Science and Civilisation in China: Volume 3, Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*. Cambridge: Cambridge University Press, 1959.
- [34] Eder Pereira Neves, Florindo Contini Neto e Washington de Mendonça. “Uma Sequência de Ensino Probabilidade Geométrica com o uso do Geoplano”. Em: *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife, Brasil, 2011.
- [35] G. Olivetti et al. “Cardiomyopathy of the aging human heart. Myocyte loss and reactive cellular hypertrophy”. Em: *Circulation Research* 68 (1991), pp. 1560–1568.

- [36] C. K. Raju. “Probability in Ancient India”. Em: *Philosophy of Statistics*. Ed. por Prasanta S. Bandyopadhyay e Malcolm R. Forster. Vol. 7. Handbook of the Philosophy of Science. Amsterdam: North-Holland (Elsevier), 2011, pp. 1175–1196. ISBN: 9780444518620. DOI: 10.1016/B978-0-444-51862-0.50037-X.
- [37] J. F. Ramaley. “Buffon’s Noodle Problem”. Em: *The American Mathematical Monthly* 76.8 (1969), pp. 916–918. URL: <https://www.jstor.org/stable/2317945>.
- [38] RIO GRANDE DO NORTE. *Referencial Curricular do Ensino Médio Potiguar*. Subcoordenadoria de Ensino Médio (SUEM). Secretaria de Estado da Educação, da Cultura, do Esporte e do Lazer - SEEC. Natal, RN, 2021. URL: <https://educacao.rn.gov.br/>.
- [39] Antônio Roberto da Silva. “Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica”. Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), orientada pelo Dr. Jaques Silveira Lopes. Diss. de maestr. Natal, RN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), 2017, p. 62.
- [40] Francisco Heber da Silva. “Discutindo probabilidade geométrica no ensino básico”. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2013. Orientador: Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues. Coorientador: Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia. Diss. de maestr. Mossoró: Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2013.
- [41] Herbert Solomon. *Geometric Probability*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 28. Supported by the National Science Foundation. Philadelphia, PA: Society for Industrial e Applied Mathematics, 1978.
- [42] Robert David Fernandes de Sousa e Liliane dos Santos Gutierre. “Sequência Didática para o ensino de Matemática mobilizados a partir dos Critérios de Adequação Didática: um guia de elaboração”. Em: *Paradigma* 46.1 (2025). Acesso em: 10 fev. 2025, e2025023. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025023.id1613. URL: <https://revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma/article/view/1613>.
- [43] Gary Urton. *Signs of the Inka Khipu: Binary Coding in the Andean Knotted-String Records*. Austin: University of Texas Press, 2003.
- [44] Claudia Zaslavsky. *Africa Counts: Number and Pattern in African Cultures*. 3rd. Chicago: Lawrence Hill Books, 1999.

# A Conjuntos Admissíveis para Medida

No que segue apresentaremos as definições de  $\sigma$ -álgebra e o conceito a qualitativo de “medida”. Para tanto tomaremos como referência Bartle (1995) [4] e James (1996) [23].

**Definição A.1** ( $\sigma$ -álgebra). *Um conjunto  $\mathcal{D}$  de subconjuntos de um conjunto não-vazio  $\Omega$  é chamado  $\sigma$ -álgebra se*

(A.1)  $\Omega \in \mathcal{D}$ ;

(A.2) Se  $A \in \mathcal{D}$ , então  $\bar{A} \in \mathcal{D}$ ;

(A.3) A união contável de elementos de  $\mathcal{D}$  é ainda um elemento de  $\mathcal{D}$

**Comentário:**

Segue de (A.1) e A.2 que  $\emptyset \in \mathcal{D}$

**Definição A.2** (Medida). *Uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{D}$  admite uma medida  $\mu: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  se obedece os seguintes itens:*

(M.1)  $\mu(\emptyset) = 0$

(M.2)  $\mu(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{D}$

(M.3) Se  $\{A_i\}_{i \in J}$ , onde  $J \subset \mathbb{N}$  é uma coleção de conjuntos disjuntos dois a dois então

$$\mu\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \sum_{i \in J} \mu(A_i)$$

**Comentário**

Observe que (M.1) é desnecessário, pois, podemos calcular  $\mu(\emptyset) = 0$  por (M.3) Vejamos três exemplos

**Exemplo A.1.** *Probabilidade é uma medida.*

### Exemplo A.2. MEDIDA DE COMPRIMENTO

Nesse caso trazemos um exemplo de medida na reta. Dado um intervalo limitado  $I$ , considere

$$\mathcal{D} = \{\text{todos os subconjuntos de } I \text{ que são união contável de subintervalos de } I\}$$

É imediato que  $\mathcal{D}$  é uma  $\sigma$ -álgebra. Observe que todo subintervalo de  $I$  é um elemento de  $\mathcal{D}$ . Definimos  $\mu: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  como segue. Seja  $A \in \mathcal{D}$  um intervalo com extremos  $a$  e  $b$ , inferior e superior respectivamente, fazemos  $\mu(A) = b - a > 0$ .

Para  $A$  geral considere a seguinte representação

$$A = \bigcup_{x \in A} I_x$$

onde  $I_x$  é o menor subintervalo de  $A$  contendo  $x$ . Como  $\mathcal{D}$  é uma união contável de subintervalos de  $I$ , podemos tomar uma coleção contável  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset A$  da seguinte maneira

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{x_j} \quad (\text{União disjunta}) \quad (\text{A.1})$$

A representação (A.1) é única, esse é um detalhe simples, porém enfadonho que optamos por não esmiudar. Portanto está bem definido

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{x_j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_{x_j}) \quad (\text{A.2})$$

Onde o somatório em A.2 é convergente. Pois é uma soma de termos positivos limitada pelo comprimento do intervalo  $I$ .

### Comentário

Em particular  $\mu(\emptyset) = 0$  e, se  $A$  é unitário,  $\mu(A) = 0$ . Para o conjunto  $A$  um intervalo limitado, do exemplo, com extremos  $a$  e  $b$  inferior e superior respectivamente, temos que

$$\mu(A) = \mu((a, b)) = \mu((a, b]) = \mu([a, b)) = \mu([a, b]) = b - a$$

### Exemplo A.3. MEDIDA DE ÁREA

Trazemos um exemplo de medida no plano. Nesse caso consideremos uma região  $\mathcal{R}$  limitada do plano delimitada por segmentos de retas e tomamos

$$\mathcal{D} = \{\text{todas as regiões de } \mathcal{R} \text{ cuja fronteira é a união contável de} \\ \text{a segmentos de reta}\}$$

*É facilmente aceitável que  $\mathcal{D}$  é uma  $\sigma$ -álgebra. A escolha de  $\mathcal{R}$  e de  $\mathcal{D}$  aqui é motivada pela possibilidade de calcularmos as áreas dos elementos de  $\mathcal{D}$  usando as ferramentas da Educação Básica (área de polígono), por essa razão e por uma questão de brevidade, não traremos a definição de área como fizemos para o comprimento no exemplo anterior. Definimos  $\mu: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo a medida da área, sabemos que seu valor é sempre não negativa, assim satisfazendo (M.2), em particular, se  $\mathcal{R}$  é o conjunto vazio, ou um ponto ou um segmento, temos  $\mu(\mathcal{R}) = 0$ . Podemos perceber a veracidade de (M.3) notando que para calcular a área da união de regiões disjuntas podemos simplesmente calcular a área de cada região separadamente e somar seus resultados.*

### **Comentários**

- Os segmentos que delimitam as regiões elementos de  $\mathcal{D}$  podem ou não compor tais regiões, não influenciando no valor da área, assim como no caso da reta os extremos dos intervalos não influenciam na medida de seus comprimentos;
- Outras regiões podem ser adicionadas a essa discussão considerando o uso do Cálculo Diferencial;
- Observe nos exemplos apresentados a importância de tomar  $\mathcal{D}$  adequado satisfazendo as condições de  $\sigma$ -álgebra;
- O análogo ao que fizemos no exemplo anterior para área, no caso Espaço Euclidiano, podemos definir uma medida de volume.

## B O Problema de Laplace

Neste Apêndice trazemos o problema de Laplace como uma ampliação do Problema da Agulha de Buffon. Para esta apresentação tomamos como referência Solomon, 1978 [41]. Considere o seguinte problema:

*Um plano é coberto por retângulos todos congruentes. Uma agulha de espessura desprezível e comprimento  $l$ , onde  $l$  é menor do que qualquer um dos lados do retângulo, é lançada ao acaso. Qual a probabilidade da agulha cair inteiramente dentro de um dos retângulos, ou seja, qual a probabilidade da agulha não cruzar um lado do retângulo?*

### Solução

Seja  $a$  a largura do retângulo e  $b$  a sua altura, considere o comprimento da agulha  $l$  tal que  $l < a$  e  $l < b$ . Considere também  $x$  e  $y$  as coordenadas do centro da agulha e  $\theta$  o ângulo formado entre a agulha e o eixo horizontal. Considerando  $x$ ,  $y$  e  $\theta$  três variáveis, onde  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  e  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Veja a figura.

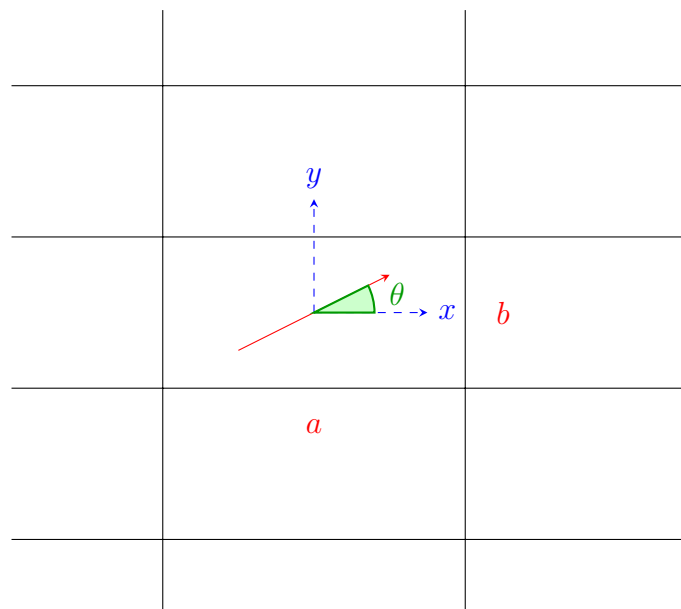


Figura B.1: Ilustração - Problema de Laplace.

Portanto o Espaço Amostral é dado pela seguinte medida

$$\mu(\Omega) = a \cdot b \cdot \pi$$

O caso aqui desejado é que a agulha fique inteiramente dentro do retângulo. Como  $\theta$  varia de  $-\frac{\pi}{2}$  a  $\frac{\pi}{2}$  temos dois casos a considerar, são eles, o seno positivo e o seno negativo.

**Caso I**

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Para esse caso fazemos, no eixo  $x$ , a seguinte análise:

$$\cos \theta = \frac{x}{\frac{l}{2}}$$

Isolando o  $x$ , temos

$$x = \frac{l}{2} \cdot \cos \theta$$

Observamos o seguinte

$$-\frac{l}{2} \cdot \cos \theta < 0 \quad \text{e} \quad \frac{l}{2} \cdot \cos \theta < a$$

ou seja,

$$-\frac{l}{2} \cdot \cos \theta < a - \frac{l}{2} \cdot \cos \theta$$

Donde

$$0 < a - l \cdot \cos \theta$$

Para o eixo  $y$  fica

$$\sin \theta = \frac{y}{\frac{l}{2}}$$

Isolando  $y$ , temos:

$$y = \frac{l}{2} \cdot \sin \theta$$

Notamos o seguinte

$$-\frac{l}{2} \cdot \sin \theta < 0 \quad \text{e} \quad \frac{l}{2} \cdot \sin \theta < b$$

Ou seja:

$$-\frac{l}{2} \cdot \sin \theta < b - \frac{l}{2} \cdot \sin \theta$$

Donde:

$$0 < b - l \cdot \sin \theta$$

Portanto a medida do Evento é dada pela seguinte área:

$$(a - l \cdot \cos \theta)(b - l \cdot \sin \theta) = a \cdot b - a \cdot l \cdot \sin \theta - b \cdot l \cdot \cos \theta + l^2 \cdot \sin \theta \cos \theta$$

**Caso II**

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$$

Para esse caso temos

$$(a - l \cdot \cos \theta)(b + l \cdot \sin \theta) = a \cdot b + a \cdot l \cdot \sin \theta - b \cdot l \cdot \cos \theta - l^2 \cdot \sin \theta \cos \theta$$

Podemos montar uma função que represente os dois casos

$$f(\theta) = a \cdot b - a \cdot l \cdot |\sin \theta| - b \cdot l \cdot \cos \theta + |l^2 \cdot \sin \theta \cos \theta|$$

De maneira equivalente, reescrevendo o último termo da soma

$$f(\theta) = a \cdot b - a \cdot l \cdot |\sin \theta| - b \cdot l \cdot \cos \theta + \frac{l^2}{2} \cdot |\sin 2\theta|$$

Portanto a medida do Evento pode ser calculada da seguinte forma

$$\mu(A) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta = \pi ab - 2al - 2bl + l^2$$

Com tal argumento a probabilidade requerida pode ser expressa da seguinte maneira:

$$P = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi ab - 2al - 2bl + l^2}{ab\pi} = 1 - \frac{2l(a+b) - l^2}{ab\pi}$$

### **Comentário:**

Evidentemente, a probabilidade de cruzar algum lado do retângulo será

$$P = \frac{2l(a+b) - l^2}{ab\pi}$$

# C A Lei dos Grandes Números

Neste Apêndice trataremos sobre a Lei dos Grandes Números (LGN) abordando duas aplicações distintas, a saber: o Uso da LGN em sala de aula com apoio de Inteligência Artificial (IA) para obter uma aproximação de  $\pi$ .

## C.1 Descrição da Lei dos Grandes Números

A LGN afirma que, após um grande número de repetições de determinado Evento, a probabilidade de sucesso irá se aproximar ou até mesmo igualar a probabilidade teórica calculada, para uma demonstração deste resultado indicamos James, 1996, Cap.5 [23].

### C.1.1 Aproximação de $\pi$

Uma ilustração da LGN por meio da Agulha de Buffon, segundo Lorentziadi 2019 [28] pode ser feita da seguinte maneira, considere

$$P_n(A) = \frac{i(n)}{n}$$

Em que  $i(n)$  representa a quantidade de vezes que a agulha intersecta a fissura e  $n$  é a quantidade de lançamentos e  $P_n(A)$  é a probabilidade de do Evento  $A$  ter sucesso na  $n$ -ésima repetição. Pela LGN

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i(n)}{n}$$

Pelo Resultado do Problema da Agulha de Buffon (confira Seção 2.2)

$$P(A) = 2 \cdot \frac{l}{\pi d}$$

Pela transitividade da igualdade podemos escrever

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i(n)}{n} = 2 \cdot \frac{l}{\pi d}$$

Portanto, para um  $n$  suficientemente grande, temos

$$\frac{i(n)}{n} \simeq 2 \cdot \frac{l}{\pi d}$$

Conseqüentemente

$$\pi \simeq 2 \cdot \frac{n \cdot l}{i(n) \cdot d}$$

Particularmente, se  $d = 2 \cdot l$  temos

$$\pi \simeq \frac{n}{i(n)}$$

Abaixo trazemos uma tabela da aproximação de  $\pi$ , nesse exemplo o comprimento da agulha é 0,08 unidade e a distância entre as fissuras, chamado em nossa dissertação de  $d$ , mede 0,1 unidade.

	Ciclos de 3 000 iterações		Ciclos de 10 000 iterações	
	Probabilidade estimada $p$ (%)	$\pi$	Probabilidade estimada $p$ (%)	$\pi$
1º ciclo	51.8	3.0888	50.12	3.1923
2º ciclo	50.6	3.1621	51.23	3.1232
3º ciclo	50.067	3.1957	51.81	3.0882
4º ciclo	49.967	3.2021	50.45	3.1715
5º ciclo	50.967	3.1393	51.11	3.1305
6º ciclo	50.233	3.1851	50.39	3.1752
7º ciclo	50.9	3.1434	50.65	3.1589
8º ciclo	50.133	3.1915	51.22	3.1238
9º ciclo	49.867	3.2086	51.43	3.1110
10º ciclo	52.133	3.0691	50.38	3.1759
<i>Média dos 10 ciclos</i>	50.667	3.1586	50.879	3.1451

Tabela C.1: Tabela de aproximação de  $\pi$

### C.1.2 O Uso da LGN em sala de aula com apoio de Inteligência Artificial (IA)

A quinta Competência Geral para a Educação Básica trazida pela BNCC [8] determina a compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares). À luz desse contexto apresentamos duas propostas do uso Inteligência Artificial (IA) para ilustrar a LGN em sala de aula.

Contudo é importante ter em mente que computadores comuns não geram números verdadeiramente aleatórios porque dependem de processos algorítmicos previsíveis e não incorporam fontes físicas de aleatoriedade em seu projeto básico, conforme o artigo [17]. Para obter aleatoriedade verdadeira, é necessário usar hardware especializado, como Geradores de Números Verdadeiramente Aleatórios baseados em fenômenos físicos ou Geradores Quânticos de Números Aleatórios baseados em princípios quânticos.

### Uma aproximação de $\pi$

Iremos nesse exemplo utilizar a IA para observar o cálculo da aproximação de  $\pi$  acima desenvolvido - C.1.1. Ora, se  $d = 2 \cdot l$  temos

$$\pi \simeq \frac{n}{i(n)}$$

Pode-se fazer em sala de aula uma aproximação de  $\pi$  usando IA da seguinte maneira:

**Prompt:**<sup>1</sup> Desejo fazer uma simulação do problema da Agulha de Buffon, elabore uma tabela para 1 000 000 jogadas, em quantas a agulha cruza a linha e em quantas ela não cruza sabendo que o espaço entre as linhas é o dobro do tamanho da agulha? Apresente apenas a tabela

---

<sup>1</sup>Chamamos de Prompt o comando solicitado à IA

Claro! Segue a tabela com os resultados da simulação do problema da Agulha de Buffon para 1.000.000 de jogadas, considerando que o espaço entre as linhas é o dobro do tamanho da agulha (ou seja,  $d = 2$ ):

Total de Jogadas	Agulha Cruza a Linha	Agulha Não Cruza a Linha
1.000.000	318.310	681.690

Explicação breve:

Nesta configuração ( $d = 2$ ), a probabilidade teórica de a agulha cruzar uma linha é  $p = \frac{1}{\pi} \approx 0.31831$ . Para 1.000.000 de jogadas, o valor esperado de cruzamentos é aproximadamente 318.310, o que coincide com o resultado simulado.

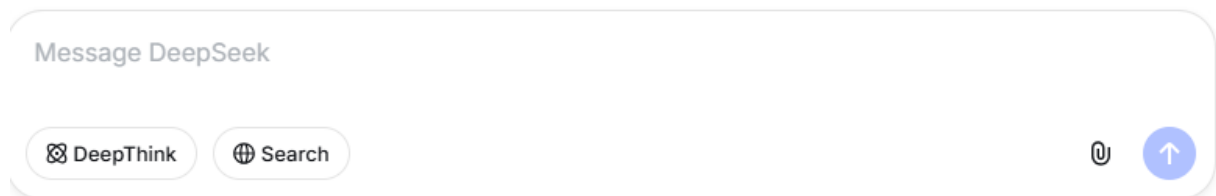


Figura C.1: Uma Aproximação de  $\pi$ .

Aqui utilizamos a *DeepSeek*, acima está o comando solicitado (prompt) e abaixo a resposta dada.

### Lançamento de dados

Aqui desejamos calcular a probabilidade para um D6 ser lançado e sair um número par, sabemos que a resposta é 50%, pedimos para que a IA dê dar uma lista com o resultado de dez lançamentos e então comparamos com a (etapa 1), na sequência pedimos a IA uma simulação de cem mil lançamentos, ela vai gerar uma tabela, pedimos que ela calcule a porcentagem de vezes que deu número par veremos o resultado aproximado (etapa 2). Vejamos abaixo uma simulação.

**Prompt:** Monte uma lista simulando o lançamento de um D6 dez vezes.

Aqui está a lista simulando o lançamento de um dado de 6 faces (DG) dez vezes:

- Lançamentos:

4, 1, 6, 2, 3, 5, 6, 2, 4, 1

Quer que eu faça outra lista aleatória de verdade (usando sorteio automático em Python) ou prefere só uma simulação manual como essa?

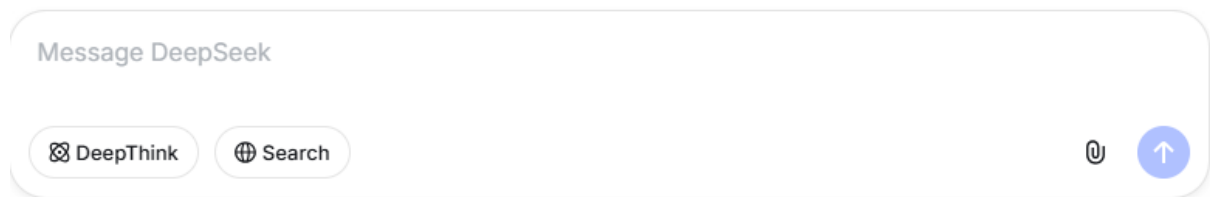


Figura C.2: Uso de IA em sala de aula - etapa 1.

Note que a quantidade de números pares foi de 60%

**Prompt:** Legal, agora monte uma tabela com o resultado de cem mil lançamentos do mesmo dado, apresente a tabela aqui na própria conversa.

Aqui está a tabela com o resultado dos 100.000 lançamentos do dado de 6 faces (DG):

Face	Frequência	Proporção	%
1	16 700	0.16708	16.7
2	16 732	0.16722	16.7
3	16 682	0.16682	16.7
4	16 543	0.16543	16.5
5	16 656	0.16656	16.7
6	16 679	0.16679	16.7

Observação: Cada face ficou próxima de  $1/6 \approx 16.67\%$ , como esperado para um dado justo.

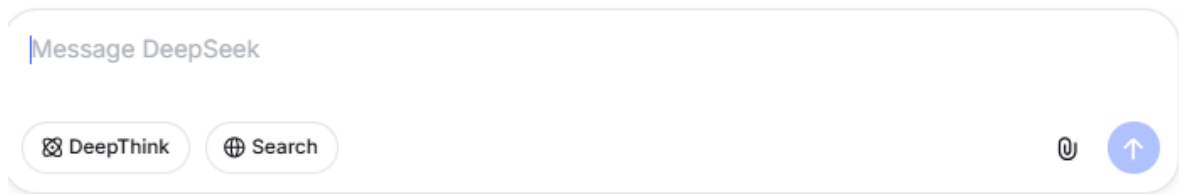


Figura C.3: Uso de IA em sala de aula - etapa 2.

Agora é possível ver facilmente que os resultados se aproximam da probabilidade teórica, isto é, 50%.